

П. В. БРОМБЕРГ

---

ТЕОРИЯ  
ИНЕРЦИАЛЬНЫХ  
СИСТЕМ  
НАВИГАЦИИ



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1979

**Теория инерциальных систем навигации.** Бромберг П. В.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979.— 296 с.

Инерциальные системы разбиваются на три больших класса: системы полуаналитического типа, аналитического типа и бесплатформенные системы. Вводится однопараметрическое семейство подобных эллипсоидов вращения ( $h$ -эллипсоидов,  $h$  — высота полета), которые в первом приближении являются эквипотенциальными поверхностями поля силы тяжести. Центр масс движется по поверхности  $h$ -эллипсоида (горизонтальные полеты самолетов и движение морских кораблей).

Излагается теория чувствительных элементов — гиостабилизированных платформ, акселерометров и гироскопов абсолютной угловой скорости. Приводятся алгоритмы инерциальных систем с учетом несферичности Земли. Составляются уравнения ошибок для линейного анализа погрешности систем всех классов. Процесс формирования идеальных функциональных схем инерциальных систем доводится до состояния алгоритма.

Бурное развитие современных транспортных средств доставки полезных грузов к заданной цели по воде, воздуху и в космическом пространстве привело к необходимости коренного усовершенствования средств навигации и управления движущимися объектами.

Особенно интенсивно в настоящее время ведутся работы по созданию и развитию инерциальных систем навигации, в которых местоположение движущегося объекта определяется интегрированием измеряемых на его борту ускорений. Для многочисленных проектирующих организаций и высших технических учебных заведений, готовящих для этих организаций специалистов, появилась необходимость в монографиях и учебных пособиях, в которых систематически и на современном уровне излагалась бы теория инерциальной системы навигации. В предлагаемой книге сделана попытка дать систематическое изложение этой теории.

При изложении материала автор использует исторически сложившуюся классификацию инерциальных систем, разбивая их на четыре больших класса: инерциальные системы полуаналитического типа, аналитического типа, геометрического типа и бесплатформенные инерциальные системы; в каждом классе еще рассматриваются различные подклассы возможных вариантов функциональных схем. Из-за ограниченного объема книги системы геометрического типа в книге не рассматриваются.

По мнению автора, такое изложение позволяет легче усваивать материал и проще ориентироваться в многочисленных схемах инерциальных систем. При решении конкретных задач различного типа используется математический аппарат, который, по мнению автора, наиболее приспособлен для их решения, упрощает промежуточные выкладки и позволяет получать конечные результаты в простом и обозримом виде. Так, например, задачи, связанные с преобразованием координатных систем, решаются с привлечением методов матричного исчисления, а решение задач, связанных с определением взаимного расположения линий визирования, — с использованием метода единичной сферы, т. е. метода сферической тригонометрии, получившего широкое распространение при решении аналогичных задач в курсах сферической астрономии. При этом во всех случаях от читателя не требуется

специальной математической подготовки, выходящей за пределы программ высших технических учебных заведений.

В книге большое внимание уделяется вопросам аналитического представления гравитационного поля и поля силы тяжести Земли; рассматриваются возможные системы координат, производится вывод формул счисления (т. е. выражений, связывающих производные координат местоположения объекта с составляющими вектора скорости).

В книге большое внимание уделяется разработке алгоритмов инерциальных систем различных классов с учетом несферичности Земли, причем делается попытка довести процесс формирования идеальных функциональных схем инерциальных систем до состояния алгоритма.

В книге рассматриваются принципы построения однокомпонентного акселерометра, интегрирующего устройства, гироскопического измерителя угловой скорости, стабилизированной платформы с индикаторно-силовой стабилизацией.

Заканчивается книга выводом уравнений ошибок для всех классов и подклассов инерциальных систем, позволяющих проводить линейный анализ выходных ошибок инерциальных систем в зависимости от основных инструментальных ошибок чувствительных элементов и ошибок начальной выставки. Входные ошибки, т. е. инструментальные ошибки чувствительных элементов, при исследовании уравнений ошибок инерциальных систем рассматриваются или как постоянные или случайные величины, или определенные или случайные функции времени.

При рецензировании и редактировании рукописи профессор А. Д. Александров, профессор В. А. Боднер, профессор Н. Т. Кузовков, В. Л. Леонидов, Т. В. Сапожникова, Л. И. Клигер и Б. В. Выжелевский сделали ряд ценных замечаний, которые были учтены автором при доработке рукописи. Большую помощь автору при подготовке рукописи к печати оказала М. П. Ножова. Всем им автор выражает свою искреннюю благодарность.

## ФИГУРА ЗЕМЛИ, ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ЗЕМЛИ, КООРДИНАТЫ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ

### § 1.1. Фигуры Земли и координаты точек на ее поверхности

**1.1.1. Геоид.** Под *фигурой Земли* понимают поверхность воды океана, которая заполняет узкие каналы, прорытые на суше. В открытом океане она совпадает с поверхностью воды, невозмущенной волнами от приливов и ветра. В 1873 г. было предложено такую поверхность называть *геоидом* [30].

В каждой точке геоида нормаль к его поверхности совпадает с направлением силы тяжести, т. е. равнодействующей сил тяготения и центробежной силы от вращения Земли.

Поверхность геоида является уровенной поверхностью силы тяжести. Геоид имеет сложную и неправильную форму, обусловленную распределением масс в земной коре и на поверхности Земли.

Такую поверхность трудно использовать в практических приложениях. Поэтому подбирают поверхность достаточно простую, которая настолько близко подходит к геоиду, что ее можно положить в основу большинства расчетов. Такой поверхностью является сфероид — эллипсоид вращения, имеющий небольшое сжатие вдоль оси симметрии.

**1.1.2. Земной сфероид.** На основе многочисленных градусных измерений, произведенных в различных областях Земли, неоднократно определялись элементы земного сфероида: длина его большой полуоси  $a$  и малой полуоси  $b$ , являющейся осью вращения Земли.

В СССР приняты элементы референц-эллипсоида Ф. Н. Красовского.

Его элементы приведены в табл. 1.

Если выразить  $e^2$  и  $e'^2$  через  $\alpha$  и во втором случае полученное выражение разложить в ряд по степеням  $\alpha$  \*), то получим

\*) Мы часто будем пользоваться разложением в биномиальный ряд Ньютона  $(1 + \chi)^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon\chi + \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)}{2!}\chi^2 + \dots$ , который при  $|\chi| < 1$  сходится для любого вещественного  $\varepsilon$ .

Таблица № 1

Параметр	Обозначения	Численно значение
Большая полуось	$a$	6 378 245 м
Малая полуось	$b$	6 356 856 м
Сжатие	$\alpha = \frac{a-b}{a}$	0,003352 *)
Квадрат первого эксцентриситета	$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$	0,006692
Квадрат второго эксцентриситета	$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$	0,006738
*) Можно принять $\alpha$ равным $\frac{1}{298,3}$ .		

соотношения

$$\left. \begin{aligned} e^2 &= \alpha(2 - \alpha) = 2\alpha - \alpha^2, \\ e'^2 &= \frac{\alpha(2 - \alpha)}{(1 - \alpha)^2} = 2\alpha + 3\alpha^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Во многих случаях мы будем вести расчеты, пренебрегая величинами второго порядка малости относительно  $\alpha$ . С указанной точностью можно считать

$$e^2 \approx e'^2 \approx 2\alpha. \quad (1.2)$$

Получили распространение также элементы Бесселя референц-эллипсоида ( $a = 6\,366\,397$  м,  $b = 6\,356\,079$  м,  $\alpha = 1 : 299,15$ )

и элементы Хайфорда ( $a = 6\,378\,388$  м,  $b = 6\,356\,909$  м,  $\alpha = 1 : 297,0$ ). Эллипсоид с элементами Хайфорда был принят на Международной конференции в Париже в 1911 г.

**1.1.3. Координаты точек на земном сфероиде.** Точки  $P$  и  $P'$  пересечения малой оси со сфероидом называются *полюсами* (рис. 1.1) Земли: тот из них, со стороны которого вращение Земли происходит против часовой стрелки, называется *Северным*, противоположный — *Южным*.

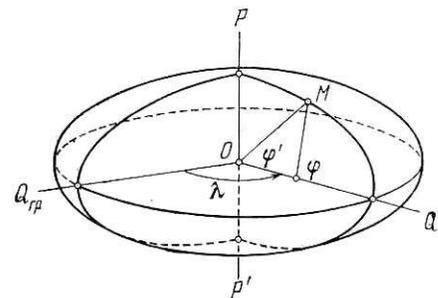


Рис. 1.1. Координаты (долгота и широта) точек на земном сфероиде.

Плоскость, проходящая через центр и перпендикулярная малой оси, пересекает сфероид по *экватору*. Экватор представляет собой круг радиуса  $a$ . Плоскости, параллельные плоскости эк-

ватора, пересекают сфероид по малым кругам, называемым *параллелями*. Любая плоскость, проходящая через малую ось, пересекает сфероид по эллипсу с большой полуосью  $a$  и малой полуосью  $b$ . Полуэллипсы, соединяющие полюсы, являются *меридианами*. Меридиан, проходящий через некоторую точку гринвичской обсерватории, называется *главным* или *нулевым меридианом*. Положение меридиана относительно главного определяется *долготой*  $\lambda$ . Долгота определяется дугой экватора  $Q_{гр}Q$ . Долгота изменяется от 0 до  $180^\circ$  в западном и восточном направлениях. Иногда удобно измерять долготу в восточном направлении от 0 до  $360^\circ$ . Положение точки на меридиане определяется *широтой*. Различают несколько широт. *Геоцентрическая широта*  $\phi'$  определяется углом, который образует радиус-вектор  $OM$  с плоскостью земного экватора. *Географическая*, или *геодезическая*, *широта*  $\phi$  определяется углом, который образует нормаль к поверхности сфероида с плоскостью земного экватора. И наконец, *астрономическая широта* определяется углом между отвесной линией и плоскостью земного экватора. Очевидно, непосредственно может быть измерена только астрономическая широта. Однако практически с точностью до составляющей отклонения отвеса она совпадает с геодезической широтой. Все широты изменяются от  $-90^\circ$  до  $90^\circ$ , широта считается положительной для точек, лежащих к северу от экватора. Линии  $\phi = \text{const}$  (или  $\phi' = \text{const}$ ), являющиеся параллелями, и  $\lambda = \text{const}$ , являющиеся меридианами, образуют ортогональную координатную сетку на поверхности земного сфероида. Полюсы  $P$  и  $P'$  являются особыми точками координатной сетки. В полюсах теряет смысл понятие долготы, так как в них пересекаются все меридианы.

**1.1.4. Семейство  $h$ -эллипсоидов вращения.** Рассмотрим семейство концентрических шаров, центры которых совместим с центром Земли. Обозначим радиусы этих шаров через  $a + h$ , где  $a$  — большая полуось земного сфероида,  $h$  — переменный параметр, который определяет возвышения точек шара \*) радиуса  $a + h$  над поверхностью шара радиуса  $a$ . Выберем правую прямоугольную систему координат  $\xi\eta\zeta$  с началом в центре Земли, ось  $\zeta$  направим вдоль оси вращения Земли к северному полюсу, ориентировку осей  $\xi, \eta$  в плоскости экватора оставим пока неопределенной. Подвергнем пространство точечному преобразованию — равномерному сжатию вдоль оси  $\zeta$ . При таком преобразовании точки  $M'$  ( $\xi', \eta', \zeta'$ ) переходят в точки  $M$  ( $\xi, \eta, \zeta$ ), причем  $\xi = \xi', \eta = \eta'$  и  $\zeta = k_{сж}\zeta'$ . Постоянный коэффициент сжатия  $k_{сж}$  примем равным  $b : a$ , где  $b$  — малая полуось земного сфероида.

\*) В дальнейшем, если не будет сделано специальной оговорки, все системы координат будут считаться прямоугольными с правой ориентировкой координатных осей.

Основные свойства рассматриваемого преобразования состоят в следующем:

1. Точки, лежащие на прямых, переходят в точки, лежащие на прямых.

2. Точки, лежащие на параллельных прямых, переходят в точки, лежащие на параллельных прямых.

3. Касательная к кривой в точке  $M'$  переходит в касательную к кривой в точке  $M$ .

4. Точка  $M'$ , делящая прямолинейный отрезок в определенном отношении, переходит в точку  $M$ , делящую отрезок в том же соотношении.

Эти свойства легко установить, если иметь в виду, что уравнения прямых до преобразования и после преобразования можно записать соответственно в форме

$$\xi' = \xi_0' + \gamma_1 s, \quad \eta' = \eta_0' + \gamma_2 s, \quad \zeta' = \zeta_0' + \gamma_3 s, \quad (1.3)$$

$$\xi = \xi_0 + \gamma_1 s, \quad \eta = \eta_0 + \gamma_2 s, \quad \zeta = k_{сж} \xi_0' + k_{сж} \gamma_3 s, \quad (1.4)$$

где  $\xi_0'$ ,  $\eta_0'$ ,  $\zeta_0'$  — координаты некоторой начальной точки,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  — направляющие косинусы,  $s$  — длина прямой от начальной точки до текущей точки.

При равномерном сжатии с коэффициентом  $k_{сж} = \frac{b}{a}$  шар радиуса  $a + h$ , уравнение которого имеет вид

$$\frac{\xi'^2}{(a+h)^2} + \frac{\eta'^2}{(a+h)^2} + \frac{\zeta'^2}{(a+h)^2} = 1,$$

переходит в эллипсоид вращения, уравнение которого имеет вид

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{(a+h)^2} + \frac{\zeta^2}{\frac{b^2}{a^2} (a+h)^2} = 1.$$

Большая полуось эллипсоида вращения  $a_h = a + h$ , а малая полуось  $b_h = \frac{b}{a} (a + h)$ . Очевидно, при  $h = 0$  получаем эллипсоид вращения, совпадающий с земным сфероидом. Данные  $h$ -эллипсоиды имеют одинаковый коэффициент сжатия]

$$\alpha_h = \frac{a_h - b_h}{a_h} = \frac{(a+h) - \frac{b}{a}(a+h)}{a+h} = 1 - \frac{b}{a} = \alpha \quad (1.5)$$

и одинаковый относительный эксцентриситет

$$e_h^2 = \frac{a_h^2 - b_h^2}{a_h^2} = e^2. \quad (1.6)$$

Такие эллипсоиды называются *подобными*. Ось  $\xi$  является осью симметрии всех  $h$ -эллипсоидов. В сечениях плоскостями, про-

ходящими через ось  $\xi$ , получаются эллипсы с большой полуосью  $a_h = a + h$  и малой полуосью  $b_h = \frac{b}{a} (a + h)$ . Будем называть их *меридиональными эллипсами*. На рис. 1.2 представлено меридиональное сечение шара и соответствующего эллипсоида координатной плоскостью  $\eta\zeta$ . Условимся точки, лежащие до преобразования на луче  $OM'$ , а после преобразования на луче  $OM^*$ ) (см. рис. 1.2), называть *соответственными*. В плоскости  $\eta\zeta$  касательные, проведенные к кругам в соответственных точках, параллельны друг другу, так как они перпендикулярны к одному и тому же радиусу. Из свойств 2 и 3 рассматриваемого преобразования следует, что касательные меридиональных эллипсов в соответственных точках параллельны. На рис. 1.2  $AM'$  — касательная к кругу, а  $AM$  — касательная к меридиональному эллипсу, точка  $A$  — инвариантная точка преобразования. Очевидно, нормали  $h$ -эллипсоидов

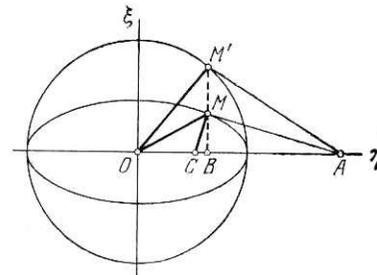


Рис. 1.2. Меридиональные сечения  $h$ -эллипсоида и производящего шара.

в соответственных точках также будут параллельны. На рис. 1.2  $MC$  — нормаль к меридиональному эллипсу в точке  $M$ , а следовательно, и к эллипсоиду вращения; очевидно,  $MC \perp AM$ . Таким образом, соответственные точки можно характеризовать величиной одного из углов:  $\angle AOM' = \varphi''$ ,  $\angle AOM = \varphi'$  и  $\angle ACM = \varphi$ . Для соответствующей точки земного сфероида угол  $\varphi''$  называется *приведенной широтой* \*\*),  $\varphi'$  — геоцентрической широтой и  $\varphi$  — географической или геодезической широтой.

Соответственные точки  $h$ -эллипсоидов имеют одинаковую широту. Установим связь между широтами  $\varphi''$ ,  $\varphi'$  и  $\varphi$ . При равномерном сжатии вдоль оси  $\xi$  все отрезки, параллельные этой оси, уменьшаются по длине в  $k_{сж} = b : a$  раз, длина отрезков, перпендикулярных оси сжатия, не изменяется.

Так как  $OM' = a + h$ , то из рис. 1.2 следует, что

$$OB = (a + h) \cos \varphi'', \quad BM = \frac{b}{a} (a + h) \sin \varphi'' \quad (1.7)$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi''. \quad (1.8)$$

\*) Точка  $M'$  после преобразования переходит в точку  $M$ .

\*\*\*) Приведенная широта  $\varphi''$ , так же как  $\varphi'$  и  $\varphi$ , изменяется в пределах  $-90^\circ \leq \varphi'' \leq 90^\circ$ ,  $\varphi'' > 0$  в северном полушарии.

Далее имеем

$$AM' = (a + h) \operatorname{tg} \varphi'', \quad AB = AM' \sin \varphi'', \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{AB}{BM}. \quad (1.9)$$

Из формул (1.7) и (1.9) устанавливаем равенство

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi''. \quad (1.10)$$

Из (1.8) и (1.10) получаем, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg} \varphi'. \quad (1.10a)$$

Из формул (1.8) и (1.10) нетрудно получить следующие формулы перехода:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi'' &= \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin \varphi'}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi'}}, \\ \cos \varphi'' &= \frac{\cos \varphi'}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi'}} \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi'' &= \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \\ \cos \varphi'' &= \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Нам понадобятся еще формулы

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi' &= \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - (2e^2 - e^4) \sin^2 \varphi}}, \\ \sin \varphi' &= \frac{(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - (2e^2 - e^4) \sin^2 \varphi}}, \\ \cos \varphi &= \frac{\cos \varphi'}{1 + (2e'^2 + e'^4) \sin^2 \varphi'}, \\ \sin \varphi &= \frac{(1 + e^2) \sin \varphi'}{1 + (2e'^2 + e'^4) \sin^2 \varphi'}. \end{aligned} \right\} \quad (1.12a)$$

Разности широт  $\varphi'' - \varphi'$  и  $\varphi - \varphi'$  являются малыми величинами порядка  $\alpha$ . Пользуясь формулами (1.8) и (1.10), можно получить выражения

$$\operatorname{tg}(\varphi'' - \varphi') = \frac{\left(\frac{a}{b} - 1\right) \operatorname{tg} \varphi'}{1 + \frac{a}{b} \operatorname{tg}^2 \varphi'} = \frac{\left(\frac{a}{b} - 1\right) \sin \varphi' \cos \varphi'}{1 + \left(\frac{a}{b} - 1\right) \sin^2 \varphi'} \quad (1.13)$$

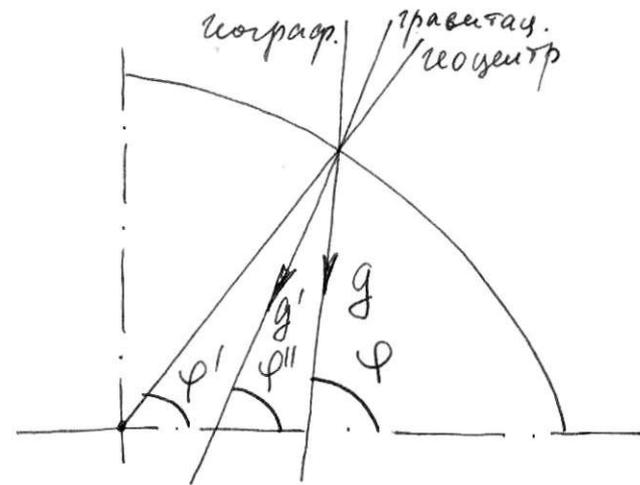


рис 1.5 стр 23

—  $\varphi'_{\max} = 5,7'$ ; достигаются эти максимумы на широте  $\varphi = 45^\circ$ . Из формул (1.15) и (1.16) следует, что прямая, проведенная из точки  $M$  (см. рис. 1.2) параллельно радиусу  $OM'$ , делит угол между радиусом-вектором  $OM$  точки  $M$  и нормалью  $CM$   $h$ -эллипсоида пополам с точностью до величины порядка  $\alpha^2$ . Заметим, что в градусной мере  $\alpha^2$  примерно равен  $2,3''$ .

В дальнейшем нам понадобятся уравнения  $h$ -эллипсоида в координатах  $r, \varphi'$ , где  $r = OM$  есть радиус-вектор точки  $M$ . Из прямоугольного треугольника  $BOM$ , первой формулы (1.7) и второй формулы (1.11) легко получить выражение

$$r = \frac{a + h}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi'}}, \quad (1.17)$$

которое в плоскости чертежа рис. 1.2 является уравнением меридионального эллипса, а в пространстве — уравнением  $h$ -эллипсоида вращения.

С точностью до величин порядка  $\alpha^2$  уравнение (1.17) можно представить в виде

$$r = (a + h) (1 - \alpha \sin^2 \varphi'). \quad (1.18)$$

Это выражение получается разложением (1.17) в биномиальный ряд по степеням  $e' \sin \varphi'$  с учетом формулы (1.2).

## §1.2. Поле силы тяжести Земли и уровенные поверхности

### 1.2.1. Гравитационное поле Земли.

Всякое материальное тело создает в окружающем пространстве гравитационное поле. Вектор напряженности этого поля или удельная сила, с которой действует поле на материальную точку единичной массы, находя-

и

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) \operatorname{tg} \varphi'}{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \varphi'} = \frac{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) \sin \varphi' \cos \varphi'}{1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) \sin^2 \varphi'}. \quad (1.14)$$

Ввиду малости углов  $\varphi'' - \varphi'$  и  $\varphi - \varphi'$  с точностью до сотых долей секунды в левых частях равенств (1.13) и (1.14) можно тангенсы заменить углами. Если в правых частях (1.13) и (1.14)  $\frac{a}{b}$  выразить через  $\alpha$  и разложить их в ряды, то с точностью до величин второго порядка малости относительно  $\alpha$  (1.13) и (1.14) можно представить в виде

$$\varphi'' - \varphi' = \frac{\alpha}{2} \sin 2\varphi', \quad (1.15)$$

$$\varphi - \varphi' = \alpha \sin 2\varphi'. \quad (1.16)$$

В угловой мере  $\alpha \approx 11,5'$ , поэтому  $(\varphi - \varphi')_{\max} = 11,5'$  и  $(\varphi'' - \varphi')_{\max} = 5,7'$ ; достигаются эти максимумы на широте  $\varphi = 45^\circ$ . Из формул (1.15) и (1.16) следует, что прямая, проведенная из точки  $M$  (см. рис. 1.2) параллельно радиусу  $OM'$ , делит угол между радиусом-вектором  $\overline{OM}$  точки  $M$  и нормалью  $CM$   $h$ -эллипсоида пополам с точностью до величины порядка  $\alpha^2$ . Заметим, что в градусной мере  $\alpha^2$  примерно равен  $2,3''$ .

В дальнейшем нам понадобятся уравнения  $h$ -эллипсоида в координатах  $r, \varphi'$ , где  $r = \overline{OM}$  есть радиус-вектор точки  $M$ . Из прямоугольного треугольника  $BOM$ , первой формулы (1.7) и второй формулы (1.11) легко получить выражение

$$r = \frac{a + h}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi'}}, \quad (1.17)$$

которое в плоскости чертежа рис. 1.2 является уравнением меридионального эллипса, а в пространстве — уравнением  $h$ -эллипсоида вращения.

С точностью до величин порядка  $\alpha^2$  уравнение (1.17) можно представить в виде

$$r = (a + h) (1 - \alpha \sin^2 \varphi'). \quad (1.18)$$

Это выражение получается разложением (1.17) в биномиальный ряд по степеням  $e' \sin \varphi'$  с учетом формулы (1.2).

## §1.2. Поле силы тяжести Земли и уровенные поверхности

**1.2.1. Гравитационное поле Земли.** Всякое материальное тело создает в окружающем пространстве гравитационное поле. Вектор напряженности этого поля или удельная сила, с которой действует поле на материальную точку единичной массы, находя-

перехода:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi'' &= \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin \varphi'}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi'}}, \\ \cos \varphi'' &= \frac{\cos \varphi'}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi'}} \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi'' &= \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \\ \cos \varphi'' &= \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Нам понадобятся еще формулы

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi' &= \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - (2e^2 - e^4) \sin^2 \varphi}}, \\ \sin \varphi' &= \frac{(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - (2e^2 - e^4) \sin^2 \varphi}}, \\ \cos \varphi &= \frac{\cos \varphi'}{1 + (2e'^2 + e'^4) \sin^2 \varphi'}, \\ \sin \varphi &= \frac{(1 + e^2) \sin \varphi'}{1 + (2e'^2 + e'^4) \sin^2 \varphi'}. \end{aligned} \right\} \quad (1.12a)$$

Разности широт  $\varphi'' - \varphi'$  и  $\varphi - \varphi'$  являются малыми величинами порядка  $\alpha$ . Пользуясь формулами (1.8) и (1.10), можно получить выражения

$$\operatorname{tg}(\varphi'' - \varphi') = \frac{\left(\frac{a}{b} - 1\right) \operatorname{tg} \varphi'}{1 + \frac{a}{b} \operatorname{tg}^2 \varphi'} = \frac{\left(\frac{a}{b} - 1\right) \sin \varphi' \cos \varphi'}{1 + \left(\frac{a}{b} - 1\right) \sin^2 \varphi'} \quad (1.13)$$

щуюся в точке  $M$  пространства с координатами  $\xi, \eta, \zeta$ , определяется векторной формулой

$$\mathbf{g}' = - \int_D f \frac{dm_1}{r'^3} \mathbf{r}'. \quad (1.19)$$

Здесь  $\mathbf{r}'$  обозначает радиус-вектор, идущий из притягивающей точки  $M_1$  тела с координатами  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  и элементом массы  $dm$  в точку  $M$  (рис. 1.3),  $r'$  — модуль этого вектора ( $r' = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2}$ ),  $f$  — гравитационная постоянная, а  $D$  — область интегрирования, совпадающая с объемом притягивающего тела.

В скалярной форме имеем три равенства:

$$\left. \begin{aligned} g'_\xi &= - \int_{(D)} f \frac{\xi - \xi_1}{r'^3} dm_1, & g'_\eta &= - \int_{(D)} f \frac{\eta - \eta_1}{r'^3} dm_1, \\ g'_\zeta &= - \int_{(D)} f \frac{\zeta - \zeta_1}{r'^3} dm_1, \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

которые определяют проекции  $g'_\xi, g'_\eta, g'_\zeta$  вектора  $\mathbf{g}'$  на оси координат  $\xi, \eta, \zeta$ .

Вектор  $\mathbf{g}'$  имеет размерность ускорения, его в дальнейшем будем называть *гравитационным ускорением*, а также *ускорением силы притяжения* или *тяготения*. Сила притяжения, действующая на материальную точку массы  $m$ , определяется формулой

$$\mathbf{F}' = m\mathbf{g}'. \quad (1.21)$$

Сила притяжения и гравитационное ускорение, мы это особо подчеркиваем, имеют одинаковое направление.

Гравитационное поле является потенциальным полем с силовой функцией

$$\Pi' = \int_{(D)} f \frac{dm_1}{r'}; \quad (1.22)$$

имеют место соотношения

$$g'_\xi = \frac{d\Pi'}{d\xi}, \quad g'_\eta = \frac{d\Pi'}{d\eta}, \quad g'_\zeta = \frac{d\Pi'}{d\zeta}. \quad (1.23)$$

В интегралах (1.19), (1.20) и (1.22) координаты  $\xi, \eta, \zeta$  притягиваемой точки  $M$  являются параметрами. При дифференцировании интеграла (1.22) по этим параметрам можно переставить операции

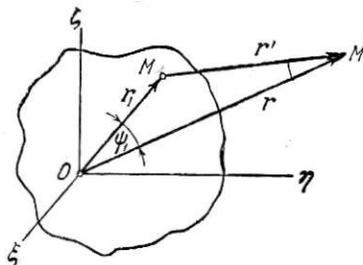


Рис. 1.3. Взаимное расположение притягивающего тела и притягивающей точки  $M$ .

интегрирования и дифференцирования. После этого замечания немедленно устанавливаем, что из (1.22) и (1.23) следуют формулы (1.20). Кроме формул (1.23) имеет важное значение более общее соотношение

$$g'_s = \frac{\partial \Pi'}{\partial s}, \quad (1.24)$$

которое устанавливает тот факт, что производная силовой функции в заданном направлении равняется проекции гравитационного ускорения на данное направление.

Силовую функцию  $\Pi'$  в теории фигуры Земли и гравиметрии с точностью до знака называют *гравитационным потенциалом* или *потенциалом силы притяжения*.

Гравитационный потенциал (1.22) зависит от распределения масс внутри притягивающего тела, его конфигурации и положения в выбранной системе координат  $\xi\eta\zeta$ .

Дадим приближенное представление интеграла (1.22). Обратимся к рис. 1.3, на котором нанесены контуры притягивающего тела. На рис. 1.3  $r_1$  и  $r$  изображают радиусы-векторы точек  $M_1$  и  $M$ . Из треугольника  $OM_1M$  по теореме косинусов имеем

$$r'^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \psi_1, \quad (1.25)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, & r_1^2 &= \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \\ rr_1 \cos \psi_1 &= \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Последнее равенство (1.26) получается из определения скалярного произведения двух векторов  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1$ .

Далее с учетом (1.25) имеем

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{r_1^2}{r^2} - \frac{2rr_1 \cos \psi_1}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.27)$$

Разлагая в биномиальный ряд, получим

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{r_1^2}{2r^2} + \frac{rr_1 \cos \psi_1}{r^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{r_1^2 \cos^2 \psi_1}{r^4} + \dots \right]. \quad (1.28)$$

В разложении мы выписали только члены, содержащие  $r_1/r$  в степени не выше второй. В дальнейшем величинами более высокого порядка относительно  $r_1/r$  будем пренебрегать. С учетом сделанного замечания и формул (1.26) представим (1.28) в виде

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}{2r^2} + \frac{\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1}{2r^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{(\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1)^2}{r^4} \right]. \quad (1.29)$$

Это выражение подставим в интеграл (1.22) и напомним, что при интегрировании  $\xi, \eta, \zeta$  и  $r$  считаются постоянными.

Выберем теперь координатную систему  $\xi\eta\zeta$  так, чтобы ее начало совпадало с центром масс притягивающего тела, а оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  совпадали с его главными осями инерции. Тогда статические моменты и центробежные моменты инерции будут равны нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \int_{(D)} \xi_1 dm_1 = \int_{(D)} \eta_1 dm_1 = \int_{(D)} \zeta_1 dm_1 = 0, \\ \int_{(D)} \xi_1 \eta_1 dm_1 = \int_{(D)} \xi_1 \zeta_1 dm_1 = \int_{(D)} \eta_1 \zeta_1 dm_1 = 0. \end{aligned} \right\} (1.30)$$

Кроме того, имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} \int_{(D)} (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) dm_1 = \frac{1}{2} (A + B + C), \\ \int_{(D)} \xi_1^2 dm_1 = \frac{1}{2} (C + B - A), \quad \int_{(D)} \eta_1^2 dm_1 = \frac{1}{2} (A + C - B), \\ \int_{(D)} \zeta_1^2 dm_1 = \frac{1}{2} (B + A - C), \end{aligned} \right\} (1.31)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — моменты инерции притягивающего тела относительно осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  соответственно.

С учетом сделанных замечаний гравитационный потенциал  $\Pi'$  можно представить в виде

$$\Pi' = f \frac{m_1}{r} - f \frac{A+B+C}{4r^3} + f \frac{3}{4r^5} [\xi^2 (C+B-A) + \eta^2 (A+C-B) + \zeta^2 (A+B-C)], (1.32)$$

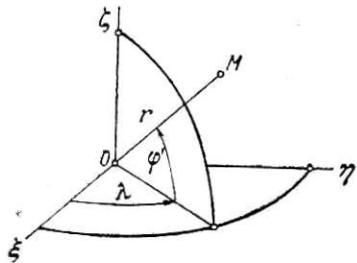


Рис. 1.4. Сферические координаты точки  $M$ .

где  $m_1$  означает массу притягивающего тела.

Введем для притягиваемой точки сферические координаты  $r$ ,  $\varphi'$  и  $\lambda$ , причем положим (рис. 1.4)

$$\left. \begin{aligned} \xi = r \cos \varphi' \cos \lambda, \quad \eta = r \cos \varphi' \sin \lambda, \\ \zeta = r \sin \varphi'. \end{aligned} \right\} (1.33)$$

Тогда (1.32) можно привести к виду

$$\Pi' = f \frac{m_1}{r} + \frac{f}{2r^3} \left[ \left( C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{3}{2} (B - A) \cos^2 \varphi' \cos 2\lambda \right]. (1.34)$$

Для Земли ось  $\zeta$  направляют вдоль полярной оси, которая считается ее главной осью. Далее пренебрегают небольшим отли-

чем друг от друга главных экваториальных моментов инерции  $A$  и  $B$ , т. е. полагают  $A = B$  и гравитационный потенциал Земли записывают в виде

$$\Pi' = \frac{K}{r} + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{Ka^2}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi'), (1.35)$$

где

$$C - A = \mu m_1 a^2 (1.36)$$

и

$$K = f m_1 (1.37)$$

— так называемый гравитационный параметр притягивающего тела.

Безразмерный коэффициент  $\mu$  характеризует распределение масс внутри Земли. Для первоначальной оценки  $\mu$  будем считать Землю однородным эллипсоидом вращения.

Тогда  $C = \frac{2}{5} m_1 a^2$  и  $A = \frac{1}{5} m_1 (a^2 + b^2)$  и, следовательно,

$$C - A = \frac{1}{5} m_1 (a^2 - b^2) = \frac{1}{5} e^2 m_1 a^2 \approx \frac{2}{5} \alpha m_1 a^2. (1.38)$$

В этом случае  $\mu = \alpha/2,5$ . В действительности плотность пород, лежащих ближе к центру Земли, больше, поэтому коэффициент  $\mu$  несколько меньше указанной величины, он примерно равен  $\alpha/3$ . Таким образом,  $\mu$  есть величина того же порядка малости, что и коэффициент сжатия  $\alpha$ .

При  $A = B$  любая экваториальная ось является главной, поэтому ось  $\xi$  можно теперь направить так, чтобы гринвичский меридиан оказался в координатной плоскости  $\xi\zeta$ . В таком случае  $\varphi'$  и  $\lambda$  будут геоцентрической широтой и долготой точки  $M$ .

Гравитационное поле, определяемое потенциалом (1.35), имеет осевую симметрию. Первое слагаемое правой части (1.35) можно трактовать как потенциал центрального гравитационного поля. Это поле может вызывать любой шар массы  $m_1$  с радиальным распределением плотности и с центром, совпадающим с центром Земли. Радиус этого шара должен быть меньше  $r$ , т. е. расстояния притягиваемой точки  $M$  от центра Земли. Второе слагаемое с малым множителем  $\mu$  определяет малое отклонение гравитационного поля от центрального, обусловленное сплюснутостью земного сфероида.

Средние значения параметров, фигурирующих в формуле (1.35), равны

$$K = 398\,546 \text{ км}^3/\text{с}^2, \quad \mu = 0,00109. (1.39)$$

Приведенные значения характеризуют истинные с точностью 0,1—0,15%. Значения параметров  $K$  и  $\mu$  будут уточняться по мере накопления материалов о движении искусственных спутников Земли.

По гравитационному потенциалу (1.35) можно определить выражение для проекции ускорения силы тяготения  $g'$ . Удобно оп-

ределим радиальную  $g'_r$  и трансверсальную  $g'_{\varphi'}$  составляющие  $g'$ . Для этой цели воспользуемся формулой (1.24), положив соответственно в ней  $ds = dr$  и  $ds = r d\varphi'$  \*).

Так, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} g'_r &= \frac{\partial \Pi'}{\partial r} = -\frac{K}{r^2} \left[ 1 + \frac{3\mu}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi') \right], \\ g'_{\varphi'} &= \frac{\partial \Pi'}{r \partial \varphi'} = -\frac{K}{r^2} \cdot \frac{3\mu}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \sin 2\varphi'. \end{aligned} \right\} (1.40)$$

Для формул (1.40) следует, что вектор  $g'$  лежит в плоскости меридиана точки  $M$ , причем радиальная составляющая  $g'_r$  направлена к центру Земли, а трансверсальная составляющая  $g'_{\varphi'}$  перпендикулярна  $g'_r$  и направлена к плоскости экватора (на это указывает знак минус).

**1.2.2. Поле силы тяжести.** Сила тяжести определяется как равнодействующая сил тяготения и центробежной силы от вращения Земли. Центробежная сила в точке  $M$  с геоцентрической широтой  $\varphi'$  направлена вдоль радиуса параллели, равного  $r \cos \varphi'$ , где  $r$  — радиус-вектор точки  $M$ .

Удельная центробежная сила  $g''$ , имеющая размерность ускорения, численно равна  $U^2 r \cos \varphi'$ . Очевидно, радиальная  $g''_r$  и трансверсальная  $g''_{\varphi'}$  составляющие удельной центробежной силы определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} g''_r &= U^2 r \cos^2 \varphi', \\ g''_{\varphi'} &= -U^2 r \cos \varphi' \sin \varphi'. \end{aligned} \right\} (1.41)$$

Трансверсальные составляющие  $g''_{\varphi'}$  и  $g'_{\varphi'}$  (см. формулу (1.40)) имеют одинаковое направление.

Можно говорить о поле центробежных сил, удельная центробежная сила  $g''$  будет напряженностью этого поля.

Потенциал  $\Pi''$  поля центробежных сил определяется выражением

$$\Pi'' = \frac{U^2 r^2 \cos^2 \varphi'}{2}. \quad (1.42)$$

В этом легко убедиться, так как  $g''_r$  и  $g''_{\varphi'}$  получаются дифференцированием  $\Pi''$  в соответствующих направлениях (см. п. 1.2.1).

Введем безразмерную величину

$$q = \frac{U^2 a^3}{K} = \frac{U^2 a}{K}. \quad (1.43)$$

Эта величина определяет отношение центробежного ускорения  $U^2 a$  в точке, лежащей на экваторе Земли, к величине  $K/a^2$ , которую

\* Дуга  $ds = r d\varphi'$  положительна в сторону возрастания широты  $\varphi'$ .

можно трактовать как ускорение силы тяготения от центральной части поля тяготения Земли на экваторе. Эта величина получается из (1.40) при  $\mu = 0$  и  $r = a$ .

Если из (1.43) определить  $U^2$  и подставить его в (1.42), то получим выражение для потенциала  $\Pi''$  в виде

$$\Pi'' = \frac{q}{2} \cdot \frac{Kr^2 \cos^2 \varphi'}{a^3}, \quad (1.44)$$

причем

$$q = \frac{1}{288,356} = 0,003468. \quad (1.45)$$

Эта величина очень близка к значению коэффициента сжатия Земли  $\alpha = 0,003352$ .

Поле силы тяжести является также потенциальным полем: его потенциал  $\Pi$  определяется суммой потенциалов  $\Pi'$  и  $\Pi''$ . В соответствии с формулами (1.35) и (1.44) имеем

$$\Pi = \frac{K}{r} + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{Ka^2}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{q}{2} \cdot \frac{Kr^2}{a^3} \cos^2 \varphi'. \quad (1.46)$$

Радиальная  $g_r$  и трансверсальная  $g_{\varphi'}$  составляющие ускорения силы тяжести получаются дифференцированием  $\Pi$  в соответствующих направлениях (см. п. 1.2.1):

$$\left. \begin{aligned} g_r &= \frac{\partial \Pi}{\partial r} = -\frac{K}{r^2} \left[ 1 + \frac{3\mu}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi') - g \left( \frac{r}{a} \right)^3 \cos^2 \varphi' \right], \\ g_{\varphi'} &= \frac{\partial \Pi}{r \partial \varphi'} = -\frac{K}{r^2} \left[ \frac{3\mu}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^2 + \frac{q}{2} \left( \frac{r}{a} \right)^3 \right] \sin 2\varphi'. \end{aligned} \right\} (1.47)$$

**1.2.3. Уровенные поверхности поля силы тяжести.** Уравнение уровенной поверхности поля силы тяжести получается приравниванием потенциала  $\Pi$  некоторой константе.

С учетом формулы (1.46) это уравнение можно записать в виде

$$\frac{K}{r} \left[ 1 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{q}{2} \left( \frac{r}{a} \right)^3 (1 - \sin^2 \varphi') \right] = \text{const}. \quad (1.48)$$

Будем давать константе те значения  $\Pi$ , которые она принимает при  $\varphi' = 0$  и  $r = a + h$ , причем  $h$  будем считать положительным параметром \*). Тогда уравнение (1.48) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{q}{2} \left( \frac{r}{a} \right)^3 (1 - \sin^2 \varphi') \right] = \\ = \frac{1}{a+h} \left[ 1 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{a}{a+h} \right)^2 + \frac{q}{2} \left( \frac{a+h}{a} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (1.49)$$

\*) Ниже будет показано, что введенный здесь параметр совпадает с параметром, фигурирующим в теории  $h$ -эллипсоидов.

При  $h = \alpha a$  численно  $h \approx 21,5$  км (см. табл. 1). Если ограничиться значениями  $h$  порядка 20—30 км, то безразмерная величина  $h/a$  будет одинакового порядка малости с безразмерными величинами  $\alpha$ ,  $q$  и  $\mu$  (см. формулы (1.45) и (1.39)). При ограниченных значениях  $h$  максимальное отклонение радиуса-вектора от  $a$  и от  $a + h$  будет величиной первого порядка малости. Тогда с точностью до величин второго порядка малости относительно  $\alpha$ ,  $q$ ,  $\mu$  и  $h/a$  уравнения (1.49) можно представить в виде

$$\frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{\mu}{2} (1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{q}{2} (1 - \sin^2 \varphi') \right] = \frac{1}{a+h} \left( 1 + \frac{\mu}{2} + \frac{q}{2} \right). \quad (1.50)$$

Разрешая это уравнение относительно  $r$ , получим

$$r = (a+h) \left[ 1 - \frac{\frac{3\mu+q}{2} \sin^2 \varphi'}{1 + \frac{\mu}{2} + \frac{q}{2}} \right]. \quad (1.51)$$

Но с той же самой точностью это выражение можно переписать в виде

$$r = (a+h) \left( 1 - \frac{3\mu+q}{2} \sin^2 \varphi' \right). \quad (1.52)$$

Если положить

$$\alpha = \frac{3\mu+q}{2}, \quad (1.53)$$

то полученное уравнение совпадает с уравнением (1.18). Отсюда следует, что определяемые уравнением (1.52) поверхности уровня силы тяжести образуют по параметру  $h$  семейство подобных эллипсоидов вращения с коэффициентом сжатия (1.53). Поверхность уровня, получаемая из (1.52) при  $h = 0$ , является земным сфероидом.

Формула (1.53) устанавливает связь между коэффициентом сжатия  $\alpha$  земного сфероида и безразмерными величинами  $\mu$  (1.36) и  $q$  (1.43).

Формально построенные в п. 1.1.4 данной главы  $h$ -эллипсоиды приобретают теперь ясный физический смысл, они являются уровенными поверхностями поля силы тяжести.

Нормаль в любой точке  $h$ -эллипсоида совпадает с направлением силы тяжести в той же точке. Таким образом, географическая широта  $\varphi$  точек  $h$ -эллипсоида физически определяется углом, который образует с плоскостью экватора Земли вектор силы тяжести.

В соответственных точках  $h$ -эллипсоидов, т. е. в точках, лежащих на продолжении одного радиуса-вектора, сила тяжести имеет одинаковое направление.

Перейдем к выяснению физического смысла параметра  $h$ . Для этой цели рассмотрим условия равновесия невозмущенной атмосферы относительно вращающейся Земли.

Из гидростатики известно, что уравнение равновесия можно записать в виде

$$\rho g_{\xi} = \frac{\partial p}{\partial \xi}, \quad \rho g_{\eta} = \frac{\partial p}{\partial \eta}, \quad \rho g_{\zeta} = \frac{\partial p}{\partial \zeta}, \quad (1.54)$$

где  $\rho$  — плотность воздуха,  $p$  — статическое давление в соответствующей точке атмосферы.

Уравнения (1.54) устанавливают тот факт, что объемные силы (в данном случае сила тяжести), действующие на элементарную частицу воздуха, уравновешиваются силами от перепада давления.

Если помножить обе части всех трех равенств (1.54) соответственно на  $d\xi$ ,  $d\eta$  и  $d\zeta$ , сложить их и учесть, что

$$g_{\xi} = \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}, \quad g_{\eta} = \frac{\partial \Pi}{\partial \eta}, \quad g_{\zeta} = \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta}, \quad (1.55)$$

то получим уравнение в полных дифференциалах

$$\rho d\Pi = dp, \quad (1.56)$$

запись которого не зависит от конкретного выбора системы координат.

Из уравнения (1.56) следует, что поверхность  $\Pi \equiv \text{const}$  одновременно является поверхностью  $p \equiv \text{const}$ .

Выше было указано, что поверхность  $\Pi \equiv \text{const}$  является также поверхностью  $h \equiv \text{const}$ .

Таким образом, поверхность  $h$ -эллипсоида является не только поверхностью уровня поля силы тяжести, но и поверхностью равного давления — изобарической поверхностью.

Давление атмосферы измеряется барометром, чувствительным элементом которого служит анероидная коробка. Шкалу барометра можно протарировать в единицах измерения параметра  $h$  — единицах длины. Такой прибор называется *барометрическим высотомером*. Вследствие сказанного параметр  $h$  можно считать барометрической высотой.

При выдерживании постоянного показания барометрического высотомера полет осуществляется на постоянной барометрической высоте. Объект движется в этом случае вдоль поверхности  $h$ -эллипсоида — горизонтальный полет.

Расстояние между соответственными точками  $h$ -эллипсоида и земного сфероида, измеренное вдоль их общего радиуса-вектора, назовем *геоцентрической высотой* и обозначим ее через  $h'$ .

Из равенства (1.17) нетрудно установить соотношение

$$h' = r - \frac{a}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi'}} = \frac{h}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi'}}. \quad (1.57)$$

Геоцентрическая высота  $h'$  точек  $h$ -эллипсоида монотонно убывает от экватора к полюсу. На экваторе имеем  $h' = h$ . Вообще говоря, эти высоты мало отличаются друг от друга. Так, например, при  $h = 30$  км имеем на широте  $\varphi' = 45^\circ$   $h - h' \approx 50$  м и на полюсе  $h - h' = 100$  м.

Разность давлений на двух изобарических поверхностях равняется весу столба воздуха между этими поверхностями. Уменьшение геоцентрической высоты  $h'$  от экватора к полюсу главным образом обуславливается увеличением в этом направлении удельного веса воздуха, что в свою очередь вызывается соответствующим увеличением ускорения силы тяжести. На этом вопросе мы остановимся в следующем пункте.

Можно стать на другую точку зрения. Из (1.57) нетрудно получить выражение

$$h' \approx h \left( 1 - \frac{e'^2}{2} \sin^2 \varphi' \right),$$

или

$$h - h' \approx a \cdot \frac{h}{a} \cdot \alpha \sin^2 \varphi'.$$

Разность барометрической и геоцентрической высот есть величина второго порядка малости.

С такой же точностью была построена теория уровенных поверхностей поля силы тяжести, поэтому с указанной точностью можно вообще не различать эти высоты, т. е. считать их совпадающими по величине.

**1.2.4. Ускорения сил тяжести и тяготения на  $h$ -эллипсоиде.** Ускорения сил тяжести и тяготения на поверхности  $h$ -эллипсоидов будем определять с оговоренной выше точностью. Тогда в безразмерных множителях, стоящих в правых частях выражений (1.40) и (1.47), можно положить  $r = a$ . Размерный множитель  $K/r^2$  с учетом формулы (1.18) можно представить в форме

$$\frac{K}{r^2} = \frac{K}{(a+h)^2} (1 - \alpha \sin^2 \varphi')^{-2} \approx \frac{K}{(a+h)^2} (1 + 2\alpha \sin^2 \varphi'). \quad (1.58)$$

Тогда выражение (1.47) можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} g_r &= -\frac{K}{(a+h)^2} \left[ 1 + \frac{3\mu}{2} - q + \left( 2\alpha - \frac{9\mu}{2} + q \right) \sin^2 \varphi' \right], \\ g_{\varphi'} &= -\frac{K}{(a+h)^2} \cdot \frac{(3\mu + q)}{2} \sin 2\varphi'. \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

Если учесть (1.53) и точность, с которой мы проводим вычисления, то равенство (1.59) можно записать в форме

$$\left. \begin{aligned} g_r &= -\frac{K}{(a+h)^2} \left( 1 + \frac{3\mu}{2} - q \right) \left[ 1 + \left( \frac{5q}{2} - \alpha \right) \sin^2 \varphi' \right], \\ g_{\varphi'} &= -\frac{K}{(a+h)^2} \left( 1 + \frac{3\mu}{2} - q \right) \alpha \sin 2\varphi'. \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

Эти соотношения перепишем окончательно в виде

$$\left. \begin{aligned} g_r &= -g_{\varphi 0} \frac{a^2}{(a+h)^2} (1 + \beta \sin^2 \varphi'), \\ g_{\varphi'} &= -g_{\varphi 0} \alpha \sin 2\varphi' \frac{a^2}{(a+h)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.61)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{5q}{2} - \alpha, \\ g_{\varphi 0} &= \frac{K}{a^2} \left( 1 + \frac{3\mu}{2} - q \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.62)$$

Очевидно,  $g_{\varphi 0}$  есть ускорение силы тяжести на экваторе земного сфероида. Величины  $\beta$  и  $g_{\varphi 0}$  имеют следующие численные значения:

$$\beta = 0,005317, \quad g_{\varphi 0} = 978,049 \text{ см/с}^2. \quad (1.63)$$

Безразмерная величина  $\beta$  имеет порядок малости  $\alpha$ . Очевидно, выражение

$$\frac{g_{\varphi'}}{g_r} = \frac{\alpha \sin 2\varphi'}{1 + \beta \sin^2 \varphi'} \approx \alpha \sin 2\varphi' \quad (1.64)$$

определяет тангенс угла между вектором  $g$  ускорения силы тяжести и радиусом-вектором точек  $h$ -эллипсоида. В силу малости величины  $\alpha$  можно считать, что (1.64) определяет сам угол между указанными направлениями. Тогда из сравнения формул (1.16) и (1.64) получаем, что с точностью до проведенных вычислений действительно нормаль к  $h$ -эллипсоиду совпадает по направлению с ускорением силы тяжести. Этот факт был уже установлен раньше при отождествлении  $h$ -эллипсоида с поверхностью уровня силы тяжести. Соотношение (1.64) служит дополнительной проверкой правильности приближенных выкладок.

Абсолютную величину ускорения силы тяжести  $g$  можно определить с учетом (1.64) следующей цепочкой равенств:

$$g = \sqrt{g_r^2 + g_{\varphi'}^2} = g_r \left( 1 + \frac{g_{\varphi'}^2}{g_r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx g_r \left( 1 + \frac{\alpha^2}{2} \sin^2 \varphi' \right). \quad (1.65)$$

С принятой здесь точностью численные значения  $g$  и  $g_r$  совпадают. Поэтому, учитывая первую формулу (1.61), получим выражение

$$g = \frac{g_{\varphi 0} a^2}{(a+h)^2} (1 + \beta \sin^2 \varphi'), \quad (1.66)$$

которое определяет при  $h = \text{const}$  (см. формулу (1.62)) изменение  $g$  на  $h$ -эллипсоиде. В частности, из этой формулы можно ус-

тановить физический смысл безразмерного коэффициента  $\beta$ . Если обозначить через  $g_P$  ускорение силы тяжести на полюсах, а через  $g_0$  — в точках экватора  $h$ -эллипсоида, т. е. при  $\varphi' = \pm 90^\circ$ , то из (1.66) следует выражение

$$\beta = \frac{g_P - g_0}{g_0}. \quad (1.67)$$

Коэффициент  $\beta$  определяет относительный избыток силы тяжести на полюсах  $h$ -эллипсоидов по отношению к экватору.

Из формулы (1.66) следует, что  $g$  увеличивается с увеличением широты  $\varphi'$ . На это обстоятельство мы указывали в конце предыдущего пункта.

При  $h = 0$  формулы (1.62) и (1.64) называются *уравнением Клеро*, по имени французского ученого, впервые их получившего. Уравнение Клеро определяет ускорение силы тяжести на земном сфероиде.

Аналогичные рассуждения можно провести также относительно ускорения силы тяготения. Опуская промежуточные выкладки, которые рекомендуем читателю провести самостоятельно, выпишем формулы для определения ускорения  $g'$  силы тяготения и его радиальной  $g'_r$  и трансверсальной  $g'_{\varphi'}$  составляющих в окончательном виде:

$$g' = \frac{g'_{00} a^2}{(a+h)^2} (1 + \beta' \sin^2 \varphi'), \quad (1.68)$$

$$\left. \begin{aligned} g'_r &= -\frac{g'_{00} a^2}{(a+h)^2} (1 + \beta' \sin^2 \varphi'), \\ g'_{\varphi'} &= -\frac{g'_{00} a^2}{(a+h)^2} \left( \alpha - \frac{q}{2} \right) \sin 2\varphi', \end{aligned} \right\} \quad (1.69)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta' &= \frac{3q}{2} - \alpha, \\ g'_{00} &= \frac{K}{a^2} \left( 1 + \frac{3\mu}{2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

$$\beta' = \frac{g_P - g_0}{g_0}. \quad (1.71)$$

Здесь через  $g'_0$  и  $g'_P$  обозначены ускорения силы тяготения на экваторе и полюсах  $h$ -эллипсоидов. Величины  $\beta'$  и  $g'_0$  ( $g'_0$  равно  $g'_{00}$  при  $h = 0$ ) имеют следующие значения:

$$\beta' = 0,001841, \quad g'_{00} = 981,438 \text{ см/с}^2. \quad (1.72)$$

Обозначим угол между направлением вектора  $g'$  и плоскостью экватора через  $\varphi_1''$ .

В соответствии с (1.69)

$$\operatorname{tg} (\varphi_1'' - \varphi') = \frac{g'_{\varphi'}}{g'_r} = \frac{\left( \alpha - \frac{q}{2} \right) \sin 2\varphi'}{1 + \beta' \sin 2\varphi'} \approx \left( \alpha - \frac{q}{2} \right) \sin 2\varphi'. \quad (1.72a)$$

Этот угол можно принять за гравитационную широту точек  $h$ -эллипсоидов. Заменяя  $\operatorname{tg} (\varphi_1'' - \varphi')$  через  $\varphi_1'' - \varphi'$ , представим (1.72a) в виде

$$\varphi_1'' - \varphi' \approx \left( \alpha - \frac{q}{2} \right) \sin 2\varphi'. \quad (1.73)$$

Если учесть (1.15), то

$$\varphi_1'' - \varphi'' = \frac{\alpha - q}{2} \sin 2\varphi'. \quad (1.73a)$$

Величина  $0,5 (\alpha - q) = 5,8 \cdot 10^{-5}$  (см. табл. 1 и (1.45)) в угловой мере равняется  $11,6''$ . Таким образом, с ошибкой, не превосходящей  $11,6''$ , можно считать  $\varphi_1'' = \varphi''$ .

С указанной выше малой ошибкой гравитационная широта  $\varphi_1''$  совпадает с приведенной широтой  $\varphi''$ . В дальнейшем мы сохраним обозначение  $\varphi''$ , но эту широту будем называть *гравитационной*.

На рис. 1.5 изображены векторы  $g'$  и  $g$ , находящиеся в меридиональной плоскости  $h$ -эллипсоида. Вектор  $g'$  примерно совпадает с биссектрисой между радиусом-вектором точки  $M$  и вектором  $g$ . Отклонение нормали (направление вектора  $g$ )  $h$ -эллипсоида от радиуса-вектора  $OM$  наполовину обуславливается избыточностью масс в экваториальном поясе Земли и наполовину действием центробежной силы от ее вращения.

В дальнейшем направления отрезков  $MZ'$ ,  $MZ''$  и  $MZ$  (см. рис. 1.5) будем соответственно называть *геоцентрической вертикалью*, *гравитационной вертикалью* и *географической вертикалью* в точке  $M$   $h$ -эллипсоида. Таким образом, широты  $\varphi'$ ,  $\varphi''$  и  $\varphi$  будут определяться углами, которые образуют с плоскостью экватора соответствующие местные вертикали  $MZ'$ ,  $MZ''$  и  $MZ$ .

Формулы (1.66) и (1.68) определяют  $g$  и  $g'$  через геоцентрическую широту  $\varphi'$  и высоту  $h$  объекта. В дальнейшем нам понадобятся также значения  $g$  и  $g'$ , выраженные через прямоугольные координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  точки  $M$  местоположения объекта.

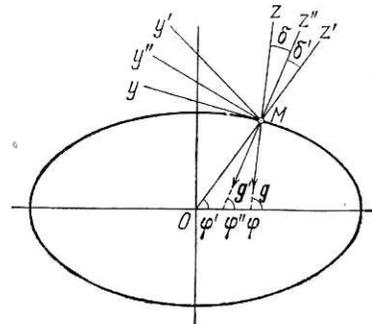


Рис. 1.5. Географическая  $Oz$ , гравитационная  $Oz''$  и геоцентрическая  $Oz'$  нормали в меридиональном сечении земного сфероида.

Мы уже знаем, что с оговоренной выше точностью  $g' \approx g_r$  и  $g = g_r$ . Тогда, полагая опять в первых формулах (1.40) и (1.47)  $r = a$ , получим выражения \*)

$$\begin{aligned} g' &= g_r = \frac{K}{r^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \mu - \frac{9}{2} \mu \sin^2 \varphi' \right) \approx \\ &\approx \frac{K \left( 1 + \frac{3}{2} \mu \right)}{r^2} \left( 1 - \frac{9}{2} \mu \sin^2 \varphi' \right), \\ g &= g_r = \frac{K}{r^2} \left[ 1 + \frac{3}{2} \mu - q - \left( \frac{9}{2} \mu - q \right) \sin^2 \varphi' \right] \approx \\ &\approx \frac{K \left( 1 + \frac{3}{2} \mu - q \right)}{r^2} \left[ 1 - \left( \frac{9}{2} \mu - q \right) \sin^2 \varphi' \right]. \quad \square \quad (1.74) \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (1.62) и (1.70), а также имея в виду, что по третьей формуле (1.33)

$$\sin \varphi' = \frac{\xi}{r},$$

получим

$$\left. \begin{aligned} g' &= \frac{g_{30} a^2}{r^2} \left( 1 - \beta_1' \frac{\xi^2}{r^2} \right), \\ g &= \frac{g_{30} a^2}{r^2} \left( 1 - \beta \frac{\xi^2}{r^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.74a)$$

где  $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$  и безразмерные величины

$$\beta = \frac{9}{2} \mu = 1,437 \cdot 10^{-3}, \quad \beta_1' = \frac{9}{2} \mu - q = 1,437 \cdot 10^{-3}. \quad (10.746)$$

**1.2.5. Аномалии силы тяжести и отклонения вертикали.** В гравиметрии [30] пользуются более точной формулой Гельмерта — Кассиниса

$$g_0 = g_{30} (1 + 0,005317 \sin^2 \varphi + 0,000007 \sin^2 2\varphi). \quad (1.75)$$

для определения  $g_0$  — ускорения силы тяжести на земном сфероиде, причем эту зависимость выражают через географическую широту  $\varphi$  \*\*).

Действительные значения ускорения силы тяжести, измеренные в различных точках Земли, отличаются от тех значений, которые получаются по формуле (1.74). Соответствующие разности называются *аномалиями силы тяжести*. Кроме того, наблюдаются отклонения отвесных линий от соответствующих нормалей к зем-

\*) Значок  $\square$  перед номером формулы означает, что данный номер относится к группе формул, перед первой из которых стоит значок  $\blacksquare$ .

\*\*) Формулу (1.66) можно выразить также через  $\varphi$ , если воспользоваться зависимостью (1.46).

ному сфероиду (референц-эллипсоиду). Уклонения отвесных линий может происходить в различных направлениях, поэтому их характеризуют отклонениями по широте и долготе. В первом случае линия отвеса уклоняется от нормали к референц-эллипсоиду на юг или на север, во втором случае — на запад или на восток. Эти уклонения в некоторых особых случаях нужно учитывать. Например, уклонение линии отвеса на запад или на восток вызывает ошибку в определении направления на север, если это направление определяется по проекции угловой скорости вращения Земли на плоскость горизонта. По такому принципу работают топографические гироскопические компасы [136]. Эта проекция на касательную плоскость к референц-эллипсоиду направлена по касательной к меридиану на север, проекция на плоскость, перпендикулярную к отвесной линии, будет отклоняться при указанных выше обстоятельствах соответственно на восток или на запад.

**1.2.6. Сопровождающие трехгранники.** Опираясь на понятие географической, геоцентрической и гравитационной вертикалей, введем трехгранники  $xyz$ ,  $x'y'z'$  и  $x''y''z''$ .

Вершины всех трехгранников совместим с текущей точкой  $M$ . В трехграннике  $xyz$  ось  $z$  направим вдоль географической вертикали вверх, ось  $y$  — вдоль касательной к меридиану  $h$ -эллипсоида на север, ось  $x$  — вдоль касательной к параллели на восток. Будем называть  $xyz$  *географическим сопровождающим трехгранником*, а соответствующую систему координат *географической топоцентрической системой координат*. Географический трехгранник изображен на рис. 1.6.

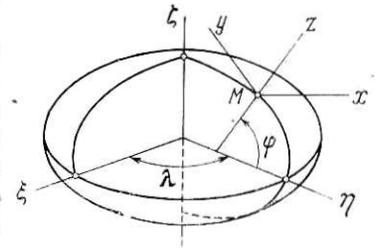


Рис. 1.6. Географический сопровождающий трехгранник  $xyz$ .

Ориентация осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  относительно осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  введенной ранее системы координат  $\xi\eta\zeta$  определяется таблицей направляющих косинусов:

	$x$	$y$	$z$
$\xi$	$-\sin \lambda$	$-\sin \varphi \cos \lambda$	$\cos \varphi \cos \lambda$
$\eta$	$\cos \lambda$	$-\sin \varphi \sin \lambda$	$\cos \varphi \sin \lambda$
$\zeta$ *	0	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$

Направляющие косинусы легко получить из рис. 1.6 проектированием единичных векторов  $x^0, y^0, z^0$  осей  $x, y, z$  на оси  $\xi, \eta, \zeta$ .

Аналогичным образом введем геоцентрическую  $x'y'z'$  и гравитационную  $x''y''z''$  топоцентрические системы координат. Оси  $x'$  и  $x''$  совместим с осью  $x$ , а оси  $z'$  и  $z''$  направим вдоль геоцентричес-

кой и гравитационной вертикалей вверх. Направления осей  $y'$  и  $y''$  определяются тогда однозначно. Трехгранники  $x'y'z'$  и  $x''y''z''$  получаются поворотом трехгранника  $xuz$  вокруг положительной полуоси  $x$  на углы  $\varphi - \varphi'$  и  $\varphi - \varphi''$  соответственно (см. рис. 1.5). Таблицы направляющих косинусов осей  $x', y', z'$  и  $x'', y'', z''$  относительно координатной системы  $\xi\eta\zeta$  получаются из (1.76) заменой  $\varphi$  на  $\varphi'$  и  $\varphi''$  соответственно. Таблица направляющих косинусов осей  $x', y', z'$  в координатной системе  $xuz$  имеет вид

$$\begin{array}{c|ccc} & x' & y' & z' \\ \hline x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & \cos(\varphi - \varphi') & -\sin(\varphi - \varphi') \\ z & 0 & \sin(\varphi - \varphi') & \cos(\varphi - \varphi') \end{array} \quad (1.77)$$

Аналогичная таблица для осей  $x'', y'', z''$  получается из (1.77) заменой  $\varphi'$  на  $\varphi''$ . Можно также получить направляющие косинусы осей  $x', y', z'$  и  $x, y, z$  в системе координат  $x''y''z''$ . Заменой  $\varphi'$  на  $\varphi''$  элементы таблицы (1.77) можно выразить через различные широты. Так, например, при учете (1.12а) можно получить соотношения

$$\begin{aligned} \sin(\varphi - \varphi') &= \frac{e'^2 \sin \varphi' \cos \varphi'}{\sqrt{1 + (2e'^2 + e'^4) \sin^2 \varphi'}}, \\ \cos(\varphi - \varphi') &= \frac{1 \oplus e'^2 \sin^2 \varphi'}{\sqrt{1 + (2e'^2 + e'^4) \sin^2 \varphi'}}, \\ \sin(\varphi'' - \varphi') &= \frac{\alpha \sin \varphi' \cos \varphi'}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi'}}, \\ \cos(\varphi'' - \varphi') &= \frac{1 \oplus \alpha \sin^2 \varphi'}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi'}}. \end{aligned} \quad \square (1.78)$$

а из (1.12) и (1.12а) — выражения

$$\begin{aligned} \sin(\varphi - \varphi'') &= \frac{\alpha \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \\ \cos(\varphi - \varphi'') &= \frac{1 \ominus \alpha \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \\ \sin(\varphi - \varphi') &= \frac{e^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - (2e^2 - e^4) \sin^2 \varphi}}, \\ \cos(\varphi - \varphi') &= \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - (2e^2 - e^4) \sin^2 \varphi}}. \end{aligned} \quad \square (1.79)$$

### § 1.3. Координаты местоположения и формулы счисления

**1.3.1. Относительные геоцентрические координаты.** Относительные координаты определяют местоположение объекта по отношению к Земле. В этом смысле местоположение можно определить в прямоугольной системе координат  $\xi\eta\zeta$ , которая была введена нами ранее.

Начало этой системы координат совмещено с центром Земли, ось  $\zeta$  направлена по оси симметрии земного сфероида, плоскость  $\xi\zeta$  совпадает с плоскостью гринвичского меридиана, плоскость  $\xi\eta$  — с плоскостью экватора.

Помимо прямоугольных координат  $\xi, \eta, \zeta$  весьма удобно определять местоположение объекта криволинейными координатами, в качестве которых мы можем взять широту  $\varphi, \varphi'$  или  $\varphi''$ , долготу  $\lambda$  и параметр  $h$  (см. п. 1.1.4). Криволинейными координатами  $\varphi$  ( $\varphi', \varphi''$ ),  $\lambda, h$  удобно пользоваться для общей ориентировки относительно земных опорных пунктов. Параметр  $h$  непосредственно характеризует высоту полета, а координаты  $\varphi$  ( $\varphi', \varphi''$ )  $\lambda$  определяют точку земного сфероида, лежащую на том же радиусе-векторе, что и точка  $M$  местоположения объекта. Точка  $h$ -эллипсоидов, лежащие на продолжении одного радиуса-вектора, мы называли соответственными. Соответственные точки  $h$ -эллипсоидов, как это было показано раньше, имеют одинаковые широту  $\varphi$  ( $\varphi', \varphi''$ ) и долготу  $\lambda$ , они отличаются только параметром  $h$ . По координатам  $\varphi, \lambda$  определяется положение соответственной точки земного сфероида по географической карте. Когда изменяется только одна координата, то точка движется вдоль соответствующей координатной линии. В системе координат  $\xi\eta\zeta$  координатными линиями являются прямые, параллельные осям  $\xi, \eta$  и  $\zeta$ . Для криволинейных координат  $\varphi$  ( $\varphi', \varphi''$ ),  $\lambda$  и  $h$  таковыми являются меридиан  $h$ -эллипсоида, его географическая параллель и прямая, выходящая из центра Земли, эта прямая направлена по радиусу-вектору точки  $M$ . Вдоль меридиана меняется широта, вдоль параллели — долгота и вдоль радиуса-вектора — параметр  $h$ . С координатными линиями свяжем прямоугольный трехгранник  $xuz'$ , вершина его совпадает с точкой  $M$ , оси  $x, y$  и  $z'$  являются осями соответствующих сопровождающих трехгранников  $xuz$  и  $x'y'z'$ , рассмотренных в предыдущем пункте. Оси координат  $x, y, z'$  совпадают с касательными к координатным линиям: параллели, меридиану и радиусу-вектору точки  $M$  соответственно.

Установим аналитическую связь между координатами  $\xi, \eta, \zeta$  и  $\varphi$  ( $\varphi', \varphi''$ ),  $\lambda, h$ .

Для этой цели в формулы (1.33) подставим  $r$  из (1.17), тогда получим выражения, которые устанавливают связь между  $\varphi', \lambda,$

$h$  и  $\xi, \eta, \zeta$ :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{a+h}{\kappa_1} \cos \varphi' \cos \lambda, \\ \eta &= \frac{a+h}{\kappa_1} \cos \varphi' \sin \lambda, \\ \zeta &= \frac{a+h}{\kappa_1} \sin \varphi', \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

где

$$\kappa_1 = \sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi'}. \quad (1.81)$$

Соответствующие выражения для  $\varphi'', \lambda, h$  получаются из (1.80) с использованием формул (1.11) в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (a+h) \cos \varphi'' \cos \lambda, \\ \eta &= (a+h) \cos \varphi'' \sin \lambda, \\ \zeta &= \frac{b}{a} (a+h) \sin \varphi'', \end{aligned} \right\} \quad (1.82)$$

и, наконец, из (1.82) и (1.12) получим выражения, устанавливающие связь между координатами  $\varphi, \lambda, h$  и  $\xi, \eta, \zeta$ :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{a+h}{\kappa} \cos \varphi \cos \lambda, \\ \eta &= \frac{a+h}{\kappa} \cos \varphi \sin \lambda, \\ \zeta &= \frac{(a+h)(1-e^2)}{\kappa} \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (1.83)$$

где

$$\kappa = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad (1.84)$$

и

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Полученные выражения устанавливают связь между соответствующими координатами без ограничений на величину параметра  $h$ . Если в (1.80), (1.82) и (1.83) исключить широту и долготу, то получится одно и то же уравнение в виде

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{(a+h)^2} + \frac{\zeta^2}{\frac{b^2}{a^2} (a+h)^2} = 1, \quad (1.85)$$

которое при  $h = \text{const}$  является каноническим уравнением эллипсоида вращения с большой полуосью  $a+h$  и малой полуосью  $\frac{b}{a}(a+h)$ , т. е. уравнением  $h$ -эллипсоида. Причем заметим, что  $b^2/a^2 = (1 - \alpha)^2$ . Параметр  $h$  в этом случае равен высоте эквато-

риальных точек  $h$ -эллипсоида. Для величин  $h$  порядка 30 км и ниже параметр  $h$  является барометрической высотой, а  $h$ -эллипсоид — уровнем поверхностью силы тяжести и одновременно изобарической поверхностью. При  $h = \text{const}$  точка движется по  $h$ -эллипсоиду.

Такое движение при  $h \leq 30$  км будем называть *горизонтальным полетом*.

Кроме полученных выше формул, устанавливающих связь между прямоугольными и криволинейными координатами в конечном виде, нам в дальнейшем понадобятся соответствующие дифференциальные выражения. Эти выражения удобно получить в следующей последовательности. Сначала установим зависимость  $\xi, \eta$  и  $\zeta$  от  $\varphi'', \lambda, h$ . Эти зависимости установим непосредственным дифференцированием левых и правых частей уравнений (1.82). В результате получим соотношения

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= -\dot{\lambda} (a+h) \cos \varphi'' \sin \lambda - \\ &\quad - \dot{\varphi}'' (a+h) \sin \varphi'' \cos \lambda + \dot{h} \cos \varphi'' \cos \lambda, \\ \dot{\eta} &= \dot{\lambda} (a+h) \cos \varphi'' \cos \lambda - \\ &\quad - \dot{\varphi}'' (a+h) \sin \varphi'' \sin \lambda + \dot{h} \cos \varphi'' \sin \lambda, \\ \dot{\zeta} &= \dot{\varphi}'' \frac{b}{a} (a+h) \cos \varphi'' + \dot{h} \frac{b}{a} \sin \varphi''. \end{aligned} \right\} \quad (1.86)$$

Аналогичные формулы для географической и геоцентрической широт проще получить преобразованием правых частей (1.86) к широтам  $\varphi$  и  $\varphi'$ . Для этой цели предварительно нужно выразить  $\varphi''$  через соответствующие широты и их производные. Дифференцируя обе части равенства (1.10), получим

$$\frac{\dot{\varphi}''}{\cos^2 \varphi''} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi}. \quad (1.87)$$

Отсюда в соответствии со второй формулой (1.12) и сокращенным обозначением (1.84) будем иметь

$$\varphi'' = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\kappa^2} \dot{\varphi}. \quad (1.88)$$

Аналогично по формулам (1.8), (1.11) и (1.81) получим

$$\varphi'' = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\kappa_1^2} \dot{\varphi}'. \quad (1.89)$$

Используя формулы (1.11), (1.12), (1.88) и (1.89) и производя

соответствующую подстановку в (1.86), получим выражения

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{\dot{\lambda}(a+h)}{\kappa} \cos \varphi \sin \lambda - \frac{\dot{\varphi}(a+h)(1-e^2)}{\kappa^3} \sin \varphi \cos \lambda + \\ &\quad + \frac{\dot{h}}{\kappa} \cos \varphi \cos \lambda, \\ \dot{\eta} &= \frac{\dot{\lambda}(a+h)}{\kappa} \cos \varphi \cos \lambda - \frac{\dot{\varphi}(a+h)(1-e^2)}{\kappa^3} \sin \varphi \sin \lambda + \\ &\quad + \frac{\dot{h}}{\kappa} \cos \varphi \sin \lambda, \\ \dot{\zeta} &= \frac{\dot{\varphi}(a+h)(1-e^2)}{\kappa^3} \cos \varphi + \frac{\dot{h}(1-e^2)}{\kappa} \sin \varphi \end{aligned} \right\} (1.90)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}' &= -\frac{\dot{\lambda}(a+h)}{\kappa_1} \cos \varphi' \sin \lambda - \\ &\quad - \frac{\dot{\varphi}'(a+h)(1-e'^2)}{\kappa_1^3} \sin \varphi' \cos \lambda + \frac{\dot{h}}{\kappa_1} \cos \varphi' \cos \lambda, \\ \dot{\eta}' &= \frac{\dot{\lambda}(a+h)}{\kappa_1} \sin \varphi' \cos \lambda - \\ &\quad - \frac{\dot{\varphi}'(a+h)(1-e'^2)}{\kappa_1^3} \sin \varphi' \sin \lambda + \frac{\dot{h}}{\kappa_1} \cos \varphi' \cos \lambda, \\ \dot{\zeta}' &= \frac{\dot{\varphi}'(a+h)}{\kappa_1^3} \cos \varphi' + \frac{\dot{h}}{\kappa_1} \sin \varphi', \end{aligned} \right\} (1.91)$$

в которых  $\kappa_1$  и  $\kappa$  определяются формулами (1.81) и (1.94).

**1.3.2. Формулы счисления прямоугольных координат.** Выражения, связывающие производные координат местоположения объекта с составляющими вектора скорости его центра масс, будем называть *формулами счисления*. Пусть  $v$  — вектор относительной скорости центра масс объекта,  $v$  его модуль, а  $v_\xi, v_\eta, v_\zeta$  — проекции на оси  $\xi, \eta, \zeta$  геоцентрической системы координат  $\xi\eta\zeta$ , жестко связанной с Землей.

Тогда имеют место очевидные равенства

$$\dot{\xi} = v_\xi, \quad \dot{\eta} = v_\eta, \quad \dot{\zeta} = v_\zeta. \quad (1.92)$$

Эти равенства являются формулами счисления координат  $\xi, \eta, \zeta$ . Считается, что проекции  $v_\xi, v_\eta, v_\zeta$  каким-то образом определяются и рассматриваются как известные функции времени или координат и времени. Тогда координаты  $\xi, \eta, \zeta$  определяются в первом случае интегрированием, во втором случае решением системы дифференциальных уравнений.

В обоих случаях необходимо знать начальное местоположение объекта, координаты  $\xi(0), \eta(0), \zeta(0)$  которого будут начальными условиями соответствующих решений.

**1.3.3. Формулы счисления географических координат.** Формулы счисления географических координат  $\varphi, \lambda, h$  получаются несколько сложнее.

На этом вопросе остановимся подробнее. Помножим левые и правые части трех уравнений (1.90) соответственно на единичные векторы  $\xi^0, \eta^0, \zeta^0$  и результаты сложим. Тогда получим (см. (1.92))

$$\begin{aligned} v_\xi \xi^0 + v_\eta \eta^0 + v_\zeta \zeta^0 &= \frac{(a+h) \cos \varphi}{\kappa} \dot{\lambda} (-\xi^0 \sin \lambda + \eta^0 \cos \lambda) + \\ &+ \frac{(a+h)(1-e^2)}{\kappa^3} \dot{\varphi} (-\xi^0 \sin \varphi \cos \lambda - \eta^0 \sin \varphi \sin \lambda + \zeta^0 \cos \varphi) + \\ &+ \frac{\dot{h}}{\kappa} [\xi^0 \cos \varphi \cos \lambda + \eta^0 \cos \varphi \sin \lambda + \zeta^0 (1-e^2) \sin \varphi]. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Левая часть этого равенства изображает вектор  $v$  через его проекции на оси  $\xi, \eta, \zeta$ . В правой части линейные выражения относительно  $\xi^0, \eta^0, \zeta^0$  в первой и второй скобках представляют единичные векторы  $x^0, y^0$  соответственно. Это обстоятельство немедленно устанавливается из таблицы направляющих косинусов (1.76). Третья скобка при делении ее на  $\sqrt{1-(2e^2-e^4)\sin^2\varphi}$  (см. (1.12a)) будет представлять единичный вектор  $z^0$ . Направляющие косинусы оси  $z'$  в системе координат  $\xi\eta\zeta$  определяются третьим столбцом таблицы (1.76) при замене  $\varphi$  на  $\varphi'$ , а  $\cos \varphi'$  и  $\sin \varphi'$  определяются через  $\varphi$  формулами (1.12a). Таким образом, (1.93) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v &= \frac{\sqrt{1-(2e^2-e^4)\sin^2\varphi}}{\kappa} \dot{h} \cdot z^0 + \frac{(a+h)(1-e^2)}{\kappa^3} \dot{\varphi} y^0 + \\ &+ \frac{(a+h) \cos \varphi}{\kappa} \dot{\lambda} x^0. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Уравнение (1.94) выражает вектор относительной скорости  $v$  через составляющие по осям косоугольной системы  $x'y'z'$ , полученные разложением по правилу «параллелограмма».

Напомним, что проектирование на какую-нибудь ось произвольной координатной системы производится параллельно плоскости, проходящей через две другие координатные оси. На плоскости это соответствует проектированию по правилу параллелограмма. Для краткости будем пользоваться этим привычным термином.

Эти составляющие называются *контравариантными* и они обозначаются через  $v^1, v^2, v^3$ . Таким образом,

$$v = v^1 x^0 + v^2 y^0 + v^3 z^0. \quad (1.95)$$

Из сравнения (1.94) и (1.95) устанавливаем формулы счисления координат  $\lambda, \varphi, h$ , которые можно привести к виду (см. (1.79))

и (1.84)

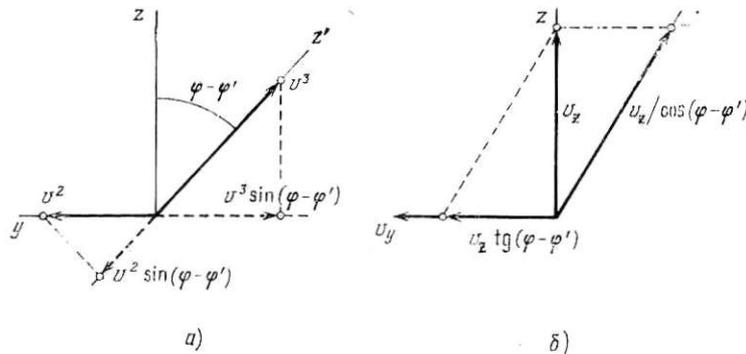
$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{v^1}{R_1 \cos \varphi}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{v^2}{R_2}, \\ \dot{h} &= \frac{v^3 \cos(\varphi - \varphi')}{\kappa}, \end{aligned} \right\} \quad (1.96)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{a+h}{\kappa} = \frac{a+h}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}, \\ R_2 &= \frac{(a+h)(1-e^2)}{\kappa^3} = \frac{(a+h)(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.97)$$

Смысл величин  $R_1$  и  $R_2$  будет разъяснен ниже.

В косоугольной системе координат  $xyz'$  вектор  $v$  можно задать также ковариантными составляющими  $v_1, v_2, v_3$ , которые являются ортогональными проекциями вектора  $v$  на оси  $x, y, z'$  соответственно. Установим связь между ковариантными и контравариантными составляющими вектора  $v$ . Ввиду того, что ось  $x$  перпендикулярна плоскости  $yz'$ , составляющие  $v^1$  и  $v_1$  совпадают.

Рис. 1.7. Связь между прямоугольными проекциями  $v_y, v_z$  и контравариантными составляющими  $v^2, v^3$  вектора скорости  $v$ .

Далее, если учесть, что проекция вектора на некоторое направление равняется сумме проекций его составляющих, то из рис. 1.7, а легко получить два других соотношения:

$$\begin{aligned} v_2 &= v^2 - v^3 \sin(\varphi - \varphi'), \\ v_3 &= -v^2 \sin(\varphi - \varphi') + v^3. \end{aligned}$$

Разрешим эти уравнения относительно  $v^2$  и  $v^3$  и окончательно свяжем

между  $v^1, v^2, v^3$  и  $v_1, v_2, v_3$  представим в виде

$$\left. \begin{aligned} v^1 &= v_1, \\ v^2 &= \frac{v_2 + v_3 \sin(\varphi - \varphi')}{\cos^2(\varphi - \varphi')}, \\ v^3 &= \frac{v_2 \sin(\varphi - \varphi') + v_3}{\cos^2(\varphi - \varphi')}. \end{aligned} \right\} \quad (1.98a)$$

В практических приложениях бывает удобно пользоваться проекциями  $v_x, v_y, v_z$  вектора  $v$  на оси прямоугольной системы координат  $xyz$ . Установим связь между  $v^1, v^2, v^3$  и  $v_x, v_y, v_z$ . Очевидно, в этом случае  $v^1 = v_x$ .

Далее следует отметить, что контравариантные составляющие вектора, являющегося суммой нескольких векторов-компонентов, равняются сумме контравариантных составляющих этих векторов-компонентов. Поэтому разложим векторы-компоненты  $v_y, v_z$  по правилу параллелограмма на направления осей  $y$  и  $z'$  (рис. 1.7, б) и определим сумму этих составляющих. Окончательно получим соотношения

$$\left. \begin{aligned} v^1 &= v_x, \\ v^2 &= v_y + v_z \operatorname{tg}(\varphi - \varphi'), \\ v^3 &= \frac{v_z}{\cos(\varphi - \varphi')}, \end{aligned} \right\} \quad (1.98)$$

причем  $\operatorname{tg}(\varphi - \varphi')$  определяется формулой (1.78)\*).

Формулы счисления криволинейных координат  $\lambda, \varphi, h$  можно выразить через ковариантные составляющие  $v_1, v_2, v_3$  или через проекции  $v_x, v_y, v_z$ . Для этого достаточно в формулы (1.96) подставить  $v^1, v^2, v^3$  из соотношений (1.98a) и (1.98).

Формулы счисления, выраженные через  $v_1, v_2, v_3$  и  $v_x, v_y, v_z$ , получаются более громоздкими. Однако с точностью до величин второго порядка малости формулу счисления  $\varphi$  можно привести к виду (1.96). Для этой цели из последних формул (1.96), (1.98a) и (1.98) выразим  $v_3$  и  $v_z$  через  $v_2$  и  $h$  соответственно. Подставим полученные выражения для  $v_3$  и  $v_z$  во вторые формулы (1.98a) и (1.98). Таким образом, выразим  $v^2$  через  $v_2, h$  и  $v_y, h$  соответственно; так как  $v_2 = v_y$ , то мы получим одно и то же выражение в виде

$$v^2 = v_y + \dot{h} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi'). \quad (1.99)$$

Подставим это выражение во вторую формулу (1.96). Тогда получим

$$\dot{\varphi} = \frac{v_y}{R_2} + \frac{e^2 \sin \varphi \cos \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)}{(1 - e^2)(a + h)} \dot{h}. \quad (1.100)$$

\*) Нетрудно показать, что  $v_1 = v_x, v_2 = v_y, v_3 = -v_y \sin(\varphi - \varphi') + v_z \cos(\varphi - \varphi')$ .

Здесь во втором слагаемом  $R_2$  и  $\kappa$  записаны в развернутом виде согласно формулам (1.97) и (1.84). Обозначим интеграл по  $t$  от второго слагаемого (1.100) через  $\Delta\varphi$ . Тогда, заменяя в этом слагаемом числитель на заведомо большую величину  $0,5 e^2$  и полагая  $h dt = dh$ , получим оценку для величины  $\Delta\varphi$  в виде

$$\Delta\varphi < \frac{e^2}{2(1-e^2)} \int_0^{h_{\max}} \frac{dh}{a+h} = \frac{e^2}{2(1-e^2)} \ln \left( 1 + \frac{h_{\max}}{a} \right).$$

С точностью до величины второго порядка малости  $\ln(1+x) = x$ , поэтому с точностью до членов третьего порядка малости относительно  $a \approx e^2/2$  и  $h_{\max}/a$  будем иметь

$$\Delta\varphi < \frac{e^2}{2} \cdot \frac{h_{\max}}{a}. \quad (1.101)$$

При  $h_{\max} = 30$  км имеем  $\Delta\varphi < 3''$ , длина дуги  $a$   $\Delta\varphi$  в этом случае не будет превосходить 90 м. Эта ошибка будет достигаться, в частном случае, при вертикальном взлете до высоты 30 км на широте  $\varphi = 45^\circ$ . Во всех других случаях ошибка  $\Delta\varphi$  будет значительно меньше. С учетом указанной ошибки в определении широты  $\varphi$  вторым слагаемым в формуле (1.100) можно пренебречь. Поэтому формулы счисления координат  $\lambda$ ,  $\varphi$ ,  $h$  можно выразить через  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  и  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  в виде (см. (1.96), (1.98a), (1.98) и (1.100))

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{v_1}{R_1 \cos \varphi}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{v_2}{R_2}, \\ \dot{h} &= \frac{v_3 \sin(\varphi - \varphi') + v_3}{\kappa \cos(\varphi - \varphi')}, \end{aligned} \right\} \quad (1.102a)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{v_x}{R_1 \cos \varphi}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{v_y}{R_2}, \\ \dot{h} &= \frac{v_z}{\kappa}. \end{aligned} \right\} \quad (1.102)$$

Здесь  $\sin(\varphi - \varphi')$ ,  $\cos(\varphi - \varphi')$  и  $\kappa$  определяются выражениями (1.74) и (1.84), а  $R_1$ ,  $R_2$  — формулой (1.97). В (1.102a) и (1.102) первые и третьи формулы точные, вторые формулы позволяют определить широту  $\varphi$  с ошибкой, не превосходящей  $3''$ . Однако в горизонтальном движении, т. е. при  $h = \text{const}$ , они тоже точные.

**1.3.4. Счисление гравитационных координат.** В формулах счисления гравитационных координат будем выражать  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{h}$  через

$v_{x''}$ ,  $v_{y''}$ ,  $v_{z''}$  — проекции вектора относительной скорости  $v$  на оси  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$ , которые совпадают с соответствующими ребрами сопровождающего трехгранника  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  (см. п. 1.2.6). В левых частях уравнений (1.86) фигурируют проекции  $v_\xi$ ,  $v_\eta$ ,  $v_\zeta$  (см. (1.92)) вектора  $v$  на оси координатной системы  $\xi\eta\zeta$ . Эти проекции выражаются через  $v_{x''}$ ,  $v_{y''}$ ,  $v_{z''}$  линейными соотношениями вида

$$\left. \begin{aligned} v_\xi &= -v_{x''} \sin \lambda - v_{y''} \sin \varphi'' \cos \lambda + v_{z''} \cos \varphi'' \cos \lambda, \\ v_\eta &= v_{x''} \cos \lambda - v_{y''} \sin \varphi'' \sin \lambda + v_{z''} \cos \varphi'' \sin \lambda, \\ v_\zeta &= v_{y''} \cos \varphi'' + v_{z''} \sin \varphi'', \end{aligned} \right\} \quad (1.103)$$

которые непосредственно получаются из таблицы направляющих косинусов (1.76) при замене  $x$ ,  $y$ ,  $z$  на  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  и  $\varphi$  на  $\varphi''$ . Если подставить  $\dot{\xi} = v_\xi$ ,  $\dot{\eta} = v_\eta$ ,  $\dot{\zeta} = v_\zeta$ , определяемые равенствами (1.103), в (1.86), то получим систему линейных алгебраических уравнений для определения  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{\varphi}''$ ,  $\dot{h}$  через  $v_{x''}$ ,  $v_{y''}$ ,  $v_{z''}$ . Для решения полученных уравнений можно рекомендовать процедуру вычислений с использованием матричных методов.

В матричной форме уравнения (1.103) записываются в виде

$$\begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} v_{x''} \\ v_{y''} \\ v_{z''} \end{bmatrix}, \quad (1.104)$$

а уравнения (1.86) при учете (1.92) в виде

$$\begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{\lambda}(a+h) \\ \dot{\varphi}''(a+h) \\ \dot{h} \end{bmatrix}, \quad (1.105)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -\cos \varphi'' \sin \lambda & -\sin \varphi'' \cos \lambda & \cos \varphi'' \cos \lambda \\ \cos \varphi'' \cos \lambda & -\sin \varphi'' \sin \lambda & \cos \varphi'' \sin \lambda \\ 0 & (1-\alpha) \cos \varphi'' & (1-\alpha) \sin \varphi'' \end{bmatrix}, \quad (1.106)$$

$$C = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\sin \varphi'' \cos \lambda & \cos \varphi'' \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \varphi'' \sin \lambda & \cos \varphi'' \sin \lambda \\ 0 & \cos \varphi'' & \sin \varphi'' \end{bmatrix}. \quad (1.107)$$

Тогда, приравнявая правые части (1.104) и (1.105) и учитывая (1.106) и (1.107), получим уравнение в виде

$$C \begin{bmatrix} v_{x''} \\ v_{y''} \\ v_{z''} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{\lambda}(a+h) \\ \dot{\varphi}''(a+h) \\ \dot{h} \end{bmatrix}. \quad (1.108)$$

Решение этого уравнения записывается в форме

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda} (a+h) \\ \dot{\varphi}'' (a+h) \\ \dot{h} \end{bmatrix} = A^{-1} C \begin{bmatrix} v_{x''} \\ v_{y''} \\ v_{z''} \end{bmatrix}. \quad (1.109)$$

Матричные решения (1.109) удобны в том отношении, что в самой записи этих решений указан алгоритм вычислений. Нужно построить матрицу  $A^{-1}$  (обратную по отношению к  $A$ ) и помножить ее справа на матрицу  $C$  — матрицу направляющих косинусов, определяющих ориентацию осей  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  относительно осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Матрица  $A^{-1}$  определяется по формуле

$$A^{-1} = \frac{A'}{\det A}. \quad (1.110)$$

Определитель матрицы (1.106) определяется выражением

$$\det A = (1 - \alpha) \cos \varphi''. \quad (1.111)$$

Присоединенная матрица  $A'$  является матрицей алгебраических дополнений (миноров со знаком) элементов транспонированной матрицы

$$A^T = \begin{bmatrix} -\cos \varphi'' \cos \lambda & \cos \varphi'' \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi'' \cos \lambda & -\sin \varphi'' \sin \lambda & (1 - \alpha) \cos \varphi'' \\ \cos \varphi'' \cos \lambda & \cos \varphi'' \sin \lambda & (1 - \alpha) \sin \varphi'' \end{bmatrix}. \quad (1.112)$$

Эта матрица имеет вид

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.113)$$

где

$$\begin{aligned} a'_{11} &= -(1 - \alpha) \sin \lambda, & a'_{12} &= (1 - \alpha) \cos \lambda, & a'_{13} &= 0, \\ a'_{21} &= -(1 - \alpha) \sin \varphi'' \cos \varphi'' \cos \lambda, \\ a'_{22} &= -(1 - \alpha) \sin \varphi'' \cos \varphi'' \sin \lambda, & a'_{23} &= \cos^2 \varphi'', \\ a'_{31} &= (1 - \alpha) \cos^2 \varphi'' \cos \lambda, & a'_{32} &= (1 - \alpha) \cos^2 \varphi'' \sin \lambda, \\ a'_{33} &= \sin \varphi'' \cos \varphi''. \end{aligned}$$

Умножая матрицу (1.113) справа на матрицу (1.107), получим

$$A'C = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \alpha \sin^2 \varphi'') \cos \varphi'' & \alpha \sin \varphi'' \cos^2 \varphi'' \\ 0 & \alpha \sin \varphi'' \cos^2 \varphi'' & (1 - \alpha \cos^2 \varphi'') \cos \varphi'' \end{bmatrix}. \quad (1.114)$$

Если все элементы этой матрицы разделить на скалярную величину (1.111), то получим матрицу  $A^{-1}C$ . Подставим полученную таким образом матрицу  $A^{-1}C$  в (1.109) и перейдем к обычной

записи. Тогда формулы счисления можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{v_{x''}}{(a+h) \cos \varphi''}, \\ \dot{\varphi}'' &= \frac{v_{y''} (1 - \alpha \sin^2 \varphi'') + v_{z''} \alpha \sin \varphi'' \cos \varphi''}{(1 - \alpha) (a+h)}, \\ \dot{h} &= \frac{v_{y''} \alpha \sin \varphi'' \cos \varphi'' + v_{z''} (1 - \alpha \cos^2 \varphi'')}{1 - \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (1.115)$$

Для  $h \leq 30$  км вторую формулу (1.115) можно упростить. Здесь следует использовать ту же процедуру рассуждений, что и для получения вторых формул (1.102а) и (1.102). Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат в виде \*)

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{v_{x''}}{(a+h) \cos \varphi''}, \\ \dot{\varphi}'' &= \frac{v_{y''}}{(a+h) (1 - \alpha \cos^2 \varphi'')}, \\ \dot{h} &= \frac{v_{y''} \alpha \sin \varphi'' \cos \varphi'' + v_{z''} (1 - \alpha \cos^2 \varphi'')}{1 - \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (1.116)$$

Следует указать, что в формулах счисления (1.102а), (1.102) и (1.116) можно провести дальнейшую оценку степени малости входящих в них величин. Однако в общем виде мы такой оценки проводить не будем, так как связанное с такой оценкой дальнейшее упрощение полученных формул имеет смысл проводить только при конкретном выборе схемы инерциальной системы навигации. Приведенная в этом пункте процедура вычислений является общей. Точно таким же образом можно было бы выразить формулы счисления географических координат  $\lambda$ ,  $\varphi$ ,  $h$  через проекции  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ , полученные нами выше другим способом. Поэтому мы привели подробные выкладки с выписыванием промежуточных результатов.

**П р и м е ч а н и е.** В формулах счисления криволинейных координат  $\dot{\lambda}$  всегда зависит только от проекции относительной скорости на касательную к параллели  $h$ -эллипсоида (оси  $x$  и  $x''$ ). Если иметь в виду этот факт, то можно предложить несколько другой порядок вычислений. Уравнения (1.108) сначала будем разрешать только относительно  $v_{x''}$ ,  $v_{y''}$ ,  $v_{z''}$ . Такое решение имеет вид

$$\begin{bmatrix} v_{x''} \\ v_{y''} \\ v_{z''} \end{bmatrix} = C^{-1} A \begin{bmatrix} \dot{\lambda} (a+h) \\ \dot{\varphi}'' (a+h) \\ \dot{h} \end{bmatrix}.$$

\*) В горизонтальном движении, т. е. при  $h = \text{const}$  вторая формула (1.116) будет точной.

В полученном решении непосредственно устанавливается связь между  $v_{x'}$  и  $\dot{\lambda}$ , проекции  $v_{y'}$  и  $v_{z'}$  зависят от линейной комбинации  $\dot{\varphi}'$  и  $\dot{h}$ . Эти уравнения второго порядка просто разрешить относительно  $\dot{\varphi}'$  и  $\dot{h}$ . В указанной процедуре мы избегаем построения обратной матрицы  $A^{-1}$ , что же касается матрицы  $C^{-1}$ , то она просто совпадает с транспонированной матрицей  $C^T$ .

**1.3.5. Счисление геоцентрических координат.** Формулы счисления геоцентрических координат, выраженные через  $v_{x'}$ ,  $v_{y'}$ ,  $v_{z'}$  — проекции относительной скорости на оси  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  геоцентрического сопровождающего трехгранника, можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{v_{x'}}{r \cos \varphi'}, \\ \dot{\varphi}' &= \frac{v_{y'}}{r}, \\ \dot{h} &= \frac{v_{y'}^2 \sin \varphi' \cos \varphi'}{\kappa_1} v_{y'} + \kappa_1 v_{z'}, \end{aligned} \right\} \quad (1.117)$$

где  $\kappa_1$  определяется по формуле (1.81), а радиус-вектор  $r$  точки  $M$  местоположения объекта — по формуле (1.117). Выражения (1.117) нетрудно получить с помощью процедуры вычислений, рассмотренной в предыдущем пункте. Кроме того, эти формулы могут быть установлены посредством более простых рассуждений. Первые два равенства (1.117) можно записать непосредственно, как так они определяют связь между угловыми скоростями соответствующих радиусов-векторов и линейными скоростями их концов. Третье равенство можно получить дифференцированием по времени (1.17), если учесть второе равенство (1.117) и тот факт, что  $\dot{r} = v_{z'}$ . Второй подход к выводу формул (1.117) будет использован ниже.

**1.3.6. Счисление абсолютных координат.** Выберем прямоугольную систему координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  так, что начало совместится с центром Земли, ось  $\zeta_a$  направим вдоль полярной оси Земли к северному полюсу, а оси  $\xi_a$  и  $\eta_a$ , находясь в плоскости экватора, не будут участвовать в собственном суточном вращении Земли. Скорость объекта в системе координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  будем называть *абсолютной* и обозначать ее через  $V$ . Тогда имеют место очевидные равенства

$$\dot{\xi}_a = V_{\xi_a}, \quad \dot{\eta}_a = V_{\eta_a}, \quad \dot{\zeta}_a = V_{\zeta_a}, \quad (1.118)$$

где  $V_{\xi_a}$ ,  $V_{\eta_a}$ ,  $V_{\zeta_a}$  — проекции вектора абсолютной скорости  $V$  на оси  $\xi_a$ ,  $\eta_a$ ,  $\zeta_a$ . Равенства (1.118) являются формулами счисления абсолютных координат  $\xi_a$ ,  $\eta_a$ ,  $\zeta_a$  местоположения объекта.

По аналогии с (1.33) и рис. 1.4 имеем

$$\left. \begin{aligned} \xi_a &= r \cos \varphi' \cos \lambda_a, & \eta_a &= r \cos \varphi' \sin \lambda_a, \\ \zeta_a &= r \sin \varphi'. \end{aligned} \right\} \quad (1.118a)$$

Положение точки  $M$  местоположения объекта относительно системы координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  можно определить сферическими координатами  $r$ ,  $\varphi'$ ,  $\lambda_a$ ;  $r$  и  $\varphi'$  имеют прежний смысл, так как оси  $\xi$  и  $\zeta_a$  и плоскости  $\xi \eta$  и  $\xi_a \eta_a$  совпадают, а угол  $\lambda_a$  определяет положение меридиональной плоскости, проходящей через точку  $M$  относительно координатной плоскости  $\xi_a \zeta_a$ . Координатная плоскость  $\xi_a \zeta_a$  не участвует во вращении Земли, поэтому имеем

$$\dot{\lambda}_a = U + \dot{\lambda}, \quad (1.119)$$

где  $U = 7,29 \cdot 10^{-5}$  1/сек \*) — угловая скорость вращения Земли. Очевидно, положение точки  $M$  можно определить любой тройкой значений  $(h, \varphi', \lambda_a)$ ,  $(h, \varphi, \lambda_a)$ ,  $(h, \varphi'', \lambda_a)$ , где  $h$ ,  $\varphi'$ ,  $\varphi$  и  $\varphi''$  имеют прежний смысл, а  $\lambda_a$  — только что введенная абсолютная долгота. Подставим в (1.119)  $\dot{\lambda}$ , определенную по любой из формул (1.102), (1.115) и (1.117). Тогда

$$\dot{\lambda}_a = U + \frac{v_x}{R_1 \cos \varphi} = U + \frac{v_{x''}}{(a+h) \cos \varphi''} = U + \frac{v_{x'}}{r \cos \varphi'}, \quad (1.120)$$

но  $v_x = v_{x''} = v_{x'}$  и

$$R_1 \cos \varphi = (a+h) \cos \varphi'' = r \cos \varphi' \quad (1.121a)$$

есть радиус параллели точки  $M$ , поэтому выражения  $UR_1 \cos \varphi$  и т. д. определяют линейную скорость точки, лежащей на параллели  $h$ -эллипсоида с широтой  $\varphi$ , обусловленную вращением Земли, — переносную скорость. Переносная скорость направлена вдоль касательной к параллели на восток, проекции на оси  $y$  ( $y'$ ,  $y''$ ) и  $z$  ( $z'$ ,  $z''$ ) она не дает. Поэтому проекции вектора абсолютной скорости  $V$  и относительной скорости  $v$  на оси  $y$  ( $y'$ ,  $y''$ ) и  $z$  ( $z'$ ,  $z''$ ) совпадают, т. е.  $V_y = v_y$ ,  $V_z = v_z$  и т. д., а проекции на оси  $x$  ( $x'$ ,  $x''$ ) определяются формулами

$$\begin{aligned} V_x &= V_{x''} = V_{x'} = UR_1 \cos \varphi + v_x = \\ &= U(a+h) \cos \varphi'' + v_{x''} = Ur \cos \varphi' + v_{x'}. \end{aligned} \quad (1.121b)$$

В соответствии с (1.121) равенства (1.120) можно переписать в виде

$$\dot{\lambda}_a = \frac{V_x}{R_1 \cos \varphi} = \frac{V_{x''}}{(a+h) \cos \varphi''} = \frac{V_{x'}}{r \cos \varphi'}.$$

Очевидно, формулы счисления координат  $\dot{\varphi}$  ( $\dot{\varphi}''$ ,  $\dot{\varphi}'$ ),  $\dot{\lambda}_a$ ,  $\dot{h}$  выражаются через соответствующие проекции вектора абсолютной

\*) Ссс — средняя солнечная секунда.

скорости  $V$  теми же соотношениями (1.102), (1.116), (1.117), в которых только вместо  $v$  следует писать  $V$  и вместо  $\lambda$  —  $\lambda_a$ . В заключение отметим, что между контравариантными  $v^1, v^2, v^3$  и ковариантными  $v_1, v_2, v_3$  составляющими относительной скорости  $v$  и соответствующими величинами  $V^1, V^2, V^3$  и  $V_1, V_2, V_3$  абсолютной скорости  $V$  существует аналогичная связь, т. е.  $V^1 = V_1 = v_x + UR_1 \cos \varphi$ ,  $v^2 = V^2$ ,  $v^3 = V^3$ ,  $v_2 = V_2$ ,  $v_3 = V_3$ . Формулы счисления  $\lambda_a$ ,  $\varphi$ ,  $h$  будут в этом случае определяться (1.96) и (1.102a) при замене  $\lambda$  на  $\lambda_a$ ,  $v^1, v^2, v^3$  на  $V^1, V^2, V^3$  и  $v_1, v_2, v_3$  на  $V_1, V_2, V_3$  соответственно.

Введенная в этом пункте абсолютная долгота  $\lambda_a$  тесно связана со второй экваториальной системой небесных координат. Если координатная плоскость  $\xi_a \zeta_a$ , не вращающаяся вместе с Землей, будет совпадать с плоскостью круга склонения точки весеннего равноденствия, то  $\lambda_a$  будет совпадать со звездным временем, которое в астрономии обычно обозначают через  $S'$ ; если указанная плоскость будет совпадать с кругом склонения какого-нибудь светила, то  $\lambda_a$  будет совпадать с часовым углом этого светила. Его обозначают обычно через  $t$  [7].

Формулы счисления долготы и широты в географической, геоцентрической и гравитационной системах координат имеют внешнее сходство, поэтому их можно представить в единой обобщенной записи. Введем верхний индекс  $i$ . Будем писать  $x^i, y^i, z^i$  и  $R_1^i, R_2^i$ , причем если индекс  $i$  опустить, то получим соответствующие величины для географической системы координат; если заменить индекс  $i$  штрихом или двумя штрихами, то получим соответствующие величины для геоцентрической и гравитационной систем координат. Нам нужно только условиться, что понимать под  $R_1^i, R_2^i$  и  $R_1^{\prime\prime}, R_2^{\prime\prime}$ , так как раньше такие обозначения не встречались.

Введем для этих величин следующие обозначения:

$$R_1^i = r, \quad R_2^i = r, \quad R_1^{\prime\prime} = (a + h), \quad R_2^{\prime\prime} = (a + h) (1 - \alpha \cos^2 \varphi^{\prime\prime}).$$

Учитывая вышесказанное, запишем проекции абсолютной скорости  $V$  на оси всех трех сопровождающих трехгранников в виде

$$V_{x^i} = UR_1^i \cos \varphi^i + v_{x^i}, \quad V_{y^i} = v_{y^i}, \quad V_{z^i} = v_{z^i}. \quad (1.121)$$

В соответствии с двумя первыми равенствами (1.102), (1.116) и (1.117) получим единую форму записи формул счисления долготы и широты в виде

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{v_{x^i}}{R_1^i \cos \varphi^i}, \\ \varphi^i &= \frac{v_{y^i}}{R_2^i}, \end{aligned} \right\} \quad (1.122)$$

а формулы счисления абсолютной долготы и широты можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \lambda_a &= \frac{V_{x^i}}{R_1^i \cos \varphi^i}, \\ \varphi^i &= \frac{V_{y^i}}{R_2^i}. \end{aligned} \right\} \quad (1.122a)$$

При этом в соответствии с (1.102a) величины  $R_1^i \cos \varphi^i$  при всех верхних индексах имеют одинаковое численное значение.

Нетрудно также показать, что в соответствии с третьим выражением (1.102) и соотношениями (1.117) обобщенную формулу счисления параметра высоты  $h$  можно представить в виде

$$h = \frac{1}{\alpha} [v_{y^i} \sin(\varphi - \varphi^i) + v_{z^i} \cos(\varphi - \varphi^i)], \quad (1.122b)$$

где  $\alpha$  определим из (1.84). Так как проекции относительной и абсолютной скоростей на оси  $y^i, z^i$  совпадают, то формула (1.122b) останется справедливой в том случае, если в нее вместо  $v_{y^i}, v_{z^i}$  подставить соответственно  $V_{y^i}, V_{z^i}$ . Обобщения формул счисления координат (1.122), (1.122a) и (1.122b) окажутся в дальнейшем весьма полезными.

**1.3.7. Другие модели криволинейных координат.** Связь между геоцентрическими и прямоугольными координатами  $\xi, \eta, \zeta$  и криволинейными координатами с разными видами широт определяется уравнениями (1.80), (1.82) и (1.83).

При высотах полета, не превышающих 30 км, безразмерная величина  $\frac{h}{a}$  является малой величиной порядка коэффициента сжатия  $\alpha$ . Тогда с точностью до величины второго порядка малости относительно  $\alpha$  и  $\frac{h}{a}$  указанные выше соотношения можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \left( \frac{a}{\kappa_1} + h \right) \cos \varphi' \cos \lambda, \\ \eta &= \left( \frac{a}{\kappa_1} + h \right) \cos \varphi' \sin \lambda, \\ \zeta &= \left( \frac{a}{\kappa_1} + h \right) \sin \varphi', \end{aligned} \right\} \quad (1.123)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (a + h) \cos \varphi'' \cos \lambda, \\ \eta &= (a + h) \cos \varphi'' \sin \lambda, \\ \zeta &= [(1 - \alpha)a + h] \sin \varphi'', \end{aligned} \right\} \quad (1.124)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \left( \frac{a}{\kappa} + h \right) \cos \varphi \cos \lambda, \\ \eta &= \left( \frac{a}{\kappa} + h \right) \cos \varphi \sin \lambda, \\ \zeta &= \left[ \frac{(1 - e^2)a}{\kappa} + h \right] \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (1.125)$$

где  $\kappa_1$  и  $\kappa$  определяется по формулам (1.81) и (1.84). Полученные таким образом соотношения (1.123) — (1.125) имеют, однако, более общий смысл. Сначала заметим, что выражения (1.123) — (1.125) при  $h = 0$  (см. (1.80), (1.82) и (1.83)) определяют координаты точек земного сфероида. Если из любой точки земного сфероида отложить вдоль осей  $z'$ ,  $z''$ ,  $z$  отрезок длины  $h$ , то нетрудно показать, что координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  полученных таким образом точек будут определяться соответственно уравнениями (1.123), (1.124), (1.125). Так, например, из рис. 1.6 видно, что проекции отрезка  $Mz = h$  на оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  соответственно равны  $h \cos \varphi \cos \lambda$ ,  $h \cos \varphi \sin \lambda$ ,  $h \sin \varphi$ . Фигурирующая в уравнениях (1.123), (1.124) и (1.125) величина  $h$  является в общем случае соответственно геоцентрической, гравитационной и географической высотой объекта.

При ограничениях  $h < 30$  км все три высоты можно считать совпадающими между собой и с барометрической высотой объекта с ошибкой порядка  $\alpha h$ ; так как  $\alpha \approx 1/300$ , то расхождения этих высот будут порядка 100 м на высоте 30 км, 50 м на высоте 15 км, 15 м на высоте 5 км и т. д.

При  $h = \text{const}$  уравнения (1.123) — (1.125) определяют поверхности постоянной высоты, которые уже не являются подобными эллипсоидами вращения, имеющими один и тот же параметр  $\alpha$ . Эти поверхности при  $h < 30$  км с точностью до величин второго порядка малости относительно  $\alpha$  и  $h/a$  можно рассматривать и как поверхности уровня силы тяжести, и как изобарические поверхности.

Однако  $h$ -эллипсоиды (эллипсоиды вращения) имеют то преимущество, что их геометрия совпадает с геометрией земного сфероида, которая хорошо изучена.

По соотношениям (1.123) — (1.125) можно получить соответствующие формулы счисления. Мы выпишем формулы счисления в конечном виде, полагая, что по образцу рассуждений, проведенных в примечаниях к п. 1.3.4, читатель сможет сам восстановить все промежуточные выражения.

Формулы счисления имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{v_{x'}}{(r_0 + h) \cos \varphi'}, \\ \varphi' &= \frac{v_{y'}}{r_0 + h}, \\ \dot{h} &= \frac{e'^2 a \sin \varphi' \cos \varphi'}{\kappa_1^3 (r_0 + h)} v_{y'} + v_{z'}, \end{aligned} \right\} \quad (1.126)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{v_{x''}}{(a + h) \cos \varphi''}, \\ \varphi'' &= \frac{v_{y''}}{a(1 - \alpha \cos^2 \varphi'') + h}, \\ \dot{h} &= \frac{aa \sin \varphi'' \cos \varphi''}{a(1 - \alpha \cos^2 \varphi'') + h} v_{y''} + v_{z''}, \end{aligned} \right\} \quad (1.127)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{v_x}{(R_{10} + h) \cos \varphi}, \\ \varphi &= \frac{v_y}{R_{20} + h}, \\ \dot{h} &= v_z, \end{aligned} \right\} \quad (1.128)$$

где  $r_0$ ,  $R_{10}$ ,  $R_{20}$  определяются формулами (1.17), (1.96), (1.97) при  $h = 0$ ,  $\kappa$  — формулой (1.81).

Мы не вводим здесь специальных обозначений для географической, гравитационной и геоцентрической высот. В соотношениях (1.126) — (1.128) наименование высоты  $h$  совпадает с наименованием широты, фигурирующей в этих выражениях.

При  $h < 30$  км все приведенные здесь высоты с точностью до величины второго порядка малости относительно сжатия  $\alpha$  и  $\frac{h}{a}$  совпадают с барометрической высотой  $h$ . В этом последнем случае с той же самой точностью формулы счисления (1.126), (1.127), (1.128) совпадают соответственно с формулами счисления (1.117), (1.116), (1.102). Автор предлагает необходимые оценки выполнить читателю самостоятельно.

**1.3.8. Угловые скорости сопровождающих трехгранников.** В п. 1.2.6 были введены сопровождающие трехгранники  $xyz$ ,  $x'y'z'$  и  $x''y''z''$ . Вершины этих трехгранников совмещены с точкой  $M$  местоположения объекта, оси  $z$ ,  $z'$  и  $z''$  направлены соответственно вдоль географической, геоцентрической и гравитационной вертикалей вверх, оси  $y$ ,  $y'$  и  $y''$  лежат в плоскости меридиана (см. рис. 1.5), оси  $x$ ,  $x'$  и  $x''$  совпадают между собой и направлены по касательной к параллели на восток (см. рис. 1.6).

Введем невращающийся в абсолютном пространстве трехгранник  $x_a y_a z_a$  с вершиной в точке  $M$ . Мы можем, например, направить

ось  $z_a$  параллельно оси  $\xi_a$ , ось  $x_a$  параллельно оси  $\eta_a$  и ось  $y_a$  параллельно оси  $\zeta_a$  абсолютной системы координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ . Тогда трехгранник  $x_a y_a z_a$  можно совместить с сопровождающими трехгранниками  $x y z$ ,  $x' y' z'$  и  $x'' y'' z''$  двумя последовательными поворотами: сначала вокруг оси  $\zeta_a$  ( $y_a$ ) на угол  $\lambda_a$ , равный абсолютной долготе точки  $M$ , а затем вокруг нового положения оси  $x_a$ , которое совпадает с осями  $x$ ,  $x'$  и  $x''$ , на угол  $-\varphi$ ,  $-\varphi'$ ,  $-\varphi''$  соответственно. Эти повороты определяют вращение сопровождающих трехгранников в абсолютном пространстве. Составляющими абсолютной угловой скорости сопровождающих трехгранников являются  $\dot{\lambda}_a$  и  $\varphi$  ( $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ), которые направлены вдоль полярной оси Земли к северному полюсу (ось  $\zeta_a$ ) и вдоль отрицательной оси  $x$  ( $x'$ ,  $x''$ ) соответственно. Проекция абсолютной угловой скорости географического трехгранника  $x y z$  на собственные оси можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= -\dot{\varphi}, \\ \omega_y &= \dot{\lambda}_a \cos \varphi = (U + \dot{\lambda}) \cos \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\lambda}_a \sin \varphi = (U + \dot{\lambda}) \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.129)$$

При этом мы использовали третью строку таблицы направляющих косинусов (1.76) (оси  $\zeta_a$  и  $\zeta$  совпадают) и формулу (1.119). Проекция  $\omega_{x'}$ ,  $\omega_{y'}$ ,  $\omega_{z'}$  и  $\omega_{x''}$ ,  $\omega_{y''}$ ,  $\omega_{z''}$  абсолютной угловой скорости геоцентрического  $x' y' z'$  и гравитационного  $x'' y'' z''$  трехгранников получаются из (1.129) заменой  $\varphi$  на  $\varphi'$  и  $\varphi''$  соответственно. Формулы (1.129) можно выразить также через соответствующие проекции относительной скорости  $v$  и абсолютной скорости  $V$  точки  $M$ . Учитывая формулы (1.102), (1.117), (1.116), (1.122), а также тот факт, что  $v_y = V_y$ ,  $v_{y'} = V_{y'}$ ,  $v_{y''} = V_{y''}$ , преобразуем (1.129) и аналогичные им формулы к виду

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= -\frac{v_y}{R_2} = -\frac{V_y}{R_2}, \\ \omega_y &= U \cos \varphi + \frac{v_x}{R_1} = \frac{V_x}{R_1}, \\ \omega_z &= U \sin \varphi + \frac{v_x}{R_1} \operatorname{tg} \varphi = \frac{V_x}{R_1} \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (1.130)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x'} &= -\frac{v_{y'}}{r} = -\frac{V_{y'}}{r}, \\ \omega_{y'} &= U \cos \varphi' + \frac{v_{x'}}{r} = \frac{V_{x'}}{r}, \\ \omega_{z'} &= U \sin \varphi' + \frac{v_{x'}}{r} \operatorname{tg} \varphi' = \frac{V_{x'}}{r} \operatorname{tg} \varphi' \end{aligned} \right\} \quad (1.131)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x''} &= -\frac{v_{y''}}{(a+h)(1-\alpha \cos^2 \varphi'')} = -\frac{V_{y''}}{(a+h)(1-\alpha \cos^2 \varphi'')}, \\ \omega_{y''} &= U \cos \varphi'' + \frac{v_{x''}}{a+h} = \frac{V_{x''}}{a+h}, \\ \omega_{z''} &= U \sin \varphi'' + \frac{v_{x''}}{a+h} \operatorname{tg} \varphi'' = \frac{V_{x''}}{a+h} \operatorname{tg} \varphi''. \end{aligned} \right\} \quad (1.132)$$

В приведенных формулах  $R_1$  и  $R_2$  определяются по (1.97), а  $-r$  формулой (1.17). В формулах (1.129)  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\lambda}$  определяют относительную угловую скорость сопровождающего трехгранника, т. е. скорость относительно системы координат  $\xi \eta \zeta$ , жестко связанной с Землей, а  $U$  — переносную угловую скорость, т. е. скорость вращения трехгранника  $\xi \eta \zeta$  относительно трехгранника  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ . В формулах (1.130) — (1.132) относительная угловая скорость сопровождающих трехгранников выражена через относительную линейную скорость  $v$  точки  $M$ . Выпишем отдельно выражения для проекций  $U_{x^i}$ ,  $U_{y^i}$ ,  $U_{z^i}$  переносной и  $\omega'_{x^i}$ ,  $\omega'_{y^i}$ ,  $\omega'_{z^i}$  относительной угловых скоростей сопровождающих трехгранников. Эти формулы выпишем в виде

$$U_{x^i} = 0, \quad U_{y^i} = U \cos \varphi^i, \quad U_{z^i} = U \sin \varphi^i, \quad (1.133)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega'_{x^i} &= -\dot{\varphi}^i = -\frac{v_{y^i}}{R_2^i}, \quad \omega'_{y^i} = \dot{\lambda} \cos \varphi^i = \frac{v_{x^i}}{R_1^i}, \\ \omega'_{z^i} &= \dot{\lambda} \sin \varphi^i = \frac{v_{x^i}}{R_1^i} \operatorname{tg} \varphi^i. \end{aligned} \right\} \quad (1.134)$$

Формулы (1.133) и (1.134) будут справедливы для трехгранников  $x y z$ ,  $x' y' z'$ ,  $x'' y'' z''$  соответственно, если в них опустить индекс или заменить его на штрих и два штриха. Здесь использованы обозначения:

$$\left. \begin{aligned} R_1' &= R_2' = r, \quad R_1'' = a + h, \\ R_2'' &= (a + h)(1 - \alpha \cos^2 \varphi''), \end{aligned} \right\} \quad (1.135)$$

а  $R_1$  и  $R_2$  определяются формулами (1.97)\*).

\*) См. п. 1.3.6.

В новых обозначениях формулы (1.130) — (1.132) можно также представить в единой записи

$$\left. \begin{aligned} \omega_{xi} &= -\frac{v_{yi}}{R_2^i} = -\frac{V_{yi}}{R_2^i} = \omega'_{xi}, \\ \omega_{yi} &= U \cos \varphi^i + \frac{v_{xi}}{R_1^i} = \frac{V_{xi}}{R_1^i} = U \cos \varphi^i + \omega'_{yi}, \\ \omega_{zi} &= U \sin \varphi^i + \frac{v_{xi}}{R_1^i} \operatorname{tg} \varphi^i = \frac{V_{xi}}{R_1^i} \operatorname{tg} \varphi^i = \\ &= U \sin \varphi^i + \omega'_{yi} \operatorname{tg} \varphi^i. \end{aligned} \right\} (1.135a)$$

**1.3.9. Ортодромические системы координат.** Положение точки  $M$  местоположения объекта на  $h$ -эллипсоиде однозначно определяется направлением местной вертикали: географической, геоцентрической, гравитационной. Направление местной вертикали мы определяли двумя углами: широтой  $\varphi$  ( $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ) и долготой  $\lambda$ . Широта есть угол, который образует местная вертикаль с плоскостью экватора, а  $\lambda$  — угол между проекцией местной вертикали на плоскость экватора и линией пересечения гринвичского меридиана с плоскостью экватора. Здесь плоскость экватора является опорной плоскостью для отсчета широты, а линия пересечения плоскости гринвичского меридиана с плоскостью экватора — опорной линией для отсчета долготы \*). Если стать на такую точку зрения, то легко ввести обобщенные криволинейные координаты. Для этой цели мы за опорную плоскость для отсчета широты выберем произвольную плоскость, жестко связанную с Землей и проходящую через центр  $h$ -эллипсоидов (центр Земли), а за опорную линию для отсчета долготы выберем для определенности линию пересечения этой плоскости с плоскостью экватора. Для дальнейшего изложения воспользуемся методом, широко применяемым в сферической астрономии. Введем вспомогательную единичную сферу, центр которой совместим с центром Земли. Указанная выше опорная плоскость пересекает эту сферу по большому кругу, который будем называть *ортодромией*, не вкладывая пока в это наименование особого содержания. Плоскость экватора также пересекает единичную сферу по большому кругу. Этот круг будем называть *экватором единичной сферы*. Диаметр единичной сферы, перпендикулярный плоскости ортодромии, будем называть *осью ортодромии*. Ось ортодромии пересекает единичную сферу в двух точках. Ту точку, которая лежит в северном полушарии, будем называть *северным полюсом ортодромии* и обозначить буквой  $\Pi^i$ , противоположную точку  $\Pi'^i$  — *южным полюсом ортодромии*. Большие полуокружности, соединяющие полюсы ортодромии,

\*) Такую систему координат будем называть теперь экваториальной.

будем называть *ортодромическими меридианами*, а малые круги, полученные пересечением сферы плоскостями, перпендикулярными оси ортодромии, — *ортодромическими параллелями*. Сама ортодромия является «наибольшей» параллелью — ортодромическим экватором. Очевидно, при совпадении плоскости ортодромии с плоскостью экватора, полюсы ортодромии  $\Pi^i$  и  $\Pi'^i$  становятся обычными полюсами  $P$  и  $P'$ , и ортодромические меридианы и параллели превращаются в обычные, т. е. географические меридианы и параллели. Ортодромия пересекается с географическим экватором \*) в двух точках — узлах ортодромии. Тот узел, который лежит к «востоку» от меридиана северного полюса ортодромии (он отстоит от него на  $90^\circ$ ), будем называть *восходящим узлом ортодромии* и обозначать буквой  $\mathcal{E}$ . Геоцентрическая вертикаль точек  $h$ -эллипсоида проходит через их общий центр, совпадающий с центром единичной сферы, географические и гравитационные вертикали не проходят через центр сферы, кроме вертикалей полюсов и точек экватора  $h$ -эллипсоидов. Как это принято в сферической астрономии, мы все местные вертикали будем переносить параллельно самим себе и откладывать их из центра единичной сферы. Тогда они будут пересекать единичную сферу в точках, которые будут являться соответственными точками для точек  $h$ -эллипсоидов. Причем, естественно, данной точке  $h$ -эллипсоида, в зависимости от выбора типа местной вертикали, будут соответствовать различные точки единичной сферы (кроме полюсов и точек экватора). Поэтому каждый раз следует оговорить, посредством какой местной вертикали (географической, геоцентрической, гравитационной) устанавливается соответствие между точками единичной сферы с точками  $h$ -эллипсоидов. Положение точки на единичной сфере, которое однозначно определяет направление местной вертикали, определяется ортодромической долготой  $\Lambda^i$  и ортодромической широтой  $\Phi^i$ . Ортодромическая долгота определяется дугой ортодромического экватора от восходящего узла ортодромии до точки пересечения ортодромического меридиана точки  $M^i$  с ортодромическим экватором \*). Ортодромическая долгота изменяется в пределах от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  к «востоку». Ортодромическая широта определяется дугой ортодромического меридиана от точки его пересечения с ортодромическим экватором до точки  $M^i$ . Ортодромическая широта изменяется от  $-90^\circ$  до  $90^\circ$ . Точкам  $M^i$ , находящимся в том полушарии, где расположен северный полюс ортодромии, соответствуют  $\Phi^i > 0$ . Ортодромическая широтно-долготная сетка координат изображена на рис. 1.8. На

\*) Географический экватор будем именовать также просто *экватором*, а ортодромический экватор всегда ортодромическим; то же наименование сохраним для меридианов.

\*\*) Ортодромический меридиан, проходящий через восходящий узел, будет нулевым ортодромическим меридианом.

рис. 1.8 изображен также сопровождающий трехгранник  $x_0^i y_0^i z_0^i$ , соответствующий ортодромической сетке координат. Ось  $z_0^i$  направлена по нормали к сфере вверх, ось  $y_0^i$  — по касательной к ортодромическому меридиану к северному полюсу ортодромии  $\Pi$ , а ось  $x_0^i$  — по касательной к ортодромической параллели на «восток». Верхний индекс  $i$  должен различать, с помощью какой местной вертикали производилось отображение точек  $h$ -эллипсоида на точки единичной сферы. Для географической вертикали мы должны писать  $\Lambda$ ,  $\Phi$  и  $x_0^i y_0^i z_0^i$ , для геоцентрической вертикали —  $\Lambda'$ ,  $\Phi'$  и  $x_0^i y_0^i z_0^i$  и, наконец, для гравитационной вертикали —  $\Lambda''$ ,  $\Phi''$  и  $x_0^i y_0^i z_0^i$ . Заметим, что в ортодромической сетке не только широты  $\Phi$ ,  $\Phi'$ ,  $\Phi''$  данной точки  $h$ -эллипсоида отличаются друг от друга, но отличаются также и ее долготы  $\Lambda$ ,  $\Lambda'$ ,  $\Lambda''$ . Это объясняется тем, что точки единичной сферы, полученные отображением данной точки  $h$ -эллипсоида с помощью географической, геоцентрической и гравитационной вертикалей, лежат на разных ортодромических меридианах. Все эти вертикали лежат в одной и той же плоскости обычного меридиана, поэтому при совпадении  $\Pi^i$  с  $P$  мы имеем разные широты  $\Phi$ ,  $\Phi'$ ,  $\Phi''$  и одну долготу  $\lambda$ . Кроме сопровождающего трехгранника  $x_0^i y_0^i z_0^i$  с ортодромической системой координат можно сопоставить трехгранник  $\xi_0^i \eta_0^i \zeta_0^i$  с вершиной в центре Земли \*). Ось  $\zeta_0^i$  этого трехгранника направлена вдоль оси ортодромии в сторону ее северного полюса  $\Pi^i$ , ось  $\xi_0^i$  расположим в плоскости обычного (т. е. географического) экватора и направим ее в сторону восходящего узла  $\mathcal{E}$ , ось  $\eta_0^i$  должна с осями  $\xi_0^i$  и  $\zeta_0^i$  образовать правый трехгранник  $\xi_0^i \eta_0^i \zeta_0^i$ . Координатная плоскость  $\xi_0^i \zeta_0^i$ , очевидно, будет совпадать с плоскостью нулевого ортодромического меридиана, от которого отсчитываются долготы  $\Lambda^i$ . Геоцентрический трехгранник  $\xi_0^i \eta_0^i \zeta_0^i$  для ортодромических координат  $\Lambda^i$ ,  $\Phi^i$  на единичной сфере играет такую же

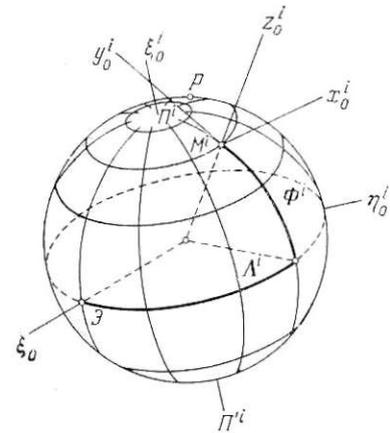


Рис. 1.8. Ортодромическая широтно-долготная координатная сетка.

\*) Ось  $\xi_0$  и точку  $\mathcal{E}$  не будем обозначать индексом  $i$ , так как они лежат в плоскости экватора, где направления географической, геоцентрической и гравитационной вертикалей совпадают.

роль, как геоцентрический трехгранник  $\xi \eta \zeta$  (см. рис. 1.4) для экваториальных координат  $\lambda$ ,  $\Phi^i$ . Ортодромическая широтно-долготная сетка координат однозначно определяется положением одного из полюсов ортодромии. Мы будем задавать положение северного полюса ортодромии его координатами  $\lambda_{\Pi}$  и  $\Phi_{\Pi}^i$ . Здесь и ниже верхний индекс  $i$  имеет прежний смысл, т. е. он указывает на вид вертикали, используемой при точечном преобразовании  $h$ -эллипсоида на единичную сферу. Следовательно,  $\Phi_{\Pi}^i$  будет равняться  $\Phi_{\Pi}$ ,  $\Phi_{\Pi}^i$  или  $\Phi_{\Pi}''$ .

Будем считать сейчас, что координаты  $\lambda_{\Pi}$ ,  $\Phi_{\Pi}^i$  заданы, при этом условию установим связь между координатами  $\lambda$ ,  $\Phi^i$  и  $\Lambda^i$ ,  $\Phi^i$  точки  $M^i$ . Эта задача просто решается на вспомогательной сфере с помощью формул сферической тригонометрии. На рис. 1.9 изображена единичная сфера, на которой представлен сферический треугольник  $\Pi^i P M^i$ . Вершины этого треугольника находятся в северном полюсе ортодромии  $\Pi^i$ , географическом северном полюсе единичной сферы  $P$  и в точке  $M^i$ , являющейся образом точки  $M$ . Сторонами сферического треугольника являются: дуга  $\Pi^i P$  меридиана полюса  $\Pi^i$ , дуга  $P M^i$  меридиана точки  $M^i$  и дуга  $\Pi^i M^i$  ортодромического меридиана точки  $M^i$ . Эти стороны соответственно равны  $90^\circ - \Phi_{\Pi}^i$ ,  $90^\circ - \Phi^i$ ,  $90^\circ - \Phi^i$ ; углы при вершинах  $\Pi^i$ ,  $P$ ,  $M^i$  соответственно равны  $90^\circ - \Lambda^i$ ,  $\lambda - \lambda_{\Pi}$ ,  $360^\circ - \chi_0^i$ . Мы считаем, что  $\chi_0^i$  определяет угол между осями  $y^i$ ,  $y_0^i$ , которые направлены по касательным к меридиану в сторону полюса  $P$  и по касательной к ортодромическому меридиану в сторону полюса ортодромии  $\Pi^i$  соответственно. Если смотреть сверху, то угол  $\chi_0^i$  изменяется по часовой стрелке от оси  $y^i$  к оси  $y_0^i$ . Определяя в сферическом треугольнике  $\Pi^i P M^i$  сторону  $\Pi^i M^i$  по теореме косинусов, применяя к сторонам  $\Pi^i M^i$  и  $P M^i$  теорему синусов и применяя третью формулу сферической тригонометрии (см. приложение), предварительно обозначив вершину  $\Pi^i$  через  $b$  и сторону  $\Pi^i M^i$  через  $a$ , получим формулы преобразования в виде

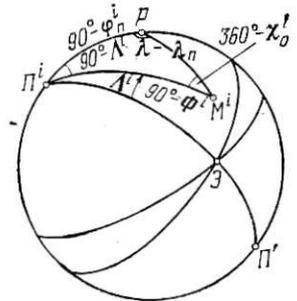


Рис. 1.9. Ортодромический сферический треугольник на единичной сфере.

$$\left. \begin{aligned} \sin \Phi^i &= \sin \Phi_{\Pi}^i \sin \Phi^i + \cos \Phi_{\Pi}^i \cos \Phi^i \cos (\lambda - \lambda_{\Pi}), \\ \cos \Lambda^i \cos \Phi^i &= \sin (\lambda - \lambda_{\Pi}) \cos \Phi^i, \\ \sin \Lambda^i \cos \Phi^i &= \cos \Phi_{\Pi}^i \sin \Phi^i - \sin \Phi_{\Pi}^i \cos \Phi^i \cos (\lambda - \lambda_{\Pi}). \end{aligned} \right\} (1.136)$$

Аналогично можно получить формулы обратного преобразования

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi^i &= \sin \varphi_{\Pi}^i \sin \Phi^i + \cos \varphi_{\Pi}^i \cos \Phi^i \sin \Lambda^i, \\ \sin (\lambda - \lambda_{\Pi}) \cos \varphi^i &= \cos \Lambda^i \cos \Phi^i, \\ \cos (\lambda - \lambda_{\Pi}) \cos \varphi^i &= \cos \varphi_{\Pi}^i \sin \Phi^i - \sin \varphi_{\Pi}^i \cos \Phi^i \sin \Lambda^i. \end{aligned} \right\} (1.137)$$

Кроме этих формул нам потребуются соотношения для определения угла  $\chi_o^i$ . Эти соотношения получим, применяя к сторонам  $PM^i$  и  $P^iP$  теорему синусов и третью формулу сферической тригонометрии, обозначив предварительно вершину  $M$  через  $b$  и сторону  $PM^i$  через  $a$ .

Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \sin \chi_o^i \cos \varphi^i &= -\cos \varphi_{\Pi}^i \cos \Lambda^i, \\ \cos \chi_o^i \cos \varphi^i &= \sin \varphi_{\Pi}^i \cos \Phi^i - \cos \varphi_{\Pi}^i \sin \Phi^i \sin \Lambda^i. \end{aligned} \right\} (1.138)$$

Из этих формул можно непосредственно определить  $\chi_o^i$ :

$$\operatorname{ctg} \chi_o^i = \frac{\sin \varphi_{\Pi}^i \cos \Phi^i - \cos \varphi_{\Pi}^i \sin \Phi^i \sin \Lambda^i}{-\cos \varphi_{\Pi}^i \cos \Lambda^i}. \quad (1.139)$$

При вычислении нужно фиксировать знаки числителя и знаменателя. Тогда, учитывая, что всегда  $\cos \varphi^i > 0$ , мы по  $\operatorname{ctg} \chi_o$  сможем определить  $\chi_o^i$  в диапазоне его изменения от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ . Теперь рассмотрим вопрос о разумном задании положения северного полюса ортодромии  $\Pi$ . Мы станем на такую точку зрения. Пусть заданы координаты  $\lambda_1, \varphi_1^i$  и  $\lambda_2, \varphi_2^i$  двух точек  $M_1$  и  $M_2$  на  $h$ -эллипсоиде, которые можно принять за начальный и конечный пункты маршрута движения объекта или какого-нибудь его отдельного участка. Пусть, далее,  $M_1^i$  и  $M_2^i$  есть образы точек  $M_1$  и  $M_2$  на единичной сфере, которые, естественно, имеют те же координаты  $\lambda_1, \varphi_1^i$  и  $\lambda_2, \varphi_2^i$ . Через точки  $M_1^i$  и  $M_2^i$  проведем ортодромию, это можно сделать единственным способом. Северный полюс  $\Pi^i$  этой ортодромии примем за полюс ортодромической широтно-долготной сетки координат, а следовательно, построенную ортодромию за ее ортодромический экватор. Тогда задача сводится к определению координат  $\lambda_{\Pi}, \varphi_{\Pi}^i$  северного полюса ортодромии по координатам  $\lambda_1, \varphi_1^i$  и  $\lambda_2, \varphi_2^i$  двух точек  $M_1^i$  и  $M_2^i$ , через которые проходит эта ортодромия.

Если точка  $M_1^i$  единичной сферы лежит на ортодромическом экваторе (см. рис. 1.9), то ее ортодромическая широта равняется нулю. Рассмотрим сферический треугольник  $\Pi^i PM_1^i$  в предположении, что точка  $M_1^i$  лежит на ортодромическом экваторе; тогда сторона  $\Pi^i M_1^i$  будет равняться  $90^\circ$ . Сторону  $\Pi^i P$  этого треуголь-

ника определим по теореме косинусов, а затем, обозначив вершины  $M_1^i$  и  $P$  соответственно через  $A$  и  $B$ , применим шестую формулу сферической тригонометрии (см. приложение). Результат запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_{\Pi}^i &= \cos \varphi_1^i \cos \chi_{o1}^i, \\ \operatorname{ctg} (\lambda_1 - \lambda_{\Pi}) &= -\sin \varphi_1^i \operatorname{ctg} \chi_{o1}^i. \end{aligned} \right\} (1.140)$$

Эти формулы определяют  $\lambda_{\Pi}, \varphi_{\Pi}^i$  через координаты  $\lambda_1, \varphi_1^i$  точки  $M_1^i$  и угол  $\chi_{o1}^i$  между меридианом и ортодромическим меридианом в точке  $M_1^i$ . Этот угол мы определим из сферического треугольника  $PM_1^i M_2^i$ , изображенного на рис. 1.10.

Угол при вершине  $M_1^i$  этого треугольника обозначим через  $\psi_1^i$ . Угол  $\psi_1^i$  образует ортодромия с меридианом, он считается положительным от севера к востоку. Углы  $\chi_{o1}^i$  и  $\psi_1^i$  связаны соотношением  $360^\circ - \chi_{o1}^i = 90^\circ - \psi_1^i$ , из которого получим, что  $\operatorname{tg} \chi_{o1}^i = -\operatorname{ctg} \psi_1^i$ . Обозначив предварительно вершины  $P$  и  $M_1^i$  прямоугольника  $PM_1^i M_2^i$  через  $A$  и  $B$  соответственно, применим шестую формулу сферической тригонометрии.

Тогда после несложных преобразований получим

$$\operatorname{tg} \chi_{o1}^i = -\operatorname{ctg} \psi_1^i = \frac{\sin \varphi_1^i \cos \varphi_2^i \cos (\lambda_2 - \lambda_1) - \cos \varphi_1^i \sin \varphi_2^i}{\cos \varphi_2^i \sin (\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad (1.141)$$

так как стороны  $PM_1^i$  и  $PM_2^i$  равны соответственно  $90^\circ - \varphi_1^i$  и  $90^\circ - \varphi_2^i$ , а угол при вершине  $P$  равняется  $\lambda_2 - \lambda_1$ . Таким образом формулы (1.140) и (1.141) решают поставленную задачу. На  $h$ -эллипсоиде мы выбрали две точки  $M_1$  и  $M_2$  их положения можно задать координатами  $\lambda_1, \varphi_1$  и  $\lambda_2, \varphi_2$  или  $\lambda_1, \varphi_1$  и  $\lambda_2, \varphi_2$ , или  $\lambda_1, \varphi_1$  и  $\lambda_2, \varphi_2$ . Для каждой точки широты  $\varphi, \varphi', \varphi''$  удовлетворяют соотношениям (1.8) и (1.9). На единичной сфере каждой точке  $M_1$  и  $M_2$  соответствуют три различные точки  $M_1, M_1', M_1''$  и  $M_2, M_2', M_2''$  с координатами  $(\lambda_1, \varphi_1), (\lambda_1, \varphi_1'), (\lambda_1, \varphi_1'')$  и  $(\lambda_2, \varphi_2), (\lambda_2, \varphi_2'), (\lambda_2, \varphi_2'')$ , которые определяют три ортодромии.

Полюсы этих ортодромий имеют координаты  $(\lambda_{\Pi}, \varphi_{\Pi}), (\lambda_{\Pi}, \varphi_{\Pi}')$ ,  $(\lambda_{\Pi}, \varphi_{\Pi}'' )$ . Эти полюсы лежат в плоскости меридиана, соответствующего долготе  $\lambda_{\Pi}$ , а оси ортодромий составляют с плоскостью эк-

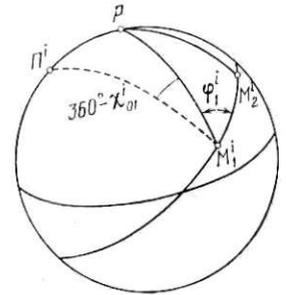


Рис. 1.10. Сферические треугольники с вершинами  $\mu_1^i$  и  $\mu_2^i$  на ортодромическом экваторе.

ватора углы  $\varphi_{\Pi}$ ,  $\varphi'_{\Pi}$ ,  $\varphi''_{\Pi}$ . Широты  $\varphi_{\Pi}$ ,  $\varphi'_{\Pi}$ ,  $\varphi''_{\Pi}$  тоже удовлетворяют соотношениям (1.8), (1.9). Все три ортодромии имеют общие узлы, поэтому их плоскости повернуты относительно друг друга вокруг общей линии узлов. Точка  $B^i$  ортодромии с наибольшей широтой называется *точкой вертекса* или просто *вертексом*. Точка вертекса лежит в плоскости меридиана полюса ортодромии. Ее радиус-вектор перпендикулярен радиусу-вектору полюса ортодромии, поэтому имеет место равенство  $\varphi'_B = 90^\circ - \varphi'_{\Pi}$ , где  $\varphi'_B$  — широта точки вертекса.

Широта вертекса  $\varphi'_B$  определяет наклон плоскости ортодромии к плоскости экватора. Для указанных выше трех ортодромий имеем  $\varphi'_B < \varphi''_B < \varphi_B$ . По отношению к плоскости экватора более полого идет плоскость «геоцентрической» ортодромии, а наиболее круто — плоскость «географической» ортодромии. Точки  $M$ ,  $M'$ ,  $M''$  трех ортодромий, лежащие на одном меридиане, соответствуют одной и той же точке  $h$ -эллипсоида.

Перейдем к выводу формул счисления ортодромических координат. Производные  $\dot{\Lambda}^i$  и  $\dot{\Phi}^i$  этих углов по времени определяют угловую скорость трехгранника  $x^i_0 y^i_0 z^i_0$  по отношению к трехграннику  $\xi^i_0 \eta^i_0 \zeta^i_0$ . Они же — составляющие  $\dot{\Lambda}^i$  и  $\dot{\Phi}^i$  этой относительной скорости соответственно направлены вдоль оси  $\zeta^i_0$  и отрицательной полуоси  $x^i_0$ . Отсюда проекции  $\omega'_{x^i_0}$ ,  $\omega'_{y^i_0}$ ,  $\omega'_{z^i_0}$  относительной угловой скорости трехгранника  $x^i_0 y^i_0 z^i_0$  на его оси будут определяться соотношениями (см. рис. 1.8)

$$\left. \begin{aligned} \omega'_{x^i_0} &= -\dot{\Phi}^i, \\ \omega'_{y^i_0} &= \dot{\Lambda}^i \cos \Phi^i, \\ \omega'_{z^i_0} &= \dot{\Lambda}^i \sin \Phi^i. \end{aligned} \right\} \quad (1.142)$$

В частном случае, когда ортодромическая система координат совпадает с экваториальной, компоненты относительной угловой скорости сопровождающего трехгранника  $x^i y^i z^i$  определяются формулами (1.134). В (1.134) и (1.142)  $\omega'_{x^i_0}$ ,  $\omega'_{y^i_0}$ ,  $\omega'_{x^i_0}$ ,  $\omega'_{y^i_0}$  суть проекции угловой скорости вращения совпадающих между собой осей  $z^i$  и  $z^i_0$ , изображающих соответствующую вертикаль в точке  $M$ , на оси  $x^i$ ,  $y^i$  и  $x^i_0$ ,  $y^i_0$ . Поэтому они связаны между собой формулами преобразования координат. Вспоминая, что  $\chi_0$  есть угол между осями  $y^i$  и  $y^i_0$  и что при  $\chi_0 > 0$  ось  $y^i_0$  поворачивается по часовой стрелке (если смотреть сверху) по отношению

к оси  $y^i$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \omega'_{x^i_0} &= \omega'_{x^i} \cos \chi_0 - \omega'_{y^i} \sin \chi_0, \\ \omega'_{y^i_0} &= \omega'_{x^i} \sin \chi_0 + \omega'_{y^i} \cos \chi_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.143)$$

Кроме того, будем иметь для относительной линейной скорости

$$\left. \begin{aligned} v_{x^i_0} &= v_{x^i} \cos \chi_0 + v_{y^i} \sin \chi_0, \\ v_{y^i_0} &= -v_{x^i} \sin \chi_0 + v_{y^i} \cos \chi_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.144)$$

Подставляя в (1.143)  $\omega'_{x^i}$ ,  $\omega'_{y^i}$  из (1.134) и используя (1.144), получим после несложных преобразований

$$\left. \begin{aligned} \omega'_{x^i_0} &= - \left( \frac{v_{y^i_0}}{R^i_{y^i_0}} - \frac{v_{x^i_0}}{R^i_{x^i_0}} \right), \\ \omega'_{y^i_0} &= \frac{v_{x^i_0}}{R^i_{x^i_0}} - \frac{v_{y^i_0}}{R^i_{y^i_0}}, \end{aligned} \right\} \quad (1.145)$$

где \*)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R^i_{y^i_0}} &= \frac{\cos^2 \chi_0}{R^i_2} + \frac{\sin^2 \chi_0}{R^i_1}, \\ \frac{1}{R^i_{x^i_0}} &= \frac{\sin^2 \chi_0}{R^i_2} + \frac{\cos^2 \chi_0}{R^i_1}, \\ \frac{1}{R^i_0} &= \left( \frac{1}{R^i_2} - \frac{1}{R^i_1} \right) \cos \chi_0 \sin \chi_0, \end{aligned} \right\} \quad (1.146)$$

$R^i_2$  и  $R^i_1$  определяются (1.97) и (1.135).

Заметим, что  $1/R^i_0$  есть малая величина порядка  $e^2$  или  $\alpha$ . Действительно, по формулам (1.97) и (1.135) легко получить

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R^i_0} &= \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2}{(a+h)(1-e^2)} \cdot e^2 \cos^2 \varphi \cos \chi_0 \sin \chi_0, \\ \frac{1}{R^i_0} &= 0, \\ \frac{1}{R^i_0} &= \frac{\alpha \cos^2 \varphi''}{(a+h)(1-\alpha \cos^2 \varphi'')} \cos \chi_0 \sin \chi_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.147)$$

\*) В частности,  $1/R^i_{y^i_0}$  и  $1/R^i_{x^i_0}$  являются кривизнами нормальных сечений  $h$ -эллипсоида, касательные к которым совпадают с осями  $y^i_0$  и  $x^i_0$ .

Из (1.142) и (1.145) получаем формулы счисления координат  $\Lambda^i$  и  $\Phi^i$  в виде

$$\left. \begin{aligned} \Lambda^i &= \frac{1}{\cos \Phi^i} \left[ \frac{v_{x_0}^i}{R_{x_0}^i} - \frac{v_{y_0}^i}{R_0^i} \right], \\ \Phi^i &= \frac{v_{y_0}^i}{R_{y_0}^i} - \frac{v_{x_0}^i}{R_0^i}, \end{aligned} \right\} \quad (1.148)$$

где  $R_{x_0}^i$ ,  $R_{y_0}^i$  и  $R_0^i$  определяются формулами (1.146).

Величины  $R_{x_0}^i$ ,  $R_{y_0}^i$ ,  $R_0^i$  необходимо выразить через  $\Lambda^i$  и  $\Phi^i$ . Это можно сделать по формулам (1.137) — (1.139), так как в соответствии с (1.17), (1.97), (1.135), (1.146) и (1.147) они зависят от тригонометрических функций синуса и косинуса углов  $\varphi^i$  и  $\chi_0^i$ . Мы здесь не будем приводить окончательных выражений. Дело в том, что все вычисления ведутся с некоторой заранее заданной точностью, поэтому обычно  $R_{x_0}^i$ ,  $R_{y_0}^i$ ,  $R_0^i$  разлагаются в степенные ряды по малым параметрам  $\alpha$ ,  $e^2$ ,  $e'^2$  и удерживают в этих разложениях малые величины первого и, может быть, второго порядка малости. Тогда в разложении будут фигурировать члены с  $\sin \varphi^i$ ,  $\sin \chi_0^i \cos \varphi^i$  и  $\cos \chi_0^i \cos \varphi^i$ , которые непосредственно определяются из формул (1.137) и (1.138). К (1.148) еще нужно добавить формулу счисления третьей координаты — параметра высоты  $h$ . Он определяется последними формулами (1.102), (1.116) и (1.117), в которых  $\dot{h}$  зависит от компонент относительной скорости  $v_{y^i}$ ,  $v_{z^i}$  и тригонометрических функций широты  $\varphi^i$ . Ввиду того, что оси  $z^i$  и  $z_0^i$  совпадают, мы имеем  $v_{z^i} = v_{z_0^i}$ , компонента  $v_{y^i}$  определяется формулами преобразования (1.144), и, как прежде, функции  $\sin \varphi^i$ ,  $\sin \chi_0^i \cos \varphi^i$ ,  $\cos \chi_0^i \cos \varphi^i$  выражаются через  $\Lambda^i$ ,  $\Phi^i$  по формулам (1.137), (1.138). Наиболее простые формулы счисления получаются для геоцентрических ортодромических координат  $\Lambda'$ ,  $\Phi'$ ,  $h$ . Приведем для образца окончательные формулы в виде

$$\left. \begin{aligned} \Lambda' &= \frac{v_{x_0}'}{r \cos \Phi'}, \\ \Phi' &= \frac{v_{y_0}'}{r}, \\ \dot{h} &= -\frac{e'^2}{\kappa_1} \sin \varphi' [v_{x_0}' \cos \varphi_{\Pi}' + v_{y_0}' (\sin \varphi_{\Pi}' \sin \Phi' - \\ &\quad - \cos \varphi_{\Pi}' \cos \Phi' \sin \Lambda')] + v_{z_0}' \kappa_1. \quad \square \quad (1.148a) \end{aligned} \right\}$$

При этом  $\kappa_1$  и  $r$  выражаются через  $\sin \varphi'$  по (1.17) и (1.81),  $\sin \varphi'$  следует выражать через  $\Lambda'$  и  $\Phi'$  по первой формуле (1.137). Теперь нам нужно определить абсолютную угловую скорость ортодромических сопровождающих трехгранников  $x_0^i y_0^i z_0^i$ . Компоненты  $\omega_{x_0^i}$ ,  $\omega_{y_0^i}$ ,  $\omega_{z_0^i}$  абсолютной угловой скорости получаются суммированием компонент (1.142) относительной угловой скорости и проекций  $U_{x_0^i}$ ,  $U_{y_0^i}$ ,  $U_{z_0^i}$  переносной угловой скорости от вращения Земли. Проекции  $U_{x_0^i}$ ,  $U_{y_0^i}$  выражаются через проекции  $U_{x^i}$ ,  $U_{y^i}$ , определяемые (1.133), формулами преобразования (1.143), а  $U_{z_0^i} = U_{z^i}$ . Компоненты (1.142) нужно выразить через компоненты  $v_{x_0^i}$ ,  $v_{y_0^i}$  относительной линейной скорости по формулам счисления (1.148). Если проделать все указанные операции, то получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0^i} &= -U \cos \varphi^i \sin \chi_0^i - \left( \frac{v_{y_0}^i}{R_{y_0}^i} - \frac{v_{x_0}^i}{R_0^i} \right), \\ \omega_{y_0^i} &= U \cos \varphi^i \cos \chi_0^i + \left( \frac{v_{x_0}^i}{R_{x_0}^i} - \frac{v_{y_0}^i}{R_0^i} \right), \\ \omega_{z_0^i} &= U \sin \varphi^i + \left( \frac{v_{x_0}^i}{R_{x_0}^i} - \frac{v_{y_0}^i}{R_0^i} \right) \lg \Phi^i. \end{aligned} \right\} \quad (1.149)$$

В формулах (1.149) опять необходимо выразить тригонометрические функции углов  $\varphi^i$  и  $\chi_0^i$  через  $\Lambda^i$  и  $\Phi^i$  по указанному выше образцу. Для геоцентрических координат (1.148a) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0^i} &= -U \cos \varphi' \sin \chi_0' - \frac{v_{y_0}'}{r}, \\ \omega_{y_0^i} &= U \cos \varphi' \cos \chi_0' + \frac{v_{x_0}'}{r}, \\ \omega_{z_0^i} &= U \sin \varphi' + \frac{v_{x_0}'}{r} \operatorname{tg} \Phi'. \end{aligned} \right\} \quad (1.149a)$$

Полученные в этом пункте формулы позволяют весьма просто контролировать горизонтальное движение объекта по таким траекториям  $h$ -эллипсоида, образом которых на единичной сфере яв-

ляются ортодромии. Если указанные ортодромии принять за ортодромические экваторы, то дело сводится к выполнению равенства  $\Phi^i \equiv 0$ . Когда навигационная система работает в ортодромической системе координат, то  $\Phi^i$  является ее непосредственным выходом; если выходными величинами навигационной системы будут  $\lambda$  и  $\varphi^i$ , то  $\Phi^i$  может быть вычислена по первой формуле (1.136). Возникает вопрос о виде траектории на  $h$ -эллипсоиде, отображением которой на сфере будет ортодромия. Такими траекториями будут эллипсы. Для точечного преобразования по геоцентрической вертикали это очевидно, так как соответствующая кривая на  $h$ -эллипсоиде получается пересечением центральной плоскостью ортодромии. Для географической и гравитационной вертикалей это положение будет доказано ниже.

Проекция абсолютной угловой скорости трехгранников  $x_o^i y_o^i z_o^i$  (см. (1.149)) можно также выразить через соответствующие проекции абсолютной скорости  $V$ . Соответствующие выражения можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_o}^i &= - \left( \frac{V_{y_o}^i}{R_o^i} - \frac{V_{x_o}^i}{R_o^i} \right), \\ \omega_{y_o}^i &= \frac{V_{x_o}^i}{R_o^i} - \frac{V_{y_o}^i}{R_o^i}, \\ \omega_{z_o}^i &= U \cos \Phi_{\Pi}^i \frac{\sin \Lambda^i}{\cos \Phi^i} + \left( \frac{V_{x_o}^i}{R_o^i} - \frac{V_{y_o}^i}{R_o^i} \right) \operatorname{tg} \Phi^i. \end{aligned} \right\} (1.150)$$

Первые две формулы (1.150) можно получить непосредственно так как формулы преобразования (1.143) и (1.144) справедливы также для абсолютных скоростей, а выражения  $\omega_{x_o}^i$ ,  $\omega_{y_o}^i$ ,  $\omega_{z_o}^i$  через  $V_{x_o}^i$ ,  $V_{y_o}^i$  имеют такой же внешний вид, как и выражения  $\omega_{x_o}^i$ ,  $\omega_{y_o}^i$ ,  $\omega_{z_o}^i$  через  $v_{x_o}^i$ ,  $v_{y_o}^i$  (см. (1.134) и (1.135а)). Если в третьем равенстве (1.149) заменить  $v_{x_o}^i$ ,  $v_{y_o}^i$  соответственно на  $V_{x_o}^i$ ,  $V_{y_o}^i$ , то, чтобы равенство не нарушалось, необходимо добавить слагаемое  $U \cos \Phi^i \cos \chi_o^i \operatorname{tg} \Phi^i$ . Но из сферического треугольника, представленного на рис. 1.9, можно получить соотношение

$$\sin \Phi^i \cos \Phi^i - \cos \Phi^i \sin \Phi^i \cos \chi_o^i = \cos \Phi_{\Pi}^i \sin \Lambda^i.$$

Для этого нужно применить третью формулу сферической тригонометрии, обозначив предварительно сторону  $PP$  сферического треугольника через  $a$ , угол при вершине  $\Pi$  через  $B$ . Таким образом, справедливость формул (1.150) доказана. Ортодромические

координаты  $\Lambda^i$ ,  $\Phi^i$  являются обобщением экваториальных координат  $\lambda$ ,  $\varphi^i$ . В п. 1.3.6 мы рассматривали абсолютные экваториальные координаты  $\lambda_a$ ,  $\varphi^i$ . Возникает вопрос об аналогичном обобщении этих координат. Введем абсолютные ортодромические координаты  $\Lambda_a^i$ ,  $\Phi_a^i$  точно таким же способом, как координаты  $\Lambda^i$ ,  $\Phi^i$ , только в данном случае опорная плоскость не должна участвовать в суточном вращении Земли. Теперь нужно рассматривать соответствие между точками единичной сферы и  $h$ -эллипсоидов, не вращающихся вокруг полярной оси Земли. Очевидно, в этом случае мы будем получать формулы, аналогичные тем, которые получали для  $\Lambda^i$ ,  $\Phi^i$ . В них нужно только  $\lambda$  заменять на  $\lambda_a$ ,  $\Lambda^i$ ,  $\Phi^i$  на  $\Lambda_a^i$ ,  $\Phi_a^i$  и т. д. В тех выражениях, в которых фигурируют  $U$  и  $v$ , следует  $U$  полагать равным нулю, а земную относительную скорость  $v$  заменять на абсолютную скорость  $V$ . Первые две формулы (1.149) и (1.150) определяют проекции абсолютной угловой скорости вращения соответствующей вертикали на «горизонтальные» оси  $x_o^i$  и  $y_o^i$ . Очевидно, если мы возьмем горизонтальный трехгранник  $x_m^i y_m^i z_m^i$  с вертикальным ребром  $z_m^i$  и с произвольной ориентацией осей  $x_m^i$  и  $y_m^i$  в «азимуте», то проекции  $\omega_{x_m}^i$  и  $\omega_{y_m}^i$  абсолютной угловой скорости этого треугольника будут определяться аналогичными формулами. Только в первых двух выражениях (1.149), (1.150) и (1.146) следует всюду нижний индекс  $o$  заменить на  $m$ . При этом угол  $\chi_m^i$  между осями  $y^i$  и  $y_m^i$  должен быть каким-то образом задан. Фактически закон изменения этого угла будет вполне определен заданием вертикальной составляющей абсолютной угловой скорости вращения трехгранника  $x_m^i y_m^i z_m^i$ , т. е. величиной  $\omega_{z_m}^i$ . Конкретные случаи таких трехгранников  $x_m^i y_m^i z_m^i$  будут разобраны в п. 3.3.3.

## § 1.4. Сферическая модель Земли

**1.4.1. Геометрические параметры модели.** В навигационной практике часто пользуются более простой и, естественно, более грубой моделью Земли: фигуру Земли аппроксимируют сферой определенного радиуса. Мы будем аппроксимировать сферами  $h$ -эллипсоиды (см. п. 1.1.4). Радиус аппроксимирующих сфер можно выбирать из разных соображений. Наиболее распространенным является выбор радиуса аппроксимирующих сфер из условий равновеликости объемов и поверхностей.

Объем  $h$ -эллипсоида — эллипсоида вращения — равен  $\frac{4}{3} \pi \frac{b}{a} (a+h)^3 = \frac{4}{3} \pi (a+h)^3 (1-\alpha)$ , поэтому в первом случае ра-

диус  $R$  аппроксимирующей сферы определяется выражением

$$R = (a + h) \left(1 - \alpha\right)^{\frac{1}{3}} = (a + h) \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right). \quad (1.151)$$

При разложении в биномиальный ряд мы опустили члены порядка выше первого относительно коэффициента сжатия  $\alpha$ . Для высоты  $h \leq 30$  км, когда  $h/a$  имеет порядок  $\alpha$  (1.151), можно с той же степенью точности записать  $R$  в виде

$$R = a \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) + h = R_0 + h, \quad (1.152)$$

где  $R_0 = 6371$  км — радиус сферы, аппроксимирующей земной сфероид.

Площадь поверхности эллипсоида вращения не выражается в конечном виде через его параметры, однако ее величина может быть вычислена с любой степенью точности. Элемент площади  $d\sigma$  равен произведению элементов дуг  $ds_1$  и  $ds_2$  географических параллелей и меридианов, так как они образуют ортогональную сетку на поверхности  $h$ -эллипсоидов. Дифференциал дуги кривой  $ds$  определяется через прямоугольные координаты  $\xi, \eta, \zeta$  выражением

$$ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}. \quad (1.153)$$

В формулах (1.90) можно производные по времени заменить соответствующими дифференциалами. Тогда, фиксируя последовательно  $h, \varphi$  и  $h, \lambda$ , а также используя (1.84) и (1.97), получим из (1.90) и (1.153) выражения

$$\left. \begin{aligned} ds_1 &= R_1 \cos \varphi d\lambda, \\ ds_2 &= R_2 d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.154)$$

В первой формуле (1.154)  $R_1 \cos \varphi$  определяет радиус малого круга (параллели), причем в соответствии с теоремой дифференциальной геометрии (теорема Менье)  $R_1$  является радиусом кривизны кривой, которая образуется пересечением  $h$ -эллипсоида плоскостью, проходящей через его нормаль и касательную к параллели.

Во второй формуле (1.154)  $R_2$ , очевидно, является радиусом кривизны меридионального эллипса. Это следует из определения кривизны и того факта, что  $d\varphi$  определяет элементарный поворот нормали меридиана, а следовательно, и его касательной. Заметим, что меридиан также является нормальным сечением  $h$ -эллипсоида, поэтому  $R_1$  и  $R_2$  являются радиусами кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений  $h$ -эллипсоида.

В соответствии с (1.84), (1.97) и (1.154) элемент площади  $h$ -эллипсоида можно представить в виде

$$d\sigma = R_2 R_1 \cos \varphi d\varphi d\lambda = (a + h)^2 (1 - e^2) (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-2} d\varphi d\lambda. \quad (1.155)$$

Приближенно можно считать

$$(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-2} \approx 1 + 2e^2 \sin^2 \varphi.$$

Тогда

$$\sigma = 2(a + h)^2 (1 - e^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\lambda,$$

или

$$\sigma = 4\pi (a + h)^2 (1 - e^2) \left(1 + \frac{2}{3} e^2\right) \approx 4\pi (a + h)^2 \left(1 - \frac{e^2}{3}\right). \quad (1.156)$$

С той же самой точностью имеем  $e^2 = 2\alpha$ . Тогда из равновеликости площадей получаем для  $R$  выражение

$$R = (a + h) \left(1 - \frac{2}{3} \alpha\right)^{\frac{1}{2}} \approx (a + h) \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right). \quad (1.157)$$

Таким образом, с указанной степенью точности в обоих случаях получаем для  $R$  одно и то же выражение. Поверхности  $h$ -эллипсоида и средней сферической Земли пересекаются по географическим параллелям с широтой  $\varphi = \pm 35^\circ 16'$ . Эту величину можно получить из (1.18), подставив туда  $r = R$ , определенную из (1.151).

**1.4.2. Модели полей тяготения и силы тяжести.** Для инерциальной навигации необходимо установить структуру полей тяготения и силы тяжести для сферической модели Земли. К этому вопросу можно подойти с разных точек зрения. Можно потребовать, чтобы сферические модели  $h$ -эллипсоидов сохранили свойство этих фигур быть уровнями поверхностями поля силы тяжести Земли. В этом случае линия действия силы тяжести должна совпадать с направлением радиуса-вектора, так как последний является нормалью к сферической поверхности. Для сферической модели оси  $x', y', z'$  геоцентрического трехгранника  $x'y'z'$  соответственно направлены по касательной к параллели на восток, по касательной к меридиану на север и по нормали к поверхности вверх. Тогда проекции  $g_{x'}, g_{y'}, g_{z'}$  ускорения силы тяжести на оси  $x', y', z'$  будут определяться выражениями

$$\left. \begin{aligned} g_{x'} &= g_{x'}' = 0, \\ g_{y'} &= g_{y'}' - U^2 R \cos \varphi' \sin \varphi' = 0, \\ g_{z'} &= g_{z'}' + U^2 R \cos^2 \varphi' = -g' + U^2 R \cos^2 \varphi' = -g_{z'}'' \end{aligned} \right\} \quad (1.158)$$

Здесь  $g_{x'}', g_{y'}', g_{z'}'$  — проекции гравитационного ускорения на оси  $x', y', z'$ ,  $-g'$  — его величина, а вторые слагаемые правых частей суть проекции центробежного ускорения от вращения Земли, взятые с обратным знаком. Эти величины получаются из (1.41) при  $r = R$  и того факта, что  $g_r'' = g_{z'}''$  и  $g_{\varphi}'' = g_{y'}''$ . Пер-

вые два равенства (1.158) показывают, что сила тяжести направлена по нормали к сферической модели  $h$ -эллипсоидов. Эти равенства можно также использовать для определения горизонтальных проекций  $g'_x$ ,  $g'_y$  гравитационного ускорения. Теперь нам остается определить величины ускорения силы тяжести  $g$  и силы тяготения  $g'$  в точках сферы радиуса  $R$ . Между точками сферы радиуса  $R$  и  $h$ -эллипсоида существует взаимно однозначное соответствие. Соответственными можно считать точки, лежащие на продолжении одного и того же радиуса-вектора, т. е. точки, имеющие одинаковую геоцентрическую широту  $\varphi'$ . Тогда в точках моделирующей сферы ускорения  $g$  и  $g'$  можно приписать те значения, которые они имеют в соответственных точках  $h$ -эллипсоида. Эти значения определяются формулами (1.66) и (1.68). В указанных формулах будем только  $a + h$  заменять через  $R$  по формуле (1.151); это не изменяет численных значений  $g$  и  $g'$ :

$$g = g_{\varphi_0} \frac{R_0^2}{R^2} (1 + \beta \sin^2 \varphi'), \quad (1.159)$$

$$g' = g'_{\varphi_0} \frac{R_0^2}{R^2} (1 + \beta' \sin^2 \varphi'). \quad (1.160)$$

Здесь  $\beta$ ,  $g_{\varphi_0}$ ,  $\beta'$  и  $g'_{\varphi_0}$  численно равны (1.62) и (1.72). С точностью, с которой проводятся здесь все вычисления, мы можем определить  $R$  не по формуле (1.51), а по формуле (1.52), и считать  $R = R_0 + h$  при  $R_0 = 6371$  км. Средние значения  $g$  и  $g'$  на сфере радиуса  $R$  достигаются на широте  $\varphi' = 45^\circ$ . Тогда имеем

$$g_{cp} = (g)_{\varphi'=45^\circ}^{h=0} \frac{R_0^2}{R^2}, \quad g'_{cp} = (g')_{\varphi'=45^\circ}^{h=0} \frac{R_0^2}{R^2}, \quad (1.160a)$$

где

$$(g)_{\varphi'=45^\circ}^{h=0} = 980,66 \text{ см/с}^2, \quad (g')_{\varphi'=45^\circ}^{h=0} = 983,01 \text{ см/с}^2. \quad (1.160b)$$

Во втором случае потребуем, чтобы сферическая модель  $h$ -эллипсоидов была уровенной поверхностью поля силы тяготения, т. е. чтобы направление действия силы тяготения совпадало с ее нормалью. В этом случае вместо (1.158) будем иметь следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} g'_x &= g_x = 0, \\ g'_y &= g_y + U^2 R \cos \varphi' \sin \varphi' = 0, \\ g'_z &= -g - U^2 R \cos^2 \varphi' = -g'. \end{aligned} \right\} \quad (1.161)$$

Первые два равенства (1.161), с одной стороны, показывают, что нормаль к сфере совпадает с линией действия силы тяготения, а с другой стороны, они служат для определения горизонтальных проекций ускорения силы тяжести.

Численные значения  $g$  и  $g'$  на сферической поверхности радиуса  $R$  и в этом случае будем определять формулами (1.159) и (1.160). Заметим, что в обоих случаях мы сохранили взаимное расположение линий действия силы тяжести и силы тяготения. При  $0^\circ \leq \varphi' \leq 90^\circ$  линия действия силы тяжести повернута вправо относительно линии действия силы тяготения на угол  $0,5\alpha \sin 2\varphi'$  (см. (1.15) и (1.16)).

Положение точки на меридиане для обеих сферических моделей Земли определяется углом возвышения ее радиуса-вектора над плоскостью экватора, т. е. геоцентрической широтой  $\varphi'$ . Однако в случае, когда это окажется целесообразным, для первой и второй сферической модели Земли будем считать эту широту географической или гравитационной и обозначать их соответственно через  $\varphi$  и  $\varphi''$ .

**1.4.3. Формулы счисления для сферической модели Земли.** При выборе сферической модели  $h$ -эллипсоидов положение точки  $M$  в пространстве можно определять теми же криволинейными геоцентрическими координатами  $\lambda$ ,  $\varphi'$  и  $h$ , причем в соответствии с (1.152) параметр  $h$  будет определять высоту точки  $M$  над поверхностью средней сферической Земли;  $\lambda$  и  $\varphi'$  по существу имеют прежний смысл. Следует помнить, что меридианами в данном случае будут большие полуокружности, соединяющие географические полюсы, а радиус-вектор точки  $M$  будет совпадать с соответствующим радиусом сферы. Для сферической модели формулы счисления координат  $\lambda$ ,  $\varphi'$  и  $h$  будут получаться из общих соотношений при  $r = R$  и  $e' = 0$ . Так, из (1.117) будем иметь

$$\dot{\lambda} = \frac{v_{x'}}{R \cos \varphi'}, \quad \dot{\varphi}' = \frac{v_{y'}}{R}, \quad \dot{h} = v_{z'}. \quad (1.162)$$

В соответствии с формулами п. 1.3.6 получим

$$\dot{\lambda}_a = \frac{V_{x'}}{R \cos \varphi'}, \quad \dot{\varphi}' = \frac{V_{y'}}{R}, \quad \dot{h} = v_{z'}. \quad (1.163)$$

Для обобщенных (ортодромических) координат из (1.148a) получим

$$\dot{\Lambda} = \frac{v_{x_0}}{R \cos \Phi}, \quad \dot{\Phi} = \frac{v_{y_0}}{R}, \quad \dot{h} = v_{z_0}. \quad (1.164)$$

Величина  $R$  определяется формулой (1.152).

В п. 1.3.9 обобщенные геоцентрические координаты  $\Lambda'$ ,  $\Phi'$ ,  $h$  мы называем ортодромическими. Теперь вскрывается смысл такого наименования. Для сферической модели Земли обобщенным ортодромическим экватором будет служить большой круг соответствующей сферы, проходящей через две заданные на ней точки.

Траектория на сфере, совпадающая с дугой большого круга, называется ортодромией. Ортодромия реализует кратчайшее расстояние между точками на сфере.

Формулы, полученные в п. 1.3.9 по теоремам сферической тригонометрии, (1.137) — (1.138) сохраняют смысл и для сферических моделей  $h$ -эллипсоидов. Сферическую модель можно было принять за ту вспомогательную сферу, которая фигурировала в п. 1.3.9. Вспомогательная сфера может иметь произвольный радиус.

Проекции  $\omega_{x'}$ ,  $\omega_{y'}$ ,  $\omega_{z'}$  и  $\omega_{x'_0}$ ,  $\omega_{y'_0}$ ,  $\omega_{z'_0}$  абсолютной угловой скорости трехгранников  $x'y'z'$  и  $x'_0y'_0z'_0$  будут определяться формулами (1.131), (1.149a), (1.150a) при  $r = R$ . Так, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x'} &= -\frac{v_{y'}}{R} = -\frac{V_{y'}}{R}, \\ \omega_{y'} &= U \cos \varphi' + \frac{v_{x'}}{R} = \frac{V_{x'}}{R}, \\ \omega_{z'} &= U \sin \varphi' + \frac{v_{x'}}{R} \operatorname{tg} \varphi' = \frac{V_{x'}}{R} \operatorname{tg} \varphi', \end{aligned} \right\} \quad (1.165)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x'_0} &= -U \cos \varphi' \sin \chi'_0 - \frac{v_{y'_0}}{R}, \\ \omega_{y'_0} &= U \cos \varphi' \cos \chi'_0 + \frac{v_{x'_0}}{R}, \\ \omega_{z'_0} &= U \sin \varphi' + \frac{v_{x'_0}}{R} \operatorname{tg} \Phi', \end{aligned} \right\} \quad (1.166)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x'_0} &= -\frac{V_{y'_0}}{R}, \\ \omega_{y'_0} &= \frac{V_{x'_0}}{R}, \\ \omega_{z'_0} &= U \cos \varphi_{\Pi} \frac{\sin \Lambda'}{\cos \Phi'} + \frac{V_{x'_0}}{R} \operatorname{tg} \Phi'. \end{aligned} \right\} \quad (1.167)$$

В формулах (1.158) — (1.167) используется геоцентрическая широта  $\varphi'$ , потому что для обеих структур поля силы тяжести и гравитационного поля нормаль к сферической поверхности совпадает с соответствующим радиусом сферы.

Однако в соответствии с (1.158) эта нормаль определяется направлением силы тяжести и является географической вертикалью.

В этом случае для сферической модели геоцентрическая широта будет совпадать с широтой географической, т. е.  $\varphi' = \varphi$ .

В соответствии с (1.161) нормаль к сфере будет уже являться гравитационной вертикалью и тогда будем иметь  $\varphi' = \varphi''$ .

Таким различием широты точки на сфере мы будем пользоваться там, где это окажется целесообразным. Скажем несколько слов о точности решения навигационных задач на сферической модели Земли и  $h$ -эллипсоидах. Для инерциальной навигации дать оценку точности в общем случае не представляется возможным. Инерциальные системы имеют внутренние контуры обратной связи. В них входные величины некоторых функциональных элементов зависят от выходных величин самой системы. Такую оценку для конкретной инерциальной системы можно дать посредством численного интегрирования соответствующих функциональных уравнений для характерных траекторий движения объекта. Ориентировочную оценку можно сделать из геометрических соображений, например, из сравнения длины экваториального круга  $h$ -эллипсоида  $2\pi(a+h)$  с длиной большого круга сферы  $2\pi R = 2\pi(a+h)(1-\alpha/3)$ . Относительная ошибка в этом случае будет равна  $\alpha/3$ , т. е. примерно она будет равна 0,1%.

## § 2.1. Траектории на поверхности

**2.1.1. Общие сведения.** Центр масс объекта при горизонтальном движении на высоте  $h$  перемещается вдоль поверхности  $h$ -эллипсоида \*). В этом случае траекторией движения служит некоторая кривая, лежащая на поверхности  $h$ -эллипсоида. Приведем коротко необходимые для нас в дальнейшем геометрические характеристики пространственных кривых и кривых, лежащих на поверхности.

В дифференциальной геометрии (см. [12, 35]) вводят понятие соприкасающейся плоскости. Соприкасающаяся плоскость проходит через касательную к кривой в точке  $M$  и имеет в этой точке касание второго порядка с кривой. Уклонение кривой от своей соприкасающейся плоскости вблизи точки  $M$  является бесконечно малой величиной третьего порядка или выше. Если пренебречь такими величинами, то всякую пространственную кривую в бесконечно малой окрестности точки  $M$  можно считать плоской, а именно, расположенной в соприкасающейся плоскости в этой точке. Очевидно, для плоской кривой соприкасающаяся плоскость в любой точке совпадает с плоскостью, в которой расположена сама кривая. Нормаль к кривой в точке  $M$ , лежащей в соприкасающейся плоскости, называют *главной нормалью*, а нормаль, перпендикулярную соприкасающейся плоскости, — *бинормалью*. Вводится также понятие *соприкасающейся окружности* — окружности, имеющей в точке  $M$  с пространственной кривой касание второго порядка малости. Такая окружность лежит в соприкасающейся плоскости, ее центр находится на продолжении главной нормали и в точке  $M$  она имеет общую касательную с кривой. Центр соприкасающейся окружности называют *центром кривизны кривой в точке  $M$* , ее радиус — *радиусом кривизны*, а обратную величину — *кривизной к кривой в точке  $M$* . Кривизна  $k$ , введенная таким образом, определяет скорость вращения касательной кривой по отношению к пути, пройденному по кривой, т. е.

$$k = \frac{d\varphi_1}{ds}, \quad (2.1)$$

\*) При более грубом приближении вдоль сферы радиуса  $R = R_0 + h$ .

где  $d\varphi_1$  — угол поворота касательной на дуге  $ds$ . Всегда  $k > 0$ . Если кривую ортогонально спроектировать на плоскость, проходящую через касательную в точке  $M$ , то кривизна  $k$  кривой и кривизна  $k'$  ее проекции в рассматриваемой точке связаны соотношением

$$k' = k \cos \theta,$$

где  $\theta$  — угол между плоскостью проекции и соприкасающейся плоскостью. Кривизна проекции в точке  $M$  не может превосходить кривизну проектируемой кривой в той же точке.

Рассмотрим теперь кривую, лежащую на некоторой поверхности. Через нормаль к поверхности в точке  $M$  проведем плоскость (плоскость нормального сечения) так, чтобы она проходила через касательную к кривой в данной точке. Спроектируем кривую в точке  $M$  на данную плоскость, а также на касательную плоскость к поверхности в точке  $M$ . Тогда кривизны  $k_n$  и  $k_g$  проекций кривой на указанные плоскости будут соответственно равны

$$k_n = k \cos \theta, \quad k_g = k \sin \theta, \quad (2.2)$$

где  $\theta$  есть угол между плоскостью нормального сечения и соприкасающейся плоскостью \*).

Величина  $k_n$  называется *нормальной кривизной кривой*,  $k_g$  — *геодезической кривизной кривой*. Обратная величина  $\rho = \frac{1}{k_g}$  называется *радиусом геодезической кривизны*. Интересно отметить, что центр и радиус кривизны проекции кривой на указанную выше плоскость нормального сечения совпадают с центром и радиусом кривизны нормального сечения поверхности, касающегося кривой в точке  $M$ . Под нормальным сечением поверхности в точке  $M$  понимают кривую пересечения поверхности с плоскостью, проведенной через нормаль к поверхности в точке  $M$ . Все кривые на поверхности, имеющие в точке  $M$  одну и ту же касательную, имеют одну и ту же нормальную кривизну. Нормальную кривизну называют также *вынужденной кривизной*, так как она определяется кривизной самой поверхности в направлении касательной к кривой. Нормальное сечение имеет наименьшую кривизну среди указанных кривых. Первая формула (2.2) и приведенные здесь соображения являются содержанием теоремы Менье.

Рассмотрим произвольный малый круг радиуса  $r_1$  на сфере радиуса  $R$ . В точке  $M$  малого круга через его касательную проведем нормальное сечение. Нормальным сечением будет большой круг — круг радиуса  $R$ . Угол между плоскостями малого и боль-

\*) Можно считать, что  $\theta$  есть угол между направлениями главной нормали кривой и нормалью к поверхности. Для эллипсоидов  $k_n \geq 0$ , знак  $k_g$  установившим ниже.

шого круга обозначим через  $\theta$  (рис. 2.1). Тогда будем иметь  $r_1 = R \cos \theta$ , или  $1/R = k_n = 1/r_1 \cdot \cos \theta = k \cos \theta$ . Спроектируем малый круг ортогонально на касательную плоскость сферы в точке  $M$  и на нормальную плоскость — плоскость большого круга. Ортогональными проекциями будут эллипсы, большие  $a_1$  и малые  $b_1$ , полуоси которых будут соответственно равны  $a_1 = r_1$ ,  $b_1 =$

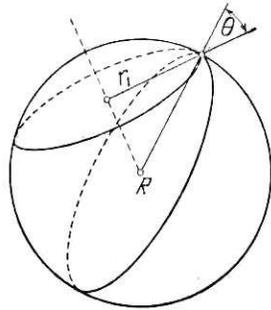


Рис. 2.1. К теореме Менье для сферы.

$= r_1 \sin \theta$  и  $a_1 = r_1$ ,  $b_1 = r_1 \cos \theta$ . При этом точка  $M$  будет лежать на малых полуосях полученных эллипсов. Кривизна эллипса в точке  $M$  равняется  $b_1/a_1^2$ , поэтому в первом случае получим  $k_g = \frac{1}{R} \operatorname{tg} \theta$ , во втором случае  $k_n = 1/R$ . Если малым кругом является параллель, то  $\theta = \varphi$  и геодезическая кривизна параллели  $k_g = \frac{1}{R} \operatorname{tg} \varphi$ . Через данную точку поверхности проходит бесчисленное множество нормальных сечений, отличающихся друг от друга направлением своих касательных. Имеются два нормальных сечения

с взаимно перпендикулярными касательными, для которых кривизна достигает абсолютного максимума и абсолютного минимума. Эти нормальные сечения называются *главными сечениями*, соответствующие кривизны, которые мы будем обозначать через  $1/R_2$  и  $1/R_1$ , — *главными кривизнами*, а направления их касательных — *главными направлениями*.

Кривизна  $1/R_\psi$  произвольного нормального сечения, касательная которого образует с главным направлением  $1/R_2$  угол  $\psi$ , определяется по формуле Эйлера в виде

$$\frac{1}{R_\psi} = \frac{1}{R_2} \cos^2 \psi + \frac{1}{R_1} \sin^2 \psi. \quad (2.3)$$

Для  $h$ -эллипсоидов главные направления совпадают с направлением касательных к меридиану и параллели, причем меридиан сам является главным сечением. Меридиан имеет максимальную кривизну, она равна  $1/R_2$ , где  $R_2$  определяется второй формулой (1.97). Нормальное сечение касающейся параллели имеет минимальную кривизну, равную  $1/R_1$ , где радиус кривизны  $R_1$  определяется по первой формуле (1.97). Очевидно, для  $h$ -эллипсоида угол  $\psi$ , фигурирующий в (2.3), есть угол между касательной рассматриваемого нормального сечения и меридианом.

Линии на поверхности, в каждой точке которых касательные совпадают с главными направлениями, называются *линиями кривизны*. Меридианы и параллели  $h$ -эллипсоида являются его линиями кривизны, они образуют ортогональную сетку. Геоде-

зическая кривизна  $k_g = 1/\rho$  имеет важное значение для выбора траекторий движения. Линии на поверхности, в каждой точке которых геодезическая кривизна равна нулю, называются *геодезическими линиями*. Вдоль геодезических линий  $\theta \approx 0$  (см. (2.2)), т. е. во всех точках этих линий главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности, а следовательно, их кривизна  $k = k_n$ . Геодезические линии являются как бы «прямыми» на поверхности. Они могут реализовать кратчайшее расстояние между двумя точками на поверхности. Через каждую точку поверхности проходит бесчисленное множество геодезических линий. На  $h$ -эллипсоиде меридианы являются геодезическими линиями.

**2.1.2. Сопровождающий траекторный трехгранник.** При горизонтальном движении вектор  $v$  относительной скорости (скорости относительно системы координат, жестко связанной с Землей) называют *путевой скоростью*. Угол  $\psi$ , который образует вектор  $v$  с касательной к меридиану  $h$ -эллипсоида, направленной на север\*), называется *путевым углом*. Путевой угол изменяется в пределах  $0^\circ \leq \psi \leq 360^\circ$ . Он считается положительным при повороте  $v$  в направлении от севера к востоку. Модуль  $v$  вектора  $v$ , очевидно, определяет скорость движения вдоль траектории. Проекция путевой скорости на оси  $x, y, z$  географического трехгранника  $xuz$  имеют вид

$$v_x = v \sin \psi, \quad v_y = v \cos \psi, \quad v_z = 0. \quad (2.4)$$

Третье равенство следует из третьей формулы (1.102) при  $h \approx 0$ . Введем в рассмотрение траекторный трехгранник  $x_T y_T z_T$ , его начало совместим с точкой  $M$  местоположения объекта, ось  $z_T$  направим по географической вертикали вверх (нормаль к поверхности  $h$ -эллипсоида), ось  $y_T$  — по касательной к траектории вперед по движению, т. е. вдоль вектора  $v$ \*\*), ось  $x_T$  будет направлена вправо. Определим проекции  $\omega_{x_T}, \omega_{y_T}, \omega_{z_T}$  абсолютной угловой скорости вращения траекторного трехгранника  $x_T y_T z_T$  на его оси  $x_T, y_T, z_T$ . Оси  $z_T$  и  $z$  траекторного трехгранника  $x_T y_T z_T$  и географического  $xuz$  совпадают, поэтому проекции  $\omega_{x_T}, \omega_{y_T}$  можно получить из проекций  $\omega_x, \omega_y$  (см. (1.130)) посредством преобразования координат. Так как  $\psi$  есть угол между осью  $y$ , направленной на север, и осью  $y_T$ , то с учетом выбора  $\psi > 0$  (вращение от оси  $y$  к оси  $y_T$ ) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_T} &= \omega_x \cos \psi - \omega_y \sin \psi, \\ \omega_{y_T} &= \omega_x \sin \psi + \omega_y \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

\*) Эта касательная является осью  $y$  географического трехгранника  $xuz$ .  
\*\*) Следовательно,  $\psi$  есть угол между осями  $y$  и  $y_T$ .

Подставляя сюда  $\omega_x$  и  $\omega_y$  из (1.130) и заменяя в них  $v_x$  и  $v_y$  их выражениями из (2.4), получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_T} &= -U \cos \varphi \sin \psi - v \left( \frac{1}{R_2} \cos^2 \psi + \frac{1}{R_1} \sin^2 \psi \right), \\ \omega_{y_T} &= U \cos \varphi \cos \psi - v \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \cos \psi \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Проекцию  $\omega_{z_T}$  можно получить из следующих соображений. Переносное вращение, очевидно, дает проекцию на вертикаль угловой скорости Земли, равную  $U \sin \varphi$ . В относительном движении имеем проекцию на ось  $z_T$ , равную  $v/\rho$ , так как радиус геодезической кривизны  $\rho$  является просто радиусом кривизны проекции траектории в точке  $M$  на горизонтальную плоскость (касательную плоскость в точке  $M$  к  $h$ -эллипсоиду). Таким образом,

$$\omega_{z_T} = U \sin \varphi + \frac{v}{\rho}. \quad (2.7)$$

Условимся считать  $\rho > 0$ , если при движении вдоль траектории с положительного конца оси  $z_T$  вращение представляется происходящим против часовой стрелки.

В первой формуле (2.6) выражение в скобках можно заменить по (2.3) на  $1/R_\psi$ . Тогда окончательно можно записать

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_T} &= -U \cos \varphi \sin \psi - \frac{v}{R_\psi}, \\ \omega_{y_T} &= U \cos \varphi \cos \psi - v \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin \psi \cos \psi, \\ \omega_{z_T} &= U \sin \varphi + \frac{v}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Для сферической модели  $R_1 = R_2 = R_\psi = R$ , и тогда

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_T} &= -U \cos \varphi \sin \psi - \frac{v}{R}, \\ \omega_{y_T} &= U \cos \varphi \cos \psi, \\ \omega_{z_T} &= U \sin \varphi + \frac{v}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (2.8a)$$

**2.1.3. Геодезический трехгранник и накопление ошибок в ориентации его осей в азимуте.** Геодезический трехгранник  $x_T y_T z_T$  относится к типу сопровождающих горизонтальных трехгранников, его вершина совпадает с точкой  $M$ , ось  $z_T$  направлена по географической вертикали вверх, угловое положение горизонтальных осей  $x_T$ ,  $y_T$  относительно географической сетки не оговаривается, но скорость вращения этих осей вокруг вертикали в абсолютном пространстве должна равняться вертикальной состав-

ляющей угловой скорости Земли, т. е.  $U \sin \varphi$ . Таким образом,

$$\omega_{z_T} = U \sin \varphi, \quad (2.9)$$

где  $\omega_{z_T}$  — проекция абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_T y_T z_T$  на ось  $z_T$ . В случае, когда точка  $M$  неподвижна на Земле, оси  $x_T$  и  $y_T$  определяют некоторое направление относительно земных координат, например относительно меридиана, и сохраняют это направление с течением времени на вращающейся Земле. Если вершина геодезического трехгранника  $x_T y_T z_T$  опишет замкнутую кривую на поверхности  $h$ -эллипсоида и вернется в исходное положение, то его горизонтальные оси (в дальнейшем будем говорить только об оси  $y_T$ ) не вернуться к исходным направлениям, а будут составлять с ними некоторый угол  $\chi$ . Величина и знак этого угла, характеризующего изменение ориентации оси  $y_T$ , зависят от размеров замкнутой кривой и направления ее обхода.

Этот вопрос смыкается с вопросом о неголономном движении гироскопов, впервые рассмотренным А. Ю. Ишлинским [21, 22]. Его результат применительно к движению геодезического сопровождающего трехгранника  $x_T y_T z_T$  можно сформулировать следующим образом. Введем вспомогательную сферу произвольного радиуса с произвольным центром, для определенности радиус сферы будем считать равным 1, а для наглядности ее центр совместим с центром  $h$ -эллипсоидов, т. е. с центром Земли. Из этого центра будем откладывать радиусы параллельно оси  $z_T$  геодезического трехгранника, направленного вдоль географической вертикали вверх, т. е. по нормали к поверхности  $h$ -эллипсоида. Когда вершина  $M$  геодезического трехгранника движется по некоторой траектории, лежащей на поверхности  $h$ -эллипсоида, конец радиуса опишет на вспомогательной сфере кривую, которая по Гауссу называется *сферическим изображением кривой на поверхности*. Тогда указанный выше угол  $\chi$ , определяющий ошибку в ориентации оси  $y_T$  геодезического трехгранника в случае, когда его вершина  $M$  опишет замкнутую траекторию на поверхности  $h$ -эллипсоида, будет равняться  $\Omega$ , мере телесного угла, под которым будет видна из центра вспомогательной сферы площадь, ограниченная сферическим изображением замкнутой траектории вершины  $M$ . Для сферы единичного радиуса угол  $\Omega$  равняется величине указанной площади. Знак угла  $\chi$  определяется направлением обхода вершиной  $M$  замкнутой траектории. Соответствующие расчеты легко производить для случая, когда  $h$ -эллипсоид можно принять за сферу радиуса  $R = R_0 + h$ , где  $R_0 = 6371$  км, а замкнутая траектория состоит из трех дуг больших кругов, являющихся сторонами сферического треугольника. В этом случае можно использовать формулы сферической тригонометрии. Пример та-

кого расчета приведен в [1.36] в главе «Гироскопы направления», написанной автором этих строк.

Геодезический трехгранник обладает следующей особенностью. Если в горизонтальном полете вектор  $v$  относительной скорости (путевой скорости) будет составлять с осью  $y_r$  постоянный угол, то самолет будет двигаться по некоторой геодезической линии. Поэтому гиросtabilизированная платформа, реализующая геодезический трехгранник на борту объекта, будет являться курсовым прибором, позволяющим совершать объекту движения по геодезической траектории. Выбор конкретной траектории определяется начальной выставкой прибора.

## Г Л А В А Ш

### УСКОРЕНИЕ И ЕГО ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В РАЗЛИЧНЫХ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМАХ

#### § 3.1. Инерциальная система координат

**3.1.1. Баричесентрическая инерциальная система координат.** Инерциальная навигационная система использует в качестве первичной информации данные об ускорении объекта, которое измеряется специальным прибором — акселерометром.

Теория акселерометра и вообще теория навигационных систем рассматриваемого типа основана на законах динамики Ньютона. Как известно, законы Ньютона можно правильно записать только в том случае, если будет выбрана основная опорная система координат, которая принимается за неподвижную. Такую систему координат будем называть *инерциальной*. В инерциальной системе координат второй закон динамики Ньютона для свободной материальной точки записывается в форме

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F, \quad (3.1)$$

где  $m$  есть масса материальной точки,  $r$  — ее радиус-вектор,  $F$  — вектор равнодействующей всех сил, действующих на точку.

Вторая производная  $r$  есть вектор, проекции которого на оси ортогональной инерциальной системы координат равны вторым производным проекций самого радиуса-вектора  $r$  на те же оси. Пока невозможно доказать, что существует единая инерциальная система координат. Однако можно утверждать, что если некоторая система координат принимается за инерциальную, то любая координатная система, движущаяся относительно нее поступательно с постоянной скоростью (по величине и направлению), будет также инерциальной. Во всех таких системах координат закон Ньютона будет записываться в форме (3.1) с сохранением указанного выше смысла второй производной радиуса-вектора точки  $M$ . Это обстоятельство легко усмотреть из соотношения, связывающего радиусы-векторы  $r$  и  $r'$  в двух таких системах координат:

$$r = r' + vt, \quad v = \text{const}, \quad (3.2)$$

где  $v$  — вектор скорости поступательного движения координатной системы относительно основной инерциальной системы координат.

Форма уравнений (3.1) является инвариантной к преобразованию координат (3.2). Если движение тел исследовать в рамках Солнечной системы, которую следует рассматривать изолированно от других звездных образований, то в качестве основной инерциальной системы координат можно принять систему с началом в центре масс (барицентре) небесных тел, образующих Солнечную систему, и осями, неизменно ориентированными относительно удаленных неподвижных звезд. Такую инерциальную систему координат называют *барицентрической*. Целесообразность такого выбора подтверждается успехами небесной механики и, в частности, «теоретическим» открытием двух, наиболее удаленных планет Солнечной системы: Нептуна и Плутона. Однако во многих случаях целесообразно рассматривать не абсолютное движение тела (движение в барицентрической инерциальной системе координат), а его относительное движение (движение по отношению к какому-нибудь естественному телу Солнечной системы, планете или к ее естественному спутнику). Например, движение летательных аппаратов в атмосфере Земли или космических кораблей в околоземном пространстве имеет смысл рассматривать в геоцентрической системе координат, начало которой совмещено с центром Земли, а оси остаются параллельными осям барицентрической инерциальной системы. Геоцентрическая система координат не является инерциальной, так как ее начало движется с ускорением в барицентрической инерциальной системе координат. Однако для наших целей, когда движущиеся объекты находятся в достаточной близости к поверхности Земли, геоцентрическую систему координат с достаточной степенью точности можно считать инерциальной.

Рассмотрим этот вопрос подробнее.

**3.1.2. Движение в геоцентрической системе координат.** Для простоты рассмотрим только два естественных тела Солнечной системы с массами  $m_1$  и  $m_2$ , а также искусственное тело (самолет, корабль, космический аппарат) с массой  $m_3$ . Пусть  $r_1, r_2, r_3$  — радиусы-векторы этих тел, рассматриваемых как материальные точки \*); пусть, далее,  $r_{ij}$  есть радиус-вектор, идущий от  $i$ -й материальной точки к  $j$ -й точке (рис. 3.1). И наконец, будем считать, что искусственное тело не оказывает влияния на движение естественных небесных тел, т. е. рассмотрим так называемую *ограниченную задачу трех тел*.

Векторное уравнение движения искусственного тела  $m_3$  в барицентрической инерциальной системе координат записывается в виде

$$m_3 \frac{d^2 r_3}{dt^2} = m_3 g_1'(r_{13}) + m_3 g_2'(r_{23}) + F'. \quad (3.3)$$

\*) Эти точки совпадают с центром масс рассматриваемых тел.

Здесь  $g_1'(r_{13})$  — вектор ускорения силы тяготения, или, по другой терминологии, напряженности поля тяготения небесного тела  $m_1$  в точке, где находится искусственное тело  $m_3$ ; это ускорение зависит только от расстояния между телами  $m_1$  и  $m_3$ . Аналогичный смысл имеет вектор  $g_2'(r_{23})$  для небесного тела  $m_2$ , вектор  $F'$  определяет действие на тело  $m_3$  негравитационных сил. Уравнение (3.3) записано в форме (3.1), только в его правой части представлены в явном виде силы тяготения небесных тел  $m_1$  и  $m_2$ . Теперь рассмотрим движение тела  $m_3$  в системе координат с началом в точке  $m_2$  и осями, параллельными осям барицентрической инерциальной системы \*). В случае, когда небесным телом  $m_2$  является Земля, такая система координат будет геоцентрической. Радиус-вектор  $r_3$  можно представить в виде (см. рис. 3.1)

$$r_3 = r_2 + r_{23}. \quad (3.4)$$

С учетом (3.4) уравнение (3.3) можно представить в виде

$$m_3 \frac{d^2 r_{23}}{dt^2} = -m_3 \frac{d^2 r_2}{dt^2} + m_3 g_2'(r_{23}) + m_3 g_1'(r_{13}) + F'. \quad (3.5)$$

Рассмотрим теперь движение небесного тела  $m_2$  в барицентрической инерциальной системе координат (пренебрегая влиянием тела  $m_3$ ). Будем иметь

$$m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} = m_2 g_1'(r_{12}). \quad (3.6)$$

Определяя  $d^2 r_2/dt^2$  из (3.6), представим (3.5) в виде

$$m_3 \frac{d^2 r_{23}}{dt^2} = m_3 g_2'(r_{23}) + m_3 [g_1'(r_{13}) - g_1'(r_{12})] + F'. \quad (3.7)$$

Таким образом, движение тела  $m_3$  относительно тела  $m_2$  определяется силами поля тяготения центрального тела  $m_2$ , разностью сил притяжения, действующих в центрах масс тел  $m_3$  и  $m_2$  со стороны тела  $m_1$ , и силами негравитационного происхождения. Формула (3.7) является общей, она не зависит от взаимного удаления рассматриваемых тел. Если предположить, что величина  $r_{23}$  много меньше величин  $r_{12}$  и  $r_{13}$ , то модуль разности  $g_1'(r_{13}) - g_1'(r_{12})$  будет также много меньше модуля  $g_2'(r_{23})$ . В этом случае указанную разность называют *возмущающим ускорением*.

\*) В этом случае тело  $m_2$  будем называть *центральным*.

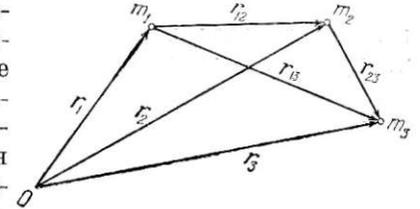


Рис. 3.1. К решению ограниченной задачи трех тел.

По закону всемирного тяготения Ньютона материальная точка  $m_i$  создает в окружающем пространстве гравитационное поле с напряженностью

$$\mathbf{g}'_i(\mathbf{r}_{ij}) = -f m_i \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}, \quad (3.8)$$

где  $f$  — гравитационная постоянная,  $\mathbf{r}_{ij}$  — вектор, идущий от материальной точки  $m_i$  к  $j$ -й точке пространства,  $r_{ij}$  — модуль этого вектора.

По закону (3.8) возмущающее ускорение записывается в виде

$$\mathbf{g}'_1(\mathbf{r}_{13}) - \mathbf{g}'_1(\mathbf{r}_{12}) = f m_1 \left[ \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} - \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3} \right], \quad (3.9)$$

а ускорение силы тяготения или напряженность гравитационного поля центрального тела  $m_2$  в точке, где находится движущееся тело  $m_3$ , в форме

$$\mathbf{g}'_2 = -f m_2 \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3}. \quad (3.10)$$

Для оценки величины возмущающего ускорения удобно разложить вектор (3.9) на направление вектора  $\mathbf{r}_{23}$  (радиальная составляющая) и на перпендикуляр к этому направлению (трансверсальная составляющая). Очевидно, радиальная составляющая возмущающего ускорения с точностью до знака будет совпадать по направлению с гравитационным ускорением  $\mathbf{g}'_2$  от центрального тела  $m_2$ .

На рис. 3.2 в точках  $B_i$  расположены центры масс тел  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Спроектируем векторы  $\mathbf{r}_{12}$  и  $\mathbf{r}_{13}$  на направления векторов  $\mathbf{r}_{23}$  и  $\overrightarrow{AB_1}$  (см. рис. 3.2). Радиальные составляющие этих векторов равняются  $-r_{12} \cos Z$  и  $-r_{13} \cos Z'$  соответственно, а трансверсальные составляющие будут равны  $-r_{12} \sin Z$  и  $-r_{13} \sin Z'$ . Между указанными составляющими существует связь в виде

$$-r_{13} \cos Z' = -(r_{12} \cos Z - r_{23}), \quad (3.10a)$$

$$-r_{13} \sin Z' = -r_{12} \sin Z. \quad (3.11)$$

Из треугольника  $B_1 B_2 B_3$  по теореме косинусов

$$r_{13}^2 = r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{23} \cos Z. \quad (3.12)$$

Примем отношение  $r_{23}/r_{12}$  за величину первого порядка малости и условимся в дальнейших вычислениях отбрасывать члены более

высокого порядка малости. Тогда, используя разложение в биномиальный ряд, получим из (3.12)

$$r_{13} = r_{12} \left( 1 + \frac{r_{23}^2}{r_{12}^2} - 2 \frac{r_{23}}{r_{12}} \cos Z \right)^{\frac{1}{2}} \approx r_{12} \left( 1 - \frac{r_{23}}{r_{12}} \cos Z \right). \quad (3.13)$$

Далее из (3.9) и (3.13) получим для радиальной составляющей возмущающего ускорения выражения

$$-f m_1 \left[ \frac{r_{12} \cos Z}{r_{12}^3} - \frac{(r_{12} \cos Z - r_{23}) \left( 1 - \frac{r_{23}}{r_{12}} \cos Z \right)^{-3}}{r_{12}^3} \right] \approx \approx -\frac{f m_1}{r_{12}^2} \cdot \frac{r_{23}}{r_{12}} (1 - 3 \cos^2 Z), \quad (3.14)$$

а из (3.9), (3.11), (3.13) — для трансверсальной составляющей

$$-f m_1 \left[ \frac{r_{12} \sin Z}{r_{12}^3} - \frac{r_{12} \sin Z \left( 1 - \frac{r_{23}}{r_{12}} \cos Z \right)^{-3}}{r_{12}^3} \right] = = -3 \frac{f m_1}{r_{12}^2} \cdot \frac{r_{23}}{r_{12}} \sin Z \cos Z. \quad (3.15)$$

Разделим (3.14) и (3.15) на модуль ускорения силы тяготения центрального гравитационного поля, определяемого из формулы (3.10). Тогда получим соотношения

$$\frac{m_1}{m_2} \left( \frac{r_{23}}{r_{12}} \right)^3 (1 - 3 \cos^2 Z), \quad 3 \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{r_{23}}{r_{12}} \right)^3 \sin Z \cos Z, \quad (3.16)$$

которые определяют в долях  $g'_2(r_{23}) = \frac{f m_2}{r_{23}^2}$  величины радиальной

и трансверсальной составляющих возмущающего ускорения. Оценим величины (3.16), когда тело  $m_3$  находится в непосредственной близости от Земли, а небесным телом  $m_1$  является Солнце. В этом случае  $m_1 = 333\,432\,m_2$ ,  $r_{23} = R_0 = 6\,371$  км,  $r_{12} = 149\,600\,000$  км — среднее расстояние Земли от Солнца. Тогда максимальные численные значения отношений (3.16), получающиеся при  $Z = 0^\circ$ ,  $Z = 180^\circ$ ,  $Z = 45^\circ$  и т. д., будут равны

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{r_{23}}{r_{12}} \right)^3 &= 5,3 \cdot 10^{-8}, \\ \frac{3}{2} \cdot \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{r_{23}}{r_{12}} \right)^3 &= 4,0 \cdot 10^{-8}. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Для Земли первое отношение (3.17) показывает, что в направлении геоцентрической вертикали (направление радиуса-вектора  $\mathbf{r}_{23}$ ) максимальное значение ускорения сил тяготения от тел  $m_2$  и  $m_1$  будет равно  $(1 + 5,3 \cdot 10^{-8}) g'_2$ . Второе отношение (3.17) можно

трактовать как максимально возможный угол отклонения результирующего ускорения сил тяготения от геоцентрической вертикали. В угловой мере это отклонение равняется  $0,008''$ , так как  $10^{-5}$  рад  $\approx 2''$ . Если небесным телом  $m_1$  является Луна, то  $m_2 = 81,3 m_1$ ,  $r_{12} = 384\,000$  км. Тогда возмущающее ускорение будет в 2 раза больше величин (3.17). Такими величинами в дальнейшем мы будем пренебрегать и уравнение относительного движения (3.7) будем записывать в виде

$$m_3 \frac{d^2 r_{23}}{dt^2} = m_3 g'_2(r_{23}) + F'. \quad (3.18)$$

Пренебрежение возмущающим ускорением равносильно тому, что в околоземном пространстве гравитационные поля остальных небесных тел считаются однородными. Запись уравнения (3.18) характерна для инерциальной системы координат. Вывод уравнения (3.18) носил общий характер, поэтому можно сказать, что вблизи любого небесного тела существует местная инерциальная система координат, в которой движение тела малой массы относительно выбранного небесного тела описывается уравнением в форме (3.18). На относительное движение оказывает влияние только гравитационное поле рассматриваемого небесного тела, а влиянием гравитационных полей остальных небесных тел можно пренебречь. Так, для планет Солнечной системы будем иметь планетоцентрические инерциальные системы координат, частным случаем которых является рассмотренная здесь геоцентрическая система. Возникает вопрос о размерах области, прилегающей к центральному телу, в которой целесообразно пользоваться местной инерциальной системой координат. Эта область естественно зависит от решаемой задачи. Так, например, при построении межпланетных траекторий по методу кусочно-невозмущенных орбит [45] в качестве границы области преобладающего гравитационного влияния планеты принимают среднюю сферу действия. Радиус  $r_{23}$  такой сферы определяют по формуле

$$r_{23} = r_{12} \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{2}{5}}, \quad (3.19)$$

где все обозначения имеют прежний смысл.

Радиус сферы действия для Земли ( $r_{12}$  — среднее расстояние Земли от Солнца) равняется 924 820 км. В некоторых случаях, как, например, при изучении приливов воды в открытом океане, вообще нельзя пренебрегать возмущающим ускорением со стороны Солнца и Луны, несмотря на их исчезающе малую величину. Приливные явления как раз и обусловлены влиянием гравитационных полей Солнца и Луны.

При решении задач навигации, рассматриваемых в данной части книги, мы пойдем еще дальше по пути упрощений.

В п. 1.3.6 была введена абсолютная система координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ ; ее начало совпадает с центром Земли, ось  $\zeta_a$  направлена вдоль полярной оси к Северному полюсу, а оси  $\xi_a, \eta_a$ , лежащие в плоскости экватора, не участвуют в суточном вращении Земли. Оси  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  изменяют свою ориентацию относительно неподвижных звезд. Это объясняется следующим обстоятельством. Земля вращается (практически равномерно) вокруг своей полярной оси с угловой скоростью  $U = 7,29 \cdot 10^{-5}$  1/с и обращается вокруг Солнца по орбите, которую приближенно можно считать эллиптической. Оба вращения происходят в одну сторону — против часовой стрелки, если смотреть со стороны Северного полюса. Земля представляет собой гигантский гироскоп, ось которого совершает прецессионное и нутационное движение под воздействием момента сил, обусловленных притяжением Земли со стороны Солнца и Луны. В прецессионном движении полярная ось Земли описывает конус с осью, совпадающей с перпендикуляром к плоскости орбиты Земли. Угол между образующей конуса и его осью равен  $\varepsilon \approx 23^\circ 27'$ ; это угол наклона плоскости экватора к плоскости орбиты. Период такого движения равен примерно 26 000 лет. Период нутационного движения равняется 18,6 года, при нутации угол  $\varepsilon$  меняется примерно на  $40''$ . Указанными движениями будем пренебрегать, а это равносильно тому, что абсолютную систему  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  мы будем отождествлять с геоцентрической инерциальной системой координат. Таким образом, в системе координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  справедливо уравнение (3.18). Разделим обе части уравнения (3.18) на  $m_3$  и опустим все нижние индексы. Тогда получим уравнение

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = g'(r) + a, \quad (3.20)$$

в котором  $r$  — геоцентрический радиус-вектор материальной точки массы  $m$ ,  $g'(r)$  — ускорение силы тяготения Земли и

$$a = \frac{F'}{m} \quad (3.21)$$

— так называемое кажущееся ускорение. Это ускорение, которое имела бы материальная точка под воздействием негравитационных сил, если бы она могла двигаться в пространстве, свободном от действия сил тяготения. Как мы увидим ниже, акселерометр измеряет кажущиеся ускорения. В дальнейшем векторную величину

$$W = \frac{d^2 r}{dt^2}, \quad (3.22)$$

определенную в системе координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  будем называть абсолютным ускорением. Очевидно, проекции  $W$  на оси  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  равняются вторым производным от проекции радиуса-вектора  $r$  на

те же оси, т. е.

$$W_{\xi_a} = \ddot{\xi}_a, \quad W_{\eta_a} = \ddot{\eta}_a, \quad W_{\zeta_a} = \ddot{\zeta}_a. \quad (3.23)$$

В новых обозначениях кажущееся ускорение определяется в виде

$$a = W - g'. \quad (3.24)$$

Уравнение (3.20) является основным уравнением инерциальной навигации. Радиус-вектор  $r$ , определяющий координаты местоположения точки  $m$ , находится из решения дифференциального уравнения (3.20), в котором считается известным закон изменения гравитационного поля Земли, а информация о изменении кажущегося ускорения поступает с акселерометрического устройства.

### § 3.2. Абсолютное ускорение

**3.2.1. Выражения проекций вектора  $W$  абсолютного ускорения на оси произвольно ориентированной системы координат.** Мы рассматривали две геоцентрические системы координат: систему координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ , принимаемую за инерциальную, и  $\xi \eta \zeta$ , жестко связанную с Землей. Оси  $\xi_a$  и  $\zeta$  совпадали с полярной осью Земли. Введем геоцентрическую систему координат  $\xi_m \eta_m \zeta_m$ , с произвольной ориентировкой осей и вращающуюся в инерциальном пространстве с абсолютной угловой скоростью  $\omega_m$ . Положение некоторой точки в пространстве, например центра масс движущегося тела, определяется геоцентрическим радиусом-вектором  $r$ . Компонентами этого вектора служат координаты его конца (координаты рассматриваемой точки), которые в указанных выше системах координат соответственно равняются  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a, \xi, \eta, \zeta$  и  $\xi_m, \eta_m, \zeta_m$ . Координаты конца радиуса-вектора  $r$  в указанных системах координат описываются различными функциями времени. Производная по времени радиуса-вектора  $r$  в некоторой геоцентрической системе координат определяется как вектор, проекции которого на оси этой системы равны производным от проекции самого радиуса-вектора  $r$  на те же оси \*).

Производную, взятую в инерциальной системе координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ , называют *полной*, во всех других системах координат — *локальной*. Полная производная  $r$  по времени определяет вектор  $V$  абсолютной скорости, ее проекции на оси  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  даются формулами (1.118).

Локальная производная в системе координат  $\xi \eta \zeta$  определяет вектор  $v$  земной относительной скорости, проекции которой на оси  $\xi, \eta, \zeta$  даются формулами (1.92). В общем случае локальная производная  $r$  в системе координат  $\xi_m \eta_m \zeta_m$  определяет вектор  $v_m$

\* ) Так определяется производная любого вектора.

относительной скорости в данной системе координат, ее проекции на оси  $\xi_m, \eta_m, \zeta_m$  равняются  $\dot{\xi}_m, \dot{\eta}_m, \dot{\zeta}_m$ .

Связь между полной  $dr/dt$  и локальной  $\tilde{dr}/dt$  производными определяется известной формулой

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\tilde{dr}}{dt} + \omega_m \times r, \quad (3.25)$$

где локальная производная берется в системе координат  $\xi_m \eta_m \zeta_m$ , а  $\omega_m$  — абсолютная угловая скорость трехгранника  $\xi_m \eta_m \zeta_m$ . В других обозначениях имеем

$$V = v_m + \omega_m \times r, \quad (3.26)$$

причем  $\omega_m \times r$  интерпретируется как переносная скорость от вращения координатной системы  $\xi_m \eta_m \zeta_m$  с абсолютной угловой скоростью  $\omega_m$ .

Векторные формулы (3.25) и (3.26) приспособлены к представлению  $V$  в проекциях на оси  $\xi_m \eta_m \zeta_m$ . Имеем

$$\left. \begin{aligned} V_{\xi_m} &= v_{\xi_m} + \omega_m \eta_m \cdot \zeta_m - \omega_m \zeta_m \cdot \eta_m, \\ V_{\eta_m} &= v_{\eta_m} + \omega_m \zeta_m \cdot \xi_m - \omega_m \xi_m \cdot \zeta_m, \\ V_{\zeta_m} &= v_{\zeta_m} + \omega_m \xi_m \cdot \eta_m - \omega_m \eta_m \cdot \xi_m, \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

так как проекции векторного произведения  $\omega_m \times r$  на оси  $\xi_m, \eta_m, \zeta_m$  получаются разворачиванием определителя

$$\omega_m \times r = \begin{vmatrix} \xi_m^0 & \eta_m^0 & \zeta_m^0 \\ \omega_m \xi_m & \omega_m \eta_m & \omega_m \zeta_m \\ \xi_m & \eta_m & \zeta_m \end{vmatrix} \quad (3.28)$$

по элементам первой строки, которые являются единичными векторами осей  $\xi_m, \eta_m, \zeta_m$ .

Формула (3.25) является общей, она справедлива не только для  $r$ , но и для любого другого вектора, например,  $V, v, v_m$ .

Перейдем теперь к нахождению формул, представляющих вектор  $W$  абсолютного ускорения через абсолютную и относительную скорости точки. По формуле (3.22)  $W$  определяется как вторая полная производная от радиуса-вектора  $r$  рассматриваемой точки. Это означает, что  $W$  равняется полной производной от вектора  $V$  абсолютной скорости точки. Теперь на основании приведенных выше соображений будем иметь

$$W = \frac{dV}{dt} = \frac{\tilde{dV}}{dt} + \omega_m \times V, \quad (3.29)$$

или, в координатной форме в проекциях на оси  $\xi_m, \eta_m, \zeta_m$ ,

$$\left. \begin{aligned} W_{\xi_m} &= \dot{V}_{\xi_m} + \omega_m \eta_m V_{\zeta_m} - \omega_m \zeta_m V_{\eta_m}, \\ W_{\eta_m} &= \dot{V}_{\eta_m} + \omega_m \zeta_m V_{\xi_m} - \omega_m \xi_m V_{\zeta_m}, \\ W_{\zeta_m} &= \dot{V}_{\zeta_m} + \omega_m \xi_m V_{\eta_m} - \omega_m \eta_m V_{\xi_m}. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Бывает удобно выразить  $W$  через локальные производные радиуса-вектора  $r$ . Применяя формулу полного дифференцирования к равенству (3.25) и имея в виду равенство  $\omega \times \omega = 0$ , получим

$$W = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\tilde{d}^2 r}{dt^2} + 2\omega_m \times \frac{\tilde{d}r}{dt} + \frac{\tilde{d}\omega_m}{dt} \times r + \omega_m \times (\omega_m \times r). \quad (3.31)$$

Эту формулу можно записать также в виде

$$W = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\tilde{d}v_m}{dt} + 2\omega_m \times v_m + \frac{\tilde{d}\omega_m}{dt} \times r + \omega_m \times (\omega_m \times r), \quad (3.32)$$

так как локальная производная  $r$  здесь определяет вектор  $v_m$  относительной скорости — скорости в системе координат  $\xi_m \eta_m \zeta_m$ .

Первое слагаемое правой части (3.32) определяет относительное ускорение, второе — кориолисово ускорение, а два последних слагаемых — переносное ускорение от вращательного движения координатной системы  $\xi_m \eta_m \zeta_m$  в инерциальном пространстве. Мы не будем выписывать (3.34) и (3.32) в координатной форме, предоставим это сделать читателю, напомним только формулу для двойного векторного произведения

$$\omega_m \times (\omega_m \times r) = (\omega_m \cdot r)\omega_m - \omega_m^2 \cdot r, \quad (3.33)$$

где  $\omega \cdot r$  есть скалярное произведение соответствующих векторов.

**3.2.2. Выражения проекций вектора  $W$  абсолютного ускорения на оси координат через проекции земной относительной скорости  $v$  на те же оси.** В инерциальной навигации бывает часто удобно измерять ускорение в системе координат  $\xi_m \eta_m \zeta_m$ , вращающейся с абсолютной угловой скоростью  $\omega_m$ , а выражать абсолютные ускорения через проекции земной относительной скорости  $v$  на оси  $\xi_m, \eta_m, \zeta_m$ . Непосредственно воспользоваться (3.32) нельзя, так как там фигурирует относительная скорость  $v_m$  для координатной системы  $\xi_m \eta_m \zeta_m$ , а  $v$  есть относительная скорость в координатной системе  $\xi \eta \zeta$ , жестко связанной с Землей.

Решим эту задачу в два этапа. Применим формулу (3.32) для системы координат  $\xi \eta \zeta$ . Тогда  $\omega = U$  и  $U_\xi = U_\eta = 0$ , а  $U_\zeta = U = \text{const}$ . Отсюда

$$W = \frac{\tilde{d}v}{dt} + 2U \times v + U \times (U \times r). \quad (3.34)$$

Здесь локальная производная от  $v$  берется в системе координат

$\xi \eta \zeta$ , последнее слагаемое представляет центростремительное ускорение от вращения Земли. В (3.34) первое слагаемое определяет относительное ускорение, второе — кориолисово ускорение и третье слагаемое — центростремительное ускорение от суточного вращения Земли, т. е. переносное ускорение, обусловленное вращением системы координат  $\xi \eta \zeta$ . Теперь спроектируем обе части равенства на оси  $\xi_m, \eta_m, \zeta_m$  координатной системы  $\xi_m \eta_m \zeta_m$ .

Векторное произведение проектируется на оси любой системы по единообразной схеме. Сначала нужно найти проекции на оси этой системы соответствующих множителей, затем составить определитель по типу (3.28) и развернуть этот определитель по элементам первой строки. То же самое является справедливым и для двойного векторного произведения, что следует из формулы типа (3.33). Величина скалярного произведения не меняется при преобразовании координат. Основное затруднение состоит в проектировании локальной производной  $\tilde{d}v/dt$ . Это затруднение устраним следующим образом. Рассмотрим две системы координат  $\xi \eta \zeta$  и  $\xi_m \eta_m \zeta_m$  совместно, в этой паре будем считать  $\xi \eta \zeta$  опорной системой, а  $\xi_m \eta_m \zeta_m$  вращающейся относительно  $\xi \eta \zeta$  с угловой скоростью  $\omega_m^*$ ). Тогда будет иметь место соотношение

$$\frac{\tilde{d}v}{dt} = \frac{\tilde{d}v}{dt} \Big|_m + \omega_m' \times v, \quad (3.35)$$

где слева локальное дифференцирование ведется в системе координат  $\xi \eta \zeta$ , а справа — в системе координат  $\xi_m \eta_m \zeta_m$ . Эта формула является обобщением (3.25). Формула (3.35) приспособлена к проектированию на оси  $\xi_m, \eta_m, \zeta_m$ , так как проекции  $\frac{\tilde{d}v}{dt} \Big|_m$  на оси  $\xi_m, \eta_m, \zeta_m$  равняются  $\dot{v}_{\xi_m}, \dot{v}_{\eta_m}, \dot{v}_{\zeta_m}$  соответственно, причем  $v_{\xi_m}, v_{\eta_m}, v_{\zeta_m}$  суть проекции вектора земной относительной скорости  $v$  на оси  $\xi_m, \eta_m, \zeta_m$ .

Подставляя (3.29) в (3.34), получим формулу

$$W = \frac{\tilde{d}v}{dt} \Big|_m + (2U + \omega_m') \times v + U \times (U \times r), \quad (3.36)$$

решающую поставленную выше задачу.

Если учесть, что системы  $\xi_m \eta_m \zeta_m$  и  $\xi \eta \zeta$  вращаются с абсолютными угловыми скоростями  $\omega_m$  и  $U$ , то, естественно, имеет место равенство

$$\omega_m' = \omega_m - U, \quad (3.37)$$

\*) Здесь  $\omega'$  — угловая скорость трехгранника  $\xi_m \eta_m \zeta_m$  относительно трехгранника  $\xi \eta \zeta$  (относительная угловая скорость).

и тогда можно (3.36) записать также в виде

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Big|_m + (\mathbf{U} + \boldsymbol{\omega}_m) \times \mathbf{v} + \mathbf{U} \times (\mathbf{U} \times \mathbf{r}). \quad (3.38)$$

И наконец, в дальнейшем нам придется изучать движение тел относительно движущегося объекта. Необходимые исследования удобно вести в топоцентрических системах координат, начала которых совмещены с центром масс объекта или какой-нибудь другой его точкой. Некоторые из таких систем мы рассматривали раньше. Топоцентрические системы, оси которых параллельны осям геоцентрических систем координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  и  $\xi_m \eta_m \zeta_m$ , будем обозначать через  $x_a y_a z_a$  и  $x_m y_m z_m$  соответственно. Из рис. 3.3 следует векторное равенство

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_M + \mathbf{r}', \quad (3.39)$$

Рис. 3.3. К выводу ускорения в поступательно-движущейся системе координат  $x_a y_a z_a$ .

где  $\mathbf{r}_C$  и  $\mathbf{r}_M$  — геоцентрические радиусы-векторы движущейся точки  $C$  и начала топоцентрической координатной системы  $M$ ,  $\mathbf{r}'$  — топоцентрический радиус-вектор точки  $C$ .

Очевидно, абсолютное ускорение  $\mathbf{W}_C$  точки  $C$  будет определяться соотношением

$$\mathbf{W}_C = \frac{d^2 \mathbf{r}_M}{dt^2} + \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2}, \quad (3.40)$$

причем дифференцирование  $\mathbf{r}_M$  и  $\mathbf{r}'$  ведется соответственно в координатных системах  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  и  $x_a y_a z_a$ ; очевидно, мы здесь имеем дело с полными производными.

Если ввести обозначения

$$\mathbf{W} = \frac{d^2 \mathbf{r}_M}{dt^2}, \quad \mathbf{W}' = \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2}, \quad (3.41)$$

то (3.40) можно переписать в виде

$$\mathbf{W}_C = \mathbf{W} + \mathbf{W}', \quad (3.42)$$

где  $\mathbf{W}$  есть ускорение от переносного движения топоцентрической системы координат, а  $\mathbf{W}'$  — ускорение относительно этой системы. Естественно, векторы  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{W}'$  можно находить в любых системах координат соответственно, например в  $\xi_m \eta_m \zeta_m$  и  $x_m y_m z_m$ , для чего следует использовать приведенные выше формулы. При этом в тех из них, где фигурирует  $\mathbf{r}$ , следует ставить  $\mathbf{r}'$ , когда будем определять  $\mathbf{W}'$ .

Формулы (3.40) и (3.41) по существу мы уже использовали в предыдущем параграфе, когда исследовали движение материальной точки около небесного тела, принимаемого за центральное.

Приведенные формулы позволяют сравнительно просто выписывать выражения для абсолютного и кажущегося ускорения в координатных системах, наиболее часто употребляемых в инерциальных системах навигации. Этот вопрос рассмотрим в следующем параграфе.

### § 3.3. Кажущееся ускорение в некоторых координатных системах

**3.3.1. Инерциальная система координат.** Вектор кажущегося ускорения определяется формулой (3.24). Проекции вектора  $\mathbf{W}$  абсолютного ускорения на оси  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  инерциальной (абсолютной) системы координат находятся по (3.23). Если учесть обозначения (1.118) и положить  $\xi_a = V_{\xi_a}$  и т. д., то проекции  $a_{\xi_a}, a_{\eta_a}, a_{\zeta_a}$  кажущегося ускорения на оси  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} a_{\xi_a} &= \dot{V}_{\xi_a} - g'_{\xi_a}, & a_{\eta_a} &= \dot{V}_{\eta_a} - g'_{\eta_a}, \\ a_{\zeta_a} &= \dot{V}_{\zeta_a} - g'_{\zeta_a}. \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Проекция  $g'_{\xi_a}, g'_{\eta_a}, g'_{\zeta_a}$  гравитационного ускорения нужно выразить через координаты  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  точки  $M$  местоположения объекта. Эти выражения можно получить, если представить  $g'_{\xi_a}, g'_{\eta_a}, g'_{\zeta_a}$  в виде частных производных гравитационного потенциала Земли  $\Pi'$  по координатам  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ . В системе координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  имеют место равенства

$$r = \sqrt{\xi_a^2 + \eta_a^2 + \zeta_a^2}, \quad \sin \varphi' = \frac{\zeta_a}{r},$$

которые следуют из формул (1.118a) соответственно. Заменяя в (1.35)  $\sin \varphi'$  через  $\zeta_a/r$ , запишем выражение для  $\Pi'$  в виде

$$\Pi' = \frac{K}{r} + \frac{\mu}{2} \frac{K a^2}{r^3} \left( 1 - 3 \frac{\zeta_a^2}{r^2} \right). \quad (3.44)$$

Непосредственным дифференцированием  $\Pi'$  по  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  и после надлежащей группировки членов получим \*)

$$g'_{\xi_a} = \frac{\partial \Pi'}{\partial \xi_a} = -\frac{K}{r^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \mu - \frac{9}{2} \mu \frac{\zeta_a^2}{r^2} \right) \frac{\xi_a}{r} + 3\mu \frac{K}{r^2} \frac{\zeta_a^2}{r^2} \frac{\xi_a}{r},$$

\*) Мы здесь дополнительно положим  $r = a$  в безразмерных величинах  $\frac{a}{r}$ , стоящих множителем при малой величине  $\mu$  (см. п. 1.2.4).

$$g'_{\eta_a} = \frac{\partial \Pi'}{\partial \eta_a} = -\frac{K}{r^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \mu - \frac{9}{2} \mu \frac{\xi_a^2}{r^2} \right) \frac{\eta_a}{r} + 3\mu \frac{K}{r^2} \frac{\xi_a^2}{r^2} \frac{\eta_a}{r},$$

$$g'_{\xi_a} = \frac{\partial \Pi'}{\partial \xi_a} = -\frac{K}{r^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \mu - \frac{9}{2} \mu \frac{\xi_a^2}{r^2} \right) \frac{\xi_a}{r} - 3 \frac{\mu K}{r^2} \left( 1 - \frac{\xi_a^2}{r^2} \right) \frac{\xi_a}{r}. \quad \square \quad (3.45)$$

В соответствии с первой формулой (1.74) множитель при  $\xi_a/r$ ,  $\eta_a/r$ ,  $\xi_a/r$  в первых слагаемых полученных выражений равняется  $g'$ .

Во вторых слагаемых с точностью до величины порядка  $\mu^2$  можно  $K/r^2$  заменить также на  $g'$ . Учитывая эти обстоятельства и принимая во внимание равенство  $r^2 - \xi_a^2 = \xi_a^2 + \eta_a^2$ , запишем выражение для  $g'_{\xi_a}$ ,  $g'_{\eta_a}$ ,  $g'_{\zeta_a}$  в виде

$$\left. \begin{aligned} g'_{\xi_a} &= -\frac{g'}{r} \xi_a + 3\mu g' \frac{\xi_a^2 \xi_a}{r^3}, \\ g'_{\eta_a} &= -\frac{g'}{r} \eta_a + 3\mu g' \frac{\xi_a^2 \eta_a}{r^3}, \\ g'_{\zeta_a} &= -\frac{g'}{r} \zeta_a - 3\mu g' \frac{(\xi_a^2 + \eta_a^2) \zeta_a}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

При этом  $g'$  определяется в данном случае первой формулой (1.74а), а  $3\mu = 2\alpha - q = 3,27 \cdot 10^{-3}$ .

**3.3.2. Экваториальная система координат, жестко связанная с Землей.** Такой системой координат является  $\xi\eta\zeta$  с началом в центре Земли и осью  $\zeta$ , направленной вдоль ее полярной оси. Для решения поставленной задачи следует воспользоваться общей формулой (3.31), положив в ней  $\omega = U$ . Проекция векторов  $\dot{d}\mathbf{r}/dt$ ,  $d^2\mathbf{r}/dt^2$  и  $U$  на оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  соответственно равны  $\dot{\xi} = v_\xi$ ,  $\dot{\eta} = v_\eta$ ,  $\dot{\zeta} = v_\zeta$ ,  $\ddot{\xi} = \dot{v}_\xi$ ,  $\ddot{\eta} = \dot{v}_\eta$ ,  $\ddot{\zeta} = \dot{v}_\zeta$  \*) и 0, 0,  $U$ . Тогда, замечая, что  $\dot{d}U/dt = 0$ , и имея в виду формулы типа (3.28) и (3.33), получим выражения для проекций  $a_\xi$ ,  $a_\eta$ ,  $a_\zeta$  кажущегося ускорения в виде

$$\left. \begin{aligned} a_\xi &= \dot{v}_\xi - 2Uv_\eta - U^2\xi - g'_\xi, \\ a_\eta &= \dot{v}_\eta + 2Uv_\xi - U^2\eta - g'_\eta, \\ a_\zeta &= \dot{v}_\zeta - g'_\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

В этих выражениях  $\dot{v}_\xi$ ,  $\dot{v}_\eta$ ,  $\dot{v}_\zeta$  — проекции относительного ускорения по оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $-2Uv_\eta$ ,  $2Uv_\xi$  — кориолисово ускорение,  $-U^2\xi$ ,  $U^2\eta$  — центростремительное ускорение от вращения Земли.

\*) Мы используем здесь обозначения (1.92).

По определению, ускорение силы тяжести  $\mathbf{g}$  равняется сумме гравитационного ускорения и центробежного ускорения от вращения Земли. Если учесть это обстоятельство, то выражение для  $a_\xi$ ,  $a_\eta$ ,  $a_\zeta$  можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} a_\xi &= \dot{v}_\xi - 2Uv_\eta - g_\xi, \\ a_\eta &= \dot{v}_\eta + 2Uv_\xi - v_\xi - q_\eta, \\ a_\zeta &= \dot{v}_\zeta - g_\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

где  $g_\xi$ ,  $g_\eta$ ,  $g_\zeta$  суть проекции ускорения силы тяжести  $\mathbf{g}$  на оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Эти проекции нужно выразить через прямоугольные координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  точки  $M$  местоположения объекта.

Для определения  $g_\xi$ ,  $g_\eta$ ,  $g_\zeta$  можно применить процедуру вычислений, аналогичную той, которую мы использовали в п. 3.3.1 для получения проекций  $g'_{\xi_a}$ ,  $g'_{\eta_a}$ ,  $g'_{\zeta_a}$ . В данном случае мы должны исходить из выражения (1.46) для потенциала  $\Pi$  поля силы тяжести, заменив в нем  $\sin \varphi'$  по третьей формуле (1.33). Тогда  $g_\xi$ ,  $g_\eta$ ,  $g_\zeta$  равны производным  $\Pi$  по координатам  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  соответственно. Если выполнить дифференцирование и сгруппировать члены с учетом выражения для  $g$  по второй формуле (1.74), а также учесть, что все расчеты мы ведем здесь с точностью до величины второго порядка малости относительно  $\mu$  и  $q$ , то окончательный результат можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} g_\xi &= -\frac{g}{r} \xi + 2ag \frac{\xi^2 \xi}{r^3}, \\ g_\eta &= -\frac{g}{r} \eta + 2ag \frac{\xi^2 \eta}{r^3}, \\ g_\zeta &= -\frac{g}{r} \zeta - 2ag \frac{(\xi^2 + \eta^2) \zeta}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

В этих формулах было дополнительно использовано соотношение (1.53), по которому  $3\mu + q = 2\alpha$ . В полученных выражениях  $g$  следует определять по второй формуле (1.74а).

Нетрудно заметить, что при замене в (3.44)  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  на  $\xi_a$ ,  $\eta_a$ ,  $\zeta_a$  мы получим проекции  $g_{\xi_a}$ ,  $g_{\eta_a}$ ,  $g_{\zeta_a}$  вектора ускорения силы тяжести  $\mathbf{g}$  на оси  $\xi_a$ ,  $\eta_a$ ,  $\zeta_a$ .

**3.3.3. Горизонтальные системы координат.** В общем случае (п.1.3.9) горизонтальные системы координат мы обозначим через  $x_m^i y_m^i z_m^i$ . Верхний индекс указывает тип вертикали (географической, геоцентрической, гравитационной), вдоль которой ориентируется ребро  $z_m^i$ . Нижний индекс определяет ориентацию осей  $x_m^i$  и  $y_m^i$  в азимуте. Эта ориентация характеризуется углом  $\chi_m^i$ , который образует ось  $y_m^i$  с осью  $y^i$ , лежащей в плоскости меридиана.

В этих системах координат абсолютное ускорение  $W$  точки  $M$  будем выражать через компоненты земной относительной скорости  $v$ , через компоненты абсолютной скорости  $V$ . В первом случае  $W$  следует определить по (3.38), а вектор  $a$  кажущегося ускорения — выражением

$$a = \frac{dv}{dt} + (U + \omega) \times v - g, \quad (3.50)$$

в котором  $\omega$  есть вектор абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_m^i y_m^i z_m^i$  и локальное дифференцирование ведется тоже в системе координат  $x_m^i y_m^i z_m^i$ . В (3.50) фигурирует вектор  $g$  ускорения силы тяжести, так как по определению (п. 1.2.2) он равен

$$g = g' - U \times (U \times r), \quad (3.50a)$$

где  $g'$  — вектор гравитационного ускорения.

Через абсолютную скорость  $V$  вектор  $W^a$  абсолютного ускорения определяется (3.29), а вектор  $a$  — выражением

$$a = \frac{dV}{dt} + \omega \times V - g'. \quad (3.50b)$$

Векторные равенства (3.50) и (3.50b) запишем в координатной форме, т. е. в проекциях на оси  $x_m^i, y_m^i, z_m^i$  горизонтальной системы координат  $x_m^i y_m^i z_m^i$ . Будем иметь

$$\left. \begin{aligned} a_{x_m^i} &= \dot{v}_{x_m^i} + (U_{y_m^i} + \omega_{y_m^i}) v_{z_m^i} - (U_{z_m^i} + \omega_{z_m^i}) v_{y_m^i} - g_{x_m^i}, \\ a_{y_m^i} &= \dot{v}_{y_m^i} + (U_{z_m^i} + \omega_{z_m^i}) v_{x_m^i} - (U_{x_m^i} + \omega_{x_m^i}) v_{z_m^i} - g_{y_m^i}, \\ a_{z_m^i} &= \dot{v}_{z_m^i} + (U_{x_m^i} + \omega_{x_m^i}) v_{y_m^i} - (U_{y_m^i} + \omega_{y_m^i}) v_{x_m^i} - g_{z_m^i}, \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{x_m^i} &= \dot{V}_{x_m^i} + \omega_{y_m^i} V_{z_m^i} - \omega_{z_m^i} V_{y_m^i} - g'_{x_m^i}, \\ a_{y_m^i} &= \dot{V}_{y_m^i} + \omega_{z_m^i} V_{x_m^i} - \omega_{x_m^i} V_{z_m^i} - g'_{y_m^i}, \\ a_{z_m^i} &= \dot{V}_{z_m^i} + \omega_{x_m^i} V_{y_m^i} - \omega_{y_m^i} V_{x_m^i} - g'_{z_m^i}. \end{aligned} \right\} \quad (3.51a)$$

В уравнениях (3.51) и (3.51a) раскроем выражения для проекций вектора  $U$  угловой скорости Земли и для проекций векторов  $g$  и  $g'$  ускорений силы тяжести и сил тяготения соответственно. Проекции  $U_{x_m^i}, U_{y_m^i}, U_{z_m^i}$  определяются первыми слагаемыми (1.148), если в них заменить нижний индекс  $o$  на индекс  $m$ . В соответствии

С ЭТИМ

$$\left. \begin{aligned} U_{x_m^i} &= -U \cos \varphi^i \sin \chi_m^i, \\ U_{y_m^i} &= U \cos \varphi^i \cos \chi_m^i, \\ U_{z_m^i} &= U \sin \varphi^i. \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

Векторы  $g$  и  $g'$  лежат в плоскости меридиана, они направлены соответственно вдоль отрицательных полуосей  $z$  и  $z''$ . Поэтому их проекции на оси  $x^i, y^i, z^i$  определяются формулами (см. рис. 1.5)

$$\left. \begin{aligned} g_{x^i} &= 0, & g_{y^i} &= -g \sin(\varphi - \varphi^i), \\ g_{z^i} &= -g \cos(\varphi - \varphi^i), \\ g'_{x^i} &= 0, & g'_{y^i} &= -g' \sin(\varphi'' - \varphi^i), \\ g'_{z^i} &= -g' \cos(\varphi'' - \varphi^i). \end{aligned} \right\} \quad (3.52a)$$

Проектируя (3.52) на оси  $x_m^i, y_m^i, z_m^i$  и учитывая, что при  $\chi_m^i > 0$  ось  $y_m^i$  повернута относительно оси  $y^i$  к «востоку», т. е. в сторону оси  $x^i$ , получим

$$\left. \begin{aligned} g_{x_m^i} &= g \sin(\varphi - \varphi^i) \sin \chi_m^i, & g_{y_m^i} &= -g \sin(\varphi - \varphi^i) \cos \chi_m^i, \\ g_{z_m^i} &= -g \cos(\varphi - \varphi^i), & g'_{x_m^i} &= g' \sin(\varphi'' - \varphi^i) \sin \chi_m^i, \\ g'_{y_m^i} &= -g' \sin(\varphi'' - \varphi^i) \cos \chi_m^i, & g'_{z_m^i} &= -g' \cos(\varphi'' - \varphi^i). \end{aligned} \right\} \quad (3.52b)$$

Если учесть (3.52) и (3.52b), то формулы (3.51) представятся в виде

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad a_{x_m^i} &= \dot{v}_{x_m^i} - (U \sin \varphi^i + \omega_{z_m^i}) v_{y_m^i} + \\ &\quad + (U \cos \varphi^i \cos \chi_m^i + \omega_{y_m^i}) v_{z_m^i} - g \sin(\varphi - \varphi^i) \sin \chi_m^i, \\ a_{y_m^i} &= \dot{v}_{y_m^i} + (U \sin \varphi^i + \omega_{z_m^i}) v_{x_m^i} - \\ &\quad - (-U \cos \varphi^i \sin \chi_m^i + \omega_{x_m^i}) v_{z_m^i} + g \sin(\varphi - \varphi^i) \cos \chi_m^i, \\ a_{z_m^i} &= \dot{v}_{z_m^i} + \omega_{x_m^i} v_{y_m^i} - \omega_{y_m^i} v_{x_m^i} - \\ &\quad - U v_{x_m^i} \cos \varphi^i + g \cos(\varphi - \varphi^i), \quad \square \quad (3.53) \end{aligned}$$

где

$$v_{x_m^i} = v_{x_m^i} \cos \chi_m^i + v_{y_m^i} \sin \chi_m^i \quad (3.53a)$$

— восточная составляющая относительной скорости.

Проделав ту же операцию с формулами (3.51а), получим

$$\left. \begin{aligned} a_{x_m}^i &= \dot{V}_{x_m}^i - \omega_{z_m}^i V_{y_m}^i + \omega_{y_m}^i V_{z_m}^i - g' \sin(\varphi'' - \varphi^i) \sin \chi_m^i, \\ a_{y_m}^i &= \dot{V}_{y_m}^i + \omega_{z_m}^i V_{x_m}^i - \omega_{x_m}^i V_{z_m}^i + g' \sin(\varphi'' - \varphi^i) \cos \chi_m^i, \\ a_{z_m}^i &= \dot{V}_{z_m}^i + \omega_{x_m}^i V_{y_m}^i - \omega_{y_m}^i V_{x_m}^i + g' \cos(\varphi'' - \varphi^i). \end{aligned} \right\} (3.54)$$

Полученные выражения (3.53) и (3.54) мы непосредственно используем при составлении алгоритмов инерциальных систем навигации. Для того чтобы выразить величины  $a_{x_m}^i$ ,  $a_{y_m}^i$ ,  $a_{z_m}^i$  через проекции относительной или абсолютной скорости движения объекта, необходимо представить  $\omega_{x_m}^i$ ,  $\omega_{y_m}^i$ ,  $\omega_{z_m}^i$  через эти проекции.

Горизонтальные составляющие  $\omega_{x_m}^i$ ,  $\omega_{y_m}^i$  абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_m y_m z_m^i$  можно представить в единой форме для любого индекса  $m$ . Соответствующие выражения получаются из первых двух формул (1.149) и (1.150) при замене нижнего индекса  $o$  на индекс  $m$ .

Так, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_m}^i &= -U \cos \varphi^i \sin \chi_m^i - \left( \frac{v_{y_m}^i}{R_{y_m}^i} - \frac{v_{x_m}^i}{R_m^i} \right), \\ \omega_{y_m}^i &= U \cos \varphi^i \cos \chi_m^i + \left( \frac{v_{x_m}^i}{R_{x_m}^i} - \frac{v_{y_m}^i}{R_m^i} \right) \end{aligned} \right\} (3.55)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_m}^i &= - \left( \frac{V_{y_m}^i}{R_{y_m}^i} - \frac{V_{x_m}^i}{R_m^i} \right) \\ \omega_{y_m}^i &= \frac{V_{x_m}^i}{R_{x_m}^i} - \frac{V_{y_m}^i}{R_m^i} \end{aligned} \right\} (3.55a)$$

При этом величины  $1/R_{y_m}^i$ ,  $1/R_{x_m}^i$ ,  $1/R_m^i$  определяются (1.146) при замене индекса  $o$  на  $m$ . В частности, если трехгранник  $x_m y_m z_m^i$  совпадает с трехгранником  $x^i y^i z^i$ , то, очевидно, в (1.146) следует положить  $\chi_o^i = 0$ . Выражение для вертикальной составляющей  $\omega_{z_m}^i$  абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_m y_m z_m^i$  существенно зависит от индекса  $m$ . Рассмотрим выражения  $\omega_{z_m}^i$  для го-

ризонтовых трехгранников  $x_m y_m z_m^i$  с различной ориентацией осей  $x_m^i$  и  $y_m^i$ . Так, для трехгранников  $x^i y^i z^i$ , у которых ребра  $y^i$  лежат в плоскости меридиана, по третьей формуле (1.135а) имеем

$$\omega_{z^i} = U \sin \varphi^i + \frac{v_{x^i}}{R_1^i} \operatorname{tg} \varphi^i = \frac{V_{x^i}}{R_1^i} \operatorname{tg} \varphi^i. \quad (3.56)$$

Для ортодромических трехгранников  $x_o^i y_o^i z_o^i$ , у которых ребра  $y_o^i$  лежат в плоскости ортодромических меридианов, по третьим формулам (1.149) и (1.150) имеем

$$\begin{aligned} \omega_{z_o^i} &= U \sin \varphi^i + \left( \frac{v_{x_o^i}}{R_{x_o^i}^i} - \frac{v_{y_o^i}}{R_o^i} \right) \operatorname{tg} \Phi^i = \\ &= U \cos \varphi_{\Pi}^i \frac{\sin \Lambda^i}{\cos \Phi^i} + \left( \frac{V_{x_o^i}}{R_{x_o^i}^i} - \frac{V_{y_o^i}}{R_o^i} \right) \operatorname{tg} \Phi^i; \end{aligned} \quad (3.56a)$$

для геодезических трехгранников  $x_r^i y_r^i z_r^i$  имеем

$$\omega_{z_r^i} = U \sin \varphi^i; \quad (3.56b)$$

для азимутально-свободных трехгранников  $x_c^i y_c^i z_c^i$  имеем

$$\omega_{z_c^i} = 0; \quad (3.56в)$$

для трехгранников  $x_m y_m z_m^i$ , вращающихся вокруг вертикали с постоянной скоростью  $\Omega$ , имеем

$$\omega_{z_m^i} = \Omega. \quad (3.56г)$$

Трехгранники  $x_r^i y_r^i z_r^i$  являются обобщением геодезического трехгранника  $x_r y_r z_r$ , который был рассмотрен в п. 2.1.3. Этот трехгранник обладает той особенностью (см. п. 2.3.3), что если в горизонтальном движении вектор относительной (путевой) скорости  $v$  будет составлять с осью  $y_r$  постоянный по величине угол  $\psi$  (путевой угол), то траекторией движения объекта будет геодезическая линия  $h$ -эллипсоида. Азимутально-свободные трехгранники  $x_c^i y_c^i z_c^i$  не вращаются в абсолютном пространстве вокруг своего ребра  $z_c^i$ , т. е. вокруг соответствующей вертикали. Такие трехгранники обладают некоторыми достоинствами при использовании в инерциальных системах навигации. Трехгранники  $x_m y_m z_m^i$  с фиксированным вращением вокруг вертикального ребра  $z_m^i$  используются в инерциальных системах, когда хотят осреднить некоторые инструментальные ошибки гироскопических платформ,

моделирующих горизонтальные трехгранники (см. [19]). По общим соотношениям, приведенным выше, нетрудно выразить проекции кажущегося ускорения через компоненты соответствующей скорости для различных конкретных случаев. Так, например, для трехгранников  $x^i y^i z^i$ , у которых ребро  $y^i$  лежит в плоскости меридиана, проекции  $\omega_{x^i}$ ,  $\omega_{y^i}$ ,  $\omega_{z^i}$  определяются формулами (1.135a). Тогда, подставляя их значения в (3.53) и (3.54), получим

$$\left. \begin{aligned} a_{x^i} &= \dot{v}_{x^i} - 2Uv_{y^i} \sin \varphi^i - \frac{v_{y^i} v_{x^i}}{R_1^i} \operatorname{tg} \varphi^i + \frac{v_{x^i} v_{z^i}}{R_1^i} + 2Uv_{z^i} \cos \varphi^i, \\ a_{y^i} &= \dot{v}_{y^i} + 2Uv_{x^i} \sin \varphi^i + \frac{v_{x^i}^2}{R^i} \operatorname{tg} \varphi^i + \frac{v_{y^i} v_{z^i}}{R_2^i} + g \sin(\varphi - \varphi^i), \\ a_{z^i} &= \dot{v}_{z^i} - \frac{v_{y^i}^2}{R_2^i} - \frac{v_{x^i}^2}{R_1^i} - 2Uv_{x^i} \cos \varphi^i + g \cos(\varphi - \varphi^i) \end{aligned} \right\} (3.57)$$

и

$$\left. \begin{aligned} a_{x^i} &= \dot{V}_{x^i} - \frac{V_{x^i} V_{y^i}}{R_1^i} \operatorname{tg} \varphi^i + \frac{V_{x^i} V_{z^i}}{R_1^i}, \\ a_{y^i} &= \dot{V}_{y^i} + \frac{V_{x^i}^2}{R_1^i} \operatorname{tg} \varphi^i + \frac{V_{y^i} V_{z^i}}{R_2^i} + g' \sin(\varphi'' - \varphi^i), \\ a_{z^i} &= \dot{V}_{z^i} - \frac{V_{y^i}^2}{R_2^i} - \frac{V_{x^i}^2}{R_1^i} + g' \cos(\varphi'' - \varphi^i). \end{aligned} \right\} (3.57a)$$

Для ортодромических трехгранников  $x_0^i y_0^i z_0^i$  проекции  $\omega_{x_0^i}$ ,  $\omega_{y_0^i}$ ,  $\omega_{z_0^i}$  определяются (1.149) и (1.150), поэтому аналогичным путем получим

$$\begin{aligned} \blacksquare a_{x_0^i} &= \dot{v}_{x_0^i} - 2Uv_{y_0^i} \sin \varphi^i - \left( \frac{v_{x_0^i}}{R_{x_0^i}^i} - \frac{v_{y_0^i}}{R_0^i} \right) v_{y_0^i} \operatorname{tg} \Phi^i + \\ &+ 2Uv_{z_0^i} \cos \varphi^i \cos \chi_0^i + \left( \frac{v_{x_0^i}}{R_{x_0^i}^i} - \frac{v_{y_0^i}}{R_0^i} \right) v_{z_0^i} - g \sin(\varphi - \varphi^i) \sin \chi_0^i, \\ a_{y_0^i} &= \dot{v}_{y_0^i} + 2Uv_{x_0^i} \sin \varphi^i + \left( \frac{v_{x_0^i}}{R_{x_0^i}^i} - \frac{v_{y_0^i}}{R_0^i} \right) v_{x_0^i} \operatorname{tg} \Phi^i + \\ &+ 2Uv_{z_0^i} \cos \varphi^i \sin \chi_0^i + \left( \frac{v_{y_0^i}}{R_{y_0^i}^i} - \frac{v_{x_0^i}}{R_0^i} \right) v_{z_0^i} + g \sin(\varphi - \varphi^i) \cos \chi_0^i. \end{aligned}$$

$$a_{z_0^i} = \dot{v}_{z_0^i} - \left( \frac{v_{y_0^i}}{R_{y_0^i}^i} - \frac{v_{x_0^i}}{R_0^i} \right) v_{y_0^i} - \left( \frac{v_{x_0^i}}{R_{x_0^i}^i} - \frac{v_{y_0^i}}{R_0^i} \right) v_{x_0^i} - 2Uv_{x^i} \cos \varphi^i + g \cos(\varphi - \varphi^i) \quad \square (3.58)$$

и

$$\begin{aligned} \blacksquare a_{x_0^i} &= \dot{V}_{x_0^i} - UV_{y_0^i} \cos \Phi^i \frac{\sin \Lambda^i}{\cos \Phi^i} - \left( \frac{V_{x_0^i}}{R_{x_0^i}^i} - \frac{V_{y_0^i}}{R_0^i} \right) V_{y_0^i} \operatorname{tg} \Phi^i + \\ &+ \left( \frac{V_{x_0^i}}{R_{x_0^i}^i} - \frac{V_{y_0^i}}{R_0^i} \right) V_{z_0^i} - g' \sin(\varphi'' - \varphi^i) \sin \chi_0^i, \\ a_{y_0^i} &= \dot{V}_{y_0^i} + UV_{x_0^i} \cos \Phi^i \frac{\sin \Lambda^i}{\cos \Phi^i} + \left( \frac{V_{x_0^i}}{R_{x_0^i}^i} - \frac{V_{y_0^i}}{R_0^i} \right) V_{x_0^i} \operatorname{tg} \Phi^i + \\ &+ \left( \frac{V_{y_0^i}}{R_{y_0^i}^i} - \frac{V_{x_0^i}}{R_0^i} \right) V_{z_0^i} + g' \sin(\varphi'' - \varphi^i) \cos \chi_0^i, \\ a_{z_0^i} &= \dot{V}_{z_0^i} - \left( \frac{V_{y_0^i}}{R_{y_0^i}^i} - \frac{V_{x_0^i}}{R_0^i} \right) V_{y_0^i} - \left( \frac{V_{x_0^i}}{R_{x_0^i}^i} - \frac{V_{y_0^i}}{R_0^i} \right) V_{x_0^i} + \\ &+ g' \cos(\varphi'' - \varphi^i). \quad \square (3.58a) \end{aligned}$$

Для азимутально-свободных трехгранников  $x_c^i y_c^i z_c^i$  имеем  $\omega_{z_c^i} = 0$ , а  $\omega_{x_c^i}$  и  $\omega_{y_c^i}$  определяются (3.55) и (3.55a) при замене индекса  $m$  на  $c$ . Проекция  $a_{x_c^i}$ ,  $a_{y_c^i}$ ,  $a_{z_c^i}$  определяются в выражениями

$$\begin{aligned} \blacksquare a_{x_c^i} &= \dot{v}_{x_c^i} - Uv_{y_c^i} \sin \varphi^i + 2Uv_{z_c^i} \cos \varphi^i \cos \chi_c^i + \\ &+ \left( \frac{v_{x_c^i}}{R_{x_c^i}^i} - \frac{v_{y_c^i}}{R_c^i} \right) v_{z_c^i} - g \sin(\varphi - \varphi^i) \sin \chi_c^i, \\ a_{y_c^i} &= \dot{v}_{y_c^i} + Uv_{x_c^i} \sin \varphi^i + 2Uv_{z_c^i} \cos \varphi^i \sin \chi_c^i + \\ &+ \left( \frac{v_{y_c^i}}{R_{y_c^i}^i} - \frac{v_{x_c^i}}{R_c^i} \right) v_{z_c^i} + g \sin(\varphi - \varphi^i) \cos \chi_c^i, \\ a_{z_c^i} &= \dot{v}_{z_c^i} - \left( \frac{v_{y_c^i}}{R_{y_c^i}^i} - \frac{v_{x_c^i}}{R_c^i} \right) v_{y_c^i} - \left( \frac{v_{x_c^i}}{R_{x_c^i}^i} - \frac{v_{y_c^i}}{R_c^i} \right) v_{x_c^i} - \\ &- 2Uv_{x^i} \cos \varphi^i + g \cos(\varphi - \varphi^i), \quad \square (3.59) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{x_c}^i &= \dot{V}_{x_c}^i + \left( \frac{V_{x_c}^i}{R_{x_c}^i} - \frac{V_{y_c}^i}{R_c^i} \right) V_{z_c}^i - g' \sin(\varphi'' - \varphi^i) \sin \chi_c^i, \\ a_{y_c}^i &= \dot{V}_{y_c}^i + \left( \frac{V_{y_c}^i}{R_{y_c}^i} - \frac{V_{x_c}^i}{R_c^i} \right) V_{z_c}^i + g' \sin(\varphi'' - \varphi^i) \cos \chi_c^i, \\ a_{z_c}^i &= \dot{V}_{z_c}^i - \left( \frac{V_{y_c}^i}{R_{y_c}^i} - \frac{V_{x_c}^i}{R_c^i} \right) V_{y_c}^i - \left( \frac{V_{x_c}^i}{R_{x_c}^i} - \frac{V_{y_c}^i}{R_c^i} \right) V_{x_c}^i + \\ &\quad + g' \cos(\varphi'' - \varphi^i). \end{aligned} \right\} (3.59a)$$

При фиксированном индексе  $i$  третьи формулы (3.57) — (3.59a) должны давать одни и те же численные значения для  $a_{z_m}^i$  независи-

мо от индекса  $m$ , так как все ребра  $z^i, z_0^i, z_c^i$  и т. д. будут в этом случае направлены вдоль одной и той же вертикали. Выведем формулу для определения  $a_{z_m}^i$ , не привязанную к конкретному горизонтальному трехграннику. Для этой цели введем векторы  $v_r^i$  и  $V_r^i$ , которые будут являться проекциями векторов  $v$  и  $V$  на соответствующую горизонтальную плоскость, т. е. координатную плоскость  $x_m^i y_m^i$ . Векторы  $V_r^i, v_r^i$  будем определять в горизонтальной плоскости модулями  $v_r^i, V_r^i$  и углами  $\psi^i, \psi_a^i$ , которые они составляют с осью  $y^i$ , лежащей в плоскости меридиана.

Тогда, очевидно, будем иметь

$$v_{x^i} = v_r^i \sin \psi^i, \quad v_{y^i} = v_r^i \cos \psi^i.$$

$$V_{x^i} = V_r^i \sin \psi_a^i, \quad V_{y^i} = V_r^i \cos \psi_a^i.$$

Если подставить эти значения в третьи формулы (3.57) и (3.57a) и учесть (1.146), то получим

$$\left. \begin{aligned} a_{z^i} &= \dot{v}_{z^i} - \frac{v_r^{i2}}{R_{y_r}^i} - 2U v_{x^i} \cos \varphi^i + g \cos(\varphi - \varphi^i), \\ a_{z^i} &= \dot{V}_{z^i} - \frac{V_r^{i2}}{R_{y_{ar}}^i} + g' \cos(\varphi'' - \varphi^i). \end{aligned} \right\} (3.60)$$

Здесь  $y_r^i$  и  $y_{ar}^i$  — оси, направленные вдоль векторов  $v_r^i$  и  $V_r^i$  соответственно. Вторые слагаемые в (3.60) определяют центростремительные ускорения от горизонтальных составляющих относительной и абсолютной скорости движения объекта, а  $R_{y_r}^i$  и  $R_{y_{ar}}^i$  — обобщенные радиусы кривизны в направлении векторов  $v_r^i$  и  $V_r^i$ .

В частности, для географической вертикали  $R_{y_r}$  и  $R_{y_{ar}}$  будут радиусами кривизны нормальных сечений  $h$ -эллипсоида в указанных направлениях, для геоцентрической вертикали  $R_{y_r} = R_{y_{ar}} = r$ , где  $r$  — радиус-вектор, определяемый формулой (1.17).

Представляет интерес определить проекции вектора кажущегося ускорения на оси  $x_m^i, y_m^i, z_m^i$  при горизонтальном движении объекта, т. е. при  $h = \text{const}$ . Эта задача просто решается для систем координат  $x^i y^i z^i$ . Для остальных систем, отличающихся индексом  $m$ , соответствующие условия получаются по формулам преобразования координат. Из (1.122б) при  $h \approx 0$  получаем соотношение, связывающее проекции  $v_{y^i}$  и  $v_{z^i}$ :

$$v_{z^i} = -v_{y^i} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi'). \quad (3.61)$$

Эта формула имеет ясный физический смысл. В горизонтальном движении вектор относительной скорости  $v$  лежит в плоскости географического горизонта, т. е. в этом смысле  $v_z = 0$  (\*), а  $v_x$  и  $v_y$ , вообще говоря, отличны от нуля. Восточные составляющие скорости в системах координат  $xyz, x'y'z'$  и  $x''y''z''$  совпадают, т. е.  $v_x = v_{x'} = v_{x''}$ , а  $v_y$  проектируется на оси  $y', z'$  и  $y'', z''$  так, что между соответствующими проекциями имеют место соотношения (3.61). Сравнением коэффициентов при  $v_{y''}, v_{z''}$  и  $v_{y'}, v_{z'}$  в (1.116) и (1.117) можно получить для  $\operatorname{tg}(\varphi - \varphi'')$  и  $\operatorname{tg}(\varphi - \varphi')$  выражения в виде

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi'') = \frac{a \sin \varphi'' \cos \varphi''}{1 - a \cos^2 \varphi''}, \quad \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{e'^2 \sin \varphi' \cos \varphi'}{1 + e'^2 \sin^2 \varphi'}. \quad (3.62)$$

В п. 1.3.6 было показано, что  $v_{y^i} = V_{y^i}$  и  $v_{z^i} = V_{z^i}$ , поэтому (3.61) сохраняет свой смысл, если туда вместо  $v_{y^i}$  и  $v_{z^i}$  подставить  $V_{y^i}$  и  $V_{z^i}$ . Во всех системах координат  $x_m^i y_m^i z_m^i$  с фиксированным индексом  $i$  ребро  $z_m^i$  направлено вдоль одной и той же вертикали, вследствие чего  $v_{z_m^i} = v_{z^i}$ . Формула (3.61) сохраняет свой смысл и в этом случае, только в нее нужно подставить  $v_{z^i} = v_{z_m^i}$  и  $v_{y^i}$  по формуле преобразования координат

$$v_{y^i} = -v_{y_m^i} \sin \chi_m^i + v_{z_m^i} \cos \chi_m^i. \quad (3.63)$$

В горизонтальном движении проекции  $a_x, a_y, a_z$  кажущегося ускорения на ребра географического трехгранника  $xyz$  получаются из (3.57) и (3.57a) при  $v_z = V_z = 0$ , причем следует заметить, что

\*) Для географического трехгранника  $\varphi^i = \varphi$ , поэтому правая часть (3.61) равна нулю.

в (3.57) кроме членов с  $v_z$  исчезнет также проекция  $g \sin(\varphi - \varphi^i)$ , так как в этом случае  $\varphi^i = \varphi$ . Видимо, здесь можно сделать вывод, что для географической системы координат кажущееся ускорение удобно выражать через компоненты относительной скорости. В аналогичных условиях для гравитационного трехгранника  $x''y''z''$  исчезает проекция  $g' \sin(\varphi'' - \varphi^i)$  в (3.57а), так как в данном случае имеет место равенство  $\varphi^i = \varphi''$ . Видимо, для гравитационного трехгранника  $x''y''z''$  удобно кажущееся ускорение выражать через компоненты абсолютной скорости  $V$ . Кроме того, в горизонтальном движении в соответствии с (3.61)  $V_{z''} = -V_{y''} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi'')$  и третьи члены в первых двух равенствах (3.57а) представляются в виде

$$\frac{V_{x''} V_{y''}}{R_1''} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi''), \quad - \frac{V_{y''}^2}{R_2''} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi'').$$

Оценим численные значения этих членов. С точностью порядка  $\alpha^2 \approx 10^{-6}$  и в соответствии с (3.62)  $\operatorname{tg}(\varphi - \varphi'') \leq 0,5\alpha \approx 1,67 \cdot 10^{-3}$ . Примем для определенности, что объект движется вдоль меридиана с такой скоростью, что  $V_{y''} = v_{y''} = 0,8$  км/с или, в других единицах,  $V_{y''} = v_{y''} = 2880$  км/ч. Эта скорость примерно в 10 раз меньше первой космической скорости, поэтому  $V_{y''}^2/R_2'' = 10^{-2}g'$ ; после умножения на  $\operatorname{tg}(\varphi - \varphi'')$  эта величина не будет превосходить  $1,67 \cdot 10^{-5}g'$ . Другой член будет численно меньше этого значения, так как  $V_{x''}$  будет в рассматриваемом случае определяться переносной скоростью от вращения Земли, которая на экваторе не превосходит 0,5 км/с. Полученную величину  $1,67 \cdot 10^{-5}g$  можно трактовать как проекцию гравитационного ускорения  $g'$  на плоскость, наклоненную к плоскости гравитационного горизонта на угол  $3,3''$ . Такими величинами во многих случаях можно пренебречь, так как они сравнимы с инструментальными ошибками измерителей ускорений — акселерометров. Но при таком пренебрежении мы можем сказать, что для гравитационного трехгранника  $x''y''z''$  в горизонтальном движении можно полагать в (3.58), (3.59)  $V_{z''} = 0$ .

Особенно простое выражения для проекций кажущегося ускорения получаются в горизонтальном движении в случае, когда выбирается азимутально-свободный трехгранник  $x_c^i y_c^i z_c^i$ . Для азимутально-свободного трехгранника  $x_c y_c z_c$  из первых двух равенств (3.58) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} a_{x_c} &= \dot{v}_{x_c} - U v_{y_c} \sin \varphi, \\ a_{y_c} &= \dot{v}_{y_c} + U v_{x_c} \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

а для трехгранника  $x''y''z''$  из первых двух равенств (3.57а) при

$\omega_{x_c}'' = 0$  и  $V_{z''} \approx 0$  получим с указанным выше приближением

$$a_{x_c}'' = \dot{V}_{x_c}'', \quad a_{y_c}'' = \dot{V}_{y_c}''. \quad (3.65)$$

В формулах для определения проекций кажущегося ускорения фигурирует угол  $\chi_m^i$ , который образует ось  $y_m^i$  с осью  $y^i$ , лежащей в плоскости меридиана. Скорость изменения этого угла  $\dot{\chi}_m^i$  с учетом положительного направления его изменения равняется разности абсолютных угловых скоростей вращения трехгранников  $x^i y^i z^i$  и  $x_m^i y_m^i z_m^i$  вокруг совпадающих друг с другом ребер  $z^i$  и  $z_m^i$ , т. е.  $\dot{\chi}_m^i = \omega_{z^i} - \omega_{z_m^i}$ . Отсюда имеем

$$\chi_m^i = \chi_m^i(0) + \int_0^t (\omega_{z^i} - \omega_{z_m^i}) dt, \quad (3.66)$$

где  $\chi_m^i(0)$  — значение угла  $\chi_m^i$  при  $t = 0$ .

Для ортодромического трехгранника  $x_o^i x_o^i z_o^i$  угол  $\chi_o^i$  следует определять не по формуле (3.66), а по формуле (1.139). В тех случаях, когда движение объекта происходит вблизи полюсов Земли, пользоваться (3.66) неудобно, так как в выражении (3.56) для  $\omega_{z^i}$  фигурирует множитель  $\operatorname{tg} \varphi^i$ , обращающийся на полюсах в бесконечность. Тогда можно поступить следующим образом. Вычислим сначала угол  $\chi_{om}^i$  между ребрами  $y_o^i$  и  $y_m^i$ , считая его положительным, когда ось  $y_m^i$  поворачивается от оси  $y_o^i$  в сторону положительного конца оси  $x_o^i$ , т. е. к ортодромическому востоку (этот угол будет, очевидно, определяться интегралом

$$\chi_{om}^i = \chi_{om}^i(0) + \int_0^t (\omega_{z_o^i} - \omega_{z_m^i}) dt, \quad (3.67)$$

а затем определим угол  $\chi_m^i$  из соотношения

$$\chi_m^i = \chi_{om}^i + \chi_o^i, \quad (3.68)$$

где угол  $\chi_o^i$ , как было только что указано, вычисляется по формуле (1.139).

**3.3.4. Координатные системы сферической модели Земли.** В п. 1.4.2 были рассмотрены две модели поля силы тяготения и силы тяжести для сферической модели Земли. В первом случае концентрические сферы радиусов  $R = R_0 + h$  ( $R_0 = 6371$  км) считались уровнями поверхностями поля силы тяжести, поэтому сила тяжести направлена по их нормали, т. е. вдоль радиуса к центру Земли. Во втором случае указанные сферы принимаются за уровенные поверхности поля силы тяготения, поэтому теперь вдоль радиуса к центру Земли направлена сила тяготения.

Проекции  $g_{x'}$ ,  $g_{y'}$ ,  $g_{z'}$  и  $g'_{x'}$ ,  $g'_{y'}$ ,  $g'_{z'}$  ускорения силы тяжести  $g$  и силы тяготения  $g'$  на оси  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  геоцентрической системы координат, а также их абсолютные величины  $g$  и  $g'$  определяются формулами (1.158), (1.161), (1.159), (1.160).

Для первой сферической модели кажущееся ускорение удобно выразить через компоненты земной относительной скорости  $v$ , так как в выражениях для его проекций будут отсутствовать составляющие  $g_{x'}$ ,  $g_{y'}$  ускорения силы тяжести. Во втором случае, наоборот, имеем  $g'_{x'} = 0$  и  $g'_{y'} = 0$  и кажущееся ускорение удобно выражать через компоненты абсолютной скорости  $V$ .

Мы выпишем соответственно выражения для проекций кажущегося ускорения на оси двух геоцентрических координатных систем: ортодромической  $x'_0 y'_0 z'_0$  и системы координат  $x'_c y'_c z'_c$ , не вращающейся вокруг вертикали. Соответствующие выражения будут получаться из (3.52а) и (3.59б), если в них в первом случае положить  $\omega_{x'_m} = \omega_{x'_0}$ ,  $\omega_{y'_m} = \omega_{y'_0}$ ,  $\omega_{z'_m} = \omega_{z'_0}$  и определить их по (1.166) и (1.167), а во втором случае —  $\omega_{x'_m} = \omega_{x'_c}$  и  $\omega_{y'_m} = \omega_{y'_c}$  и определить их первыми двумя формулами (1.166) и (1.167) при замене нижнего индекса  $o$  на  $c$  и  $\omega_{z'_m} = \omega_{z'_c} = 0$ .

Тогда для первой сферической модели из (3.52а) и (3.52б) получим

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad a_{x'_0} &= \dot{v}_{x'_0} - 2Uv_{y'_0} \sin \varphi' - \frac{v_{x'_0} v_{y'_0}}{R} \operatorname{tg} \Phi' + \\ &+ 2Uv_{z'_0} \cos \varphi' \cos \chi'_0 + \frac{v_{x'_0} v_{z'_0}}{R}, \\ a_{y'_0} &= \dot{v}_{y'_0} + 2Uv_{x'_0} \sin \varphi' + \frac{v_{x'_0} v_{y'_0}}{R} \operatorname{tg} \Phi' + \\ &+ 2Uv_{z'_0} \cos \varphi' \sin \chi'_0 + \frac{v_{y'_0} v_{z'_0}}{R}, \\ a_{z'_0} &= \dot{v}_{z'_0} - \frac{v_{y'_0}^2}{R} - \frac{v_{x'_0}^2}{R} - 2Uv_{x'_0} \cos \varphi' \cos \chi'_0 - \\ &- 2Uv_{y'_0} \cos \varphi' \sin \chi'_0 + g. \quad \square \quad (3.69) \end{aligned}$$

Для второй модели будем иметь

$$\blacksquare \quad a_{x'_c} = \dot{v}_{x'_c} - Uv_{y'_c} \sin \varphi' + \\ + 2Uv_{z'_c} \cos \varphi' \cos (\chi'_0 + \chi'_{oc}) + \frac{v_{x'_c} v_{z'_c}}{R},$$

$$\begin{aligned} a_{y'_c} &= \dot{v}_{y'_c} + Uv_{x'_c} \sin \varphi' + 2Uv_{z'_c} \cos \varphi' \sin (\chi'_0 + \chi'_{oc}) + \frac{v_{y'_c} v_{z'_c}}{R}, \\ a_{z'_c} &= \dot{v}_{z'_c} - \frac{v_{y'_c}^2}{R} - \frac{v_{x'_c}^2}{R} - 2Uv_{x'_c} \cos \varphi' \cos (\chi'_0 + \chi'_{oc}) - \\ &- 2Uv_{y'_c} \cos \varphi' \sin (\chi'_0 + \chi'_{oc}) + g, \quad \square \quad (3.70) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{x'_0} &= \dot{V}_{x'_0} - \left( \frac{V_{x'_0}}{R} \operatorname{tg} \Phi' + U \frac{\cos \varphi'_{\Pi} \sin \Lambda'}{\cos \Phi'} \right) V_{y'_0} + \frac{V_{x'_0} V_{z'_0}}{R}, \\ a_{y'_0} &= \dot{V}_{y'_0} + \left( \frac{V_{x'_0}}{R} \operatorname{tg} \Phi' + U \frac{\cos \varphi'_{\Pi} \sin \Lambda'}{\cos \Phi'} \right) V_{x'_0} + \frac{V_{y'_0} V_{z'_0}}{R}, \\ a_{z'_0} &= \dot{V}_{z'_0} - \frac{V_{y'_0}^2}{R} - \frac{V_{x'_0}^2}{R} + g' \end{aligned} \right\} \quad (3.71)$$

и

$$\left. \begin{aligned} a_{x'_c} &= \dot{V}_{x'_c} + \frac{V_{x'_c} V_{z'_c}}{R}, \\ a_{y'_c} &= \dot{V}_{y'_c} + \frac{V_{y'_c} V_{z'_c}}{R}, \\ a_{z'_c} &= \dot{V}_{z'_c} - \frac{V_{y'_c}^2}{R} - \frac{V_{x'_c}^2}{R} + g'. \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

Следует заметить, что формулы преобразования (1.136) — (1.139) сохраняют свой смысл и в данном случае. Мы сохранили для широты обозначение  $\varphi'$ , хотя в формулах (3.69), (3.70) следовало бы положить  $\varphi' = \varphi$ , а в (3.72), (3.71) положить  $\varphi' = \varphi''$ . В первом случае геоцентрическая вертикаль совпадает с географической, а во втором случае она совпадает с гравитационной вертикалью. Угол  $\chi'_{oc}$  в рассматриваемом случае определяется из (3.68) при  $\omega_{z'_m} = \omega_{z'_c} = 0$  и  $\omega_{x'_0} = \omega_{x'_c}$ , определяемой из (1.166) или из (1.167). Вследствие того факта, что для сферической модели  $h = v_{z'_0} = V_{z'_0}$  и  $v_{z'_0} = v_{z'_c} = V_{z'_c}$ , соответствующие компоненты кажущегося ускорения в горизонтальном движении получаются из (3.69) — (3.72) при  $v_{z'_0} = V_{z'_0} = v_{z'_c} = V_{z'_c} = 0$ . Особенно простые выражения для горизонтальных проекций кажущегося ускорения получают-

ся при этом по формулам (3.72). В этом случае они совпадают с производными от соответствующих проекций абсолютной скорости.

В заключение отметим, что формулы (3.69) и (3.70) при  $v_{z'0} = 0$  являются для сферической модели эквивалентом формул (3.52) и (3.57), а формулы (3.71) при  $\varphi_{II} = 0$  соответствующим эквивалентом формул (3.59). Напомним, что для сферической модели в первом случае можно считать  $\varphi' = \varphi$ , а во втором случае —  $\varphi' = \varphi''$ .

### § 3.4. Ускорение в косоугольных системах координат

**3.4.1. Контравариантные составляющие.** Контравариантные составляющие вектора абсолютной скорости  $V$  в косоугольной системе координат  $xyz'$  обозначим через  $V^1, V^2, V^3$ . По типу формулы (1.95) можно записать

$$V = V^1 x^0 + V^2 y^0 + V^3 z'^0, \quad (3.73)$$

где  $x^0, y^0, z'^0$  — единичные векторы вдоль оси  $x$ , направленной по касательной к параллели на восток, оси  $y$ , направленной вдоль касательной к меридиану на север, оси  $z'$ , направленной по геоцентрической вертикали вверх. Направляющие косинусы осей  $x, y, z'$  в абсолютной системе координат  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  можно записать в виде таблицы

	$x$	$y$	$z'$	
$\xi_a$	$-\sin \lambda_a$	$-\sin \varphi \cos \lambda_a$	$\cos \varphi' \cos \lambda_a$	(3.74)
$\eta_a$	$\cos \lambda_a$	$-\sin \varphi \sin \lambda_a$	$\cos \varphi' \sin \lambda_a$	
$\zeta_a$	$0$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi'$	

Таблица (3.74) получается из таблицы (1.76) заменой  $\lambda$  на  $\lambda_a$  и в последнем столбце  $\varphi$  на  $\varphi'$ .

Выразим ортогональные проекции вектора  $V$  на оси  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  через его контравариантные составляющие  $V^1, V^2, V^3$ . Учитывая, что проекция вектора на некоторую ось равняется сумме проекций его составляющих на ту же ось, получим из (3.73) и (3.74) выражения

$$\left. \begin{aligned} V_{\xi_a} &= -V^1 \sin \lambda_a - V^2 \sin \varphi \cos \lambda_a + V^3 \cos \varphi' \cos \lambda_a, \\ V_{\eta_a} &= V^1 \cos \lambda_a - V^2 \sin \varphi \sin \lambda_a + V^3 \cos \varphi' \sin \lambda_a, \\ V_{\zeta_a} &= V^2 \cos \varphi + V^3 \sin \varphi'. \end{aligned} \right\} \quad (3.75)$$

Введем матрицу направляющих косинусов осей  $x, y, z'$  в инер-

циальной системе координат  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ :

$$B_a = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_a & -\sin \varphi \cos \lambda_a & \cos \varphi' \cos \lambda_a \\ \cos \lambda_a & -\sin \varphi \sin \lambda_a & \cos \varphi' \sin \lambda_a \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi' \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Тогда (3.75) можно записать компактно в матричной форме

$$\begin{bmatrix} V_{\xi_a} \\ V_{\eta_a} \\ V_{\zeta_a} \end{bmatrix} = B_a \begin{bmatrix} V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

Уравнение (3.77) можно разрешить относительно составляющих  $V^1, V^2, V^3$ . Это решение имеет вид

$$\begin{bmatrix} V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{bmatrix} = B_a^{-1} \begin{bmatrix} V_{\xi_a} \\ V_{\eta_a} \\ V_{\zeta_a} \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

Процедура нахождения обратной матрицы была описана в п. 1.3.4. В данном случае будем иметь

$$B_a^{-1} = \frac{1}{\cos(\varphi - \varphi')} \begin{bmatrix} -\cos(\varphi - \varphi') \sin \lambda_a & \cos(\varphi - \varphi') \cos \lambda_a & 0 \\ -\sin \varphi' \cos \lambda_a & -\sin \varphi' \sin \lambda_a & \cos \varphi' \\ \cos \varphi \cos \lambda_a & \cos \varphi \sin \lambda_a & \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

Следует отметить, что (3.77), (3.78) определяют прямую и обратную связь между ортогональными проекциями любого вектора, в частности и вектора  $W$  абсолютного ускорения, на оси  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  и его контравариантными составляющими в косоугольной системе координат  $xyz'$ .

Продифференцируем обе части матричного равенства (3.77) по времени и учтем, что  $\dot{V}_{\xi_a}, \dot{V}_{\eta_a}, \dot{V}_{\zeta_a}$  суть проекции  $W_{\xi_a}, W_{\eta_a}, W_{\zeta_a}$  абсолютного ускорения на оси  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ . Обе части полученного равенства помножим слева на  $B_a^{-1}$ . Тогда, учитывая (3.78) и сделанное выше замечание, получим

$$B_a^{-1} \begin{bmatrix} \dot{V}_{\xi_a} \\ \dot{V}_{\eta_a} \\ \dot{V}_{\zeta_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^1 \\ W^2 \\ W^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}^1 \\ \dot{V}^2 \\ \dot{V}^3 \end{bmatrix} + B_a^{-1} \dot{B}_a \begin{bmatrix} V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{bmatrix}, \quad (3.80)$$

где  $W^1, W^2, W^3$  — контравариантные составляющие вектора  $W$  в системе координат  $xyz'$ , а  $\dot{B}_a$  — произвольная матрица (3.76)

по времени, которую можно представить в виде

$$\dot{B}_a = \dot{\lambda}_a \begin{bmatrix} -\cos \lambda_a & \sin \varphi \sin \lambda_a & -\cos \varphi' \sin \lambda_a \\ -\sin \lambda_a & -\sin \varphi \cos \lambda_a & \cos \varphi' \cos \lambda_a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varphi \begin{bmatrix} 0 & -\cos \varphi \cos \lambda_a & -k_\varphi \sin \varphi' \cos \lambda_a \\ 0 & -\cos \varphi \sin \lambda_a & -k_\varphi \sin \varphi' \sin \lambda_a \\ 0 & -\sin \varphi & k_\varphi \cos \varphi' \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

Здесь через  $k_\varphi$  обозначена производная  $\varphi'$  по  $\varphi$ , которую на основании (1.8), (1.9) и (1.12а) можно выразить через  $\varphi$  в виде

$$\left. \begin{aligned} k_\varphi &= \frac{d\varphi'}{d\varphi} = \frac{b^2 \cos^2 \varphi'}{a^2 \cos^2 \varphi} = \frac{1-e^2}{1-(2e^2-e^4)\sin^2 \varphi}, \\ \dot{\varphi}' &= k_\varphi \dot{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (3.82)$$

Теперь умножим матрицу (3.81) слева на матрицу (3.79). Тогда получим

$$B_a^{-1} \dot{B}_a = \frac{\dot{\lambda}_a}{\cos(\varphi - \varphi')} \begin{bmatrix} 0 & -\cos(\varphi - \varphi') \sin \varphi & \cos(\varphi - \varphi') \cos \varphi' \\ \sin \varphi' & 0 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\dot{\varphi}}{\cos(\varphi - \varphi')} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi - \varphi') & k_\varphi \sin(\varphi - \varphi') \\ 0 & -1 & k_\varphi \sin(\varphi - \varphi') \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

В соответствии с замечаниями, сделанными в конце п. 1.3.6,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}_a &= \frac{V^1}{R_1 \cos \varphi}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{V^2}{R_2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.84)$$

Тригонометрические функции  $\sin \varphi'$  и  $\cos \varphi'$ , фигурирующие в (3.83) явно или в функциях  $\sin(\varphi - \varphi')$  и  $\cos(\varphi - \varphi')$ , должны быть выражены через  $\varphi$  посредством формул (1.12а).

Соотношения (3.80) — (3.84) выражают контравариантные составляющие абсолютного ускорения через соответствующие компоненты абсолютной скорости.

Для определения составляющих компонент кажущегося ускорения необходимо найти выражения для контравариантных составляющих  $(g')^1$ ,  $(g')^2$ ,  $(g')^3$  гравитационного ускорения  $g'$ , вектор которого направлен вдоль

отрицательной полуоси  $z''$ . Эти составляющие получим непосредственным проектированием по правилу параллелограмма гравитационного ускорения на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z'$ . Очевидно,  $(g')^1 = 0$ . Остальные две составляющие найдем из рис. 3.4. В треугольнике  $ABC$

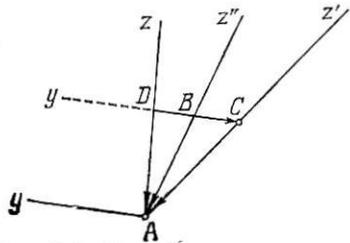


Рис. 3.4. К определению контравариантных составляющих гравитационного ускорения  $g'$  в косоугольной системе координат  $x y z$ .

стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  изображают соответственно  $(g')^1$ ,  $(g')^2$ ,  $(g')^3$ . Углы этого треугольника равняются  $A = \varphi'' - \varphi'$ ,  $B = 90^\circ + (\varphi - \varphi'')$  и  $C = 90^\circ - (\varphi - \varphi')$  (см. рис. 1.4).

По теореме синусов

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}. \quad (3.85)$$

Из (1.85) с учетом значений углов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и знаков составляющих  $(g')^2$  и  $(g')^3$  получим

$$\left. \begin{aligned} (g')^1 &= 0, & (g')^2 &= -g' \frac{\sin(\varphi'' - \varphi')}{\cos(\varphi - \varphi')}, \\ (g')^3 &= -g' \frac{\cos(\varphi - \varphi'')}{\cos(\varphi - \varphi')}. \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

Мы добавили сюда и значение  $(g')^1$ .

Если подставить в (3.80) матрицу (3.83) с учетом (3.84), провести матричные операции умножения и сложения, перейти от матричной записи к обычной и вычесть составляющие (3.86), то получим искомые контравариантные составляющие  $a^1$ ,  $a^2$ ,  $a^3$  кажущегося ускорения в виде

$$\begin{aligned} a^1 &= \dot{V}^1 - \frac{V^1 V^2}{R_1} \operatorname{tg} \varphi + \frac{V^1 V^3}{R_1} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi}, \\ a^2 &= \dot{V}^2 + \frac{V^1 V^1}{R_1 \cos(\varphi - \varphi')} \frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi} + k_\varphi \frac{V^2 V^3}{R_2} - \\ &\quad - \frac{V^2 V^2}{R_2} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') + g' \frac{\sin(\varphi'' - \varphi')}{\cos(\varphi - \varphi')}, \\ a^3 &= \dot{V}^3 - \left( \frac{V^1 V^1}{R_1} + \frac{V^2 V^2}{R_2} \right) \frac{1}{\cos(\varphi - \varphi')} + \\ &\quad + k_\varphi \frac{V^2 V^3}{R_2} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') + g' \frac{\cos(\varphi - \varphi'')}{\cos(\varphi - \varphi')}. \quad \square \quad (3.87) \end{aligned}$$

Выразим теперь  $a^1$ ,  $a^2$ ,  $a^3$  через контравариантные составляющие  $v^1$ ,  $v^2$ ,  $v^3$  земной относительной скорости  $v$ . В этом случае матрица направляющих косинусов осей  $x$ ,  $y$ ,  $z'$  в системе координат  $\xi\eta\zeta$ , жестко связанной Землей, получается из (3.76) при замене  $\lambda_a$  на  $\lambda$ . Будем ее обозначать через  $B$ . Перепишем (3.47) в матричной форме

$$\begin{bmatrix} a_\xi \\ a_\eta \\ a_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -U & 0 \\ U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_\xi \\ g_\eta \\ g_\zeta \end{bmatrix}. \quad (3.88)$$

Умножим обе части равенства (3.88) слева на матрицу  $B^{-1}$  и запишем результаты в виде

$$B^{-1} \begin{bmatrix} a_\xi \\ a_\eta \\ a_\zeta \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{bmatrix} + 2B^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -U & 0 \\ U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} B \cdot B^{-1} \begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{bmatrix} - B^{-1} \begin{bmatrix} g_\xi \\ g_\eta \\ g_\zeta \end{bmatrix}. \quad (3.89)$$

Если воспользоваться равенствами, аналогичными (3.78) и (3.80), то (3.89) можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}^1 \\ \dot{v}^2 \\ \dot{v}^3 \end{bmatrix} + B^{-1} \dot{B} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} + 2B^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -U & 0 \\ U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g^1 \\ g^2 \\ g^3 \end{bmatrix}. \quad (3.90)$$

Матрица  $B^{-1} \dot{B}$  определяется (3.83) и (3.84) при замене  $\dot{\lambda}_a$  на  $\dot{\lambda}$  и  $V^1, V^2$  на  $v^1, v^2$ . Первые два слагаемых правой части (3.90) по аналогии с (3.80) будут определяться в развернутом виде соответствующими членами (3.87) при замене  $V^1, V^2, V^3$  на  $v^1, v^2, v^3$  соответственно. Третье слагаемое вычислим непосредственным умножением матриц

$$B^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -U & 0 \\ U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & -U \cos(\varphi - \varphi') \sin \varphi & U \cos(\varphi - \varphi') \cos \varphi' \\ U \sin \varphi' & 0 & 0 \\ -U \cos \varphi' & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.91)$$

Составляющие  $g^1, g^2, g^3$  найдем непосредственным проектированием по правилу параллелограмма вектора  $g$ , направленного вдоль отрицательной оси  $z$ , на оси  $x, y, z'$ . В этом случае следует рассмотреть треугольник  $ACD$  (см. рис. 3.4), в котором углы при вершинах  $A, C, D$  соответственно равны  $\varphi - \varphi', 90^\circ - (\varphi - \varphi'), 90^\circ$ , а стороны  $AD, CD, AC$  изображают в масштабе величины  $g, g^2, g^3$  соответственно. С учетом знаков будем иметь

$$\left. \begin{aligned} g^1 &= 0, & g^2 &= -g \operatorname{tg}(\varphi - \varphi'), \\ g^3 &= -\frac{g}{\cos(\varphi - \varphi')}. \end{aligned} \right\} \quad (3.92)$$

Первое равенство (3.92) следует из того обстоятельства, что вектор  $g$  лежит в плоскости меридиана.

Если подставим полученные результаты в (3.90), проведем соответствующие операции над матрицами, а затем перейдем к обычной форме записи, то получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad a^1 &= \dot{v}^1 - 2Uv^2 \sin \varphi - \frac{v^{1v^2}}{R_1} \operatorname{tg} \varphi + 2Uv^3 \cos \varphi' + \frac{v^{1v^3}}{R_1} \cdot \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi}, \\ a^2 &= \dot{v}^2 - 2Uv^1 \frac{\sin \varphi'}{\cos(\varphi - \varphi')} + \frac{v^{1v^1}}{R_1 \cos(\varphi - \varphi')} \cdot \frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi} + \\ &\quad + k_\varphi \frac{v^{1v^3}}{R_2} - \frac{v^{2v^2}}{R_2} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') + g \operatorname{tg}(\varphi - \varphi'), \\ a^3 &= \dot{v}^3 - \left( \frac{v^{1v^1}}{R_1} + \frac{v^{2v^2}}{R_2} \right) \frac{1}{\cos(\varphi - \varphi')} - 2Uv^1 \frac{\cos \varphi}{\cos(\varphi - \varphi')} + \\ &\quad + k_\varphi \frac{v^{2v^3}}{R_2} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') + \frac{g}{\cos(\varphi - \varphi')}. \quad \square \quad (3.93) \end{aligned}$$

Формулы (3.93) решают поставленную задачу. В этих формулах

нужно только тригонометрические функции  $\varphi'$  выразить через  $\varphi$  по указанным выше формулам.

**3.4.2. Ковариантные составляющие.** Ковариантные составляющие вектора равняются его ортогональным проекциям на координатные оси. Если учесть, что проекция вектора на некоторую ось равняется сумме проекций его составляющих на эту ось, то можно записать матричные равенства

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = B_a^T \begin{bmatrix} V_{\xi_a} \\ V_{\eta_a} \\ V_{\zeta_a} \end{bmatrix}, \quad (3.94)$$

где  $V_1, V_2, V_3$  — ковариантные составляющие вектора абсолютной скорости в косоугольной системе координат  $xyz'$ , а  $B_a^T$  — транспонированная матрица (3.76). Из (3.94) получаем

$$\begin{bmatrix} V_{\xi_a} \\ V_{\eta_a} \\ V_{\zeta_a} \end{bmatrix} = (B_a^T)^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}. \quad (3.95)$$

Матричные равенства типа (3.94) и (3.95) можно записать также для векторов  $W, g'$  и т. д.

Продифференцируем по времени обе части равенства (3.95), а затем помножим их слева на матрицу  $B_a^T$ . Тогда, замечая, что  $W_{\xi_a} = \dot{V}_{\xi_a}$  и т. д., и учитывая для вектора  $W$  равенство типа (3.94), получим

$$B_a^T \begin{bmatrix} \dot{V}_{\xi_a} \\ \dot{V}_{\eta_a} \\ \dot{V}_{\zeta_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{bmatrix} + B_a^T \frac{d}{dt} (B_a^T)^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}, \quad (3.96)$$

где  $W_1, W_2, W_3$  — ковариантные составляющие абсолютного ускорения в системе координат  $xyz'$ , а матрица  $\frac{d}{dt} (B_a^T)^{-1}$  определяется дифференцированием транспонированной матрицы для (3.79), так как  $(B_a^T)^{-1} = (B_a^{-1})^T$ .

Учитывая это обстоятельство, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (B_a^T)^{-1} &= \\ &= \frac{\dot{\lambda}_a}{\cos(\varphi - \varphi')} \begin{bmatrix} -\cos(\varphi - \varphi') \cos \lambda_a & \sin \varphi' \sin \lambda_a & -\cos \varphi \sin \lambda_a \\ -\cos(\varphi - \varphi') \sin \lambda_a & -\sin \varphi' \cos \lambda_a & \cos \varphi \cos \lambda_a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2(\varphi - \varphi')} \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\varphi - \varphi') \sin \varphi' \cos \lambda_a & -\sin \varphi' \cos \lambda_a \\ 0 & -\sin(\varphi - \varphi') \sin \varphi' \sin \lambda_a & -\sin \varphi' \sin \lambda_a \\ 0 & \sin(\varphi - \varphi') \cos \varphi' & \cos \varphi' \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{\dot{\varphi}'}{\cos^2(\varphi - \varphi')} \begin{bmatrix} 0 & -\cos \varphi \cos \lambda_a & -\sin(\varphi - \varphi') \cos \varphi \cos \lambda_a \\ 0 & -\cos \varphi \sin \lambda_a & -\sin(\varphi - \varphi') \cos \varphi \sin \lambda_a \\ 0 & -\sin \varphi & -\sin(\varphi - \varphi') \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (3.97) \end{aligned}$$

где  $\dot{\varphi}'$  выражается через  $\dot{\varphi}$  формулой (3.82), а  $\dot{\lambda}_a$  и  $\dot{\varphi}$  определяются из (1.102а)\*) при замене там  $\dot{\lambda}$ ,  $v_1$  и  $v_2$  на  $\dot{\lambda}_a$ ,  $V_1$  и  $V_2$  (см. п. 1.3.6). Имеем

$$\dot{\lambda}_a = \frac{V_1}{R_1 \cos \varphi'}, \quad \dot{\varphi} = \frac{V^2}{R^2}. \quad (3.98)$$

В процессе образования последних слагаемых в (3.97) использовались соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \cdot \frac{\sin \varphi'}{\cos(\varphi - \varphi')} &= \frac{\dot{\varphi}' \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin(\varphi - \varphi') \sin \varphi'}{\cos^2(\varphi - \varphi')}, \\ \frac{d}{dt} \cdot \frac{\cos \varphi'}{\cos(\varphi - \varphi')} &= \frac{-\dot{\varphi}' \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin(\varphi - \varphi') \cos \varphi'}{\cos^2(\varphi - \varphi')}, \\ \frac{d}{dt} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos(\varphi - \varphi')} &= \frac{\dot{\varphi} \cos \varphi' + \dot{\varphi}' \sin(\varphi - \varphi') \sin \varphi}{\cos^2(\varphi - \varphi')}, \\ \frac{d}{dt} \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos(\varphi - \varphi')} &= \frac{-\dot{\varphi} \sin \varphi' - \dot{\varphi}' \sin(\varphi - \varphi') \cos \varphi}{\cos^2(\varphi - \varphi')}. \end{aligned}$$

Умножая (3.97) слева на матрицу  $B_a^T$ , получим

$$\begin{aligned} B_a^T \frac{d}{dt} (B_a^T)^{-1} &= \frac{\dot{\lambda}_a}{\cos(\varphi - \varphi')} \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi' & \cos \varphi \\ \cos(\varphi - \varphi') \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\cos(\varphi - \varphi') \cos \varphi' & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2(\varphi - \varphi')} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\varphi - \varphi') \cos(\varphi - \varphi') & \cos(\varphi - \varphi') \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{\dot{\varphi}'}{\cos^2(\varphi - \varphi')} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(\varphi - \varphi') & -\sin(\varphi - \varphi') \cos(\varphi - \varphi') \end{bmatrix}. \quad (3.99) \end{aligned}$$

Матричное равенство (3.96) при учете (3.98) и (3.99) определяет  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  через ковариантные составляющие абсолютной скорости, их производные и координаты местоположения объекта. Ковариантные составляющие  $g'_1$ ,  $g'_2$ ,  $g'_3$  гравитационного ускорения  $g'$ , направленного вдоль отрицательной полуоси  $z''$ , получим ортогональным проектированием на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z'$ .

В соответствии с рис. 1.5 получим

$$\left. \begin{aligned} g'_1 &= 0, & g'_2 &= g' \sin(\varphi - \varphi'), \\ g'_3 &= -g' \cos(\varphi'' - \varphi'). \end{aligned} \right\} \quad (3.100)$$

Учитывая (3.96), (3.98), (3.99), (3.100), образуем выражения для  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  ковариантных составляющих кажущегося ускорения

\*) С указанным там приближением.

в виде

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad a_1 &= \dot{V}_1 - \frac{V_1 V_2}{R_1 \cos(\varphi - \varphi')} \cdot \frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi} + \frac{V_1 V_3}{R_1 \cos(\varphi - \varphi')}, \\ a_2 &= \dot{V}_2 + \frac{V_1^2}{R_1} \cdot \frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi} + \frac{V_2 V_3}{R_2 \cos(\varphi - \varphi')} + \frac{V_2^2}{R_2} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') - \\ &\quad - g' \sin(\varphi - \varphi''), \\ a_3 &= \dot{V}_3 - \frac{V_1^2}{R_1} \cdot \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} - k_\varphi \frac{V_2^2}{R_2 \cos(\varphi - \varphi')} - \\ &\quad - k_\varphi \frac{V_2 V_3}{R_2} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') + g' \cos(\varphi'' - \varphi'). \quad \square \quad (3.101) \end{aligned}$$

Можно также выразить  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  через компоненты  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  и их производные. Опуская промежуточные выкладки (см. ход рассуждений в конце п. 3.4.1), приведем окончательный результат в виде

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad a_1 &= \dot{v}_1 - 2Uv_2 \sin \varphi' - \frac{v_1 v_2}{R_1 \cos(\varphi - \varphi')} \cdot \frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi} + \\ &\quad + 2Uv_3 \cos \varphi + \frac{v_1 v_3}{R_1 \cos(\varphi - \varphi')}, \\ a_2 &= \dot{v}_2 + 2Uv_1 \cos(\varphi - \varphi') \sin \varphi + \frac{v_1^2}{R_1} \cdot \frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi} + \\ &\quad + \frac{v_2 v_3}{R_2 \cos(\varphi - \varphi')} + \frac{v_2^2}{R_2} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi'), \\ a_3 &= \dot{v}_3 - \frac{v_1^2 \cos \varphi'}{R_1 \cos \varphi} - k_\varphi \frac{v_2^2}{R_2 \cos(\varphi - \varphi')} - \\ &\quad - 2Uv_1 \cos(\varphi - \varphi') \cos \varphi' - k_\varphi \frac{v_2 v_3}{R_2} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') + \\ &\quad + g \cos(\varphi - \varphi'). \quad \square \quad (3.102) \end{aligned}$$

**3.4.3. Некоторые свойства матрицы преобразования.** Выражения для проекций абсолютного и кажущегося ускорений на оси некоторых прямоугольных систем координат были получены в § 3.2. Там изложение было проведено в векторной форме. Естественно, все результаты § 3.2 можно было бы получить методами матричного исчисления. Для декартовых координатных систем матричные соотношения получаются более простыми. Для декартовых координатных систем можно получить некоторые весьма важные матричные соотношения в общем виде.

Используя конкретный материал настоящего параграфа, укажем на некоторые возможные обобщения. Будем рассматривать конкретную прямоугольную систему координат  $xuz$ , считая ее частным случаем более общей косоугольной системы координат  $xuz'$ , в которой ось  $z'$  совмещена с перпендикуляром к плоскости  $xu$ .

С такой точки зрения мы можем получать соответствующие результаты для координатной системы  $xuz$  из общих соотношений, справедливых для системы координат  $xuz'$ , заменив в них геоцентрическую широту  $\varphi'$  на географическую широту  $\varphi$ . Так, при замене  $\varphi'$  на  $\varphi$  (при этом  $k_\varphi = 1$  (см. (3.82))) контравариантные  $a^1, a^2, a^3$  и ковариантные  $a_1, a_2, a_3$  составляющие кажущегося ускорения, определяемые соотношениями (3.87), (3.93) и (3.101), (3.102), совпадают между собой и с ортогональными проекциями  $a_x, a_y, a_z$ , даваемыми формулами (3.55) и (3.56). Естественно, для прямоугольных систем координат проектирование по правилу параллелограмма и ортогональное проектирование приводят к одному и тому же результату. Для системы координат  $xuz$  матрица  $B_a$  (3.76) (при замене в ней  $\varphi'$  на  $\varphi$ ) превращается в матрицу  $C_a$  направляющих косинусов осей трехгранников  $xuz$  и  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  (\*). Матрица  $C_a$  — ортогональная с определителем, равным 1, для нее  $C_a^{-1} = C_a^T$ , т. е.  $C_a^T C_a = C_a C_a^T = E$ . В этом случае матрица (3.83) может быть представлена в виде

$$C_a^T \dot{C}_a = \ddot{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\lambda}_a \sin \varphi & \dot{\lambda}_a \cos \varphi \\ \dot{\lambda}_a \sin \varphi & 0 & \dot{\varphi} \\ -\dot{\lambda}_a \cos \varphi & -\dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.103)$$

Матрица  $\ddot{\omega}$  является кососимметричной матрицей, она в соответствии с (1.144) может быть представлена в форме

$$\ddot{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.104)$$

Элементами матрицы  $\ddot{\omega}$  являются проекции абсолютной угловой скорости трехгранника  $xuz$  (\*\*\*) на оси  $x, y, z$ .

Можно показать, что равенство  $C_a^T \dot{C}_a = \ddot{\omega}$  является общим, т. е. если  $C_{nm}$  — матрица направляющих косинусов осей прямоугольной системы координат  $x_m y_m z_m$  по отношению к осям другой прямоугольной системы координат  $x_n y_n z_n$ , а  $\omega'_{mx_m}, \omega'_{my_m}, \omega'_{mz_m}$  — проекции угловой скорости трехгранника  $x_m y_m z_m$  по отношению к системе  $x_n y_n z_n$  на оси  $x_m, y_m, z_m$ , то имеет место соотношение

$$C_{nm}^T \dot{C}_{nm} = \ddot{\omega}'_m = \begin{bmatrix} 0 & -\omega'_{mz_m} & \omega'_{my_m} \\ \omega'_{mz_m} & 0 & -\omega'_{mx_m} \\ -\omega'_{my_m} & \omega'_{mx_m} & 0 \end{bmatrix} \text{***}. \quad (3.105)$$

При умножении обеих частей равенства (3.103) слева на  $C_a$  по-

\*) См. таблицу (1.76) при замене  $\lambda$  на  $\lambda_a$  и  $\xi, \eta, \zeta$  на  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ .

\*\*) То есть угловой скорости трехгранника  $xuz$  по отношению к координатной системе  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ .

\*\*\*)  $\omega'_m$  — относительная угловая скорость.

лучим матричное дифференциальное уравнение в виде

$$\dot{C}_a = C_a \ddot{\omega}. \quad (3.106)$$

Это уравнение позволяет по известным проекциям  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  абсолютной угловой скорости трехгранника  $xuz$  на его оси  $x, y, z$  определять направляющие косинусы осей относительно абсолютной (инерциальной) системы координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ .

В обычной форме матричному уравнению (3.106) соответствуют девять линейных дифференциальных уравнений в виде

$$\begin{aligned} \dot{c}_{11} &= c_{12}\omega_z - c_{13}\omega_y, \\ \dot{c}_{12} &= c_{13}\omega_x - c_{11}\omega_z, \\ \dot{c}_{13} &= c_{11}\omega_y - c_{12}\omega_x, \\ \dot{c}_{21} &= c_{22}\omega_z - c_{23}\omega_y, \\ \dot{c}_{22} &= c_{23}\omega_x - c_{21}\omega_z, \\ \dot{c}_{23} &= c_{21}\omega_y - c_{22}\omega_x, \\ \dot{c}_{31} &= c_{32}\omega_z - c_{33}\omega_y, \\ \dot{c}_{32} &= c_{33}\omega_x - c_{31}\omega_z, \\ \dot{c}_{33} &= c_{31}\omega_y - c_{32}\omega_x, \end{aligned} \quad \square \quad (3.107)$$

где  $c_{ij}$  — элементы матрицы  $C_a$ , т. е. направляющие косинусы осей трехгранников  $xuz$  и  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ . В элементе  $c_{ij}$  индексы  $i$  и  $j$  определяют в лексикографическом порядке номера осей  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  и  $x, y, z$  соответственно. Так, например,  $c_{12}$  является направляющим косинусом оси  $\xi_a$  относительно оси  $y$  и т. д. Система (3.107) состоит из трех изолированных и, в сущности, одинаковых групп уравнений.

Решения этих групп уравнений отличаются друг от друга за счет различных начальных условий. Решение каждой группы восстанавливает одну строку матрицы  $C_a$ . Элементы первой строки определяют косинусы углов, которые образуют с осями  $x, y, z$  ось  $\xi_a$  и т. д.

Известно, что девять направляющих косинусов осей  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  в любой момент времени должны удовлетворять шести алгебраическим уравнениям:

$$c_{i1}c_{j1} + c_{i2}c_{j2} + c_{i3}c_{j3} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (3.108)$$

Поэтому на первый взгляд может показаться, что достаточно решить только три дифференциальных уравнения (3.107), чтобы затем по (3.108) найти остальные шесть направляющих косинусов.

Однако, как будет показано ниже, три независимых направляющих косинуса не определяют однозначно ориентацию трехгранника  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ . Ориентация трехгранника  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ , как и любого твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, однозначно определяется двумя неколлинеарными векторами, жестко с ними связанными. Для трехгранника  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  такими векторами могут быть любые два единичных вектора  $\xi_a^0, \eta_a^0, \zeta_a^0$ , которые связаны между собой векторными соотношениями  $\xi_a^0 \times \eta_a^0 = \zeta_a^0, \eta_a^0 \times \zeta_a^0 = \xi_a^0$  и  $\zeta_a^0 \times \xi_a^0 = \eta_a^0$ . Поэтому достаточно, например, решить первые две группы дифференциальных уравнений (3.107) и найти таким образом направляющие косинусы осей  $\xi_a$  и  $\eta_a$ , чтобы затем с помощью выражения  $\zeta_a^0 = \xi_a^0 \times \eta_a^0$  определить однозначно направляющие косинусы оси  $\zeta_a$ . Для решения первых двух групп уравнений (3.107) нужно задать шесть начальных условий:  $c_{11}(0), c_{12}(0), c_{13}(0), c_{21}(0), c_{22}(0), c_{23}(0)$ , определяющих значения направляющих косинусов осей  $x$  и  $y$  в момент времени  $t = 0$ . Указанные начальные значения направляющих косинусов осей  $x$  и  $y$ , естественно, должны удовлетворять соотношениям (3.108), но они должны быть установлены независимо от этих соотношений. Матричное уравнение типа (3.106) можно записать также для матрицы  $C_{nm}$  (см. (3.105)). В этом случае только следует помнить, что элементы  $\omega'_{mx_m}, \omega'_{my_m}, \omega'_{mz_m}$  кососимметричной матрицы  $\check{\omega}'_m$  не могут быть измерены гироскопическими приборами, так как они представляют собой проекции относительной угловой скорости трехгранника  $x_m y_m z_m$  по отношению к трехграннику  $x_n y_n z_n$ . Ниже мы выразим коэффициенты соответствующего дифференциального уравнения для  $C_{nm}$  через компоненты абсолютной угловой скорости трехгранников  $x_m y_m z_m$  и  $x_n y_n z_n$ . А сейчас укажем на одно важное соотношение. Для этой цели обратимся к равенству (3.91) и рассмотрим его при замене  $\varphi'$  на  $\varphi$ . В этом случае матрица  $B$  превращается в ортогональную матрицу  $C$  направляющих косинусов осей  $x, y, z$  относительно осей  $\xi, \eta, \zeta$ ; она получается из (3.76) заменой  $\lambda_a$  на  $\lambda$  и  $\varphi'$  на  $\varphi$ . Матрица  $C^{-1} = C^T$  является матрицей преобразования проекций любого вектора на оси  $\xi, \eta, \zeta$  в соответствующие проекции того же вектора на оси  $x, y, z$ , матрица  $C$  дает обратное преобразование.

В частности, для вектора  $U$  угловой скорости Земли имеем

$$\begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = C^T \begin{bmatrix} U_\xi \\ U_\eta \\ U_\zeta \end{bmatrix}, \quad (3.109)$$

где  $U_x = 0, U_y = U \cos \varphi, U_z = U \sin \varphi, U_\xi = 0, U_\eta = 0, U_\zeta = U$ . Учитывая сказанное выше, равенство (3.91) при замене  $\varphi'$

на  $\varphi$  можно переписать в виде

$$C^T \begin{bmatrix} 0 & -U_\zeta & U_\eta \\ U_\zeta & 0 & -U_\xi \\ -U_\eta & U_\xi & 0 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & -U_z & U_y \\ U_z & 0 & -U_x \\ -U_y & U_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.110)$$

Умножение квадратной матрицы слева и справа на две взаимно обратные матрицы называется *подобным преобразованием*. Подобное преобразование кососимметричной матрицы посредством ортогональной матрицы можно рассматривать и как преобразование к новой системе координат.

Рассмотрим матрицу-столбец

$$\begin{bmatrix} b_\xi \\ b_\eta \\ b_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -U_\zeta & U_\eta \\ U_\zeta & 0 & -U_\xi \\ -U_\eta & U_\xi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_\eta \cdot \xi - U_\zeta \cdot \eta \\ U_\zeta \cdot \xi - U_\xi \cdot \zeta \\ U_\xi \cdot \eta - U_\eta \cdot \xi \end{bmatrix}. \quad (3.111)$$

Умножим его слева на  $C^T$ , что будет означать преобразование его к новой системе координат, в данном случае преобразование системы координат  $\xi \eta \zeta$  к системе  $x y z$ .

Можно записать

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = C^T \begin{bmatrix} b_\xi \\ b_\eta \\ b_\zeta \end{bmatrix} = C^T \begin{bmatrix} 0 & -U_\zeta \\ U_\zeta & 0 \\ -U_\eta & U_\xi \\ U_\xi & 0 \end{bmatrix} C \cdot C^T \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad (3.112)$$

так как  $C \cdot C^T = E$ . Учитывая (3.110), перепишем (3.112) в виде

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -U_z & U_y \\ U_z & 0 & -U_x \\ -U_y & U_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_y \cdot z - U_z \cdot y \\ U_z \cdot x - U_x \cdot z \\ U_x \cdot y - U_y \cdot x \end{bmatrix}. \quad (3.113)$$

Матрица-столбец является матричным эквивалентом вектора. Произведение кососимметричной матрицы на столбец будет матричным эквивалентом векторного произведения. Составляющие рассмотренного выше столбца, являющегося произведением таких матриц, совпадают с составляющими векторного произведения  $U \times b$ . Формулы (3.111) — (3.113) показывают, что векторное произведение выражается через компоненты векторов-сомножителей относительно для любой прямоугольной системы координат \*). Этим фактом мы пользовались в п. 3.2.1.

Формулы (3.109) и (3.110) сохраняют свой смысл для любого вектора и матрицы преобразования двух любых прямоугольных систем координат. Пусть, например,  $\omega_n$  есть вектор абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_n y_n z_n$ , а матрица  $C_{nm}$  имеет прежний смысл, т. е. является матрицей преобразования системы

\*) Мы условились здесь пользоваться системой координат с правой ориентировкой осей.

координат  $x_m y_m z_m$  в  $x_n y_n z_n$ , т. е.

$$\begin{bmatrix} \omega_{nx_n} \\ \omega_{ny_n} \\ \omega_{nz_n} \end{bmatrix} = C_{nm} \begin{bmatrix} \omega_{nx_m} \\ \omega_{ny_m} \\ \omega_{nz_m} \end{bmatrix}. \quad (3.114)$$

Тогда имеет место равенство

$$C_{nm} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{nz_m} & \omega_{ny_m} \\ \omega_{nz_m} & 0 & -\omega_{nx_m} \\ -\omega_{ny_m} & \omega_{nx_m} & 0 \end{bmatrix} C_{nm}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{nz_n} & \omega_{ny_n} \\ \omega_{nz_n} & 0 & -\omega_{nx_n} \\ -\omega_{ny_n} & \omega_{nx_n} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.115)$$

Если учесть, что вектор  $\omega'_m$  относительной скорости трехгранника  $x_m y_m z_m$  по отношению к  $x_n y_n z_n$  равняется разности векторов  $\omega_m$  и  $\omega_n$  их абсолютных угловых скоростей, то из (3.105) ( $C_{nm} C_{nm}^T = E$ ) можно получить выражение

$$\dot{C}_{nm} = C_{nm} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{mz_m} & \omega_{my_m} \\ \omega_{mz_m} & 0 & -\omega_{mx_m} \\ -\omega_{my_m} & \omega_{mx_m} & 0 \end{bmatrix} - C_{nm} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{nz_n} & \omega_{ny_n} \\ \omega_{nz_n} & 0 & -\omega_{nx_n} \\ -\omega_{ny_n} & \omega_{nx_n} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.116)$$

Умножая второе слагаемое в (3.116) справа на единичную матрицу  $C_{nm}^T C_{nm}$  и учитывая (3.115), получим

$$\dot{C}_{nm} = C_{nm} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{mz_m} & \omega_{my_m} \\ \omega_{mz_m} & 0 & -\omega_{mx_m} \\ -\omega_{my_m} & \omega_{mx_m} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{nz_n} & \omega_{ny_n} \\ \omega_{nz_n} & 0 & -\omega_{nx_n} \\ -\omega_{ny_n} & \omega_{nx_n} & 0 \end{bmatrix} C_{nm}, \quad (3.117)$$

или, в более компактной записи,

$$\dot{C}_{nm} = C_{nm} \check{\omega}_m - \check{\omega}_n C_{nm}, \quad (3.117a)$$

где  $\check{\omega}_m$  и  $\check{\omega}_n$  — соответствующие кососимметричные матрицы. В развернутом виде уравнение (3.117a) представляется системой линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{c}'_{11} &= c'_{12} \omega_{mz_m} - c'_{13} \omega_{my_m} + c'_{21} \omega_{nz_n} - c'_{31} \omega_{ny_n}, \\ \dot{c}'_{12} &= -c'_{11} \omega_{mz_m} + c'_{13} \omega_{mx_m} + c'_{22} \omega_{nz_n} - c'_{23} \omega_{ny_n}, \\ \dot{c}'_{13} &= c'_{21} \omega_{my_m} - c'_{12} \omega_{mx_m} + c'_{23} \omega_{nz_n} - c'_{33} \omega_{ny_n}, \end{aligned}$$

$$a_p = S a_g$$

$m$  - трехгранник  $\{g\}$   
 $n$  - трехгранник  $\{p\}$

$$\dot{S} = S \hat{\omega}_g - \hat{\omega}_p S$$

скоростей трехгранника  $\{g\}$  относительно  $\{p\}$  (ребра).

Для нахождения решений (3.118) мы должны задать девять начальных значений, т. е. при  $t = 0$  задать  $c'_{11}(0)$ ,  $c'_{12}(0)$ ,  $c'_{13}(0)$  и т. д. Эти начальные значения, естественно, должны удовлетворять шести уравнениям (3.108). Уравнениями (3.118) особенно удобно пользоваться в тех случаях, когда проекции  $\omega_{nx_n}$ ,  $\omega_{ny_n}$ ,  $\omega_{nz_n}$  абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_n y_n z_n$  на его собственные оси являются известными функциями времени или постоянными величинами.

Последнее обстоятельство, например, имеет место тогда, когда система координат  $x_n y_n z_n$  жестко связана с Землей.

### § 3.5. Преобразование координатных систем

**3.5.1. Преобразование координатных систем поворотом.** В этом параграфе будем рассматривать только декартовы системы координат. В предыдущих разделах этой главы были получены выражения для составляющих кажущегося ускорения в различных декартовых координатных системах:  $xyz$ ,  $x'y'z'$  и т. д. Оси этих координатных систем приходится моделировать на объекте посредством некоторых физических устройств. Естественно, моделирование не может быть абсолютно точным. Если трехгранник  $x_p y_p z_p$  является моделью трехгранника  $xyz$ , то первый трехгранник будет повернут относительно второго на произвольный, хотя и малый угол вокруг произвольной оси. Нам нужно найти приемлемую форму выражения составляющих ускорения в моделирующей системе координат через его составляющие в координатной системе, принимаемой за номинальную. Преобразование составляющих векторов из одной системы координат в другую обес-

Если  $C_{nm}$  как  $x_m y_m z_m$  по отношению  $\omega_m$  и  $\omega_n$  их абсолютных угловых скоростей ( $C_{nm} C_{nm}^T = E$ ) можно получить выражение

$$\dot{C}_{nm} = C_{nm} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{mz_m} & \omega_{my_m} \\ \omega_{mz_m} & 0 & -\omega_{mx_m} \\ -\omega_{my_m} & \omega_{mx_m} & 0 \end{bmatrix} - C_{nm} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{nz_m} & \omega_{ny_m} \\ \omega_{nz_m} & 0 & -\omega_{nx_m} \\ -\omega_{ny_m} & \omega_{nx_m} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.116)$$

Умножая второе слагаемое в (3.116) справа на единичную матрицу  $C_{nm}^T C_{nm}$  и учитывая (3.115), получим

$$\dot{C}_{nm} = C_{nm} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{mz_m} & \omega_{my_m} \\ \omega_{mz_m} & 0 & -\omega_{mx_m} \\ -\omega_{my_m} & \omega_{mx_m} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{nz_n} & \omega_{ny_n} \\ \omega_{nz_n} & 0 & -\omega_{nx_n} \\ -\omega_{ny_n} & \omega_{nx_n} & 0 \end{bmatrix} C_{nm}, \quad (3.117)$$

или, в более компактной записи,

$$\dot{C}_{nm} = C_{nm} \check{\omega}_m - \check{\omega}_n C_{nm}, \quad (3.117a)$$

где  $\check{\omega}_m$  и  $\check{\omega}_n$  — соответствующие кососимметричные матрицы. В развернутом виде уравнение (3.117a) представляется системой линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{c}'_{11} &= c'_{12} \omega_{mz_m} - c'_{13} \omega_{my_m} + c'_{21} \omega_{nz_n} - c'_{31} \omega_{ny_n}, \\ \dot{c}'_{12} &= -c'_{11} \omega_{mz_m} + c'_{13} \omega_{mx_m} + c'_{22} \omega_{nz_n} - c'_{23} \omega_{ny_n}, \\ \dot{c}'_{13} &= c'_{21} \omega_{my_m} - c'_{12} \omega_{mx_m} + c'_{23} \omega_{nz_n} - c'_{33} \omega_{ny_n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{c}'_{21} &= c'_{22} \omega_{mz_m} - c'_{23} \omega_{my_m} - c'_{11} \omega_{nz_n} + c'_{31} \omega_{nx_n}, \\ \dot{c}'_{22} &= -c'_{21} \omega_{mz_m} + c'_{23} \omega_{mx_m} - c'_{12} \omega_{nz_n} + c'_{32} \omega_{nx_n}, \\ \dot{c}'_{23} &= c'_{21} \omega_{my_m} - c'_{22} \omega_{mx_m} - c'_{13} \omega_{nz_n} + c'_{33} \omega_{nx_n}, \\ \dot{c}'_{31} &= c'_{31} \omega_{mz_m} - c'_{33} \omega_{my_m} + c'_{11} \omega_{ny_n} - c'_{21} \omega_{nx_n}, \\ \dot{c}'_{32} &= -c'_{31} \omega_{mz_m} + c'_{33} \omega_{mx_m} + c'_{12} \omega_{ny_n} - c'_{22} \omega_{nx_n}, \\ \dot{c}'_{33} &= c'_{31} \omega_{my_m} - c'_{32} \omega_{mx_m} + c'_{13} \omega_{ny_n} - c'_{23} \omega_{nx_n}. \quad \square \quad (3.118) \end{aligned}$$

Здесь через  $c'_{ij}$  обозначены элементы матрицы  $C_{nm}$ , являющиеся направляющими косинусами осей  $x_m, y_m, z_m$  относительно системы координат  $x_n y_n z_n$ . Напомним, что  $\omega_{mx_m}, \omega_{my_m}, \omega_{mz_m}$  и  $\omega_{nx_n}, \omega_{ny_n}, \omega_{nz_n}$  являются соответственно проекциями абсолютных угловых скоростей трехгранников  $x_m y_m z_m$  и  $x_n y_n z_n$  на их собственные оси (ребра).

Для нахождения решений (3.118) мы должны задать девять начальных значений, т. е. при  $t = 0$  задать  $c'_{11}(0), c'_{12}(0), c'_{13}(0)$  и т. д. Эти начальные значения, естественно, должны удовлетворять шести уравнениям (3.108). Уравнениями (3.118) особенно удобно пользоваться в тех случаях, когда проекции  $\omega_{nx_n}, \omega_{ny_n}, \omega_{nz_n}$  абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_n y_n z_n$  на его собственные оси являются известными функциями времени или постоянными величинами.

Последнее обстоятельство, например, имеет место тогда, когда система координат  $x_n y_n z_n$  жестко связана с Землей.

### § 3.5. Преобразование координатных систем

**3.5.1. Преобразование координатных систем поворотом.** В этом параграфе будем рассматривать только декартовы системы координат. В предыдущих разделах этой главы были получены выражения для составляющих кажущегося ускорения в различных декартовых координатных системах:  $x y z, x' y' z'$  и т. д. Оси этих координатных систем приходится моделировать на объекте посредством некоторых физических устройств. Естественно, моделирование не может быть абсолютно точным. Если трехгранник  $x_p y_p z_p$  является моделью трехгранника  $x y z$ , то первый трехгранник будет повернут относительно второго на произвольный, хотя и малый угол вокруг произвольной оси. Нам нужно найти приемлемую форму выражения составляющих ускорения в моделирующей системе координат через его составляющие в координатной системе, принимаемой за номинальную. Преобразование составляющих векторов из одной системы координат в другую обес-

печивается матрицей направляющих косинусов. Девять направляющих косинусов этой матрицы связаны шестью конечными соотношениями (3.108), поэтому только три из них являются независимыми. Построим матрицу направляющих косинусов, определяющих преобразование координат из системы  $xuz$  в систему  $x_p y_p z_p$ , взяв за независимые параметры углы трех независимых поворотов трехгранника  $x_p y_p z_p$  вокруг трех осей, не лежащих в одной плоскости. Последовательные повороты представлены на рис. 3.5. Вначале трехгранники  $x_p y_p z_p$  и  $xuz$  были совмещены. Первый поворот трехгранника  $x_p y_p z_p$  осуществляется вокруг оси  $z$  на угол  $\gamma_3$  ( $0 \leq \gamma_3 \leq 2\pi$ ), второй — вокруг промежуточной оси  $x_1$  на угол  $\gamma_1$  ( $0 \leq \gamma_1 \leq \pi$ ) и, наконец, третий поворот на угол  $\gamma_2$  ( $0 \leq \gamma_2 \leq 2\pi$ ) вокруг оси  $y_2$ , совпадающей с осью  $y_p$ . Все вращения производятся в положительном направлении: с конца соответствующих положительных полуосей вращение происходит против часовой стрелки. Чтобы получить формулы преобразования, возьмем радиус-вектор  $r$  и найдем его составляющие  $x, y, z$  и  $x_p, y_p, z_p$  в системах координат  $xuz$  и  $x_p y_p z_p$ . Из рис. 3.5 устанавливаем следующие соотношения.

Для первого поворота

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x \cos \gamma_3 + y \sin \gamma_3, \\ y_1 &= -x \sin \gamma_3 + y \cos \gamma_3, \\ z_1 &= z. \end{aligned} \right\} \quad (3.119)$$

Для второго поворота

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1, \\ y_2 &= y_1 \cos \gamma_1 + z_1 \sin \gamma_1, \\ z_2 &= -y_1 \sin \gamma_1 + z_1 \cos \gamma_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.120)$$

Для третьего поворота

$$\left. \begin{aligned} x_p &= x_2 \cos \gamma_2 - z_2 \sin \gamma_2, \\ y_p &= y_2, \\ z_p &= x_2 \sin \gamma_2 + z_2 \cos \gamma_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.121)$$

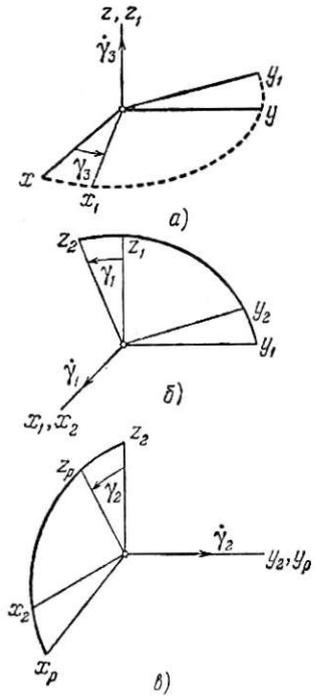


Рис. 3.5. Последовательные повороты координатной системы.

В матричной форме эти преобразования записываются в виде

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_3 & \sin \gamma_3 & 0 \\ -\sin \gamma_3 & \cos \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_1 & \sin \gamma_1 \\ 0 & -\sin \gamma_1 & \cos \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad (3.122)$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_2 & 0 & -\sin \gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma_2 & 0 & \cos \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

или, более компактно,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = C_{\gamma_3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = C_{\gamma_1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = C_{\gamma_2} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad (3.123)$$

где  $C_{\gamma_3}, C_{\gamma_1}, C_{\gamma_2}$  — составляющие квадратные матрицы, фигурирующие в (3.122). Из (3.123) легко выразить столбец составляющих  $x_p, y_p, z_p$  через столбец составляющих  $x, y, z$  в виде

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = C_{\gamma} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (3.124)$$

где через  $C_{\gamma}$  обозначена матрица

$$C_{\gamma} = C_{\gamma_2} C_{\gamma_1} C_{\gamma_3}. \quad (3.125)$$

Строго говоря, следовало бы писать  $C_{\gamma} = (C_{\gamma_2} C_{\gamma_1}) C_{\gamma_3}$ , но вследствие того, что умножение матриц удовлетворяет ассоциативному закону, скобки можно опустить. При нахождении произведения матриц следует соблюдать указанную последовательность сомножителей, так как в общем случае матричное умножение не удовлетворяет условию коммутативности.

Если фактически перемножить матрицы  $C_{\gamma_2}, C_{\gamma_1}, C_{\gamma_3}$  (см. (3.122)), то получим матрицу вида

$$C_{\gamma} = \begin{bmatrix} c_{11}^{\gamma} & c_{12}^{\gamma} & c_{13}^{\gamma} \\ c_{21}^{\gamma} & c_{22}^{\gamma} & c_{23}^{\gamma} \\ c_{31}^{\gamma} & c_{32}^{\gamma} & c_{33}^{\gamma} \end{bmatrix}, \quad (3.126)$$

где

$$\begin{aligned} c_{11}^{\gamma} &= \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 - \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin \gamma_3, \\ c_{12}^{\gamma} &= \cos \gamma_2 \sin \gamma_3 + \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \cos \gamma_3, \\ c_{13}^{\gamma} &= -\cos \gamma_1 \sin \gamma_2, \quad c_{21}^{\gamma} = -\cos \gamma_1 \sin \gamma_3, \\ c_{22}^{\gamma} &= \cos \gamma_1 \cos \gamma_3, \quad c_{23}^{\gamma} = \sin \gamma_1, \\ c_{31}^{\gamma} &= \sin \gamma_2 \cos \gamma_3 + \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 \sin \gamma_3, \\ c_{32}^{\gamma} &= \sin \gamma_2 \sin \gamma_3 - \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 \cos \gamma_3, \\ c_{33}^{\gamma} &= \cos \gamma_1 \cos \gamma_2. \end{aligned}$$

$C_{\gamma}$  является матрицей направляющих косинусов осей  $x, y, z$  от-

носителем осей  $x_p, y_p, z_p$  с элементами, зависящими от трех независимых параметров  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Элементы матрицы (3.126), являющиеся направляющими косинусами, удовлетворяют шести уравнениям (3.108), поэтому только три из них являются независимыми. Однако три независимых направляющих косинуса не определяют однозначно ориентацию соответствующего трехгранника, хотя сама ориентация трехгранника однозначно определяет все девять направляющих косинусов. Этот факт можно доказать, если исходить из вида матрицы (3.126). Заметим, что задание трех независимых углов поворота  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  однозначно определяет ориентацию трехгранника. Возьмем две различные ориентации трехгранника, определяемые углами поворота  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  и  $360^\circ - \gamma_1, 360^\circ - \gamma_2, 360^\circ - \gamma_3$ , причем  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  — произвольно задаваемые и независимые углы поворота. Если учесть тригонометрические равенства  $\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$  и  $\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ , то нетрудно установить, что для обеих ориентаций направляющие косинусы, расположенные на главной диагонали матрицы (3.126), будут одинаковыми и при произвольных  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  они будут иметь произвольные значения в интервале  $(-1, 1)$ . Здесь, может быть, уместно указать также на следующее обстоятельство. Мы уже указывали, что углы поворота  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  однозначно определяют ориентацию трехгранника, однако заданная ориентация трехгранника неоднозначно определяет углы  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , если не ограничить их изменение границами главных значений:  $0 \leq \gamma_1 \leq \pi, 0 \leq \gamma_2 \leq 2\pi$  и  $0 \leq \gamma_3 \leq 2\pi$ .

Матрицы  $C_{\gamma_1}, C_{\gamma_2}, C_{\gamma_3}$  (3.123) являются ортогональными с определителем, равным 1, т. е. имеем  $C_{\gamma_i}^{-1} = C_{\gamma_i}^T$  или  $C_{\gamma_i}^T C_{\gamma_i} = C_{\gamma_i} C_{\gamma_i}^T = E$  и  $|C_{\gamma_i}| = 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Этот факт легко установить прямым вычислением. Кроме того, матрицы  $C_{\gamma_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) определяют поворот координатных систем вокруг соответствующих осей (см. рис. 3.5). При этом произвольные векторы, направленные вдоль указанных осей поворота, имеют одинаковые составляющие по осям исходной и повернутой систем координат, т. е. такие векторы не меняют своего направления в процессе поворота.

Указанными свойствами обладает также матрица  $C_\gamma$  (3.126). Действительно,  $|C_\gamma| = 1$ , так как  $|C_\gamma| = |C_{\gamma_1}| |C_{\gamma_2}| |C_{\gamma_3}|$ ;  $C_\gamma^T \cdot C_\gamma = E$ , потому что  $C_\gamma^T = C_{\gamma_3}^T C_{\gamma_2}^T C_{\gamma_1}^T$  и умножение матриц подчиняется ассоциативному закону. Для доказательства третьего свойства нужно найти такие векторы, которые имеют одинаковые составляющие по осям систем координат  $xyz$  и  $x_p y_p z_p$ .

Для нахождения таких векторов составим уравнение общего вида

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_\gamma \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (3.127)$$

где  $\lambda$  — скалярная величина. Решение поставленной задачи будет получаться при  $\lambda = 1$ . Векторы, удовлетворяющие матричному уравнению (3.127), называются *собственными векторами матрицы*. В обычной форме (3.127) представляет собой систему трех линейных однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda - c_{11}^{(\gamma)})x - c_{12}^{(\gamma)} \cdot y - c_{13}^{(\gamma)} \cdot z &= 0, \\ -c_{21}^{(\gamma)} \cdot x + (\lambda - c_{22}^{(\gamma)})y - c_{23}^{(\gamma)} \cdot z &= 0, \\ -c_{31}^{(\gamma)} \cdot x - c_{32}^{(\gamma)} \cdot y + (\lambda - c_{33}^{(\gamma)})z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.128)$$

где  $c_{ij}^{(\gamma)}$  — элементы матрицы  $C_\gamma$ .

Эта система уравнений имеет решение, отличное от нулевого только тогда, когда ее определитель равняется нулю, т. е.

$$\begin{bmatrix} \lambda - c_{11}^{(\gamma)} & c_{12}^{(\gamma)} & -c_{13}^{(\gamma)} \\ -c_{21}^{(\gamma)} & \lambda - c_{22}^{(\gamma)} & -c_{23}^{(\gamma)} \\ -c_{31}^{(\gamma)} & -c_{32}^{(\gamma)} & \lambda - c_{33}^{(\gamma)} \end{bmatrix} = 0. \quad (3.129)$$

Корни  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  этого уравнения называются *характеристическими числами* или *собственными значениями матрицы  $C_\gamma$* . При разворачивании определителя (3.129) получим полином третьей степени относительно  $\lambda$ , свободный член которого равняется  $-|C_\gamma| = -1$ . По теореме Виета  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ . Уравнение третьей степени всегда имеет по крайней мере один вещественный корень. Для ортогональной матрицы абсолютное значение такого корня должно равняться 1, так как при ортогональном преобразовании длина вектора остается неизменной. Когда два других корня уравнения (3.129) будут комплексно сопряженными, то по необходимости будем иметь  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = e^{i\psi}, \lambda_3 = e^{-i\psi}$ , так как  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ . Этот общий случай включает два возможных частных случая: при  $\psi = \pi$   $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$  и при  $\psi = 0$   $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ . Последний случай соответствует тождественному преобразованию, когда  $C_\gamma = E$ . Для корня  $\lambda_1 = 1$  из решения уравнений (3.128) можно определить отношение двух составляющих к третьему, что определяет направление прямой. Все векторы, направленные вдоль этой прямой, имеют в соответствии с (3.127) одинаковые составляющие в системах координат  $xyz$  и  $x_p y_p z_p$ . Очевидно, прямая определяет ось поворота, при котором трехгранник  $x_p y_p z_p$  переходит из исходного положения в произвольное заданное положение. Укажем без доказательств, что угол поворота будет равняться аргументу  $\psi$  комплексных корней уравнения (3.129). Учитывая, что  $e^{i\psi} + e^{-i\psi} = 2 \cos \psi$  и  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 \cos \psi$ , и используя теорему Виета, найдем из (3.129):

$$1 + 2 \cos \psi = c_{11}^{(\gamma)} + c_{22}^{(\gamma)} + c_{33}^{(\gamma)}. \quad (3.130)$$

Полученным выше результатам можно дать другое весьма важное истолкование. Мы до сих пор рассматривали преобразование систем координат. Матрица  $C_\gamma$  (3.126), действуя на составляющие вектора в системе  $xyz$ , переводит их в составляющие этого вектора в системе  $x_p y_p z_p$ . В обеих частях равенства (3.124) фигурируют составляющие одного и того же вектора в разных системах координат. Для пояснения существа нового истолкования обратимся к рис. 3.6. Там изображены два вектора  $r_0$  и  $r_1$  с координатами

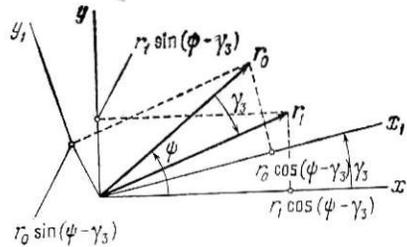


Рис. 3.6. Поворот координатной системы и вектора.

математической стороны, мы можем под  $C_\gamma$  понимать матрицу, которая, действуя на вектор  $r_0$ , преобразует его в вектор  $r_1$ . Оба вектора при этом рассматриваются в одной и той же системе координат. Следует помнить, что если в первом истолковании матрица  $C_\gamma$  определяет вращение системы координат против хода часовой стрелки, то во втором истолковании она определяет вращение вектора по ходу часовой стрелки.

Второе истолкование имеет важное значение для описания конечных поворотов твердого тела около неподвижной точки. В частности, свойство некоммутативности матричного умножения является математическим описанием того физического факта, что результат нескольких конечных поворотов тела зависит от их последовательности. Наконец укажем, что ортогональная матрица может иметь определитель равным  $-1$ . Классическим примером такой матрицы является матрица вида

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -E.$$

Эта матрица, действуя на вектор, изменяет знак каждой его составляющей на обратный, т. е. преобразует вектор  $r$  в вектор  $-r$ . Преобразование  $S$  меняет направление всех координатных осей на противоположное и превращает правую систему координат

\*). Причем модули их одинаковы:  $r_0 = r_1$ .

в левую. Такое преобразование называется *инверсией*. Инверсию нельзя получить ни при каком реальном вращении системы координатных осей как твердого тела. Это справедливо для любой ортогональной матрицы с определителем, равным  $-1$ , т. е. ее всегда можно представить в виде произведения ортогональной матрицы с определителем, равным  $1$ , и матрицы  $S$ . Следовательно, такая матрица включает в себя операцию инверсии.

**3.5.2. Малые рассогласования координатных систем.** При малых рассогласованиях координатных систем одноименные оси  $x_p$  и  $x$ ,  $y_p$  и  $y$ ,  $z_p$  и  $z$  будут оставаться вблизи друг от друга, а косинусы углов между ними будут близки к  $1$ . Структура этих косинусов, находящихся на главной диагонали матрицы (3.126), такова, что из их близости к  $1$  следует малость углов  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ . При малых рассогласованиях координатных систем углы  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  элементарных поворотов системы координат будем считать малыми величинами первого порядка. Тогда во всех выражениях при вычислении и всех выкладках будем сохранять только величины, которые не являются малыми более высокого порядка. Очевидно, с такой точки зрения мы должны положить  $\sin \gamma_i = \gamma_i$  и  $\cos \gamma_i = 1$ . При малых рассогласованиях координатных систем матрица преобразования (матрица направляющих косинусов осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  относительно осей  $x_p$ ,  $y_p$ ,  $z_p$ ) получается из (3.126), если там пренебречь членами порядка малости выше первого. Будем иметь

$$C_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.131)$$

Введем кососимметричную матрицу

$$\check{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

с элементами первого порядка малости. Заметим, что  $\check{\gamma}^T = -\check{\gamma}$ . При учете (3.123) матрицу  $C_\gamma$  (3.131) и транспонированную матрицу  $C_\gamma^T$  можно представить в виде

$$C_\gamma = E + \check{\gamma}, \quad C_\gamma^T = E - \check{\gamma}. \quad (3.133)$$

С точностью до малых величин второго порядка матрица (3.131) является ортогональной с определителем, равным  $1$ .

Действительно, непосредственным вычислением получаем, что  $|C_\gamma| = 1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 \approx 1$ . Дальше в соответствии с дистрибутивным законом умножения матриц имеем

$$C_\gamma^T C_\gamma = (E - \check{\gamma})(E + \check{\gamma}) = E - \check{\gamma}^2 = E,$$

т. е.  $\check{\gamma}^2$  является матрицей с элементами второго порядка малости.

В соответствии с общей теорией ортогональные преобразования с определителем, равным 1, являются преобразованиями поворота. Направление оси поворота можно найти из решения уравнений (3.128) при  $\lambda = 1$ , где коэффициенты  $c_{ij}^{(\gamma)}$  суть элементы матрицы (3.131). Тогда из первых двух уравнений (третье уравнение является следствием первых двух) немедленно получим

$$\frac{x}{\gamma_1} = \frac{y}{\gamma_2} = \frac{z}{\gamma_3} \quad (3.134)$$

— уравнение прямой с угловыми коэффициентами  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Эта прямая определяет ось поворота системы координат. Угол поворота  $\psi$  можно найти из уравнения (3.130). В этом уравнении приходится полагать  $\cos \psi = 1 - \psi^2/2$ , поэтому его правую часть нельзя непосредственно получить из матрицы (3.131), так как при ее формировании мы опускали величины второго порядка малости. Нужно обратиться к матрице (3.126) и в ее диагональных элементах удержать члены второго порядка, т. е. следует полагать  $\cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 1 - \gamma_1^2/2 - \gamma_2^2/2$  и т. д. Учитывая это обстоятельство, из (3.130) получим

$$\psi = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}. \quad (3.135)$$

Если ввести вектор

$$\gamma = \gamma_1 x^0 + \gamma_2 y^0 + \gamma_3 z^0, \quad (3.136)$$

где  $x^0, y^0, z^0$  — единичные векторы осей  $x, y, z$ , то из (3.134) и (3.135) следует, что направление этого вектора определяет ось вращения, величина этого вектора определяет угол поворота и, очевидно, с положительного конца этого вектора вращение координатных осей будет происходить против хода часовой стрелки. Приведенные факты наводят на мысль, что малые ортогональные преобразования можно изображать векторами. Это окажется справедливым, если мы докажем, что малые повороты можно складывать как векторы. Для этого нужно доказать, что результат нескольких малых поворотов не зависит от их последовательности. По аналогии с (3.131) — (3.133) представим матрицы  $C_{\gamma_i}$  (3.122), (3.123) элементарных поворотов в виде

$$C_{\gamma_i} = E + \check{\gamma}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.137)$$

Тогда в соответствии с (3.125) получим

$$\begin{aligned} C_\gamma &= (E + \check{\gamma}^2)(E + \check{\gamma}_1)(E + \check{\gamma}_3) = \\ &= E + \check{\gamma}_1 + \check{\gamma}_2 + \check{\gamma}_3 + \check{\gamma}_1 \check{\gamma}_3 + \check{\gamma}_2 \check{\gamma}_3 + \check{\gamma}_2 \check{\gamma}_1 \check{\gamma}_3. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Отсюда с точностью до малых величин второго порядка

$$C_\gamma = E + \check{\gamma}_1 + \check{\gamma}_2 + \check{\gamma}_3. \quad (3.139)$$

Но сложение матриц обладает свойством коммутативности, поэтому результат не зависит от порядка перемножения матриц. Мы всегда получим, что матрица малого ортогонального преобразования имеет вид (3.131). Так как малые повороты обладают свойством коммутативности, их можно представлять в виде векторов и над ними можно производить операции по векторным правилам. Следует помнить, что с положительного конца вектора (3.136) вращение координатных осей происходит против часовой стрелки, вращение вектора будет происходить в обратном направлении, т. е. по ходу часовой стрелки. В этом можно убедиться непосредственно.

Преобразование (3.124) при учете (3.132) и (3.133) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p - x \\ y_p - y \\ z_p - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (3.140)$$

Очевидно, в векторной форме (3.140) можно записать в виде равенства

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}, \quad (3.141)$$

которое подтверждает сделанное заключение.

Векторное представление не только позволяет суммировать малые повороты, но, очевидно, и разлагать их на составляющие по правилам векторной алгебры.

Углы  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  являются разновидностями эйлеровых углов. Их отличие от классических углов Эйлера, так называемых углов прецессии  $\psi$ , нутации  $\theta$  и собственного вращения  $\varphi$ , состоит в том, что  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  определяют три последовательных поворота, каждый из которых производится вокруг оси, не участвующей в предыдущих поворотах. В классическом случае повороты на углы  $\psi$  и  $\varphi$  происходят вокруг одной и той же оси подвижной системы.

Классические углы Эйлера неудобны для изучения малых расстройств координатных систем, так как в этом случае только угол  $\theta$  остается малым, а углы  $\psi$  и  $\varphi$  могут быть произвольными при сохранении малости их суммы  $\psi + \varphi$ .

Подробно этот вопрос рассмотрен в «Аналитической механике» А. И. Лурье [266]. Указание на этот факт имеется в «Механике гироскопических систем» А. Ю. Ишлинского [22].

**3.5.3. Составляющие некоторых векторов в моделирующей системе координат.** На основании полученных соотношений можно выразить составляющие вектора кажущегося ускорения по осям  $x_p, y_p, z_p$  моделирующей системы координат через составляющие этого вектора в системе  $xuz$ , принимаемой за номинальную систему. Соответствующие составляющие связаны между собой матричным уравнением (3.124), в котором слева следует заменить  $x_p,$

$y_p, z_p$  на  $a_{x_p}, a_{y_p}, a_{z_p}$ , а справа —  $x, y, z$  на  $a_x, a_y, a_z$ . В общем случае матрица преобразования  $C$  имеет вид (3.126), а при малом рас- согласовании систем  $x_p y_p z_p$  и  $xyz$  она определяется формулой (3.131). В этом последнем случае выпишем соответствующие выра- жения в обычной форме.

Будем иметь

$$\left. \begin{aligned} a_{x_p} &= a_x + \gamma_3 a_y - \gamma_2 a_z, \\ a_{y_p} &= a_y + \gamma_1 a_z - \gamma_3 a_x, \\ a_{z_p} &= a_z + \gamma_2 a_x - \gamma_1 a_y. \end{aligned} \right\} \quad (3.142)$$

Составляющие  $a_x, a_y, a_z$  были выражены раньше через компоненты скорости, их производные и координаты местоположения объекта. Напомним, что под  $xyz$  следует понимать любую декартову систе- му координат, рассмотренную раньше.

В дальнейшем нам понадобится иметь под рукой выражения составляющих абсолютной угловой скорости  $\omega_p$  трехгранника  $x_p y_p z_p$  на его оси. Угловую скорость  $\omega_p$  следует рассматривать как сумму двух скоростей: угловой скорости  $\omega$  номинального трехгранника  $xyz$ , которая здесь будет играть роль переносной скорости, и относительной угловой скорости  $\omega_p$  трехгранника  $x_p y_p z_p$  относительно трехгранника  $xyz$ . Относительную скорость в соответствии с рис. 3.5 можно представить в векторной форме

$$\omega'_p = \dot{\gamma}_1 x_1^0 + \dot{\gamma}_2 y_p^0 + \dot{\gamma}_3 z^0, \quad (3.143)$$

где  $x_1^0, y_p^0, z^0$  — единичные векторы вдоль соответствующих коор- динатных осей. Для нахождения составляющих  $\omega'_{px_p}, \omega'_{py_p}, \omega'_{pz_p}$  вектора по осям  $x_p, y_p, z_p$  следует определить соответствующие на- правляющие косинусы векторов  $x_1^0, y_p^0, z^0$ . В частности, в соответ- ствии с процессом образования матрицы (3.126) можно утвер- ждать, что направляющие косинусы  $x_1^0$  в системе  $x_p y_p z_p$  будут оп- ределяться ее первым столбцом при  $\gamma_3 = 0$ , а направляющие косинусы  $z^0$  — третьим столбцом.

Таким образом, для нахождения составляющих  $\omega'_{px_p}, \omega'_{py_p}, \omega'_{pz_p}$  можно составить матричное соотношение

$$\begin{bmatrix} \omega'_{px_p} \\ \omega'_{py_p} \\ \omega'_{pz_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_2 & 0 & -\cos \gamma_1 \sin \gamma_2 \\ 0 & 1 & \sin \gamma_1 \\ \sin \gamma_2 & 0 & \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\gamma}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.144)$$

Процедура образования проекций  $\omega_{x_p}, \omega_{y_p}, \omega_{z_p}$  абсолютной угловой скорости трехгранника  $xyz$  по значениям  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  остается преж- ней, т. е. такой же, как и для вектора кажущегося ускорения.

Таким образом, суммируя соответствующие составляющие отно- сительной  $\omega'_p$  в переносной  $\omega$  скоростей, получим выражение для  $\omega_{px_p}, \omega_{py_p}, \omega_{pz_p}$  — проекций абсолютной угловой скорости трех- гранника  $x_p y_p z_p$  на его оси в общем случае.

В частном случае, когда углы  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  малы, то с оговоренной выше точностью из (3.144) по образцу формул (3.142) получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_{px_p} &= \dot{\gamma}_1 + \omega_x + \gamma_3 \omega_y - \gamma_2 \omega_z, \\ \omega_{py_p} &= \dot{\gamma}_2 + \omega_y + \gamma_1 \omega_z - \gamma_3 \omega_x, \\ \omega_{pz_p} &= \dot{\gamma}_3 + \omega_z + \gamma_2 \omega_x - \gamma_1 \omega_y. \end{aligned} \right\} \quad (3.145)$$

При образовании этих формул дополнительно предполагалось, что угловые скорости  $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$  являются малыми величинами пер- вого порядка, поэтому в первом, во втором и третьем уравнениях (3.145) мы пренебрегли соответственно слагаемыми  $-\dot{\gamma}_3 \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3 \dot{\gamma}_1$  и  $\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2$  как величинами второго порядка малости. Так, например, если под  $xyz$  понимать географическую систему координат, то на неподвижном основании она вращается с угловой скоростью Зем- ли  $U = 15$  град/ч. Физические площадки моделирующего трех- гранника  $xyz$  имеют в настоящее время неконтролируемое враще- ние со скоростью порядка 0,01 град/ч. Таким образом, относи- тельная скорость в 1000 раз будет меньше переносной, поэтому пренебрежение нелинейными членами  $-\dot{\gamma}_3 \dot{\gamma}_2$  и т. д. можно считать оправданным.

§ 4.1. Линейный осевой акселерометр

4.1.1. Принцип действия и уравнения движения.

Схема такого прибора представлена на рис. 4.1. Чувствительным элементом акселерометра служит инертная масса, которая может перемещаться относительно корпуса прибора вдоль жесткого стержня. Перемещению чувствительного элемента препятствует сила натяжения

пружины, пропорциональная его отклонению от нейтрального положения, а также демпфирующая сила, пропорциональная скорости движения чувствительного элемента относительно корпуса прибора.

Прибор снабжен устройством для снятия показаний, которое в большинстве случаев

преобразует смещение чувствительного элемента от нейтрального положения в напряжение постоянного или переменного тока. Демпфирующее устройство и устройство для снятия показаний прибора на схеме рис. 4.1 не показаны.

Движение чувствительного элемента акселерометра будем изучать в системе координат  $xyz$  \*), начало которой совместим с той точкой стержня, в которой находится центр масс чувствительного элемента в нейтральном положении, а ось  $x$  направим вдоль стержня. Мы здесь не фиксируем положение осей  $y$  и  $z$ , так как в этом пока нет необходимости. Ось  $x$  будем называть *осью чувствительности акселерометра* или его *измерительной осью*. Очевидно, координата  $x$  определяет здесь относительное смещение центра масс чувствительного элемента от нейтрального положения.

\*) Под  $xyz$  здесь понимается любая прямоугольная система координат с перечисленными ниже свойствами и, в частности, система с географической ориентировкой осей.

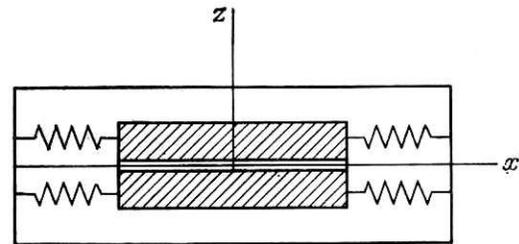


Рис. 4.1. Схема однокомпонентного осевого акселерометра.

Сначала напишем векторное уравнение движения центра масс чувствительного элемента как свободной материальной точки. Для этой цели, очевидно, нужно мысленно отбросить связи и их влияние заменить реакциями. Имея перед глазами рис. 3.3 и формулы (3.40) — (3.42), запишем это уравнение в виде

$$m(W' + W) = mg' + F', \quad (4.1)$$

где  $m$  — масса чувствительного элемента,  $g'$  — вектор гравитационного ускорения в той точке пространства (точка  $C$ ), в которой находится центр масс чувствительного элемента,  $W$  — абсолютное ускорение точки  $M$  движущегося объекта, с которой совпадает начало системы координат  $xyz$ ,  $W'$  — ускорение центра масс чувствительного элемента в системе координат  $xyz$ ,  $F'$  — прочие силы, включая силы реакции связи. В уравнении (4.1) перенесем член  $mW$  в правую часть и будем трактовать  $-mW$  как силу инерции от движения точки  $M$  объекта с ускорением  $W$ ; запишем  $W'$  в развернутом виде по формуле (3.31). Тогда получим

$$m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} + 2\omega \times \frac{dr}{dt} + \omega \times (\omega \times r) \right] = -m(W - g') + F', \quad (4.2)$$

где  $r$  — радиус-вектор точки  $C$  в системе координат  $xyz$ , а  $\omega$  — вектор абсолютной угловой скорости трехгранника  $xyz$ , локальное дифференцирование ведется также в системе  $xyz$ .

Уравнения движения получаются из (4.2) посредством проектирования всех векторных величин на ось  $x$ , так как две остальные проекции на оси  $y$  и  $z$  дают соотношения для определения реакций связи. В силу кинематических связей радиус-вектор  $r$  и его локальные производные направлены вдоль оси  $x$  и они равны соответственно  $x, \dot{x}, \ddot{x}$ . В соответствии с этим обстоятельством проекция второго слагаемого левой части (4.2) на ось  $x$  равна нулю, проекция последнего слагаемого равна  $-m(\omega_y^2 + \omega_z^2)x$  (см. (3.38)). Тогда уравнение движения центра масс чувствительного элемента можно записать в виде

$$m\ddot{x} - m(\omega_y^2 + \omega_z^2)x = -m(W_x - g'_x) - kx - c\dot{x} + F_{тр}, \quad (4.3)$$

где  $-kx$  и  $-c\dot{x}$  соответственно определяют восстанавливающую силу от натяжения пружин и демпфирующую силу. Силой сухого трения  $F_{тр}$  между чувствительным элементом и стержнем пренебрежем.

Если ввести обозначения

$$v_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\delta v_0 = \frac{c}{m} \quad (4.4)$$

и пренебречь величиной  $\omega_y^2 + \omega_z^2$  по отношению к  $v_0^2$ , то (4.3)

можно привести к виду

$$\ddot{x} + 2\delta\nu_0\dot{x} + \nu_0^2x = -(W_x - g'_x). \quad (4.5)$$

Здесь, очевидно,  $\nu_0$  определяет частоту собственных недемпфированных колебаний чувствительного элемента, а  $\delta$  — относительный коэффициент затухания. Обычно выбирают  $\delta < 1$ , и тогда собственное движение представляет собой затухающие (демпфированные) колебания с частотой  $\nu_g = \nu_0\sqrt{1 - \delta^2}$ . Оценим порядок пренебрегаемой величины  $\omega_y^2 + \omega_z^2$  на примере геоцентрической системы координат  $x'_c y'_c z'_c$ , не вращающейся вокруг геоцентрической вертикали, которая рассматривалась в п. 3.3.3. В этом случае  $\omega_z = \omega'_z = 0$ , а  $\omega_y = \omega'_y$  определяется второй формулой (3.55) при замене индексов  $i$  на штрих и  $m$  на  $c$ . При высоте полета  $h = 29$  км ( $r = 6400$  км) и скорости полета  $v = 3360$  км/ч  $v/r = 2U$ . Тогда  $\omega_y = \sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2} < 3U$ . Собственная частота колебаний чувствительного элемента акселерометра имеет порядок 100 Гц, т. е.  $\nu_0$  имеет порядок 600 1/с. Учитывая, что  $U = 7,29 \cdot 10^{-5}$  1/с, получим оценку  $\sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2} < 3,64 \cdot 10^{-7} \nu_0$ , которая оправдывает сделанное выше пренебрежение.

Пусть в уравнении (4.5) правая часть равняется постоянной величине, тогда после погашения собственных колебаний чувствительного элемента прибора, т. е. в установившемся режиме,

$$\nu_0^2 x = -(W_x - g'_x). \quad (4.6)$$

В правой части (4.6)  $W_x$  есть соответствующая проекция абсолютного ускорения точки  $M$  (начало координатной системы  $xuz$ , совпадающее с нейтральным положением центра масс чувствительного элемента), а  $g'_x$  — проекция гравитационного ускорения точки  $C$  (текущего положения центра масс чувствительного элемента), отстоящей от  $M$  вдоль оси  $x$  на величину  $x$ . В реальных приборах максимальное значение  $x$  имеет порядок меньше одного мм, поэтому в (4.6) практически можно считать, что оба ускорения  $W_x$  и  $g'_x$  определяются для одной и той же точки. В зависимости от удобства рассуждений эту точку можно считать совпадающей с  $M$  или  $C$ . Вследствие этого правую часть (4.6) будем считать проекцией кажущегося ускорения точки  $M$  на ось чувствительности акселерометра. Как мы уже отметили выше, устройство для съема показаний преобразовывает смещения  $x$  в надлежащую физическую величину, которая является выходной величиной или просто выходом акселерометра. Таким образом, можно сказать, что линейный осевой акселерометр измеряет проекцию кажущегося ускорения на свою ось чувствительности той точки объекта, которая совпадает с точкой  $M$ . Физически уравнение (4.6) проще осмысливается, если вер-

нуться к исходным параметрам прибора (см. (4.4)). Тогда (4.6) можно записать в виде соотношения  $kx = -ma_x$ , в правой части его стоит сила инерции, равная алгебраической сумме силы инерции  $-mW_x$  и силы тяготения  $mg'_x$ , действующих на чувствительный элемент акселерометра, в левой части  $kx$  означает силу натяжения пружины. Таким образом, в соответствии с (4.6) акселерометр функционирует как обычный силومتر, в нем обобщенная сила инерции сравнивается или измеряется силой натяжения пружины. По существу мы объяснили здесь функционирование акселерометра с точки зрения наблюдателя, связанного с движущимся объектом. Представляется интересным случай, когда нейтральное положение чувствительного элемента акселерометра (точка  $M$ ) совпадает с центром масс движущегося объекта. В этом случае легко пояснить, чем является кажущееся ускорение (измеряемое акселерометром) для движущегося объекта.

Уравнение движения центра масс объекта можно записать в виде

$$m_0 W = m_0 g' + T, \quad (4.7)$$

где  $m_0$  — масса объекта,  $T$  — равнодействующая негравитационных сил (сила тяги, аэродинамические силы),  $m_0 g'$  — сила тяготения (объемная) в центре масс объекта \*). Из (4.7) можно получить в проекции на ось  $x$  выражение

$$a_x = W_x - g'_x = \frac{T_x}{m_0}, \quad (4.8)$$

которое показывает, что измеряемое акселерометром кажущееся ускорение обусловлено действием сил негравитационного происхождения. Рассмотрим теперь механизм измерения акселерометра с точки зрения наблюдателя, связанного с абсолютным пространством. Сила тяги и аэродинамические силы приложены к точкам внешней поверхности движущегося объекта. Если под воздействием этих сил центр масс объекта движется с определенным ускорением, то с таким ускорением, по крайней мере в поступательном движении, будут перемещаться все внутренние частицы тела. По закону Ньютона ко всем материальным частицам должна быть приложена соответствующая сила, пропорциональная этому ускорению. Эти силы возникают через деформацию элементов конструкции движущегося тела. В частности, чувствительный элемент акселерометра будет двигаться с надлежащим ускорением под воздействием силы от деформации пружины. Но эта сила как раз и является измерительным элементом прибора. Силы тяготения являются объемными силами, они непосредственно приложены к каждой материальной частице движущегося тела и сообщают ей

\*) Здесь предполагается, что в объеме тела гравитационное поле одномерно.

одно и то же ускорение (по крайней мере в однородном гравитационном поле), поэтому при свободном «падении», т. е. при движении только под воздействием гравитационных сил, движущееся тело не деформируется. При свободном «падении» измерительная пружина не деформируется и выходная величина акселерометра будет равна нулю. Данная интерпретация может оказаться весьма полезной, она во многих случаях может предохранить от возможных ошибок.

Вернемся к вопросу о представлении выходной величины акселерометра. С физической стороны эта величина зависит от выбора устройства для снятия показаний. Однако для общих рассуждений нам удобно не связывать себя с конкретным выполнением такого устройства, а просто согласовать выходную и входную величины акселерометра по размерности.

С учетом (4.4) приведем (4.6) к виду

$$-\frac{k}{m}x = -v_0^2 x = W_x - g'_x. \quad (4.9)$$

Величину, стоящую в (4.9) слева (имеющую размерность ускорения), обозначим через  $\tilde{a}_x$  \*) и будем ее считать выходом акселерометра. Если, далее, заметить, что  $W_x - g'_x = a_x$ , то (4.9) можно окончательно записать в форме

$$\tilde{a}_x = a_x. \quad (4.10)$$

Зависимость (4.10) можно рассматривать как статическую характеристику прибора, ее можно получить при надлежащей обработке экспериментальных данных.

**4.1.2. Условия квазистатического измерения.** Акселерометры относятся к классу регистрирующих приборов, задача которых состоит в том, чтобы в процессе измерения их выходная величина с минимальным динамическим и масштабным искажениями повторяла изменяющуюся во времени входную величину, подлежащую измерению, т. е. выход прибора должен как бы статически подслеживать за изменяющимся входом (см. (4.6)). Условия такого квазистатического измерения являются общими для всех регистрирующих приборов, движение чувствительного элемента которых описывается уравнением второго порядка вида (4.5). Эта задача была решена А. Н. Крыловым.

Приведем основной результат. В общем виде качественное изменение измеряемой величины  $a_x$  во времени представляется кривой на рис. 4.2; сначала измеряемая величина увеличивается от нуля до некоторого максимума, а затем уменьшается от этого

\*) Здесь и в дальнейшем мы приборные значения, приведенные к размерности измеряемых величин, будем обозначать той же буквой, но с «волной» наверху.

максимума до нуля. Нулевые значения  $a_x$  соответствуют, например, мгновениям включения и выключения двигательной установки или, например, мгновениям, когда сила тяги двигателя уравновешивается силами сопротивления среды (аэродинамические силы сопротивления для самолета). Тогда можно считать, что измерение производится в квазистатическом режиме, если период собственных колебаний чувствительного элемента прибора  $T_0 = 2\pi/v_0$  будет значительно меньше некоторого характеристического времени, определяющего скорость увеличения или уменьшения измеряемой величины.

Если изменение измеряемой величины  $a_x$  происходит по гармоническому закону  $a_x = a_0 \sin nt$ , то роль такого характеристического времени играет период гармонического колебания  $T = 2\pi/n$ . Период  $T_0$  собственных колебаний чувствительного элемента прибора имеет порядок, равный 0,01 с. В дальнейшем мы будем считать, что указанное выше условие выполняется, измерение кажущегося ускорения акселерометр производит в квазистатическом режиме и связь между  $\tilde{a}_x$  и  $a_x$  определяется уравнением (4.10). Это уравнение определяет условие идеального измерения  $a_x$ , так как выход акселерометра  $\tilde{a}_x$  в этом случае без каких-либо масштабных искажений измеряет входную величину  $a_x$  в любом интервале ее изменения. Если по оси абсцисс откладывать величину  $\tilde{a}_x$ , а по оси ординат — величину  $a_x$ , то геометрически статическая характеристика прибора, определяемая зависимостью (4.10), изображается прямой, выходящей из начала координат и наклоненной под углом  $45^\circ$  к оси  $a_x$ . Такой прямой изображается идеальная статическая характеристика акселерометра. В общем случае статическая характеристика представляется нелинейной зависимостью

$$\tilde{a}_x = f(a_x) + \delta a_x, \quad (4.11)$$

где  $f(a_x)$  — нелинейная функция, монотонно увеличивающаяся вместе с  $a_x$  и удовлетворяющая условию  $f(0) = 0$ , величина  $\delta a_x$  определяет так называемое смещение нуля акселерометра.

Смещение нуля акселерометра  $\delta a_x$  определяется рядом физических причин. Так, например, по схеме прибора, изображенной на рис. 4.1, можно нарисовать такую картину. Пусть правая и левая пружины установлены с предварительным натягом так, что в положении равновесия (нейтральное положение) центр масс чувствительного элемента находится в точке  $M_0$  и устройство для снятия показаний отрегулировано таким образом, что его нулевая

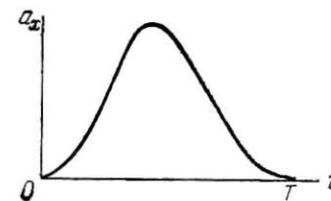


Рис. 4.2. Кривая изменения проекции кажущегося ускорения на измерительную ось акселерометра.

точка соответствует указанному нейтральному положению чувствительного элемента. Изменение условий работы прибора в окружающей среде может привести, например, к неравномерному распределению температуры в объеме корпуса прибора, что в свою очередь может привести к неодинаковому изменению сил предварительного натяга правой и левой пружин; это приведет к перемещению нейтрального положения чувствительного элемента прибора из точки  $M_0$  в некоторую другую точку  $M$ . В этом случае устройство для снятия показаний выдает сигнал, который, будучи приведен к размерности ускорения, будет представлять собой сдвиг нуля акселерометра  $\delta a_x$ . Такой же эффект может произойти также в том случае, если в процессе работы прибора сообразяется отрегулированная заранее нулевая точка устройства для снятия показаний. Это может произойти, например, при нестабильности напряжения или частоты питающего тока, нестабильности электрических и магнитных параметров элементов прибора и от других причин. Более подробное рассмотрение этого вопроса связано с необходимостью рассмотрения конкретных схем акселерометров. Такой вопрос выходит за рамки данной книги.

Величина  $\delta a_x$  показывает, что выходная величина  $a_x$  может отличаться от нуля даже в том случае, когда  $a_x = 0$ . Уравнение (4.11) удобно преобразовать к виду

$$\bar{a}_x = h_a a_x + \delta a_x, \quad (4.12)$$

введя величину

$$\frac{f(a_x)}{a_x} = h_a, \quad (4.13)$$

которую будем называть *масштабным коэффициентом*.

Безразмерный масштабный коэффициент  $h_a$  равняется тангенсу угла наклона прямой, идущей из начала координат в текущую точку нелинейной статической характеристики, которая соответствует текущему значению нелинейной функции  $f(a_x)$ . Для линейной характеристики  $h_a = \text{const}$  он определяет угловой коэффициент прямой. Идеальное значение этого коэффициента равняется 1. Удобно представлять  $h_a$  в виде

$$h_a = 1 + \delta h_a, \quad (4.14)$$

где  $\delta h_a$  будем называть *погрешностью масштабного коэффициента*. Из (4.12) следует, что

$$\delta h_a = \frac{\bar{a}_x - a_x}{a_x}, \quad (4.15)$$

т. е.  $\delta h_a$  определяет относительную погрешность акселерометра. Для дальнейшего изложения материала нам необходимо выбрать математическую модель акселерометра. В качестве такой модели мы будем пользоваться соотношением (4.12) при  $\delta a_x \approx 0$ , т. е.

выражением

$$\bar{a}_x = h_a \cdot a_x = (1 + \delta h_a) a_x. \quad (4.16)$$

Кроме модели акселерометра (4.16) нам будет нужна также математическая модель (уравнение) ошибок акселерометра. Вводя обозначения

$$\Delta a_x = \bar{a}_x - a_x \quad (4.17)$$

для погрешности акселерометра и используя (4.12) и (4.14), получим для математической модели (уравнения) ошибок выражения

$$\Delta a_x = a_x \delta h_a + \delta a_x. \quad (4.18)$$

В правой части уравнения ошибок акселерометра (4.18) величины  $\delta h_a$  и  $\delta a_x$  будем называть *входными ошибками акселерометра*, а величину  $\Delta a_x$  — *выходной ошибкой*, причем в дальнейшем знаком  $\Delta$  будем обозначать выходные ошибки как самой инерциальной системы, так и различных приборов, входящих в ее состав, а знаком  $\delta$  — входные ошибки. Во всех случаях входные ошибки будут играть роль внешних возмущений, действующих на прибор или на систему, входные ошибки будут считаться известными величинами и их изменение во времени будет также известно. Так, например,  $\delta h_a$  и  $\delta a_x$  могут быть известными постоянными величинами, случайными величинами с известными числовыми характеристиками (математическое ожидание и дисперсия), определенными (детерминированными) функциями времени, случайными процессами с известными статистическими характеристиками (корреляционная функция) и т. д.; выходные ошибки будут находиться из решений соответствующих уравнений ошибок. Для акселерометра оно задается в конечном виде (4.18). Заметим, что в случае, когда  $\delta h_a$  является нелинейной функцией входного сигнала  $a_x$ , величина ошибок  $\delta h_a$  и  $\delta a_x$  будет зависеть от вибрации мест крепления прибора. Такой эффект обусловлен широкоизвестным явлением детектирования при прохождении нескольких колебаний через нелинейный элемент.

Несколько слов скажем о терминологии. Выше  $\Delta a_x$  и  $\delta h_a$  мы называли погрешностями акселерометра и масштабного коэффициента соответственно, а сейчас — ошибками. В метрологии точность измерительных приборов характеризуется их ошибками или погрешностями. Чтобы получить истинное значение измеряемой величины, нужно к измеренной величине прибавить ошибку или вычесть погрешность. Ошибка и погрешность измеряемой величины имеют одинаковые численные значения и отличаются только знаком. Таким образом, точность измерительных приборов можно с одинаковым основанием характеризовать ошибкой или погрешностью, так как для такой характеристики играет роль только их численное значение. Обычно в специальной литературе как у нас, так и за рубежом принято говорить об ошибках инерциальных си-

стем и об их уравнениях ошибок. Мы в дальнейшем будем говорить об ошибках инерциальных систем и приборов, входящих в их состав, не заботясь о том, чем на самом деле они являются — ошибками или погрешностями. В тех случаях, когда это различие является важным, внимательный читатель всегда сумеет разобраться в этом вопросе сам. Отметим, что уравнение ошибок акселерометров (4.18) можно получить из математической модели акселерометра (4.16) методом варьирования. Вариация функции берется по тем же правилам, что и взятие дифференциала. Вариации соответствующих величин берутся около их номинальных значений. Таким образом, при варьировании (4.16) с учетом принятых обозначений для входных и выходных ошибок получим

$$\Delta a_x = a_x \delta h_a + h_a^* \delta a_x. \quad (4.19)$$

Так как  $h_a^* = 1$ , то это выражение совпадает с уравнением ошибок (4.18). Методом варьирования мы будем пользоваться в дальнейшем, так как в более сложных случаях, как, например, при выводе уравнений ошибок инерциальной системы, метод варьирования позволяет более просто и быстро получить конечный результат.

В заключение отметим, что на практике большое распространение получили однокомпонентные маятниковые акселерометры. Чувствительным элементом такого акселерометра является плоский маятник. Отклонению чувствительного элемента от его нейтрального положения препятствует момент сил натяжения пружин,

который пропорционален углу отклонения чувствительного элемента. Схема такого акселерометра представлена на рис. 4.3. При этом на рис. 4.3 демпфирующее устройство и устройство для снятия показаний прибора не показаны. В точке  $C$  находится центр масс маятника. Маятниковый акселерометр также измеряет проекцию вектора кажущегося ускорения на свою измерительную ось, которая совпадает с перпендикуляром к плечу маятника в нейтральном положении чувствительного элемента (ось  $x$  на рис. 4.3). Особенность маятникового акселерометра состоит в том, что результат измерения проекции  $a_x$  зависит от наличия или отсутствия соответствующей проекции вектора кажущегося ускорения на ось перекрестной связи (ось  $z$  на рис. 4.3). Для уменьшения влияния перекрестной связи до приемлемой величины угол отклонения чувствительного элемента от нейтрального положения (угол  $\beta$  на

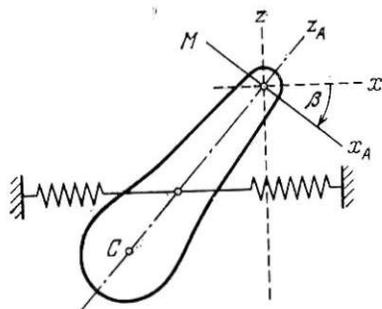


Рис. 4.3. Маятниковый акселерометр.

рис. 4.3) должен быть сведен до достаточно малой величины в своем рабочем диапазоне измерения проекции  $a_x$ . Если при этом период собственных колебаний чувствительного элемента маятникового акселерометра выбран также достаточно малым, то в качестве его математической модели и уравнений ошибок можно использовать выражения (4.16) и (4.18) соответственно. Мы будем так же поступать в дальнейшем для однокомпонентного акселерометра в независимости от его принципиальной схемы.

**4.1.3. Измерение вектора кажущегося ускорения.** В косоугольной системе координат вектор кажущегося ускорения  $\mathbf{a}$  можно определить через ковариантные  $a_1, a_2, a_3$  и контравариантные  $a^1, a^2, a^3$  составляющие. Ковариантные составляющие получаются ортогональным проектированием вектора на оси выбранной системы координат, контравариантные составляющие образуются проектированием вектора по правилу параллелограмма. В прямоугольной системе координат при одинаковом выборе единиц измерения различие между обоими видами составляющих исчезает. Ковариантные и контравариантные составляющие вектора кажущегося ускорения имеют физический смысл, так как они могут быть непосредственно измерены. Три линейных однокомпонентных акселерометра, оси чувствительности которых не лежат в одной плоскости, измеряют ковариантные составляющие, так как каждый из акселерометров измеряет ортогональную проекцию вектора кажущегося ускорения на свою ось чувствительности. Контравариантные составляющие можно измерять с помощью пространственного (трехкомпонентного) акселерометра. Схема пространственного акселерометра представлена на рис. 4.4. Чувствительный элемент удерживается в нейтральном положении с помощью трех пружин, оси которых в общем случае совпадают с ребрами некоторого косоугольного трехгранника. На чувствительный элемент акселерометра действует обобщенная сила инерции —  $m\mathbf{a}$ , произвольно ориентированная в пространстве.

Эта сила уравнивается силами натяжения трех пар пружин. Каждая пара пружин будет уравнивать составляющую силы, которая в соответствии с принципами механики получается проектированием силы —  $m\mathbf{a}$  по правилу параллелограмма на оси этих пружин. Мы здесь предполагаем, что деформации пружин невелики, вследствие чего взаимное расположение линий действия сил натяжения пружин практически не изменяется в процессе измерений. После погашения собственных колебаний чувствитель-

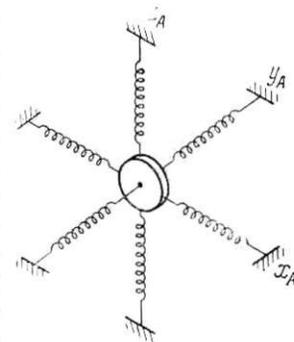


Рис. 4.4. Схема пространственного акселерометра.

ного элемента силы натяжения пружин окажутся пропорциональными контравариантным составляющим кажущегося ускорения. Естественно, в приборе должны быть предусмотрены демфирующее устройство и устройство для съема показаний.

В трехкомпонентных акселерометрах могут быть использованы современные технические средства для создания центрирующих квазиупругих сил, например, посредством применения электромагнитных и электростатических пространственных подвесов.

## § 4.2. Интегрирующее устройство

В инерциальных системах акселерометры всегда применяются в сочетании с интегратором, так как при интегрировании надлежащим образом скорректированных показаний акселерометров получают соответствующие компоненты скорости объекта. Интегратор не является, подобно акселерометру, чувствительным элементом инерциальной системы, он является частью вычислительного устройства, причем его неизменной составной частью. Рассмотрим процесс интегрирования на примере получения проекции относительной скорости на ось  $x - v_x$ ; эта величина получается при интегрировании ее производной по времени  $\dot{v}_x$ . Величина  $\dot{v}_x$  извлекается из выходного сигнала  $\tilde{a}_x$  акселерометра. Процесс интегрирования в идеальном случае описывается выражением

$$\ddot{v}_x = \dot{v}_x, \quad (4.20)$$

где  $\tilde{v}_x$  — выходная величина интегратора, приведенная к размерности скорости. Интегрируя (4.20) по времени в пределах от 0 до  $t$ , получим выражение

$$\tilde{v}_x(t) - \tilde{v}_x(0) = v_x(t) - v_x(0). \quad (4.21)$$

Если в (4.21) положить

$$\tilde{v}(0) = v_x(0), \quad (4.22)$$

то получим

$$\tilde{v}_x(t) = v_x(t). \quad (4.23)$$

Условие (4.22) показывает, что к моменту включения инерциальной системы в мгновение времени  $t = 0$  нужно, чтобы на выходе интегратора была установлена проекция скорости  $v_x(0)$ , соответствующая этому мгновению. Установку значения  $v_x(0)$  на выходе интегратора, т. е. выполнение условия (4.22), называют *начальной выставкой интегратора*, которая является составной частью начальной выставки инерциальной системы.

Величина  $v_x(0)$ , устанавливаемая на выходе интегратора перед включением системы, определяется из показания какого-нибудь внешнего относительно инерциальной системы источника навигационной информации.

В правой части уравнения (4.20), определяющего функционирование идеального интегратора, фигурирует величина  $\dot{v}_x$ . Эта величина не является физическим сигналом, способным управлять интегрирующим устройством. В составе инерциальной системы нет прибора, измеряющего эту величину. Величина  $\dot{v}_x$  определяется из следующих соображений. В выражение для  $a_x$  входит в качестве слагаемого  $\dot{v}_x$ . Если разрешить такое выражение относительно  $\dot{v}_x$ , то получим выражение вида

$$\dot{v}_x = a_x + B_x \quad (4.24)$$

(см., например, (5.3)); здесь  $B_x$  — кинематическая величина, зависящая от координат местоположения, компонент скорости, проекций абсолютной угловой скорости опорного трехгранника, а  $a_x$  измеряется акселерометром. Расчетное значение этой величины  $\tilde{B}_x$  определяется вычислителем инерциальной системы и преобразуется на его выходе в надлежащий физический сигнал, способный управлять интегрирующим устройством. С учетом вышесказанного уравнения интегратора первой ступени будем записывать в виде

$$\dot{\tilde{v}}_x = h_{\text{И}} (\tilde{a}_x + \tilde{B}_x). \quad (4.25)$$

Выходы акселерометра и вычислителя  $\tilde{a}_x$  и  $\tilde{B}_x$  отличаются от своих идеальных значений  $a_x$  и  $B_x$ , а масштабный коэффициент  $h_{\text{И}}$  отличается от своего номинального значения  $h_{\text{И}}^* = 1$ , поэтому интегрирование осуществляется с ошибкой, которая определяется из уравнения ошибок. Уравнение ошибок получается варьированием (4.25) около истинных и номинальных значений входящих туда величин. Так, будем иметь

$$\Delta \dot{\tilde{v}}_x = h_{\text{И}}^* (\Delta a_x + \Delta B_x) + (a_x + B_x) \delta h_{\text{И}} \quad (4.26)$$

или, учитывая, что  $h_{\text{И}}^* = 1$ , перепишем (4.26) в виде

$$\Delta \dot{\tilde{v}}_x = (\Delta a_x + \Delta B_x) + (a_x + B_x) \delta h_{\text{И}} + \delta \dot{v}_x. \quad (4.27)$$

Полученное выражение (4.27) является уравнением ошибок интегратора первой ступени канала  $x$ . Для других каналов уравнения ошибок получаются подобным образом. В правую часть (4.27) мы добавили величину  $\delta \dot{v}_x$ , которую будем называть *дрейфом нуля интегратора*;  $\delta \dot{v}_x$  характеризует внутренние свойства интегрирующего устройства.

В дальнейшем в качестве математической модели и уравнения ошибок интеграторов, используемых в схемах инерциальных систем, будем пользоваться соответственно выражениями (4.24) и (4.27) вне зависимости от принципиальных схем интеграторов. Принципиальная схема интеграторов в работе не рассматривается.

### § 4.3. Однокомпонентный гироскопический измеритель абсолютной угловой скорости

Прибор представляет собой астатический гироскоп с двумя степенями свободы, схема которого изображена на рис. 4.5. Кожух гироскопа с вращающимся внутри ротором (собственно гироскопом) может поворачиваться вокруг оси  $y$  относительно корпуса прибора. Вращению кожуха противодействуют момент от сил натяжения пружины и момент сил от демпфирующего устройства.

Демпфирующее устройство на рисунке не показано. Выходом прибора является угол  $\beta$  поворота кожуха гироскопа вокруг оси  $y$ , преобразованный датчиком угла в надлежащую физическую величину. Угол  $\beta$  отсчитывается от нейтрального положения, в котором момент от сил натяжения пружины равняется нулю. Ось  $x$ , перпендикулярная оси кожуха и оси ротора (ось  $z'$  при  $\beta = 0$ )\*, является измерительной осью прибора, а ось  $z$  — осью перекрестной связи. Очевидно, оси  $x$  и  $z$  жестко связаны с корпусом прибора. Можно показать, что прибор измеряет проекцию  $\omega_x$  вектора  $\omega$  абсолютной угловой скорости на измерительную ось прибора. Если период собственных колебаний подвижной части прибора достаточно мал по отношению к характеристическому времени изменения величины  $\omega_x$  и угол  $\beta$  достаточно мал во всем рабочем диапазоне изменения  $\omega_x$ , то выходная величина гироскопа  $\tilde{\omega}_x$ , приведенная к размерности угловой скорости, будет определяться выражением

$$\tilde{\omega}_x = h_T \cdot \omega_x. \quad (4.28)$$

Выражение (4.28) является математической моделью гироскопического измерителя абсолютной угловой скорости. Номинальное значение, масштабного коэффициента  $h_T$  должно равняться единице, т. е.  $h_T^* = 1$ . При варьировании равенства (4.28) получим уравнение ошибок гироскопического измерителя, которое будем записывать в виде

$$\Delta \omega_x = \omega_x \delta h_T + \delta \omega_x. \quad (4.29)$$

\*) Ось  $x'$ , перпендикулярная оси кожуха и оси ротора при любом  $\beta$  является осью чувствительности гироскопа с двумя степенями свободы.

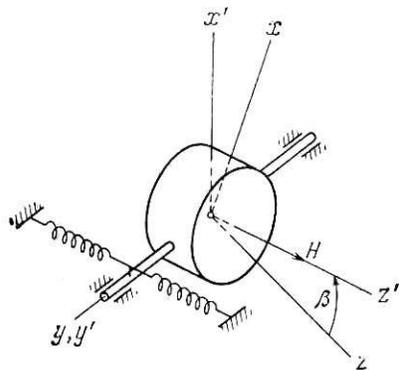


Рис. 4.5. Схема однокомпонентного гироскопического измерителя абсолютной угловой скорости.

Величина  $\delta \omega_x$  называется *смещением нуля гироскопического измерителя* или его *собственным дрейфом* вокруг измерительной оси, а  $\delta h_T$  — *ошибкой масштабного коэффициента*  $h_T$ .

Моделями (4.28), (4.29) будем пользоваться в дальнейшем независимо от принципиальной схемы прибора. Принципиальные схемы прибора и методы технической реализации в работе не рассматриваются.

### § 4.4. Гиросtabilизированные платформы

Для стабилизации акселерометров в пространстве используется гироскопическая платформа, которая материализует опорную систему координат на борту объекта.

Гироскопические платформы имеют по крайней мере три вращательные степени свободы относительно объекта, которые обеспечивают возможность сохранить платформе неизменное положение в пространстве при изменении угловой ориентации объекта. Гироскопические платформы бывают двух типов: в одних используются три гироскопа с двумя степенями свободы, в других — два гироскопа с тремя степенями свободы. Степени свободы определяются относительно самой платформы. В первом случае гироскопы работают в режиме силовой стабилизации, а при малых значениях собственного момента  $H$  в режиме индикаторно-силовой стабилизации, во втором случае они работают в индикаторном режиме.

Все необходимые математические модели выведем на примере гироскопической платформы с индикаторно-силовой стабилизацией, получившей весьма широкое распространение. Схема такой гироскопической платформы представлена на рис. 4.6.

Стабилизируемый элемент (собственно платформа) с установленными на ней гироскопами и акселерометрами подвешен в системе кардановых колец, которые обеспечивают ему три степени свободы. Такая схема удобна для материализации горизонтальных трехгранников, у которых одна ось направлена вдоль местной вертикали того или иного вида, а основным режимом движения объекта является крейсерский, т. е. режим горизонтального движения с постоянной скоростью вдоль заданной траектории. Одна ось стабилизированного элемента (ось  $z_p$ ) будет направлена по местной вертикали, а остальные оси кардановых колец будут находиться вблизи плоскости горизонта. На осях кардановых колец установлены разгрузочные двигатели, которые и предназначены для парирования возмущающих моментов внешних сил, приложенных к платформе.

На платформе установлены два гироскопа с вертикальными осями прецессии (оси кожухов) и один с горизонтальной осью. Первые два гироскопа обычно называют *горизонтальными*, третий — *азимутальным*; на осях прецессии гироскопов монтируются

датчик момента и датчик угла. Нейтральным положением гироскопов считается такое положение, при котором с датчиков углов снимаются нулевые сигналы. Оси чувствительности гироскопов в нейтральном положении перпендикулярны друг другу \*). Эти оси

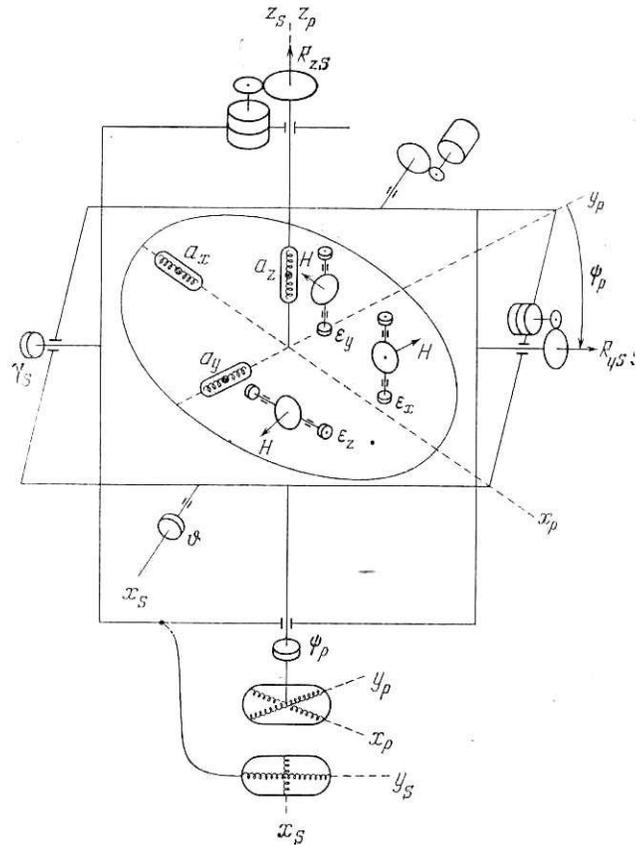


Рис. 4.6. Схема индикаторно-силовой гиросtabilизированной платформы.

образуют прямоугольную систему координат  $x_p y_p z_p$ , жестко связанную с платформой (см. рис. 4.6). Оси  $x_p, y_p, z_p$  будем называть осями платформы. Гироскопы, оси чувствительности которых в нейтральном положении параллельны осям  $x_p, y_p, z_p$ , будем называть  $x$ -гироскопом,  $y$ -гироскопом,  $z$ -гироскопом соответственно. Сигналы, снимаемые с датчиков углов гироскопов, пропорциональные углам  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ , используются для управления разгрузочными

\*) См. § 4.3.

двигателями. Сигнал, снимаемый с  $z$ -гироскопа, непосредственно управляет вертикальным разгрузочным двигателем. Горизонтальные гироскопы управляют остальными двумя двигателями через преобразователь координат. Это делается для того, чтобы избежать потери устойчивости при изменении курса объекта. Управление угловым положением платформы осуществляется через датчики момента гироскопов. По внешним (относительно платформы) сигналам эти датчики развивают моменты вдоль осей кожухов гироскопов, которые называются *корректирующими*. Корректирующие моменты вызывают прецессию платформы вокруг осей чувствительности гироскопов, которые с точностью до малых углов  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  совпадают с осями платформы  $x_p, y_p, z_p$ .

К гироскопам могут быть приложены и паразитные моменты, имеющие составляющие вдоль осей кожухов. Паразитные моменты обуславливаются наличием трения в осях кожухов, натяжением токоподводов, статической несбалансированностью относительно оси кожуха, неравножесткостью конструкции кожуха с ротором и рядом других причин. Эти моменты вызывают неконтролируемую прецессию платформы, которую называют ее *собственным дрейфом*. Собственный дрейф может также возникать, если из-за несовершенства контура стабилизации оси кожухов гироскопов вместе с платформой будут совершать конические движения. Такой дрейф платформы часто называют *кинематическим*.

Обозначим через  $\omega_p$  вектор абсолютной угловой скорости вращения платформы, а через  $\omega_{xp}, \omega_{yp}, \omega_{zp}$  его проекции на оси платформы  $x_p, y_p, z_p$ . Тогда, пренебрегая малыми углами  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  поворота гироскопов относительно платформы, которые возникают в процессе парирования внешних моментов, запишем уравнения контура коррекции в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega_{xp} &= \frac{M_{kx}}{H} + \delta\omega_x, \\ \omega_{yp} &= \frac{M_{ky}}{H} + \delta\omega_y, \\ \omega_{zp} &= \frac{M_{kz}}{H} + \delta\omega_z, \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

где  $M_{kx}, M_{ky}, M_{kz}$  — корректирующие моменты, развиваемые датчиками моментов  $x$ -гироскопа,  $y$ -гироскопа,  $z$ -гироскопа соответственно, а  $\delta\omega_x, \delta\omega_y, \delta\omega_z$  — проекции скорости собственного дрейфа гиросtabilизированной платформы на ее оси.

Пусть  $x, y, z$  — опорная система координат (из числа рассмотренных в предыдущих главах), которую должен моделировать трехгранник  $x_p y_p z_p$ , связанный с платформой, а  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — проекции абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_p y_p z_p$  на оси  $x, y, z$ . Контур коррекции должен обеспечить вращение гиросtabilизированной платформы в

пространстве с указанными скоростями  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , поэтому корректирующие моменты должны формироваться соответственно с выражениями

$$M_{kx} = k \cdot \tilde{\omega}_x, M_{ky} = k \cdot \tilde{\omega}_y, M_{kz} = k \cdot \tilde{\omega}_z, \quad (4.31)$$

где  $\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z$  — расчетные значения  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , которые вырабатываются в вычислителе инерциальной системы и на его выходе преобразовываются в физические сигналы, способные управлять датчиками моментов гироскопов, а  $k$  — крутизна характеристик датчиков моментов по этим сигналам. Номинальное значение  $k = k^*$  должно совпадать с номинальным значением собственного момента гироскопов  $H = H^*$ . Если подставить (4.31) в (4.30) и ввести обозначения для безразмерного масштабного коэффициента контура коррекции

$$h_k = \frac{k}{H}, \quad (4.32)$$

то уравнения (4.30) переписутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_p} &= h_k \cdot \tilde{\omega}_x + \delta\omega_x, \\ \omega_{y_p} &= h_k \cdot \tilde{\omega}_y + \delta\omega_y, \\ \omega_{z_p} &= h_k \cdot \tilde{\omega}_z + \delta\omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Номинальное значение  $h_k = h_k^* = 1$ . Ошибка  $\delta h_k$  масштабного коэффициента  $h_k$  равняется алгебраической сумме относительных ошибок величин  $k$  и  $H$ , т. е.

$$\delta h_k = \frac{\delta k}{k^*} - \frac{\delta H}{H^*}. \quad (4.34)$$

Эта формула получается из цепочки равенств

$$h_k = 1 + \delta h_k = \frac{k}{H} = \frac{k^* + \delta k}{H^* + \delta H} = \frac{k^*}{H^*} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\delta k}{k^*}\right)}{\left(1 + \frac{\delta H}{H^*}\right)} \approx 1 + \frac{\delta k}{k^*} - \frac{\delta H}{H^*}.$$

При малых рассогласованиях координатных систем  $x_p y_p z_p$  и  $x y z$ , характеризуемых углами  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , проекции  $\omega_{x_p}, \omega_{y_p}, \omega_{z_p}$  будут определяться формулами (3.145). Если учесть этот факт, то уравнения (4.33) переписутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_1 + \omega_x + \gamma_3 \omega_y - \gamma_2 \omega_z &= (1 + \delta h_k) \tilde{\omega}_x + \delta\omega_x, \\ \dot{\gamma}_2 + \omega_y + \gamma_1 \omega_z - \gamma_3 \omega_x &= (1 + \delta h_k) \tilde{\omega}_y + \delta\omega_y, \\ \dot{\gamma}_3 + \omega_z + \gamma_2 \omega_x - \gamma_1 \omega_y &= (1 + \delta h_k) \tilde{\omega}_z + \delta\omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

В идеальном случае, когда  $\delta h_k = 0, \delta\omega_x = \delta\omega_y = \delta\omega_z = 0$  и расчетные величины  $\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z$  равняются истинным значениям

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , уравнения (4.35) сводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_1 + \gamma_3 \omega_y - \gamma_2 \omega_z &= 0, \\ \dot{\gamma}_2 + \gamma_1 \omega_z - \gamma_3 \omega_x &= 0, \\ \dot{\gamma}_3 + \gamma_2 \omega_x - \gamma_1 \omega_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Система уравнений (4.36) имеет тривиальное решение

$$\gamma_1(t) \equiv 0, \gamma_2(t) \equiv 0, \gamma_3(t) \equiv 0. \quad (4.37)$$

Это решение удовлетворяет нулевым начальным условиям, т. е.

$$\gamma_1(0) = 0, \gamma_2(0) = 0, \gamma_3(0) = 0. \quad (4.38)$$

Решение, удовлетворяющее начальным условиям (4.38), по теореме единственности решений линейных дифференциальных уравнений тождественно совпадает с решением (4.37). Таким образом, если при  $t = 0$  совместить оси  $x_p, y_p, z_p$  гироскопической платформы с осями  $x, y, z$  опорного трехгранника  $x y z$ , который эта гироскопическая платформа моделирует, то при идеальных условиях трехгранники  $x_p y_p z_p$  и  $x y z$  будут совпадать для любого момента времени  $t > 0$ . Физическое выполнение условий (4.38) называется *начальной выставкой гироскопической платформы*.

Кроме гироскопов на платформе устанавливаются два или три акселерометра так, чтобы их измерительные оси были параллельны осям платформы  $x_p, y_p, z_p$ . Кроме того, на осях кардановых колец устанавливаются датчики углов, которые определяют угловую ориентацию объекта. Для самолета таковыми будут: гироскопический курс  $\psi_p$ , угол тангажа  $\vartheta$  и угол крена  $\gamma_s$ .

## § 5.1. Классификация инерциальных систем

**5.1.1. Общие положения.** Изложенный материал создает необходимые предпосылки для разработки алгоритмов инерциальных систем, проведения моделирования этих алгоритмов и анализа методических и инструментальных ошибок. Однако, прежде чем перейти к рассмотрению важнейших типов инерциальных систем, остановимся сначала на некоторых общих чертах, присущих большинству инерциальных систем, и для упрощения дальнейшего изложения условимся в специальной терминологии. В инерциальных системах будем различать два ортогональных трехгранника, которые будем условно называть *опорным* и *навигационным*.

В настоящее время в инерциальных системах используются два или три однокомпонентных акселерометра с взаимно перпендикулярными измерительными осями. Будем считать, что измерительные оси акселерометров устанавливаются параллельно ребрам опорного трехгранника. Может быть, точнее сказать, что ребра трехгранника указывают направления, параллельно которым с надлежащей точностью должны быть установлены измерительные оси акселерометров. Очевидно, в любой инерциальной навигационной системе опорный трехгранник должен быть реализован на борту объекта. Во всех инерциальных системах опорные трехгранники либо физически реализуются гиросtabilизированными платформами, либо они жестко связаны с самим объектом. В этом втором случае, очевидно, акселерометры жестко связываются с объектом. Инерциальные навигационные системы, не имеющие в своем составе гиросtabilизированные платформы, получили наименование *бесплатформенных*.

В инерциальных навигационных системах координаты местоположения объекта получаются двумя способами: в первом случае координаты получаются интегрированием выражений, которые мы называем формулами счисления; во втором случае координаты определяются величинами, характеризующими направление местной вертикали. В формулах счисления координат фигурируют проекции абсолютной или относительной скорости на оси вполне определенной системы координат. Трехгранник, соответствующий

такой системе координат, будем называть *навигационным*. Так, например, в формулах счисления географических координат (долготы и широты) фигурируют проекции относительной скорости на восточную  $x$  и северную  $y$  оси географического сопровождающего трехгранника  $xuz$ . В этом случае географический трехгранник  $xuz$  будем считать навигационным. В некоторых инерциальных системах опорный и навигационный трехгранники совпадают, в других системах они ориентируются в пространстве по-разному; в этом последнем случае необходимо знать матрицу направляющих косинусов для того, чтобы осуществлять преобразование векторов из опорной системы координат в навигационную.

Во втором случае, когда координаты местоположения определяются по ориентации местной вертикали, *навигационной системой координат* будем называть ту систему, в которой определяется ориентация местной вертикали. Так, например, географические долгота  $\lambda$  и широта  $\varphi$  определяют направление местной географической вертикали в экваториальной системе координат  $\xi\eta\zeta$ , жестко связанной с Землей (оси  $\xi$ ,  $\eta$  параллельны плоскости экватора). Система координат  $\xi\eta\zeta$  будет являться в этом случае навигационной. В рассматриваемых системах не обязательно физически реализовать вертикаль на борту объекта. Ее можно задавать аналитически, например, с помощью вычисления направляющих косинусов в навигационной системе координат, т. е. косинусов углов, образованных местной вертикалью с осями навигационной системы координат. По найденным направляющим косинусам можно определить углы ориентации местной вертикали в навигационной системе координат, которые будут являться координатами местоположения объекта. После сделанных предварительных замечаний перейдем к классификации инерциальных систем.

**5.1.2. Классификация инерциальных систем.** К первому классу отнесем инерциальные системы, в которых опорным трехгранником, физически реализуемым гиросtabilизированной платформой, является горизонтальный сопровождающий трехгранник, т. е. трехгранник, одно ребро которого (ось  $z_p$ ) направлено вдоль географической, гравитационной или геоцентрической вертикали. Ориентация горизонтальных осей  $x_p$ ,  $y_p$  заранее не оговаривается. Управление вращением моделирующей гиросtabilизированной платформы осуществляется сигналами, подаваемыми на вход датчиков момента гироскопов платформы. Управляющие сигналы зависят от текущих значений координат местоположения объекта и компонент его скорости движения. Гиросtabilизированная платформа в таких системах является аналоговым счетно-решающим элементом, работающим в замкнутой вычислительной схеме инерциальной системы.

Инерциальные системы такого типа получили наименование *инерциальных систем полуаналитического типа*.

Ко второму классу отнесем системы, в которых абсолютная угловая скорость опорного трехгранника является заданной функцией времени.

К трехгранникам такого типа относятся, например, экваториальные трехгранники  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  и  $\xi \eta \zeta$ . Первый из них неподвижен в инерциальном пространстве, второй вращается с постоянной угловой скоростью — скоростью вращения Земли — вокруг оси  $\zeta$ . В таких системах ориентация опорного трехгранника не зависит ни от местоположения объекта, ни от характера его движения. Опорный трехгранник реализуется на объекте гиросtabilизированной платформой, но управление ее ориентацией теперь осуществляется сигналами, вырабатываемыми временным программным устройством. Гиросtabilизированная платформа физически реализует на объекте некоторую базисную систему координат. Эту систему координат можно принять за навигационную систему координат, в которой можно определять местоположение объекта. Если в системах рассматриваемого вида местная вертикаль определяется аналитически, то тогда инерциальные системы второго класса называются *системами аналитического типа*.

К третьему классу отнесем системы, в которых гиросtabilизированная платформа материализует на объекте опорный и навигационный трехгранники, как и в предыдущем случае, но, в отличие от него, в системах третьего класса местная вертикаль физически реализуется на объекте с помощью специального построителя вертикали.

Системы этого класса называют *инерциальными системами геометрического типа*. В таких системах координаты местоположения объекта определяются углами, которые образует физически реализованная ось местной вертикали с материализованными платформой, осями и плоскостями навигационной системы координат. Эти углы измеряются соответствующими датчиками.

И наконец, к четвертому классу отнесем системы, в которых опорный треугольник жестко связывается с самим объектом. Ориентация опорного трехгранника в пространстве относительно некоторой базисной координатой системы может быть определена по известным проекциям абсолютной угловой скорости опорного трехгранника на его собственные оси.

Эти проекции могут быть измерены тремя однокомпонентными гироскопическими измерителями абсолютной угловой скорости, измерительные оси которых установлены вдоль соответствующих осей опорного трехгранника. Возможны и другие решения. Ориентацию опорного трехгранника, а следовательно, и объекта можно также определять с помощью надлежащего числа свободных гироскопов, установленных на объекте.

Как указывалось, системы четвертого класса называют *бесплатформенными инерциальными навигационными системами* (БИНС).

Остальные разделы настоящей главы посвятим разбору алгоритмов инерциальных систем различных классов.

В общем случае под *алгоритмом* понимается совокупность операций, которая позволяет из условий  $A$  получить результат  $B$ .

Алгоритмы инерциальных систем определяют совокупность аналитических зависимостей, которые позволяют по входным данным системы (начальной выставки и показаниям чувствительных элементов — акселерометров и гироскопов) определять ее выходные величины (координаты местоположения, компоненты скорости движения и ориентацию объекта в пространстве). Алгоритмы удобно изображать с помощью блок-схем, носящих название *моделирующих схем*. Моделирующая схема устанавливает связь между элементами, причем считается, что соответствующие выбранному алгоритму операции элементы совершают идеально, т. е. без каких-либо погрешностей. Анализ влияния погрешностей реальных элементов на точность определения выходных величин системы будет проведен в следующей главе.

## § 5.2. Инерциальные системы полуаналитического типа

**5.2.1. Инерциальная система с географическим навигационным и географическим опорным трехгранниками.** В рассматриваемой инерциальной системе опорным трехгранником является географический трехгранник *xyz*.

Ребро  $z$  этого трехгранника направлено по географической вертикали, ось  $y$  — по касательной к меридиану на север, ось  $x$  — по касательной к параллели на восток. Местоположение объекта будем определять географическими долготой  $\lambda$  и широтой  $\varphi$ , а также параметром высоты  $h$ . Вследствие этого в рассматриваемой системе опорный и навигационный трехгранники, очевидно, будут совпадать друг с другом.

Будем строить алгоритм системы в предположении, что объект совершает горизонтальное движение на высоте  $h$ , т. е. движется по поверхности  $h$ -эллипсоида (параметр  $h$  определяется барометрическим высотомером). При сделанных предположениях инерциальная система может содержать два акселерометра с горизонтальными измерительными осями. Показания акселерометров в данном случае удобно выражать через проекции относительной скорости. Алгоритм системы должен содержать аналитические выражения, определяющие абсолютную угловую скорость опорного трехгранника, выражения для горизонтальных составляющих кажущихся ускорений и формулы счисления географических координат.

Проекции абсолютной угловой скорости географического трехгранника *xyz* на его ребра записываются в соответствии с (1.130)

В виде

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= -\frac{v_y}{R_2}, \\ \omega_y &= U \cos \varphi + \frac{v_x}{R_1}, \\ \omega_z &= U \sin \varphi + \frac{v_x}{R_1} \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  определяются (1.97) в виде

$$R_1 = \frac{a+h}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}, \quad R_2 = \frac{(a+h)(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (5.2)$$

Проекция кажущегося ускорения  $a_x, a_y$ , в идеальном случае непосредственно измеряемые акселерометрами, определяются из (3.53), если там опустить индексы  $i$  и  $m$  и положить  $v_z = 0$  \*). Учитывая это обстоятельство и разрешая соответствующие выражения относительно  $\dot{v}_x, \dot{v}_y$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_x &= a_x + (U \sin \varphi + \omega_z) v_y, \\ \dot{v}_y &= a_y - (U \sin \varphi + \omega_z) v_x. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Формулы счисления  $\lambda$  и  $\varphi$  по (1.402) записываются в виде

$$\dot{\lambda} = \frac{v_x}{R_1 \cos \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{v_y}{R_2}. \quad (5.4)$$

Третья формула (1.402) указывает, что при  $h = \text{const}$  имеем  $v_z \equiv \equiv 0$ . Аналитические зависимости (5.1) — (5.4) определяют алгоритм рассматриваемой инерциальной системы. Уравнения (5.3) и второе уравнение (5.4) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений. Решение этой системы определяют  $v_x, v_y$  и  $\varphi$  как функций времени. Первое уравнение (5.4) решается простой квадратурой после того, как найдено решение указанной выше системы. При нахождении решений уравнений (5.3) и (5.4) считается, что  $a_x$  и  $a_y$  являются известными функциями времени. Кроме того, должны быть заданы начальные условия, т. е. должны быть известны при  $t = 0$  значения  $v_x, v_y, \lambda$  и  $\varphi$ . На рис. 5.1 представлена схема, моделирующая алгоритм инерциальной системы \*\*). По этой схеме опорный трехгранник моделируется гиросtabilизированной платформой индикаторно-силового типа, которая была рассмотрена в п. 4.5.1. На рис. 5.1 в схематизированном виде указаны только элементы контура коррекции (двухстепенные гироскопы с датчиками моментов) такой платформы и установленные на ней два

\*) В горизонтальном движении  $v_z \equiv 0$ .

\*\*\*) В схеме рис. 5.1 использованы обозначения, вытекающие из (1.134):

$$\omega_x' = -v_y/R_2, \quad \omega_y' = v_x/R_1, \quad \omega_z' = v_x/R_1 \operatorname{tg} \varphi = \omega_y' \operatorname{tg} \varphi.$$

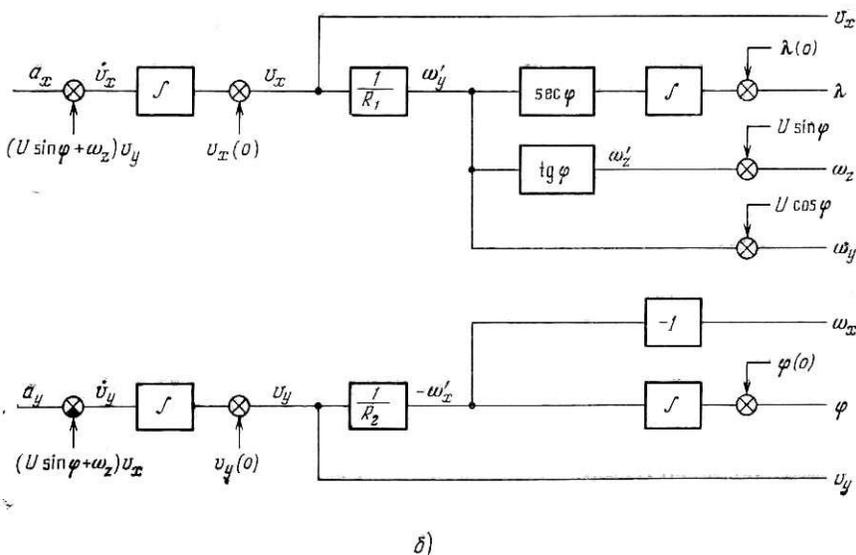
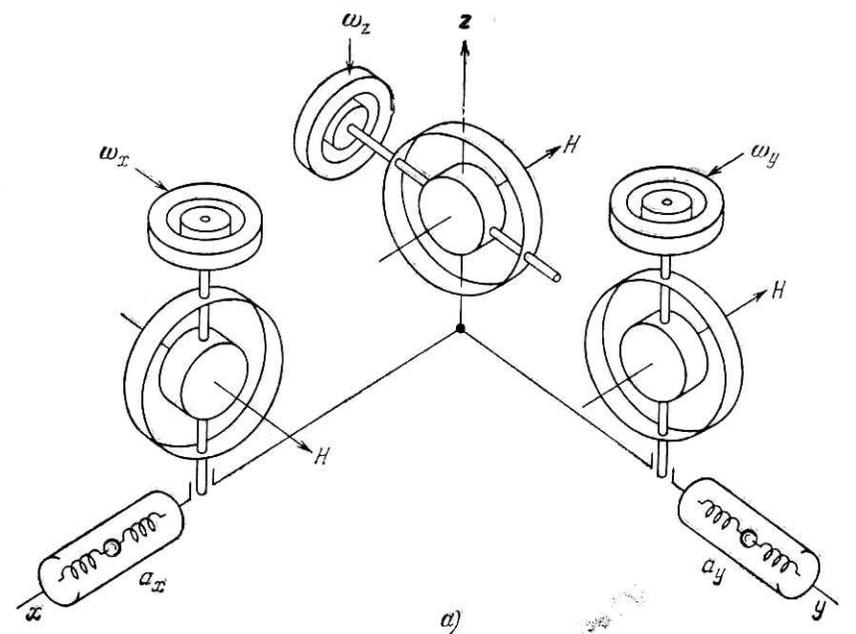
однокомпонентных акселерометра. Управление вращением платформы в пространстве с угловыми скоростями  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  осуществляется через датчики моментов гироскопов. Соответствующие управляющие сигналы, подаваемые на датчики моментов, формируются самой инерциальной системой. Для извлечения из показаний акселерометров  $a_x$  и  $a_y$  информации о величинах  $\dot{v}_x, \dot{v}_y$  на вход первых интеграторов в каналах долготы и широты подаются компенсирующие сигналы, указанные на рис. 5.1. Эти сигналы также формируются инерциальной системой.

Для определения радиусов кривизны  $R_1$  и  $R_2$  требуется сигнал о параметре высоты  $h$ , который вводится в инерциальную систему от барометрического высотомера. Ввод начальных данных  $v_x(0), v_y(0), \lambda(0), \varphi(0)$  осуществляется начальной выставкой интеграторов первой и второй степеней. Все управляющие и компенсирующие сигналы формируются специальным вычислителем аналогового или цифрового типа по выходным сигналам инерциальной системы  $v_x v_y v_z$  и сигналу высотомера  $h$ .

Для правильной работы инерциальной системы требуется еще начальная выставка платформы, сводящаяся к совмещению осей стабилизированной платформы (в п. 4.5.1 их обозначили через  $x_p, y_p, z_p$ ) с осями опорной системы координат  $x_{yz}$ . Достоинство инерциальной системы рассматриваемого типа заключается в том, что стабилизированная платформа материализует на объекте местную вертикаль и направление на север. С этой платформы непосредственно снимаются сигналы, определяющие угол тангажа, угол крена и истинный курс объекта \*). Таким образом, инерциальная система рассматриваемого типа выдает полную навигационную информацию, т. е. она определяет координаты местоположения объекта ( $\varphi, \lambda$ ), компоненты путевой скорости ( $v_x, v_y$ ) и угловую ориентацию объекта в пространстве.

**5.2.2. Инерциальная система с географическим навигационным и азимутально-свободным опорным трехгранниками.** Рассмотрим инерциальную систему с азимутально-свободным опорным трехгранником, одно из ребер которого направлено вдоль географической вертикали. Раньше такой трехгранник мы обозначали через  $x_c y_c z_c$ . Остальные общие условия работы, изложенные в предыдущем пункте, сохраним без изменения. В данном случае опорный трехгранник  $x_c y_c z_c$  и навигационный трехгранник  $x_{yz}$  не совпадают друг с другом. Рассогласование трехгранников  $x_c y_c z_c$  и  $x_{yz}$  характеризуется одним углом  $\chi_c$ , так как ребра  $z_c$  и  $z$  направлены вдоль географической вертикали и совпадут друг с другом. Угол  $\chi_c$  образуют между собой ребра  $y_c$  и  $y$ . Угол  $\chi_c$  считается положительным, когда ось  $y_c$  ( $x_c$ ) повернута относительно оси  $y$  ( $x$ ) по

\*) Напомним, что истинным курсом называется угол между направлением на север и проекцией продольной оси объекта на плоскость горизонта.



б)

часовой стрелке, если смотреть сверху. Рассмотрим два варианта алгоритма инерциальной системы, которые естественно приводят к одному и тому же конечному результату, но они отличаются последовательностью и видом промежуточных операций.

Первый вариант алгоритма. Азимутально-свободный трехгранник не вращается вокруг вертикали, поэтому для него  $\omega_{zc} \equiv 0$ . Горизонтальные проекции  $\omega_{xc}$  и  $\omega_{yc}$  его абсолютной угловой скорости определяются из первых двух формул (1.149) или (3.55), если в них заменить нижний индекс  $o$  на  $c$  и опустить верхний индекс  $i$ . Тогда проекции абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_c y_c z_c$  на его собственные ребра определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \omega_{xc} &= -U \cos \varphi \sin \chi_c - \left( \frac{v_{yc}}{R_{yc}} - \frac{v_{xc}}{R_c} \right), \\ \omega_{yc} &= U \cos \varphi \cos \chi_c + \left( \frac{v_{xc}}{R_{xc}} - \frac{v_{yc}}{R_c} \right), \\ \omega_{zc} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

где в соответствии с (1.146) и при оговоренных выше условиях относительно индексов

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_{yc}} &= \frac{\cos^2 \chi_c}{R_2} + \frac{\sin^2 \chi_c}{R_1}, \\ \frac{1}{R_{xc}} &= \frac{\sin^2 \chi_c}{R_2} + \frac{\cos^2 \chi_c}{R_1}, \\ \frac{1}{R_c} &= \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin \chi_c \cos \chi_c. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

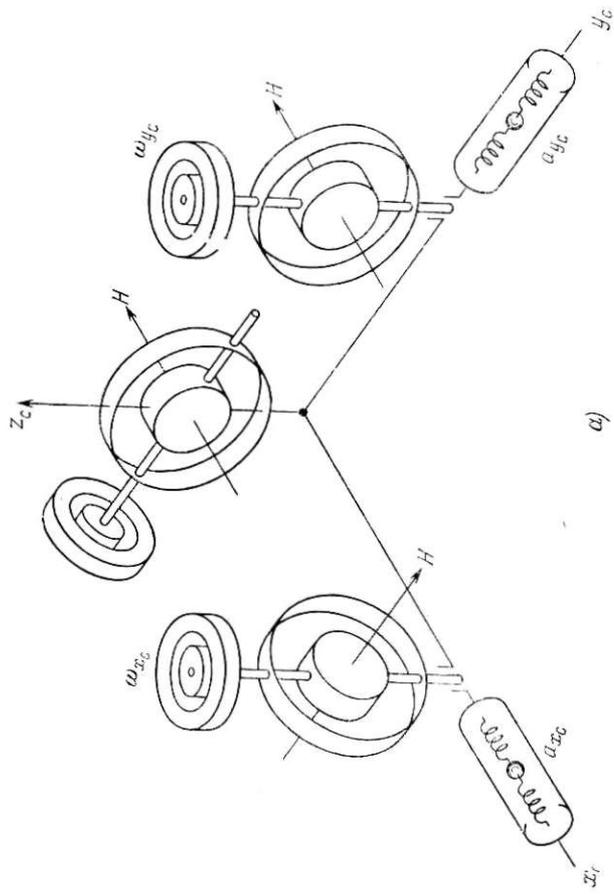
Горизонтальные проекции кажущегося ускорения  $a_{xc}$  и  $a_{yc}$  которые непосредственно измеряются акселерометрами, определяются (3.64). Это уравнение разрешим относительно  $\dot{v}_{xc}$  и  $\dot{v}_{yc}$ , и запишем их в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_{xc} &= a_{xc} + U v_{yc} \sin \varphi, \\ \dot{v}_{yc} &= a_{yc} - U v_{xc} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Проекции относительной (путевой) скорости  $v_x$  и  $v_y$  на оси навигационной системы координат  $x$  и  $y$  получаются по формулам преобразования

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{xc} \cos \chi_c + v_{yc} \sin \chi_c, \\ v_y &= -v_{xc} \sin \chi_c + v_{yc} \cos \chi_c. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Рис. 5.1. а) Кинематическая схема гиростабилизированной платформы б) Блок-схема (алгоритм). Полуаналитическая инерциальная система с географическим опорным и навигационным трехгранниками.



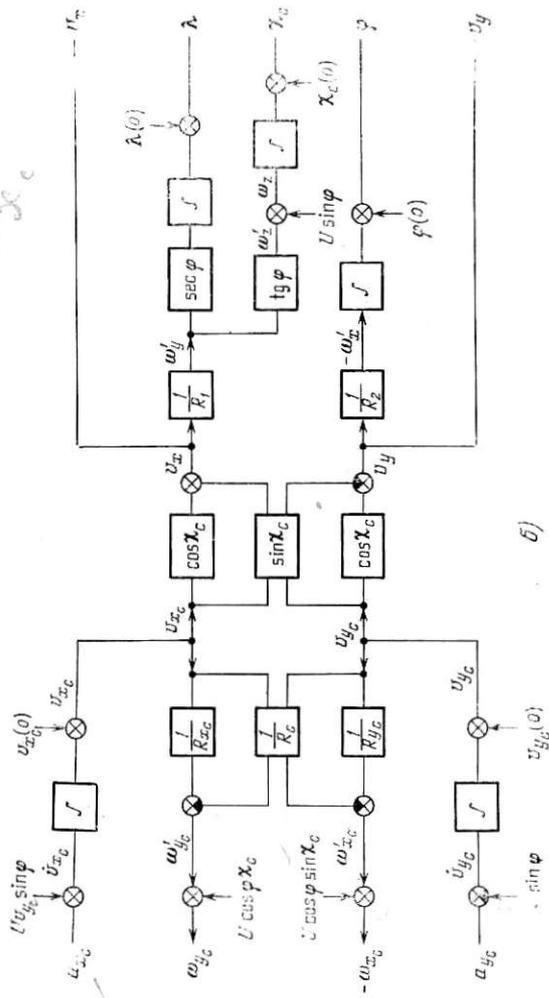
а)

Handwritten notes and equations:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

Coordinate axes x, y, z and x\_c, y\_c, z\_c are indicated.



б)

Рис. 5.2. а) Кинематическая схема гиросtabilизированной платформы. б) Блок-схема (алгоритм). Полуаналитическая инерциальная система с азимутально-свободным опорным и географическим навигационным трехгранниками (I вариант).

Угол  $\chi_c$  рассогласования осей  $y_c (x_c)$  и  $y (x)$  получим из (3.66), в котором следует опустить верхний индекс  $i$  и заменить индекс  $m$  на  $c$ . Продифференцируем (3.66) и, замечая, что  $\omega_{z_c} = 0$ , получим выражение

$$\dot{\chi}_c = \omega_z = U \sin \varphi + \frac{v_x}{R_1} \operatorname{tg} \varphi^* \quad (5.9)$$

Формулы счисления координат  $\lambda$  и  $\varphi$  определяются равенствами (5.4), а радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$  главных сечений  $h$ -эллипсоида — формулами (5.2). Приведенные аналитические зависимости определяют первый вариант алгоритма рассматриваемой системы. Соотношения (5.2), (5.7), (5.8) и (5.9) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений, в которой  $a_{x_c}$  и  $a_{y_c}$ , определяемые акселерометрами, считаются известными функциями времени. Для нахождения решений данной системы  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\lambda(t)$  и  $\chi_c(t)$  необходимо задать начальные условия, т. е. значения этих функций при  $t = 0$ :  $v_x(0)$ ,  $v_y(0)$ ,  $\varphi(0)$ ,  $\lambda(0)$  и  $\chi_c(0)$ .

Схема, представленная на рис. 5.2, моделирует первый вариант алгоритма. Особых пояснений эта схема не требует. Укажем только на ее некоторые особенности, которые влияют на условия работы отдельных элементов системы. В рассматриваемой системе гиросtabilизированная платформа не управляется в азимуте, поэтому к датчику момента азимутального гироскопа и к его кинетическому моменту не предъявляется дополнительных требований как к элементам интегрирующей схемы. Кроме того, следует напомнить, что в выражении для  $\omega_z$  (третья формула (5.1)) входит множитель  $\operatorname{tg} \varphi$ , который на полюсах Земли превращается в бесконечность; следовательно, для обеспечения функционирования системы в высоких широтах потребовался бы датчик момента большой мощности, для которого очень трудно получить стабильную линейную характеристику. Второе важное отличие состоит в начальной выставке платформы в азимуте. Теперь не нужно физически совмещать одну из осей платформы с направленной на север осью  $y$ , а достаточно только определить в момент времени, принимаемый за начальный, угол  $\chi_c(0)$ , который образует ось платформы  $y_p$  с направлением на север, и ввести его в счетно-решающее устройство. Это обстоятельство, как мы увидим ниже, оказывает существенное влияние на принцип построения системы начальной выставки платформы. И наконец, следует указать, что в данном случае с соответствующего датчика угла платформы непосредственно можно снять только показания о «гироскопическом курсе» объекта  $\psi_p$ , его истинный курс  $\psi_K$  получается как алгебраическая сумма углов  $\psi_p$  и  $\chi_c$ . Последний из них определяется в счетно-решающем устройстве.

\* ) См. (5.1).

Второй вариант алгоритма обеспечивается следующими аналитическими зависимостями. Проекция  $a_{x_c}$  и  $a_{y_c}$  кажущегося ускорения, определяемые непосредственно акселерометрами, используются для нахождения соответствующих проекций  $a_x$  и  $a_y$  на оси  $x$  и  $y$  навигационной системы координат  $xyz$ . По формулам преобразования, аналогичным (5.8), имеем

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a_{x_c} \cos \chi_c + a_{y_c} \sin \chi_c, \\ a_y &= -a_{x_c} \sin \chi_c + a_{y_c} \cos \chi_c. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Дальше мы определяем  $\dot{v}_x$  и  $\dot{v}_y$  по формулам (5.3),  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{\varphi}$  по формулам (5.4),  $\dot{\chi}_c$  по формуле (5.9) и, наконец, проекции абсолютной угловой скорости трехгранника  $xyz$ , равные  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , по формулам (5.1). После этого проекции  $\omega_{x_c}$  и  $\omega_{y_c}$  абсолютной угловой скорости азимутально-свободного опорного трехгранника, с которой должна вращаться в пространстве гиросплатформа, будут определяться по  $\omega_x$  и  $\omega_y$  обратными формулами преобразования координат, т. е. выражениями вида

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_c} &= \omega_x \cos \chi_c - \omega_y \sin \chi_c, \\ \omega_{y_c} &= \omega_x \sin \chi_c + \omega_y \cos \chi_c. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Дело в том, что  $\omega_{x_c}$ ,  $\omega_{y_c}$  и  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  являются проекциями на горизонтальные оси  $x_c$ ,  $y_c$  и  $x$ ,  $y$  абсолютной угловой скорости вращения совпадающих между собой и с географической вертикалью осей  $z_c$  и  $z$ .

Второй вариант алгоритма системы моделируется схемой, изображенной на рис. 5.3. Модели, представленные на рис. 5.2 и 5.3, отличаются счетно-решающими устройствами, или, точнее говоря, операциями, которые эти устройства выполняют.

В частности, во втором варианте алгоритма отпадает необходимость в определении величин  $R_{x_c}$ ,  $R_{y_c}$  и  $R_c$  из (5.6).

Выбор первого и второго вариантов алгоритма должен быть обоснован тщательным анализом проводимых операций при учете имеющихся вычислительных средств и их особенностей.

В заключение мы составим как бы гибридную схему инерциальной системы. Моделирующая схема такой системы приведена на рис. 5.4. По этой схеме, как и в первом варианте алгоритма, сначала определяются проекции скорости  $v_{x_c}$ ,  $v_{y_c}$  на оси опорной системы, а затем по формулам преобразования — проекции  $v_x$  и  $v_y$  на оси навигационной (географической) системы координат. Проекция абсолютной угловой скорости опорного трехгранника  $\omega_{x_c}$ ,  $\omega_{y_c}$  на его ребра определяются так же, как и во втором варианте алгоритма, т. е. преобразованием ранее найденных величин  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ .

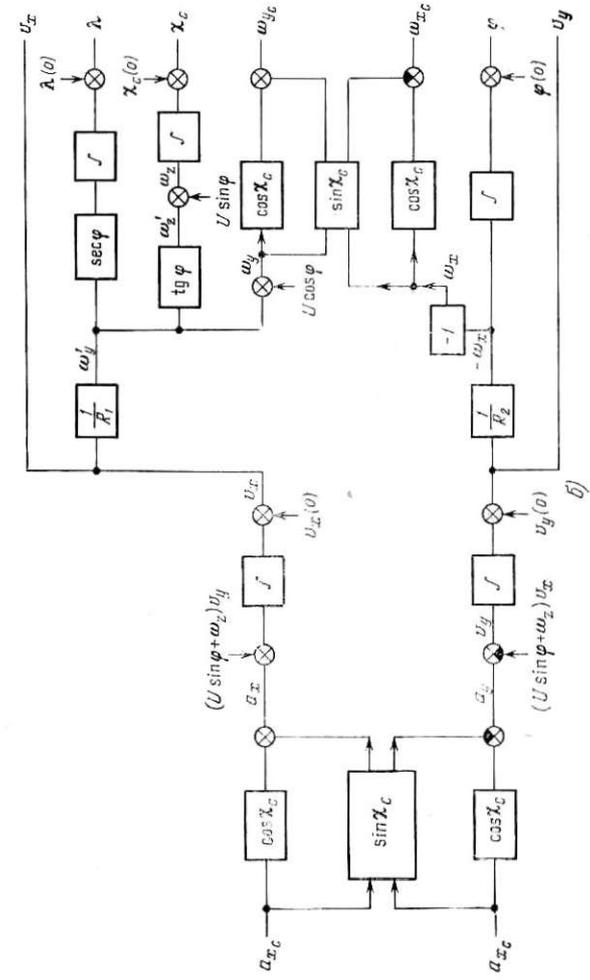
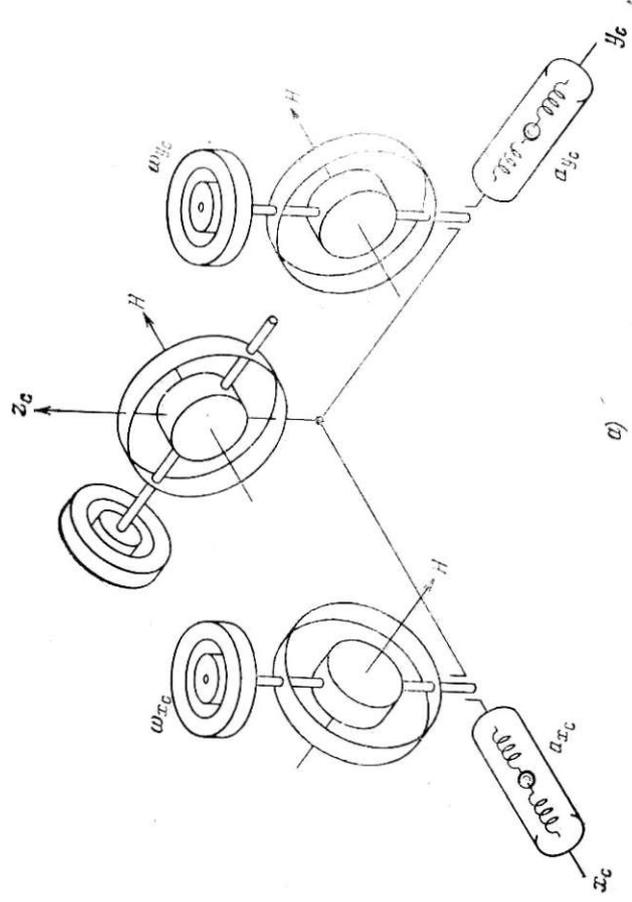


Рис. 5.3. а) Кинематическая схема гиросtabilизированной платформы. б) Блок-схема (алгоритм). Полуаналитическая инерциальная система с азимутально-свободным опорным и географическим навигационным трехгранниками (II вариант).

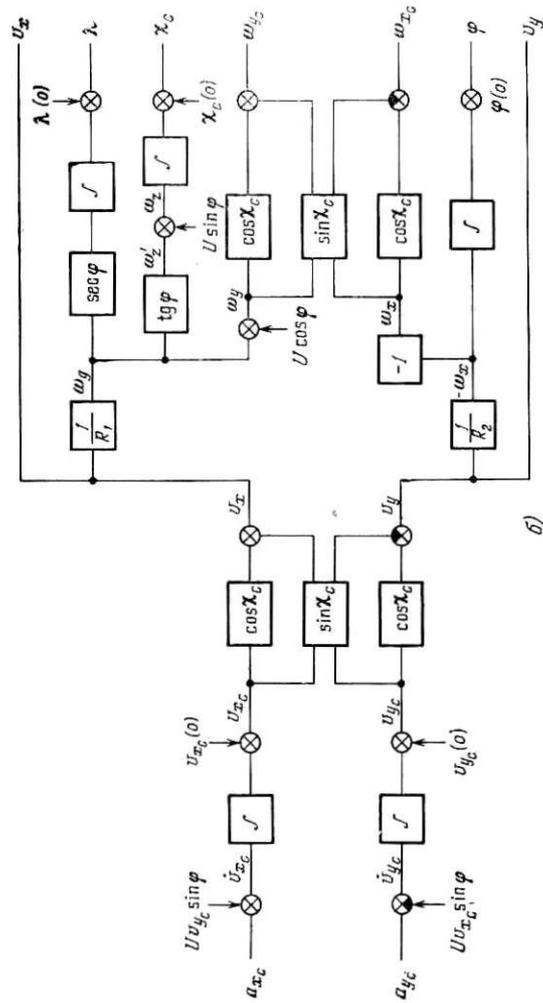
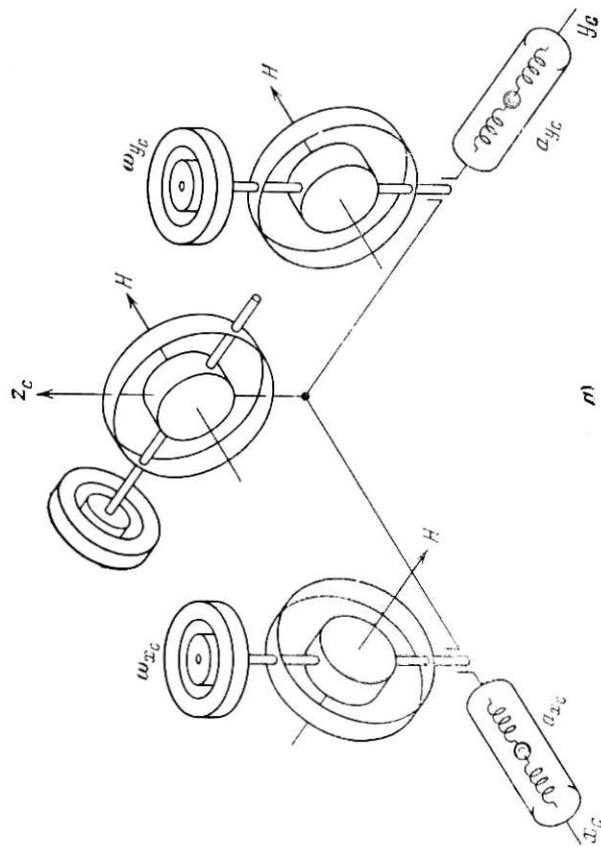


Рис. 5.4. а) Кинематическая схема гиросtabilизированной платформы. б) Блок-схема (алгоритм). Полуаналитическая инерциальная система с азимутально-свободным опорным и географическим навигационным трехгранниками (III вариант).

Из сравнения схем, приведенных на рис. 5.3 и 5.4, можно заключить, что во втором случае несколько проще выражения для компенсирующих сигналов, подаваемых на вход интеграторов первой ступени. Кроме того, следует отметить, что в схемах рис. 5.3 и 5.4 предусмотрен ввод начальных значений скоростей в различных системах координат: в географической  $v_x(0)$ ,  $v_y(0)$  на рис. 5.3 и в азимутально-свободной  $v_{x_c}(0)$  и  $v_{y_c}(0)$  на рис. 5.4.

Искусство проектирования состоит в том, чтобы из нескольких вариантов моделирующих схем выбрать наилучшую с точки зрения возможности удовлетворить целому комплексу требований технического задания на разработку системы. Эти вопросы не обсуждаются в данной работе.

**5.2.3. Инерциальная система с ортодромическим навигационным и ортодромическим опорным трехгранниками.** Географическая координатная сетка имеет особые точки, которые совпадают с полюсами Земли; вблизи полюсов затруднительно считать долготу  $\lambda$ . В ортодромической системе координат можно избежать таких затруднений, если ортодромический экватор выбирать таким образом, чтобы движение объекта происходило в достаточном удалении от его полюсов. Ортодромические системы координат были рассмотрены в п. 1.3.9.

Здесь мы рассмотрим инерциальную систему, в которой опорным трехгранником служит ортодромический трехгранник  $x_0y_0z_0$ , т. е. трехгранник с ребром  $z_0$ , направленным вдоль географической вертикали, и ребрами  $x_0$ ,  $y_0$ , соответственно направленными вдоль ортодромической параллели (на условный восток) и вдоль ортодромического меридиана (на условный север) — см. п. 1.3.9. В качестве навигационного трехгранника выберем тот же ортодромический трехгранник  $x_0y_0z_0$ . Следовательно, инерциальная система данного типа будет являться обобщением инерциальной системы, рассмотренной в п. 3.2.1. Построим алгоритм рассматриваемой системы. Проекция  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$  абсолютной угловой скорости опорного трехгранника  $x_0y_0z_0$  получаем из (1.149) в виде \*)

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0} &= -U \cos \varphi \sin \chi_0 - \left( \frac{v_{y_0}}{R_{y_0}} - \frac{v_{x_0}}{R_0} \right), \\ \omega_{y_0} &= U \cos \varphi \cos \chi_0 + \left( \frac{v_{x_0}}{R_{x_0}} - \frac{v_{y_0}}{R_0} \right), \\ \omega_{z_0} &= U \sin \varphi + \left( \frac{v_{x_0}}{R_{x_0}} - \frac{v_{y_0}}{R_0} \right) \operatorname{tg} \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

\*) В (1.144) следует опустить верхний индекс  $i$ .

где  $R_{y_0}$ ,  $R_{x_0}$ ,  $R_0$  определяются в соответствии с (1.146) выражениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_{y_0}} &= \frac{\cos^2 \chi_0}{R_2} + \frac{\sin^2 \chi_0}{R_1}, \\ \frac{1}{R_{x_0}} &= \frac{\sin^2 \chi_0}{R_2} + \frac{\cos^2 \chi_0}{R_1}, \\ \frac{1}{R_0} &= \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin \chi_0 \cos \chi_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Выражения (5.13) мы преобразуем к более удобному виду. Пользуясь формулами (5.2), представим (5.13) в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_{y_0}} &= \frac{1}{R_1} \left( 1 + \frac{e^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \chi_0}{1 - e^2} \right), \\ \frac{1}{R_{x_0}} &= \frac{1}{R_1} \left( 1 + \frac{e^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \chi_0}{1 - e^2} \right), \\ \frac{1}{R_0} &= \frac{1}{R_1} \cdot \frac{e^2 \cos^2 \varphi \cos \chi_0 \sin \chi_0}{1 - e^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

В формулах (5.12) и (5.14)  $\sin \chi_0$  и  $\cos \chi_0$  встречаются только с множителем  $\cos \varphi$ , кроме того, в них еще фигурирует  $\sin \varphi$ .

Для формирования соответствующих величин мы можем воспользоваться соотношениями (1.137) и (1.138), опустив в них верхний индекс  $i$ . Так, получим выражения

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \sin \varphi_{\Pi} \sin \Phi + \cos \varphi_{\Pi} \cos \Phi \sin \Lambda, \\ \cos \varphi \sin \chi_0 &= -\cos \varphi_{\Pi} \cos \Lambda, \\ \cos \varphi \cos \chi_0 &= \sin \varphi_{\Pi} \cos \Phi - \cos \varphi_{\Pi} \sin \Phi \sin \Lambda, \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

в которых географическая широта северного полюса ортодромии  $\varphi_{\Pi}$  считается известной. Формулы (5.14) и (5.15) позволяют в конечном итоге выразить  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$  через выходные величины инерциальной системы: ортодромические координаты местоположения объекта  $\Lambda$ ,  $\Phi$  и компоненты относительной (путевой) скорости  $v_{x_0}$ ,  $v_{y_0}$ .

Напомним, что параметр высоты  $h$  определяется барометрическим высотомером. Проекция  $a_{x_0}$ ,  $a_{y_0}$  кажущегося ускорения можно получить из (3.53), если заменить индекс  $m$  на  $o$ , опустить верхний индекс  $i$  и положить вертикальную составляющую скорости  $v_{z_0}$  равной нулю, так как мы условились рассматривать горизонтальное движение объекта; при указанных условиях из (3.53)

непосредственно получаем

$$\left. \begin{aligned} a_{x_0} &= \dot{v}_{x_0} - (U \sin \varphi + \omega_{z_0}) v_{y_0}, \\ a_{y_0} &= \dot{v}_{y_0} + (U \sin \varphi + \omega_{z_0}) v_{x_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Если разрешить (5.16) относительно  $\dot{v}_{x_0}$ ,  $\dot{v}_{y_0}$ , то получим выражения

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_{x_0} &= a_{x_0} + (U \sin \varphi + \omega_{z_0}) v_{y_0}, \\ \dot{v}_{y_0} &= a_{y_0} - (U \sin \varphi + \omega_{z_0}) v_{x_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

и, наконец, в соответствии с (1.148) получим формулы счисления координат  $\Lambda$  и  $\Phi$  в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Lambda} &= \left( \frac{v_{x_0}}{R_{x_0}} - \frac{v_{y_0}}{R_0} \right) \sec \Phi, \\ \dot{\Phi} &= \left( \frac{v_{y_0}}{R_{y_0}} - \frac{v_{x_0}}{R_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Совокупность аналитических зависимостей (5.12), (5.14), (5.15), (5.17), (5.18) образует алгоритм рассматриваемой системы.

Правые части уравнений (5.15) и (5.18) являются функциями  $v_{x_0}$ ,  $v_{y_0}$ ,  $\Phi$  и  $\Lambda$ , кроме величины  $a_{x_0}$ ,  $a_{y_0}$ , которые являются выходными величинами акселерометров и считаются в (5.17) и (5.18) известными функциями времени. Таким образом, (5.17) и (5.18) образуют нелинейную систему дифференциальных уравнений, решение которых, удовлетворяющее заданным начальным условиям  $v_{x_0}(0)$ ,  $\dot{v}_{y_0}(0)$ ,  $\Phi(0)$  и  $\Lambda(0)$ , определяет выходные величины инерциальной системы  $v_{x_0}$ ,  $v_{y_0}$ ,  $\Phi$  и  $\Lambda$ . Алгоритм ортодромической инерциальной системы моделируется системой, представленной на рис. 5.5. Опорный трехгранник моделируется гиросtabilизированной платформой, управление вращением которой в абсолютном пространстве, так же как и в предыдущих случаях, осуществляется через датчики моментов, установленных на осях прецессии (осях кожухов) гироскопов. Прохождение сигналов и управляющих величин наглядно представлено на рис. 5.5 и дополнительных пояснений не требует. Укажем только на то, что в схеме рис. 5.5 используются величины  $\omega'_{x_0}$ ,  $\omega'_{y_0}$ ,  $\omega'_{z_0}$  — проекции относительной угловой скорости трехгранника  $x_0 y_0 z_0$ . Эти проекции в соответст-

вии с (1.142) и (1.148) определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}'_{x_0} &= - \left( \frac{v_{y_0}}{R_{y_0}} - \frac{v_{x_0}}{R_0} \right), \\ \dot{\omega}'_{y_0} &= \left( \frac{v_{x_0}}{R_{x_0}} - \frac{v_{y_0}}{R_0} \right), \\ \dot{\omega}'_{z_0} &= \dot{\omega}'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

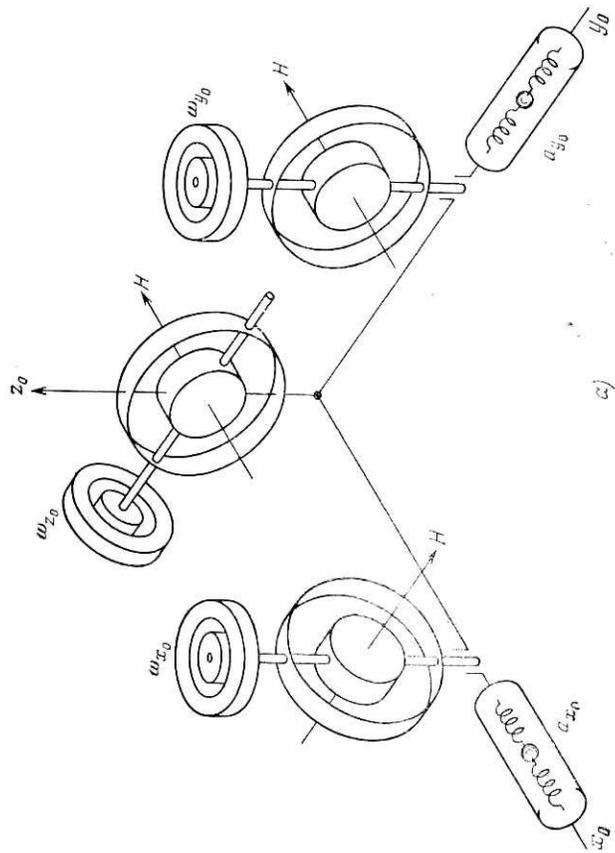
Инерциальная система выдает информацию о координатах местоположения объекта  $\Lambda$ ,  $\Phi$ , компонентах путевой скорости  $v_{x_0}$ ,  $v_{y_0}$  и ориентации объекта в пространстве. Ориентация объекта определяется углами тангажа, крена и истинным ортодромическим курсом  $\Psi_K$ . Истинный ортодромический курс  $\Psi_K$  определяется углом, который образует проекция продольной оси объекта на плоскость горизонта с касательной к ортодромическому меридиану, направленной на условный север, т. е. с осью  $y_0$ . Угол  $\Psi_K$  изменяется от 0 до 360° и считается положительным, когда продольная ось объекта поворачивается от оси  $y_0$  в сторону оси  $x_0$ , т. е. к условному востоку. Все эти углы непосредственно снимаются с датчиков, установленных на осях кардановых колец и вертикальной оси стабилизированной платформы.

Ввиду того, что географические карты обычно изготавливаются в географической координатной сетке, может появиться необходимость в нахождении географических координат  $\lambda$ ,  $\varphi$  проекций путевой скорости  $v_x$  и  $v_y$  истинного курса  $\psi_K$ . Все эти величины являются в данном случае вторичными. Они выражаются через выходные величины рассматриваемой инерциальной системы посредством формул преобразования, представленных в конечном виде. Так,  $v_x$ ,  $v_y$  определяются из формул преобразования координат  $x_0$ ,  $y_0$  и  $x$ ,  $y$ :

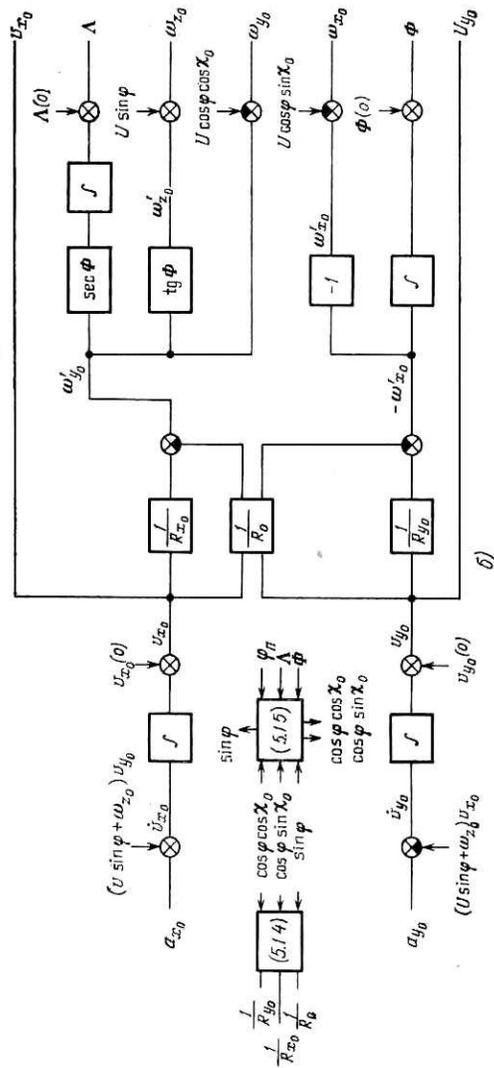
$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{x_0} \cos \chi_0 + v_{y_0} \sin \chi_0, \\ v_y &= -v_{x_0} \sin \chi_0 + v_{y_0} \cos \chi_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Фигурирующий в (5.19) угол  $\chi_0$  можно определить по двум последним формулам (5.15). При их почленном делении друг на друга найдем сначала  $\operatorname{tg} \chi_0$  или  $\operatorname{ctg} \chi_0$ , по величине которых определим  $\chi_0$ . Квадрант угла  $\chi_0$  определяется знаками  $\sin \chi_0$  и  $\cos \chi_0$  или знаками правых частей соответствующих выражений (5.15), так как  $\cos \varphi$  всегда больше нуля.

Географическая широта  $\varphi$  определяется из первой формулы (5.15), географическая долгота  $\lambda$  находится (в соответствии с двумя



а)



б)

Рис. 5.5. а) Кинематическая схема гиросtabilизированной платформы. б) Блок-схема (алгоритм). Полуаналитическая инерциальная система с ортодромическим опорным и навигационным трехгранниками.

последними формулами (1.137)) из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sin(\lambda - \lambda_{\Pi}) \cos \Phi &= \cos \Lambda \cos \Phi, \\ \cos(\lambda - \lambda_{\Pi}) \cos \Phi &= \cos \varphi_{\Pi} \sin \Phi - \sin \varphi_{\Pi} \cos \Phi \sin \Lambda, \end{aligned} \right\} (5.21)$$

где географические широта  $\varphi_{\Pi}$  и долгота  $\lambda_{\Pi}$  северного полюса ортодромической системы координат считаются известными величинами.

И наконец, истинный курс  $\psi_k$  объекта, т. е. угол между осью  $u$  и проекцией его продольной оси на плоскость горизонта, находится из соотношения

$$\psi_k = \Psi_k + \chi_o, \quad (5.21a)$$

так как положительные направления измерения всех углов  $\psi_k$ ,  $\Psi_k$  и  $\chi_o$  совпадают. В (5.21a) угол  $\chi_o$  определяется расчетным путем, а  $\Psi_k$  измеряется датчиком угла, установленным на вертикальной оси стабилизированной платформы.

**5.2.4. Инерциальная система с ортодромическим навигационным и азимутально-свободным опорным трехгранниками.** Инерциальная система данного типа является обобщением систем, рассмотренных в двух предыдущих пунктах.

В рассматриваемой системе производится счисление ортодромических координат  $\Lambda$ ,  $\Phi$ , а измерительные оси горизонтальных акселерометров стабилизируются в направлении ребер  $x_c$ ,  $y_c$  азимутально-свободного опорного трехгранника  $x_c y_c z_c$ . Здесь, как и в п. 5.2.2, рассмотрим два варианта алгоритма системы.

Аналитические зависимости для первого варианта алгоритма получим следующим образом. Выражения для проекций  $\omega_{x_c}$ ,  $\omega_{y_c}$ ,  $\omega_{z_c}$  абсолютной угловой скорости опорного трехгранника  $x_c y_c z_c$ , величины  $R_{y_c}$ ,  $R_{x_c}$ ,  $R_o$  и производные  $\dot{v}_{x_c}$ ,  $\dot{v}_{y_c}$  проекций путевой скорости на ребра  $x_c$ ,  $y_c$  определяются теми же соотношениями, что в п. 5.2.2, т. е. формулами (5.5) — (5.7), а формулы счисления координат  $\Lambda$ ,  $\Phi$  в п. 5.2.3 — соотношениями (5.18). Теперь нужно по проекциям  $v_{x_c}$ ,  $v_{y_c}$  путевой скорости на ребра  $x_c$ ,  $y_c$  опорного трехгранника  $x_c y_c z_c$  получить проекции  $v_{x_o}$ ,  $v_{y_o}$  путевой скорости на ребра  $x_o$ ,  $y_o$  навигационного трехгранника  $x_o y_o z_o$ . Проекции  $v_{x_o}$ ,  $v_{y_o}$  фигурируют в формулах (5.18) счисления координат  $\Lambda$ ,  $\Phi$ .

Эта задача решается формулами преобразования координат

$$\left. \begin{aligned} v_{x_o} &= v_{x_c} \cos \chi_{oc} + v_{y_c} \sin \chi_{oc}, \\ v_{y_o} &= -v_{x_c} \sin \chi_{oc} + v_{y_c} \cos \chi_{oc}, \end{aligned} \right\} (5.22)$$

в которых  $\chi_{oc}$  обозначает угол, который образует ребро  $y_c$  с ребром  $y_o$ , причем он считается положительным, когда ребро  $y_c$  отклоняется от ребра  $y_o$  в сторону положительного конца ребра  $x_o$ , т. е. к условному востоку. Угол  $\chi_{oc}$  можно получить из (3.67), если там

опустить верхний индекс  $i$ , заменить индекс  $m$  на  $c$  и помнить, что  $\omega_{z_c} = 0$ . Запишем это выражение в дифференциальной форме. С учетом третьей формулы (5.12)

$$\dot{\chi}_{oc} = U \sin \varphi + \left( \frac{v_{x_o}}{R_{x_o}} - \frac{v_{y_o}}{R_o} \right) \operatorname{tg} \Phi. \quad (5.23)$$

Чтобы (5.23) было эквивалентно интегральной форме (3.6), следует задать начальное условие, т. е.  $\chi_{oc}(0)$ .

Кроме  $\chi_{oc}$  нужно определить также угол  $\chi_c$ , фигурирующий в выражениях (5.5) и (5.6). Его можно получить из (3.68), если там заменить индекс  $m$  на  $c$  и опустить индекс  $i$ . Тогда очевидно, что величины  $\chi_c$ ,  $\chi_o$ ,  $\chi_{oc}$  удовлетворяют соотношениям \*)

$$\chi_c = \chi_o + \chi_{oc}. \quad (5.24)$$

Угол  $\chi_{oc}$  мы определили выше, а угол  $\chi_o$  был найден в п. 5.2.3 (см. формулу (5.15)) и в п. 1.3.9 (см. формулу (1.138)).

Во втором варианте алгоритма, так же как и в п. 5.2.2, проекции кажущегося ускорения  $a_{x_c}$ ,  $a_{y_c}$  на ребра  $x_c$ ,  $y_c$  опорного трехгранника  $x_c y_c z_c$ , которые в идеальном случае непосредственно измеряются горизонтальными акселерометрами, используют для нахождения проекций  $a_{x_o}$ ,  $a_{y_o}$  на ребра  $x_o$ ,  $y_o$  навигационного трехгранника  $x_o y_o z_o$ . Эта задача решается формулами преобразования (см. (3.22))

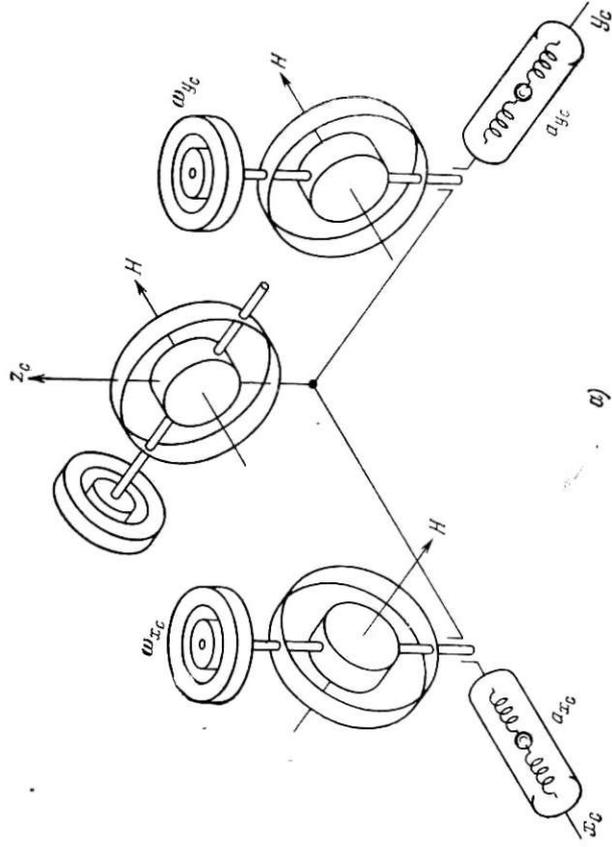
$$\left. \begin{aligned} a_{x_o} &= a_{x_c} \cos \chi_{oc} + a_{y_c} \sin \chi_{oc}, \\ a_{y_o} &= -a_{x_c} \sin \chi_{oc} + a_{y_c} \cos \chi_{oc}, \end{aligned} \right\} (5.25)$$

где угол  $\chi_{oc}$  определяется уравнением (5.23); так как величины  $a_{x_o}$ ,  $a_{y_o}$  найдены, то все дальнейшие зависимости для определения выходных величин  $v_{x_o}$ ,  $v_{y_o}$  и  $\Lambda$ ,  $\Phi$  будут такими, как в предыдущем пункте. А горизонтальные проекции  $\omega_{x_c}$ ,  $\omega_{y_c}$  \*\*) абсолютной угловой скорости опорного трехгранника  $x_c y_c z_c$ , который моделируется стабилизированной платформой, определяются по формулам обратного преобразования в виде

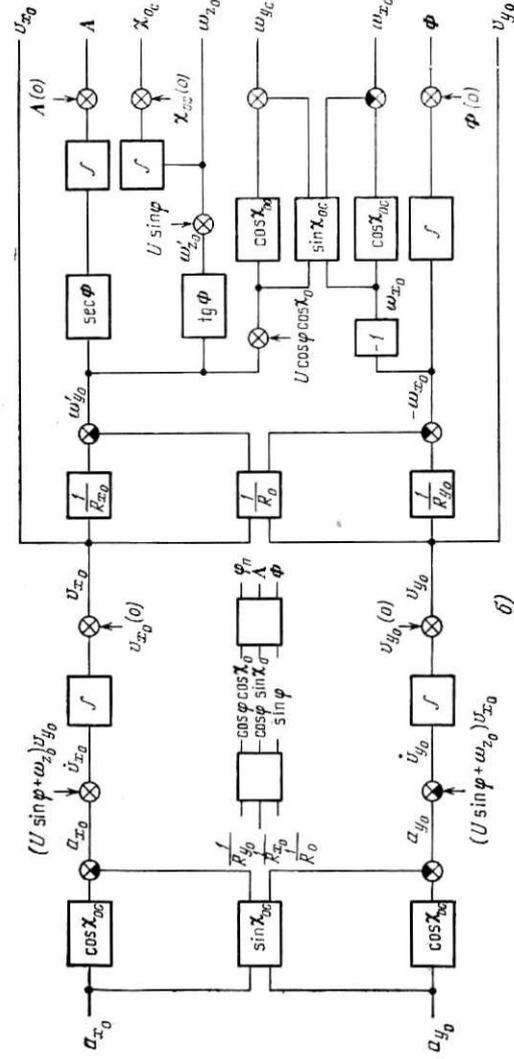
$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_c} &= \omega_{x_o} \cos \chi_{oc} - \omega_{y_o} \sin \chi_{oc}, \\ \omega_{y_c} &= \omega_{x_o} \sin \chi_{oc} + \omega_{y_o} \cos \chi_{oc}. \end{aligned} \right\} (5.26)$$

\*) Определять  $\chi_c$  из (5.9) нельзя, так как там фигурирует  $\operatorname{tg} \Phi$ .

\*\*) Вертикальная проекция  $\omega_{z_c} = 0$ .



а)



б)

Рис. 5.6. а) Кинематическая схема гиросtabilизированной платформы. б) Полуаналитическая инерциальная система с орторсметическим навигационным опорным и азимутально-свободным опорным трехгранником.

Величины  $\omega_{x_c}$ ,  $\omega_{y_c}$  используются для непосредственного формирования управляющих сигналов для датчиков моментов гироскопов стабилизированной платформы.

С платформы мы снимаем «гироскопический курс»  $\Psi_{\Pi}$ , истинный ортодромический курс  $\Psi_K$  получается добавлением к  $\Psi_{\Pi}$  угла  $\chi_{oc}$ , определяемого в счетно-решающем устройстве инерциальной системы, т. е.  $\Psi_K = \Psi_{\Pi} + \chi_{oc}$ . В данном случае отпадает необходимость в определении  $\chi_c$ . На рис. 5.6 приведена моделирующая схема для второго варианта алгоритма. Для первого варианта читателю предлагается построить моделирующую схему самостоятельно.

**5.2.5. Обобщенный алгоритм инерциальной системы.** До сих пор мы рассматривали инерциальные системы с горизонтальными сопровождающими трехгранниками (навигационными и опорными), одно из ребер которых было направлено по географической вертикали. Практическое удобство таких систем состоит в том, что начальное приведение моделирующих платформ в плоскость географического горизонта на неподвижном основании можно осуществить с помощью отвеса или других эквивалентных ему приборов, например акселерометров. Это происходит потому, что с точностью до гравитационных аномалий, на которых мы останавливались в п. 1.2.5, географическая вертикаль, являющаяся нормалью к уровенным  $h$ -эллипсоидам, совпадает с направлением вектора силы тяжести. Однако представляет интерес рассмотреть также инерциальные системы, привязанные к другим видам вертикалей: геоцентрической и гравитационной. Направления геоцентрической и гравитационной вертикалей нельзя установить непосредственными измерениями. Однако для каждой широты места известны углы, которые они составляют с географической вертикалью в плоскости меридиана. Эти углы можно вычислить и построить геоцентрическую и гравитационную вертикали, отправляясь от направления отвеса и направления меридиана.

В этом пункте мы рассмотрим инерциальные системы общего типа, в которых горизонтальные сопровождающие трехгранники одним своим ребром могут быть ориентированы по любой вертикали — географической, геоцентрической или гравитационной. Построим обобщенный алгоритм для таких систем. Мы будем рассматривать два варианта обобщенного алгоритма.

В одном из них проекции кажущегося ускорения будем выражать через компоненты земной относительной скорости  $v$ , а в другом — через компоненты абсолютной скорости движения объекта  $V$ .

Построение обобщенного алгоритма облегчается принятыми в данной работе обозначениями. В формулах для кинематических и геометрических величин мы использовали в обозначениях верхний индекс  $i$ , которому придали следующий смысл. Этот индекс

нужно опускать, когда соответствующие величины рассматриваются в горизонтальной системе координат, привязанной к направлению географической вертикали, и заменять его соответственно на штрих или два штриха, когда система координат ориентирована по геоцентрической или гравитационной вертикали.

В обобщенном алгоритме в качестве первичных координат используем ортодромические координаты  $\Lambda^i, \Phi^i, h$ , а следовательно, навигационным трехгранником будет служить ортодромический трехгранник  $x_0^i y_0^i z_0^i$ . Опорный трехгранник обозначим через  $x_m^i y_m^i z_m^i$ , он будет вращаться в абсолютном пространстве вокруг вертикали  $z_m^i$  с угловой скоростью  $\omega_{z_m^i}$ , которая может зависеть

от координат местоположения объекта и скорости его движения или быть постоянной фиксированной величиной. Такой трехгранник рассматривался в п. 3.3.3.

Будем считать, что высота  $h$  определяется инерциальным методом, для чего предусмотрим в системе третий акселерометр с вертикальной измерительной осью и дополнительный канал двухступенчатого интегрирования.

При конструировании алгоритма инерциальной системы необходимо решить вопрос об этапе, на котором следует из выражений для проекции кажущегося ускорения выделить производные проекции соответствующей скорости, чтобы интегрированием последних получить проекции самой скорости движения объекта. Такую операцию можно произвести как в осях опорной системы координат, так и в осях навигационной системы координат, предварительно преобразовав в нее кажущееся ускорение, непосредственно измеряемое акселерометрами в проекциях на оси опорной системы координат.

В п. 5.2.2 для конкретной инерциальной системы мы привели алгоритм для обоих возможных случаев. Как уже упоминалось раньше, для решения этого вопроса следует оценить степень сложности всей совокупности аналитических зависимостей и подсчитать количество самостоятельных вычислительных операций, которые необходимо выполнить в обоих случаях.

Важную роль в выборе соответствующего пути конструирования алгоритма играет степень сложности выражений для самих проекций кажущегося ускорения на оси указанных выше систем координат.

Для обобщенного случая, видимо, удобней пойти по второму пути, т. е. сначала преобразовать проекции  $a_{x_m^i}^i, a_{y_m^i}^i, a_{z_m^i}^i$  кажущегося ускорения на оси опорной системы координат в проекции  $a_{x_0^i}^i, a_{y_0^i}^i, a_{z_0^i}^i$  на оси навигационной, ортодромической системы координат  $x_0^i y_0^i z_0^i$ .

Первый вариант алгоритма. Соответствующие формулы преобразования имеют вид

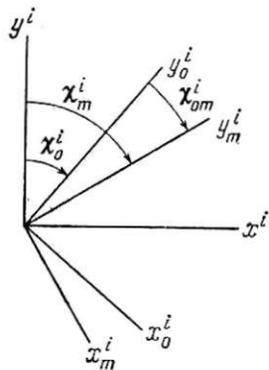


Рис. 5.7. Взаимная ориентация «горизонтальных» осей географического ортодромического и опорного трехгранников в азимуте.

$$\left. \begin{aligned} a_{x_o^i} &= a_{x_m^i} \cos \chi_{om}^i + a_{y_m^i} \sin \chi_{om}^i, \\ a_{y_o^i} &= -a_{x_m^i} \sin \chi_{om}^i + a_{y_m^i} \cos \chi_{om}^i. \end{aligned} \right\} (5.27)$$

Вертикальные составляющие во всех горизонтальных системах координат совпадают, т. е.  $a_{z_o^i} = a_{z_m^i} = a_z^i$ . Смысл фигурирующего здесь угла  $\chi_{om}^i$  и углов  $\chi_o^i$ ,  $\chi_m^i$ , встречающихся ниже, рассмотрен в п. 3.3.3 и дополнительно разъяснен рис. 5.7.

Проекции  $a_{x_o^i}$ ,  $a_{y_o^i}$ ,  $a_{z_o^i}$  выражаются через соответствующие компоненты относительной (земной) скорости и их производные по формулам (3.53), если в них нижний индекс  $m$  заменить на  $o$ . Разрешая эти уравнения относительно производных  $\dot{v}_{x_o^i}$ ,  $\dot{v}_{y_o^i}$ ,  $\dot{v}_{z_o^i}$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{v}_{x_o^i} &= a_{x_o^i} + (U \sin \varphi^i + \omega_{z_o^i}^i) v_{y_o^i}^i - (U \cos \varphi^i \cos \chi_o^i + \omega_{y_o^i}^i) v_{z_o^i}^i + \\ &\quad + g \sin (\varphi - \varphi^i) \sin \chi_o^i, \\ \dot{v}_{y_o^i} &= a_{y_o^i} - (U \sin \varphi^i + \omega_{z_o^i}^i) v_{x_o^i}^i - (U \cos \varphi^i \sin \chi_o^i - \omega_{x_o^i}^i) v_{z_o^i}^i - \\ &\quad - g \sin (\varphi - \varphi^i) \cos \chi_o^i, \\ \dot{v}_{z_o^i} &= a_{z_o^i} + \frac{v_{y_o^i}^i}{R_{y_o^i}^i} + \frac{v_{x_o^i}^i}{R_{x_o^i}^i} + 2U v_{x_o^i}^i \cos \varphi^i - g \cos (\varphi - \varphi^i). \quad \square \end{aligned} \quad (5.28)$$

В соответствии с (1.146)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_{y_o^i}^i} &= \frac{\cos^2 \chi_o^i}{R_2^i} + \frac{\sin^2 \chi_o^i}{R_1^i}, \\ \frac{1}{R_{x_o^i}^i} &= \frac{\sin^2 \chi_o^i}{R_2^i} + \frac{\cos^2 \chi_o^i}{R_1^i}, \\ \frac{1}{R_o^i} &= \left( \frac{1}{R_2^i} - \frac{1}{R_1^i} \right) \cos \chi_o^i \sin \chi_o^i. \end{aligned} \right\} (5.29)$$

В каждом конкретном случае (5.29) можно преобразовать таким образом, чтобы в них  $\chi_o^i$  встречался только в выражениях  $\cos \varphi^i \cdot \cos \chi_o^i$  и  $\cos \varphi^i \sin \chi_o^i$ . Для географической вертикали мы это доказали в п. 5.2.3, получив формулы (5.14), для геоцентрической вертикали (1.35) имеем  $R_1^i = R_2^i = r$ , вследствие чего

$$\frac{1}{R_{y_o^i}^i} = \frac{1}{R_{x_o^i}^i} = \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{R_o^i} = 0, \quad (5.30)$$

для гравитационной вертикали в соответствии с (1.135) и (1.147)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_{y_o^i}^i} &= \frac{1}{a+h} (1 + \alpha \cos^2 \varphi'' \cos^2 \chi_o''), \\ \frac{1}{R_{x_o^i}^i} &= \frac{1}{a+h} (1 + \alpha \cos^2 \varphi'' \sin^2 \chi_o''), \\ \frac{1}{R_o^i} &= \frac{1}{a+h} \alpha \cos^2 \varphi'' \cos \chi_o'' \sin \chi_o''. \end{aligned} \right\} (5.31)$$

При этом  $R_1$  (1.97) и  $r$  (1.17) фактически зависят от  $\sin^2 \varphi$ ,  $\sin^2 \varphi'$ . Выражения  $\sin \varphi^i$ ,  $\cos \varphi^i$ ,  $\cos \varphi^i \sin \chi_o^i$  и  $\cos \varphi^i \cos \chi_o^i$ , необходимые для вычисления  $1/R_{y_o^i}^i$ ,  $1/R_{x_o^i}^i$ ,  $1/R_o^i$ , определяются формулами преобразования (1.137) вида

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi^i &= \sin \varphi_{\Pi}^i \sin \Phi^i + \cos \varphi_{\Pi}^i \cos \Phi^i \sin \Lambda^i, \\ \cos \varphi^i \sin \chi_o^i &= -\cos \varphi_{\Pi}^i \cos \Lambda^i, \\ \cos \varphi^i \cos \chi_o^i &= \sin \varphi_{\Pi}^i \cos \Phi^i - \cos \varphi_{\Pi}^i \sin \Phi^i \sin \Lambda^i, \end{aligned} \right\} (5.32)$$

где  $\varphi_{\Pi}^i$  — соответствующая широта северного полюса ортодромической координатной сетки.

Угол  $\chi_o^i$  можно получить по значениям  $\operatorname{tg} \chi_o^i$  или  $\operatorname{ctg} \chi_o^i$ , которые получаются почленным делением двух последних выражений (5.32). Угол  $\chi_{om}^i$  между осью  $y_o^i$  навигационного, ортодромического трехгранника и осью  $y_m^i$  опорного трехгранника (рис. 5.7) получается из уравнения

$$\chi_{om}^i = \omega_{z_o^i}^i - \omega_{z_m^i}^i = U \sin \varphi^i + \left( \frac{v_{x_o^i}^i}{R_{x_o^i}^i} - \frac{v_{y_o^i}^i}{R_o^i} \right) \operatorname{tg} \Phi^i - \omega_{z_m^i}^i, \quad (5.33)$$

которое является результатом дифференцирования равенства (3.68). Здесь следует задать начальное условие: значение угла  $\chi_{om}^i$  при  $t = 0$ , т. е.  $\chi_{om}^i(0)$ .

Формулы счисления координат  $\Lambda^i, \Phi^i$  определяются (1.149):

$$\left. \begin{aligned} \Lambda^i &= \left( \frac{v_{x_0}^i}{R_{x_0}^i} - \frac{v_{y_0}^i}{R_{y_0}^i} \right) \sec \Phi^i, \\ \Phi^i &= \left( \frac{v_{y_0}^i}{R_{y_0}^i} - \frac{v_{x_0}^i}{R_{x_0}^i} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

а высота  $h$  — (1.1226):

$$\dot{h} = \frac{1}{\kappa} [v_{y_0}^i \sin(\varphi - \Phi^i) + v_{z_0}^i \cos(\varphi - \Phi^i)], \quad (5.35)$$

где  $\kappa = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ .

Для вертикальных составляющих скорости имеет место равенство  $v_z = v_{z_0}$ . Горизонтальные составляющие скорости  $v_x^i$  и  $v_y^i$ , фигурирующие в (5.28) и (5.35), можно определить из формул преобразования

$$\left. \begin{aligned} v_x^i &= v_{x_0}^i \cos \chi_0^i + v_{y_0}^i \sin \chi_0^i, \\ v_y^i &= -v_{x_0}^i \sin \chi_0^i + v_{y_0}^i \cos \chi_0^i. \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Теперь нужно выразить ускорение силы тяжести  $g$  через координаты  $\Phi^i$  и  $h$ . Это выражение в соответствии с (1.66) можно записать в виде

$$g = g_{\infty} \frac{a^2}{(a+h)^2} (1 + \beta \sin^2 \Phi^i), \quad (5.37)$$

где  $\beta = 5,317 \cdot 10^{-3}$ ,  $g_{\infty} = 978,049$  см/с<sup>2</sup>,  $a = 6378,245$  км. Строго говоря, в (5.37) должна фигурировать геоцентрическая широта  $\varphi'$ . Однако с небольшой погрешностью  $g$  можно определять по одной и той же формуле (5.37) для  $\varphi, \varphi'$  и  $\varphi''$ , ошибки при этом не будут превосходить  $\beta \alpha g = 1,7 \cdot 10^{-5} g$  для  $\Phi^i = \varphi$  и  $0,5 \beta \alpha g = 0,85 \cdot 10^{-5} g$  для  $\Phi^i = \varphi''$ . В первом случае горизонтальные составляющие  $a_{x_m}, a_{y_m}$  кажущегося ускорения вообще не зависят от величины  $g$ . В выражениях  $g \sin(\varphi - \Phi^i) \sin \chi_0^i, g \sin(\varphi - \Phi^i) \cos \chi_0^i, g \cos(\varphi - \Phi^i)$ , встречающихся в (5.28), с точностью до величины порядка  $10^{-5} g$  можно полагать  $\sin(\varphi - \Phi^i) = e^2 \sin \varphi' \cos \varphi', \cos(\varphi - \Phi^i) = 1$  и с точностью  $0,5 \cdot 10^{-5} g$  считать  $\sin(\varphi - \varphi'') = \alpha \sin \varphi'' \cos \varphi'', \cos(\varphi - \varphi'') = 1$ . Тогда указанные выше выражения будут зависеть от  $\sin \Phi^i, \cos \Phi^i \sin \chi_0^i, \cos \Phi^i \cos \chi_0^i$ , встречающихся и в других зависимостях алгоритма системы.

И, наконец, следует определить проекции абсолютной угловой скорости опорного трехгранника  $x_m^i, y_m^i, z_m^i$  на его собственные ребра, чтобы рассматривать соответствующие вращения моделирующей гиросплатформы в пространстве. Эти величины мы получим следующим образом. Сначала вычислим проекции абсолютной угловой скорости  $\omega_{x_0}^i, \omega_{y_0}^i$  на оси навигационной, ортодромической системы координат по формулам

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0}^i &= -U \cos \varphi^i \sin \chi_0^i - \left( \frac{v_{y_0}^i}{R_{y_0}^i} - \frac{v_{x_0}^i}{R_{x_0}^i} \right), \\ \omega_{y_0}^i &= U \cos \varphi^i \cos \chi_0^i + \left( \frac{v_{x_0}^i}{R_{x_0}^i} - \frac{v_{y_0}^i}{R_{y_0}^i} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

а затем по формулам обратного преобразования

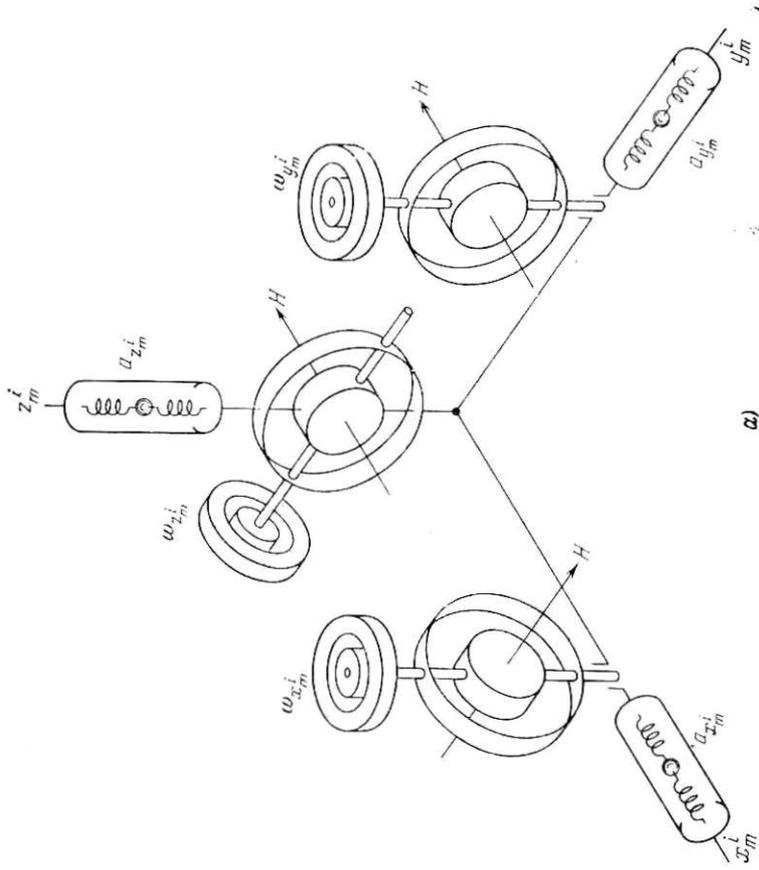
$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_m}^i &= \omega_{x_0}^i \cos \chi_{0m}^i - \omega_{y_0}^i \sin \chi_{0m}^i, \\ \omega_{y_m}^i &= \omega_{x_0}^i \sin \chi_{0m}^i + \omega_{y_0}^i \cos \chi_{0m}^i \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

определим горизонтальные проекции абсолютной угловой скорости опорного трехгранника  $x_m^i, y_m^i, z_m^i$  на его ребра  $x_m^i, y_m^i$ . Все слагаемые в (5.38) фактически уже известны, они встречаются в приведенных выше зависимостях. Величина  $\omega_{z_m}^i$  зависит от конкретного выбора вращения опорного трехгранника в азимуте. Величина  $\omega_{z_m}^i$  может определяться по одной из формул (3.56) — (3.56г).

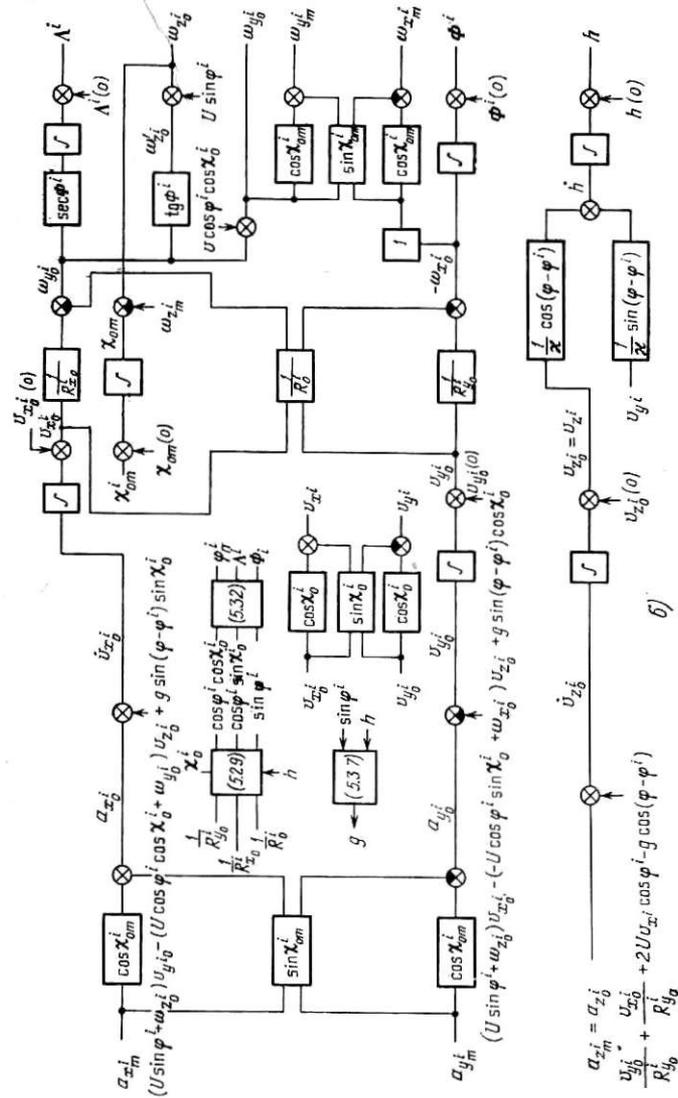
Схема, моделирующая рассмотренный алгоритм, приведена на рис. 5.8.

Второй вариант алгоритма. Во втором варианте алгоритма мы опять исходные величины  $a_{x_m}^i, a_{y_m}^i$  преобразуем в  $a_{x_0}^i, a_{y_0}^i$  по формулам (5.27), а затем выразим  $a_{x_0}^i, a_{y_0}^i$  через компоненты абсолютной скорости и их производные. Мы воспользуемся формулами (3.54) и в соответствии с ними при замене индекса  $m$  на  $o$  сформируем выражения в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_{x_0}^i &= a_{x_0}^i + \omega_{z_0}^i V_{y_0}^i - \omega_{y_0}^i V_{z_0}^i + g' \sin(\varphi'' - \Phi^i) \sin \chi_0^i, \\ \dot{V}_{y_0}^i &= a_{y_0}^i - \omega_{z_0}^i V_{x_0}^i + \omega_{x_0}^i V_{z_0}^i - g' \sin(\varphi'' - \Phi^i) \cos \chi_0^i, \\ \dot{V}_{z_0}^i &= a_{z_0}^i + \frac{V_{y_0}^i{}^2}{R_{y_0}^i} + \frac{V_{x_0}^i{}^2}{R_{x_0}^i} - g' \cos(\varphi'' - \Phi^i). \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$



а)



б)

Рис. 5.8. а) Кинематическая схема гиросtabilизированной платформы. б) Блок-схема (алгоритм). Полуаналитическая инерциальная система обобщенного типа (I вариант).

Обобщенные выражения  $1/R_{y_0}^i, 1/R_{x_0}^i, 1/R_0^i$  определяются формулами (5.29) — (5.32).

Угол  $\chi_{om}^i$  получаем из уравнения (5.33), только там  $\omega_{z_0}^i$  выразим по третьей формуле (4.150). Тогда

$$\dot{\chi}_{om} = \omega_{z_0}^i - \omega_{z_m}^i = U \cos \Phi^i \frac{\sin \Lambda^i}{\cos \Phi^i} + \left( \frac{V_{x_0}^i}{R_{x_0}^i} - \frac{V_{y_0}^i}{R_0^i} \right) \operatorname{tg} \Phi^i - \omega_{z_m}^i. \quad (5.41)$$

Проекция абсолютной угловой скорости  $\omega_{x_c}^i, \omega_{y_c}^i$  на ребра опорного трехгранника  $x_m y_m z_m^i$  определяются (5.39), только в них  $\omega_{x_0}^i, \omega_{y_0}^i$  в соответствии с (4.150) определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0}^i &= - \left( \frac{V_{y_0}^i}{R_{y_0}^i} - \frac{V_{x_0}^i}{R_0^i} \right) \operatorname{ctg} \Phi^i, \\ \omega_{y_0}^i &= \left( \frac{V_{x_0}^i}{R_{x_0}^i} - \frac{V_{y_0}^i}{R_0^i} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

Координаты  $\Lambda^i, \Phi^i$  находятся по (5.34). Для их определения необходимо преобразовать  $V_{x_0}^i, V_{y_0}^i$  в  $v_{x_0}^i, v_{y_0}^i$ . В соответствии с (4.124)  $V_{x_0}^i = v_{x_0}^i + UR_1^i \cos \Phi^i$ . Тогда из рис. 5.7 можно получить формулы перехода в виде

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0}^i &= V_{x_0}^i - UR_1^i \cos \Phi^i \cos \chi_0^i, \\ v_{y_0}^i &= V_{y_0}^i - UR_1^i \cos \Phi^i \sin \chi_0^i. \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

В формуле (5.35) счисления  $h$  можно получить  $v_{y_0}^i = V_{y_0}^i$  и  $v_{z_0}^i = V_{z_0}^i = V_{z_0}^i$ , причем  $V_{y_0}^i$  можно получить по второй формуле преобразования (5.36) из величин  $V_{x_0}^i$  и  $V_{y_0}^i$ .

Теперь нужно выразить ускорение силы тяготения через координаты  $\Phi^i$  и  $h$ . В соответствии с (4.68)

$$g' = g_{90} \frac{a^2}{(a+h)^2} (1 + \beta' \sin^2 \Phi^i), \quad (5.44)$$

причем  $\beta' = 1,84 \cdot 10^{-3}, g_{90} = 981,438 \text{ см/с}^2, a = 6378,245 \text{ км}$ .

Строго говоря, в (5.44) должна фигурировать геоцентрическая широта  $\Phi'$ . Однако с небольшой погрешностью  $g'$  можно определять по одной формуле (5.44) для любой широты:  $\Phi, \Phi', \Phi''$ . Ошибки при этом не будут превосходить  $\beta' \alpha g' = 0,6 \cdot 10^{-5} g'$  для  $\Phi^i = \Phi$  и  $0,5 \beta' \alpha g' = 0,3 \cdot 10^{-5} g'$  для  $\Phi^i = \Phi''$ . При этом во втором случае горизонтальные составляющие  $a_{x_0}^{\prime\prime}, a_{y_0}^{\prime\prime}$  кажущегося уско-

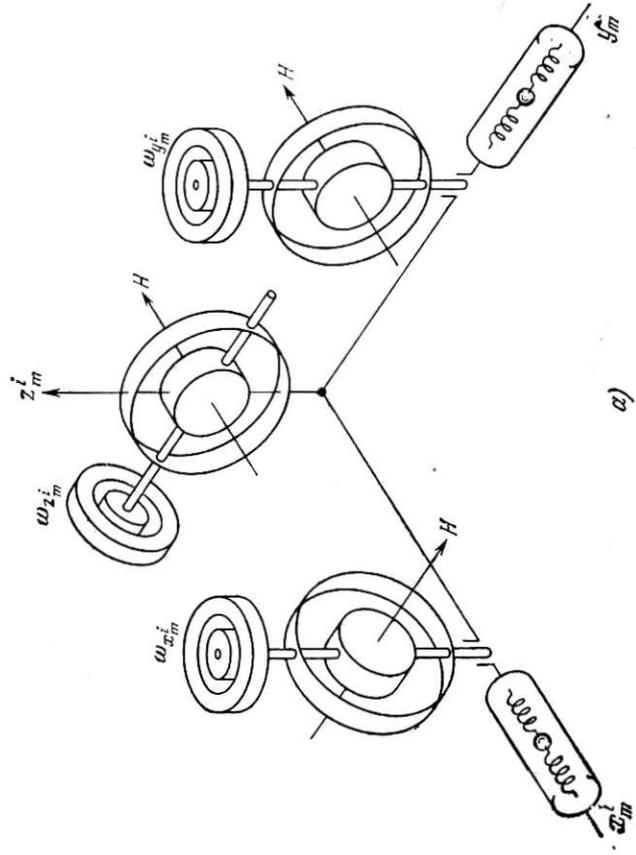
рения вообще не зависят от  $g'$ . В выражениях  $g' \sin(\Phi'' - \Phi^i) \times \sin \chi_0^i, g' \sin(\Phi'' - \Phi^i) \cos \chi_0^i, g' \cos(\Phi'' - \Phi^i)$ , встречающихся в (5.40), с точностью до величины порядка  $0,5 \cdot 10^{-5} g$  можно полагать  $\sin(\Phi'' - \Phi) = -\alpha \sin \Phi \cos \Phi, \sin(\Phi'' - \Phi') = \alpha \sin \Phi' \cos \Phi'$  и в любом случае  $\cos(\Phi - \Phi^i) = 1$ .

Схема, моделирующая рассмотренный алгоритм, приведена на рис. 5.9. Как указывалось раньше, моделирующую схему можно видоизменять, не нарушая конечного результата. В частности, во втором варианте алгоритма можно было бы по компонентам  $V_{x_0}^i, V_{y_0}^i$  абсолютной скорости получать соответствующие компоненты  $v_{x_0}^i, v_{y_0}^i$  относительной скорости и по  $v_{x_0}^i, v_{y_0}^i$  провести вычисления остальных величин, т. е. фактически свести решение этой части задач к предыдущему случаю (см. рис. 5.8). Кроме того, в некоторых случаях может оказаться удобней находить сначала проекции скорости в опорной системе координат, а затем их преобразовать в навигационную координатную систему. Так, например, было сделано в моделирующей схеме, изображенной на рис. 5.4. Приведем еще один конкретный пример. Рассмотрим в качестве опорного трехгранника азимутально-свободный трехгранник  $x_c y_c z_c$ , соответствующий гравитационной вертикали. Будем считать, что в инерциальной системе имеются только два горизонтальных акселерометра, а  $h$  вводится от барометрического высотомера.

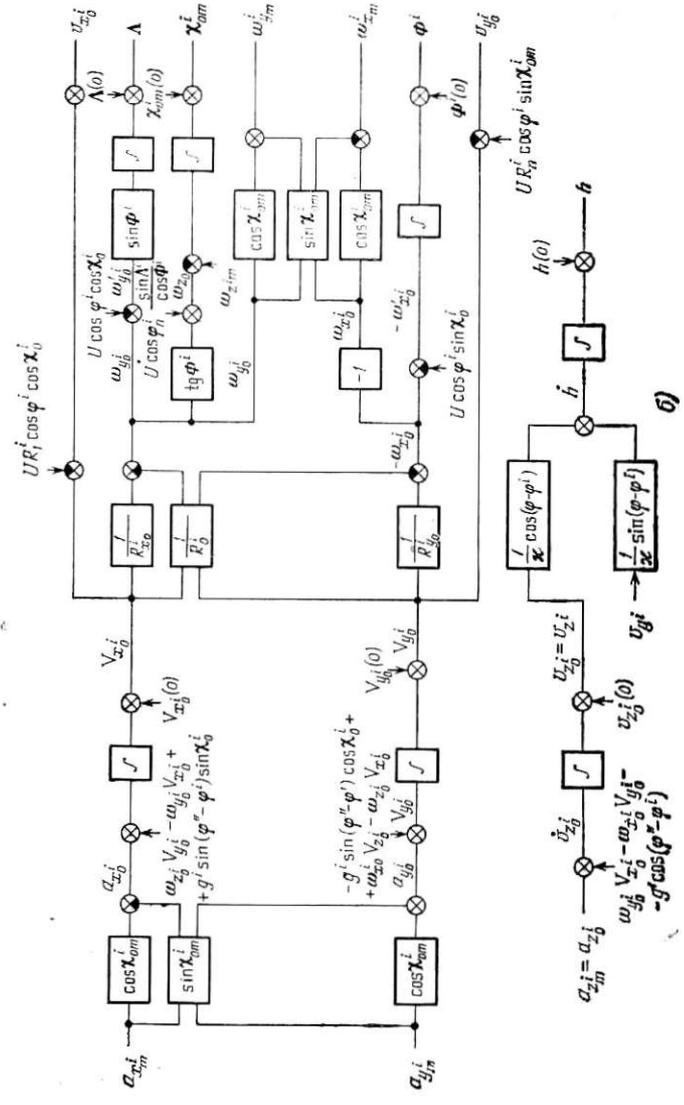
Будем следовать второму варианту алгоритма, рассмотренного в данном пункте. В горизонтальном движении с точностью, оговоренной в п. 3.3.3, проекции  $a_{x_c}^{\prime\prime}, a_{y_c}^{\prime\prime}$  кажущегося ускорения можно определить по (3.65). Эти формулы запишем в таком порядке:

$$\ddot{V}_{x_c}^{\prime\prime} = a_{x_c}^{\prime\prime}, \quad \ddot{V}_{y_c}^{\prime\prime} = a_{y_c}^{\prime\prime}. \quad (5.45)$$

Естественно, теперь удобней сначала получить проекции  $V_{x_c}^{\prime\prime}, V_{y_c}^{\prime\prime}$  абсолютной скорости на оси опорной (азимутально-свободной) координатной системы, а затем уже посредством формул преобразования получить проекции  $V_{x_0}^{\prime\prime}, V_{y_0}^{\prime\prime}$  абсолютной скорости на оси навигационной (в данном случае ортодромической) системы



a)



b)

Рис. 5.9. а) Кинематическая схема гиросtabilизированной платформы. б) Блок-схема (алгоритм). Полуаналитическая инерциальная система обобщенного типа (II вариант).

координат. Далее для определения координат можно поступить в соответствии с моделирующей схемой, представленной на рис. 5.9. Несколько иначе здесь образуются величины  $\omega_{x_c}^i$  и  $\omega_{y_c}^i$ , необходимые для управления платформой. Они находятся по (5.48) при замене в них индекса о на индекс с.

### § 5.3. Инерциальные системы аналитического типа

При решении задач околоземной навигации за инерциальную систему координат мы приняли систему  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  с началом в центре Земли, осью  $\zeta_a$ , направленной вдоль полярной оси Земли к Северному полюсу, и осями  $\xi_a, \eta_a$ , лежащими в плоскости параллельной плоскости экватора и не участвующими в суточном вращении Земли. Соответствующий этой системе координат инерциальный трехгранник  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  примем за опорный.

**Первый вариант алгоритма.** В первом варианте алгоритма он будет служить также навигационным трехгранником. Трехгранник  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  не вращается в абсолютном пространстве, поэтому проекции  $\omega_{\xi_a}, \omega_{\eta_a}, \omega_{\zeta_a}$  его абсолютной угловой скорости на ребра  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  равняются нулю, т. е.

$$\omega_{\xi_a} = 0, \quad \omega_{\eta_a} = 0, \quad \omega_{\zeta_a} = 0. \quad (5.46)$$

Рассматриваемая здесь инерциальная навигационная система должна принципиально содержать три акселерометра, измерительные оси которых номинально направлены вдоль осей  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ . Проекция кажущегося ускорения  $a_{\xi_a}, a_{\eta_a}, a_{\zeta_a}$  на оси  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ , в идеальном случае измеряемые акселерометрами, определяются (3.43). Разрешая равенства (3.43) относительно производных скорости, получим выражения

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_{\xi_a} &= a_{\xi_a} + g'_{\xi_a}, \quad \dot{V}_{\eta_a} = a_{\eta_a} + g'_{\eta_a}, \\ \dot{V}_{\zeta_a} &= a_{\zeta_a} + g'_{\zeta_a}, \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

в которых проекции гравитационного ускорения представляются по формулам (3.46) в виде

$$\begin{aligned} g'_{\xi_a} &= -g' \frac{\xi_a}{r} + 3\mu g' \frac{\xi_a^2 \zeta_a}{r^3}, \\ g'_{\eta_a} &= -g' \frac{\eta_a}{r} + 3\mu g' \frac{\xi_a^2 \eta_a}{r^3}, \\ g'_{\zeta_a} &= -g' \frac{\zeta_a}{r} - 3\mu g' \frac{(\xi_a^2 + \eta_a^2) \zeta_a}{r^3}, \\ r &= \sqrt{\xi_a^2 + \eta_a^2 + \zeta_a^2}, \end{aligned} \quad \square \quad (5.48)$$

а  $g'$  определяется первой формулой (1.74а) при замене в ней  $\zeta$  на  $\zeta_a$ , т. е.

$$g' = \frac{g'_{30} a^2}{r^2} \left( 1 - \beta'_1 \frac{\zeta_a^2}{r^2} \right). \quad (5.49)$$

В (5.49) константы имеют следующие значения:  $\beta'_1 = 1,437 \cdot 10^{-3}$ ,  $a = 6378,245$  км,  $g'_{30} = 981,438$  см/с<sup>2</sup>.

Формулы числения прямоугольных координат  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  в соответствии с (1.118) имеют вид

$$\dot{\xi}_a = V_{\xi_a}, \quad \dot{\eta}_a = V_{\eta_a}, \quad \dot{\zeta}_a = V_{\zeta_a}. \quad (5.50)$$

Уравнения (5.47) с учетом (5.48) и (5.49) и уравнения (5.50) образуют совокупную систему обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка. В этой системе  $a_{\xi_a}, a_{\eta_a}, a_{\zeta_a}$ , измеряемые акселерометрами, являются известными функциями времени, решение системы, удовлетворяющее заданному начальному условию  $\xi_a(0), \eta_a(0), \zeta_a(0), V_{\xi_a}(0), V_{\eta_a}(0), V_{\zeta_a}(0)$ , определяет текущие координаты  $\xi_a(t), \eta_a(t), \zeta_a(t)$  точки  $M$  местоположения объекта и компоненты  $V_{\xi_a}(t), V_{\eta_a}(t), V_{\zeta_a}(t)$  абсолютной скорости его движения. Естественно, начальные условия должны определять координаты точки  $M$  и компоненты скорости движения объекта при  $t = 0$ . Эти величины не определяются инерциальной навигационной системой, они вносятся в инерциальную систему по источникам внешней информации.

Моделирующая схема рассматриваемой инерциальной системы представлена на рис. 5.10. По этой схеме опорный трехгранник материализуется свободной гиросtabilизированной платформой, т. е. платформой, на датчики моментов гироскопов которой не подаются управляющие сигналы. Кроме того, гиросплатформа здесь должна иметь дополнительную следящую раму для предотвращения складывания рам карданова подвеса.

Гиросплатформа сохраняет неизменную ориентацию относительно неподвижных звезд и непрерывно меняет свою ориентацию относительно земных ориентиров. Если начальную выставку платформы осуществлять по земным ориентирам, то нужно либо оговорить время запуска системы, либо необходимо осуществить непрерывное отслеживание платформой (заранее вычисленное и запрограммированное) изменяющегося положения относительно земных ориентиров.

В рассматриваемом случае может появиться необходимость в определении вторичных координат\*), за которые мы примем

\*) Под первичными координатами понимаются координаты, получаемые в инерциальной системе интегрированием; вторичные координаты получают из первичных с помощью конечных формул преобразования координат.

географическую долготу  $\lambda$ , географическую широту  $\varphi$  и высоту  $h$ , а также проекции относительной скорости на ребра географического трехгранника  $xuz$ . Эти величины получаются из ранее найденных посредством конечных формул преобразования. Эти формулы можно получить из следующих соображений. Таблицу косинусов углов между осями  $x, y, z$  и  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  можно получить из

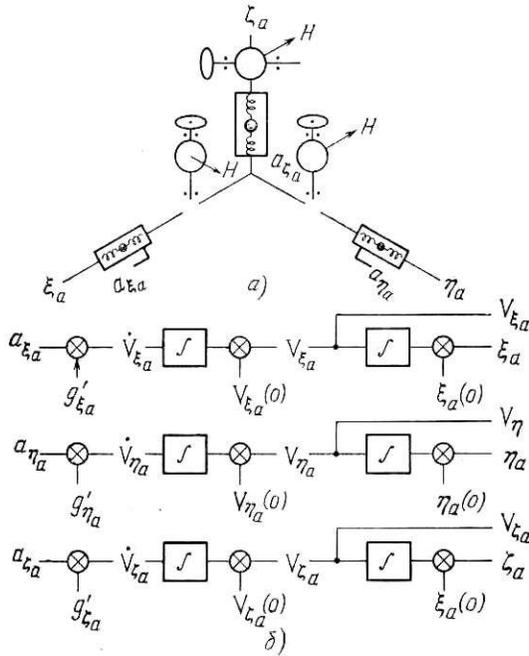


Рис. 5.10. а) Кинематическая схема гиросtabilизированной платформы. б) Блок-схема (алгоритм). Аналитическая инерциальная система с инерциальным опорным трехгранником.

(1.76), если там  $\lambda$  заменить на  $\lambda_a$ , а оси  $\xi, \eta, \zeta$  на  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ . В частности, направляющие косинусы оси  $z$  по отношению к осям  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  соответственно равны  $\cos \varphi \cos \lambda_a, \cos \varphi \sin \lambda_a, \sin \varphi$ . Вектор ускорения силы тяжести  $g$  направлен вдоль отрицательной полуоси  $z$ , поэтому

$$\left. \begin{aligned} g_{\xi_a} &= -g \cos \varphi \cos \lambda_a, & g_{\eta_a} &= -g \cos \varphi \sin \lambda_a, \\ g_{\zeta_a} &= g \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

Сравнивая формулы (5.51) и (3.49) (в последних только нужно

$\xi, \eta, \zeta$  заменить на  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ ), получим выражения

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi \cos \lambda_a &= \frac{\xi_a}{r} \left( 1 - 2\alpha \frac{\zeta_a^2}{r^2} \right), \\ \cos \varphi \sin \lambda_a &= \frac{\eta_a}{r} \left( 1 - 2\alpha \frac{\zeta_a^2}{r^2} \right), \\ \sin \varphi &= \frac{\zeta_a}{r} \left( 1 + 2\alpha \frac{\zeta_a^2 + \eta_a^2}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

Из формул (1.118а) непосредственно находим соотношения

$$\cos \lambda_a = \frac{\xi_a}{(\xi_a^2 + \eta_a^2)}, \quad \sin \lambda_a = \frac{\eta_a}{\sqrt{\xi_a^2 + \eta_a^2}}. \quad (5.53)$$

Обычно стремятся углы находить по их тангенсам. В нашем случае  $\varphi$  и  $\lambda_a$  можно определять формулами

$$\operatorname{tg} \varphi = (1 + 2\alpha) \frac{\zeta_a}{\sqrt{\xi_a^2 + \eta_a^2}}, \quad \operatorname{tg} \lambda_a = \frac{\eta_a}{\xi_a}. \quad (5.54)$$

Первая формула (5.54) получается из (5.52), если сначала из первых двух выражений определить  $\cos \varphi$  и с помощью третьего выражения сформировать  $\operatorname{tg} \varphi$ , после чего разложить члены, содержащие  $\alpha$ , в биномиальный ряд и отбросить слагаемые с  $\alpha^2$  и более высокого порядка малости.

Второе выражение (5.54) непосредственно получается из (5.33). В (5.54) знак  $\varphi$  совпадает со знаком координат  $\zeta_a$ , квадрант угла  $\lambda_a$  находится по сочетанию знаков координат  $\eta_a$  и  $\xi_a$  (см. (5.33)). Географическая долгота  $\lambda$  находится по формуле

$$\lambda = \lambda_a - Ut, \quad (5.54a)$$

где время  $t$  отсчитывается от момента прохождения гринвичского меридиана через плоскость  $\xi_a \zeta_a$  (см. п. 1.3.6). По формулам (5.52) и (5.53) можно выразить направляющие косинусы осей  $x, y, z$  относительно осей  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  через прямоугольные координаты  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ . Тогда в соответствии с (1.76) проекции  $V_x, V_y, V_z$  абсолютной скорости на оси  $x, y, z$  находятся из следующих формул преобразования:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= -V_{\xi_a} \sin \lambda_a + V_{\eta_a} \cos \lambda_a, \\ V_y &= -V_{\xi_a} \cos \lambda_a \sin \varphi - V_{\eta_a} \sin \lambda_a \sin \varphi + V_{\zeta_a} \cos \varphi, \\ V_z &= V_{\xi_a} \cos \lambda_a \cos \varphi + V_{\eta_a} \sin \lambda_a \cos \varphi + V_{\zeta_a} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

Проекции  $v_x, v_y, v_z$  относительной скорости определяются равен-

ствами

$$v_x = V_x - U\sqrt{\xi_a^2 + \eta_a^2}, \quad v_y = V_y, \quad v_z = V_z. \quad (5.56)$$

Высоту  $h$  можно найти из (1.17), если там  $\sin \varphi'$  заменить отношением  $\xi_a$  к  $r$ . Таким образом получим

$$h = a - r\sqrt{1 + e'^2 \frac{\xi_a^2}{r^2}} = a - \sqrt{\xi_a^2 + \eta_a^2 + (1 + e'^2)\xi_a^2}. \quad (5.57)$$

И наконец, следует определить ориентацию объекта в пространстве. Ориентацию объекта в пространстве будем определять, как и прежде, углом истинного курса  $\psi_K$ , углом тангажа  $\vartheta$  и углом крена  $\gamma_S$ .

Свяжем с объектом систему координат  $XYZ$ , причем ось  $Y$  направлена вдоль его продольной оси вперед, ось  $Z$  выберем в плоскости продольной симметрии так, чтобы она была перпендикулярна оси  $Y$  и направлена вверх при нормальном положении объекта, а ось  $X$  определяется тем обстоятельством, что трехгранник  $XYZ$  должен иметь правую ориентацию. Оси  $X, Y, Z$  можно назвать поперечной, продольной и нормальной осями объекта. В качестве базового трехгранника для определения углов  $\psi_K, \vartheta, \gamma_S$  возьмем географический трехгранник  $xuz$ . Пусть сначала трехгранники  $XYZ$  и  $xuz$  совпадают друг с другом. Тогда связанный трехгранник  $XYZ$  может быть переведен в произвольное положение относительно трехгранника  $xuz$  тремя последовательными независимыми поворотами: сначала на угол  $\psi_K$  вокруг отрицательного направления оси  $Z$  (т. е. с положительного конца оси  $Z$  вращение будет происходить по часовой стрелке), затем вокруг промежуточного положения оси  $X$  на угол  $\vartheta$  и, наконец, вокруг окончательного положения оси  $Y$  на угол  $\gamma_S$ . Такую последовательность поворотов мы рассматривали в п. 3.5.1. Поэтому преобразование систем координат  $xuz$  в  $XYZ$  мы получим из (3.124) и (3.126), заменив там оси  $x_p, y_p, z_p$  на оси  $X, Y, Z$  соответственно и положив  $\gamma_1 = \vartheta, \gamma_2 = \gamma_S, \gamma_3 = -\psi_K$ . Таким образом получим

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = C_{K\Gamma} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

Элементы матрицы  $C_{K\Gamma}^{ij}$  следующие:

$$\begin{aligned} c_{K\Gamma}^{(11)} &= \cos \gamma_S \cos \psi_K + \sin \gamma_S \sin \vartheta \sin \psi_K, \\ c_{K\Gamma}^{(12)} &= -\cos \gamma_S \sin \psi_K + \sin \vartheta \sin \gamma_S \cos \psi_K, \\ c_{K\Gamma}^{(13)} &= -\cos \vartheta \sin \gamma_S, \quad c_{K\Gamma}^{(21)} = \cos \vartheta \sin \psi_K, \\ c_{K\Gamma}^{(22)} &= \cos \vartheta \cos \psi_K, \quad c_{K\Gamma}^{(23)} = \sin \vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{K\Gamma}^{(31)} &= \sin \gamma_S \cos \psi_K - \sin \vartheta \cos \gamma_S \sin \psi_K, \\ c_{K\Gamma}^{(32)} &= -\sin \gamma_S \sin \psi_K - \sin \vartheta \cos \gamma_S \cos \psi_K, \\ c_{K\Gamma}^{(33)} &= \cos \vartheta \cos \gamma_S. \end{aligned}$$

В соответствии с принятыми в п. 3.4.3 обозначениями полученную матрицу преобразования географической координатной системы  $xuz$  в связанную  $XYZ$  обозначили через  $C_{K\Gamma}$ . Элементами матрицы  $C_{K\Gamma}$  служат косинусы углов между осями систем  $XYZ$  и  $xuz$ .

Из (5.58) можно получить равенства

$$\left. \begin{aligned} \sin \vartheta &= \cos(\widehat{Yz})^*, \quad \operatorname{tg} \gamma_S = \frac{-\cos(\widehat{Xz})}{\cos(\widehat{Zz})}, \\ \operatorname{tg} \psi_K &= \frac{\cos(\widehat{Yx})}{\cos(\widehat{Yy})}, \end{aligned} \right\} \quad (5.59)$$

по которым можно определить углы  $\vartheta, \gamma_S$  и  $\psi_K$ .

Для определения элементов матрицы  $C_{K\Gamma}$  построим два ортогональных преобразования:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = C_{Ka} \begin{bmatrix} \xi_a \\ \eta_a \\ \zeta_a \end{bmatrix}, \quad (5.60)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_{Ga} \begin{bmatrix} \xi_a \\ \eta_a \\ \zeta_a \end{bmatrix}. \quad (5.61)$$

Сравнивая три ортогональных преобразования (5.58), (5.60) и (5.61), получим матричное равенство

$$C_{K\Gamma} C_{Ga} = C_{Ka}. \quad (5.62)$$

Если умножить матричное равенство справа на транспонированную матрицу  $C_{Ga}^T$ , то, замечая, что  $C_{Ga}^T = C_{Ga}^{-1}$ , получим

$$C_{K\Gamma} = C_{Ka} C_{Ga}^T = C_{Ka} C_{a\Gamma}. \quad (5.63)$$

Матрица  $C_{Ga}^T$  определяет ортогональное преобразование географической системы  $xuz$  в инерциальную систему  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ , поэтому мы ее обозначили через  $C_{a\Gamma}$ . Элементы матрицы  $C_{a\Gamma}$  определяются таблицей (1.76) при замене  $\lambda$  на  $\lambda_a$  и  $\xi, \eta, \zeta$  на  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ ; они выражены раньше через найденные координаты  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ .

Преобразования (5.60) можно построить (аналогично преобразованию (5.58)) тремя последовательными поворотами связанного

\*)  $\widehat{Yz}$  — угол между осями  $Y$  и  $z$ .

трехгранника  $XYZ$  из положения, в котором он совпадал с инерциальным трехгранником  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ . Инерциальный трехгранник  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  материализуется стабилизированной платформой. Последовательные повороты вокруг оси  $Z$ , промежуточного положения оси  $X$  и окончательного положения оси  $Y$  на углы  $\gamma_3, \gamma_1, \gamma_2$  будут происходить вокруг материальных осей (обозначим их 3, 1, 2) кардановых рам подвеса. Указанные углы измеряются соответствующими датчиками. Матрица суммарного поворота  $C_{ка}$  совпадает с матрицей (3.126). Таким образом, элементы матриц  $C_{ка}$  и  $C_{ар}$  определяются по измеренным углам  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  и расчетным значениям координат  $\lambda_a, \varphi$  или даже первичных координат  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ . Перемножая эти матрицы, найдем по (5.63) элементы матрицы  $C_{кг}$  (5.58), а следовательно, и направляющие косинусы, фигурирующие в равенствах (5.59). Из последних равенств находим углы  $\phi, \psi_S, \psi_K$ , определяющие ориентацию объекта.

Второй вариант алгоритма. Рассмотрим второй вариант алгоритма навигационной системы с инерциальным опорным трехгранником. В качестве навигационного трехгранника выберем географический трехгранник  $xyz$ , следовательно, за первичные координаты — географические долготу  $\lambda$  и широту  $\varphi$ .

Высоту  $h$  определять здесь не будем. Опорным трехгранником, как и прежде, будет служить инерциальный трехгранник  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ . По проекциям  $a_{\xi_a}, a_{\eta_a}, a_{\zeta_a}$  кажущегося ускорения, непосредственно измеряемым акселерометрами, находим проекции  $a_x, a_y, a_z$  кажущегося ускорения на оси географической координатной системы  $xyz$ .

Формулы преобразования имеют вид

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_a & \cos \lambda_a & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda_a & -\sin \varphi \sin \lambda_a & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda_a & \cos \varphi \sin \lambda_a & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\xi_a} \\ a_{\eta_a} \\ a_{\zeta_a} \end{bmatrix}. \quad (5.64)$$

Матрица преобразования получается транспонированием таблицы (1.76) и при замене в ней  $\lambda$  на  $\lambda_a$  и  $\xi, \eta, \zeta$  на  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ .

Найденными проекциями  $a_x, a_y, a_z$  можно распорядиться в соответствии с алгоритмом, рассмотренным в п. 5.2.1, и на выходе инерциальной системы получить  $\lambda, \varphi$  и  $v_x, v_y$ . По географической долготе  $\lambda$  следует определить абсолютную долготу  $\lambda_a$ , необходимую для формирования матрицы преобразования (5.64). Для этой цели используем формулы (5.54а), (5.59). Ориентация объекта определяется по указанной выше процедуре, изложенной в первом варианте алгоритма.

Читателю предлагается самостоятельно построить алгоритм инерциальной системы аналитического типа, взяв за опорный и навигационный трехгранники экваториальный трехгранник  $\xi \eta \zeta$ , жестко связанный с Землей.

## § 5.4. Бесплатформенные инерциальные системы

### 5.4.1. Инерциальная система с однокомпонентными гироскопическими приборами абсолютной угловой скорости.

В бесплатформенных инерциальных системах опорный трехгранник, который мы будем обозначать через  $XYZ$ , жестко связан с объектом. В системах данного типа акселерометры выдают информацию о проекциях  $a_x, a_y, a_z$  кажущегося ускорения на связанные оси  $X, Y, Z$ . Чтобы использовать эту информацию для решения задач навигации, необходимо в каждый момент времени знать ориентацию объекта или, что то же самое, трехгранника  $XYZ$  относительно базовой системы отсчета.

В рассматриваемом случае ориентация трехгранника  $XYZ$  определяется по проекциям его абсолютной угловой скорости  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  на оси  $X, Y, Z$ , которые измеряются тремя гироскопическими датчиками абсолютной угловой скорости, описанными в § 4.4.

На рис. 5.11 показано расположение осей акселерометров и гироскопов абсолютной угловой скорости относительно осей  $X, Y, Z$  опорного трехгранника.

В качестве базовой системы отсчета рассмотрим сначала абсолютную систему координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ , т. е. систему координат, относительно которой гироскопические приборы измеряют угловую скорость опорного трехгранника  $XYZ$ . В инерциальных системах нужно определить девять направляющих косинусов осей  $X, Y, Z$  опорного трехгранника относительно абсолютной системы координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ . Эту задачу можно решить двумя различными путями.

Первый вариант алгоритма сводится к нахождению трех углов  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  последовательных, независимых поворотов трехгранника  $XYZ$ , которые переводят трехгранник  $XYZ$  из начального положения, в котором он совпадал с трехгранником  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ , в данное текущее положение. Последовательные повороты будем проводить в следующем порядке. Сначала повернем трехгранник  $XYZ$  на угол  $\gamma_3$  вокруг первоначального положения оси  $Z$ , совпадающей с осью  $\zeta_a$ , затем повернем на угол  $\gamma_1$  вокруг промежуточного направления оси  $X$  и, наконец, повернем на угол  $\gamma_2$  вокруг нового направления оси  $Y$ .

Последовательные повороты и взаимное положение трехгранников  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  и  $XYZ$  изображены на рис. 5.11.

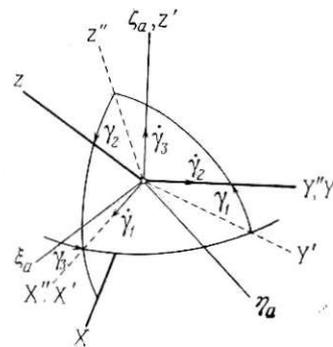


Рис. 5.11. Взаимное расположение связанной с объектом системы координат  $xyz$  и абсолютной системы координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ .

Там показаны угловые скорости  $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$  в виде векторов, направленных вдоль положительных направлений осей  $X', Y, \zeta_a^1$ . Указанные оси образуют косоугольную систему координат  $X' Y \zeta_a^1$ . Преобразование координатных систем посредством трех последовательных поворотов по указанной выше схеме рассматривалось в п. 3.5.1.

В нашем случае преобразование координатных систем определяется в виде (см. также (5.60))

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = C_{ka} \begin{bmatrix} \xi_a \\ \eta_a \\ \zeta_a \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

Это преобразование получается из (3.124) заменой  $xuz$  на  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  и  $x_p y_p z_p$  на  $X Y Z$ . Ортогональная матрица преобразования  $C_{ka} = C_{\gamma}$  определяется (3.126).

Установим связь между величинами  $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$  и  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ , которые являются составляющими одного и того же вектора абсолютной угловой скорости трехгранника  $X Y Z$ . Для этой цели найдем ортогональные проекции векторов, изображающих  $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ , на оси прямоугольной системы координат  $X Y Z$ . Эти проекции определяются через направляющие косинусы осей  $X', Y, \zeta_a$  относительно системы координат  $X Y Z$ , направляющие косинусы оси  $X'$  можно получить из первого столбца матрицы (3.126), если там положить  $\gamma_3 = 0$ , соответствующие косинусы оси  $\zeta_a$  определяются третьим столбцом той же матрицы, а направляющие косинусы оси  $Y$ , очевидно, равны 0, 1, 0 соответственно.

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \omega_X &= \dot{\gamma}_1 \cos \gamma_2 - \dot{\gamma}_3 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2, \\ \omega_Y &= \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 \sin \gamma_1, \\ \omega_Z &= \dot{\gamma}_1 \sin \gamma_2 + \dot{\gamma}_3 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.66)$$

Разрешая (5.66) относительно  $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= \omega_X \cos \gamma_2 + \omega_Z \sin \gamma_2, \\ \dot{\gamma}_2 &= \omega_Y - \operatorname{tg} \gamma_1 (-\omega_X \sin \gamma_2 + \omega_Z \cos \gamma_2), \\ \dot{\gamma}_3 &= \frac{1}{\cos \gamma_1} (-\omega_X \sin \gamma_2 + \omega_Z \cos \gamma_2). \end{aligned} \right\} \quad (5.67)$$

Соотношения (5.67) преобразуют составляющие  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$  абсолютной угловой скорости связанного трехгранника  $X Y Z$  в производные по времени от углов поворота  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Углы  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  могут быть получены из (5.67) интегрированием. Преобразование  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$  в  $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$  не определено при  $\gamma_1 = \pi/2$ . При таком значении  $\gamma_1$  повороты на углы  $\gamma_3$  и  $\gamma_2$  производятся вокруг одной и той же оси (оси  $\zeta_a$ ), так как при  $\gamma_1 = \pi/2$  ось  $Y$  ( $Y''$ )

(см. рис. 5.11) совпадает с осью  $\zeta_a$ . В этом случае возникает затруднение в раздельном определении углов поворота вокруг этих осей, т. е. углов  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$ .

В уравнениях (5.67)  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$  считаются известными функциями времени; в инерциальных системах они являются выходными величинами гиризмрителей абсолютной угловой скорости. Соотношения (5.78) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений с переменными параметрами относительно искомым функций времени  $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ . Эти уравнения могут быть решены численными методами, если будут заданы начальные условия, т. е. заданы величины  $\gamma_1(0), \gamma_2(0), \gamma_3(0)$ , соответствующие моменту времени  $t = 0$ . Углы  $\gamma_1(0), \gamma_2(0), \gamma_3(0)$  определяют ориентацию связанного трехгранника  $X Y Z$  относительно инерциального  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  при  $t = 0$ . В системе (5.67) первые два уравнения являются связанными, последнее уравнение решается квадратурой после того, как решения  $\gamma_1(t)$  и  $\gamma_2(t)$  будут найдены.

Определение углов ориентации  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  производится решением уравнений (5.67) по составляющим  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ , определяемым гиризмрителями и начальными данными  $\gamma_1(0), \gamma_2(0), \gamma_3(0)$ .

Определение углов  $\gamma_1(0), \gamma_2(0), \gamma_3(0)$  можно назвать *начальной выставкой связанного трехгранника  $X Y Z$  относительно инерциального трехгранника  $\xi_a \eta_a \zeta_a$* .

По найденным величинам  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  мы можем по (3.126) построить матрицу  $C_{ka} = C_{\gamma}$ , фигурирующую в преобразовании (5.76), а затем транспонированием найти матрицу обратного преобразования  $C_{ak} = C_{\gamma}^T$ . С помощью матрицы  $C_{ak}$  мы можем по проекциям  $a_X, a_Y, a_Z$  кажущегося ускорения на оси  $X, Y, Z$ , которые непосредственно измеряются акселерометрами, найти по формуле

$$\begin{bmatrix} a_{\xi_a} \\ a_{\eta_a} \\ a_{\zeta_a} \end{bmatrix} = C_{ak} \begin{bmatrix} a_X \\ a_Y \\ a_Z \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

проекции  $a_{\xi_a}, a_{\eta_a}, a_{\zeta_a}$  кажущегося ускорения на оси инерциального трехгранника  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ . После такой операции решение задач навигации сводится к алгоритмам, рассмотренным в п. 5.3.1 для инерциальной системы аналитического типа. Это относится к определению координат местоположения объекта  $\lambda, \varphi$ , компонент скорости его движения  $v_x, v_y$  и ориентации объекта, определяемой истинным курсом  $\psi_K$ , углом тангажа  $\theta$  и углом крена  $\gamma_S$ .

Уравнения (5.67), определяющие связь между производными углов поворота  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  и проекциями  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$  абсолютной угловой скорости связанного трехгранника, неудобны. Они являются нелинейными уравнениями и не обладают симметрией, кроме

того, имеет место особый случай при  $\gamma_1 = \pi/2$ . От таких недостатков свободны уравнения (3.107), которые непосредственно определяют направляющие косинусы, характеризующие взаимное расположение двух координатных систем.

Второй вариант алгоритма основан на непосредственном определении элементов матрицы  $C_{ак}$  по уравнениям (3.107), в которых теперь нужно считать  $c_{ji}$  направляющими косинусами осей  $X, Y, Z$  относительно системы координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ , а вместо  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  нужно писать  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ . В соответствующее вычислительное устройство составляющие  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$  вводятся с гироскопов абсолютной угловой скорости, кроме того, в него нужно ввести девять начальных значений направляющих косинусов  $c_{ji}(0)$  \*). Построив матрицу  $C_{ак}$ , а следовательно, и  $C_{ка} = C_{ак}^T$ , мы получим возможность решить задачу навигации в соответствии с ранее установленной процедурой.

Вторая процедура нахождения матрицы  $C_{ак}$  является более гибкой, т. е. она позволяет с помощью обобщенных уравнений (3.118) определять направляющие косинусы связанных осей  $X, Y, Z$  не только относительно абсолютной системы координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ , но также относительно других систем отсчета. Во всех случаях системой координат  $x_m y_m z_m$ , фигурирующей в (3.118), будет служить  $XYZ$ , а систему координат  $x_n y_n z_n$  можно выбрать по своему усмотрению.

При проектировании инерциальных систем необходимо провести тщательный анализ различных вариантов схем с обязательным учетом процедуры начальной выставки и накопленного практического опыта, прежде чем выбрать схему для технической реализации.

Рассмотренные в данном пункте инерциальные системы не имеют в своем составе гиросtabilизированных платформ. Гироскопические измерители, установленные непосредственно на объекте, работают в более тяжелом режиме, чем гироскопы, установленные на гиросtabilизированной платформе. Они должны измерять угловые скорости порядка угловой скорости Земли  $U = 7,29 \cdot 10^{-5}$  1/с и угловую скорость вращения самолета вокруг продольной оси, имеющей для некоторых самолетов порядок 400 град/с, т. е. порядок 7 рад/с. Таким образом, отношение максимальной величины и минимальной составляет  $7/7,29 \cdot 10^5 \approx \approx 10^6$ . Естественно, в большом диапазоне изменения измеряемых величин труднее обеспечить заданную точность измерения.

**5.4.2. Инерциальная система со свободными гироскопами.** Во второй разновидности инерциальных навигационных систем рассматриваемого класса ориентация объекта и связанного с ним опорного трехгранника  $XYZ$  определяется двумя свободными

\*) Эта процедура была рассмотрена в п. 3.4.3.

гироскопами. Оси свободных гироскопов сохраняют неизменное направление в инерциальном пространстве, поэтому два свободных гироскопа могут смоделировать инерциальный трехгранник и, в частности, трехгранник  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ . Для этого ось одного гироскопа нужно направить параллельно оси  $\xi_a$ , а другого — параллельно оси  $\eta_a$ , направление третьей оси (оси  $\zeta_a$ ) можно определить аналитически векторным произведением единичных векторов, т. е. выражением  $\zeta_a^0 = \xi_a^0 \times \eta_a^0$ . Таким образом, два свободных гироскопа могут создать на борту объекта базовую систему отсчета. Электрические (или другого типа) датчики углового положения свободных гироскопов обеспечивают непосредственное измерение углов  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  ориентации трехгранника  $XYZ$ , жестко связанного с объектом, или его направляющих косинусов  $C_{ак}$  относительно абсолютной системы координат  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ . По измеренным значениям углов  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  или направляющих косинусов  $C_{ак}$  и проекциям кажущегося ускорения  $a_X, a_Y, a_Z$  решение задачи навигации осуществляется путем использования алгоритмов предыдущего пункта без необходимости решения дифференциальных уравнений (5.78) или (3.107), что является достоинством бесплатформенной инерциальной системы со свободными гироскопами по сравнению с системой с однокомпонентными гироскопами абсолютной угловой скорости.

В инерциальных системах данного типа могут быть использованы электростатические и криогенные свободные гироскопы. В таких приборах шаровой ротор взвешен в вакууме при помощи электрических или магнитных полей. В последнем случае требуются условия сверхнизких температур и сверхпроводимости для устранения потерь от вихревых токов, наводимых магнитным полем во вращающемся шаровом роторе. На практике стараются уменьшить вес подвешиваемой массы путем создания полого ротора.

Электростатический и криогенный гироскопы нуждаются в поддержании внутри герметичного корпуса прибора глубокого вакуума для снижения моментов, тормозящих вращение ротора, который разгоняют до высокой скорости и оставляют вращаться по инерции в течение всего времени работы.

Рассматриваемые гироскопы могут быть использованы в системе также в виде пространственного акселерометра.

Оба гироскопа оснащены двухкомпонентными датчиками съема сигнала. Если двухкомпонентный датчик работает только в локальной области, то свободный гироскоп требует применения внешнего следящего карданова подвеса.

В свободном гироскопе без следящего подвеса для съема сигналов применяют также систему оптических датчиков, считывающих кодовый рисунок на поверхности шарового ротора. Для расшифровки выходных сигналов датчиков, углового положения свободных гироскопов требуется специальное вычислительное

устройство. Алгоритм последнего, определяющий связь между данными сигналами и углами ориентации  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  или направляющими косинусами  $C_{ик}$ , зависит от конкретной конструктивной схемы свободного гироскопа.

### § 5.5. Полуаналитическая инерциальная система с непосредственным определением ориентации опорного трехгранника

В заключение этой главы мы опять вернемся к системе полуаналитического типа с азимутально-свободным опорным трехгранником, одна из осей которого ориентирована по гравитационной вертикали, т. е. с опорным трехгранником  $x_c''y_c''z_c''$ . Метод построения алгоритма будет в некотором смысле гибридным. Подобно тому, как мы делали в п. 5.4.1, будем определять ориентацию трехгранника  $x_c''y_c''z_c''$  направляющими косинусами, которые будем находить из решения линейных дифференциальных уравнений (3.107). Входящие в (3.107) проекции абсолютной угловой скорости (теперь они должны обозначаться через  $\omega_{x_c}''$ ,  $\omega_{y_c}''$ ,  $\omega_{z_c}''$ ) будут определяться по исходной информации, поставляемой акселерометрами. Такой подход к построению алгоритма обладает рядом особенностей. Соответствующий алгоритм будем строить в предположении, что инерциальная система должна определять долготу  $\lambda$  и гравитационную широту  $\varphi''$  как первичные координаты. Гравитационную широту  $\varphi''$  легко преобразовывать в географическую широту  $\varphi$  по формуле (1.10).

Частично аналитические выражения искомого алгоритма можно получить из общих соотношений, приведенных в п. 5.2.5. Функционирование акселерометра в идеальном случае описывается уравнениями (см. (5.45))

$$\dot{V}_{x_c}'' = a_{x_c}'', \quad \dot{V}_{y_c}'' = a_{y_c}'', \quad (5.69)$$

где  $V_{x_c}''$ ,  $V_{y_c}''$  — проекции абсолютной скорости на гравитационно-горизонтальные оси  $x_c''$ ,  $y_c''$  опорного трехгранника  $x_c''y_c''z_c''$ .

Проекции  $\omega_{x_c}''$ ,  $\omega_{y_c}''$ ,  $\omega_{z_c}''$  абсолютной угловой скорости трехгранника на его собственные оси имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_c}'' &= - \left( \frac{V_{y_c}''}{R_{y_c}''} - \frac{V_{x_c}''}{R_c''} \right), \\ \omega_{y_c}'' &= \frac{V_{x_c}''}{R_{x_c}''} - \frac{V_{y_c}''}{R_c''}, \\ \omega_{z_c}'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.70)$$

Первые две формулы (5.70) можно получить из (1.150) или (5.42) при замене верхнего индекса  $i$  на два штриха и нижнего индекса  $o$  на  $c$ , причем фигурирующие в (5.83) величины  $1/R_{y_c}''$ ,  $1/R_{x_c}''$ ,  $1/R_c''$  аналогичным образом могут быть получены из (5.31). Они имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_{y_c}''} &= \frac{1}{a+h} (1 + \alpha \cos^2 \varphi'' \cos^2 \chi_c''), \\ \frac{1}{R_{x_c}''} &= \frac{1}{a+h} (1 + \alpha \cos^2 \varphi'' \sin^2 \chi_c''), \\ \frac{1}{R_c''} &= \frac{1}{a+h} \alpha \cos^2 \varphi'' \cos \chi_c'' \sin \chi_c''. \end{aligned} \right\} \quad (5.71)$$

Ориентация опорного трехгранника  $x_c''y_c''z_c''$  относительно гравитационного трехгранника  $x''y''z''$  (ось  $y''$  лежит в плоскости меридиана) определяется одним углом  $\chi_c''$  (оси  $z''$  и  $z_c''$  совпадают). Это угол между осью  $y''$  ( $x''$ ) и осью  $y_c''$  ( $x_c''$ ), при  $\chi_c'' > 0$  ось  $y_c''$  поворачивается от оси  $y''$  в сторону оси  $x''$ . Ориентация гравитационного трехгранника  $x''y''z''$  относительно абсолютного (инерциального) трехгранника  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  определяется двумя углами: абсолютной долготой  $\lambda_a$  и гравитационной широтой  $\varphi''$ . Матрицы преобразования координатной системы  $x_c''y_c''z_c''$  в  $x''y''z''$  и координатной системы  $x''y''z''$  в  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ , которые мы будем обозначать соответственно через  $C_{r''c}$  и  $C_{ar''}$ , имеют вид

$$\left. \begin{aligned} C_{ar''} &= \begin{bmatrix} -\sin \lambda_a & -\sin \varphi'' \cos \lambda_a & \cos \varphi'' \cos \lambda_a \\ \cos \lambda_a & -\sin \varphi'' \sin \lambda_a & \cos \varphi'' \sin \lambda_a \\ 0 & \cos \varphi'' & \sin \varphi'' \end{bmatrix}, \\ C_{r''c} &= \begin{bmatrix} \cos \chi_c'' & \sin \chi_c'' & 0 \\ -\sin \chi_c'' & \cos \chi_c'' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (5.72)$$

Матрица  $C_{ar''}$  может быть построена по таблице направляющих косинусов (1.76). В этой таблице нужно только вместо  $\xi, \eta, \zeta, x, y, z, \varphi, \lambda$  писать соответственно  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a, x'', y'', z'', \varphi'', \lambda_a$ .

Матрица  $C_{ac}$  суммарного преобразования, т. е. преобразования координатной системы  $x_c''y_c''z_c''$  в  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ , получается в виде произведения матриц  $C_{ar''}$  и  $C_{r''c}$ , т. е. в виде  $C_{ac} = C_{ar''} C_{r''c}$ .

Таким образом, получим

$$C_{ac} = \begin{bmatrix} c_{ac}^{(11)} & c_{ac}^{(12)} & c_{ac}^{(13)} \\ c_{ac}^{(21)} & c_{ac}^{(22)} & c_{ac}^{(23)} \\ c_{ac}^{(31)} & c_{ac}^{(32)} & c_{ac}^{(33)} \end{bmatrix}, \quad (5.73)$$

где

$$\begin{aligned} c_{ac}^{(11)} &= -\sin \lambda_a' \cos \chi_c'' + \sin \varphi'' \cos \lambda_a \sin \chi_c'', \\ c_{ac}^{(12)} &= -\sin \lambda_a \sin \chi_c'' - \sin \varphi'' \cos \lambda_a \cos \chi_c'', \\ c_{ac}^{(13)} &= \cos \varphi'' \cos \lambda_a, \\ c_{ac}^{(21)} &= \cos \lambda_a \cos \chi_c'' + \sin \varphi'' \sin \lambda_a \sin \chi_c'', \\ c_{ac}^{(22)} &= \cos \lambda_a \sin \chi_c'' - \sin \varphi'' \sin \lambda_a \cos \chi_c'', \\ c_{ac}^{(23)} &= \cos \varphi'' \sin \lambda_a, \quad c_{ac}^{(31)} = -\cos \varphi'' \sin \chi_c'', \\ c_{ac}^{(32)} &= \cos \varphi'' \cos \chi_c'', \quad c_{ac}^{(33)} = \sin \varphi''. \end{aligned}$$

Для вычислений по формулам (5.71) необходимы следующие выражения, записанные в соответствии с (5.73):

$$\cos \varphi'' \sin \chi_c'' = -c_{ac}^{(31)}, \quad \cos \varphi'' \cos \chi_c'' = c_{ac}^{(32)}. \quad (5.74)$$

Для определения гравитационной широты  $\varphi''$ , абсолютной долготы  $\lambda_a$  и угла ориентации  $\chi_c''$  опорного трехгранника  $x_c''y_c''z_c''$  в азимуте получим выражение из (5.73):

$$\sin \varphi'' = c_{ac}^{(33)}, \quad \operatorname{tg} \lambda_a = \frac{c_{ac}^{(23)}}{c_{ac}^{(13)}}, \quad \operatorname{tg} \chi_c'' = -\frac{c_{ac}^{(31)}}{c_{ac}^{(32)}}. \quad (5.75)$$

Элементы  $c_{ac}^{(ij)}$  определяются из решений линейных дифференциальных уравнений.

В соответствии с (3.106) эту систему уравнений можно записать в виде опорного матричного уравнения

$$\dot{C}_{ac} = C_{ac} \cdot \check{\omega}_c, \quad (5.76)$$

где

$$\check{\omega}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_{yc}'' \\ 0 & 0 & -\omega_{xc}'' \\ -\omega_{yc}'' & \omega_{xc}'' & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.77)$$

Матричное уравнение (5.76) содержит девять уравнений. Мы должны решить только шесть дифференциальных уравнений (см. п. 3.4.3). В данном случае удобнее решать уравнения, определяющие элементы третьей строки матрицы  $C_{ac}$  и, например, второй строки.

В обычной форме эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{c}_{ac}^{(21)} &= -\omega_{yc}'' \dot{c}_{ac}^{(23)}, \quad \dot{c}_{ac}^{(22)} = \omega_{xc}'' c_{ac}^{(23)}, \\ \dot{c}_{ac}^{(23)} &= \omega_{yc}'' c_{ac}^{(21)} - \omega_{xc}'' c_{ac}^{(22)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_{ac}^{(31)} &= -\omega_{yc}'' c_{ac}^{(33)}, \quad \dot{c}_{ac}^{(32)} = \omega_{xc}'' c_{ac}^{(33)}, \\ \dot{c}_{ac}^{(33)} &= \omega_{yc}'' c_{ac}^{(31)} - \omega_{xc}'' c_{ac}^{(32)}. \quad \square \quad (5.78) \end{aligned}$$

Элементы первой строки матрицы  $C_{ac}$  определяют направляющие косинусы оси  $\xi_a^0$  или компоненты единичного вектора  $\xi_a^0$ . Эти компоненты могут быть получены из векторного произведения  $\xi_a^0 = \eta_a^0 \times \xi_a^0$ . В (5.75) фигурирует только один элемент первой строки — элемент  $c_{ac}^{(13)}$ . Этот элемент определяется после решения уравнений (5.78) по формуле

$$c_{ac}^{(13)} = c_{ac}^{(21)} c_{ac}^{(32)} - c_{ac}^{(22)} c_{ac}^{(31)}, \quad (5.79)$$

т. е. элементы второй и третьей строк являются компонентами единичных векторов  $\eta_a^0$  и  $\xi_a^0$ .

Информация о правых частях (5.69) поставляется акселерометрами. После интегрирования (5.69) получаем  $V_{xc}''$  и  $V_{yc}''$  в виде функций времени, затем по (5.70) и (5.71) формируем  $\omega_{xc}''$  и  $\omega_{yc}''$ .

В выражения  $\omega_{xc}''$  и  $\omega_{yc}''$  будут входить квадраты величин  $c_{ac}^{(32)}$  и  $c_{ac}^{(31)}$ , а также их произведения, так что после подстановки в уравнения (5.78) развернутых выражений для  $\omega_{xc}''$  и  $\omega_{yc}''$  они становятся нелинейными. Нелинейные члены будут входить в уравнения (5.78) с малым параметром — относительным коэффициентом сжатия Земли  $\alpha = 3,35 \cdot 10^{-3}$ . После нахождения соответствующих элементов  $c_{ac}^{(ij)}$  координаты  $\lambda_a$ ,  $\varphi''$  и азимутальный угол опорного трехгранника  $\chi_c''$  определяются тригонометрическими формулами (5.75).

В данном варианте алгоритма вычислительные формулы не содержат величин, обращающихся в бесконечность на полюсах Земли \*).

Вычисление  $\lambda_a$ ,  $\chi_c''$  можно производить в любой близости от полюсов. На полюсах вторая и третья формулы становятся неопределенными. Мы можем  $\lambda_a$  и  $\chi_c''$  доопределить предельными значениями, зависящими от траекторий подхода к полюсам.

Интересно отметить, что если в алгоритме можно воспользоваться сферической моделью Земли и принять  $R_{yc}'' = R_{xc}'' = R = R_0 + h$  и  $R_c'' = 0$ , то уравнения (5.91) будут линейными.

\*) Читателю предлагается сравнить с формулами счисления

$$\dot{\lambda}_a = \omega_{yc}'' \operatorname{sec} \varphi'' \quad \text{и} \quad \dot{\chi}_c'' = \omega_{yc}'' \operatorname{tg} \varphi''.$$

### § 6.1. Система с ориентацией опорного трехгранника по географической вертикали

**6.1.1. Общие положения.** В предыдущей главе были рассмотрены алгоритмы инерциальных систем навигации. Алгоритмы не могут быть точно воспроизведены в инерциальных навигационных системах. При их реализации возникает ошибка, обусловленная неизбежными несовершенствами отдельных элементов. Вследствие этого координаты местоположения объекта и компоненты скорости движения, получаемые на выходе инерциальной системы, которые мы будем называть *приборными* или *расчетными значениями* соответствующих величин, будут несколько отличаться от своих действительных значений.

Эти отклонения или выходные ошибки инерциальных систем зависят от различных причин. Эти причины будут являться входными возмущениями или входными ошибками инерциальных систем. Входные возмущения будем разбивать на четыре класса: на методические и инструментальные ошибки, ошибки в установке осей чувствительности измерительных элементов и ошибки начальной выставки инерциальных систем.

*Методические ошибки* обуславливаются ошибками алгоритма, положенного в основу функционирования системы. Ошибки алгоритма могут зависеть от неполноты наших знаний о соответствующих физических явлениях. В данном случае это прежде всего относится к структуре и количественным характеристикам гравитационного поля Земли, к величине и направлению угловой скорости ее суточного вращения и к параметрам, определяющим фигуру Земли. В некоторых случаях методические ошибки как бы заранее планируются в процессе проектирования системы. Так поступают тогда, когда методические ошибки, возникающие при упрощении алгоритма, компенсируются улучшением других характеристик инерциальной системы: уменьшением инструментальных ошибок, повышением надежности системы, упрощением работы с ней в процессе эксплуатации, повышением экономичности.

Под *инструментальными ошибками* мы понимаем ошибки чувствительных элементов системы и ошибки вычислительного уст-

ройства. Это прежде всего собственный дрейф гироскопов и смещение нуля акселерометров — приборов, являющихся измерительными элементами системы, а также дрейф нуля интегрирующих элементов вычислительного устройства. Кроме того, такого рода ошибки могут быть обусловлены отклонением безразмерных масштабных коэффициентов от своих номинальных значений, равных единице.

Следующая группа ошибок является специфичной для инерциальных систем, такие ошибки в зарубежной литературе иногда называют *ошибками конструкции*. Их возникновение можно пояснить следующим образом. Рассмотренные раньше алгоритмы были построены в предположении (хотя это и не является принципиальным), что соответствующие измерительные оси акселерометров и оси чувствительности гироскопов параллельны. В реальных конструкциях указанные оси могут оказаться рассогласованными на небольшие углы из-за неизбежных погрешностей в установке измерительных приборов относительно базовых площадок. Этот факт вызывает дополнительные ошибки на выходе инерциальных систем. Анализ ошибок конструкции позволяет выработать обоснованные требования к технологии выставки осей измерительных приборов относительно тем или иным способом материализованных осей опорного трехгранника.

И наконец, к последней группе ошибок, и также специфичных для инерциальных систем, относятся *ошибки начальной выставки*. Они обуславливаются следующими причинами. К моменту запуска инерциальной системы необходимо на выходах всех интегрирующих элементов установить начальное значение соответствующих величин (координат местоположения объекта, проекций скорости движения, угла отклонения в азимуте платформы от направления соответствующего меридиана и т. д.). Здесь ошибки могут возникать из-за неточной внешней информации об этих величинах к моменту запуска системы, а также из-за инструментальных погрешностей устройств ввода начальных значений в интегрирующие элементы системы. Кроме того, ошибки могут возникнуть из-за того, что мы не можем точно определить ориентацию моделирующего (приборного) опорного трехгранника относительно действительного опорного трехгранника. Ошибки начальной выставки порождают собственные колебания инерциальной системы. Для неустойчивых систем ошибки, порожденные неточной начальной выставкой, будут возрастать с течением времени, для асимптотически устойчивых систем они, наоборот, с течением времени будут стремиться к нулю. В промежуточном случае, когда система будет удовлетворять условиям обыкновенной устойчивости, эти ошибки будут иметь колебательный характер или стремиться к некоторой постоянной величине. Параметры колебательного движения и указанная выше постоянная величина зависят

от величины ошибок начальной выставки. Анализ ошибок инерциальных систем мы будем вести с помощью так называемых *уравнений в вариациях*, представляющих собой линеаризованные уравнения первого приближения относительно выходных ошибок системы; правые части таких уравнений будут состоять из линейных комбинаций возмущений (ошибок) на входе рассматриваемых систем. При составлении уравнений в вариациях мы будем пользоваться сферической моделью Земли. При таком подходе мы не допустим большой ошибки, когда алгоритм системы (что имеет место в нашем случае) построен на базе референц-эллипсоида, представляющего собой слегка сжатый вдоль линии полюсов эллипсоид вращения. Геометрические параметры референц-эллипсоида и земной сферы отличаются на небольшую величину, которая в первом приближении пропорциональна безразмерному коэффициенту относительного сжатия Земли  $\alpha = 3,35 \cdot 10^{-3}$ . Входные ошибки (инструментальные ошибки, ошибки конструкции и начальной выставки) будут являться величинами того же порядка малости. При линейном анализе ошибок величины второго и более высокого порядка малости не учитываются, а при замене референц-эллипсоида земной сферой возникают как раз ошибки такого порядка малости.

В дальнейшем мы будем пользоваться различными сферическими моделями Земли, рассмотренными в п. 1.4.2, в зависимости от того, ориентирован ли опорный трехгранник по географической или по гравитационной вертикали.

Во избежание возможных недоразумений еще раз подчеркнем, что алгоритм здесь считается построенным для сфероидальной модели Земли, а для анализа инструментальных выходных ошибок инерциальной системы предлагается использовать сферическую модель Земли. Тогда с точностью до величины второго порядка малости относительно коэффициента сжатия  $\alpha = 3,3 \cdot 10^{-3}$  и соответствующей входной инструментальной ошибки мы будем получать практически одинаковые результаты. Если же нужно определить методические ошибки инерциальной системы, обусловленные переходом в алгоритме от сфероидальной модели Земли к сферической модели, то тогда, естественно, нужно провести сравнение алгоритмов, соответствующих этим моделям.

**6.1.2. Уравнения ошибок инерциальной системы с географическими опорным и навигационным трехгранниками.** Алгоритм исследуемой системы, построенный для сфероидальной модели Земли, рассмотрен в п. 5.2.1.

Соответствующие аналитические зависимости алгоритма для сферической модели Земли будут получаться из формул п. 5.2.1, если в них положить  $R_1 = R_2 = R$ . Такой алгоритм можно было бы вывести самостоятельно, если взять первую сферическую модель Земли (п. 1.4.2), в которой направление ускорения силы

тяжести  $g$  совпадает с нормалью (с радиусом) к земной сфере. Рассматриваемая инерциальная система имеет два акселерометра с горизонтальными измерительными осями и предназначена для решения задач навигации при горизонтальном движении объекта. Уравнения ошибок, как и аналитические зависимости алгоритма, будем выражать через путевую (относительную) скорость  $v$ .

Выпишем формулы алгоритма, соответствующего сферической модели Земли. Из (5.1) при  $R_1 = R_2 = R$  и с учетом (1.134) получим выражения

$$\omega_x = \omega'_x, \quad (6.1)$$

$$\omega_y = U \cos \varphi + \omega'_y, \quad (6.2)$$

$$\omega_z = U \sin \varphi + \omega'_y \operatorname{tg} \varphi, \quad (6.3)$$

где

$$\omega'_x = -\frac{v_y}{R}, \quad (6.4)$$

$$\omega'_y = \frac{v_x}{R}. \quad (6.5)$$

Напомним, что  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  и  $\omega'_x$ ,  $\omega'_y$  являются соответственно проекциями абсолютной и относительной угловых скоростей географического трехгранника  $xuz$  на его собственные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Выражения (5.3) не изменяют своей внешней формы, в них только  $\omega_z$  нужно теперь определять формулой (6.3). Формулычисления географических координат (5.4) запишем в виде

$$\dot{\varphi} = -\dot{\omega}'_x, \quad \dot{\lambda} = \dot{\omega}'_y \operatorname{sec} \varphi. \quad (6.6)$$

Перейдем к составлению уравнений ошибок. Формулы (6.1) — (6.3) и (6.4) — (6.5) определяют в идеальном случае угловую скорость вращения трехгранника  $x_p y_p z_p$ , жестко связанного со стабилизированной платформой, который моделирует опорный географический трехгранник  $xuz$ . В реальном случае трехгранник  $x_p y_p z_p$  будет вращаться с несколько другой угловой скоростью и поэтому он будет рассогласован с моделируемым трехгранником  $xuz$  на некоторые, вообще говоря, малые углы, которые будут непрерывно измеряться во времени. Малые относительные движения трехгранника  $x_p y_p z_p$ , т. е. гиросплатформы относительно опорного географического трехгранника  $xuz$ , будут описываться уравнениями (4.35).

Уравнения (4.35) мы перепишем здесь в несколько измененном виде. Во-первых, будем вместо  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  писать  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$ , во-вторых, в правых частях уравнений раскроем скобки и будем вместо  $\tilde{\omega}_x$  писать  $\omega_x + \Delta\omega_x$  и т. д. и с точностью до величин второго порядка малости относительно  $\delta h_k$  и  $\Delta\omega_x = \tilde{\omega}_x - \omega_x$  и т. д. будем заменять  $\tilde{\omega}_k \delta h_k$  на  $\delta h_k \omega_x$  и т. д. и, в-третьих, перенесем

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$  из левых частей уравнений в правые и будем полагать

$$\Delta\omega_x = \tilde{\omega}_x - \omega_x, \quad \Delta\omega_y = \tilde{\omega}_y - \omega_y, \quad \Delta\omega_z = \tilde{\omega}_z - \omega_z.$$

Тогда получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_x + \omega_y \gamma_z - \omega_z \gamma_y &= \Delta\omega_x + \omega_x \delta h_K + \delta\omega_x, \\ \dot{\gamma}_y + \omega_z \gamma_x - \omega_x \gamma_z &= \Delta\omega_y + \omega_y \delta h_K + \delta\omega_y, \\ \dot{\gamma}_z + \omega_x \gamma_y - \omega_y \gamma_x &= \Delta\omega_z + \omega_z \delta h_K + \delta\omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

В (6.7)  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$  определяют ошибки приборной вертикали, угол  $\gamma_z$  — ошибку в определении положения платформы в азимуте, величины  $\Delta\omega_x, \Delta\omega_y, \Delta\omega_z$  определяют выходные ошибки системы в определении проекций абсолютной угловой скорости опорного трехгранника  $xuz$ . Для дальнейших исследований будем выражать величины  $\Delta\omega_x, \Delta\omega_y, \Delta\omega_z$  через выходные ошибки  $\Delta\omega'_x = \tilde{\omega}'_x - \omega'_x, \Delta\omega'_y = \tilde{\omega}'_y - \omega'_y$  проекций  $\omega'_x, \omega'_y$  относительной угловой скорости трехгранника  $xuz$  и  $\Delta\varphi = \tilde{\varphi} - \varphi$  широты  $\varphi$  местоположения объекта. Для этой цели воспользуемся формулами (6.1) — (6.3). Разность между расчетными и истинными значениями соответствующих величин можно тогда представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\omega}_x - \omega_x &= \tilde{\omega}'_x - \omega'_x, \\ \tilde{\omega}_y - \omega_y &= U \cos \tilde{\varphi} + \tilde{\omega}'_y - U \cos \varphi - \omega'_y, \\ \tilde{\omega}_z - \omega_z &= U \sin \tilde{\varphi} + \tilde{\omega}'_y \operatorname{tg} \tilde{\varphi} - U \sin \varphi - \omega'_y \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Будем находить главные линейные части соответствующих конечных приращений. Для этой цели функции, стоящие в правых частях (6.8) и зависящие от расчетных значений соответствующих величин, разложим в ряд Тейлора около истинных значений этих величин. Пренебрегая в этих разложениях величинами второго и более высокого порядка малости относительно  $\Delta\omega'_x, \Delta\omega'_y, \Delta\varphi$  из (6.8), получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta\omega_x &= \Delta\omega'_x, \\ \Delta\omega_y &= \Delta\omega'_y - U \sin \varphi \Delta\varphi, \\ \Delta\omega_z &= \Delta\omega'_y \operatorname{tg} \varphi + (U \cos \varphi + \omega'_y \sec^2 \varphi) \Delta\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Формулы (6.9) получаются формальным варьированием уравнений (6.1) — (6.3). В дальнейшем мы так и будем поступать в аналогичных случаях.

Подставляя в (6.7)  $\Delta\omega_x, \Delta\omega_y, \Delta\omega_z$  из (6.9), получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_x + \omega_y \gamma_z - \omega_z \gamma_y &= \Delta\omega'_x + \delta\omega_1, \\ \dot{\gamma}_y + \omega_z \gamma_x - \omega_x \gamma_z &= \Delta\omega'_y - U \sin \varphi \Delta\varphi + \delta\omega_2, \\ \dot{\gamma}_z + \omega_x \gamma_y - \omega_y \gamma_x &= \\ &= \Delta\omega'_y \operatorname{tg} \varphi + (U \cos \varphi + \omega'_y \sec^2 \varphi) \Delta\varphi + \delta\omega_3 \quad \square \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega'_1 &= \omega_x \delta h_K + \delta\omega_x, \\ \delta\omega'_2 &= \omega_y \delta h_K + \delta\omega_y, \\ \delta\omega'_3 &= \omega_z \delta h_K + \delta\omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.10a)$$

Величины  $\delta\omega'_1, \delta\omega'_2, \delta\omega'_3$  определяют эквивалентный дрейф гиروطформы в проекциях на оси опорного трехгранника, которым здесь является географический трехгранник  $xuz$ . Первые слагаемые в последних трех формулах (6.10a) обуславливают дрейф гиروطформы из-за ошибки масштабного коэффициента характеристик каналов управления, вторые слагаемые определяют собственный дрейф гиروطформы.

Перейдем теперь к составлению уравнений ошибок горизонтальных акселерометров. Уравнения ошибок однокомпонентного акселерометра, работающего в квазистатическом режиме измерений, получаются из соотношений (4.19), в которых  $a_x$  есть проекция кажущегося ускорения на измерительную ось акселерометра. В рассматриваемом случае измерительные оси акселерометров направлены параллельно осям  $x_p, y_p$  стабилизированной платформы, поэтому характеристики реальных акселерометров можно описать уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}_x &= (1 + \delta h_a) a_{x_p} + \delta a_x, \\ \tilde{a}_y &= (1 + \delta h_a) a_{y_p} + \delta a_y. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Величины  $a_{x_p}, a_{y_p}$  определяются через проекции  $a_x, a_y, a_z$  кажущегося ускорения на оси  $x, y, z$  опорного географического трехгранника  $xuz$  соотношениями (3.142). Если подставить в (6.11)  $a_{x_p}, a_{y_p}$  из (3.142), раскрыть скобки и пренебречь величинами  $\gamma_x \delta h_a, \gamma_y \delta h_a$  и т. д. как величинами второго порядка малости, то уравнения ошибок акселерометров можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta a_x &= a_y \gamma_z - a_z \gamma_y + \delta a_1, \\ \Delta a_y &= a_z \gamma_x - a_x \gamma_z + \delta a_2, \\ \delta a_1 &= a_x \delta h_a + \delta a_x, \\ \delta a_2 &= a_y \delta h_a + \delta a_y. \end{aligned} \right\} \quad (6.12a)$$

При наличии третьего вертикального акселерометра его ошибки по аналогии с (6.12) и (6.12a) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta a_z &= a_x \gamma_y - a_y \gamma_x + \delta a_3, \\ \delta a_3 &= a_z \delta h_a + \delta a_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.12b)$$

В уравнениях (6.12), (6.12a), (6.12b)  $\Delta a_x = \tilde{a}_x - a_x, \Delta a_y = \tilde{a}_y - a_y, \Delta a_z = \tilde{a}_z - a_z$ ; величины  $\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3$  называют

эквивалентными смещениями нулей соответствующих акселерометров.

Следует заметить, что выражения (6.12) справедливы в общем случае, т. е. для любого опорного трехгранника, если в них соответствующим образом заменить нижний индекс. Просто в данном случае он совпадает с географическим трехгранником  $xuz$ , который к тому же является навигационным трехгранником инерциальной системы рассматриваемого типа.

Уравнения ошибок первого интегратора определяются (4.27). В нашем случае, сравнивая выражения для  $\dot{v}_x$  и  $\dot{v}_y$  в виде (4.24) и (5.3), получим для  $B_x$  и  $B_y$  выражения

$$\left. \begin{aligned} B_x &= (U \sin \varphi + \omega_z) v_y, \\ B_y &= -(U \sin \varphi + \omega_z) v_x. \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Варьируя (6.13), получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_x &= (U \sin \varphi + \omega_z) \Delta v_y + (U \cos \varphi \Delta \varphi + \Delta \omega_z) v_y, \\ \Delta B_y &= -(U \sin \varphi + \omega_z) \Delta v_x - (U \cos \varphi \Delta \varphi + \Delta \omega_z) v_x. \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Подставляя  $\Delta B_x$  и  $\Delta B_y$  из (6.14) в (4.27), получим уравнения ошибок первых интеграторов в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{v}_x &= \Delta a_x + (U \sin \varphi + \omega_z) \Delta v_y + (U \cos \varphi \Delta \varphi + \Delta \omega_z) v_y + \delta \dot{v}_1, \\ \Delta \dot{v}_y &= \Delta a_y - (U \sin \varphi + \omega_z) \Delta v_x - (U \cos \varphi \Delta \varphi + \Delta \omega_z) v_x + \delta \dot{v}_2, \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{v}_1 &= \dot{v}_x \delta h_n + \delta \dot{v}_x, \\ \delta \dot{v}_2 &= \dot{v}_y \delta h_n + \delta \dot{v}_y, \end{aligned} \right\} \quad (6.15a)$$

где  $\delta \dot{v}_1$  и  $\delta \dot{v}_2$  определяют эквивалентный дрейф соответствующих интеграторов.

Уравнения ошибок в форме (6.15) неудобны, так как в них наряду с вариациями путевой скорости  $\Delta v_x$ ,  $\Delta v_y$  и их производными входит вариация абсолютной угловой скорости  $\Delta \omega_z$ , которая функционально зависит от вариаций  $\Delta v_x$  и  $\Delta \varphi$ . Нужно выбрать группу независимых вариаций и через них выразить уравнения (6.15). За такие вариации удобно принять  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta \omega_x$ ,  $\Delta \omega_y$ , причем последние две вариации определяются соотношениями

$$\Delta \omega_x = -\frac{\Delta v_y}{R}, \quad \Delta \omega_y = \frac{\Delta v_x}{R} \quad (6.16)$$

и соответственно

$$\Delta \dot{\omega}_x = -\frac{\Delta \dot{v}_y}{R}, \quad \Delta \dot{\omega}_y = \frac{\Delta \dot{v}_x}{R}, \quad (6.17)$$

которые легко получить из (6.15).

Кроме того, введем обозначения:

$$f_x = \frac{a_x}{R}, \quad f_y = \frac{a_y}{R}, \quad f_z = \frac{a_z}{R}. \quad (6.18)$$

Далее поступим следующим образом. В уравнения (6.15) подставим  $\Delta \omega_z$  и  $\Delta a_x$ ,  $\Delta a_y$ , определенные из (6.9) и (6.12), затем разделим обе части уравнений (6.15) на  $R$ , воспользуемся новыми обозначениями (6.16), (6.17), (6.18) и, наконец, сделаем приведение подобных членов по вариациям независимых величин.

Тогда получим уравнения в виде

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\omega}'_x &= f_z \gamma_x - f_z \gamma_z - 2(U \sin \varphi + \omega'_y \operatorname{tg} \varphi) \Delta \omega'_y - \\ &\quad - (2\tilde{\omega}'_y U \cos \varphi + \omega'^2_y \sec^2 \varphi) \Delta \varphi + \delta \dot{\omega}'_1, \\ \Delta \dot{\omega}'_y &= -f_z \gamma_y + f_y \gamma_z - (2U \sin \varphi + \omega'_y \operatorname{tg} \varphi) \Delta \omega'_x - \\ &\quad - \omega'_x \operatorname{tg} \varphi \Delta \omega'_y - (2\omega'_x U \cos \varphi + \omega'_x \omega'_y \sec^2 \varphi) \Delta \varphi + \delta \dot{\omega}'_2, \quad \square \end{aligned} \quad (6.19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{\omega}'_1 &= f_y \delta h_a + \frac{1}{R} \delta a_y - \dot{\omega}'_x \delta h_n + \frac{1}{R} \delta \dot{v}_y = \frac{1}{R} \delta a_2 + \frac{1}{R} \delta \dot{v}_2, \\ \delta \dot{\omega}'_2 &= f_x \delta h_a + \frac{1}{R} \delta a_x + \dot{\omega}'_y \delta h_n + \frac{1}{R} \delta \dot{v}_x = \frac{1}{R} \delta a_1 + \frac{1}{R} \delta \dot{v}_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Величины  $\delta \dot{\omega}'_1$  и  $\delta \dot{\omega}'_2$  определяют обобщенный дрейф интеграторов. Величины  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$ , входящие в (6.20), можно выразить через кинематические параметры, если воспользоваться общими выражениями (3.57). В (3.57) необходимо положить  $R'_1 = R'_2 = R'_3$ ,  $x^i_m = x$ ,  $y^i_m = y$ ,  $z^i_m = z$ ,  $\varphi^i = \varphi$  и  $v^i_{z_m} = v_z \equiv 0$ , так как

в данном параграфе мы рассматриваем первую сферическую модель Земли, опорный трехгранник, ориентированный по географической вертикали, и горизонтальное движение объекта. После указанных замен разделим обе части уравнений (3.57) на  $R$  и тогда с учетом (6.5) и (6.18) получим выражения

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \dot{\omega}'_y + (2U \sin \varphi + \omega'_y \operatorname{tg} \varphi) \omega'_x, \\ f_y &= -\dot{\omega}'_x + (2U \sin \varphi + \omega'_y \operatorname{tg} \varphi) \omega'_y, \\ f_z &= -\omega'^2_x - \omega'^2_y - 2\omega'_y U \cos \varphi + v^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

где

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}}. \quad (6.22)$$

Величина  $v$  имеет размерность угловой скорости. Эту величину можно трактовать как частоту малых (изохронных) незатухающих колебаний в поле силы тяжести Земли физического маятника, приведенная длина которого равна расстоянию от центра Земли

до объекта, движущегося на высоте  $h$ . При  $h = 0$  имеем  $R = R_0 = 6371$  км,  $g_{cp} = 980,66$  см/с<sup>2</sup> (1.162) и тогда  $v = 1,24 \cdot 10^{-3}$  1/с. В этом случае период  $T_v$  незатухающих (недемпфированных) колебаний равен 84,4 мин. Это так называемый *период Шулера*. Теперь перейдем к составлению уравнений ошибок вторых интеграторов: интегратора широты и интегратора долготы. С учетом формул счисления координат в форме (6.6) связь между приборными значениями выходных и входных величин вторых интеграторов (интегратора широты  $\varphi$  и долготы  $\lambda$ ) можно записать в виде \*)

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi} &= -h_{\varphi} \tilde{\omega}'_x + \delta\tilde{\varphi}, \\ \tilde{\lambda} &= h_{\lambda} \tilde{\omega}'_y \sec \tilde{\varphi} + \delta\tilde{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

Отсюда получаем методом варьирования уравнения ошибок вторых интеграторов в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta\dot{\varphi} &= -\Delta\omega'_x + \delta\dot{\varphi}_1, \\ \Delta\dot{\lambda} &= \Delta\omega'_y \sec \varphi + \omega'_y \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi \Delta\varphi + \delta\dot{\lambda}_1, \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{\varphi}_1 &= -\omega'_x \delta h_{\varphi} + \delta\dot{\varphi}, \\ \delta\dot{\lambda}_1 &= \omega'_y \sec \varphi \delta h_{\lambda} + \delta\dot{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

— эквивалентные дрейфы нулей рассматриваемых интеграторов. Совокупность уравнений (6.10), (6.19) и (6.24) определяет уравнения ошибок рассматриваемой инерциальной системы. Выпишем эти уравнения вместе и разместим в них искомые переменные (выходные ошибки системы) в следующей последовательности:  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$ ,  $\Delta\omega'_x$ ,  $\Delta\omega'_y$ ,  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\lambda$ .

Тогда получим уравнения ошибок инерциальной системы в виде \*\*)

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_x &= \omega_z \gamma_y - \omega_y \gamma_z + \Delta\omega'_x + \delta\omega'_1, \\ \dot{\gamma}_y &= -\omega_z \gamma_x + \omega_x \gamma_z + \Delta\omega'_y - U \sin \varphi \Delta\varphi + \delta\omega'_2, \\ \dot{\gamma}_z &= \omega_y \gamma_x - \omega_x \gamma_y + \operatorname{tg} \varphi \Delta\omega'_y + \\ &\quad + (U \cos \varphi + \omega'_y \sec^2 \varphi) \Delta\varphi + \delta\omega'_3, \\ \Delta\dot{\omega}'_x &= -f_z \gamma_x + f_x \gamma_z + 2(U \sin \varphi + \omega'_y \operatorname{tg} \varphi) \Delta\omega'_y + \\ &\quad + (2\omega'_y U \cos \varphi + \omega'_y \sec^2 \varphi) \Delta\varphi - \delta\dot{\omega}'_1, \end{aligned}$$

\*) Через  $\tilde{\varphi}$  и  $\tilde{\lambda}$  обозначены дрейфы нулей интеграторов широты и долготы.

\*\*) В этих уравнениях  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  определяются формулами (6.4).

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\omega}'_y &= -f_z \gamma_y + f_y \gamma_z - (2U \sin \varphi + \omega'_y \operatorname{tg} \varphi) \Delta\omega'_x - \\ &\quad - (2\omega'_x U \cos \varphi + \omega'_x \omega'_y \sec^2 \varphi) \Delta\varphi + \delta\dot{\omega}'_2 - \omega'_x \operatorname{tg} \varphi \Delta\omega'_y, \\ \Delta\dot{\varphi} &= -\Delta\omega'_x + \delta\dot{\varphi}_1, \\ \Delta\dot{\lambda} &= \sec \varphi \Delta\omega'_y + \omega'_y \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi \Delta\varphi + \delta\dot{\lambda}_1. \end{aligned} \quad \square \quad (6.26)$$

В полученных уравнениях знаком  $\Delta$  обозначаются выходные ошибки инерциальной системы по определению координат местоположения объекта  $\lambda$ ,  $\varphi$  и путевой скорости  $v_x$ ,  $v_y$  (см. (6.16)), а знаком  $\delta$  — входные возмущения или входные ошибки. Выходные ошибки в ориентации стабилизированной платформы обозначаются без знака  $\Delta$  буквами  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$ , так как их номинальные значения равны нулю.

Входные возмущения, обусловленные ошибками конструкции в уравнениях (6.26), не учтены. Ошибки от начальной выставки учитываются заданием начальных условий, т. е. значениями  $\gamma_x(0)$ ,  $\gamma_y(0)$ ,  $\gamma_z(0)$ ,  $\Delta\omega'_x(0)$ ,  $\Delta\omega'_y(0)$ ,  $\Delta\varphi(0)$ ,  $\Delta\lambda(0)$ .

Входные ошибки, фигурирующие в (6.26), определяются равенствами (6.10а), (6.20) и (6.25), а величины  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$  — соотношениями (6.21).

В правых частях (6.26) коэффициенты, стоящие при выходных ошибках, зависят от широты места и кинематических параметров, поэтому они зависят от выбора траектории движения и закона движения объекта вдоль этой траектории, т. е. в конечном итоге они будут являться известными функциями времени. Таким образом, с точки зрения теории дифференциальных уравнений (6.26) являются неоднородными линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. Неоднородность уравнений определяется входными ошибками инерциальной системы. Эти ошибки могут быть постоянными по величине или описываться известными (детерминированными) функциями времени, они также могут быть случайными величинами или случайными функциями времени. В последнем случае должны быть известны их статистические характеристики.

Рассмотрим идеальный случай, когда все входные ошибки инерциальной системы равны нулю. В этом случае (6.26) превращается в однородную систему уравнений. Однородная система имеет тривиальное решение

$$\gamma_x(t) = \gamma_y(t) = \gamma_z(t) = \Delta\omega'_x(t) = \Delta\omega'_y(t) = \Delta\varphi(t) = \Delta\lambda(t) \equiv 0. \quad (6.27)$$

Очевидно, такие же соотношения справедливы для  $t = 0$ , т. е. имеют место равенства

$$\gamma_x(0) = \gamma_y(0) = \gamma_z(0) = \Delta\omega'_x(0) = \Delta\omega'_y(0) = \Delta\varphi(0) = \Delta\lambda(0) \equiv 0. \quad (6.28)$$

Так как решение однородной линейной системы уравнений, удовлетворяющее заданному начальному условию, является единственным, то можно утверждать, что при выполнении начального условия (6.28) решение однородной системы уравнений по необходимости будет иметь вид (6.27). Таким образом, в идеальном случае при правильной начальной выставке на выходе инерциальной системы будут без искажений воспроизводиться координаты  $\varphi$ ,  $\lambda$  местоположения объекта, компоненты  $v_x$ ,  $v_y$  его скорости движения и оси трехгранника  $x_p, y_p, z_p$  будут точно ориентированы в направлениях на восток, север и географической вертикали. Это будет справедливо для любого момента времени и при любом характере движения объекта, т. е. независимо от вида функций  $v_x(t)$  и  $v_y(t)$ .

Комплекс условий, обеспечивающий инерциальной системе указанные выше свойства, называют *условиями инвариантности*.

Для инвариантной системы все выходные ошибки тождественно равны нулю независимо от характера движения объекта. Всякое отклонение от условий инвариантности порождает выходные ошибки в инерциальной системе, которые будут описываться отличными от тождественного нуля решениями уравнений (6.26). Решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (6.26) не выражаются в конечном виде через элементарные функции, однако решение конкретных задач не представляет принципиальных трудностей, так как оно всегда может быть получено численными методами или моделированием на цифровых вычислительных машинах. Возможно также применение аналоговых моделирующих устройств, в особенности в тех случаях, когда требуется определить характер общей зависимости выходных ошибок от входных возмущений без предъявления к ним высоких требований по точности.

В некоторых случаях (6.26) будут представлять собой уравнения с постоянными коэффициентами, и тогда их решение можно выразить в замкнутой аналитической форме. Для анализа устойчивости уравнений ошибок такое решение не является исчерпывающим, однако при этом значительно упрощается изучение внутренних свойств инерциальной системы. Такой случай будет, например, иметь место, когда объект движется с постоянной путевой скоростью вдоль географической параллели. При таком движении имеют место равенства

$$\varphi(t) \equiv \text{const}, \quad \dot{\omega}'_x(t) = \dot{\omega}'_y(t) \equiv 0, \quad \omega'_y(t) = \text{const}, \quad (6.29)$$

при которых формулы (6.21) примут вид

$$\left. \begin{aligned} f_x &= 0, \\ f_y &= 2\omega'_y U \sin \varphi + \omega_y'^2 \text{tg} \varphi, \\ f_z &= -\omega_y'^2 - 2\omega'_y U \cos \varphi + v^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

При условии (6.29) и (6.30) из (6.26) получаем уравнения ошибок с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}'_x &= (U \sin \varphi + \omega'_y \text{tg} \varphi) \gamma_y - (U \cos \varphi + \omega'_y) \gamma_z + \Delta \omega'_x + \delta \omega'_1, \\ \dot{\gamma}'_y &= -(U \sin \varphi + \omega'_y \text{tg} \varphi) \gamma_x + \Delta \omega'_y - U \sin \varphi \Delta \varphi + \delta \omega'_2, \\ \dot{\gamma}'_z &= (U \cos \varphi + \omega'_y) \gamma_x + \text{tg} \varphi \Delta \omega'_y + \\ &\quad + (U \cos \varphi + \omega'_y \sec^2 \varphi) \Delta \varphi + \delta \omega'_3, \\ \Delta \dot{\omega}'_x &= (\omega_y'^2 + 2\omega'_y U \cos \varphi - v^2) \gamma_x + \\ &\quad + 2(U \sin \varphi + \omega'_y \text{tg} \varphi) \Delta \omega'_y + (2\omega'_y U \cos \varphi + \\ &\quad + \omega'_y \sec^2 \varphi) \Delta \varphi + \delta \omega'_1, \\ \Delta \dot{\omega}'_y &= (\omega_y'^2 + 2\omega'_y U \cos \varphi - v^2) \gamma_y + (2\omega'_y U \sin \varphi + \omega_y'^2 \text{tg} \varphi) \gamma_z - \\ &\quad - (2U \sin \varphi + \omega'_y \text{tg} \varphi) \Delta \omega'_x + \delta \omega'_2, \\ \Delta \dot{\varphi} &= -\Delta \omega'_x + \delta \dot{\varphi}_1, \\ \Delta \dot{\lambda} &= \sec \varphi \Delta \omega'_y + \omega'_y \text{tg} \varphi \sec \varphi \Delta \varphi + \delta \dot{\lambda}_1. \end{aligned} \quad \square (6.31)$$

В соответствии с (6.10a), (6.20), (6.30) и (6.25) в этом случае

$$\begin{aligned} \delta \omega'_1 &= \delta \omega_x, \quad \delta \omega'_2 = \omega_y \delta h_K + \delta \omega_y, \quad \delta \omega'_3 = \delta \omega_z + \omega_z \delta h_K, \\ \delta \dot{\omega}'_1 &= \frac{1}{R} \delta a_2 + \frac{1}{R} \delta \dot{v}_2, \quad \delta \dot{\omega}'_2 = \frac{1}{R} \delta a_1 + \frac{1}{R} \delta \dot{v}_1, \\ \delta \dot{\varphi}_1 &= \delta \dot{\varphi}, \\ \delta \dot{\lambda}_1 &= \delta \dot{\lambda} + \omega'_y \sec \varphi \delta h_\lambda. \end{aligned} \quad \square (6.32)$$

Решение уравнений с постоянными коэффициентами зависит от корней характеристического полинома. Характеристический полином  $\Delta(S)$ , соответствующий системе уравнений (6.31), можно записать в форме определителя.

$$\begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} & \Delta_{15} & \Delta_{16} & \Delta_{17} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} & \Delta_{25} & \Delta_{26} & \Delta_{27} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \Delta_{34} & \Delta_{35} & \Delta_{36} & \Delta_{37} \\ \Delta_{41} & \Delta_{42} & \Delta_{43} & \Delta_{44} & \Delta_{45} & \Delta_{46} & \Delta_{47} \\ \Delta_{51} & \Delta_{52} & \Delta_{53} & \Delta_{54} & \Delta_{55} & \Delta_{56} & \Delta_{57} \\ \Delta_{61} & \Delta_{62} & \Delta_{63} & \Delta_{64} & \Delta_{65} & \Delta_{66} & \Delta_{67} \\ \Delta_{71} & \Delta_{72} & \Delta_{73} & \Delta_{74} & \Delta_{75} & \Delta_{76} & \Delta_{77} \end{vmatrix}, \quad (6.33)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= -S, \quad \Delta_{12} = U \sin \varphi + \omega'_y \text{tg} \varphi, \\ \Delta_{13} &= -U \cos \varphi - \omega'_y, \quad \Delta_{14} = 1, \quad \Delta_{15} = 0, \\ \Delta_{16} &= 0, \quad \Delta_{17} = 0, \quad \Delta_{21} = -U \sin \varphi - \omega'_y \text{tg} \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{22} &= -S, \quad \Delta_{23} = 0, \quad \Delta_{24} = 0, \quad \Delta_{25} = 1, \\
\Delta_{26} &= -U \sin \varphi, \quad \Delta_{27} = 0, \quad \Delta_{31} = U \cos \varphi + \omega_y', \\
\Delta_{32} &= 0, \quad \Delta_{33} = -S, \quad \Delta_{34} = 0, \quad \Delta_{35} = \operatorname{tg} \varphi, \\
\Delta_{36} &= U \cos \varphi + \omega_y' \sec^2 \varphi, \quad \Delta_{37} = 0, \\
\Delta_{41} &= \omega_y'^2 + 2\omega_y' U \cos \varphi - v^2, \quad \Delta_{42} = 0, \quad \Delta_{43} = 0, \\
\Delta_{44} &= -S, \quad \Delta_{45} = 2U \sin \varphi + 2\omega_y' \operatorname{tg} \varphi, \\
\Delta_{46} &= 2\omega_y' U \cos \varphi + \omega_y'^2 \sec^2 \varphi, \quad \Delta_{47} = 0, \\
\Delta_{51} &= 0, \quad \Delta_{52} = \omega_y'^2 + 2\omega_y' \cos \varphi - v^2, \\
\Delta_{53} &= 2\omega_y' U \sin \varphi + \omega_y'^2 \operatorname{tg} \varphi, \quad \Delta_{54} = -2U \sin \varphi - \omega_y' \operatorname{tg} \varphi, \\
\Delta_{55} &= -S, \quad \Delta_{56} = 0, \quad \Delta_{57} = 0, \quad \Delta_{61} = 0, \quad \Delta_{62} = 0, \\
\Delta_{63} &= 0, \quad \Delta_{64} = -1, \quad \Delta_{65} = 0, \quad \Delta_{66} = -S, \quad \Delta_{67} = 0, \\
\Delta_{71} &= 0, \quad \Delta_{72} = 0, \quad \Delta_{73} = 0, \quad \Delta_{74} = 0, \quad \Delta_{75} = \sec \varphi, \\
\Delta_{76} &= \omega_y' \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi, \quad \Delta_{77} = -S.
\end{aligned}$$

Развертывая определитель (6.33) и приравнявая полученный полином 7-й степени нулю, представим характеристическое уравнение в виде

$$\Delta(S) = S(S^2 + a_1)(S^4 + a_2 S^2 + a_3) = 0. \quad (6.34)$$

Это уравнение можно заменить тремя равносильными уравнениями:

$$S = 0, \quad S^2 + a_1 = 0, \quad S^4 + a_2 S^2 + a_3 = 0, \quad (6.34a)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
a_1 &= (U + \omega_y' \sec \varphi)^2, \\
a_2 &= 4U^2 \sin^2 \varphi + 2\omega_y' U (3 \sin^2 \varphi - 1) \sec \varphi + \\
&\quad + \omega_y'^2 (2 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1) + 2v^2, \\
a_3 &= (v^2 - 2\omega_y' U \sec \varphi - \omega_y'^2 \sec^2 \varphi) \times \\
&\quad \times (v^2 - 2\omega_y' U \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi - \omega_y'^2 \operatorname{tg}^2 \varphi).
\end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

Корни первых двух уравнений (6.34a) имеют вид

$$S_1 = 0, \quad S_{2,3} = \pm i(U + \omega_y' \sec \varphi). \quad (6.36)$$

Нулевой корень обусловлен тем, что первые шесть уравнений (6.31) не зависят от  $\Delta\lambda$ . Эти уравнения решаются самостоятельно. Последнее уравнение, определяющее закон изменения  $\Delta\lambda$ , решается квадратурой после того, как найдено решение предыдущих шести уравнений. Корни биквадратного уравнения (третье урав-

нение (6.34a)) будут мнимыми только при выполнении неравенств

$$a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_2^2 > 4a_3. \quad (6.37)$$

Если эти неравенства не выполняются, некоторые корни соответствующего биквадратного уравнения будут иметь положительные вещественные части и тогда рассматриваемая система будет неустойчивой. Таким образом, неравенства (6.37) являются условиями обыкновенной устойчивости решений уравнений ошибок с постоянными коэффициентами (6.31). Уравнения ошибок имеют такую структуру, что их решения не могут быть асимптотически устойчивыми, так как корни  $S_{2,3}$  всегда мнимые.

Рассмотрим частный случай, когда  $\omega_y' = 0$  и  $\varphi = 0$ , т. е. когда объект находится на экваторе и неподвижен относительно Земли; тогда биквадратное уравнение (6.34a) сводится к виду

$$S^4 + 3v^2 S^2 + v^4 = 0. \quad (6.38)$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$S_{4,5,6,7} = \pm iv. \quad (6.39)$$

В этом случае мы получили две пары двукратных мнимых корней  $\pm iv$ . В случае кратных корней (6.39) нельзя судить об устойчивости без дополнительного исследования вида элементарных делителей характеристической матрицы (6.33), соответствующих этим корням. Однако для инженерной практики, пожалуй, является более предпочтительным путь построения решений уравнений (6.31) с использованием методов операционного исчисления. Ниже мы подробно исследуем этот случай и убедимся, что корням (6.39) будут соответствовать гармонические колебания с периодом Шулера

$$T_v = \frac{2\pi}{v} = 84,4 \text{ мин.} \quad (6.40)$$

Корни характеристического уравнения являются непрерывными функциями его коэффициентов; поэтому, если в выражениях для  $a_2$  и  $a_3$  (см. (6.35)) все слагаемые будут малы по отношению к  $2v^2$  и  $v^4$  соответственно, то можно ожидать, что корни биквадратного уравнения будут группироваться около корней (6.39).

К этому имеются следующие основания. Мы уже указывали, что  $v \approx 1,24 \cdot 10^{-3}$  1/с,  $U = 7,29 \cdot 10^{-5}$  1/с. Таким образом,  $v \approx 17 U$ . Величина  $\omega_y'$  существенно зависит от типа движущегося объекта. Для быстроходных морских судов эта величина может достигать значений  $\omega_y' = 0,05 U$ , для сверхзвуковых самолетов  $\omega_y' = 2U$ . Указанные величины получаются при скоростях  $v_x = 45$  узлам\*) и  $v_x = 3344$  км/ч для морских судов и самолетов соответственно. В некоторых источниках, например в [8], для указан-

\*) 1 узел = 1,852 км/ч.

ного случая приближенно значения корней биквадратного уравнения рекомендуется определять по формулам

$$S_{4,5} = \pm i (v + U \sin \varphi + \omega'_y \operatorname{tg} \varphi), \quad (6.41)$$

$$S_{6,7} = \pm i (v - U \sin \varphi - \omega'_y \operatorname{tg} \varphi). \quad (6.42)$$

В этом случае имеем четыре мнимых корня, которые на мнимой оси находятся несколько выше и несколько ниже корней  $\pm iv$ . Формулы (6.41—6.42) можно записать более компактно в виде

$$S_{4,5} = \pm i (v + \omega_2), \quad (6.43)$$

$$S_{6,7} = \pm i (v - \omega_2), \quad (6.44)$$

если учесть последнюю формулу (6.4). При этом естественно считается, что

$$U \sin \varphi + \omega'_y \operatorname{tg} \varphi \ll v. \quad (6.45)$$

Интересно отметить, что формулы (6.43), (6.44) совпадают с выражениями для частот собственных колебаний невозмущаемого пространственного гирокомпы (гирогоризонткомпы), полученными впервые А. Ю. Ишлинским [22], развившим точную теорию такого прибора.

**6.1.3. Анализ уравнений ошибок для неподвижного объекта, находящегося на экваторе.** При этих условиях характеристическое уравнение системы будет иметь два двойных мнимых корня:  $S_{4,5} = iv$  и  $S_{6,7} = -iv$  (см. (6.39)). При  $\varphi = 0$  и  $\omega'_y = 0$  уравнения (6.31) вырождаются в систему уравнений, которую запишем в следующей последовательности:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_y &= \Delta \omega'_y + \delta \omega_2, \\ \Delta \omega'_y &= -v^2 \gamma_y + \delta \dot{\omega}_2, \\ \Delta \dot{\lambda} &= \Delta \omega'_y + \delta \dot{\lambda}_1, \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_x &= -U \gamma_z + \Delta \omega'_x + \delta \omega_1, \\ \dot{\gamma}_z &= U \gamma_x + U \Delta \varphi + \delta \omega_3, \\ \Delta \omega'_x &= -v^2 \gamma_x + \delta \dot{\omega}_1, \\ \Delta \dot{\varphi} &= -\Delta \omega'_x + \delta \dot{\varphi}_1, \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

где входные возмущения определяются формулами (6.32).

Характеристические полиномы  $\Delta_1(S)$  и  $\Delta_2(S)$  систем (6.46) и (6.47) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1(S) &= S(S^2 + v^2), \\ \Delta_2(S) &= (S^2 + v^2)(S^2 + U^2), \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

каждый из них не имеет кратных корней, хотя в совокупности корни  $\pm iv$  будут двойными.

Рассмотрим сначала решение уравнений (6.46). Введем обозначение

$$\bar{\gamma}_y = \gamma_y - \Delta \lambda \quad (6.49)$$

и вычтем из первого уравнения (6.46) последнее уравнение. Тогда

$$\dot{\bar{\gamma}}_y = \delta \omega_2 - \delta \dot{\lambda}_1. \quad (6.50)$$

Решение первых уравнений (6.46) будем искать операционным методом. Для простоты изображение по Лапласу некоторой функции времени будем обозначать той же буквой от аргумента  $S$ . Так, например,  $\gamma_y(S)$  будет изображением  $\gamma_y(t)$ , т. е.  $\gamma_y(S) \div \gamma_y(t)$ , причем  $\gamma_y(0)$  будет, как и прежде, обозначать величину  $\gamma_y(t)$  при  $t = 0$ . Изображения функций при конкретных значениях параметра  $S$  не будут встречаться в тексте книги.

Уравнения в изображениях, которые соответствуют первым двум уравнениям (6.46) при начальном условии  $\gamma_y(0)$  и  $\Delta \omega'_y(0)$ , можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} S \bar{\gamma}_y(S) - \Delta \omega'_y(S) &= \gamma_y(0) + \delta \omega'_2(S), \\ v^2 \bar{\gamma}_y(S) + S \Delta \omega'_y(S) &= \Delta \omega'_y(0) + \delta \dot{\omega}'_2(S). \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_y(S) &= \frac{S}{S^2 + v^2} \gamma_y(0) + \frac{1}{S^2 + v^2} \Delta \omega'_y(0) + \\ &\quad + \frac{S}{S^2 + v^2} \delta \omega'_2(S) + \frac{1}{S^2 + v^2} \delta \dot{\omega}'_2(S), \\ \Delta \omega'_y(S) &= -\frac{v^2}{S^2 + v^2} \gamma_y(0) + \frac{S}{S^2 + v^2} \Delta \omega'_y(0) - \\ &\quad - \frac{v^2}{S^2 + v^2} \delta \omega_2(S) + \frac{S}{S^2 + v^2} \delta \dot{\omega}'_2. \quad \square \quad (6.52) \end{aligned}$$

Чтобы перейти к оригиналам, нужно задать конкретный вид входных ошибок. Будем считать, что эквивалентный дрейф гироскопа и эквивалентный сдвиг нуля акселерометра являются ступенчатыми функциями времени соответствующей интенсивности. Тогда

$$\delta \omega'_2(S) = \frac{\delta \omega_2}{S}, \quad \delta \dot{\omega}'_2 = \frac{\delta \dot{\omega}_2}{S},$$

где

$$\delta \omega_2 = \text{const}, \quad \delta \dot{\omega}_2 = \text{const}.$$

Далее, учитывая табличные изображения, имеем

$$\begin{aligned} \frac{S}{S^2 + v^2} &\div \cos vt, & \frac{v}{S^2 + v^2} &\div \sin vt, \\ \frac{1}{S(S^2 + v^2)} &= \frac{1}{v^2} \left( \frac{1}{S} - \frac{S}{S^2 + v^2} \right) &\div \frac{1}{v^2} (1 - \cos vt); \end{aligned}$$

непосредственно из (6.52) получим выражения для выходных ошибок инерциальной системы

$$\begin{aligned} \gamma_y(t) &= \gamma_y(0) \cos vt + \frac{\Delta\omega'_y(0)}{v} \sin vt + \\ &+ \frac{\delta\omega'_2}{v} \sin vt + \frac{\delta\dot{\omega}'_2}{v^2} (1 - \cos vt), \\ \Delta\omega'_y(t) &= -\gamma_y(0) v \sin vt + \Delta\omega'_y(0) \cos vt - \\ &- \delta\omega'_2 (1 - \cos vt) + \frac{\delta\dot{\omega}'_2}{v} \sin vt. \quad \square \quad (6.53) \end{aligned}$$

Заметим, что в правых частях (6.53) первые два слагаемых определяют ошибки от неправильной начальной выставки, они также определяют собственные гармонические колебания инерциальной системы, период которых совпадает с периодом Шулера, равным 84,4 мин при  $R = R_0 = 6371$  км. Остальные слагаемые выражают выходные ошибки от внешних возмущений  $\delta\omega'_2$  и  $\delta\dot{\omega}'_2$ . Эти слагаемые удовлетворяют нулевым начальным условиям, поэтому они определяют реакцию инерциальной системы на указанные входные возмущения. Входные возмущения возбуждают также колебания с собственной частотой  $v$ . Далее, интегрируя (6.50) при начальном условии  $\tilde{\gamma}_y(0) \approx \gamma_y(0) - \Delta\lambda(0)$  и в предположении  $\delta\omega_y = \text{const}$  и  $\delta\dot{\lambda} = \text{const}$ , получим

$$\tilde{\gamma}_y(t) = \gamma_y(0) - \Delta\lambda(0) + \delta\omega_2 t - \delta\dot{\lambda}_1 t. \quad (6.54)$$

Если разрешить (6.49) относительно  $\Delta\lambda$  и подставить туда  $\gamma_y$  и  $\tilde{\gamma}_y$  из (6.33) и (6.54), то в результате найдем выражение для ошибки в определении долготы  $\lambda$  местоположения объекта:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda(t) &= \Delta\lambda(0) - \gamma_y(0) (1 - \cos vt) + \frac{\Delta\omega'_y(0)}{v} \sin vt - \\ &- \delta\omega'_2 \left( t - \frac{\sin vt}{v} \right) + \frac{\delta\dot{\omega}'_2}{v^2} (1 + \cos vt) + \delta\dot{\lambda}_1 t. \quad (6.55) \end{aligned}$$

В полученном выражении фигурируют вековые члены, т. е. слагаемые, содержащие множителем время  $t$ . В конце концов ошибки от вековых членов будут доминирующими. Таким образом, для ошибки  $\Delta\lambda$  особенно опасными являются эквивалентный дрейф гироскопа  $\delta\omega'_2$  и эквивалентный дрейф нуля интегратора долготы  $\delta\dot{\lambda}_1$ . Эти величины определяются (6.32). По (6.32) можно установить эквиваленты для входных ошибок. Так, например, скорость собственного дрейфа гироскопа  $\delta\omega_y = 0,01$  град/ч и вариация масштабного коэффициента канала управления прецессией гироплатформы  $\delta h_k = 0,666 \cdot 10^{-3}$  вызывают одинаковую ошибку \*)  $\Delta\lambda$ .

\*) Этот факт, например, имеет место, если скорость полета вдоль параллели такова, что  $\omega_y \approx U = 15$  град/ч.

Ошибка в  $\Delta\lambda$  от  $\delta\dot{\lambda}$  растет пропорционально времени  $t$  потому, что интегратор долготы работает по разомкнутой схеме, а от  $\delta\omega_2$  потому, что средняя ошибка в  $\Delta\omega'_y$  от  $\delta\omega_2$  не равна нулю.

Ошибки приборной вертикали  $\gamma_y(t)$  и скорости  $\Delta\omega'_y(t)$  колеблются с частотой  $v$  около некоторого среднего положения.

Для входных ошибок (возмущений) имеют место соотношения (см. (6.22) и (6.32))

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta\omega'_2}{v} &= \frac{U}{v} \delta h_k + \frac{1}{v} \delta\omega_y, & \frac{\delta\dot{\omega}'_2}{v^2} &= \frac{\delta a_x + \delta v_x}{g}, \\ \frac{\delta\dot{\omega}'_2}{v} &= \frac{\delta a_x + \delta v_x}{\sqrt{gR}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

Выражениями (6.53) и (6.55) можно также пользоваться для определения статистических характеристик выходных ошибок, когда входными ошибками являются случайные величины. Случайные величины входных ошибок имеют постоянные значения для конкретного рабочего состояния инерциальной системы, но эти значения изменяются от «запуска» к «запуску» системы. Случайные величины полностью характеризуются своими функциями распределения или плотностями распределения вероятностей. Важными являются так называемые числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание  $M\xi$  и дисперсия  $D\xi$ . Математическое ожидание является средним (статистическим) значением случайной величины, а дисперсия — средним (статистическим) значением квадрата отклонения случайной величины от своего среднего значения, т. е.  $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$ . Если  $\xi$  является линейной комбинацией случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , т. е.

$$\xi = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n, \quad (6.57)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — известные функции времени или постоянные, то

$$M\xi = \sum_{i=1}^n a_i M\xi_i, \quad (6.58)$$

$$D\xi = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j M(\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j), \quad (6.59)$$

где  $M(\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j)$  есть момент корреляции случайных величин  $\xi_i$  и  $\xi_j$ .

При  $i = j$  имеем  $M(\xi_i - M\xi_i)^2 = D\xi_i$ .

Формула (6.59) принимает особенно простой вид для некоррелированных и, в частности, для независимых случайных величин.

Тогда

$$D\xi = \sum_{i=1}^n a_i^2 D\xi_i. \quad (6.60)$$

Средняя квадратическая ошибка случайной величины определяется соотношением

$$\sigma = \sqrt{D\xi}. \quad (6.61)$$

Таким образом, по известным числовым характеристикам входных случайных ошибок мы можем по (6.53) и (6.55) определить математические ожидания и дисперсии выходных ошибок инерциальной системы. Числовые характеристики не характеризуют полностью случайную ошибку системы. Случайная ошибка характеризуется доверительным пределом, т. е. интервалом, внутри которого случайная ошибка будет находиться с заданной вероятностью. Доверительный предел назначается в соответствии с теми практическими задачами, которые должны решать движущиеся объекты с установленными на них инерциальными системами.

По существу связь между указанными интервалами ошибок и соответствующими вероятностями устанавливается функциями распределения. Для нахождения функции распределения выходных случайных ошибок инерциальной системы можно использовать центральную предельную теорему теории вероятности [4, 15]. Если случайная величина является суммой достаточно большого числа независимых случайных величин с произвольными распределениями и ни одна из них не является преобладающей, то суммарная величина приблизительно распределена по нормальному закону. Для нормального закона наиболее важные значения доверительных пределов определяются выражением

$$\text{Вер}(-c\sigma < \xi - M\xi < c\sigma) = \begin{cases} 0,683 & \text{при } c = 1, \\ 0,954 & \text{при } c = 2, \\ 0,997 & \text{при } c = 3. \end{cases} \quad (6.62)$$

Если закон распределения выходной случайной ошибки установить невозможно, то оценить доверительный предел можно по числовым характеристикам с помощью теорем закона больших чисел.

Математические ожидания определяют систематические ошибки выходных величин инерциальной системы априори (до опыта), так как они всегда имеют одни и те же значения при любом приведении инерциальной системы в рабочее состояние. Эти ошибки можно скомпенсировать в процессе регулировки системы. Дисперсии являются мерой разброса случайных ошибок около их средних значений (математических ожиданий). Они характеризуют систематические ошибки инерциальной системы апостериори (после опыта); эти ошибки могут иметь постоянные значения в процессе непрерывной работы инерциальной системы, но определить их можно только после «запуска» системы. Если имеются техническая возможность и время для измерения таких ошибок после

«запуска» системы, то их можно скомпенсировать или учесть в вычислительном процессе. Однако не всегда входные возмущения являются случайными величинами. Часто входные возмущения изменяются с течением времени, причем такие изменения не поддаются контролю. В таких случаях входные возмущения описываются случайными функциями  $\xi(t)$ . Случайная функция  $\xi(t)$  при каждом фиксированном моменте времени  $t$  является случайной величиной с определенной функцией распределения. В результате опыта (в нашем случае при «запуске» большого числа однотипных инерциальных систем, работающих при одинаковых внешних условиях) случайная функция, описывающая входные возмущения, может принимать различные конкретные формы. Всякая функция, которая может оказаться равной случайной функции в результате опыта, называется ее *реализацией*.

Наиболее полно статистические свойства случайной функции  $\xi(t)$  описываются функциями плотности распределения, число которых бесконечно. Первая плотность распределения  $P(\xi, t)$  имеет следующий смысл: величина  $P(\xi, t) d\xi$  определяет вероятность того события, что значение случайной функции в момент времени  $t$  будет заключаться в пределах от  $\xi$  до  $\xi + d\xi$ . Вторая плотность распределения  $P(\xi_1, t_1; \xi_2, t_2)$  имеет следующий смысл: величина  $P(\xi_1, t_1; \xi_2, t_2) d\xi_1 d\xi_2$  есть вероятность того события, что значения случайной функции  $\xi(t)$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  будут заключаться в пределах от  $\xi_1$  до  $\xi_1 + d\xi_1$  и от  $\xi_2$  до  $\xi_2 + d\xi_2$  и т. д. Во многих случаях первые две функции плотности распределения полностью описывают статистические свойства случайной функции. Это имеет место, в частности, для случайных функций с нормальным распределением и для марковских процессов [27, 34]. По первым двум функциям плотности распределения можно вычислить математическое ожидание  $M\xi(t)$ , дисперсию  $D\xi(t) = M[\xi(t) - M\xi(t)]^2$  и корреляционную функцию  $K\xi(t_1, t_2) = M[\xi(t_1) - M\xi(t_1)][\xi(t_2) - M\xi(t_2)]$  для случайной функции  $\xi(t)$ . Указанные характеристики, определенные по первым двум функциям плотности распределения, считаются полученными осреднением по множеству реализаций.

Нас будет интересовать вопрос о нахождении математических ожиданий и дисперсий выходных случайных ошибок инерциальной системы по заданным соответствующим характеристикам входных возмущений. Эту задачу будем решать для одного важного случая, когда входные возмущения будут рассматриваться как стационарные случайные функции в широком смысле. Случайная функция считается стационарной в широком смысле, если ее математическое ожидание и дисперсия являются постоянными величинами, а корреляционная функция зависит только от разности  $t = t_2 - t_1$ , а не от конкретных значений моментов времени  $t_1$  и  $t_2$ . В нашем случае при стационарных входных возмущениях выход-

ные ошибки инерциальной системы будут являться нестационарными случайными функциями, их математические ожидания и дисперсии будут зависеть от времени. Найдем математические ожидания и дисперсии выходных ошибок  $\gamma_y(t)$ ,  $\Delta\omega'_y(t)$  и  $\Delta\lambda(t)$  для одного входного возмущения — эквивалентного дрейфа гиросплатформы  $\delta\omega'_2(t)$ . Не нарушая общности, будем считать  $\delta\omega'_2(t)$  центрированным случайным процессом, т. е. будем полагать, что математическое ожидание  $\delta\omega'_2(t)$  равняется нулю.

Связь между изображениями  $\gamma_y(S)$ ,  $\Delta\omega'_y(S)$  и  $\delta\omega_2(S)$  определяется третьими слагаемыми правых частей (6.52), а для  $\Delta\lambda$ , очевидно, будем иметь выражение

$$\Delta\lambda(S) = -\frac{v^2}{S(S^2 + v^2)} \delta\omega_2(S). \quad (6.63)$$

Тогда по теореме свертки [26а]

$$\left. \begin{aligned} \gamma_y(t) &= \int_0^t \delta\omega_2(\tau') \cos v(t - \tau') d\tau', \\ \Delta\omega'_y(t) &= -v \int_0^t \delta\omega_2(\tau') \sin v(t - \tau') d\tau', \\ \Delta\lambda(t) &= -\int_0^t \delta\omega_2(\tau') [1 - \cos v(t - \tau')] d\tau'. \end{aligned} \right\} \quad (6.64)$$

Выражения  $\cos v(t - \tau')$ ,  $-v \sin v(t - \tau')$ ,  $-[1 - \cos v(t - \tau')]$  являются импульсными переходными функциями для выходов инерциальной системы по ошибкам  $\gamma_y(t)$ ,  $\Delta\omega'_y(t)$  и  $\Delta\lambda(t)$  при входном возмущении  $\delta\omega_2(t)$ . Они определяют отклик инерциальной системы по соответствующему выходу и моменту времени  $t$  на возмущающий импульс интенсивности  $\delta\omega_2(\tau')$ , подействовавший на систему в момент времени  $\tau' < t$ . Суммарный эффект действия возмущающих импульсов определяется интегралами (6.64), которые часто называют *интегралами Дюамеля*.

Заменой переменных  $t - \tau' = \tau$  приводим (6.64) к виду

$$\left. \begin{aligned} \gamma_y(t) &= \int_0^t \delta\omega_2(t - \tau) \cos v\tau d\tau, \\ \Delta\omega'_y(t) &= -v \int_0^t \delta\omega_2(t - \tau) \sin v\tau d\tau, \\ \Delta\lambda(t) &= -\int_0^t \delta\omega_2(t - \tau) [1 - \cos v\tau] d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (6.65)$$

который более удобен для последующих вычислений.

В общем случае дисперсия выходной случайной функции  $\xi_{\text{вых}}(t)$  системы с импульсной переходной функцией  $h(t)$  и центрированным входным воздействием  $\xi_{\text{вх}}(t)$  определяется выражением

$$\begin{aligned} D\xi_{\text{вых}}(t) &= M\xi_{\text{вых}}^2(t) = \\ &= M \left\{ \int_0^t \xi_{\text{вх}}(t - \tau_1) h(\tau_1) d\tau_1 \int_0^t \xi_{\text{вх}}(t - \tau_2) h(\tau_2) d\tau_2 \right\} = \\ &= \int_0^t \int_0^t M \{ \xi_{\text{вх}}(t - \tau_1) \xi_{\text{вх}}(t - \tau_2) \} h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_0^t \int_0^t K\xi_{\text{вх}}(\tau_2 - \tau_1) h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (6.66)$$

В (6.66)  $K\xi_{\text{вх}}(\tau_2 - \tau_1)$  часто называют *автокорреляционной функцией*. Автокорреляционная функция входного воздействия должна быть найдена из опыта. Для стационарных случайных функций, обладающих эргодическим свойством, процесс нахождения  $K\xi_{\text{вх}}(\tau_2 - \tau_1)$  упрощается, так как для указанных случайных функций средняя величина по множеству реализаций совпадает со средним значением по времени для одной реализации случайной функции. Для многих случаев автокорреляционную функцию можно описать выражением

$$K\xi_{\text{вх}}(\tau_2 - \tau_1) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau_2 - \tau_1|}, \quad (6.67)$$

где  $\sigma^2 = D\xi_{\text{вх}}(t) = \text{const}$ ,  $\beta > 0$ , а разность  $\tau_2 - \tau_1$  берется по модулю потому, что автокорреляционная функция является симметричной, т. е.  $K\xi(\tau_2 - \tau_1) = K\xi(\tau_1 - \tau_2)$ . В рассматриваемом случае  $\sigma^2 = D\delta\omega_2(t)$  есть дисперсия эквивалентного дрейфа гиросплатформы.

В соответствии с (6.65), (6.66) и (6.67) дисперсия выходных ошибок инерциальной системы определяется выражениями

$$\left. \begin{aligned} D\gamma_y(t) &= \sigma^2 \int_0^t \int_0^t e^{-\beta|\tau_2 - \tau_1|} \cos v\tau_1 \cos v\tau_2 d\tau_1 d\tau_2, \\ D\Delta\omega'_y(t) &= \sigma^2 v^2 \int_0^t \int_0^t e^{-\beta|\tau_2 - \tau_1|} \sin v\tau_1 \sin v\tau_2 d\tau_1 d\tau_2, \\ D\Delta\lambda(t) &= \sigma^2 \int_0^t \int_0^t e^{-\beta|\tau_2 - \tau_1|} (1 - \cos v\tau_1) (1 - \cos v\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.68)$$

При вычислении двойных интегралов мы будем сначала интегрировать по  $\tau_1$ , а затем по  $\tau_2$ ; величина  $t$  считается при интегрирова-

ний постоянной. При первом интегрировании интервал  $(0, t)$  нужно разбить на два интервала:  $(0, \tau_2)$  и  $(\tau_2, t)$ , так как внутри этих интервалов автокорреляционная функция имеет разное аналитическое выражение; так, например, будем иметь

$$\int_0^t e^{-\beta|\tau_2-\tau_1|} \cos v\tau_1 d\tau_1 = \int_0^{\tau_2} e^{-\beta|\tau_2-\tau_1|} \cos v\tau_1 d\tau_1 + \int_{\tau_2}^t e^{-\beta|\tau_2-\tau_1|} \cos v\tau_1 d\tau_1. \quad (6.69)$$

Если учесть это обстоятельство, то после вычислений получим следующие выражения для искомых дисперсий:

$$D\gamma_y(t) = \frac{\sigma^2}{\beta^2 + v^2} \left\{ \frac{-2\beta[\beta + e^{-\beta t}(-\beta \cos vt + v \sin vt)]}{\beta^2 + v^2} + \frac{1}{2v}(-v \cos 2vt + \beta \sin 2vt) + \frac{2\beta t + 1}{2} \right\},$$

$$D\Delta\omega_y'(t) = \frac{\sigma^2 v^2}{\beta^2 + v^2} \left\{ \frac{2v[v - e^{-\beta t}(-\beta \sin vt + v \cos vt)]}{\beta^2 + v^2} + \frac{1}{2v}(v \cos 2vt - \beta \sin 2vt) + \frac{2\beta t - 1}{2} \right\},$$

$$D\Delta\lambda(t) = D\gamma_y(t) + \frac{2\sigma^2}{\beta^2}(\beta t + e^{-\beta t} - 1) - \frac{2\sigma^2}{\beta^2 + v^2} \left[ \frac{2\beta}{v} \sin vt + (e^{-\beta t} - 1)(1 + \cos vt - \frac{v}{\beta} \sin vt) \right]. \quad \square \quad (6.70)$$

Полученные дисперсии характеризуют разброс или нестабильность выходных ошибок в процессе непрерывной работы инерциальной системы. В полученных выражениях для дисперсий выходных ошибок фигурируют члены, пропорциональные времени  $t$ . Для достаточно удаленных моментов времени  $t$  они будут доминировать над остальными слагаемыми и среднеквадратическая ошибка будет приблизительно пропорциональна  $\sqrt{t}$ . Физически нарастания среднеквадратических ошибок при стационарных случайных возмущениях можно пояснить с помощью частных представлений. Стационарный случайный процесс имеет непрерывный частотный спектр с различной средней мощностью на каждой частоте  $\omega$ . На частоте резонанса  $\omega = v$  происходит раскачка недемпфированной системы до бесконечно больших «амплитуд». Можно рассмотреть дисперсии выходных ошибок при нескольких стационарных возмущениях, например,  $\delta\omega_2$ ,  $\delta\dot{\omega}_2$ ,  $\delta\lambda_1$  и т. д. Когда возмущения независимы, дисперсии выходных ошибок можно определять порознь от каждого такого возмущения, а результаты их сложить. Если случайные входные возмущения коррелированы, то должны быть известны их взаимные корреляционные функции.

Перейдем теперь к анализу решения уравнений (6.47). Переходя от (6.47) к уравнениям в изображениях при начальном условии  $\gamma_x(0)$ ,  $\gamma_z(0)$ ,  $\Delta\omega_x'(0)$ ,  $\Delta\varphi(0)$  и разрешая полученные алгебраические уравнения, получим изображения искомых выходных ошибок

$$\begin{aligned} \gamma_x(S) &= \frac{1}{(S^2 + v^2)(S^2 + U^2)} \{S^3\gamma_x(0) - US^2\gamma_z(0) + \\ &+ (S^2 + U^2)\Delta\omega_x'(0) - U^2S\Delta\varphi(0) + S^3\delta\omega_1(S) - US^2\delta\omega_3(S) + \\ &+ (S^2 + U^2)\delta\dot{\omega}_1'(S) - U^2S\delta\dot{\varphi}_1(S)\}, \\ \gamma_z(S) &= \frac{1}{(S^2 + v^2)(S^2 + U^2)} \{U(S^2 + v^2)\gamma_x(0) + S(S^2 + v^2)\gamma_z(0) + \\ &+ U\Delta\varphi(0) + U\delta\omega_1(S) + S\delta\omega_3(S) + U\delta\dot{\varphi}_1(S)\}, \\ \Delta\omega_x'(S) &= \frac{1}{(S^2 + v^2)(S^2 + U^2)} \{-v^2S^2\gamma_x(0) + UV^2S\gamma_z(0) + \\ &+ S(S^2 + U^2)\Delta\omega_x'(S) + U^2v^2\Delta\varphi(0) - v^2S^2\delta\omega_1(S) + UV^2S\delta\omega_3(S) + \\ &+ S(S^2 + U^2)\delta\dot{\omega}_1'(S) + U^2v^2\delta\dot{\varphi}_1(S)\}, \\ \Delta\varphi(S) &= \frac{1}{(S^2 + v^2)(S^2 + U^2)} \{v^2S\gamma_z(0) - UV^2\gamma_z(0) - \\ &- (S^2 + U^2)\Delta\omega_x'(0) + S(S^2 + U^2 + v^2)\Delta\varphi(0) + v^2S\delta\omega_1(S) - \\ &- UV^2\delta\omega_3(S) - (S^2 + U^2)\delta\dot{\omega}_1'(S) + S(S^2 + U^2 + v^2)\delta\dot{\varphi}_1(S)\}. \quad \square \quad (6.71) \end{aligned}$$

Для перехода к оригиналам удобно предварительно выписать разложения на элементарные дроби в вещественной области следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{(S^2 + U^2)(S^2 + v^2)} &= \frac{1}{v^2 - U^2} \left[ \frac{1}{S^2 + U^2} - \frac{1}{S^2 + v^2} \right], \\ \frac{S^2}{(S^2 + U^2)(S^2 + v^2)} &= \frac{1}{v^2 - U^2} \left[ \frac{v^2}{S^2 + v^2} - \frac{U^2}{S^2 + U^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.72)$$

Будем считать, что все входные возмущения описываются ступенчатыми функциями, т. е.

$$\delta\omega_1(S) = \frac{\delta\omega_1}{S}, \quad \delta\omega_3(S) = \frac{\delta\omega_3}{S},$$

$$\delta\dot{\omega}_1(S) = \frac{\delta\dot{\omega}_1}{S}, \quad \delta\dot{\varphi}_1(S) = \frac{\delta\dot{\varphi}_1}{S},$$

где  $\delta\omega_1 = \text{const}$ ,  $\delta\omega_3 = \text{const}$ ,  $\delta\dot{\omega}_1 = \text{const}$ ,  $\delta\dot{\varphi}_1 = \text{const}$ .

При оговоренных условиях получим выражения для выходных ошибок системы в виде

$$\begin{aligned} \gamma_x(t) &= \gamma_x(0) \frac{v^2 \cos vt - U^2 \cos Ut}{v^2 - U^2} - \\ &- \gamma_z(0) \frac{U(v \sin vt - U \sin Ut)}{v^2 - U^2} + \Delta\omega_x'(0) \frac{\sin vt}{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \Delta\varphi(0) \frac{U^2(\cos Ut - \cos vt)}{\nu^2 - U^2} + \delta\omega_1 \frac{\nu \sin vt - U \sin Ut}{\nu^2 - U^2} - \\
& - \delta\omega_3 \frac{U(\cos Ut - \cos vt)}{\nu^2 - U^2} + \delta\omega_1' \frac{1 - \cos vt}{\nu^2} + \\
& + \delta\phi_1 \frac{U^2}{\nu^2 - U^2} \left( \frac{\sin Ut}{U} - \frac{\sin vt}{\nu} \right), \quad (6.73)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_z(t) = & \gamma_x(0) \sin Ut + \gamma_z(0) \cos Ut + \Delta\varphi(0) \sin Ut + \\
& + \delta\omega_1 \frac{1 - \cos Ut}{U} + \delta\omega_3 \frac{\sin Ut}{U} + \delta\phi_1 \frac{1 - \cos Ut}{U}, \quad (6.74)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\omega_x'(t) = & - \gamma_x(0) \frac{\nu^2(\nu \sin vt - U \sin Ut)}{\nu^2 - U^2} + \\
& + \gamma_z(0) \frac{U\nu^2(\cos Ut - \cos vt)}{\nu^2 - U^2} + \Delta\omega_x'(0) \cos vt + \\
& + \Delta\varphi(0) \frac{U^2\nu^2}{\nu^2 + U^2} \left( \frac{\sin Ut}{U} - \frac{\sin vt}{\nu} \right) - \delta\omega_1 \frac{\nu^2(\cos Ut - \cos vt)}{\nu^2 - U^2} + \\
& + \delta\omega_3 \frac{U\nu^2}{\nu^2 - U^2} \left( \frac{\sin Ut}{U} - \frac{\sin vt}{\nu} \right) + \delta\omega_1' \frac{\sin vt}{\nu} + \\
& + \delta\phi \frac{U^2\nu^2}{\nu^2 - U^2} \left( \frac{1 - \cos Ut}{U^2} - \frac{1 - \cos vt}{\nu^2} \right), \quad (6.75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi(t) = & \gamma_x(0) \frac{\nu^2(\cos Ut - \cos vt)}{\nu^2 - U^2} - \\
& - \gamma_z(0) \frac{U\nu^2}{\nu^2 - U^2} \left( \frac{\sin Ut}{U} - \frac{\sin vt}{\nu} \right) - \Delta\omega_x'(0) \frac{\sin vt}{\nu} + \\
& + \Delta\varphi(0) \frac{\nu^2 \cos Ut - U^2 \cos vt}{\nu^2 - U^2} - \delta\omega_1 \frac{\nu^2}{\nu^2 - U^2} \left( \frac{\sin Ut}{U} - \frac{\sin vt}{\nu} \right) - \\
& - \delta\omega_3 \frac{U\nu^2}{\nu^2 - U^2} \left( \frac{1 - \cos Ut}{U^2} - \frac{1 - \cos vt}{\nu^2} \right) - \delta\omega_1' \frac{1 - \cos vt}{\nu^2} + \\
& + \delta\phi_1 \frac{1}{\nu^2 + U^2} \left( \frac{\nu^2}{U} \sin Ut - \frac{U^2}{\nu} \sin vt \right). \quad (6.76)
\end{aligned}$$

Прежде всего отметим, что ни одно из выражений (6.73)–(6.76) не содержит вековых членов, все составляющие выходных ошибок либо являются постоянными величинами, либо изменяются по гармоническому закону с частотами  $U$  и  $\nu$ . Периоды гармонических колебаний ошибок соответственно равняются суткам и периоду Шулера, т. е.  $T_0 = 24$  ч и  $T_0 = 84,4$  мин на высоте  $h = 0$ .

Если входные возмущения  $\delta\omega_1(t)$ ,  $\delta\omega_3(t)$ ,  $\delta\omega_1'(t)$ ,  $\delta\phi_1(t)$  представлены стационарными случайными функциями времени, то для достаточно удаленных моментов времени среднеквадратические значения выходных ошибок  $\gamma_x(t)$ ,  $\gamma_z(t)$ ,  $\Delta\omega_x(t)$ ,  $\Delta\varphi(t)$ , так же, как и в предыдущем случае, приблизительно изменяются пропорционально  $\sqrt{t}$ .

В (6.73)–(6.76) весовые функции входных ошибок или их отдельные слагаемые имеют существенно различный порядок величин.

Это происходит из-за различия частот  $U$  и  $\nu$ :  $U : \nu \cong 6 \cdot 10^{-2}$ ,  $U^2 : \nu^2 \cong 3,6 \cdot 10^{-3}$ . Слагаемые, имеющие множитель  $U^2 : \nu^2$ , можно без ущерба точности опустить, в большинстве случаев то же самое можно сделать с членами, имеющими множитель  $U : \nu$ . Если далее ограничиться интервалом времени работы инерциальной системы, равным 1,7 часа, то внутри такого интервала будет иметь место неравенство  $Ut \leq 0,1$ . Но тогда с относительной точностью  $5 \cdot 10^{-3}$  можно положить  $\cos Ut \approx 1$  и с точностью  $1,7 \cdot 10^{-3}$  положить  $\sin Ut \leq Ut$ . Проводя соответствующие оценки слагаемых в (6.73)–(6.76) и переставляя некоторые слагаемые, получим приближенные выражения в виде

$$\begin{aligned}
\gamma_x(t) = & \gamma_x(0) \cos vt + \Delta\omega_x'(0) \frac{\sin vt}{\nu} + \delta\omega_1' \frac{\sin vt}{\nu} - \\
& - \delta\omega_1' \frac{1 - \cos vt}{\nu^2} - \gamma_z(0) \frac{U}{\nu} \sin vt - \delta\omega_3 \frac{U}{\nu^2} (1 - \cos vt), \quad (6.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\omega_x'(t) = & - \gamma_x(0) \nu \sin vt + \Delta\omega_x'(0) \cos vt - \delta\omega_1 (1 - \cos vt) + \\
& + \delta\omega_1' \frac{\sin vt}{\nu} + \gamma_z(0) \nu (1 - \cos vt) + \delta\omega_3 U \left( t - \frac{\sin vt}{\nu} \right), \quad (6.78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi(t) = & \gamma_x(0) (1 - \cos vt) - \Delta\omega_x'(0) \frac{\sin vt}{\nu} - \delta\omega_1 \left( t - \frac{\sin vt}{\nu} \right) - \\
& - \delta\omega_1' \frac{1 - \cos vt}{\nu^2} - \gamma_z(0) U \left( t - \frac{\sin vt}{\nu} \right) + \Delta\varphi(0) - \\
& - \delta\omega_3 U \left( \frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos vt}{\nu^2} \right) + \delta\phi_1 t, \quad (6.79)
\end{aligned}$$

$$\gamma_z(t) = \gamma_z(0) + \delta\omega_3 t + \gamma_x(0) Ut + \Delta\varphi(0) Ut + \delta\omega_1 \frac{Ut^2}{2} + \delta\phi_1 \frac{Ut^2}{2}. \quad (6.80)$$

В правой части равенства (6.77) мы сохранили два последних слагаемых, несмотря на то, что они содержат малый множитель  $U : \nu = 6 \cdot 10^{-2}$  по сравнению с первым и третьим слагаемыми. Этим самым мы хотим оттенить степень уменьшения влияния входных ошибок  $\gamma_z(0)$  и  $\delta\omega_3$  азимутального канала гиролатформы на отклонение  $\gamma_x(t)$  приборной вертикали в направлении меридиана. Как мы уже видели выше, такое влияние в направлении экватора равно нулю (при линейном анализе ошибок).

Целесообразность сохранения указанных слагаемых мы подтвердим ниже с другой точки зрения, к изложению которой сейчас перейдем. Во втором уравнении исследуемой здесь системы (6.47) пренебрежем «перекрестными» слагаемыми  $U\gamma_x$  и  $U\Delta\varphi$ . Тогда оно изолируется от остальных уравнений (6.47) и его решение

в общем случае будет записываться в виде

$$\gamma_z(t) = \gamma_z(0) + \int_0^t \delta\omega_3(\tau) d\tau, \quad (6.81)$$

где скорость дрейфа гиросплатформы в азимуте  $\delta\omega_3(t)$  (см. (6.32)) является в том или ином смысле (детерминированном или статистическом) известной функцией времени.

Если подставить (6.81) в первое уравнение (6.47), то решение оставшихся уравнений (6.47) (первого, третьего и четвертого) при тех же условиях, при которых выражения (6.73)–(6.76) представляли решение всей замкнутой системы (6.47), будет определяться выражениями (6.77), (6.78), (6.79). При сделанных упрощающих предположениях относительно второго уравнения (6.47) оставшиеся три уравнения формально совпадают с системой уравнений (6.46), так как теперь величину  $U\gamma_z$  мы могли бы включить в состав обобщенного дрейфа гиросплатформы вокруг оси  $x$ , определяемого  $\delta\omega_1$ .

Тогда канал долготы и канал широты будут описываться одинаковыми уравнениями, которые часто называют уравнениями *одноканальных инерциальных систем*. Следует помнить, что в рассматриваемом случае решение уравнений (6.46) канала долготы справедливо в любом интервале времени, тогда как решение «одноканальных» уравнений широты (6.47) справедливо только в течение примерно 2 часов непрерывной работы инерциальной системы после приведения ее в рабочее состояние.

Решение (6.81), определяющее ошибку  $\gamma_z(t)$  гиросплатформы в азимуте, при сделанных упрощениях дает менее точные результаты по сравнению с выражением (6.80). Формула (6.81) при  $\delta\omega_3 = \text{const}$  дает только первые два слагаемых (6.80). Однако при  $\gamma_z(0) \approx \gamma_x(0) \approx \Delta\varphi(0)$  и  $\delta\omega_3 \approx \delta\omega_1 \approx \delta\varphi_1$  последние четыре слагаемых к концу 1,7 часа непрерывной работы системы дают результаты по модулю, только примерно в два раза меньшие, чем первые два члена выражения (6.80). Правда, следует отметить, что при статистическом анализе на величину среднеквадратической ошибки  $\gamma_z(t)$  последние четыре слагаемых (6.80) оказывают значительно меньшее влияние. Это легко проверить, в особенности тогда, когда соответствующие случайные величины являются независимыми.

Здесь уместно отметить, что ошибки в начальной выставке гиросплатформы можно считать независимыми от остальных ошибок только тогда, когда выставка осуществляется с помощью внешних средств. При автономной выставке платформы ошибки  $\gamma_x(0)$ ,  $\gamma_y(0)$ ,  $\gamma_z(0)$  могут существенно зависеть от ошибок измерительных элементов инерциальной системы.

**6.1.4. Расщепление уравнений ошибок.** Уравнения ошибок (6.26) можно привести к форме, которая во многих случаях может оказаться удобной для проведения конкретного анализа. Посредством перехода к новым переменным (6.26) можно расщепить на две системы уравнений третьего и четвертого порядка, которые, если так можно выразиться, решаются каскадом. Сначала находится решение изолированной системы третьего порядка, а затем уже решение системы четвертого порядка, правые части уравнений которой зависят от уже найденных решений системы третьего порядка. Мы сейчас получим уравнения ошибок в новой форме посредством линейного преобразования, а затем дадим кинематическое истолкование полученных результатов.

Линейное преобразование (6.26) выполним с помощью постановки

$$\gamma_x = \tilde{\gamma}_x - \Delta\varphi, \quad \gamma_y = \tilde{\gamma}_y + \Delta\lambda \cos \varphi, \quad \gamma_z = \tilde{\gamma}_z + \Delta\lambda \sin \varphi, \quad (6.82)$$

где  $\tilde{\gamma}_x$ ,  $\tilde{\gamma}_y$ ,  $\tilde{\gamma}_z$  — новые переменные, а  $\varphi$  — текущая широта объекта, которую следует рассматривать как известную функцию времени, зависящую от закона движения объекта. Сначала преобразуем первые три уравнения (6.26). Для этого подставим туда  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$  и  $\dot{\gamma}_x$ ,  $\dot{\gamma}_y$ ,  $\dot{\gamma}_z$ , определив их по (6.82). При дифференцировании выражений (6.82) по времени будем выражать  $\dot{\varphi}$ ,  $\Delta\dot{\varphi}$  и  $\Delta\dot{\lambda}$  по формулам (6.6) и двум последним уравнениям (6.26). Тогда первые три уравнения (6.26) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{\gamma}}_x + \omega_y \tilde{\gamma}_z - \omega_z \tilde{\gamma}_y &= \delta\omega'_I, \\ \dot{\tilde{\gamma}}_y + \omega_z \tilde{\gamma}_x - \omega_x \tilde{\gamma}_z &= \delta\omega'_{II}, \\ \dot{\tilde{\gamma}}_z + \omega_x \tilde{\gamma}_y - \omega_y \tilde{\gamma}_x &= \delta\omega'_{III}, \end{aligned} \right\} \quad (6.83)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega'_I &= \delta\omega_1 + \delta\varphi_1, \\ \delta\omega'_{II} &= \delta\omega_2 - \delta\dot{\lambda}_1 \cos \varphi, \\ \delta\omega'_{III} &= \delta\omega_3 - \delta\dot{\lambda}_1 \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (6.84)$$

или, в соответствии с (6.10a) и (6.25),

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega'_I &= \omega_x \delta h_K + \delta\omega_x - \dot{\omega}_x \delta h_\varphi + \delta\varphi, \\ \delta\omega'_{II} &= \omega_y \delta h_K + \delta\omega_y - \dot{\omega}_y \delta h_\lambda - \delta\dot{\lambda} \cos \varphi, \\ \delta\omega'_{III} &= \omega_z \delta h_K + \delta\omega_z - \dot{\omega}_z \text{tg} \varphi \delta h_\lambda - \delta\dot{\lambda} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.85)$$

Связь между проекциями  $\omega'_x$ ,  $\omega'_y$ ,  $\omega'_z$  относительной угловой скорости и проекциями  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  абсолютной угловой скорости опре-

деляется (6.1)—(6.3). Система уравнений третьего порядка (6.83) не зависит от переменных  $\Delta\omega'_x$ ,  $\Delta\omega'_y$ ,  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\lambda$ , и входящие в эти уравнения величины  $\delta\omega_I$ ,  $\delta\omega_{II}$ ,  $\delta\omega_{III}$  следует рассматривать (в детерминированном или статическом смысле) как известные функции времени. Вследствие этого уравнения (6.83) решаются независимо от остальных уравнений. Последние два уравнения (6.26) инвариантны к данному преобразованию, поэтому мы должны преобразовать четвертое и пятое уравнения (6.26). Для этого нужно подставить в них  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$  из (6.82) и произвести соответствующую группировку подобных членов.

В результате мы получим уравнения в виде

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\omega}'_x &= 2(U \sin \varphi + \dot{\omega}'_y \operatorname{tg} \varphi) \Delta\dot{\omega}'_y + \\ &+ (2\dot{\omega}'_y U \cos \varphi + \dot{\omega}'_y{}^2 \sec^2 \varphi + f_z) \Delta\varphi + f_x \Delta\lambda \sin \varphi + \delta\dot{\omega}'_I, \\ \Delta\dot{\omega}'_y &= -(2U \sin \varphi + \dot{\omega}'_y \operatorname{tg} \varphi) \Delta\dot{\omega}'_x - \dot{\omega}'_x \operatorname{tg} \varphi \Delta\dot{\omega}'_y - \\ &- (2\dot{\omega}'_x U \cos \varphi + \dot{\omega}'_x \dot{\omega}'_y \sec^2 \varphi) \Delta\varphi + \\ &+ (f_y \cos \varphi - f_z \cos \varphi) \Delta\lambda + \delta\dot{\omega}'_{II}, \quad \square \quad (6.86) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{\omega}'_I &= -\delta\dot{\omega}'_1 - f_z \tilde{\gamma}_x + f_x \tilde{\gamma}_z, \\ \delta\dot{\omega}'_{II} &= \delta\dot{\omega}'_2 - f_z \tilde{\gamma}_y + f_y \tilde{\gamma}_z, \end{aligned} \right\} \quad (6.87)$$

или, в соответствии с (6.20),

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{\omega}'_I &= -f_y \delta h_a - \frac{1}{R} \delta a_y + \dot{\omega}'_x \delta h_n - \frac{1}{R} \delta v_y + f_x \tilde{\gamma}_z - f_z \tilde{\gamma}_x, \\ \delta\dot{\omega}'_{II} &= f_x \delta h_a + \frac{1}{R} \delta a_x + \dot{\omega}'_y \delta h_n + \frac{1}{R} \delta v_x + f_y \tilde{\gamma}_z - f_z \tilde{\gamma}_y, \end{aligned} \right\} \quad (6.88)$$

причем  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$  определяются по (6.24) и (6.22).

Решение совокупной системы уравнений четвертого порядка (6.24) и (6.86) можно найти только после того, как в выражения для величин  $\delta\dot{\omega}'_I$  и  $\delta\dot{\omega}'_{II}$  (6.87) или (6.88) будут подставлены  $\tilde{\gamma}_x$ ,  $\tilde{\gamma}_y$ ,  $\tilde{\gamma}_z$ , найденные при решении уравнений (6.83). Система уравнений (6.24), (6.83), (6.86) эквивалентна системе уравнений (6.26). После нахождения величин  $\tilde{\gamma}_x$ ,  $\tilde{\gamma}_y$ ,  $\tilde{\gamma}_z$ ,  $\Delta\omega'_x$ ,  $\Delta\omega'_y$ ,  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda$  ошибки  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$  определяются из алгебраического соотношения (6.82). При нахождении решений уравнений (6.83) необходимо задавать начальные значения новых переменных  $\tilde{\gamma}_x$ ,  $\tilde{\gamma}_y$ ,  $\tilde{\gamma}_z$ . Эти значения определяются из (6.82) при  $t = 0$ , они выражаются через ошибки  $\gamma_x(0)$ ,  $\gamma_y(0)$ ,  $\gamma_z(0)$  начальной выставки гироаппарата и ошибки  $\Delta\varphi(0)$ ,  $\Delta\lambda(0)$  ввода в инерциальную систему координат начального местоположения объекта.

В отношении системы уравнений (6.24), (6.86) мы пойдем несколько дальше и преобразуем ее в эквивалентную систему, со-

стоящую из двух дифференциальных уравнений второго порядка. Для этой цели разрешим системы уравнений (6.24) и (6.86) относительно переменной  $\Delta\varphi$  и новой переменной  $\Delta\theta$ , определяемой соотношением

$$\Delta\theta = \Delta\lambda \cos \varphi. \quad (6.89)$$

Для сферической модели Земли  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\theta$  можно трактовать как угловую меру дифференциалов дуг меридиана и параллели соответственно.

Выразим сначала  $\Delta\dot{\omega}'_x$  и  $\Delta\dot{\omega}'_y$  через  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\theta$  и их производные. Из уравнений (6.24) можно получить выражения

$$\left. \begin{aligned} \Delta\dot{\omega}'_x &= -\Delta\dot{\varphi} + \delta\dot{\varphi}_1, \\ \Delta\dot{\omega}'_y &= \Delta\dot{\theta} - \dot{\omega}'_x \operatorname{tg} \varphi \Delta\theta - \dot{\omega}'_y \operatorname{tg} \varphi \Delta\varphi - \delta\dot{\lambda}'_1 \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.90)$$

Если продифференцировать (6.90) и в соответствии с (6.6) заменить  $\varphi$  на  $-\omega'_x$ , то в результате получим \*)

$$\left. \begin{aligned} \Delta\dot{\omega}'_x &= -\Delta\ddot{\varphi} + (\delta\dot{\varphi}_1)', \\ \Delta\dot{\omega}'_y &= \Delta\ddot{\theta} + (-\dot{\omega}'_x \operatorname{tg} \varphi + \dot{\omega}'_x{}^2 \sec^2 \varphi) \Delta\theta - \dot{\omega}'_x \operatorname{tg} \varphi \Delta\dot{\theta} - \\ &- \dot{\omega}'_y \operatorname{tg} \varphi \Delta\dot{\varphi} + (-\dot{\omega}'_y \operatorname{tg} \varphi + \dot{\omega}'_x \dot{\omega}'_y \sec^2 \varphi) \Delta\varphi - (\delta\dot{\lambda}'_1 \cos \varphi)', \end{aligned} \right\} \quad (6.91)$$

где  $(\delta\dot{\varphi}_1)'$  и  $(\delta\dot{\lambda}'_1 \cos \varphi)'$  означают производные по времени от выражений  $\delta\dot{\varphi}_1$  и  $\delta\dot{\lambda}'_1 \cos \varphi$ . Теперь в уравнениях (6.86) нужно  $\Delta\lambda$  выразить через  $\Delta\theta$  в соответствии с (6.89), заменить  $\Delta\dot{\omega}'_x$ ,  $\Delta\dot{\omega}'_y$ ,  $\Delta\dot{\omega}'_x$ ,  $\Delta\dot{\omega}'_y$  их выражениями (6.90), (6.91), выразить величины  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$  по формулам (6.21) и сделать приведение подобных членов.

В результате получим уравнения в виде

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{\varphi} + (v^2 - \dot{\omega}'_x{}^2 - \dot{\omega}'_y{}^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - 2\dot{\omega}'_y U \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi) \Delta\varphi + \\ + 2(U \sin \varphi + \dot{\omega}'_y \operatorname{tg} \varphi) \Delta\dot{\theta} + (\dot{\omega}'_y - \dot{\omega}'_x \dot{\omega}'_y \operatorname{tg} \varphi) \operatorname{tg} \varphi \Delta\theta = \delta\dot{\omega}'_\varphi, \\ \Delta\ddot{\theta} + (v^2 - \dot{\omega}'_y{}^2 \sec^2 \varphi - 2\dot{\omega}'_y U \sec \varphi) \Delta\theta - \\ - 2(U \sin \varphi + \dot{\omega}'_y \operatorname{tg} \varphi) \Delta\dot{\varphi} + [-\dot{\omega}'_y \operatorname{tg} \varphi + \dot{\omega}'_x \dot{\omega}'_y (1 + \sec^2 \varphi) + \\ + 2\dot{\omega}'_x U \cos \varphi] \Delta\varphi = \delta\dot{\omega}'_\theta, \quad \square \quad (6.92) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{\omega}'_\varphi &= -\delta\dot{\omega}'_I + (\delta\dot{\varphi}_1)' + 2(U \sin \varphi + \dot{\omega}'_y \operatorname{tg} \varphi) \delta\dot{\lambda}'_1 \cos \varphi, \\ \delta\dot{\omega}'_\theta &= \delta\dot{\omega}'_{II} - (2U \sin \varphi + \dot{\omega}'_y \operatorname{tg} \varphi) \delta\dot{\varphi}_1 + (\delta\dot{\lambda}'_1 \cos \varphi)' + \\ &+ \dot{\omega}'_x \delta\dot{\lambda}'_1 \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (6.93)$$

\*) В соответствии с (6.89) и первой формулой (6.6)

$$\Delta\dot{\lambda} \cos \varphi = \Delta\dot{\theta} - \dot{\omega}'_x \operatorname{tg} \varphi \Delta\theta.$$

а  $\nu$  определяется формулой (6.22). В качестве начальных условий здесь нужно задавать значения  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\lambda$ ,  $\Delta\dot{\theta}$  при  $t = 0$ . Последние два значения, т. е.  $\Delta\dot{\theta}(0)$  и  $\Delta\dot{\lambda}(0)$ , определяются из (6.90) с учетом (6.89) в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta\dot{\varphi}(0) &= -\Delta\dot{\omega}_x(0) + \delta\dot{\varphi}_1(0), \\ \Delta\dot{\theta}(0) &= \Delta\dot{\omega}_y(0) + \dot{\omega}_x(0) \sin \varphi(0) \Delta\lambda(0) + \\ &\quad + \dot{\omega}_y(0) \operatorname{tg} \varphi(0) \Delta\varphi(0) + \delta\dot{\lambda}_1(0) \cos \varphi(0). \end{aligned} \right\} \quad (6.94)$$

Начальные значения  $\Delta\varphi(0)$  и  $\Delta\dot{\theta}(0)$  зависят не только от ошибок начальной выставки инерциальной системы, но и от начальных значений входных возмущений. Решения уравнений (6.92) определяют ошибки  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\theta = \Delta\lambda \cos \varphi$  координат местоположения объекта. Ошибки  $\Delta\dot{\omega}_x$  и  $\Delta\dot{\omega}_y$  могут быть найдены затем по формулам (6.90).

Укажем теперь на геометрический смысл линейного преобразования (6.82).

В рассматриваемой здесь инерциальной системе опорным трехгранником является географический трехгранник  $xuz$ . Ориентация трехгранника  $xuz$  определяется координатами  $\varphi$ ,  $\lambda$  точки местоположения объекта, с которой совмещена вершина трехгранника  $xuz$ . Направляющие косинусы осей  $xuz$  в геоцентрической системе координат  $\xi\eta\zeta$  определяются матрицей (1.76). Трехгранник  $xuz$  будем называть *идеальным*. На выходе инерциальной системы получаем  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\lambda}$ , так называемые *расчетные значения координат*, которые отличаются от идеальных (истинных) значений на величину ошибок  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\lambda$ . Расчетным координатам  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\lambda}$  на земной поверхности соответствует точка  $\tilde{M}$ . Ориентация географического трехгранника в точке  $\tilde{M}$  (мы будем его обозначать через  $xuz$  и называть *расчетным трехгранником*) определяется матрицей (1.76) при замене в ней  $\varphi$ ,  $\lambda$  на  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\lambda}$ . Если вершины трехгранников  $xuz$  и  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  совместить поступательным движением, то сами трехгранники не совместятся друг с другом, они будут рассогласованы на малые углы. Чтобы совместить трехгранник  $xuz$  с трехгранником  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ , его, очевидно, нужно будет повернуть на угол  $\Delta\lambda$  вокруг оси, параллельной полярной оси Земли, и на угол  $\Delta\varphi$  вокруг оси  $x$ , направленной на восток. Так как малые повороты можно рассматривать как векторы, то поворот на угол  $\Delta\lambda$  можно разложить на два поворота на углы  $\Delta\lambda \cos \varphi$  и  $\Delta\lambda \sin \varphi$  вокруг осей  $y$  и  $z$  соответственно. Таким образом, для совмещения трехгранников  $xuz$  и  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  нужно первый трехгранник повернуть на углы  $-\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda \cos \varphi$ ,  $\Delta\lambda \sin \varphi$  вокруг осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно, причем неважно, в какой последовательности будут выполнены эти повороты. Расчетный трехгранник  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  можно рассматривать как аналитическую модель идеального трехгранника  $xuz$ . Приборный трехгранник  $x_p y_p z_p$ ,

жестко связанный с гироплатформой, является физической моделью трехгранника  $xuz$ .

Ориентация трехгранника  $x_p y_p z_p$  относительно идеального трехгранника  $xuz$  определяется углами  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$ . Будем считать, что ориентация  $x_p y_p z_p$  относительно расчетного трехгранника  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  определяется некоторыми углами  $\tilde{\gamma}_x$ ,  $\tilde{\gamma}_y$ ,  $\tilde{\gamma}_z$ . Это означает, что трехгранник  $xuz$  ( $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ ) нужно последовательно повернуть на углы  $\gamma_x$  ( $\tilde{\gamma}_x$ ),  $\gamma_y$  ( $\tilde{\gamma}_y$ ),  $\gamma_z$  ( $\tilde{\gamma}_z$ ) вокруг осей  $x$  ( $\tilde{x}$ ),  $y$  ( $\tilde{y}$ ),  $z$  ( $\tilde{z}$ ) соответственно, чтобы совместить его с приборным трехгранником  $x_p y_p z_p$ . Но тогда можно сказать, что два последовательных преобразования с углами  $-\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda \cos \varphi$ ,  $\Delta\lambda \sin \varphi$  и  $\tilde{\gamma}_x$ ,  $\tilde{\gamma}_y$ ,  $\tilde{\gamma}_z$  переводят идеальный трехгранник  $xuz$  в угловое положение, совпадающее с угловым положением приборного трехгранника  $x_p y_p z_p$ . То же самое получается при помощи одного преобразования с углами  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$ . Тогда в соответствии с теорией малых поворотов между указанными углами должна существовать связь, определяемая равенствами (6.82). Следовательно, величины  $\tilde{\gamma}_x$ ,  $\tilde{\gamma}_y$ ,  $\tilde{\gamma}_z$ , фигурирующие в равенствах (6.82), могут быть истолкованы как углы, определяющие ориентацию приборного трехгранника  $x_p y_p z_p$  относительно расчетного трехгранника  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ . Эти представления можно развить дальше и указать на возможность другого подхода (кинематического) к выводу уравнений (6.83). Он состоит в следующем. Обозначим через  $\omega_x^*$ ,  $\omega_y^*$ ,  $\omega_z^*$  проекции абсолютной угловой скорости расчетного трехгранника  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  на его оси  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$ . Малые углы  $-\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda \cos \varphi$ ,  $\Delta\lambda \sin \varphi$ , определяющие ориентацию трехгранника  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  относительно  $xuz$ , будем теперь обозначать через  $\gamma_x^*$ ,  $\gamma_y^*$ ,  $\gamma_z^*$ . Тогда на основании общей формулы (3.145) можно утверждать, что разности  $\omega_x^* - \omega_x$ ,  $\omega_y^* - \omega_y$ ,  $\omega_z^* - \omega_z$  будут определяться левыми частями уравнений (6.7) при подстановке в них вместо  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$  соответственно  $\gamma_x^*$ ,  $\gamma_y^*$ ,  $\gamma_z^*$ . Если теперь из уравнений (6.7) вычесть полученные выражения, то, учитывая, что в соответствии с (6.82)  $\gamma_x - \gamma_x^* = \tilde{\gamma}_x$  и т. д., слева мы получим выражения, совпадающие с левыми частями уравнений (6.83), а справа будем иметь выражения  $\tilde{\omega}_x - \omega_x^* + \delta\omega_1^*$  и т. д. (см. (6.7) и (6.10a)). Но, очевидно,  $\omega_x^*$ ,  $\omega_y^*$ ,  $\omega_z^*$  должны равняться соответственно  $-\dot{\varphi}$ ,  $(\dot{\lambda} + U) \cos \varphi$ ,  $(\dot{\lambda} + U) \sin \varphi$ , поэтому с учетом (6.23), (6.25) (см. также (1.134), (1.135) и (1.135a)) при  $R_1'' = R_2'' = R > 1$  должны иметь место равенства

$$\tilde{\omega}_x - \omega_x^* = \delta\dot{\varphi}_1, \quad \tilde{\omega}_y - \omega_y^* = -\delta\dot{\lambda}_1 \cos \varphi, \quad \tilde{\omega}_z - \omega_z^* = -\delta\dot{\lambda}_1 \sin \varphi.$$

Таким образом, справа получаем выражения, совпадающие с правыми частями уравнений (6.83). Такой вывод уравнений (6.83), пожалуй, является более наглядным. Но мы предпочли в основном изложении метод линейного преобразования основных уравнений (6.26), так как такой подход является общим в теории приведения

линейных дифференциальных уравнений к так называемому *каноническому виду*.

Системы уравнений четвертого порядка в форме (6.86) и (6.92) определяют ошибки в координатах местоположения объекта и скорости его движения. Во многих случаях применение уравнений ошибок в форме (6.83), (6.92) упрощает процесс получения рабочих формул для проведения конкретного анализа ошибок инерциальной системы. Так, например, в случае (рассмотренном выше), когда объект движется вдоль параллели ( $\varphi \equiv \text{const}$ ,  $v_y \equiv 0$ ) с постоянной скоростью ( $v_x \equiv \text{const}$ ), применение уравнений ошибок в форме (6.83), (6.92) позволяет весьма просто получить характеристические полиномы. Линейные дифференциальные уравнения (6.83) и (6.92) будут в этом случае иметь постоянные коэффициенты, которые, как и раньше, легко установить по формулам (6.1) — (6.3) и (6.29). Тогда легко установить, что характеристический полином  $\Delta_1(S)$  уравнений (6.83) будет определяться первыми двумя множителями характеристического полинома (6.34), соответствующего уравнениям ошибок в форме (6.26), последний множитель полинома (6.34) будет определять характеристический полином  $\Delta_2(S)$  уравнений (6.92). Корни характеристических полиномов  $\Delta_1(S)$  и  $\Delta_2(S)$  определяются первыми двумя и последним выражениями (6.34а) соответственно. Таким образом, мы здесь подтвердили тот общеизвестный факт, что при линейном преобразовании системы линейных дифференциальных уравнений корни характеристического полинома не меняются. Но сейчас мы можем утверждать, что собственные колебания с частотой  $\Omega_1 = U + \omega_y \text{ sec } \varphi$  (см. (6.36)) совершает приборный трехгранник  $x_p y_p z_p$  относительно расчетного трехгранника  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ , а собственные колебания с частотами  $\Omega_2 = v + \omega_z$  и  $\Omega_3 = v - \omega_z$  (см. (6.41)) совершает расчетный трехгранник  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  относительно идеального трехгранника  $xyz$ . Расчетный трехгранник  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  совершает колебания и с частотой  $\Omega_1$ , но эти колебания являются как бы вынужденными, они обусловлены собственными колебаниями приборного трехгранника  $x_p y_p z_p$  относительно трехгранника  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ . Автор рекомендует довести анализ поставленной выше задачи по уравнениям (6.83), (6.92) до конца и сравнить трудоемкости процессов вычислений по исходным (6.26) и преобразованным (6.83) и (6.92) уравнениям ошибок.

Можно указать и на другие достоинства преобразованных уравнений ошибок. Покажем, что решение уравнений ошибок ориентации в форме (6.83) можно получить в квадратурах при любом движении объекта, когда коэффициенты уравнений (6.83) будут определяться достаточно произвольными функциями времени. Величины  $\tilde{\gamma}_x, \tilde{\gamma}_y, \tilde{\gamma}_z$ , фигурирующие в (6.83) как искомые переменные, можно трактовать как проекции малого поворота на оси  $x, y, z$ . Вектор малого поворота переводит расчетный трехгранник  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  в положение, занимаемое приборным трехгранником  $x_p y_p z_p$ . Обо-

значим через  $\tilde{\gamma}_{\xi_a}, \tilde{\gamma}_{\eta_a}, \tilde{\gamma}_{\zeta_a}$  проекции того же вектора малого поворота на оси  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  абсолютной системы координат  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ . Указанные выше две системы проекций будут удовлетворять матричному соотношению (см. (5.64))

$$\begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_{\xi_a} \\ \tilde{\gamma}_{\eta_a} \\ \tilde{\gamma}_{\zeta_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \lambda_a & -\sin \varphi \cos \lambda_a & \cos \varphi \cos \lambda_a \\ \cos \lambda_a & -\sin \varphi \sin \lambda_a & \cos \varphi \sin \lambda_a \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_x \\ \tilde{\gamma}_y \\ \tilde{\gamma}_z \end{bmatrix}, \quad (6.95)$$

где  $\lambda_a$  — абсолютная долгота, определяемая из формул (5.54). Ортогональную квадратную матрицу преобразования в (6.95) будем обозначать через  $C$  или через  $C(t)$ , если нужно будет подчеркнуть зависимость ее элементов от времени.

Левые части уравнений (6.83) представляют собой проекции полной производной по времени вектора малого поворота на оси  $x, y, z$  (см. п. 3.2.1), а величины  $\delta\omega'_I, \delta\omega'_{II}, \delta\omega'_{III}$ , стоящие в правых частях уравнений (6.83), можно считать проекциями вектора входного возмущения на те же оси. Таким образом, уравнения (6.83) устанавливают в проекциях на оси подвижной системы координат равенства двух векторов полной производной вектора малого поворота и вектора входного возмущения. Но такое равенство можно установить также в проекциях на оси абсолютной системы координат  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ , в которой проекции полной производной вектора малого поворота имеют особенно простой вид, так как они соответственно равны величинам  $\dot{\tilde{\gamma}}_{\xi_a}, \dot{\tilde{\gamma}}_{\eta_a}, \dot{\tilde{\gamma}}_{\zeta_a}$ . Таким образом, в проекциях на оси  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  будем иметь матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\gamma}}_{\xi_a} \\ \dot{\tilde{\gamma}}_{\eta_a} \\ \dot{\tilde{\gamma}}_{\zeta_a} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \delta\omega'_I \\ \delta\omega'_{II} \\ \delta\omega'_{III} \end{bmatrix}, \quad (6.96)$$

эквивалентное уравнениям (6.83). Очевидно, решение полученного равенства, удовлетворяющее заданному начальному условию, можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_{\xi_a}(t) \\ \tilde{\gamma}_{\eta_a}(t) \\ \tilde{\gamma}_{\zeta_a}(t) \end{bmatrix} = C(0) \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_x(0) \\ \tilde{\gamma}_y(0) \\ \tilde{\gamma}_z(0) \end{bmatrix} + \int_0^t C(\tau) \begin{bmatrix} \delta\omega'_I(\tau) \\ \delta\omega'_{II}(\tau) \\ \delta\omega'_{III}(\tau) \end{bmatrix} d\tau, \quad (6.96a)$$

где переменная интегрирования обозначена через  $\tau$ . В полученном решении первое слагаемое выражает  $\tilde{\gamma}_{\xi_a}(0), \tilde{\gamma}_{\eta_a}(0), \tilde{\gamma}_{\zeta_a}(0)$  через

$\tilde{\gamma}_x(0)$ ,  $\tilde{\gamma}_y(0)$ ,  $\tilde{\gamma}_z(0)$  в соответствии с преобразованием (6.95). Если теперь умножить обе части (6.96а) слева на матрицу  $C^T(t)$  обратного преобразования по отношению к (6.95), то получим тогда искомого решение уравнений (6.83).

Итак,

$$\begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_x(t) \\ \tilde{\gamma}_y(t) \\ \tilde{\gamma}_z(t) \end{bmatrix} = C^T(t) C(0) \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_x(0) \\ \tilde{\gamma}_y(0) \\ \tilde{\gamma}_z(0) \end{bmatrix} + \int_0^t C^T(t) C(\tau) \begin{bmatrix} \delta\omega'_I(\tau) \\ \delta\omega'_{II}(\tau) \\ \delta\omega'_{III}(\tau) \end{bmatrix} d\tau. \quad (6.96б)$$

При интегрировании  $t$  считается фиксированной величиной, поэтому матрицу  $C^T(t)$  можно включить в подынтегральное выражение или поставить множителем перед интегралом. Это будет зависеть от того, что окажется удобнее: сначала найти произведение  $C^T(t) C(\tau)$ , а затем проинтегрировать или сначала найти интеграл, а затем его умножить на матрицу  $C^T(t)$ . Чтобы указать на порядок вычислений, рассмотрим простой пример, который мы анализировали в п. 1.3 данной главы.

Будем считать  $\varphi(t) \equiv 0$ ,  $\omega'_y(t) \equiv 0$ ,  $\delta\omega'_I = \text{const}$ ,  $\delta\omega'_{II} = \text{const}$  и  $\delta\omega'_{III} = \text{const}$ .

При  $\omega'_y(t) \equiv 0$  имеем  $\lambda_a = Ut + \lambda_0$ . В этом случае матрица  $C$  имеет вид (см. (6.95))

$$C(t) = \begin{bmatrix} -\sin(Ut + \lambda_0) & 0 & \cos(Ut + \lambda_0) \\ \cos(Ut + \lambda_0) & 0 & \sin(Ut + \lambda_0) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.97)$$

Образум произведение

$$C^T(t) C(\tau) = \begin{bmatrix} \cos U(t-\tau) & 0 & -\sin U(t-\tau) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin U(t-\tau) & 0 & \cos U(t-\tau) \end{bmatrix}, \quad (6.97а)$$

откуда

$$C^T(t) C(0) = \begin{bmatrix} \cos Ut & 0 & -\sin Ut \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin Ut & 0 & \cos Ut \end{bmatrix}. \quad (6.97б)$$

Далее, замечая, что

$$\int_0^t f(t-\tau) d\tau = - \int_0^t f(\tau) d\tau',$$

и учитывая, что в данной задаче вектор входного возмущения считается постоянным, весьма просто получаем второе слагаемое в (6.96б). Окончательный результат в матричной форме можно

записать в виде

$$\begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_x(t) \\ \tilde{\gamma}_y(t) \\ \tilde{\gamma}_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos Ut & 0 & -\sin Ut \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin Ut & 0 & \cos Ut \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_x(0) \\ \tilde{\gamma}_y(0) \\ \tilde{\gamma}_z(0) \end{bmatrix} + \frac{1}{U} \begin{bmatrix} \sin Ut & 0 & -(1-\cos Ut) \\ 0 & Ut & 0 \\ (1-\cos Ut) & 0 & \sin Ut \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega'_I \\ \delta\omega'_{II} \\ \delta\omega'_{III} \end{bmatrix}. \quad (6.97в)$$

В обычной форме будем, очевидно, иметь

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \tilde{\gamma}_x(t) &= \tilde{\gamma}_x(0) \cos Ut - \tilde{\gamma}_z(0) \sin Ut + \\ &+ \frac{\delta\omega'_I}{U} \sin Ut - \frac{\delta\omega'_{III}}{U} (1 - \cos Ut), \\ \tilde{\gamma}_y(t) &= \tilde{\gamma}_y(0) + \delta\omega'_{II} t, \\ \tilde{\gamma}_z(t) &= \tilde{\gamma}_x(0) \sin Ut + \tilde{\gamma}_z(0) \cos Ut + \\ &+ \frac{\delta\omega'_I}{U} (1 - \cos Ut) + \frac{\delta\omega'_{III}}{U} (1 - \cos Ut). \quad \square \quad (6.97г) \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае корни характеристического полинома уравнений (6.83) равняются  $0_I \pm iU$  (см. (6.35), (6.37) при  $\omega'_y = 0$ ), поэтому собственные колебания приборного трехгранника  $x_p y_p z_p$  относительно расчетного трехгранника  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ , определяемые углами  $\tilde{\gamma}_x(t)$  и  $\tilde{\gamma}_z(t)$ , происходят с частотой  $U$  или с периодом, равным одним суткам.

Относительное движение, определяемое углом  $\tilde{\gamma}_y(t)$ , характеризуется нулевым корнем характеристического полинома.

**6.1.5. Уравнения ошибок инерциальной системы с географическим навигационным и азимутально-свободным опорным трехгранниками.** Два варианта алгоритмов такой системы рассмотрены в п. 5.2.2 для сфероидальной модели Земли. Для определенности мы здесь остановимся на втором варианте. Функционирование рассматриваемой системы протекает следующим образом. Два горизонтальных акселерометра в идеальном случае измеряют проекции  $a_{x_c}$  и  $a_{y_c}$  кажущегося ускорения на оси  $x_c$  и  $y_c$  азимутально-свободного опорного трехгранника  $x_c y_c z_c$  (см. рис. 5.3). Затем по формулам преобразования (5.10) находятся проекции  $a_x$  и  $a_y$  кажущегося ускорения на оси  $x$  и  $y$  географического трехгранника  $xuz$ , являющегося навигационным трехгранником. Фигурирующей в (5.10) угол  $\chi_c$  между осями  $x_c$  ( $y_c$ ) и  $x(y)$  определяется формулой (5.9).

В соответствии с п. 1.1 данной главы в (5.9) следует подставить  $R_1 = R$ , чтобы получить выражение для сферической модели

Земли. Далее в рассматриваемой системе формируются проекции относительной угловой скорости  $\omega'_x$ ,  $\omega'_y$  и географические координаты  $\varphi$ ,  $\lambda$  таким же образом, как в системе, рассмотренной в предыдущих пунктах данной главы.

Затем по известным величинам  $\omega'_x$ ,  $\omega'_y$  и  $\varphi$  находим  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и, наконец, по формулам преобразования (5.11) величины  $\omega_{x_c}$ ,  $\omega_{y_c}$ , которые используются для формирования сигналов, подаваемых на датчики моментов горизонтальных гироскопов, для управления гироскопической платформой. В соответствии с алгоритмом платформа в азимуте не управляется.

Перейдем к составлению уравнений ошибок рассматриваемой системы.

Рассмотрим сначала уравнение ошибок интегратора угла  $\chi_c$ . В соответствии с (5.9) уравнение реального интегратора угла  $\chi_c$  можно записать в виде

$$\dot{\chi}_c = (1 + \delta h_{\chi_c}) \tilde{\omega}_z + \delta \chi_c \approx \tilde{\omega}_z + \delta h_{\chi_c} \omega_z + \delta \chi_c, \quad (6.98)$$

где  $\delta h_{\chi_c}$  определяет ошибку масштабного коэффициента интегратора, а  $\delta \chi_c$  — скорость его собственного дрейфа. Из (6.98) получаем уравнение ошибок интегратора угла  $\chi_c$  в виде

$$\Delta \chi_c = \Delta \omega_z + \omega_z \delta h_{\chi_c} + \delta \chi_c = \Delta \omega_z + \delta \chi_{z_c}, \quad (6.98a)$$

где  $\delta \chi_{z_c} = \omega_z \delta h_{\chi_c} + \delta \chi_c$  — эквивалентный дрейф интегратора угла  $\chi_c$ .

Чтобы составить уравнения ошибок азимутально-свободной гироскопической платформы, обратимся к уравнениям (6.7), полученным из общих уравнений (4.35). Уравнения (4.35) определяют малые движения гироскопической платформы относительно опорного трехгранника, т. е. трехгранника, который она должна физически реализовать на борту объекта. Вследствие этого уравнения ошибок в форме (6.7) будут справедливы для любого опорного трехгранника, если заменить в них индексы  $x$ ,  $y$ ,  $z$  на соответствующие обозначения. Так, заменяя в (6.7) индексы  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно на  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$ , получим уравнения ошибок азимутально-свободной гироскопической платформы в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_{x_c} + \omega_{y_c} \gamma_{z_c} &= \Delta \omega_{x_c} + \delta \omega'_{1c}, \\ \dot{\gamma}_{y_c} - \omega_{x_c} \gamma_{z_c} &= \Delta \omega_{y_c} + \delta \omega'_{2c}, \\ \dot{\gamma}_{z_c} + \omega_{x_c} \gamma_{y_c} - \omega_{y_c} \gamma_{x_c} &= \delta \omega_{z_c}, \end{aligned} \right\} \quad (6.99)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta \omega'_{1c} &= \omega_{x_c} \delta h_{\chi_c} + \delta \omega_{x_c}, \\ \delta \omega'_{2c} &= \omega_{y_c} \delta h_{\chi_c} + \delta \omega_{y_c}. \end{aligned} \right\} \quad (6.99a)$$

Здесь учтено, что для азимутально-свободного опорного трех-

гранника  $\omega_{z_c} = 0$  и что  $\tilde{\omega}_{z_c} = 0$ , так как в азимуте гироскопическая платформа не управляется ( $\Delta \omega_{z_c} = \tilde{\omega}_{z_c} - \omega_{z_c} \equiv 0$ ). Реальные значения величин  $\omega_{x_c}$  и  $\omega_{y_c}$  в соответствии с (5.11) рассчитываются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\omega}_{x_c} &= \tilde{\omega}_x \cos \tilde{\chi}_c - \tilde{\omega}_y \sin \tilde{\chi}_c, \\ \tilde{\omega}_{y_c} &= \tilde{\omega}_x \sin \tilde{\chi}_c + \tilde{\omega}_y \cos \tilde{\chi}_c. \end{aligned} \right\} \quad (6.100)$$

Если проварьировать выражения (6.100) около истинных значений входящих в них величин и использовать формулы преобразования (5.11), то получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta \omega_{x_c} &= \Delta \omega_x \cos \chi_c - \Delta \omega_y \sin \chi_c - \omega_{y_c} \Delta \chi_c, \\ \Delta \omega_{y_c} &= \Delta \omega_x \sin \chi_c + \Delta \omega_y \cos \chi_c + \omega_{x_c} \Delta \chi_c. \end{aligned} \right\} \quad (6.101)$$

Если подставить (6.101) в (6.99), то после очевидных перестановок получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_{x_c} + \omega_{y_c} (\gamma_{z_c} + \Delta \chi_c) &= \Delta \omega_{x_c} \cos \chi_c - \Delta \omega_{y_c} \sin \chi_c + \delta \omega'_{1c}, \\ \dot{\gamma}_{y_c} - \omega_{x_c} (\gamma_{z_c} + \Delta \chi_c) &= \Delta \omega_{x_c} \sin \chi_c + \Delta \omega_{y_c} \cos \chi_c + \delta \omega'_{2c}, \\ \dot{\gamma}_{z_c} + \omega_{x_c} \gamma_{y_c} - \omega_{y_c} \gamma_{x_c} &= \delta \omega_{z_c}. \end{aligned} \right\} \quad (6.102)$$

Теперь преобразуем уравнения (6.102) к осям географической системы координат  $x y z$ . Такое преобразование будет основываться на следующих соображениях. Отклонение вертикальной оси гироскопической платформы  $z_p$  от географической вертикали (оси  $z$  ( $z_c$ )) определяется горизонтальным вектором малого поворота. Проекция этого вектора на оси  $x_c$  и  $y_c$  равняется соответственно  $\gamma_{x_c}$  и  $\gamma_{y_c}$ . Этот вектор можно спроектировать также на оси  $x$  и  $y$  и мы можем обозначать соответствующие проекции через  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$ . Тогда указанные проекции будут связаны формулами преобразования типа (5.10):

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x &= \gamma_{x_c} \cos \chi_c + \gamma_{y_c} \sin \chi_c, \\ \gamma_y &= -\gamma_{x_c} \sin \chi_c + \gamma_{y_c} \cos \chi_c. \end{aligned} \right\} \quad (6.103)$$

Продифференцируем выражения (6.103) и учтем формулы (5.9) и (6.103). Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_x &= \dot{\gamma}_{x_c} \cos \chi_c + \dot{\gamma}_{y_c} \sin \chi_c + \omega_z \gamma_y, \\ \dot{\gamma}_y &= -\dot{\gamma}_{x_c} \sin \chi_c + \dot{\gamma}_{y_c} \cos \chi_c - \omega_z \gamma_x. \end{aligned} \right\} \quad (6.104)$$

Помножим первое и второе уравнения (6.102) на  $\cos \chi_c$  ( $-\sin \chi_c$ ) и  $\sin \chi_c$  ( $\cos \chi_c$ ) соответственно и сложим их, а третье уравнение (6.102) сложим с уравнением (6.98). Если учесть необходимые формулы преобразования координат и формулы (6.9), а также

вести обозначения:

$$\gamma_z = \gamma_{z_c} + \Delta\chi_c, \quad (6.105)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega'_1 &= \delta\omega'_{1c} \cos \chi_c + \delta\omega'_{2c} \sin \chi_c, \\ \delta\omega'_2 &= -\delta\omega'_{1c} \sin \chi_c + \delta\omega'_{2c} \cos \chi_c, \\ \delta\omega'_3 &= \delta\omega_{z_c} + \delta\chi_{z_c}, \end{aligned} \right\} \quad (6.106)$$

то в результате получим уравнения в форме (6.10). В результате решения уравнений в форме (6.10) \*) получаем величины  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$ . Величины  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$  определяют ошибки приборной вертикали в «направлении» осей  $x$ ,  $y$ , так как  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$  являются углами поворота оси  $z_p$  вокруг осей  $x$  и  $y$  соответственно. Величина  $\gamma_z$ , выражаемая формулой (6.105), определяет ошибку в нахождении истинного курса. Действительно, в инерциальной системе с азимутально-свободной гироскопической платформой истинный курс определяется алгебраической суммой «гироскопического» курса, снимаемого непосредственно с вертикальной оси гироскопической платформы, и угла  $\chi_c$ , вычисляемого счетно-решающим устройством. Ошибки в измерении первого слагаемого и в вычислении второго слагаемого равняются соответственно  $\gamma_{z_c}$  и  $\Delta\chi_c$ . Заметим, что в инерциальной системе, рассмотренной в предыдущих пунктах, истинный курс непосредственно снимается с гироскопической платформы, поэтому угол поворота  $\gamma_z$  гироскопической платформы в азимуте в такой системе совпадает с ошибкой в измерении истинного курса. Таким образом, если под  $\gamma_z$  понимать выходную ошибку инерциальной системы в определении истинного курса, то  $\gamma_z = \gamma_{z_c} + \Delta\chi_c$  в обоих типах систем будет иметь одинаковый смысл.

В инерциальной системе с азимутально-свободной платформой расчетные значения  $\tilde{a}_x$  и  $\tilde{a}_y$  проекций кажущегося ускорения на оси  $x$  и  $y$  навигационного географического трехгранника  $xuz$  получаются по формулам преобразования (см. (5.10))

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}_x &= \tilde{a}_{x_c} \cos \tilde{\chi}_c + \tilde{a}_{y_c} \sin \tilde{\chi}_c, \\ \tilde{a}_y &= -\tilde{a}_{x_c} \sin \tilde{\chi}_c + \tilde{a}_{y_c} \cos \tilde{\chi}_c. \end{aligned} \right\} \quad (6.107)$$

Из (6.107) методом варьирования расчетных величин около их идеальных значений и при учете (5.10) можно получить выражения

$$\left. \begin{aligned} \Delta a_x &= \Delta a_{x_c} \cos \chi_c + \Delta a_{y_c} \sin \chi_c + a_y \Delta \chi_c, \\ \Delta a_y &= \Delta a_{x_c} \sin \chi_c + \Delta a_{y_c} \cos \chi_c - a_x \Delta \chi_c. \end{aligned} \right\} \quad (6.108)$$

В (6.108) входят ошибки  $\Delta a_{x_c}$  и  $\Delta a_{y_c}$  в определении акселеромет-

\*) Естественно, в совокупности с остальными уравнениями ошибок, которые еще нужно построить.]

рами проекций кажущегося ускорения на оси  $x_c$  и  $y_c$  опорного трехгранника  $x_c y_c z_c$ . Величина  $\Delta a_{x_c}$  и  $\Delta a_{y_c}$  находится по формулам (6.12) при замене в них индексов  $x$ ,  $y$ ,  $z$  на  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} \Delta a_{x_c} &= a_{y_c} \gamma_{z_c} - a_{z_c} \gamma_{y_c} + \delta a_{1c}, \\ \Delta a_{y_c} &= a_{z_c} \gamma_{x_c} - a_{x_c} \gamma_{z_c} + \delta a_{2c}, \end{aligned} \right\} \quad (6.109)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta a_{1c} &= a_{x_c} \delta h_k + \delta a_{x_c}, \\ \delta a_{2c} &= a_{y_c} \delta h_k + \delta a_{y_c}. \end{aligned} \right\}$$

В (6.109)  $\gamma_{x_c}$ ,  $\gamma_{y_c}$ ,  $\gamma_{z_c}$  являются ошибками в физическом моделировании гироскопической платформы опорного трехгранника  $x_c y_c z_c$ ;  $\delta h_k$  — ошибкой масштабных коэффициентов контура коррекции гироскопической платформы и  $\delta a_{x_c}$ ,  $\delta a_{y_c}$  определяют смещения нулей акселерометров.

Подставим  $\Delta a_{x_c}$  и  $\Delta a_{y_c}$  из (6.109) в (6.108) и введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \delta a_1 &= \delta a_{1c} \cos \chi_c + \delta a_{2c} \sin \chi_c, \\ \delta a_2 &= -\delta a_{1c} \sin \chi_c + \delta a_{2c} \cos \chi_c. \end{aligned} \right\} \quad (6.110)$$

Тогда ошибки  $\Delta a_x$  и  $\Delta a_y$  будут определяться первыми двумя формулами (6.12), если в них под  $\gamma_z$  понимать величину (6.105). Дальнейшие рассуждения при выводе оставшихся уравнений ошибок будут точно такими же, как и в п. 6.1.2. В результате мы получим уравнения ошибок в форме (6.18) и (6.24), причем в (6.20)  $\delta a_1$  и  $\delta a_2$  должны определяться формулами (6.110). Таким образом, совокупную систему уравнений ошибок седьмого порядка для рассматриваемой инерциальной системы можно представить в форме (6.26), в которых  $\gamma_z$  определяется формулой (6.105),  $\delta\omega'_1$ ,  $\delta\omega'_2$ ,  $\delta\omega'_3$  — формулами (6.106), а  $\delta\omega'_1$ ,  $\delta\omega'_2$  — формулами (6.20) при учете (6.110). Естественно, можно пользоваться также уравнениями ошибок в форме (6.83) и (6.8) или (6.92), если в них  $\delta\omega'_1$ ,  $\delta\omega'_2$ ,  $\delta\omega'_3$  и  $\delta\omega'_1$ ,  $\delta\omega'_2$  определять по указанным выше формулам.

Подытожим полученные результаты. В предыдущих пунктах были рассмотрены две инерциальные системы. В первой системе опорный и навигационный трехгранники совпадают с географическим трехгранником  $xuz$ . Во второй системе только навигационный трехгранник совпадает с  $xuz$ , а опорным трехгранником является азимутально-свободный трехгранник  $x_c y_c z_c$ . Выходными величинами для обеих систем являются географические координаты местоположения объекта  $\varphi$ ,  $\lambda$ , проекции относительной (путевой) скорости его движения  $v_x$ ,  $v_y$  или, что то же самое,  $\omega_y$ ,  $\omega_x$ , а также углы ориентации объекта относительно вертикали (углы крена и тангажа) и полуденной линии (истинный курс). Ошибки в нахождении одинаковых величин определяются уравнениями, которые составляются в осях навигационной системы координат  $xuz$  и ко-

торые записываются в одинаковой форме, например в форме (6.26). Однако входные возмущения  $\delta\omega'_1, \delta\omega'_2, \delta\omega'_3, \delta\dot{\omega}'_1$  и  $\delta\dot{\omega}'_2$  неодинаково зависят от инструментальных ошибок измерительных элементов обеих систем. Дело в том, что инструментальные ошибки измерительных элементов, к которым относятся эквивалентный дрейф гиросплатформы и эквивалентный сдвиг нуля акселерометров, определяются в осях опорного трехгранника. Эквивалентный дрейф гиросплатформы и эквивалентный сдвиг нуля акселерометров можно рассматривать как векторные величины, которые задаются своими проекциями на оси опорного трехгранника. Так как уравнения ошибок (6.26) составляются в осях навигационной (географической) системы координат  $xuz$ , то в выражения для входных возмущений должны входить проекции векторов инструментальных ошибок на указанные выше навигационные оси. Это подтверждается первыми двумя выражениями (6.106) и соотношениями (6.110), которые определяют проекции горизонтальных составляющих векторов инструментальных ошибок на оси навигационной системы координат. В рассматриваемых случаях опорный и навигационный трехгранники имеют одну и ту же вертикальную ось. При нахождении входного возмущения относительно этой оси нужно помнить, что  $\gamma_z$  определяет ошибку истинного курса, поэтому нужно просуммировать эквивалентные ошибки тех физических элементов, которые участвуют в формировании истинного курса. Во второй инерциальной системе в соответствии с (6.105) нужно просуммировать величину  $\delta\omega_{z_c}$  собственного дрейфа гиросплатформы с величиной  $\delta\dot{\chi}_{z_c}$  эквивалентного дрейфа интегратора угла  $\chi_c$ , так как каждое из указанных слагаемых характеризует нарастание ошибки в угле  $\gamma_{z_c}$  гиросплатформы и в вычисленном угле  $\chi_c$  — угле между горизонтальными осями опорного  $x_c y_c z_c$  и навигационного  $xuz$  трехгранников.

**6.1.6. Уравнения ошибок инерциальной системы с ортодромическими опорными и навигационными трехгранниками.** Алгоритм такой инерциальной системы рассмотрен в п. 5.2.3 для сферической модели Земли. По соображениям, изложенным в п. 1.1 данной главы, мы можем сначала выписать аналитические зависимости алгоритма для сферической модели Земли. Они получаются из составляющих формул п. 5.2.3, если в них положить  $R_1 = R_2 = R = R_0 + h$ . Тогда из (5.12) и (5.13) получим выражения для проекций  $\omega_{x_0}, \omega_{y_0}, \omega_{z_0}$  абсолютной угловой скорости опорного трехгранника  $x_0 y_0 z_0$  на его оси  $x_0, y_0, z_0$  в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0} &= -U \cos \varphi \sin \chi_0 + \omega'_{x_0}, \\ \omega_{y_0} &= U \cos \varphi \cos \chi_0 + \omega'_{y_0}, \\ \omega_{z_0} &= U \sin \varphi + \omega'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (6.111)$$

где

$$\omega'_{x_0} = -\frac{v_{y_0}}{R}, \quad \omega'_{y_0} = \frac{v_{x_0}}{R} \quad (6.112)$$

— проекции относительной угловой скорости трехгранника  $x_0 y_0 z_0$  на его горизонтальные оси  $x_0$  и  $y_0$ . Первые слагаемые в (6.111) вычисляются по формулам (5.15).

Идеальные уравнения первых интеграторов определяются формулами (5.17).

Формулы счисления ортодромических координат  $\Phi$  и  $\lambda$  получим из (5.18) при  $R_{x_0} = R_{y_0} = R$  и  $R_0 = 0$ . С учетом (6.112) эти формулы записываются в виде

$$\dot{\Phi} = -\omega'_{x_0}, \quad \dot{\lambda} = \omega'_{y_0} \operatorname{sec} \Phi. \quad (6.113)$$

Перейдем к составлению уравнений ошибок. Так как в рассматриваемом случае ортодромический трехгранник  $x_0 y_0 z_0$  является опорным трехгранником, то малые движения гиросплатформы относительно этого трехгранника будут описываться уравнениями (6.7) при замене в них индексов  $x, y, z$  на  $x_0, y_0, z_0$ . В полученных таким образом уравнениях нужно вариации  $\Delta\omega_{x_0}, \Delta\omega_{y_0}, \Delta\omega_{z_0}$  выразить через выходные ошибки инерциальной системы, т. е. через величины  $\Delta\omega'_{x_0}, \Delta\omega'_{y_0}, \Delta\Phi$  и  $\Delta\lambda$ . Соответствующие выражения получаются варьированием равенств (6.111). В результате получим

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{x_0} &= \Delta\omega'_{x_0} - U \cos \varphi_{\Pi} \sin \lambda \Delta\lambda, \\ \Delta\omega_{y_0} &= \Delta\omega'_{y_0} - U (\sin \varphi_{\Pi} \sin \Phi + \cos \varphi_{\Pi} \cos \Phi \sin \lambda) \Delta\Phi + \\ &\quad + U \cos \varphi_{\Pi} \sin \Phi \cos \lambda \Delta\lambda, \\ \Delta\omega_{z_0} &= \Delta\omega'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi + (U \sin \varphi_{\Pi} \cos \Phi - \cos \varphi_{\Pi} \sin \Phi \sin \lambda + \\ &\quad + \omega'_{y_0} \operatorname{sec}^2 \Phi) \Delta\Phi + U \cos \varphi_{\Pi} \cos \Phi \cos \lambda \Delta\lambda. \quad \square \quad (6.114) \end{aligned}$$

Здесь использованы выражения, полученные при варьировании вычислительных формул (5.15).

Теперь уравнения ошибок гиросплатформы в форме, аналогичной (6.10), будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{x_0} + \omega_{y_0} \gamma_{z_0} - \omega_{z_0} \gamma_{y_0} &= \Delta\omega'_{x_0} - U \cos \varphi_{\Pi} \sin \lambda \Delta\lambda + \delta\omega'_{10}, \\ \dot{\gamma}_{y_0} + \omega_{z_0} \gamma_{x_0} - \omega_{x_0} \gamma_{z_0} &= \Delta\omega'_{y_0} - U (\sin \varphi_{\Pi} \sin \Phi + \\ &\quad + \cos \varphi_{\Pi} \cos \Phi \sin \lambda) \Delta\Phi + U \cos \varphi_{\Pi} \sin \Phi \cos \lambda \Delta\lambda + \delta\omega'_{20}, \\ \dot{\gamma}_{z_0} + \omega_{x_0} \gamma_{y_0} - \omega_{y_0} \gamma_{x_0} &= \Delta\omega'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi + (U \sin \varphi_{\Pi} \cos \Phi - \cos \varphi_{\Pi} \times \\ &\quad \times \sin \Phi \sin \lambda + \omega'_{y_0} \operatorname{sec}^2 \Phi) \Delta\Phi + \\ &\quad + U \cos \varphi_{\Pi} \cos \Phi \cos \lambda \Delta\lambda + \delta\omega'_{30}. \quad \square \quad (6.115) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\delta\omega'_{10} &= \omega_{x_0}\delta h_{11} + \delta\omega_{x_0}, \\ \delta\omega'_{20} &= \omega_{y_0}\delta h_{11} + \delta\omega_{y_0}, \\ \delta\omega'_{30} &= \omega_{z_0}\delta h_{11} + \delta\omega_{z_0}.\end{aligned}$$

Уравнения ошибок акселерометров по аналогии с (6.12) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned}\Delta a_{x_0} &= a_{y_0}\gamma_{z_0} - a_{z_0}\gamma_{y_0} + \delta a_{10}, \\ \Delta a_{y_0} &= a_{z_0}\gamma_{x_0} - a_{x_0}\gamma_{z_0} + \delta a_{20},\end{aligned} \right\} \quad (6.116)$$

где

$$\begin{aligned}\delta a_{10} &= a_{x_0}\delta h_{11} + \delta a_{x_0}, \\ \delta a_{20} &= a_{y_0}\delta h_{11} + \delta a_{y_0}.\end{aligned}$$

Так как формулы (5.17) и (5.3) имеют одинаковую структуру, то уравнения ошибок первых интеграторов по аналогии с (6.15) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Delta \dot{v}_{x_0} &= \Delta a_{x_0} + (U \sin \varphi + \omega_{z_0}) \Delta v_{y_0} + \\ &\quad + (U \cos \varphi \Delta \varphi + \Delta \omega_{z_0}) v_{y_0} + \delta \dot{v}_{10}, \\ \Delta \dot{v}_{y_0} &= \Delta a_{y_0} - (U \sin \varphi + \omega_{z_0}) \Delta v_{x_0} - \\ &\quad - (U \cos \varphi \Delta \varphi + \Delta \omega_{z_0}) v_{x_0} + \delta \dot{v}_{20},\end{aligned} \quad \square \quad (6.117)$$

где

$$\begin{aligned}\delta \dot{v}_{10} &= \dot{v}_{x_0}\delta h_{11} + \delta \dot{v}_{x_0}, \\ \delta \dot{v}_{20} &= \dot{v}_{y_0}\delta h_{11} + \delta \dot{v}_{y_0}.\end{aligned}$$

Дальше мы подставим в (6.117)  $\Delta a_{x_0}$ ,  $\Delta a_{y_0}$  из (6.116) и  $\Delta \omega_{z_0}$  из третьей формулы (6.114), а также выразим  $U \cos \varphi \Delta \varphi$  через  $\Delta \Phi$  и  $\Delta \Lambda$  путем варьирования первого выражения (5.15). Кроме того, введем новые переменные  $\Delta \omega'_{x_0}$ ,  $\Delta \omega'_{y_0}$  и их первые производные  $\Delta \dot{\omega}'_{x_0}$ ,  $\Delta \dot{\omega}'_{y_0}$ , определив их по формулам (6.16) и (6.17) при замене индексов  $x$ ,  $y$  на  $x_0$ ,  $y_0$ , а также аналогично введем величины  $f_{x_0}$ ,  $f_{y_0}$ ,  $f_{z_0}$  по формулам (6.18).

В результате мы приведем уравнения (6.117) к форме, аналогичной (6.20). Эти уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\omega}'_{x_0} &= f_{z_0}\gamma_{x_0} - f_{x_0}\gamma_{z_0} - \\ &\quad - 2[U(\sin \varphi_{\Pi} \sin \Phi + \cos \varphi_{\Pi} \cos \Phi \sin \Lambda) + \omega'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi] \Delta \omega'_{y_0} - \\ &\quad - [2\omega'_{y_0} U(\sin \varphi_{\Pi} \cos \Phi - \cos \varphi_{\Pi} \sin \Phi \sin \Lambda) + \omega_{y_0}^2 \sec^2 \Phi] \Delta \Phi + \\ &\quad + 2\omega'_{y_0} U \cos \varphi_{\Pi} \cos \Phi \cos \Lambda \Delta \Lambda + \delta \dot{\omega}'_{10}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\omega}'_{y_0} &= -f_{z_0}\gamma_{y_0} + f_{y_0}\gamma_{z_0} - \\ &\quad - [2U(\sin \varphi_{\Pi} \sin \Phi + \cos \varphi_{\Pi} \cos \Phi \sin \Lambda) + \omega'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi] \Delta \omega'_{x_0} - \\ &\quad - \omega'_{x_0} \operatorname{tg} \Phi \Delta \omega'_{y_0} - [2\omega'_{x_0} U(\sin \varphi_{\Pi} \cos \Phi - \cos \varphi_{\Pi} \sin \Phi \sin \Lambda) + \\ &\quad + \omega'_{x_0} \omega'_{y_0} \sec^2 \Phi] \Delta \Phi - 2\omega'_{x_0} U \cos \varphi_{\Pi} \cos \Phi \cos \Lambda \Delta \Lambda + \delta \dot{\omega}'_{20},\end{aligned} \quad \square \quad (6.118)$$

где

$$\left. \begin{aligned}\Delta \dot{\omega}'_{10} &= \frac{1}{R} \delta a_{20} + \frac{1}{R} \delta \dot{v}_{20} = \\ &= f_{y_0} \delta h_{11} + \frac{1}{R} \delta a_{y_0} - \omega'_{x_0} \delta h_{11} + \frac{1}{R} \delta \dot{v}_{y_0}, \\ \Delta \dot{\omega}'_{20} &= \frac{1}{R} \delta a_{10} + \frac{1}{R} \delta \dot{v}_{10} = \\ &= f_{x_0} \delta h_{11} + \frac{1}{R} \delta a_{x_0} + \omega'_{y_0} \delta h_{11} + \frac{1}{R} \delta \dot{v}_{x_0}.\end{aligned} \right\} \quad (6.119)$$

В этих уравнениях  $f_{x_0}$ ,  $f_{y_0}$ ,  $f_{z_0}$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\square \quad f_{x_0} &= \dot{\omega}'_{y_0} + [2U(\sin \varphi_{\Pi} \sin \Phi + \cos \varphi_{\Pi} \cos \Phi \sin \Lambda) + \\ &\quad + \omega'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi] \omega'_{x_0}, \\ f_{y_0} &= -\dot{\omega}'_{x_0} + [2U(\sin \varphi_{\Pi} \sin \Phi + \cos \varphi_{\Pi} \cos \Phi \sin \Lambda) + \\ &\quad + \omega'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi] \omega'_{y_0}, \\ f_{z_0} &= -\omega_{x_0}^2 - \omega_{y_0}^2 - 2U[\omega'_{x_0} \cos \varphi_{\Pi} \cos \Lambda + \omega'_{y_0}(\sin \varphi_{\Pi} \cos \Phi - \\ &\quad - \cos \varphi_{\Pi} \sin \Phi \sin \Lambda)] + v^2.\end{aligned} \quad \square \quad (6.120)$$

Первые два равенства можно получить из первых двух формул (6.21) заменой в них индексов  $x$  и  $y$  на  $x_0$  и  $y_0$ , а последнее равенство (6.120) получается из последнего равенства (6.21), если по формулам преобразования выразить  $\omega'_y$  через  $\omega'_{x_0}$ ,  $\omega'_{y_0}$  ( $\omega'_y = -\omega'_{x_0} \sin \chi_0 + \omega'_{y_0} \cos \chi_0$ ), представить  $\cos \varphi \sin \chi_0$ ,  $\cos \varphi \cos \chi_0$  по формулам (5.15) и учесть, что  $f_{z_0} = f_z$  и  $\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2$ .

В (6.120)  $v$  определяется (6.22) и является частотой Шулера.

Теперь остается только выписать уравнения ошибок для интеграторов ортодромической широты  $\Phi$  и ортодромической долготы  $\Lambda$ . Учитывая формальное сходство формул счисления (6.6) и (6.113), запишем искомые уравнения по аналогии с (6.24) и (6.25) в виде

$$\left. \begin{aligned}\Delta \dot{\Phi} &= -\Delta \omega'_{x_0} + \delta \dot{\Phi}_1, \\ \Delta \dot{\Lambda} &= \Delta \omega'_{y_0} \sec \Phi + \omega'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi \sec \Phi \Delta \Phi + \delta \dot{\Lambda}_1,\end{aligned} \right\} \quad (6.121)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{\Phi}_1 &= -\omega_{x_0} \delta h_\Phi + \delta\dot{\Phi}, \\ \delta\dot{\Lambda}_1 &= \omega'_{y_0} \sec \Phi \delta h_\Lambda + \delta\dot{\Lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (6.122)$$

Уравнения (6.115), (6.118) и (6.121) образуют совокупную систему уравнений ошибок инерциальной системы с ортодромическими опорным и навигационным трехгранниками. Эта система уравнений аналогична системе (6.26), которая была получена в п. 6.1.2.

Линейным преобразованием

$$\gamma_{x_0} = \tilde{\gamma}_{x_0} - \Delta\Phi, \quad \gamma_{y_0} = \tilde{\gamma}_{y_0} + \Delta\Lambda \cos \Phi, \quad \gamma_{z_0} = \tilde{\gamma}_{z_0} + \Delta\Lambda \sin \Phi \quad (6.123)$$

уравнения (6.115) приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{\gamma}}_{x_0} + \omega_{y_0} \tilde{\gamma}_{z_0} - \omega_{z_0} \tilde{\gamma}_{y_0} &= \delta\omega'_{10}, \\ \dot{\tilde{\gamma}}_{y_0} + \omega_{z_0} \tilde{\gamma}_{x_0} - \omega_{x_0} \tilde{\gamma}_{z_0} &= \delta\omega'_{20}, \\ \dot{\tilde{\gamma}}_{z_0} + \omega_{x_0} \tilde{\gamma}_{y_0} - \omega_{y_0} \tilde{\gamma}_{x_0} &= \delta\omega'_{30}, \end{aligned} \right\} \quad (6.124)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega'_{10} &= \delta\omega'_{10} + \delta\dot{\Phi}_1, \\ \delta\omega'_{20} &= \delta\omega'_{20} - \delta\dot{\Lambda}_1 \cos \Phi, \\ \delta\omega'_{30} &= \delta\omega'_{30} + \delta\dot{\Lambda}_1 \sin \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (6.125)$$

и  $\delta\omega'_{10}$ ,  $\delta\omega'_{20}$ ,  $\delta\omega'_{30}$  определяются последними формулами (6.115).

Уравнения (6.124) не зависят от переменных  $\Delta\omega'_{y_0}$ ,  $\Delta\Phi$  и  $\Delta\Lambda$ , поэтому они решаются независимо от остальных уравнений ошибок.

Линейное преобразование (6.123) приводит уравнения (6.118) к виду

$$\begin{aligned} \blacksquare \Delta\dot{\omega}'_{x_0} &= 2[U(\sin \varphi_{\Pi} \sin \Phi + \cos \varphi_{\Pi} \cos \Phi \sin \Lambda) + \omega'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi] \Delta\omega'_{y_0} + \\ &+ [2\omega'_{y_0} U(\sin \varphi_{\Pi} \cos \Phi - \cos \varphi_{\Pi} \sin \Phi \sin \Lambda) + \omega'^2_{y_0} \sec^2 \Phi + f_{z_0}] \Delta\Phi + \\ &+ [-2\omega'_{y_0} U \cos \varphi_{\Pi} \cos \Phi \cos \Lambda + f_{x_0} \sin \Phi] \Delta\Lambda + \delta\dot{\omega}'_{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\omega}'_{y_0} &= -[2U(\sin \varphi_{\Pi} \sin \Phi + \cos \varphi_{\Pi} \cos \Phi \sin \Lambda) + \omega'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi] \Delta\omega'_{x_0} - \\ &- \omega'_{x_0} \operatorname{tg} \Phi \Delta\omega'_{y_0} - [2\omega'_{x_0} U(\sin \varphi_{\Pi} \cos \Phi - \cos \varphi_{\Pi} \sin \Phi \sin \Lambda) + \\ &+ \omega'_{x_0} \omega'_{y_0} \sec^2 \Phi] \Delta\Phi + [-2\omega'_{x_0} U \cos \varphi_{\Pi} \cos \Phi \cos \Lambda + \\ &+ f_{y_0} \sin \Phi - f_{z_0} \cos \Phi] \Delta\Lambda + \delta\dot{\omega}'_{20}, \quad \square \quad (6.126) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{\omega}'_{10} &= -\delta\dot{\omega}'_1 - f_{z_0} \tilde{\gamma}_{x_0} + f_{x_0} \tilde{\gamma}_{z_0}, \\ \delta\dot{\omega}'_{20} &= \delta\dot{\omega}'_2 - f_{z_0} \tilde{\gamma}_{y_0} + f_{y_0} \tilde{\gamma}_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.127)$$

Уравнения (6.126) и (6.127) являются уравнениями, аналогичными (6.86) и (6.87). При линейном преобразовании (6.123) уравнения ошибок (6.121) остаются без изменения.

Совокупность уравнений (6.124), (6.126) и (6.121) образуют расцепленную систему уравнений ошибок. Уравнения (6.126) и (6.121) решаются после того, как будут найдены решения  $\tilde{\gamma}_{x_0}$ ,  $\tilde{\gamma}_{y_0}$ ,  $\tilde{\gamma}_{z_0}$  изолированной системы уравнений (6.124).

Наконец, уравнения (6.126) и (6.121) можно разрешить относительно переменных  $\Delta\Phi$  и  $\Delta\Lambda$ . Если провести рассуждения, аналогичные тем, которые позволили уравнения (6.86) привести к виду (6.92), то в результате получим уравнения ошибок в определении ортодромических координат в виде

$$\begin{aligned} \blacksquare \Delta\ddot{\Phi} &+ (v^2 - \omega'^2_{x_0} - \omega'^2_{y_0} \operatorname{tg}^2 \Phi - 2\omega'_{x_0} U \cos \varphi_{\Pi} \cos \Lambda - \\ &- 2\omega'_{y_0} U \sin \varphi \operatorname{tg} \Phi) \Delta\Phi + 2(U \sin \varphi + \omega'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi) \Delta\dot{\theta} + \\ &+ [(\dot{\omega}'_{y_0} - \omega'_{x_0} \omega'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi) \operatorname{tg} \Phi + 2\omega'_{y_0} U \cos \varphi_{\Pi} \cos \Phi \cos \Lambda] \Delta\theta = \delta\dot{\omega}'_{\Phi}, \\ \Delta\ddot{\theta} &+ (v^2 - \omega'^2_{y_0} \sec^2 \Phi - 2\omega'_{y_0} U \sin \varphi_{\Pi} \sec \Phi) \Delta\theta - \\ &- 2(U \sin \varphi + \omega'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi) \Delta\dot{\Phi} + [-\dot{\omega}'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi + \omega'_{x_0} \omega'_{y_0} (1 + \sec^2 \Phi) + \\ &+ 2\omega'_{x_0} U (\sin \varphi_{\Pi} \cos \Phi - \cos \varphi_{\Pi} \sin \Phi \sin \Lambda)] \Delta\Phi = \delta\dot{\omega}'_{\theta}, \quad \square \quad (6.128) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{\omega}'_{\Phi} &= -\delta\dot{\omega}'_{10} + (\delta\dot{\Phi}_1)' + 2(U \sin \varphi + \omega'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi) \delta\dot{\Lambda}_1 \cos \Phi, \\ \delta\dot{\omega}'_{\theta} &= \delta\dot{\omega}'_{20} - 2(U \sin \varphi + \omega'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi) \delta\dot{\Lambda}_1 + (\delta\dot{\Lambda} \cos \Phi)' + \\ &+ \omega'_{x_0} \delta\dot{\Lambda} \sin \Phi \end{aligned} \right\} \quad (6.129)$$

и

$$\Delta\theta = \Delta\Lambda \cos \Phi. \quad (6.130)$$

Линейному преобразованию (6.123) можно дать истолкование, аналогичное тому, какое было дано преобразованию (6.82). Здесь также следует рассматривать три сопровождающих трехгранника: ортодромический (идеальный) трехгранник  $x_0 y_0 z_0$ , расчетный ортодромический трехгранник  $\tilde{x}_0 \tilde{y}_0 \tilde{z}_0$  и приборный трехгранник  $x_p y_p z_p$ , жестко связанный с гироплатформой. Ориентация первых двух трехгранников относительно геоцентрического ортодромического трехгранника  $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$  определяется (см. п. 1.3.9) направляющими косинусами, которые соответственно определяются обратной

матрицей (5.72) по истинным  $\Phi$ ,  $\Lambda$  и расчетным  $\tilde{\Phi}$ ,  $\tilde{\Lambda}$  ортодромическим координатам. Малое рассогласование осей расчетного трехгранника  $\tilde{x}_0\tilde{y}_0\tilde{z}_0$  относительно истинного  $x_0y_0z_0$  определяется малыми углами —  $\Delta\Phi$ ,  $\Delta\Lambda \cos \Phi$ ,  $\Delta\Lambda \sin \Phi$ , а углы  $\gamma_{x_0}$ ,  $\gamma_{y_0}$ ,  $\gamma_{z_0}$  и  $\tilde{\gamma}_{x_0}$ ,  $\tilde{\gamma}_{y_0}$ ,  $\tilde{\gamma}_{z_0}$  определяют малые рассогласования осей приборного трехгранника относительно трехгранников  $x_0y_0z_0$  и  $\tilde{x}_0\tilde{y}_0\tilde{z}_0$  соответственно.

Величина  $\varphi_{\Pi}$  является географической широтой северного полюса ортодромической координатной сетки. При  $\varphi_{\Pi} \approx 90^\circ$  он совпадает с географическим полюсом Земли, при этом, очевидно, ортодромический трехгранник  $x_0y_0z_0$  превращается в географический  $xuz$  и ортодромическая широта  $\Phi$  в географическую  $\varphi$ . Если учесть указанные обстоятельства, то простым сравнением легко убедиться, что при  $\varphi_{\Pi} = 90^\circ$  уравнения ошибок, полученные в данном пункте, превращаются в уравнения ошибок, выведенные в п. 1.2 и в п. 1.4 настоящей главы.

Можно было бы сначала составить уравнения ошибок для более общего случая, т. е. для инерциальной системы, работающей в ортодромической сетке, а затем соответствующие уравнения ошибок для географической сетки получить предельным переходом при  $\varphi_{\Pi} = 90^\circ$ . Но мы предпочли двигаться по восходящему пути, переходя от анализа простых систем к анализу более сложных.

**6.1.7. Уравнения ошибок инерциальной системы с ортодромическим навигационным и азимутально-свободным опорным трехгранниками.** Алгоритм такой системы описан в п. 5.2.4 сферической модели Земли. Здесь мы рассмотрим уравнения ошибок для второго варианта алгоритма. Алгоритм, соответствующий сферической модели Земли, получаем следующим образом. Из соотношения (5.23) при  $R_{x_0} = R$  и  $R_0 = 0$  и с учетом (6.112) получим выражения

$$\dot{\chi}_{0c} = \omega_{z_0} = U \sin \varphi + \omega'_{y_0} \operatorname{tg} \Phi, \quad (6.131)$$

определяющие изменения угла  $\chi_{0c}$  между горизонтальными осями ортодромического навигационного трехгранника  $x_0y_0z_0$  и азимутально-свободного опорного трехгранника  $x_cy_cz_c$ . Формулы преобразования (5.25) и (5.26) сохраняют свой смысл. Остальные аналитические зависимости алгоритма будут определяться соотношениями (6.111) — (6.113) и формулами (5.15). Ортодромические инерциальные системы с азимутально-свободным опорным трехгранником  $x_cy_cz_c$  и ортодромическим опорным трехгранником  $x_0y_0z_0$  геометрически соотносятся между собой так же, как и географические инерциальные системы с азимутально-свободным опорным трехгранником  $x_cy_cz_c$  и географическим опорным трехгранником  $xuz$ . Поэтому здесь можно повторить те же рассуждения и в том же порядке, как это имело место в п. 1.5 данной главы. Мы

предлагаем соответствующие рассуждения и необходимые выкладки провести читателю самостоятельно, а здесь приведем только окончательный результат.

Уравнения ошибок для инерциальной системы, рассматриваемой в данном пункте, можно привести к одному из трех видов уравнений: уравнениям (6.115), (6.118), (6.121), уравнениям (6.124), (6.126), (6.121) или уравнениям (6.124), (6.128).

В указанных уравнениях следует положить

$$\gamma_{z_0} = \gamma_{z_c} + \Delta\chi_{0c}, \quad (6.132)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega'_{10} &= \delta\omega'_{1c} \cos \chi_{0c} + \delta\omega'_{2c} \sin \chi_{0c}, \\ \delta\omega'_{20} &= -\delta\omega'_{1c} \sin \chi_{0c} + \delta\omega'_{2c} \cos \chi_{0c}, \\ \delta\omega'_{30} &= \delta\omega'_{z_c} + \delta\chi_{30c}, \end{aligned} \right\} \quad (6.133)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta a_{10} &= \delta a_{1c} \cos \chi_{0c} + \delta a_{2c} \sin \chi_{0c}, \\ \delta a_{20} &= -\delta a_{1c} \sin \chi_{0c} + \delta a_{2c} \cos \chi_{0c}, \end{aligned} \right\} \quad (6.134)$$

где  $\delta\omega'_{1c}$ ,  $\delta\omega'_{2c}$  — компоненты эквивалентного дрейфа и собственный дрейф гиросплатформы вокруг осей  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$  азимутально-свободного опорного трехгранника  $x_cy_cz_c$ . Величина  $\delta\chi_{30c}$  определяет эквивалентный ( $\omega_{z_0}\delta h_{\chi_{0c}} + \delta\dot{\chi}_{0c}$ ) дрейф нуля интегратора угла  $\chi_{0c}$ . Величины  $\delta a_{1c}$ ,  $\delta a_{2c}$  являются эквивалентными смещениями нуля акселерометров системы. Величина  $\gamma_{z_0}$  определяет здесь ошибку в нахождении ортодромического курса  $\Psi_K$  (см. п. 5.2.4), причем первое слагаемое в (6.132) определяет уход гиросплатформы в азимуте, второе слагаемое — ошибку в вычислении угла  $\chi_{0c}$ . Таким образом, мы здесь опять проектируем горизонтальные составляющие векторов эквивалентного дрейфа гиросплатформы и смещения нуля акселерометров (задаваемых проекциями  $\delta\omega'_{1c}$ ,  $\delta\omega'_{2c}$  и  $\delta a_{1c}$ ,  $\delta a_{2c}$  на оси опорного трехгранника  $x_cy_cz_c$ ) на оси  $x_0$ ,  $y_0$  навигационного трехгранника  $x_0y_0z_0$ .

Входное возмущение в уравнении ошибок для угла  $\gamma_{z_0}$  содержит инструментальные ошибки реальных элементов инерциальной системы, которая участвует в формировании ортодромического курса  $\Psi_K$ , т. е. азимутальный дрейф гиросплатформы  $\delta\omega'_{z_c}$  и эквивалентный дрейф  $\delta\dot{\chi}_{30c}$  нуля интегратора угла  $\chi_{0c}$ .

**6.1.8. Уравнения ошибок инерциальной системы с тремя акселерометрами.** Обобщенный алгоритм инерциальных систем с тремя акселерометрами, у которых одна из осей опорного и навигационного трехгранников ориентирована вдоль географической ( $z$ ), геоцентрической ( $z'$ ) или гравитационной ( $z''$ ) вертикалей, а их горизонтальные оси рассогласованы на некоторый угол, изменяющийся по определенному закону, были рассмотрены в п. 5.2.5. В настоящем пункте рассмотрим частный случай, когда опорный и навигационный трехгранники совпадают между собой и с географиче-

ческим трехгранником  $xuz$ . Алгоритм рассматриваемой инерциальной системы получим из первого варианта обобщенного алгоритма (п. 5.2.5), если в аналитических зависимостях последнего положим

$$\chi_{om}^i \equiv 0, \chi_o^i \equiv 0, \varphi_{\Pi}^i = 90^\circ, \Phi^i = \varphi, \Lambda^i = \Lambda, \varphi^i = \varphi, \quad (6.135)$$

а оси  $x_m^i, y_m^i, z_m^i$  и  $x_o^i, y_o^i, z_o^i$  будем считать совпадающими между собой и с осями  $x, y, z$  соответственно. Кроме того, для составления уравнений ошибок необходимо построить алгоритм для сферической модели Земли, поэтому в указанных выше аналитических зависимостях еще дополнительно следует полагать  $R_{x_o}^i = R_{y_o}^i = R = R_0 + h$  ( $R_0 = 6371$  км) и  $R_o^i = 0$ . При указанных условиях проекции  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  абсолютной угловой скорости опорного и совпадающего с ним навигационного трехгранников на их оси  $x, y, z$  будут определяться формулами (6.1)–(6.3) и (6.4), (6.5), причем формулы счисления координат  $\varphi$  и  $\lambda$  будут определяться (6.6), а формула счисления третьей координаты — высоты  $h$  — получается из (5.35) при  $e = 0$  в виде

$$\dot{h} = v_z. \quad (6.136)$$

Выражения (5.28) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_x &= a_x + (U \sin \varphi + \omega_z) v_y - (U \cos \varphi + \omega_y) v_z, \\ \dot{v}_y &= a_y - (U \sin \varphi + \omega_z) v_x + \omega_x v_z, \\ \dot{v}_z &= a_z + \frac{v_y^2 + v_x^2}{R} + 2v_x U \cos \varphi - g. \end{aligned} \right\} \quad (6.137)$$

Входящая сюда величина ускорения силы тяжести  $g$  будет определяться в соответствии с (1.15а) выражением

$$g = g_{\infty} \frac{R_0^2}{R^2} (1 + \beta \sin^2 \varphi). \quad (6.138)$$

В отличие от (1.159), мы здесь будем вместо  $\varphi'$  писать  $\varphi$ , так как в рассматриваемом случае мы имеем дело с первой сферической моделью Земли.

Уравнения ошибок гиросплатформы и счисления координат  $\varphi, \lambda$  для рассматриваемой здесь инерциальной системы, очевидно, будут точно совпадать с уравнениями ошибок (6.10) и (6.24), которые были введены в п. 1.2 данной главы, так как там фактически исследовались аналогичные инерциальные системы, но только для горизонтального движения объекта ( $h \equiv \text{const}$ ). Следовательно, нам остается составить уравнения ошибок для первых интегралов и интегратора высоты.

Уравнение ошибок для интегратора высоты будет иметь вид

$$\Delta \dot{h} = \Delta v_z + \delta \dot{h}_1, \quad (6.139)$$

где  $\delta \dot{h}_1$  — эквивалентный дрейф нуля интегратора высоты.

Уравнения ошибок первых интеграторов составляются посредством варьирования соотношений (6.137) с учетом инструментальных ошибок самих интеграторов. Прделав указанную операцию (см. также (6.15)), получим

$$\begin{aligned} \Delta \dot{v}_x &= \Delta a_x + (U \sin \varphi + \omega_z) \Delta v_y + (U \sin \varphi \Delta \varphi + \Delta \omega_z) v_y - \\ &\quad - (U \cos \varphi + \omega_y) \Delta v_z - (-U \sin \varphi \Delta \varphi + \Delta \omega_y) v_z + \delta \dot{v}_1, \\ \Delta \dot{v}_y &= \Delta a_y - (U \sin \varphi + \omega_z) \Delta v_x - (U \cos \varphi \Delta \varphi + \Delta \omega_z) v_x + \\ &\quad + \omega_x \Delta v_z + \Delta \omega_x v_z + \delta \dot{v}_2, \\ \Delta \dot{v}_z &= \Delta a_z + \frac{2}{R} (v_x \Delta v_x + v_y \Delta v_y) - \frac{1}{R^2} (v_x^2 + v_y^2) \Delta h + \\ &\quad + 2\Delta v_x U \cos \varphi - 2v_x U \sin \varphi \Delta \varphi - \Delta g + \delta \dot{v}_3. \quad \square \quad (6.140) \end{aligned}$$

Здесь  $\delta \dot{v}_1, \delta \dot{v}_2$  определяются формулами (6.15а),  $\delta \dot{v}_3 = \dot{v}_z \delta \dot{h}_1 + \delta \dot{v}_z$  определяет эквивалентный дрейф нуля вертикального интегратора ускорений. Ошибки в определении ускорения силы тяжести получаются варьированием выражения (6.138):

$$\Delta g = -\frac{2g}{R} \Delta h + g_0 \beta \sin 2\varphi \Delta \varphi, \quad (6.141)$$

где через  $g_0$  обозначено ускорение силы тяжести на высоте  $h$  в точках, лежащих в экваториальной плоскости. Далее поступим следующим образом: подставим в уравнения (6.140)  $\Delta g$  из (6.141) и  $\Delta a_x, \Delta a_y, \Delta a_z$  из (6.12) с учетом сноски,  $\Delta v_z, \Delta \dot{v}_z$  выразим по (6.139) через  $\Delta \dot{h}, \dot{h}$  и  $\Delta \omega_x, \Delta \omega_y, \Delta \omega_z$  через  $\Delta \omega'_x, \Delta \omega'_y, \Delta \varphi$  по формулам (6.9), введем обозначения (6.18) и заменим  $\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta \dot{v}_x, \Delta \dot{v}_y$  через  $\Delta \omega'_y, \Delta \omega'_x, \Delta \dot{\omega}'_y, \Delta \dot{\omega}'_x$ . В последнем случае соответствующие величины будут определяться не формулами (6.16) и (6.17), а выражениями вида

$$\begin{aligned} \Delta \frac{v_x}{R} &= \Delta \dot{\omega}'_y + \dot{\omega}'_y \frac{\Delta h}{R}, \quad \frac{\Delta \dot{v}_x}{R} = \Delta \dot{\omega}'_y + \frac{\dot{h}}{R} \Delta \dot{\omega}'_y + \\ &\quad + \dot{\omega}'_y \frac{\Delta \dot{h}}{R} + \dot{\omega}'_y \frac{\Delta h}{R}, \\ \frac{\Delta v_y}{R} &= -\Delta \dot{\omega}'_x - \dot{\omega}'_x \frac{\Delta h}{R}, \quad \frac{\Delta \dot{v}_y}{R} = -\Delta \dot{\omega}'_x - \frac{\dot{h}}{R} \Delta \dot{\omega}'_x - \\ &\quad - \dot{\omega}'_x \frac{\Delta \dot{h}}{R} - \dot{\omega}'_x \frac{\Delta h}{R}, \quad \square \quad (6.142) \end{aligned}$$

которые получаются из (6.5). Если выполнить все указанные выше

операции, то уравнения (6.140) преобразуются к виду

$$\blacksquare \quad -\Delta\dot{\omega}'_x = f_z\gamma_x - f_x\gamma_z + 2\frac{\dot{h}}{R}\Delta\omega'_x - 2(U\sin\varphi + \omega'_y\operatorname{tg}\varphi)\Delta\omega'_y - \\ - (2\omega'_y U \cos\varphi + \omega_y'^2 \sec^2\varphi)\Delta\varphi - 2\omega'_x \frac{\Delta\dot{h}}{R} - \\ - (\dot{\omega}'_x + 2\omega'_y U \sin\varphi + \omega_y'^2 \operatorname{tg}\varphi) \frac{\Delta h}{R} + \delta\dot{\omega}'_{1h},$$

$$\Delta\dot{\omega}'_y = -f_z\gamma_y + f_y\gamma_z - (2U\sin\varphi + \omega'_y\operatorname{tg}\varphi)\Delta\omega'_x - \\ - \left(\omega'_x \operatorname{tg}\varphi + 2\frac{\dot{h}}{R}\right)\Delta\omega'_y - \left(2\omega'_x U \cos\varphi + \omega'_x \omega'_y \sec^2\varphi - \right. \\ \left. - 2\frac{\dot{h}}{R}U\sin\varphi\right)\Delta\varphi - 2(U\sin\varphi + \omega'_y) \frac{\Delta\dot{h}}{R} - \\ - (2\omega'_x U \sin\varphi + \omega'_x \omega'_y \operatorname{tg}\varphi + \dot{\omega}'_y) \frac{\Delta h}{R} + \delta\dot{\omega}'_{2h},$$

$$\Delta\ddot{h} = R(-f_y\gamma_x + f_x\gamma_y) + 2R\omega'_x\Delta\omega'_x + 2R(U\cos\varphi + \omega'_y)\Delta\omega'_y - \\ - (2R\omega'_y \sin\varphi + g_3\beta \sin 2\varphi)\Delta\varphi + \\ + (2v^2 + \omega_x'^2 + \omega_y'^2 + 2\omega'_y U \cos\varphi)\Delta h + \delta\dot{v}_3, \quad \square \quad (6.143)$$

где \*)

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{\omega}'_{1h} &= \delta\dot{\omega}'_1 - \omega'_x \delta\dot{h}_1, \\ \delta\dot{\omega}'_{2h} &= \delta\dot{\omega}'_2 + (2U\cos\varphi + \omega'_y) \delta\dot{h}_1, \\ \delta\dot{v}_3 &= \delta\dot{v}_3 + (\delta\dot{h}_1)', \end{aligned} \right\} \quad (6.144)$$

причем  $\delta\dot{\omega}'_1$ ,  $\delta\dot{\omega}'_2$  определяются формулами (6.20). Совокупность уравнений (6.10), (6.24) и (6.43) образует систему уравнений ошибок рассматриваемой инерциальной системы с тремя акселерометрами. К полученной системе уравнений ошибок можно применить линейное преобразование (6.82). В результате преобразования уравнения (6.10) переходят, как и раньше, в (6.83), уравнения (6.24) не изменяют своего вида, а (6.143), переходят в уравнения

$$\blacksquare \quad \Delta\dot{\omega}'_x = -2\frac{\dot{h}}{R}\Delta\omega'_x + 2(U\sin\varphi + \omega'_y\operatorname{tg}\varphi)\Delta\omega'_y + \\ + (2\omega'_y U \cos\varphi + \omega_y'^2 \sec^2\varphi + f_z)\Delta\varphi - 2\omega'_x \frac{\Delta\dot{h}}{R} + \\ + (\dot{\omega}'_x + 2\omega'_y U \sin\varphi + \omega_y'^2 \operatorname{tg}\varphi) \frac{\Delta h}{R} + f_x\Delta\lambda \sin\varphi + \delta\dot{\omega}'_{1h},$$

\*) Здесь, как и прежде,  $(\delta\dot{h}_1)'$  есть производная по времени от величины  $\delta h_1$ .

$$\Delta\dot{\omega}'_y = -2(U\sin\varphi + \omega'_y\operatorname{tg}\varphi)\Delta\omega'_x - \left(\omega'_x \operatorname{tg}\varphi + 2\frac{\dot{h}}{R}\right)\Delta\omega'_y - \\ - \left(2\omega'_x U \cos\varphi + \omega'_x \omega'_y \sec^2\varphi - 2\frac{\dot{h}}{R}U\sin\varphi\right)\Delta\varphi + \\ + (f_y\sin\varphi - f_z\cos\varphi)\Delta\lambda - 2(U\sin\varphi + \omega'_y) \frac{\Delta\dot{h}}{R} - \\ - (2\omega'_x U \sin\varphi + \omega'_x \omega'_y \operatorname{tg}\varphi + \dot{\omega}'_y) \frac{\Delta h}{R} + \delta\dot{\omega}'_{1h},$$

$$\Delta\ddot{h} = 2R\omega'_x\Delta\omega'_x + 2R(U\cos\varphi + \omega'_y)\Delta\omega'_y - \\ - (2RU\omega'_y \sin\varphi + g_3\beta \sin 2\varphi - Rf_y)\Delta\varphi + Rf_x\Delta\lambda \cos\varphi + \\ + (2v^2 + \omega_x'^2 + \omega_y'^2 + 2\omega'_y U \cos\varphi)\Delta h + \delta\dot{v}_{III}, \quad \square \quad (6.145)$$

где

$$\blacksquare \quad \delta\dot{\omega}'_{1h} = \delta\dot{\omega}'_1 - \omega'_x \delta\dot{h}_1 = -f_z\tilde{\gamma}_x + f_x\tilde{\gamma}_z + \delta\dot{\omega}'_1 - \omega'_x \delta\dot{h}_1, \\ \delta\dot{\omega}'_{2h} = \delta\dot{\omega}'_2 + (2U\cos\varphi + \omega'_y) \delta\dot{h}_1 = \\ = f_y\tilde{\gamma}_z - f_z\tilde{\gamma}_x + \delta\dot{\omega}'_2 + (2U\cos\varphi + \omega'_y) \delta\dot{h}_1, \\ \delta\dot{v}_{III} = R(-f_y\tilde{\gamma}_x + f_x\tilde{\gamma}_y) + \delta\dot{v}_3, \quad \square \quad (6.146)$$

причем  $\delta\dot{\omega}'_1$ ,  $\delta\dot{\omega}'_2$  определяются (6.20), а  $\delta\dot{v}_3$  третьей формулой (6.144). И наконец, в системе уравнений (6.24) и (6.145) можно исключить переменные  $\Delta\omega'_x$  и  $\Delta\omega'_y$  и свести ее к эквивалентной системе уравнений, которая будет содержать переменные  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\theta = \Delta\lambda \cos\varphi$  и  $\Delta h$ .

Процедура исключения переменных  $\Delta\omega'_x$  и  $\Delta\omega'_y$  остается такой же, как и в п. 1.4 данной главы. Промежуточные формулы (6.90) и (6.91) сохраняют свой смысл и в рассматриваемом случае. Несколько изменяются выражения для  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$ . Эти выражения получаются из (6.137), если в них  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , а также  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ ,  $\dot{v}_x$ ,  $\dot{v}_y$  выразить с учетом (6.5) через  $\omega'_y$ ,  $\omega'_x$ ,  $\dot{\omega}'_y$ ,  $\dot{\omega}'_x$ , причем при дифференцировании выражений (6.5) следует помнить, что входящая в выражение для  $R = R_0 + h$  высота  $h$  также зависит от времени. Таким образом, можно получить выражения

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \dot{\omega}'_y + (2U\sin\varphi + \omega'_y\operatorname{tg}\varphi)\omega'_x + (2U\cos\varphi + \omega'_y) \frac{\dot{h}}{R}, \\ f_y &= -\dot{\omega}'_x + (2U\sin\varphi + \omega'_y\operatorname{tg}\varphi)\omega'_y - \omega'_x \frac{\dot{h}}{R}, \\ f_z &= \frac{\dot{h}}{R} - (\omega_x'^2 + \omega_y'^2) - 2\omega'_y U \cos\varphi + \frac{g}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (6.147)$$

Если провести указанное выше исключение переменных, то

в результате получим уравнения в виде

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \Delta\dot{\varphi} + \frac{2\dot{h}}{R} \Delta\varphi + \\ & + \left( v^2 - \omega_x^2 - \omega_y^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - 2\omega_y U \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi + \frac{\dot{h}}{R} \right) \Delta\varphi + \\ & + 2(U \sin \varphi + \omega_y \operatorname{tg} \varphi) \Delta\theta + \\ & + \left[ (\dot{\omega}_y - \dot{\omega}_x \omega_y \operatorname{tg} \varphi) \operatorname{tg} \varphi + 2(U \cos \varphi + \dot{\omega}_y) \operatorname{tg} \varphi \frac{\dot{h}}{R} \right] \Delta\theta - \\ & - 2\omega_x \frac{\Delta\dot{h}}{R} + \left[ -\dot{\omega}_x - 2\omega_y U \sin \varphi + \omega_y^2 \operatorname{tg} \varphi \right] \frac{\Delta h}{R} = \delta\dot{\omega}_{\varphi h}, \\ \Delta\ddot{\theta} + 2 \frac{\dot{h}}{R} \Delta\dot{\theta} + \left( v^2 - \omega_y^2 \sec^2 \varphi - 2\omega_y U \sec \varphi + \frac{\dot{h}}{R} \right) \Delta\theta - \\ & - 2(U \sin \varphi + \dot{\omega}_y \operatorname{tg} \varphi) \Delta\varphi + \\ & + \left[ -\dot{\omega}_y \operatorname{tg} \varphi + \dot{\omega}_x \omega_y (1 + \sec^2 \varphi) + 2\dot{\omega}_x U \cos \varphi - 2 \frac{\dot{h}}{R} \times \right. \\ & \times (U \sin \varphi + \omega_y \operatorname{tg} \varphi) \left. \right] \Delta\varphi + 2(U \cos \varphi + \dot{\omega}_y) \frac{\Delta\dot{h}}{R} + \\ & + (\dot{\omega}_y + 2\dot{\omega}_x U \cos \varphi + \dot{\omega}_x \omega_y \operatorname{tg} \varphi) \frac{\Delta h}{R} = \delta\dot{\omega}_{\theta h}, \\ \Delta\ddot{h} - (2v^2 + \omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\omega_y U \cos \varphi) \Delta h + \\ & + 2R\dot{\omega}_x \Delta\varphi + (\beta g_3 \sin 2\varphi + R\omega_y^2 \operatorname{tg} \varphi + R\dot{\omega}_x + 2\omega_x \dot{h}) \Delta\varphi - \\ & - 2R(U \cos \varphi + \dot{\omega}_y) \Delta\theta + \\ & + [(-R\dot{\omega}_y + R\dot{\omega}_x \omega_y \operatorname{tg} \varphi - 2(U \cos \varphi + \dot{\omega}_y) \dot{h}) \Delta\theta = \delta\dot{v}_{III}. \quad \square \quad (6.148) \end{aligned}$$

В этих уравнениях введены обозначения:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \delta\dot{\omega}_{\varphi h} = \delta\dot{\omega}_{Ih} + 2 \frac{\dot{h}}{R} \delta\varphi_1 + (\delta\varphi_1)' + 2(U \sin \varphi + \omega_y \operatorname{tg} \varphi) \delta\dot{\lambda}_1 \cos \varphi, \\ \delta\dot{\omega}_{\theta h} = \delta\dot{\omega}_{IIIh} - & 2(U \sin \varphi + \omega_y \operatorname{tg} \varphi) \delta\varphi_1 + \\ & + \left( \dot{\omega}_x \operatorname{tg} \varphi + 2 \frac{\dot{h}}{R} \right) \delta\dot{\lambda}_1 \cos \varphi_x + (\delta\dot{\lambda}_1 \cos \varphi)', \quad \square \quad (6.149) \end{aligned}$$

в которых  $\delta\dot{\omega}_{Ih}$  и  $\delta\dot{\omega}_{IIIh}$  определяются формулами (6.146). Полученные уравнения ошибок инерциальной системы в общем случае являются линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. Для некоторых частных случаев движения объекта коэффициенты уравнений ошибок будут выражаться постоянными величинами. Это, безусловно, будет иметь место при горизонтальном движении объекта ( $\dot{h} \equiv \text{const}$ ) вдоль географической параллели ( $\varphi \equiv \text{const}$ ) с постоянной скоростью ( $\omega_y = \text{const}$ ).

Чтобы определить важнейшее свойство инерциальных систем с тремя акселерометрами, рассмотрим случай, когда объект на-

ходится на экваторе и неподвижен относительно Земли, т. е. когда  $\varphi(t) \equiv \omega_y(t) \equiv \dot{h}(t) \equiv 0$ . При таких условиях проводится анализ ошибок инерциальной системы с двумя акселерометрами в п. 1.3 и анализ уравнений ошибок ориентации в форме (6.83) в п. 1.4 настоящей главы. Так как уравнения (6.83) сохраняют свой смысл и в рассматриваемом случае, то нам по существу остается провести анализ уравнений ошибок в определении координат. Такой анализ будем проводить по уравнениям (6.148), которые при  $\varphi(t) \equiv \omega_y(t) \equiv \dot{h}(t) \equiv 0$  приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta\dot{\varphi} + v^2 \Delta\varphi &= \delta\dot{\omega}_{\varphi h}, \\ \Delta\ddot{\theta} + v^2 \Delta\theta + 2 \frac{U}{R} \Delta\dot{h} &= \delta\dot{\omega}_{\theta h}, \\ \Delta\ddot{h} - 2v^2 \Delta h - 2RU \Delta\dot{\theta} &= \delta\dot{v}_{III}. \end{aligned} \right\} \quad (6.150)$$

Согласно формулам (6.149) и (6.93), (6.87) и третьей формуле (6.146), правые части уравнений (6.150) линейно зависят от углов  $\tilde{\gamma}_x, \tilde{\gamma}_y, \tilde{\gamma}_z$ . Изменение этих углов во времени определяется формулами (6.97), если сохранить принятое там допущение о постоянстве входных возмущений  $\delta\omega_I, \delta\omega_{II}, \delta\omega_{III}$ . Первое уравнение (6.150) решается независимо от остальных уравнений. Это уравнение отличается от уравнения ошибок  $\Delta\varphi$  для инерциальной системы с двумя акселерометрами, которое можно получить из первого уравнения (6.92) при  $\varphi(t) \equiv \omega_y(t) \equiv 0$ , так как по (6.149), (6.146), (6.87), (6.93)  $\delta\dot{\omega}_{\varphi h}$  отличается от  $\delta\dot{\omega}_{\varphi}$  слагаемыми  $-\dot{\omega}_x \delta\dot{h}_1 + 2 \frac{\dot{h}}{R} \delta\varphi_1$ , зависящими от эквивалентного дрейфа нуля первого интегратора вертикального канала системы с тремя акселерометрами. Поэтому можно сделать заключение (по крайней мере в рамках рассматриваемого случая), что наличие третьего канала не изменяет существенно характера зависимости ошибки  $\Delta\varphi$  от времени. Два последних уравнения (6.150) являются взаимосвязанными. Их характеристический полином имеет вид

$$\Delta(S) = (S^2 - 2v^2)(S^2 + v^2) + 4U^2 S^2. \quad (6.151)$$

Без ущерба для точности мы можем в (6.151) пренебречь членом  $4U^2 S^2$ , так как величина  $4U^2$  примерно в сто раз меньше  $v^2$ . В этом случае корни характеристического полинома можно вычислить по формулам

$$S_{1,2} = \pm v \sqrt{2}, \quad S_{3,4} = \pm iv. \quad (6.152)$$

Среди корней (6.152) имеется положительный корень, равный  $v\sqrt{2}$ , следовательно, решение двух последних уравнений (6.150) будет неустойчивым, и при бесконечном увеличении времени ошибки  $\Delta\theta$  и  $\Delta h$  будут неограниченно возрастать. Устойчивость яв-

ляется внутренним свойством системы и она определяется характером решений соответствующих однородных уравнений. Рассмотрим такое решение при начальном условии

$$\Delta h(0) = \Delta \theta(0) = 0, \quad \Delta \dot{h}(0) = \Delta \dot{h}_0 \quad \text{и} \quad \Delta \dot{\theta}(0) = \Delta \dot{\theta}_0.$$

В соответствии с (6.90) и (6.142) при  $\varphi = 0$  и  $\omega_y^i = 0$  имеем  $\Delta \dot{\theta}_0 = \Delta \omega_y^i(0) = R \Delta v_x(0)$ . При этом в (6.90) мы опустим величину  $\delta \lambda_1(0)$ , которая является начальным значением внешнего возмущения. Если к двум последним уравнениям (6.150), взятым с нулевыми правыми частями, применить методы операционного исчисления с учетом заданного начального условия, а затем полученные линейные алгебраические уравнения разрешить относительно изображений  $\Delta \theta(S)$  и  $\Delta h(S)$  искомых функции, то тогда получим выражение

$$\left. \begin{aligned} \Delta \theta(S) &= \frac{\Delta \dot{\theta}_0(S^2 - 2v) - \Delta \dot{h}_0 S \frac{2U}{R_0}}{(S^2 - 2v)(S^2 + v^2)}, \\ \Delta h(S) &= \frac{\Delta \dot{h}_0(S^2 + v^2) + \Delta \dot{\theta}_0 S \cdot 2R_0 U}{(S^2 - 2v)(S^2 + v^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.152a)$$

В приведенных равенствах мы в выражении (6.151) для  $\Delta(S)$  пренебрегли слагаемым  $4U^2 S^2$  по отношению к слагаемому  $v^2 S^2$ .

Имеет место следующее разложение на элементарные дроби:

$$\frac{S}{(S^2 - 2v^2)(S^2 + v^2)} = \frac{1}{3v^2} \left( \frac{S}{S^2 - 2v^2} - \frac{S}{S^2 + v^2} \right). \quad (6.152b)$$

Если учесть приведенное разложение и табличные изображения для тригонометрических и гиперболических функций, то по изображениям (6.152a) легко найти оригиналы. Они будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta \theta(t) &= \frac{\Delta \dot{\theta}_0}{v} \sin vt - \frac{2}{3} \frac{U}{v} \frac{\Delta \dot{h}_0}{\sqrt{Rg}} (\operatorname{ch} v \sqrt{2t} - \cos vt), \\ \Delta h(t) &= \frac{\Delta \dot{h}_0}{v \sqrt{2}} \operatorname{sh} v \sqrt{2t} + \frac{2}{3} R \frac{U}{v} \frac{\Delta \dot{\theta}_0}{v} (\operatorname{ch} v \sqrt{2t} - \cos vt). \end{aligned} \quad (6.153)$$

Мы здесь в соответствии с (6.22) заменили  $Rv$  на  $\sqrt{Rg}$ . Из анализа полученных выражений можно сделать вывод, что неустойчивость по каналу долготы обуславливается его перекрестной связью с каналом высоты, так как при  $\Delta \dot{h}_0 = 0$  ошибка  $\Delta \theta$  (она при  $\varphi = 0$  равна  $\Delta \lambda$ ) изменяется по гармоническому закону.

Канал высоты является собственно неустойчивым, так как при  $\Delta \dot{\theta}_0 = 0$  ошибка  $\Delta h(t)$  будет все равно возрастать неограниченно. Чтобы иметь представление о скорости возрастания ошибок, ука-

жем, что в выражениях для гиперболических синуса и косинуса

$$\operatorname{sh} v \sqrt{2t} = \frac{1}{2} (e^{v \sqrt{2t}} - e^{-v \sqrt{2t}}), \quad \operatorname{ch} v \sqrt{2t} = \frac{1}{2} (e^{v \sqrt{2t}} + e^{-v \sqrt{2t}})$$

по прошествии небольшого промежутка времени главную роль играет возрастающая экспонента  $e^{v \sqrt{2t}}$ . Эту экспоненту можно

переписать в виде  $e^{2\sqrt{2} \frac{\pi}{T_v} t} = e^{2,8 \frac{\pi}{T_v} t}$ , где  $T_v$  — период Шулера, равный 84,4 мин при  $R = R_0$ . Тогда при  $t = 30$  мин эта экспонента становится примерно равной  $e^\pi \approx 23$ , при  $t \approx 60$  мин —  $e^{2\pi} = 529$  и т. д. Следовательно, к указанным моментам времени половинные значения начальных амплитуд будут увеличиваться примерно во столько же раз.

К инерциальным системам обычно предъявляются требования, чтобы они обеспечивали необходимую точность в определении навигационных параметров в заданном интервале времени, который зависит от свойств движущегося объекта. Если принципиально неустойчивая система обеспечивает требуемую точность в заданном интервале времени, то ее можно применить на соответствующем объекте. Вообще в последнее время наряду с классическим определением устойчивости, данным Ляпуновым, в котором требуется наблюдение системы на бесконечном интервале времени, было введено понятие технической устойчивости, по которому требуется, чтобы система не вышла за пределы определенной области за некоторый конечный промежуток времени. Насколько известно автору, понятие технической устойчивости впервые было введено Н. Д. Моисеевым. Следует отметить, что по существу вопросы технической устойчивости при конкретных значениях параметров системы решаются при ее моделировании с помощью ЭВМ.

В заключение вернемся к рассмотрению инерциальной системы с двумя акселерометрами. Такая система анализировалась в предыдущем пункте при  $h = \text{const}$ , т. е. в предположении, что объект движется в горизонтальной плоскости. Снимем это ограничение и будем считать, что объект может двигаться в пространстве с изменением высоты. При этом будем считать (мы на этом останавливались раньше), что вычисление радиуса-вектора  $R = R_0 + h$  осуществляется в инерциальной системе с использованием внешней информации, поставленной в систему барометрическим высотомером. Барометрический высотомер имеет собственную ошибку  $\delta h$ , которая является в том или ином смысле известной функцией времени. Величина  $\delta h$  является одной из входных ошибок системы. Уравнения ошибок (6.10) и (6.24) для рассматриваемой системы не изменяются, поэтому нам нужно только заново вывести уравнения ошибок первых интеграторов, которые будут аналогом уравнений (6.19). При составлении уравнений ошибок интеграторов следует отметить, что ошибки акселерометров также остаются

без изменения. Они определяются формулами (6.12) и (6.12а). При изменении высоты  $h$  истинные значения величин  $\dot{v}_x$  и  $\dot{v}_y$  определяются первыми двумя уравнениями (6.137), а расчетные значения  $\check{v}_x$  и  $\check{v}_y$  этих величин определяются в инерциальной системе с двумя акселерометрами по формулам (4.25), (5.3) и (6.13). Так как в множителе при  $\delta h_{\text{и}}$  (см. (4.27)) можно расчетные значения величин заменять их истинными значениями, то с учетом (6.137) запишем

$$\left. \begin{aligned} \check{v}_x &= \bar{a}_x + (U \sin \bar{\varphi} + \bar{\omega}_z) \check{v}_y + [\dot{v}_x + (U \cos \varphi + \omega_y) v_z] \delta h_{\text{и}} + \delta \dot{v}_x, \\ \check{v}_y &= \bar{a}_y - (U \sin \bar{\varphi} + \bar{\omega}_z) \check{v}_x + [\dot{v}_y - \omega_x v_z] \delta h_{\text{и}} + \delta \dot{v}_y. \end{aligned} \right\} \quad (6.154)$$

Теперь из уравнений (6.154) нужно вычесть соответствующие уравнения (6.137), а затем разности расчетных и истинных значений функций нужно заменить их главными линейными частями, т. е. вариациями. Применяя такую процедуру, получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{v}_x &= \Delta a_x + (U \sin \varphi + \omega_z) \Delta v_y + (U \cos \varphi \Delta \varphi + \Delta \omega_z) v_y + \delta \dot{v}_1^*, \\ \Delta \dot{v}_y &= \Delta a_y - (U \sin \varphi + \omega_z) \Delta v_x - (U \cos \varphi \Delta \varphi + \Delta \omega_z) v_x + \delta \dot{v}_2^*, \end{aligned} \right\} \quad (6.155)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{v}_1^* &= [\dot{v}_x + (2U \cos \varphi + \omega_y) v_z] \delta h_{\text{и}} + \delta \dot{v}_x + (2U \cos \varphi + \omega_y) v_z, \\ \delta \dot{v}_2^* &= [\dot{v}_y - \omega_x v_z] \delta h_{\text{и}} + \delta \dot{v}_y - \omega_x v_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.156)$$

В последних выражениях  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  определены по формулам (6.1) — (6.3). Теперь следует  $\Delta a_x$ ,  $\Delta a_y$  определить по (6.12), (6.12а), а также, воспользовавшись формулами (6.142), выразить  $\Delta v_x$ ,  $\Delta v_y$ ,  $\Delta \dot{v}_x$ ,  $\Delta \dot{v}_y$  через  $\Delta \omega_y$ ,  $\Delta \omega_x$ ,  $\Delta \dot{\omega}_y$ ,  $\Delta \dot{\omega}_x$ . В формулах (6.142) величины  $\Delta h$  и  $\Delta \dot{h}$  следует заменить на  $\delta h$  и  $(\delta h)'$  (здесь штрих означает дифференцирование по времени). Тогда получим

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad -\Delta \dot{\omega}_x &= f_z \gamma_x - f_x \gamma_z + \frac{\dot{h}}{R} \Delta \omega_x - 2(U \sin \varphi + \omega_y \operatorname{tg} \varphi) \Delta \omega_y - \\ &\quad - (2\omega_y U \cos \varphi + \omega_y^2 \sec^2 \varphi) \Delta \varphi + \delta \dot{\omega}_{1*}, \\ \Delta \dot{\omega}_y &= f_x \gamma_y - f_y \gamma_x - (2U \sin \varphi + \omega_y \operatorname{tg} \varphi) \Delta \omega_x - (\omega_x \operatorname{tg} \varphi + \frac{\dot{h}}{R}) \Delta \omega_y - \\ &\quad - (2\omega_x U \cos \varphi + \omega_x \omega_y \sec^2 \varphi) \Delta \varphi + \delta \dot{\omega}_{2*}, \quad \square \quad (6.157) \end{aligned}$$

где

$$\blacksquare \quad \delta \dot{\omega}_{1*} = \frac{1}{R} \delta \dot{v}_{2*} + \frac{1}{R} \delta a_2 + \omega_x \frac{(\delta h)'}{R} - \\ - (-\dot{\omega}_x + 2\omega_y U \sin \varphi + \omega_y^2 \operatorname{tg} \varphi) \frac{\delta h}{R},$$

$$\delta \dot{\omega}_{2*} = \frac{1}{R} \delta \dot{v}_{1*} + \frac{1}{R} \delta a_1 - \omega_y \frac{(\delta h)'}{R} - \\ - (\dot{\omega}_y + 2\omega_x U \sin \varphi + \omega_x \omega_y \operatorname{tg} \varphi) \frac{\delta h}{R}. \quad \square \quad (6.158)$$

Уравнения (6.10), (6.14), (6.157) образуют систему уравнений ошибок инерциальной системы с двумя акселерометрами при произвольном движении объекта, когда параметр высоты вводится в систему барометрическим высотомером. Полученную систему уравнений ошибок можно считать обобщением системы уравнений (6.26). Если к полученной системе уравнений применить линейное преобразование (6.82), то уравнения (6.10) приведутся к форме (6.83), уравнения (6.14) останутся без изменения, а уравнения (6.157) приобретут вид

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \Delta \dot{\omega}_x &= -\frac{\dot{h}}{R} \Delta \omega_x + 2(U \sin \varphi + \omega_y \operatorname{tg} \varphi) \Delta \omega_y + \\ &\quad + (2\omega_y U \cos \varphi + \omega_y^2 \sec^2 \varphi + f_z) \Delta \varphi + f_x \Delta \lambda \sin \varphi + \delta \dot{\omega}_{1*}, \\ \Delta \dot{\omega}_y &= -(2U \sin \varphi + \omega_y \operatorname{tg} \varphi) \Delta \omega_x - \left( \omega_x \operatorname{tg} \varphi + \frac{\dot{h}}{R} \right) \Delta \omega_y - \\ &\quad - (2\omega_x U \cos \varphi + \omega_x \omega_y \sec^2 \varphi) \Delta \varphi + (f_y \sin \varphi - f_z \cos \varphi) \Delta \lambda + \delta \dot{\omega}_{1*}, \end{aligned} \quad \square \quad (6.159)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{\omega}_{1*} &= \delta \dot{\omega}_{1*} + f_z \tilde{\gamma}_x - f_x \tilde{\gamma}_z, \\ \delta \dot{\omega}_{1*} &= \delta \dot{\omega}_{2*} + f_y \tilde{\gamma}_z - f_z \tilde{\gamma}_y, \end{aligned} \right\} \quad (6.160)$$

а  $\delta \dot{\omega}_{1*}$  и  $\delta \dot{\omega}_{2*}$  определяются (6.158).

Уравнения (6.159) являются обобщением уравнений (6.86). И наконец, уравнения (6.24) и (6.159) можно разрешить относительно  $\Delta \varphi$  и  $\Delta \theta = \Delta \lambda \cos \varphi$ . Процедура исключения  $\Delta \omega_x$  и  $\Delta \omega_y$  из указанных уравнений остается такой же, как и при выводе уравнения (6.92). Такое исключение производится с помощью выражений (6.90) и (6.91). В результате мы получим два дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \Delta \ddot{\varphi} + \frac{\dot{h}}{R} \Delta \dot{\varphi} + \left( v^2 - \omega_x^2 - \omega_y^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - 2\omega_y U \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi + \frac{\ddot{h}}{R} \right) \Delta \varphi + \\ + 2(U \sin \varphi + \omega_y \operatorname{tg} \varphi) \Delta \dot{\theta} + \left[ (\dot{\omega}_y - \omega_x \omega_y \operatorname{tg} \varphi) \operatorname{tg} \varphi + \right. \\ \left. + 2(U \cos \varphi + \omega_y) \frac{\dot{h}}{R} \operatorname{tg} \varphi \right] \Delta \theta = \delta \dot{\omega}_{\varphi*}, \end{aligned}$$

$$\Delta\ddot{\theta} + \frac{\dot{h}}{R} \Delta\dot{\theta} + (v^2 - \omega_y'^2 \sec^2 \varphi - 2\omega_y' U \sec \varphi + \frac{\dot{h}}{R}) \Delta\theta - \\ - 2(U \sin \varphi + \omega_y' \operatorname{tg} \varphi) \Delta\varphi + \left[ -\dot{\omega}_y' \operatorname{tg} \varphi + \omega_x' \omega_y' (1 + \sec^2 \varphi) + \right. \\ \left. + 2\omega_x' U \cos \varphi - \omega_y' \frac{\dot{h}}{R} \operatorname{tg} \varphi \right] \Delta\varphi = \delta\dot{\omega}_{\theta*}, \quad \square \quad (6.161)$$

где

$$\delta\dot{\omega}_{\varphi*} = -\delta\dot{\omega}_{I*} + (\delta\varphi_1)' + \frac{\dot{h}}{R} \delta\varphi_1 + \\ + 2(U \sin \varphi + \omega_y' \operatorname{tg} \varphi) \delta\dot{\lambda}_1 \cos \varphi, \\ \delta\dot{\omega}_{\theta*} = \delta\dot{\omega}_{II*} - (2U \cos \varphi + \omega_y' \operatorname{tg} \varphi) \delta\varphi_{I*} + \\ + \left( \omega_x' \operatorname{tg} \varphi + \frac{\dot{h}}{R} \right) \delta\dot{\lambda}_1 \cos^2 \varphi + (\delta\dot{\lambda}_1 \cos \varphi)'. \quad \square \quad (6.162)$$

Очевидно, полученные уравнения (6.161) можно рассматривать как обобщение уравнений (6.92).

Полученные уравнения ошибок в форме (6.10), (6.14), (6.157) или в виде (6.83), (6.159), или, наконец, в виде (6.83), (6.161) позволяют проводить линейный анализ ошибок инерциальной системы с двумя акселерометрами при любом движении объекта. Эти уравнения будут иметь постоянные коэффициенты при тех же условиях, что и система с тремя акселерометрами. В частности, при  $\varphi(t) \equiv \omega_y'(t) \equiv \Delta h(t) \equiv 0$  данные системы будут удовлетворять условиям обыкновенной устойчивости, тогда как проведенный анализ уравнений (6.150) показал, что в этом случае инерциальная система с тремя акселерометрами была неустойчивой.

Инерциальная система с тремя акселерометрами и инерциальная система с двумя акселерометрами и барометрическим высотомером решают один и тот же комплекс навигационных задач. Однако вторая система является более устойчивой (если можно так выразиться): здесь мы впервые встречаемся с таким случаем, когда использование внешней информации о некоторых навигационных параметрах позволяет улучшить некоторые характеристики инерциальных систем, в данном случае характеристику устойчивости.

**6.1.9. Учет ошибок в установке осей чувствительности измерительных элементов.** Входные ошибки инерциальной системы были разделены в п. 1.1 данной главы на четыре класса. Методические, инструментальные ошибки, а также ошибки начальной выставки системы нашли свое отражение в уравнениях ошибок. Нам остается учесть влияние входных ошибок, обусловленных неточной выставкой (в процессе производства) осей чувствительности измерительных элементов, или по другой, более краткой терминологии, ошибок конструкции. До сих пор предполагали мы, что оси

чувствительности акселерометров и гироскопов совпадают с соответствующими осями стабилизированной платформы, которые мы всегда обозначали через  $x_p, y_p, z_p$ . В действительности из-за неизбежных погрешностей монтажа приборов каждая из осей чувствительности акселерометров и гироскопов будет отклонена от соответствующей оси платформы на малый угол, который можно в пространстве охарактеризовать двумя малыми независимыми величинами. Будем обозначать оси чувствительности акселерометров через  $x_A, y_A, z_A$ , а оси чувствительности гироскопов — через  $x_G, y_G, z_G$ . Положение осей  $x_A, y_A, z_A$  и  $x_G, y_G, z_G$  относительно опорной координатной системы  $x_p y_p z_p$  будем определять матричными выражениями

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \theta_z' & -\theta_y' \\ -\theta_z'' & 1 & \theta_x'' \\ \theta_y''' & -\theta_x''' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (6.163)$$

и

$$\begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \psi_z' & -\psi_y' \\ -\psi_z'' & 1 & \psi_x'' \\ \psi_y''' & -\psi_x''' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}, \quad (6.164)$$

которые легко получить обобщением преобразования координатных систем, определяемых формулами (3.124) и (3.131).

В (6.163) и (6.164) штрихи над буквами указывают на ось чувствительности измерительного элемента, а нижний индекс указывает на ось платформы, вокруг которой повернута ось чувствительности на соответствующий малый угол. Вращение считается в положительном направлении. Так, например,  $\theta_z'$  есть угол поворота оси акселерометра  $x_A$  вокруг оси платформы  $z_p$  и т. д.

Для определенности опорный трехгранник будем обозначать через  $xuz$ . Этот трехгранник моделируется приборным трехгранником  $x_p y_p z_p$ . Преобразование опорной координатной системы  $xuz$  в приборную  $x_p y_p z_p$  определяется матричным выражением

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_z & -\gamma_y \\ -\gamma_z & 1 & \gamma_x \\ \gamma_y & -\gamma_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (6.165)$$

которым мы по существу уже неоднократно пользовались в данном параграфе.

Три акселерометра измеряют проекции  $a_{x_A}, a_{y_A}, a_{z_A}$  кажущегося ускорения на оси  $x_A, y_A, z_A$ . С помощью двух последовательных преобразований (6.165) и (6.163) можно величины

$a_{x_A}, a_{y_A}, a_{z_A}$  выразить через проекции  $a_x, a_y, a_z$  кажущегося ускорения на оси  $x, y, z$  опорного трехгранника  $xuz$ . Матрица суммарного преобразования получается умножением квадратной матрицы (6.163) справа на квадратную матрицу (6.165). Если в произведении указанных матриц пренебречь величинами второго порядка малости относительно углов  $\theta$  и  $\gamma$  с соответствующими верхними и нижними индексами, а затем само преобразование записать в обычной форме, то получим выражения

$$\left. \begin{aligned} a_{x_A} &= a_x + (\gamma_z + \theta'_z) a_y - (\gamma_y + \theta'_y) a_z, \\ a_{y_A} &= a_y + (\gamma_x + \theta''_x) a_z - (\gamma_x + \theta''_z) a_x, \\ a_{z_A} &= a_z + (\gamma_y + \theta'''_y) a_x - (\gamma_x + \theta'''_x) a_y. \end{aligned} \right\} \quad (6.166)$$

Реальные характеристики трех акселерометров с осями чувствительности  $x_A, y_A, z_A$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_x &= (1 + \delta h'_a) a_{x_A} + \delta a_x, \\ \bar{a}_y &= (1 + \delta h''_a) a_{y_A} + \delta a_y, \\ \bar{a}_z &= (1 + \delta h'''_a) a_{z_A} + \delta a_z, \end{aligned} \right\} \quad (6.167)$$

где  $\delta a_x, \delta a_y, \delta a_z$  — смещения нулей и  $\delta h'_a, \delta h''_a, \delta h'''_a$  — ошибки масштабных коэффициентов соответствующих акселерометров.

Подставим в (1.167)  $a_{x_A}, a_{y_A}, a_{z_A}$  из (6.166), раскроем скобки и пренебрежем величинами второго порядка малости относительно  $\delta h_a$  и углов  $\theta$  и  $\Psi$ . Тогда выходные ошибки акселерометров  $\Delta a_x = \bar{a}_x - a_x$  и т. д. можно представить в форме (6.12) с учетом формул (6.12б), если только в указанных выражениях эквивалентные смещения нуля акселерометров определять соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \delta a_1 &= a_x \delta h'_a + a_y \theta'_z - a_z \theta'_y + \delta a_x, \\ \delta a_2 &= a_y \delta h''_a + a_z \theta''_x - a_x \theta''_z + \delta a_y, \\ \delta a_3 &= a_z \delta h'''_a + a_x \theta'''_y - a_y \theta'''_x + \delta a_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.168)$$

Для большей общности мы здесь предполагаем, как это в действительности должно иметь место, что ошибки масштабных коэффициентов не одинаковы для различных акселерометров.

Можно аналогичными рассуждениями показать, что при учете ошибок конструкции эквивалентный дрейф гироскопов нужно определять выражениями

$$\left. \begin{aligned} \delta \omega_1 &= \omega_x \delta h'_\kappa + \omega_y \psi'_z - \omega_z \psi'_y + \delta \omega_x, \\ \delta \omega_2 &= \omega_y \delta h''_\kappa + \omega_z \psi''_x - \omega_x \psi''_z + \delta \omega_y, \\ \delta \omega_3 &= \omega_z \delta h'''_\kappa + \omega_x \psi'''_y - \omega_y \psi'''_x + \delta \omega_z, \end{aligned} \right\} \quad (6.169)$$

причем по отношению к (6.10а) считаем, что ошибки масштабных коэффициентов различных каналов управления платформы не одинаковы.

Формулы (6.168) и (6.169) решают поставленную задачу.

## § 6.2. Система с ориентацией опорного трехгранника по гравитационной вертикали

**6.2.1. Уравнения ошибок инерциальной системы с гравитационным опорным и навигационным трехгранниками.** Гравитационный трехгранник  $x''y''z''$  ориентирован в пространстве таким образом, что его ось  $z''$  направлена вдоль линии действия силы тяготения вверх, ось  $y''$  лежит в плоскости меридиана и направлена на север, а ось  $x''$  по необходимости должна быть направлена вдоль параллели на восток. Ось  $x''$ , как это уже отмечалось раньше, совпадает с осью  $x$  географического трехгранника  $xuz$ .

Грань  $x''y''$  трехгранника  $x''y''z''$  мы иногда называли гравитационным горизонтом. Аналитические зависимости алгоритма инерциальной системы с опорным гравитационным трехгранником  $x''y''z''$  удобно выражать через проекции абсолютной скорости и их производные. В этом случае проекции  $a''_x, a''_y$  кажущегося ускорения на оси  $x'', y''$  не зависят от гравитационного ускорения  $g'$ , так как вектор такого ускорения перпендикулярен плоскости гравитационного горизонта.

В п. 6.1.1 мы условились вывод уравнений ошибок основывать на алгоритме, построенном для сферической модели Земли. В данном случае нужно базироваться на вторую сферическую модель Земли (п. 1.4.2), в которой направление радиуса совпадает с линией действия силы тяготения. Соответствующий алгоритм можно построить самостоятельно, но мы поступим иначе. Будем соответствующие аналитические зависимости получать из обобщенного алгоритма, построенного для сфероидальной модели Земли, с помощью перехода к пределу при  $R''_2 \rightarrow R$  и  $R''_1 \rightarrow R$ , где  $R = R_0 + h$ ,  $R_0 = 6371$  км.

Мы должны использовать второй вариант обобщенного алгоритма, приведенного в п. 5.2.5. В дальнейшем ограничимся рассмотрением инерциальной системы с двумя акселерометрами при горизонтальном движении объекта, поэтому в формулах обобщенного алгоритма вертикальную скорость движения будем полагать тождественно равной нулю. В обобщенном алгоритме опорный трехгранник обозначен через  $x^i_m y^i_m z^i_m$ , навигационный трехгранник через  $x^i_0 y^i_0 z^i_0$ . Угол между осями  $y^i_0 (x^i_0)$  и  $y^i_m (x^i_m)$  обозначен через  $\chi^i_{om}$ , а между осями  $y^i (x^i)$  и  $y^i_0 (x^i_0)$  — через  $\chi^i_0$ . В рассматриваемом случае опорный и навигационный трехгранники совпадают между собой и с гравитационным трехгранником  $x''y''z''$ , поэтому

в формулах обобщенного алгоритма нужно всюду верхний индекс  $i$  заменять на два штриха, символ гравитационной ориентации трехгранников. Кроме того, нужно полагать  $\chi''_{0m} = \chi''_0 = 0$ , а также  $\varphi''_{11} = 90^\circ$ . Из последнего условия следует, что  $\Phi''$  и  $\Lambda''$  нужно заменить на  $\varphi''$  и  $\lambda$ . Далее при  $R_1'' = R_2'' = R$  имеем  $R_{x_0}'' = R_{y_0}'' = R$  и  $R_0'' = 0$  (1.146). Если учесть все сказанное выше, то проекции абсолютной угловой скорости опорного трехгранника  $x''y''z''$  на его оси в соответствии с (5.41) и (5.42) (см. также (1.135a)) можно представить в виде

$$\omega_{x''} = -\frac{V_{y''}}{R}, \quad \omega_{y''} = \frac{V_{x''}}{R} \quad (6.170)$$

и

$$\omega_{z''} = \omega_{y''} \operatorname{tg} \varphi'' \quad (6.171)$$

Из (5.40)

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_{x''} &= a_{x''} + \omega_{z''} V_{y''}, \\ \dot{V}_{y''} &= a_{y''} - \omega_{z''} V_{x''}, \\ 0 &= a_{z''} + \frac{V_{y''}^2 + V_{x''}^2}{R} - g'. \end{aligned} \right\} \quad (6.172)$$

Проекция относительной (путевой) скорости получим из (5.43) в виде

$$v_{x''} = V_{x''} - UR \cos \varphi'', \quad v_{y''} = V_{y''} \quad (6.173)$$

Формулы счисления координат  $\varphi''$  и  $\lambda$  получим из (5.34) или непосредственно из (1.134) при замене индекса  $i$  на два штриха:

$$\varphi'' = \frac{v_{y''}}{R} = -\omega'_{x''}, \quad \lambda = \frac{v_{x''}}{R} \operatorname{sec} \varphi'' = \omega'_{y''} \operatorname{sec} \varphi'', \quad (6.173a)$$

где  $\omega'_{x''}$ ,  $\omega'_{y''}$  — соответствующие проекции относительной угловой скорости трехгранника  $x''y''z''$  (см. (1.134)).

Ошибки гиросплатформы определяются ее малыми движениями относительно опорного трехгранника  $x''y''z''$ . Уравнения таких движений получаются из (6.7) простой заменой индексов  $x, y, z$  на  $x'', y'', z''$ . Уравнения ошибок гиросплатформы запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_{x''} + \omega_{y''} \gamma_{z''} - \omega_{z''} \gamma_{y''} &= \Delta \omega_{x''} + \delta \omega_1, \\ \dot{\gamma}_{y''} + \omega_{z''} \gamma_{x''} - \omega_{x''} \gamma_{z''} &= \Delta \omega_{y''} + \delta \omega_2, \\ \dot{\gamma}_{z''} + \omega_{x''} \gamma_{y''} - \omega_{y''} \gamma_{x''} &= \Delta \omega_{z''} + \delta \omega_3, \end{aligned} \right\} \quad (6.174)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta \omega_1 &= \omega_{x''} \delta h_{11} + \delta \omega_{x''}, \\ \delta \omega_2 &= \omega_{y''} \delta h_{11} + \delta \omega_{y''}, \\ \delta \omega_3 &= \omega_{z''} \delta h_{11} + \delta \omega_{z''} \end{aligned} \right\} \quad (6.175)$$

— выражения для эквивалентного дрейфа гиросплатформы в соответствующих направлениях. Уравнения ошибок акселерометров получаются таким же образом из (6.12) и (6.12a), т. е.

$$\left. \begin{aligned} \Delta a_{x''} &= a_{y''} \gamma_{z''} - a_{z''} \gamma_{y''} + \delta a_1, \\ \Delta a_{y''} &= a_{z''} \gamma_{x''} - a_{x''} \gamma_{z''} + \delta a_2, \end{aligned} \right\} \quad (6.176)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta a_1 &= a_{x''} \delta h_{11} + \delta a_{x''}, \\ \delta a_2 &= a_{y''} \delta h_{11} + \delta a_{y''} \end{aligned} \right\} \quad (6.177)$$

— выражения для эквивалентного смещения нулей акселерометров.

Уравнения ошибок первых интеграторов по аналогии с (6.15) получаются варьированием первых двух соотношений (6.172). Выполнив эту операцию, получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{V}_{x''} &= \Delta a_{x''} + \Delta \omega_{z''} V_{y''} + \omega_{z''} \Delta V_{y''} + \delta \dot{V}_1, \\ \Delta \dot{V}_{y''} &= \Delta a_{y''} - \Delta \omega_{z''} V_{x''} - \omega_{z''} \Delta V_{x''} + \delta \dot{V}_2, \end{aligned} \right\} \quad (6.178)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{V}_1 &= \dot{V}_{x''} \delta h_{11} + \delta \dot{V}_{x''}, \\ \delta \dot{V}_2 &= \dot{V}_{y''} \delta h_{11} + \delta \dot{V}_{y''} \end{aligned} \right\} \quad (6.179)$$

— выражения для эквивалентного дрейфа нулей интеграторов скорости.

В уравнения (6.178) подставим  $\Delta a_{x''}$ ,  $\Delta a_{y''}$  из (6.176) и выразим  $\Delta V_{x''}$ ,  $\Delta V_{y''}$ ,  $\Delta \dot{V}_{x''}$ ,  $\Delta \dot{V}_{y''}$  через  $\Delta \omega_{x''}$ ,  $\Delta \omega_{y''}$ ,  $\Delta \dot{\omega}_{y''}$ ,  $\Delta \dot{\omega}_{x''}$ .

Для этой цели воспользуемся формулами

$$\left. \begin{aligned} \Delta \omega_{x''} &= -\frac{\Delta V_{y''}}{R}, \quad \Delta \dot{\omega}_{x''} = -\frac{\Delta \dot{V}_{y''}}{R}, \\ \Delta \omega_{y''} &= \frac{\Delta V_{x''}}{R}, \quad \Delta \dot{\omega}_{y''} = \frac{\Delta \dot{V}_{x''}}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (6.180)$$

которые при  $R = R_0 + h = \text{const}$  получаются очевидным способом из (6.170). Кроме того, аналогично (6.18) введем обозначения  $f_{x''}$ ,  $f_{y''}$ ,  $f_{z''}$  для отношений проекций  $a_{x''}$ ,  $a_{y''}$ ,  $a_{z''}$  к модулю радиуса-вектора  $R = R_0 + h$ . Произведя указанные выше замены, преобразуем (6.178) к виду

$$\left. \begin{aligned} -\Delta \dot{\omega}_{x''} &= f_{z''} \gamma_{x''} - f_{x''} \gamma_{z''} - \omega_{z''} \Delta \omega_{y''} - \omega_{y''} \Delta \omega_{z''} + \delta \dot{\omega}_1, \\ \Delta \dot{\omega}_{y''} &= -f_{z''} \gamma_{y''} + f_{y''} \gamma_{z''} - \omega_{z''} \Delta \omega_{x''} - \omega_{x''} \Delta \omega_{z''} + \delta \dot{\omega}_2, \end{aligned} \right\} \quad (6.181)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{\omega}_1 &= \frac{1}{R} \delta a_2 + \frac{1}{R} \delta \dot{V}_2, \\ \delta \dot{\omega}_2 &= \frac{1}{R} \delta a_1 + \frac{1}{R} \delta \dot{V}_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.181a)$$

Сравнивая формулы счисления координат  $\varphi''$ ,  $\lambda$  и  $\varphi$ ,  $\lambda$ , которые определяются соотношениями (6.173а) и (6.6), мы можем по аналогии с (6.24) и (6.25) представить уравнения ошибок интеграторов гравитационных широты и долготы в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi'' &= -\Delta\omega_{x''} + \delta\varphi_1, \\ \Delta\dot{\lambda} &= \Delta\omega_{y''} \sec \varphi'' + \omega_{y''} \operatorname{tg} \varphi'' \sec \varphi'' \Delta\varphi + \delta\dot{\lambda}_1, \end{aligned} \right\} \quad (6.182)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\varphi_1 &= \omega_{x''} \delta h_{\varphi''} + \delta\varphi'', \\ \delta\dot{\lambda}_1 &= \omega_{y''} \delta h_{\lambda} + \delta\dot{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (6.183)$$

определяют эквивалентный дрейф нулей соответствующих интеграторов.

Уравнения (6.182) нужно выразить через проекции  $\Delta\omega_{x''}$  и  $\Delta\omega_{y''}$ , так как эти величины фигурируют в (6.181). Из первых двух формул (1.135а) варьированием получим выражения

$$\left. \begin{aligned} \Delta\omega_{x''} &= \Delta\omega_{x'}, \\ \Delta\omega_{y''} &= \Delta\omega_{y'} + U \sin \varphi'' \Delta\varphi''. \end{aligned} \right\} \quad (6.184)$$

Угловая скорость вращения Земли  $U$  не варьируется, так как считается, что ее величина вводится в инерциальную систему без ошибок. Если  $\Delta\omega_{x''}$  и  $\Delta\omega_{y''}$ , определяемые (6.184), подставим в (6.182) и  $\omega_{y''}$  из второй формулы (1.135а), то получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi'' &= -\Delta\omega_{x''} + \delta\varphi_1, \\ \Delta\dot{\lambda} &= \Delta\omega_{y''} \sec \varphi'' + \omega_{y''} \operatorname{tg} \varphi'' \sec \varphi'' + \delta\dot{\lambda}_1, \end{aligned} \right\} \quad (6.185)$$

т. е. при точном вводе  $U$  уравнения ошибок интеграторов широты и долготы имеют одинаковый вид в относительных и абсолютных угловых скоростях трехгранника  $x''y''z''$ . Таким образом, имеем три группы уравнений (6.174), (6.181) и (6.185). Дальнейший ход рассуждений можно привести в двух направлениях. Во-первых, мы можем  $\Delta\omega_{z''}$  определить из (6.171) в виде

$$\Delta\omega_{z''} = \Delta\omega_{y''} \operatorname{tg} \varphi'' + \omega_{y''} \sec^2 \varphi'' \Delta\varphi'' \quad (6.186)$$

и подставить это выражение в (6.181). В результате получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} -\Delta\dot{\omega}_{x''} &= f_z'' \gamma_{x''} - f_x'' \gamma_{z''} - 2\omega_{y''} \operatorname{tg} \varphi'' \Delta\omega_{y''} - \\ &\quad - \omega_{y''}^2 \sec^2 \varphi'' \Delta\varphi'' + \delta\dot{\omega}_1, \\ \Delta\dot{\omega}_{y''} &= -f_z'' \gamma_{y''} + f_y'' \gamma_{z''} - \omega_{y''} \operatorname{tg} \varphi'' \Delta\omega_{x''} - \\ &\quad - \omega_{x''} \operatorname{tg} \varphi'' \Delta\omega_{y''} - \omega_{x''} \omega_{y''} \sec^2 \varphi'' \Delta\varphi'' + \delta\dot{\omega}_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.187)$$

Уравнения (6.174) после подстановки туда  $\Delta\omega_{z''}$  из (6.186), урав-

нения (6.181) и (6.185) образуют совокупную систему уравнений ошибок инерциальной системы рассматриваемого типа.

Если произвести замену переменных с помощью подстановки

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{x''} &= \tilde{\gamma}_{x''} - \Delta\varphi'', & \gamma_{y''} &= \tilde{\gamma}_{y''} + \Delta\lambda \cos \varphi'', \\ \gamma_{z''} &= \tilde{\gamma}_{z''} + \Delta\lambda \sin \varphi'', \end{aligned} \right\} \quad (6.188)$$

то (6.174) и (6.187) преобразуются соответственно к виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{\gamma}}_{x''} + \omega_{y''} \tilde{\gamma}_{z''} - \omega_{z''} \tilde{\gamma}_{y''} &= \delta\omega_I, \\ \dot{\tilde{\gamma}}_{y''} + \omega_{z''} \tilde{\gamma}_{x''} - \omega_{x''} \tilde{\gamma}_{z''} &= \delta\omega_{II}, \\ \dot{\tilde{\gamma}}_{z''} + \omega_{x''} \tilde{\gamma}_{y''} - \omega_{y''} \tilde{\gamma}_{x''} &= \delta\omega_{III}, \end{aligned} \right\} \quad (6.189)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega_I &= \delta\omega_1 + \delta\varphi_1, \\ \delta\omega_{II} &= \delta\omega_2 - \delta\dot{\lambda}_1 \cos \varphi'', \\ \delta\omega_{III} &= \delta\omega_3 - \delta\dot{\lambda}_1 \sin \varphi'', \end{aligned} \right\} \quad (6.190)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \Delta\dot{\omega}_{x''} &= 2\omega_{y''} \operatorname{tg} \varphi'' \Delta\omega_{y''} + (\omega_{y''}^2 \sec^2 \varphi'' + f_z'') \Delta\varphi'' + \\ &\quad + f_x'' \Delta\lambda \sin \varphi'' + \delta\dot{\omega}_I, \\ \Delta\dot{\omega}_{y''} &= -\omega_{y''} \operatorname{tg} \varphi'' \Delta\omega_{x''} - \omega_{x''} \operatorname{tg} \varphi'' \Delta\omega_{y''} - \\ &\quad - \omega_{x''} \omega_{y''} \sec^2 \varphi'' \Delta\varphi'' - (f_z'' \cos \varphi'' - f_y'' \sin \varphi'') \Delta\lambda + \delta\dot{\omega}_{II}, \end{aligned} \right\} \quad (6.191)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{\omega}_I &= -\delta\dot{\omega}_1 - f_z'' \gamma_{x''} + f_x'' \gamma_{z''}, \\ \delta\dot{\omega}_{II} &= \delta\dot{\omega}_2 - f_z'' \gamma_{y''} + f_y'' \gamma_{z''}. \end{aligned} \right\} \quad (6.192)$$

Уравнения (6.185) при таком преобразовании не меняются. Уравнения (6.185), (6.189) и (6.191) являются второй формой уравнений ошибок системы, в которой система (6.189) решается независимо от остальных уравнений. И наконец, можно разрешить уравнения (6.185) и (6.191) относительно переменных  $\Delta\varphi''$  и  $\Delta\theta'' = \Delta\lambda \cos \varphi''$  и свести уравнения (6.185) и (6.191) к двум уравнениям второго порядка. Процедура вычислений здесь остается такой же, как и при выводе уравнений (6.92). Ввиду того, что уравнения (6.185) и (6.24) формально совпадают, то связь между  $\Delta\omega_{x''}$ ,  $\Delta\omega_{y''}$ ,  $\Delta\dot{\omega}_{x''}$ ,  $\Delta\dot{\omega}_{y''}$  и  $\Delta\dot{\varphi}''$ ,  $\Delta\dot{\theta}''$ ,  $\Delta\ddot{\varphi}''$ ,  $\Delta\ddot{\theta}''$  будет определяться (6.90) и (6.91) при очевидном изменении в них индексации.

Окончательный результат можно представить в виде

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \Delta\dot{\varphi}'' + (v'^2 - \omega_{x''}^2 \operatorname{tg}^2 \varphi'') \Delta\varphi'' + 2\omega_{y''} \operatorname{tg} \varphi'' \Delta\dot{\theta}'' + \\ + (\dot{\omega}_{y''} - \omega_{x''} \omega_{y''} \operatorname{tg} \varphi'') \operatorname{tg} \varphi'' \Delta\dot{\theta}'' = \delta\dot{\omega}_{\varphi''}, \end{aligned}$$

$$\Delta\theta'' + (v'^2 - \omega_{y''}^2 \sec^2 \varphi'') \Delta\theta'' - 2\omega_{y''} \operatorname{tg} \varphi'' \Delta\varphi'' - [\dot{\omega}_{y''} \operatorname{tg} \varphi'' - \omega_{x''} \omega_{y''} (1 + \sec^2 \varphi'')] \Delta\varphi'' = \delta\dot{\omega}_{\theta''}, \quad \square \quad (6.193)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{\omega}_{\varphi''} &= -\delta\dot{\omega}_I + (\delta\dot{\varphi}_I)' + 2\omega_{y''} \operatorname{tg} \varphi'' \Delta\dot{\lambda}_1 \cos \varphi'', \\ \delta\dot{\omega}_{\theta''} &= \delta\dot{\omega}_{II} - \omega_{y''} \operatorname{tg} \varphi'' \delta\dot{\varphi}_I' + (\delta\dot{\lambda}_1 \cos \varphi'')' + \omega_{x''} \delta\dot{\lambda}_1 \sin \varphi'', \end{aligned} \right\} \quad (6.194)$$

причем здесь были использованы соотношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_{x''}}{R} &= f_{x''} = \dot{\omega}_{y''} + \omega_{x''} \omega_{z''}, \\ \frac{a_{y''}}{R} &= f_{y''} = \dot{\omega}_{x''} + \omega_{y''} \omega_{z''}, \\ \frac{a_{z''}}{R} &= f_{z''} = \omega_{x''}^2 - \omega_{y''}^2 + v'^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.195)$$

при

$$v' = \sqrt{\frac{g'}{R}}. \quad (6.196)$$

Выражения (6.195) легко получаются из соотношений (6.170) и (6.172). Величина  $v'$  имеет размерность угловой скорости, точно так же, как и  $v$ , определяемая (6.22).

По аналогии с  $v$  величина  $v'$  может быть интерпретирована как частота изохронных незатухающих колебаний в поле земного тяготения физического маятника, приведенная длина которого равна расстоянию от центра Земли до объекта, летящего на высоте  $h$ . При  $h = 0$  имеем  $R = R_0 = 6371$  км и  $g'_{cp} = 983,01$  см/с<sup>2</sup>, тогда  $v' = 1,24 \cdot 10^{-3}$  1/с. С приведенным числом значащих цифр  $v$  и  $v'$  численно совпадают.

Если сопоставить уравнения ошибок инерциальных систем с географическим и гравитационным трехгранниками, то уравнения (6.26) нужно сопоставлять с уравнениями (6.174) (в них  $\Delta\omega_{z''}$  можно заменить на (6.186)), (6.181), (6.185), уравнения (6.24), (6.83), (6.86) с (6.185), (6.189), (6.191) и уравнения (6.83), (6.92) с (6.189), (6.193).

Второе направление основывается на совместном рассмотрении уравнений (6.174) и (6.181). Из (6.174) нужно определить  $\Delta\omega_{x''}$ ,  $\Delta\omega_{y''}$ ,  $\Delta\omega_{z''}$  и их производные по времени  $\Delta\dot{\omega}_{z''}$ ,  $\Delta\dot{\omega}_{y''}$ ,  $\Delta\dot{\omega}_{x''}$ , а затем подставить их в уравнения (6.181). После приведения подобных членов окажется, что члены, содержащие множитель  $\dot{\gamma}_z''$ , исчезают. После подстановки  $f_{x''}$ ,  $f_{y''}$ ,  $f_{z''}$  по формулам (6.195) исчезнут члены с  $\gamma_z''$ . В результате получаем систему двух урав-

нений второго порядка относительно переменных  $\gamma_{x''}$ ,  $\gamma_{y''}$  в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\gamma}_{x''} + (v'^2 - \omega_{x''}^2 - \omega_{z''}^2) \gamma_{x''} - 2\omega_{z''} \dot{\gamma}_{y''} - \\ - (\dot{\omega}_{z''} + \omega_{x''} \omega_{y''}) \gamma_{y''} &= \delta\dot{\omega}_{\gamma_{x''}}, \\ \ddot{\gamma}_{y''} + (v'^2 - \omega_{y''}^2 - \omega_{z''}^2) \gamma_{y''} + 2\omega_{z''} \dot{\gamma}_{x''} + \\ + (\dot{\omega}_{z''} - \omega_{x''} \omega_{y''}) \gamma_{x''} &= \delta\dot{\omega}_{\gamma_{y''}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.197)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{\omega}_{\gamma_{x''}} &= (\delta\omega_1)' - \omega_{z''} \delta\omega_2 - \omega_{y''} \delta\omega_3 - \delta\dot{\omega}_1, \\ \delta\dot{\omega}_{\gamma_{y''}} &= (\delta\omega_2)' + \omega_{z''} \delta\omega_1 + \omega_{x''} \delta\omega_3 + \delta\dot{\omega}_2, \end{aligned} \right\} \quad (6.198)$$

причем  $\delta\dot{\omega}_1$ ,  $\delta\dot{\omega}_2$  определяются (6.181а) и  $\delta\omega_1$ ,  $\delta\omega_2$ ,  $\delta\omega_3$  — формулами (6.175).

Полученные уравнения (6.197) и уравнения ошибок ориентации в форме (6.189) образуют систему дифференциальных уравнений ошибок. Системы уравнений (6.197) и (6.189) решаются независимо друг от друга. Решение уравнений (6.189) сводится к квадратурам (6.95) и (6.97). Начальные значения  $\dot{\gamma}_{x''}(0)$  и  $\dot{\gamma}_{y''}(0)$ , необходимые для нахождения решения (6.197), должны находиться из (6.174) при значении  $t$ , равном нулю.

После нахождения решений уравнений (6.189) и (6.197) переменные  $\gamma_{x''}$ ,  $\gamma_{y''}$ ,  $\tilde{\gamma}_{x''}$ ,  $\tilde{\gamma}_{y''}$ ,  $\tilde{\gamma}_z''$  становятся известными функциями времени. Тогда из первых двух равенств (6.188) находим ошибки  $\Delta\varphi''$ ,  $\Delta\lambda$ , после этого из последнего равенства (6.188) определяем ошибку ориентации платформы в азимуте  $\gamma_z''$ . Ошибки  $\Delta v_{x''}$ ,  $\Delta v_{y''}$  в определении путевой скорости или, что то же самое, ошибки  $\Delta\omega_{x''}$ ,  $\Delta\omega_{y''}$  находим из (6.182). Для этой цели необходимо сформировать производные величин  $\Delta\varphi''$  и  $\Delta\lambda$ .

Когда объект неподвижен в абсолютном пространстве, угловые скорости  $\omega_{x''}$ ,  $\omega_{y''}$ ,  $\omega_{z''}$  тождественно равны нулю. Уравнения (6.197) приобретают тогда весьма простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\gamma}_{x''} + v'^2 \gamma_{x''} &= \delta\dot{\omega}_{\gamma_{x''}}, \\ \ddot{\gamma}_{y''} + v'^2 \gamma_{y''} &= \delta\dot{\omega}_{\gamma_{y''}} \end{aligned} \right\} \quad (6.199)$$

при

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{\omega}_{\gamma_{x''}} &= (\delta\omega_{x''})' - \frac{1}{R} (\delta a_{y''} + \delta \dot{V}_{y''}), \\ \delta\dot{\omega}_{\gamma_{y''}} &= (\delta\omega_{y''})' + \frac{1}{R} (\delta a_{x''} + \delta \dot{V}_{x''}). \end{aligned} \right\} \quad (6.200)$$

Такой случай, например, имеет место при движении объекта вдоль параллели на запад с путевой скоростью, равной переносной скорости от вращения Земли на заданной широте. На широте, равной 60°, эта скорость примерно равняется 836 км/ч.

В соответствии с (6.199) собственные колебания платформы будут происходить с частотой  $\nu'$ . Аналогичные по форме уравнения получаются при исключении  $\Delta\omega_y'$  из первых двух уравнений (6.46), решение которых изучалось в п. 1.3 настоящей главы.

Коэффициенты уравнений (6.193) и (6.197) или совпадают между собой, или отличаются знаком. В случае, когда (6.193) и (6.197) сводятся к уравнениям с постоянными коэффициентами, они имеют (и это естественно) одинаковые характеристические полиномы.

Вообще, можно показать, что при подстановке в (6.197)  $\gamma_{x''}$ ,  $\gamma_{y''}$ ,  $\gamma_{z''}$  из (6.188) они сводятся к (6.193). При этом для определения  $\ddot{\gamma}_{x''}$ ,  $\ddot{\gamma}_{y''}$ ,  $\ddot{\gamma}_{z''}$  и т. д. нужно использовать (6.189), а также выражения (6.195). Читателю предлагается провести соответствующие выкладки самостоятельно. Напомним, что корни характеристического полинома, соответствующего линейным уравнениям с постоянными коэффициентами, не меняются при линейном преобразовании.

**6.2.2. Уравнения ошибок инерциальной системы с гравитационным навигационным и азимутально-свободным опорным трехгранниками.** Процедура определения алгоритма для исследования ошибок рассматриваемой инерциальной системы из обобщенного алгоритма (п. 5.2.5) была описана в предыдущем пункте.

Теперь опорным трехгранником  $x_m^i y_m^i z_m^i$ , фигурирующим в обобщенном алгоритме, будет служить гравитационный азимутально-свободный трехгранник  $x_c'' y_c'' z_c''$ , поэтому роль угла между горизонтальными осями опорного и навигационного трехгранников перейдет к углу  $\chi_c''$  — углу между осью  $y_c''$  ( $x_c''$ ) и осью  $y''$  ( $x''$ ). Используем алгоритм, описанный в самом конце п. 5.2.5. В соответствии с указанным алгоритмом сначала определяются проекции  $V_{x_c''}$ ,  $V_{y_c''}$  абсолютной скорости на оси опорного трехгранника  $x_c'' y_c'' z_c''$ , а затем по формулам преобразования находятся проекции абсолютной скорости на оси навигационного трехгранника. Аналитические зависимости алгоритма рассматриваемой системы для сферической модели Земли имеют следующий вид. Проекция  $\omega_{x_c''}$ ,  $\omega_{y_c''}$  абсолютной угловой скорости опорного трехгранника  $x_c'' y_c'' z_c''$  на его оси имеют вид (см. (5.42))

$$\omega_{x_c''} = \frac{-V_{y_c''}}{R}, \quad \omega_{y_c''} = \frac{V_{x_c''}}{R}. \quad (6.201)$$

Для азимутально-свободного трехгранника  $x_c'' y_c'' z_c''$  имеем  $\omega_{z_c''} = 0$ .

Далее, по (5.45)

$$\dot{V}_{x_c''} = a_{x_c''}, \quad \dot{V}_{y_c''} = a_{y_c''}. \quad (6.202)$$

Проекция  $V_{x''}$ ,  $V_{y''}$  абсолютной скорости на оси навигационного трехгранника определяются по формулам преобразования

(см. (5.27))

$$\left. \begin{aligned} V_{x''} &= V_{x_c''} \cos \chi_c'' + V_{y_c''} \sin \chi_c'', \\ V_{y''} &= -V_{x_c''} \sin \chi_c'' + V_{y_c''} \cos \chi_c''. \end{aligned} \right\} \quad (6.203)$$

В этих формулах угол  $\chi_c''$  определяется из уравнения (см. (5.33))

$$\chi_c'' = \omega_{z''}. \quad (6.204)$$

Проекция  $v_{x''}$ ,  $v_{y''}$  относительной (путевой) скорости и формулы счисления координат  $\varphi''$ ,  $\lambda$  определяются по формулам (6.172) и (6.174).

Уравнения ошибок для рассматриваемой системы весьма просто получить из соответствующих уравнений, полученных в предыдущих пунктах. Так, уравнения ошибок платформы и первых интеграторов можно получить из (6.174), (6.175), а также (6.181), (6.181a), если в них заменить индексы  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  на  $x_c''$ ,  $y_c''$ ,  $z_c''$  и положить  $\omega_{z_c''} = 0$  и  $\Delta\omega_{z_c''} = 0$ . Таким образом, получим соответственно уравнения ошибок платформы первых интеграторов в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_{x_c''} + \omega_{y_c''} \gamma_{z_c''} &= \Delta\omega_{x_c''} + \delta\omega_{1c}, \\ \dot{\gamma}_{y_c''} - \omega_{x_c''} \gamma_{z_c''} &= \Delta\omega_{y_c''} + \delta\omega_{2c}, \\ \dot{\gamma}_{z_c''} + \omega_{x_c''} \gamma_{y_c''} - \omega_{y_c''} \gamma_{x_c''} &= \delta\omega_{3c}, \end{aligned} \right\} \quad (6.205)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega_{1c} &= \omega_{x_c''} \delta h_K + \delta\omega_{x_c''}, \\ \delta\omega_{2c} &= \omega_{y_c''} \delta h_K + \delta\omega_{y_c''}, \\ \delta\omega_{3c} &= \delta\omega_{z_c''}, \end{aligned} \right\} \quad (6.206)$$

и

$$\left. \begin{aligned} -\Delta\dot{\omega}_{x_c''} &= f_{z_c''} \gamma_{x_c''} - f_{x_c''} \gamma_{z_c''} + \delta\dot{\omega}_{1c}, \\ \Delta\dot{\omega}_{y_c''} &= -f_{z_c''} \gamma_{y_c''} + f_{y_c''} \gamma_{z_c''} + \delta\dot{\omega}_{2c}, \end{aligned} \right\} \quad (6.207)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{\omega}_{1c} &= \frac{1}{R} \delta a_{2c} + \frac{1}{R} \delta \dot{V}_{2c}, \\ \delta\dot{\omega}_{2c} &= \frac{1}{R} \delta a_{1c} + \frac{1}{R} \delta \dot{V}_{1c}. \end{aligned} \right\} \quad (6.208)$$

Величины (6.206) и (6.208) определяют эквивалентный дрейф плат-

формы вокруг соответствующих осей опорного трехгранника и эквивалентный дрейф нулей интеграторов \*).

Дальше нужно проварьировать формулы преобразования (6.203) и уравнение интегратора угла  $\chi_c$  (6.204).

Результат можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} \Delta\omega_{x''} &= \Delta\omega_{x_c}'' \cos \chi_c'' + \Delta\omega_{y_c}'' \sin \chi_c'' + \omega_{y''} \Delta\chi_c'', \\ \Delta\omega_{y''} &= -\Delta\omega_{x_c}'' \sin \chi_c'' + \Delta\omega_{y_c}'' \cos \chi_c'' - \omega_x \Delta\chi_c'' \end{aligned} \right\} \quad (6.209)$$

и

$$\Delta\dot{\chi}_c'' = \Delta\omega_{z''} + \omega_{z''} \delta h_{\chi_c} + \delta\dot{\chi}_c'' = \Delta\omega_{z''} + \delta\dot{\chi}_{3c}''. \quad (6.210)$$

Мы только проварьировали формулы преобразования для абсолютных угловых скоростей.

Уравнения ошибок для вторых интеграторов имеют вид (6.185). Можно указать различные направления для дальнейшего исследования уравнений ошибок. Во-первых, эту задачу можно свести к анализу уравнений предыдущего пункта. Для этой цели мы должны преобразовать уравнения (6.205) и (6.207) к координатной системе  $x''y''z''$ . Процедуры такого преобразования (6.205) по существу описаны в п. 1.5 данной главы. Только вместо равенства типа (6.101) нужно пользоваться равенствами (6.209). В результате преобразования уравнения (6.205) примут вид уравнений (6.174), в которых только  $\delta\omega_1$ ,  $\delta\omega_2$ ,  $\delta\omega_3$  и  $\gamma_{z''}$  следует определять из соотношений

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega_1 &= \delta\omega_{1c} \cos \chi_c'' + \delta\omega_{2c} \sin \chi_c'', \\ \delta\omega_2 &= -\delta\omega_{1c} \sin \chi_c'' + \delta\omega_{2c} \cos \chi_c'', \\ \delta\omega_3 &= \delta\omega_{z_c} + \delta\dot{\chi}_{3c}'' \end{aligned} \right\} \quad (6.211)$$

и соответственно

$$\gamma_{z''} = \gamma_{z_c}'' + \Delta\chi_{c''}. \quad (6.212)$$

Эти выражения аналогичны (6.106) и (6.105).

Для преобразования уравнений (6.207) нужно сначала найти выражения для  $\Delta\dot{\omega}_{x''}$  и  $\Delta\dot{\omega}_{y''}$ . Эти выражения находятся дифференцированием соотношений (6.209). При дифференцировании нужно помнить, что операции дифференцирования и варьирования перестановочны ( $d/dt \Delta\omega_{x''} = \Delta\dot{\omega}_{x''}$  и т. д.) и, кроме того, величины  $\chi_c''$  и  $\Delta\dot{\chi}_c''$  нужно заменить их выражениями по формулам (6.204) и (6.200).

\* Так как эквивалентные смещения нулей акселерометров  $\delta a_{1c}$ ,  $\delta a_{2c}$  вызывают в конечном итоге дрейфы нулей интеграторов.

Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\omega}_{x''} &= \Delta\dot{\omega}_{x_c}'' \cos \chi_c'' + \Delta\dot{\omega}_{y_c}'' \sin \chi_c'' + \omega_{z''} \Delta\omega_{y''} + \\ &\quad + \omega_{y''} (\Delta\omega_{z''} + \delta\dot{\chi}_{3c}'') + \dot{\omega}_{y''} \Delta\chi_c'' \\ \Delta\dot{\omega}_{y''} &= -\Delta\dot{\omega}_{x_c}'' \sin \chi_c'' + \Delta\dot{\omega}_{y_c}'' \cos \chi_c'' - \omega_{z''} \Delta\omega_{x''} - \\ &\quad - \omega_{x''} (\Delta\omega_{z''} + \delta\dot{\chi}_{3c}'') - \dot{\omega}_{x''} \Delta\chi_c''. \quad \square \quad (6.213) \end{aligned}$$

Далее, нужно левую и правую части уравнений (6.207) умножить на  $-\cos \chi_c''$  и  $\sin \chi_c''$  ( $\sin \chi_c''$  и  $\cos \chi_c''$ ) и их сложить. Тогда, если использовать (6.213) и формулы преобразования типа (6.203) для величин  $\gamma_{x_c}''$ ,  $\gamma_{y_c}''$  и  $f_{x_c}''$ ,  $f_{y_c}''$ , то в результате получим уравнения в форме (6.181), в которых только  $\gamma_{z''}$  будет определяться формулой (6.212), а  $\delta\dot{\omega}_1$  и  $\delta\dot{\omega}_2$  — соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{\omega}_1 &= \delta\dot{\omega}_{1c} \cos \chi_c'' - \delta\dot{\omega}_{2c} \sin \chi_c'' - \omega_{y''} \delta\dot{\chi}_{3c}'', \\ \delta\dot{\omega}_2 &= \delta\dot{\omega}_{1c} \sin \chi_c'' + \delta\dot{\omega}_{2c} \cos \chi_c'' - \omega_{x''} \delta\dot{\chi}_{3c}'' \end{aligned} \right\} \quad (6.213a)$$

Дальнейшие рассуждения приведут нас к уравнениям (6.189) и (6.197), решение которых определяет искомые ошибки инерциальной системы рассматриваемого типа. Правые части уравнений (6.189) и (6.197) должны быть получены из (6.190) и (6.198) с учетом соотношений (6.211) и (6.213a).

Можно предложить другой ход рассуждений, который приведет также к двум изолированным системам уравнений. Одной из них опять будет система уравнений (6.189), решение которой сводится к квадратуре. Другая система уравнений ошибок будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\gamma}_{x_c}'' + (v'^2 - \omega_{x_c}^2) \gamma_{x_c}'' - \omega_{x_c}'' \omega_{y_c}'' \gamma_{y_c}'' &= \delta\dot{\omega}_{\gamma_{x''}}, \\ \ddot{\gamma}_{y_c}'' + (v'^2 - \omega_{y_c}^2) \gamma_{y_c}'' - \omega_{x_c}'' \omega_{y_c}'' \gamma_{x_c}'' &= \delta\dot{\omega}_{\gamma_{y''}} \end{aligned} \right\} \quad (6.214)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{\omega}_{\gamma_{x''}} &= (\delta\omega_{1c})' - \omega_{y_c}'' \delta\omega_{3c} - \delta\dot{\omega}_{1c}, \\ \delta\dot{\omega}_{\gamma_{y''}} &= (\delta\omega_{2c})' + \omega_{x_c}'' \delta\omega_{3c} + \delta\dot{\omega}_{2c}. \end{aligned} \right\} \quad (6.215)$$

Здесь, как и прежде,  $(\delta\omega_{1c})'$  и  $(\delta\omega_{2c})'$  — производные по времени  $\delta\omega_{1c}$  и  $\delta\omega_{2c}$ . Эти уравнения получаются из (6.197) при очевидном изменении индексации с учетом того факта, что

$$\omega_{z_c}'' = 0.$$

Уравнения (6.214) можно также получить из (6.205) и (6.207), если их разрешить относительно  $\gamma_{x_c}''$  и  $\gamma_{y_c}''$  с использованием проце-

дуры, изложенной в предыдущей пункте \*). При решении уравнений (6.214) получаем  $\gamma_{x_c}''$  и  $\gamma_{y_c}''$ , величины  $\gamma_{x''}$  и  $\gamma_{y''}$  находятся затем по формулам преобразования в виде

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{x''} &= \gamma_{x_c}'' \cos \chi_c'' + \gamma_{y_c}'' \sin \chi_c'', \\ \gamma_{y''} &= -\gamma_{x_c}'' \sin \chi_c'' + \gamma_{y_c}'' \cos \chi_c''. \end{aligned} \right\} \quad (6.216)$$

Таким образом, мы здесь находим  $\gamma_{x''}$ ,  $\gamma_{y''}$ , из уравнений (6.189) определяем  $\gamma_{x''}\tilde{\gamma}_{y''}\tilde{\gamma}_{z''}$  и затем по формулам (6.188)  $\Delta\varphi''$ ,  $\Delta\lambda$  и  $\gamma_{z''}$ .

Уравнения (6.197) с правыми частями, определенными с учетом (6.211) и (6.213а), а также уравнения (6.214) позволяют непосредственно найти ошибки приборной вертикали (отклонение оси  $z_p''$  от оси  $z_c''$ ), т. е. без предварительного нахождения  $\Delta\varphi''$  и  $\Delta\lambda$  — ошибок координат местоположения объекта. Первая система уравнений определяет эти ошибки в проекциях на навигационные оси  $x''$  и  $y''$ , вторая — на оси  $x_c''$  и  $y_c''$  опорного трехгранника. Укажем на следующий факт. При равномерном движении объекта вдоль параллели (6.197) будут уравнениями с постоянными коэффициентами. Правые части этих уравнений будут содержать гармонические составляющие  $\sin \chi_c''$  и  $\cos \chi_c''$  ( $\chi_c'' = \chi_c'(0) + \omega_{z''} t$  при  $\omega_{z''} = \omega_{y''} \operatorname{tg} \varphi'' = \operatorname{const}$ ). Система (6.214) будет в этом случае являться уравнениями с периодическими коэффициентами. Выбор той или иной системы уравнений ошибок зависит от цели исследования и наличия вычислительных средств.

**6.2.3. Уравнения ошибок инерциальной системы с гравитационным ортодромическим навигационным трехгранником.** Сначала рассмотрим инерциальную систему, у которой опорным трехгранником также является ортодромический трехгранник  $x_o''y_o''z_o''$  с гравитационным направлением оси  $z_o''$ . Алгоритм такой системы для второй сферической модели Земли в соответствии с правилом его получения (п. 5.2.1) из обобщенного алгоритма (п. 5.2.5) представляется следующими аналитическими зависимостями. Абсолютные угловые скорости ортодромического трехгранника  $x_o''y_o''z_o''$  (см. (5.42)):

$$\omega_{x_o}'' = \frac{-V_{y_o}''}{R}, \quad \omega_{y_o}'' = \frac{V_{x_o}''}{R} \quad (6.217)$$

и (см. (5.41))

$$\omega_{z_o}'' = U \cos \varphi_{\Pi}'' \operatorname{sec} \Phi'' \sin \Lambda'' + \omega_{y_o}'' \operatorname{tg} \Phi''. \quad (6.218)$$

\*) Имеется в виду вывод уравнений (6.197) из уравнений (6.174) и (6.181).

Уравнения для кажущегося ускорения (см. (5.40)):

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_{x_o}'' &= a_{x_o}'' + \omega_{z_o}'' V_{y_o}'', \\ \dot{V}_{y_o}'' &= a_{y_o}'' - \omega_{z_o}'' V_{x_o}'', \\ 0 &= a_{z_o}'' + \frac{V_{x_o}''^2 + V_{y_o}''^2}{R} - g'. \end{aligned} \right\} \quad (6.219)$$

Формулы счисления координат, выраженные через проекции абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_o''y_o''z_o''$  (см. (5.34) и (5.43)):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}'' &= -(\omega_{x_o}'' + U \cos \varphi'' \sin \chi_o''), \\ \dot{\Lambda}'' &= (\omega_{y_o}'' - U \cos \varphi'' \cos \chi_o'') \operatorname{sec} \Phi''. \end{aligned} \right\} \quad (6.220)$$

Формулы преобразования (см. (5.32)):

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi \sin \chi_o'' &= -\cos \varphi_{\Pi}'' \cos \Lambda'', \\ \cos \varphi'' \cos \chi_o'' &= \sin \varphi_{\Pi}'' \cos \Phi - \cos \varphi_{\Pi}'' \sin \Phi'' \sin \Lambda''. \end{aligned} \right\} \quad (6.221)$$

Так как ортодромический трехгранник  $x_o''y_o''z_o''$  является опорным, то уравнения ошибок гиролатформы будут определяться уравнениями (6.174). В них только нужно надлежащим образом изменить индексацию, т. е. вместо  $\gamma_{x''}$ ,  $\omega_{x''}$ ,  $\delta\omega_1$  и т. д. писать  $\gamma_{x_o}''$ ,  $\omega_{x_o}''$ ,  $\delta\omega_{1o}$  и т. д.

Ввиду того, что уравнения (6.219) и (6.172) имеют аналогичный вид, уравнения ошибок интеграторов скорости будут иметь вид уравнений (6.181). Из полученных таким образом двух систем уравнений получим уравнения в форме (6.197) с соответствующим изменением индексации. Ортодромический трехгранник  $x_o''y_o''z_o''$  является также навигационным трехгранником, поэтому можно использовать подстановку вида (6.188) \*) и с учетом расчетных формул счисления координат привести уравнения ошибок гиролатформы к форме (6.189). Таким образом, уравнения (6.189), (6.197) и (6.188) с соответствующим изменением индексации позволяют определить  $\gamma_{x_o}''$ ,  $\gamma_{y_o}''$ ,  $\gamma_{z_o}''$ ,  $\Delta\Phi''$  и  $\Delta\Lambda''$ .

В практических приложениях необходимо иметь развернутые выражения для коэффициентов полученных уравнений. Здесь приведем величины  $\omega_{x_o}''$ ,  $\omega_{y_o}''$ ,  $\omega_{z_o}''$ , выраженные через ортодромические координаты  $\Phi''$ ,  $\Lambda''$  и их производные.

\*) Здесь вместе с индексами нужно заменить  $\Delta\varphi''$  на  $\Delta\Phi''$ ,  $\Delta\lambda$  на  $\Delta\Lambda''$  и  $\varphi''$  на  $\Phi''$ .

Эти выражения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0}'' &= -\dot{\Phi}'' + U \cos \varphi_{\Pi}'' \cos \Lambda'', \\ \omega_{y_0}'' &= \dot{\Lambda}'' \cos \Phi'' + U (\sin \varphi_{\Pi}'' \cos \Phi'' - \cos \varphi_{\Pi}'' \sin \Phi'' \sin \Lambda''), \\ \omega_{z_0}'' &= \dot{\Lambda}'' \sin \Phi'' + U (\sin \varphi_{\Pi}'' \sin \Phi'' + \cos \varphi_{\Pi}'' \cos \Phi'' \sin \Lambda''). \end{aligned} \right\} (6.222)$$

Для инерциальной системы с азимутально-свободным ортодромическим опорным трехгранником можно получить результаты, аналогичные тем, которые были приведены в предыдущем пункте. Нужно только в соответствующих формулах надлежащим образом изменить индексацию. Можно было бы также развить теорию ошибок инерциальной системы с тремя акселерометрами при гравитационной ориентации опорного и навигационного трехгранников.

### § 6.3. Уравнения ошибок инерциальной системы аналитического типа

**6.3.1. Уравнения ошибок.** Алгоритм инерциальной системы аналитического типа был рассмотрен в п. 5.3.1. В указанном пункте были рассмотрены два возможных варианта алгоритма для такой системы. Здесь мы построим уравнения ошибок для первого варианта алгоритма, когда первичными координатами являются прямоугольные координаты  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ , которые непосредственно находятся из решений дифференциальных уравнений. Вторичными координатами будут служить географические широта  $\varphi$  и долгота  $\lambda$ , а также, может быть, и высота  $h$ . Вторичные координаты определяются из первичных с помощью конечных соотношений.

При составлении уравнений ошибок будем опять пользоваться, там где это нужно, сферической моделью Земли. В частности, в выражениях (5.48) будем пренебрегать вторыми слагаемыми и вследствие этого считать, что вектор гравитационного ускорения направлен вдоль радиуса-вектора к центру Земли; модуль радиуса-вектора  $r$  будем полагать равным  $R = R_0 + h$ , где  $R_0 = 6371$  км. Таким образом, вместо (5.84) проекции  $g'_{\xi_a}, g'_{\eta_a}, g'_{\zeta_a}$  гравитационного ускорения будем определять соотношениями

$$g'_{\xi_a} = -g' \frac{\xi_a}{R}, \quad g'_{\eta_a} = -g' \frac{\eta_a}{R}, \quad g'_{\zeta_a} = -g' \frac{\zeta_a}{R}. \quad (6.223)$$

Для абсолютного значения  $g'$  сохраним прежнее выражение (5.49) при  $r = R$ .

Перейдем к составлению уравнений ошибок. Гироплатформа инерциальной системы физически моделирует инерциальный опор-

ный трехгранник  $\xi_a \eta_a \zeta_a$ . Такая платформа работает в свободном режиме, соответствующие уравнения ошибок легко получить из (6.7), если там подстрочные индексы  $x, y, z$  заменить на  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  и положить  $\omega_{\xi_a}, \omega_{\eta_a}, \omega_{\zeta_a}, \Delta\omega_{\xi_a}, \Delta\omega_{\eta_a}, \Delta\omega_{\zeta_a}$  и  $\delta h_k$  равными нулю.

Тогда получим уравнения ошибок гироплатформы в виде

$$\dot{\gamma}_{\xi_a} = \delta\omega_{\xi_a}, \quad \dot{\gamma}_{\eta_a} = \delta\omega_{\eta_a}, \quad \dot{\gamma}_{\zeta_a} = \delta\omega_{\zeta_a}. \quad (6.224)$$

Величины, стоящие в правых частях, определяют собственный дрейф платформы. Уравнения ошибок акселерометров с учетом (6.12), (6.12а) и (6.12б) будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta a_{\xi_a} &= a_{\eta_a} \gamma_{\zeta_a} - a_{\xi_a} \gamma_{\eta_a} + \delta a_{1a}, \\ \Delta a_{\eta_a} &= a_{\zeta_a} \gamma_{\xi_a} - a_{\xi_a} \gamma_{\zeta_a} + \delta a_{2a}, \\ \Delta a_{\zeta_a} &= a_{\xi_a} \gamma_{\eta_a} - a_{\eta_a} \gamma_{\xi_a} + \delta a_{3a}, \end{aligned} \right\} (6.225)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta a_{1a} &= a_{\xi_a} \delta h_a + \delta a_{\xi_a}, \\ \delta a_{2a} &= a_{\eta_a} \delta h_a + \delta a_{\eta_a}, \\ \delta a_{3a} &= a_{\zeta_a} \delta h_a + \delta a_{\zeta_a} \end{aligned} \right\} (6.226)$$

— величины, определяющие эквивалентные смещения нулей акселерометров.

Уравнения ошибок интеграторов скорости получаем варьированием выражений (5.47) (см. (6.15) и (6.15а))

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{V}_{\xi_a} &= \Delta a_{\xi_a} + \Delta g'_{\xi_a} + \delta \dot{V}_{1a}, \\ \Delta \dot{V}_{\eta_a} &= \Delta a_{\eta_a} + \Delta g'_{\eta_a} + \delta \dot{V}_{2a}, \\ \Delta \dot{V}_{\zeta_a} &= \Delta a_{\zeta_a} + \Delta g'_{\zeta_a} + \delta \dot{V}_{3a}, \end{aligned} \right\} (6.227)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{V}_{1a} &= \dot{V}_{\xi_a} \delta h_a + \delta \dot{V}_{\xi_a}, \\ \delta \dot{V}_{2a} &= \dot{V}_{\eta_a} \delta h_a + \delta \dot{V}_{\eta_a}, \\ \delta \dot{V}_{3a} &= \dot{V}_{\zeta_a} \delta h_a + \delta \dot{V}_{\zeta_a} \end{aligned} \right\} (6.228)$$

— величины, определяющие эквивалентный дрейф нуля интеграторов.

В соответствии с формулой (5.47) алгоритма системы на вход интеграторов скорости подаются сигналы  $a_{\xi_a}, a_{\eta_a}, a_{\zeta_a}$ , непосредственно снимаемые с акселерометров, и сигналы  $g'_{\xi_a}, g'_{\eta_a}, g'_{\zeta_a}$ , компенсирующие влияние гравитационного ускорения. Дальнейший ход рассуждений зависит от источников информации, ис-

пользуемой при формировании компенсирующих сигналов  $g'_{\xi_a}$ ,  $g'_{\eta_a}$ ,  $g'_{\zeta_a}$ . Здесь имеются три возможности. Во-первых,  $g'_{\xi_a}$ ,  $g'_{\eta_a}$ ,  $g'_{\zeta_a}$  (см. (5.48)) могут вычисляться по выходным величинам  $\xi_a$ ,  $\eta_a$ ,  $\zeta_a$  инерциальной системы, которые отличаются от истинных значений координат на величину ошибок  $\Delta\xi_a$ ,  $\Delta\eta_a$ ,  $\Delta\zeta_a$ .

Во-вторых, величину  $r$ , фигурирующую в (5.48), можно определять по выходному параметру барометрического высотомера  $h$ , если положить  $r = R = R_0 + h$ ,  $R_0 = 6371$  км. Такая формула является приближенной, но она вполне пригодна для анализа ошибок. Для алгоритма можно получить из (1.17) более приемлемое выражение.

И наконец, в-третьих, компенсирующие сигналы  $g'_{\xi_a}$ ,  $g'_{\eta_a}$ ,  $g'_{\zeta_a}$  могут формироваться программным устройством в виде заданных функций времени. Это имеет место в тех случаях, когда объект участвует в заранее рассчитанном программном движении и бортовая система управления стабилизирует такое движение. Тогда ошибки компенсирующих сигналов будут зависеть от расхождения действительного и расчетного движений.

Для первого случая  $\Delta g'_{\xi_a}$ ,  $\Delta g'_{\eta_a}$ ,  $\Delta g'_{\zeta_a}$  находим варьированием выражений (6.223) с учетом того обстоятельства, что  $\Delta g'$  будет определяться из (5.49) при  $r = R$ . Результат можно представить в виде \*)

$$\left. \begin{aligned} \Delta g'_{\xi_a} &= -\frac{g'}{R} \Delta \xi_a + 3 \frac{g'}{R} \cdot \frac{\xi_a}{R} \cdot \Delta R, \\ \Delta g'_{\eta_a} &= -\frac{g'}{R} \Delta \eta_a + 3 \frac{g'}{R} \cdot \frac{\eta_a}{R} \cdot \Delta R, \\ \Delta g'_{\zeta_a} &= -\frac{g'}{R} \Delta \zeta_a + 3 \frac{g'}{R} \cdot \frac{\zeta_a}{R} \cdot \Delta R. \end{aligned} \right\} \quad (6.229)$$

В первом случае  $R = r$  определяется последней формулой (5.48), и поэтому

$$\Delta R = \frac{\xi_a \Delta \xi_a + \eta_a \Delta \eta_a + \zeta_a \Delta \zeta_a}{R}. \quad (6.230)$$

Для второго случая в (6.229) следует  $\Delta R$  положить равным  $\delta h$ , где  $\delta h$  обозначает ошибку барометрического высотомера.

В третьем случае нужно в (6.227) вместо  $\Delta g'_{\xi_a}$ ,  $\Delta g'_{\eta_a}$ ,  $\Delta g'_{\zeta_a}$  писать  $\delta g'_{\xi_a}$ ,  $\delta g'_{\eta_a}$ ,  $\delta g'_{\zeta_a}$ , так как при программном определении величин  $g'_{\xi_a}$ ,  $g'_{\eta_a}$ ,  $g'_{\zeta_a}$  соответствующие ошибки будут являться входными возмущениями. Входные возмущения обозначаются знаком  $\delta$ .

\*) При нахождении  $\Delta g'$  мы не варьировали выражение  $\frac{\xi_a^2}{r^2}$ , имеющее малый множитель  $\beta_1$ .

Если учесть вышеизложенное, то уравнения ошибок интеграторов скорости (6.227) для трех указанных случаев можно представить соответственно в следующих видах.

Для первого случая

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{V}'_{\xi_a} &= -v'^2 \Delta \xi_a + 3v'^2 \frac{\xi_a}{R^2} (\xi_a \Delta \xi_a + \eta_a \Delta \eta_a + \zeta_a \Delta \zeta_a) + \delta \dot{V}'_{Ia}^{(1)}, \\ \Delta \dot{V}'_{\eta_a} &= -v'^2 \Delta \eta_a + 3v'^2 \frac{\eta_a}{R^2} (\xi_a \Delta \xi_a + \eta_a \Delta \eta_a + \zeta_a \Delta \zeta_a) + \delta \dot{V}'_{IIa}^{(1)}, \\ \Delta \dot{V}'_{\zeta_a} &= -v'^2 \Delta \zeta_a + 3v'^2 \frac{\zeta_a}{R^2} (\xi_a \Delta \xi_a + \eta_a \Delta \eta_a + \zeta_a \Delta \zeta_a) + \delta \dot{V}'_{IIIa}^{(1)}, \end{aligned} \right\} \quad (6.231)$$

где  $v'$  определяется по формуле (6.196), а  $\delta \dot{V}'_{Ia}$ ,  $\delta \dot{V}'_{IIa}$ ,  $\delta \dot{V}'_{IIIa}$  — соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{V}'_{Ia} &= a_{\eta_a} \gamma_{\zeta_a} - a_{\zeta_a} \gamma_{\eta_a} + \delta a_{1a} + \delta \dot{V}'_{1a}, \\ \delta \dot{V}'_{IIa} &= a_{\zeta_a} \gamma_{\xi_a} - a_{\xi_a} \gamma_{\zeta_a} + \delta a_{2a} + \delta \dot{V}'_{2a}, \\ \delta \dot{V}'_{IIIa} &= a_{\xi_a} \gamma_{\eta_a} - a_{\eta_a} \gamma_{\xi_a} + \delta a_{3a} + \delta \dot{V}'_{3a}. \end{aligned} \right\} \quad (6.232)$$

При этом  $\delta a_{1a}$ ,  $\delta V_{1a}$  и т. д. определяются (6.226) и (6.228).

Для второго случая

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{V}'_{\xi_a} &= -v'^2 \Delta \xi_a + \delta \dot{V}'_{Ia}^{(2)}, \\ \Delta \dot{V}'_{\eta_a} &= -v'^2 \Delta \eta_a + \delta \dot{V}'_{IIa}^{(2)}, \\ \Delta \dot{V}'_{\zeta_a} &= -v'^2 \Delta \zeta_a + \delta \dot{V}'_{IIIa}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (6.233)$$

при

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{V}'_{Ia}^{(2)} &= \delta \dot{V}'_{Ia}^{(1)} + 3v'^2 \frac{\xi_a}{R} \delta h, \\ \delta \dot{V}'_{IIa}^{(2)} &= \delta \dot{V}'_{IIa}^{(1)} + 3v'^2 \frac{\eta_a}{R} \delta h, \\ \delta \dot{V}'_{IIIa}^{(2)} &= \delta \dot{V}'_{IIIa}^{(1)} + 3v'^2 \frac{\zeta_a}{R} \delta h. \end{aligned} \right\} \quad (6.234)$$

Для третьего случая

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{V}'_{\xi_a} &= \delta \dot{V}'_{Ia}^{(3)}, \\ \Delta \dot{V}'_{\eta_a} &= \delta \dot{V}'_{IIa}^{(3)}, \\ \Delta \dot{V}'_{\zeta_a} &= \delta \dot{V}'_{IIIa}^{(3)} \end{aligned} \right\} \quad (6.235)$$

при

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{V}'_{Ia}^{(3)} &= \delta \dot{V}'_{Ia}^{(1)} + \delta g'_{\xi_a}, \\ \delta \dot{V}'_{IIa}^{(3)} &= \delta \dot{V}'_{IIa}^{(1)} + \delta g'_{\eta_a}, \\ \delta \dot{V}'_{IIIa}^{(3)} &= \delta \dot{V}'_{IIIa}^{(1)} + \delta g'_{\zeta_a}. \end{aligned} \right\} \quad (6.236)$$

В уравнениях ошибок (6.231) — (6.236) величины  $\Delta a_{\zeta_a}$ ,  $\Delta a_{\xi_a}$ ,  $\Delta a_{\eta_a}$  подставлены в развернутом виде в соответствии с формулами (6.225) и отнесены эти величины в разряд входных возмущений. Последнее обусловлено тем обстоятельством, что углы  $\gamma_{\xi_a}$ ,  $\gamma_{\eta_a}$ ,  $\gamma_{\zeta_a}$  определяются из (6.224) простым интегрированием и поэтому могут считаться известными функциями времени.

Уравнения ошибок вторых интеграторов получаются обычным способом из (5.50).

Итак,

$$\left. \begin{aligned} \Delta \ddot{\xi}_a &= \Delta V_{\xi_a} + \delta \dot{\xi}_{1a}, \\ \Delta \dot{\eta}_a &= \Delta V_{\eta_a} + \delta \dot{\eta}_{1a}, \\ \Delta \dot{\zeta}_a &= \Delta V_{\zeta_a} + \delta \dot{\zeta}_{1a}, \end{aligned} \right\} \quad (6.237)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{\xi}_{1a} &= \dot{V}_{\xi_a} \delta h_{\xi_a} + \delta \dot{\xi}_a, \\ \delta \dot{\eta}_{1a} &= \dot{V}_{\eta_a} \delta h_{\eta_a} + \delta \dot{\eta}_a, \\ \delta \dot{\zeta}_{1a} &= \dot{V}_{\zeta_a} \delta h_{\zeta_a} + \delta \dot{\zeta}_a \end{aligned} \right\} \quad (6.238)$$

— величины, определяющие эквивалентный дрейф вторых интеграторов.

Уравнения (6.231), (6.233), (6.235) с уравнениями (6.237) определяют совокупную систему уравнений ошибок инерциальной системы для указанных выше трех случаев формирования компенсирующих сигналов для гравитационного ускорения. Полученные уравнения ошибок представлены в нормальной форме. Однако их можно разрешить относительно координат  $\xi_a$ ,  $\eta_a$ ,  $\zeta_a$ . Для этого нужно продифференцировать (6.237) и подставить вместо  $\Delta \dot{V}_{\xi_a}$ ,  $\Delta \dot{V}_{\eta_a}$ ,  $\Delta \dot{V}_{\zeta_a}$  их выражения из (6.231), (6.233), (6.235) соответственно для каждого из трех случаев.

В результате получим следующие уравнения.

Для первого случая

$$\left. \begin{aligned} \Delta \ddot{\xi}_a + v^2 \Delta \xi_a - 3v^2 \frac{\xi_a}{R^2} (\xi_a \Delta \xi_a + \eta_a \Delta \eta_a + \zeta_a \Delta \zeta_a) &= \delta \dot{V}_{\xi_a}^{(1)}, \\ \Delta \ddot{\eta}_a + v^2 \Delta \eta_a - 3v^2 \frac{\eta_a}{R^2} (\xi_a \Delta \xi_a + \eta_a \Delta \eta_a + \zeta_a \Delta \zeta_a) &= \delta \dot{V}_{\eta_a}^{(1)}, \\ \Delta \ddot{\zeta}_a + v^2 \Delta \zeta_a - 3v^2 \frac{\zeta_a}{R^2} (\xi_a \Delta \xi_a + \eta_a \Delta \eta_a + \zeta_a \Delta \zeta_a) &= \delta \dot{V}_{\zeta_a}^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (6.239)$$

при

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{V}_{\xi_a} &= (\delta \dot{\xi}_{1a})' + \delta \dot{V}_{1a}^{(1)}, \\ \delta \dot{V}_{\eta_a} &= (\delta \dot{\eta}_{1a})' + \delta \dot{V}_{1a}^{(1)}, \\ \delta \dot{V}_{\zeta_a} &= (\delta \dot{\zeta}_{1a})' + \delta \dot{V}_{1a}^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.240)$$

Для второго случая

$$\left. \begin{aligned} \Delta \ddot{\xi}_a + v^2 \Delta \xi_a &= \delta \dot{V}_{\xi_a}^{(2)}, \\ \Delta \ddot{\eta}_a + v^2 \Delta \eta_a &= \delta \dot{V}_{\eta_a}^{(2)}, \\ \Delta \ddot{\zeta}_a + v^2 \Delta \zeta_a &= \delta \dot{V}_{\zeta_a}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (6.241)$$

при

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{V}_{\xi_a}^{(2)} &= (\delta \dot{\xi}_{1a})' + \delta \dot{V}_{1a}^{(2)}, \\ \delta \dot{V}_{\eta_a}^{(2)} &= (\delta \dot{\eta}_{1a})' + \delta \dot{V}_{1a}^{(2)}, \\ \delta \dot{V}_{\zeta_a}^{(2)} &= (\delta \dot{\zeta}_{1a})' + \delta \dot{V}_{1a}^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.242)$$

Для третьего случая

$$\left. \begin{aligned} \Delta \ddot{\xi}_a &= \delta \dot{V}_{\xi_a}^{(3)}, \\ \Delta \ddot{\eta}_a &= \delta \dot{V}_{\eta_a}^{(3)}, \\ \Delta \ddot{\zeta}_a &= \delta \dot{V}_{\zeta_a}^{(3)} \end{aligned} \right\} \quad (6.243)$$

при

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{V}_{\xi_a}^{(3)} &= (\delta \dot{\xi}_{1a})' + \delta \dot{V}_{1a}^{(3)}, \\ \delta \dot{V}_{\eta_a}^{(3)} &= (\delta \dot{\eta}_{1a})' + \delta \dot{V}_{1a}^{(3)}, \\ \delta \dot{V}_{\zeta_a}^{(3)} &= (\delta \dot{\zeta}_{1a})' + \delta \dot{V}_{1a}^{(3)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.244)$$

В этих уравнениях  $(\delta \dot{\xi}_{1a})'$ ,  $(\delta \dot{\eta}_{1a})'$ ,  $(\delta \dot{\zeta}_{1a})'$  обозначают производные по времени от величин, стоящих в скобках.

При решении уравнений (6.239), (6.241), (6.243) значения  $\Delta \dot{\xi}_a$ ,  $\Delta \dot{\eta}_a$ ,  $\Delta \dot{\zeta}_a$  при  $t = 0$  (начальное условие) следует определять по уравнениям (6.237) при  $t = 0$ .

**6.3.2. Анализ уравнений ошибок неподвижного в абсолютном пространстве объекта.** В рассматриваемом случае уравнения ошибок будут иметь постоянные коэффициенты, а это позволяет провести анализ ошибок системы в аналитической форме. В первом случае, когда мы имеем дело с автономной инерциальной системой, удобно для анализа соответствующих уравнений ошибок (6.239) использовать матричные методы. Матричные методы позволяют упорядочить промежуточные выкладки и в конечном итоге упростить процесс получения конечных результатов. От уравнений ошибок (6.239) перейдем к уравнениям в изображениях, которые будем записывать в матричной форме. Уравнения в изображениях могут быть согласованы только в том случае, когда заданы начальные условия. Пусть  $\Delta \xi_a(0)$ ,  $\Delta \eta_a(0)$ ,  $\Delta \zeta_a(0)$  — ошибки координат точки местоположения объекта при  $t = 0$ , а  $\Delta \dot{\xi}_a(0)$ ,  $\Delta \dot{\eta}_a(0)$ ,  $\Delta \dot{\zeta}_a(0)$  — их производные при том же значении  $t$ . При этом

$\Delta \dot{\xi}_a(0)$ ,  $\Delta \dot{\eta}_a(0)$ ,  $\Delta \dot{\zeta}_a(0)$  должны определяться равенствами

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\xi}_a(0) &= \Delta V_{\xi_a}(0) + \delta \dot{\xi}_{1a}(0), \\ \Delta \dot{\eta}_a(0) &= \Delta V_{\eta_a}(0) + \delta \dot{\eta}_{1a}(0), \\ \Delta \dot{\zeta}_a(0) &= \Delta V_{\zeta_a}(0) + \delta \dot{\zeta}_{1a}(0), \end{aligned} \right\} \quad (6.245)$$

которые получаются из (6.237) при  $t = 0$ .

Сохраним для изображений способ обозначений, принятый в п. 1.3 данной главы. Тогда уравнения в изображениях в матричной записи можно представить в виде

$$L \begin{bmatrix} \Delta \xi_a(S) \\ \Delta \eta_a(S) \\ \Delta \zeta_a(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \dot{\xi}_a + S \Delta \xi_a(0) + \delta \dot{V}_{\xi_a}^{(1)}(S) \\ \Delta \dot{\eta}_a + S \Delta \eta_a(0) + \delta \dot{V}_{\eta_a}^{(1)}(S) \\ \Delta \dot{\zeta}_a + S \Delta \zeta_a(0) + \delta \dot{V}_{\zeta_a}^{(1)}(S) \end{bmatrix}. \quad (6.246)$$

Элементы матрицы  $L$  следующие:

$$\begin{aligned} l_{11} &= S^2 + v'^2 - 3v'^2 \cdot \frac{\xi_a^2}{R^2}, & l_{12} &= -3v'^2 \cdot \frac{\xi_a \eta_a}{R^2}, \\ l_{13} &= -3v'^2 \cdot \frac{\xi_a \zeta_a}{R^2}, & l_{21} &= -3v'^2 \cdot \frac{\eta_a \xi_a}{R^2}, \\ l_{22} &= S^2 + v'^2 - 3v'^2 \cdot \frac{\eta_a^2}{R^2}, & l_{23} &= -3v'^2 \cdot \frac{\eta_a \zeta_a}{R^2}, \\ l_{31} &= -3v'^2 \cdot \frac{\xi_a \eta_a}{R^2}, & l_{32} &= -3v'^2 \cdot \frac{\eta_a \zeta_a}{R^2}, \\ l_{33} &= S^2 + v'^2 - 3v'^2 \cdot \frac{\zeta_a^2}{R^2}. \end{aligned}$$

Решение матричного уравнения (6.246) записывается в виде

$$\begin{bmatrix} \Delta \xi_a(0) \\ \Delta \eta_a(0) \\ \Delta \zeta_a(0) \end{bmatrix} = \frac{S^2 + v'^2}{\Delta(S)} L' \begin{bmatrix} \Delta \dot{\xi}_a(0) + S \xi_a(0) + \delta \dot{V}_{\xi_a}^{(1)}(S) \\ \Delta \dot{\eta}_a(0) + S \eta_a(0) + \delta \dot{V}_{\eta_a}^{(1)}(S) \\ \Delta \dot{\zeta}_a(0) + S \zeta_a(0) + \delta \dot{V}_{\zeta_a}^{(1)}(S) \end{bmatrix}. \quad (6.247)$$

Элементы матрицы  $L'$  следующие:

$$\begin{aligned} l'_{11} &= S^2 + v'^2 - 3v'^2 \cdot \frac{\eta_a \xi_a}{R^2}, & l'_{12} &= 3v'^2 \cdot \frac{\xi_a \eta_a}{R^2}, \\ l'_{13} &= 3v'^2 \cdot \frac{\xi_a \zeta_a}{R^2}, & l'_{21} &= 3v'^2 \cdot \frac{\eta_a \xi_a}{R^2}, \\ l'_{22} &= S^2 + v'^2 - 3v'^2 \cdot \frac{\xi_a^2 + \zeta_a^2}{R^2}, & l'_{23} &= S^2 + v'^2 - 3v'^2 \cdot \frac{\eta_a \zeta_a}{R^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l'_{31} &= 3v'^2 \cdot \frac{\xi_a \zeta_a}{R^2}, & l'_{32} &= 3v'^2 \cdot \frac{\xi_a \zeta_a}{R^2}, \\ l_{33} &= S^2 + v'^2 - 3v'^2 \cdot \frac{\xi_a^2 + \eta_a^2}{R^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\Delta S = (S^2 + v'^2)(S^2 - 2v'^2). \quad (6.248)$$

Определитель квадратной матрицы  $L$  уравнения (6.246) является характеристическим полиномом системы дифференциальных уравнений (6.239).

Квадратная матрица  $L'$  уравнения (6.247) является присоединенной матрицей для  $L$ . Процесс образования присоединенной матрицы  $L$  был описан в п. 1.3.4. Здесь только следует отметить, что процесс построения присоединенной матрицы  $L'$  упрощается следующим обстоятельством. Если в матрице  $L$  мысленно положить  $S^2 + v'^2$  равным нулю, то мы получим квадратную матрицу, которую можно представить в виде произведения столбца на строку, т. е. в виде \*)

$$-3 \frac{v'^2}{R^2} \begin{bmatrix} \xi_a \\ \eta_a \\ \zeta_a \end{bmatrix} [\xi_a \ \eta_a \ \zeta_a]. \quad (6.249)$$

Матрица (6.249) имеет ранг, равный единице. Все ее миноры второго и третьего порядка равны нулю.

Поэтому в процессе вычислений алгебраических дополнений (миноров со знаком) матрицы  $L'$  нужно учитывать только те слагаемые, которые имеют множитель  $S^2 + v'^2$ , слагаемые, не имеющие такого множителя, обращаются в нуль. То же самое нужно иметь в виду при разворачивании характеристического полинома. Можно получить общие выражения для обращения характеристических матриц подобного типа. Соответствующие формулы приведены в [14].

Характеристический полином (6.248) имеет два двойных мнимых корня  $\pm iv'$  и два вещественных корня  $\pm v'\sqrt{2}$ . Так как среди корней есть положительный корень, то автономная инерциальная система аналитического типа будет неустойчивой. В данном случае структура уравнений ошибок такова, что порциальные решения, соответствующие двойным корням, не будут содержать вековых членов, пропорциональных времени  $t$ . Этот факт можно усмотреть из решения в изображениях (6.247); один множитель  $S^2 + v'^2$  в характеристическом полиноме  $\Delta(S)$  сокращается соответственно множителем, стоящим в числителе. Вследствие этого изображения не будут содержать кратных полюсов.

\*) Напомним, что при умножении матрицы на скаляр умножаются на скаляр все ее элементы.

По найденному решению в изображениях и при заданных правых частях можно построить решение в оригиналах. Здесь нам важно было установить тот факт, что инерциальная система аналитического типа неустойчива. Таким же свойством обладала полуаналитическая инерциальная система с тремя акселерометрами.

Во втором случае, когда для формирования компенсирующих сигналов гравитационного ускорения частично используется внешняя информация, мы имеем три изолированных уравнения ошибок второго порядка (6.241). Такая система удовлетворяет условиям обыкновенной устойчивости. Собственные незатухающие колебания в такой системе происходят с частотой Шулера  $v'$  для гравитационного поля Земли. Можно построить решение уравнений ошибок (6.241). Ввиду симметрии уравнений (6.241) рассмотрим решение только одного нового уравнения.

Уравнение в изображениях, соответствующее первому уравнению (6.241), имеет вид

$$(S^2 + v'^2)\Delta\xi_a(S) = \Delta V_{\xi_a}(0) + \delta\xi_{1a}(0) + S\Delta\xi_a(0) + \delta\dot{V}_{\xi_a}^{(2)}(S). \quad (6.250)$$

Здесь мы использовали первую формулу (6.245) для определения начального значения  $\Delta\xi_a(0)$ .

Правая часть  $\delta\dot{V}_{\xi_a}^{(2)}$  определяется первой формулой (6.242) с учетом (6.232) и (6.234), ее можно представить в развернутом виде

$$\delta\dot{V}_{\xi_a}^{(2)} = (\delta\xi_a)' + 3v'^2 \frac{\xi_a}{R} \delta h + a_{\eta_a} \gamma_{\xi_a} - a_{\zeta_a} \gamma_{\eta_a} + \delta a_{1a} + \delta\dot{V}_{1a}. \quad (6.251)$$

На неподвижном в абсолютном пространстве основании имеем  $a_{\eta_a} = -g'_{\eta_a} = \text{const}$  и  $a_{\zeta_a} = -g'_{\zeta_a} = \text{const}$ , углы  $\gamma_{\eta_a}$  и  $\gamma_{\xi_a}$  находятся из соответствующих уравнений (6.224). В дальнейшем учтем только ошибки измерительных элементов инерциальной системы: гироскопов и акселерометров. Ошибки интеграторов и барометрического высотомера будем полагать равными нулю.

При сделанном предположении изображение входного возмущения  $\delta\dot{V}_{\xi_a}^{(2)}$  можно представить в виде

$$\delta\dot{V}_{\xi_a}^{(2)}(S) = \frac{1}{S} (-g'_{\eta_a} \gamma_{\xi_a}(0) + g'_{\zeta_a} \gamma_{\eta_a}(0)) + \frac{1}{S} (-g'_{\eta_a} \delta\omega_{\xi_a}(S) + g'_{\zeta_a} \delta\omega_{\eta_a}(S)) + \delta a_{1a}(S). \quad (6.252)$$

Изображения  $\gamma_{\eta_a}(S)$  и  $\gamma_{\xi_a}(S)$  находим из последних формул (6.224). Учитывая (6.224) и тот факт, что с учетом сделанного предположе-

ния  $\delta\xi_{1a}(0) = 0$ , представим изображение искомого решения в виде

$$\Delta\xi_a(S) = \frac{\Delta V_{\xi_a}(0)}{S^2 + v'^2} + \frac{S\Delta\xi_a(0)}{S^2 + v'^2} + \frac{-g'_{\eta_a} \gamma_{\xi_a}(0) + g'_{\zeta_a} \gamma_{\eta_a}(0)}{S(S^2 + v'^2)} + \frac{-g'_{\eta_a} \delta\omega_{\xi_a}(S) + g'_{\zeta_a} \delta\omega_{\eta_a}(S)}{S(S^2 + v'^2)} + \frac{\delta a_{1a}(S)}{S^2 + v'^2}. \quad (6.253)$$

Полученное выражение для изображения  $\Delta\xi_a(S)$  позволяет определить ошибку  $\Delta\xi_a(t)$  при заданных входных возмущениях.

В частности, при постоянном дрейфе гироскопов ( $\delta\omega_{\eta_a} = \text{const}$ ,  $\delta\omega_{\xi_a} = \text{const}$ ) и постоянном эквивалентном смещении нуля акселерометров ( $\delta a_{1a} = \text{const}$ ) получим из (6.253) выражение \*

$$\Delta\xi_a(t) = \frac{\Delta V_{\xi_a}(0)}{v'} \sin v't + \Delta\xi_a(0) \cos v't + \frac{(-g'_{\eta_a} \gamma_{\xi_a}(0) + g'_{\zeta_a} \gamma_{\eta_a}(0))}{v^2} (1 - \cos v't) + \frac{(-g'_{\eta_a} \delta\omega_{\xi_a} + g'_{\zeta_a} \delta\omega_{\eta_a})}{v^2} \left(t - \frac{1}{v'} \sin v't\right) + \frac{\delta a_{1a}}{v^2} (1 - \cos v't). \quad (6.254)$$

Структура ошибок  $\Delta\lambda(t)$  и  $\Delta\xi_a(t)$  от дрейфа гироплатформы  $\delta\omega_2$  в выражении (6.55) и  $\delta\omega_{\eta_a}$ ,  $\delta\omega_{\xi_a}$  в выражении (6.254) одинакова, поэтому с точностью до постоянного множителя можно пользоваться выражением (6.70) для дисперсии ошибки  $\Delta\xi_a(t)$  при одних и тех же статистических характеристиках входного возмущения.

Для третьего случая, когда сигналы, компенсирующие гравитационные ускорения, формируются программным способом, уравнения ошибок имеют вид (6.243). Рассмотрим опять только первое уравнение (6.243). Соответствующее уравнение в изображениях можно представить в форме

$$S^2\Delta\xi_a(S) = \Delta V_{\xi_a}(0) + \delta\xi_{1a}(0) + S\Delta\xi_a(0) + \delta\dot{V}_{\xi_a}^{(3)}(S). \quad (6.255)$$

На основании формул (6.236) и (6.232) правая часть  $\delta\dot{V}_{\xi_a}^{(3)}$ , определяемая формулой (6.244), может быть представлена в развернутом виде:

$$\delta\dot{V}_{\xi_a}^{(3)} = (\delta\xi_{1a})' + \delta g'_{\xi_a} + a_{\eta_a} \gamma_{\xi_a} - a_{\zeta_a} \gamma_{\eta_a} + \delta a_{1a} + \delta\dot{V}_{1a}. \quad (6.256)$$

Тогда при сделанных выше предположениях изображение ошибки

\*) Изображение константы равняется этой константе, поделенной на  $S$ .

$\Delta \xi_a$  может быть записано в виде

$$\Delta \xi_a(S) = \frac{\Delta V_{\xi_a}(0)}{S^2} + \frac{\Delta \xi_a(0)}{S} + \frac{-g'_{\eta_a} \gamma_{\xi_a}(0) + g'_{\xi_a} \gamma_{\eta_a}(0)}{S^3} + \frac{-g'_{\eta_a} \delta \omega_{\xi_a}(S) + g'_{\xi_a} \delta \omega_{\eta_a}(S)}{S^3} + \frac{\delta a_{1a}(S)}{S^2}. \quad (6.257)$$

Это выражение получается из (6.253) при  $v' = 0$ .

При  $\delta \omega_{\eta_a} = \text{const}$ ,  $\delta \omega_{\xi_a} = \text{const}$  и  $\delta a_{1a} = \text{const}$  из (6.257) будем иметь

$$\Delta \xi_a(t) = \Delta V_{\xi_a}(0)t + \Delta \xi_a(0) + (-g'_{\eta_a} \gamma_{\xi_a}(0) + g'_{\xi_a} \gamma_{\eta_a}(0)) \frac{t^2}{2} + (-g'_{\eta_a} \delta \omega_{\xi_a} + g'_{\xi_a} \delta \omega_{\eta_a}) \frac{t^3}{3} + \delta a_{1a} \frac{t^2}{2}. \quad (6.258)$$

Выходная ошибка по координате местоположения объекта изменяется от соответствующих входных возмущений пропорционально первым степеням времени  $t$ . Это получается потому, что интеграторы обеих ступеней работают по разомкнутой схеме. Во втором случае уравнения ошибок (6.233) и (6.237) могут быть истолкованы как уравнения движения двух последовательно включенных интегрирующих звеньев, охваченных жесткой обратной связью. Выражение (6.258) позволяет сделать вывод о неустойчивости инерциальной системы аналитического типа в случае программного формирования компенсирующих сигналов. В этом случае инерциальная система может быть использована для объектов с относительно малым временем движения. Интересно отметить: инерциальная система, использующая информацию от барометрического высотомера, на малых интервалах времени ведет себя аналогичным образом. Если интервал времени не превышает 8–10 мин, то в выражении (6.254) можно приблизительно положить

$$\sin v't = v't, \quad 1 - \cos v't \approx \frac{(v't)^2}{2} \quad \text{и} \quad \left(t - \frac{1}{v'} \sin v't\right) = \frac{1}{v'} \frac{(v't)^3}{6}.$$

Но тогда (6.254) приобретает вид выражения (6.258).

На указанном интервале времени, примерно равном  $0,2 T_v$  ( $T_v = 84,4$  мин при  $h = 0$ ), обратная связь не успевает проявлять свое стабилизирующее свойство. Таким образом, на указанном интервале времени инерциальные системы второго и третьего типа ведут себя примерно одинаково. Формула (6.258) и определяет выходную ошибку системы  $\Delta \xi_a(t)$  при постоянных входных возмущениях. Этой формулой можно пользоваться для определения математического ожидания  $M \Delta \xi_a(t)$  и дисперсии  $D \Delta \xi_a(t)$  в случае, когда входные возмущения являются случайными величинами с известными числовыми характеристиками (см. п. 6.1.3). Рассмотрим здесь статистическую задачу по определению дисперсии

ошибки  $\Delta \xi_a(t)$  при условии, что за входное возмущение принимается дрейф гироплатформы. Будем считать, что  $\delta \omega_{\eta_a}(t)$  и  $\delta \omega_{\xi_a}(t)$ , характеризующие дрейф гироплатформы, являются стационарным случайным процессом с корреляционной функцией (6.67). Будем считать, что мы имеем дело с некоррелированными случайными процессами  $\delta \omega_{\eta_a}(t)$  и  $\delta \omega_{\xi_a}(t)$ . Вследствие этого можно ограничиться вычислением дисперсии ошибки от какого-нибудь одного возмущения, например  $\delta \omega_{\eta_a}(t)$  (см. (6.60)).

Связь между изображениями  $\delta \omega_{\eta_a}(S)$  входного возмущения и  $\Delta \xi_a(S)$  выходной ошибки системы определяется из (6.257) в виде

$$\Delta \xi(S) = \frac{g'_{\xi_a}}{S^3} \delta \omega_{\eta_a}(S), \quad (6.259)$$

где  $g'_{\xi_a} = \text{const}$ .

Определение дисперсии ошибки  $\Delta \xi_a(t)$  будем вести по формуле (6.66). В данном случае переходная импульсная функция  $h(t)$  имеет своим изображением  $\frac{g'_{\xi_a}}{S^3}$ , и поэтому

$$h(t) = \frac{g'_{\xi_a}}{2} t^2. \quad (6.260)$$

Как уже указывалось выше,  $K \xi_{\text{вх}}(\tau_2 - \tau_1)$  определяется функцией (6.67), в которой  $\sigma^2$  есть дисперсия  $D \delta \omega_{\eta_a}(t)$  рассматриваемого входного возмущения.

Подставляя в (6.66) соответствующие выражения из (6.67) и (6.260) и выполняя интегрирование, получим выражение \*

$$D \Delta \xi_a(t) = \frac{\sigma^2 g'^2_{\xi_a}}{4\beta^6} \left[ 4l - \beta t (\beta^2 t^2 + 2\beta t + 2) + \frac{2}{5} \beta^5 t^5 - \beta^4 t^4 + \frac{4}{3} \beta^3 t^3 - 8 \right]. \quad (6.261)$$

По прошествии некоторого промежутка времени доминирующим слагаемым будет  $\frac{2}{5} \beta^5 t^5$ , поэтому среднеквадратическая ошибка будет приближенно пропорциональна  $t^{2,5}$ .

При входном стационарном случайном возмущении выходная ошибка будет описываться нестационарной случайной функцией и это естественно, так как рассматриваемая инерциальная система является неустойчивой.

**6.3.3. Преобразование ошибок в географическую систему координат.** Координаты  $\xi_a$ ,  $\eta_a$ ,  $\xi_a$  являются промежуточными или, как их называли в гл. V, первичными координатами местоположения объекта. Первичные координаты получаются из решений соответствующих дифференциальных уравнений. Вторичными коор-

\*) При интегрировании рекомендуется посмотреть формулы (6.68) и (6.70).

динатами для данной системы выбраны географические координаты  $\varphi$ ,  $\lambda$ , которые весьма удобны для практического использования.

Вторичные координаты  $\varphi$ ,  $\lambda$  проекции скорости на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  географического трехгранника и углы  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\gamma$ , определяющие ориентацию объекта, находятся по конечным формулам, приведенным в п. 5.3.1. При анализе ошибок можно в (5.52) положить  $\alpha = 0$  и считать

$$\xi_a = R \cos \varphi \cos \lambda_a, \quad \eta_a = R \cos \varphi \sin \lambda_a, \quad \zeta_a = R \sin \varphi, \quad (6.262)$$

где

$$R = r = \sqrt{\xi_a^2 + \eta_a^2 + \zeta_a^2}. \quad (6.263)$$

Ошибки  $\Delta\lambda_a$ ,  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta h = \Delta R$  получаются варьированием равенств (5.54) и равенства (6.263), причем при варьировании первого равенства (5.54) будем полагать  $\alpha = 0$ .

В результате получим выражения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta\lambda_a}{\cos^2 \lambda_a} &= \frac{\xi_a \Delta\eta_a - \eta_a \Delta\xi_a}{\xi_a^2}, \\ \frac{\Delta\varphi}{\cos^2 \varphi} &= -\frac{\xi_a (\xi_a \Delta\zeta_a + \eta_a \Delta\eta_a)}{(\xi_a^2 + \eta_a^2)^{3/2}} + \frac{\Delta\zeta_a}{(\xi_a^2 + \eta_a^2)^{1/2}}, \\ \Delta h &= \frac{\xi_a \Delta\xi_a + \eta_a \Delta\eta_a + \zeta_a \Delta\zeta_a}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (6.264)$$

Если в полученные выражения подставить  $\xi_a$ ,  $\eta_a$ ,  $\zeta_a$  из (6.262), то после несложных преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} R \cos \varphi \Delta\lambda_a &= -\Delta\xi_a \sin \lambda_a + \Delta\eta_a \cos \lambda_a, \\ R \Delta\varphi &= -\Delta\xi_a \sin \varphi \cos \lambda_a - \Delta\eta_a \sin \varphi \sin \lambda_a + \Delta\zeta_a \cos \varphi, \\ \Delta h &= \Delta\xi_a \cos \varphi \cos \lambda_a + \Delta\eta_a \cos \varphi \sin \lambda_a + \Delta\zeta_a \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.265)$$

Ошибка  $\Delta\lambda$  в долготе будет определяться в соответствии с (5.54а) выражением

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda_a - U \Delta t, \quad (6.266)$$

где  $\Delta t$  — возможная ошибка хода временного механизма.

Выражения (6.265) в матричной форме имеют вид

$$\begin{bmatrix} R \cos \varphi \Delta\lambda_a \\ R \Delta\varphi \\ \Delta h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_a & \cos \lambda_a & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda_a & -\sin \varphi \sin \lambda_a & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda_a & \cos \varphi \sin \lambda_a & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\xi_a \\ \Delta\eta_a \\ \Delta\zeta_a \end{bmatrix}. \quad (6.267)$$

Это матричное преобразование имеет вид (5.64). Следовательно, можно сказать, что (6.267) дает возможность по проекциям  $\Delta\xi_a$ ,  $\Delta\eta_a$ ,  $\Delta\zeta_a$  вектора ошибки в определении местоположения объекта на оси  $\xi_a$ ,  $\eta_a$ ,  $\zeta_a$  абсолютной системы координат найти проекции

$\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  того же вектора ошибки на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  географической системы координат. Отсюда

$$\Delta x = R \cos \varphi \Delta\lambda_a, \quad \Delta y = R \Delta\varphi, \quad \Delta z = \Delta h. \quad (6.268)$$

Равенства (6.268) можно было бы установить самостоятельно. Тогда ошибки  $\Delta\lambda_a$ ,  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta h$  можно было бы сразу определить преобразованием координат (5.64). Однако непосредственное варьирование соответствующих формул может более надежно предохранить от возможных ошибок. Так, например, для второго случая, когда используется информация от барометрического высотомера, преобразование (6.267) не приводит к цели, так как вариация  $R$  определяется ошибкой высотомера  $\delta h$ , а не ошибками в вычислении координат  $\xi_a$ ,  $\eta_a$ ,  $\zeta_a$ .

Ошибки  $\Delta V_x$ ,  $\Delta V_y$ ,  $\Delta V_z$  абсолютной скорости в проекциях на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  получаются также по формулам преобразования координат в виде (см. (5.55))

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_x &= -\Delta V_{\xi_a} \sin \lambda_a + \Delta V_{\eta_a} \cos \lambda_a, \\ \Delta V_y &= -\Delta V_{\xi_a} \sin \varphi \cos \lambda_a - \Delta V_{\eta_a} \sin \varphi \sin \lambda_a + \Delta V_{\zeta_a} \cos \varphi, \\ \Delta V_z &= \Delta V_{\xi_a} \cos \varphi \cos \lambda_a + \Delta V_{\eta_a} \cos \varphi \sin \lambda_a + \Delta V_{\zeta_a} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.269)$$

Соответствующие ошибки в относительной скорости имеют вид (см. (5.56))

$$\left. \begin{aligned} \Delta v_x &= \Delta V_x - (\Delta\xi_a \cos \lambda_a + \Delta\eta_a \sin \lambda_a) U, \\ \Delta v_y &= \Delta V_y, \quad \Delta v_z = \Delta V_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.270)$$

Теперь нам остается найти ошибки в определении углов ориентации объекта. Углы ориентации  $\theta$ ,  $\gamma_S$ ,  $\psi_K$  определяются формулами (5.59). Обозначения, принятые в этих формулах, весьма наглядны. Однако для дальнейшего удобней использовать общие обозначения для элементов матрицы  $C_{\text{КГ}}$  (квадратная матрица в (5.58)) и записывать (5.59) в виде

$$\sin \theta = c_{\text{КГ}}^{(23)}, \quad \text{tg } \gamma_S = \frac{-c_{\text{КГ}}^{(13)}}{c_{\text{КГ}}^{(33)}}, \quad \text{tg } \psi_K = \frac{c_{\text{КГ}}^{(21)}}{c_{\text{КГ}}^{(22)}}. \quad (6.271)$$

Здесь  $c_{\text{КГ}}^{(ij)}$  есть элемент матрицы  $C_{\text{КГ}}$ , стоящий на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

Ошибки  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\gamma_S$ ,  $\Delta\psi_K$  определяются варьированием равенств (6.271). Эти формулы можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{\Delta c_{\text{КГ}}^{(23)}}{\cos \theta}, \quad \Delta\gamma_S = \frac{\Delta c_{\text{КГ}}^{(33)} \sin \gamma_S - \Delta c_{\text{КГ}}^{(13)} \cos \gamma_S}{\cos \theta}, \\ \Delta\psi_K &= \frac{c_{\text{КГ}}^{(21)} \cos \psi_K - \Delta c_{\text{КГ}}^{(22)} \sin \psi_K}{\cos \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (6.272)$$

В (6.272)  $\theta$ ,  $\gamma_S$ ,  $\psi_K$  суть значения углов, при которых определяются ошибки  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\gamma_S$ ,  $\Delta\psi_K$ . В дальнейшем ход рассуждений будет общим, но конечные формулы мы приведем для частного случая, в котором принимается  $\theta = 0$ ,  $\gamma_S = 0$ , а  $\psi_K$  считается произвольным. В этом случае (6.272) будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta\theta &= \Delta c_{K\Gamma}^{(23)}, & \Delta\gamma_S &= -\Delta c_{K\Gamma}^{(13)}, \\ \Delta\psi_K &= \Delta c_{K\Gamma}^{(21)} \cos \psi_K - \Delta c_{K\Gamma}^{(22)} \sin \psi_K. \end{aligned} \right\} \quad (6.273)$$

По формулам (6.272) и в частном случае по формулам (6.273) задача нахождения ошибок  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\gamma_S$ ,  $\Delta\psi_K$  сводится к определению ошибок при нахождении некоторых элементов матрицы  $C_{K\Gamma}$ . Эта матрица в идеальном случае определяется формулой (5.63). В действительности матрица  $C_{a\Gamma}$  строится по расчетным значениям  $\Phi$ ,  $\tilde{\lambda}_a$  координат местоположения объекта, а первичной информацией для вычисления элементов матрицы  $C_{Ka}$  являются показания датчиков углов на кардановых рамках гиросплатформы. Но датчики могут измерять углы только между материализованными осями, которыми в данном случае являются связанные с объектом оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и связанные с гиросплатформой оси  $\xi_p$ ,  $\eta_p$ ,  $\zeta_p$ . Поэтому в правой части (5.63) нужно вместо  $C_{Ka}$  поставить матрицу  $C_{Kp}$ , а вместо  $C_{K\Gamma}$  писать  $\tilde{C}_{K\Gamma}$ , где тильда указывает на то, что элементы матрицы строятся по расчетным значениям исходных величин. Матрицу  $C_{Kp}$  будем представлять в виде

$$C_{Kp} = C_{Ka} C_{ap}, \quad (6.274)$$

где  $C_{ap} = C_{pa}^T$ , а  $C_{pa}$  есть матрица преобразования опорной координатной системы  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  в моделирующую ее координатную систему  $\xi_p \eta_p \zeta_p$ . Эти системы рассогласованы на малые углы  $\gamma_{\xi_a}$ ,  $\gamma_{\eta_a}$ ,  $\gamma_{\zeta_a}$ .

В соответствии с формулами (3.131) — (3.133) можно матрицу  $C_{ap} = C_{pa}^T$  представить в виде

$$C_{ap} = E - \tilde{\gamma}_a, \quad (6.275)$$

где  $E$  — единичная матрица, а  $\tilde{\gamma}_a$  есть кососимметричная матрица вида

$$\tilde{\gamma}_a = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{\zeta_a} & -\gamma_{\eta_a} \\ -\gamma_{\zeta_a} & 0 & \gamma_{\xi_a} \\ \gamma_{\eta_a} & -\gamma_{\xi_a} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.276)$$

Таким образом, в действительности (5.63) нужно представить в виде

$$\tilde{C}_{\Gamma} = C_{Kp} \tilde{C}_{a\Gamma} = C_{Ka} C_{ap} \tilde{C}_{a\Gamma}. \quad (6.277)$$

Варьируя (6.277) около значений  $\gamma_{\xi_a} = \gamma_{\eta_a} = \gamma_{\zeta_a} = 0$ , получим

$$\Delta C_{K\Gamma} = C_{Ka} \Delta C_{ap} C_{a\Gamma} + C_{Ka} \Delta C_{a\Gamma}, \quad (6.278)$$

причем в соответствии с (6.275)  $\Delta C_{ap} = -\tilde{\gamma}_a$ . С учетом (5.62) формулу (6.278) перепишем в виде

$$\Delta C_{K\Gamma} = C_{K\Gamma} (C_{\Gamma a} \Delta C_{ap} C_{a\Gamma} + C_{\Gamma a} \Delta C_{a\Gamma}); \quad (6.279)$$

так как  $\Delta C_{ap}$  есть кососимметричная матрица  $-\tilde{\gamma}_a$ , а  $C_{\Gamma a} = C_{a\Gamma}^T$ , то в соответствии с общими формулами (3.109) и (3.110)

$$C_{\Gamma a} \Delta C_{ap} C_{a\Gamma} = -\tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_z & \gamma_y \\ \gamma_z & 0 & -\gamma_x \\ -\gamma_y & \gamma_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} = C_{\Gamma a} \begin{bmatrix} \gamma_{\xi_a} \\ \gamma_{\eta_a} \\ \gamma_{\zeta_a} \end{bmatrix}. \quad (6.280)$$

Матрица преобразования  $C_{\Gamma a}$  есть квадратная матрица (5.64). Развернем теперь фигурирующую в (6.279) матрицу  $C_{\Gamma a} \Delta C_{a\Gamma}$ , используя для этой цели общую формулу (3.103).

В соответствии с принятыми в гл. V обозначениями матрицу  $C_a$  в (3.103) следует обозначить через  $C_{a\Gamma}$ , а матрицу  $C_a^T$  — через  $C_{\Gamma a}$ . Таким образом, в левой части (3.103) стоит матрица  $C_{\Gamma a} \dot{C}_{a\Gamma}$ , но  $\Delta C_{a\Gamma} = \dot{C}_{a\Gamma} \Delta t$ , поэтому, полагая  $\dot{\lambda}_a \Delta t = \Delta \lambda_a$  и  $\dot{\varphi} \Delta t = \Delta \varphi$ , получим из (3.103) выражение

$$C_{\Gamma a} \Delta C_{a\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \Delta \lambda_a \sin \varphi & \Delta \lambda_a \cos \varphi \\ \Delta \lambda_a \sin \varphi & 0 & \Delta \varphi \\ -\Delta \lambda_a \cos \varphi & -\Delta \varphi & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.281)$$

С учетом (6.280) и (6.281) уравнение (6.279) можно представить в виде

$$\Delta C_{K\Gamma} = C_{K\Gamma} \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_z - \Delta \lambda_a \sin \varphi & \gamma_y + \Delta \lambda_a \cos \varphi \\ \gamma_z + \Delta \lambda_a \sin \varphi & 0 & -\gamma_x + \Delta \varphi \\ -\gamma_y - \Delta \lambda_a \cos \varphi & \gamma_x - \Delta \varphi & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.282)$$

где  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$  определяются в соответствии с (5.64) и (6.278) в виде

$$\begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_a & \cos \lambda_a & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda_a & -\sin \varphi \sin \lambda_a & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda_a & \cos \varphi \sin \lambda_a & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{\xi_a} \\ \gamma_{\eta_a} \\ \gamma_{\zeta_a} \end{bmatrix}, \quad (6.283)$$

а  $C_{K\Gamma}$  есть квадратная матрица в (5.58).

Формула (6.282) является общей, т. е. она справедлива для любых углов ориентации объекта  $\theta$ ,  $\gamma_S$ ,  $\psi_K$ .

В частном случае  $C_{K\Gamma}$  получается из (5.58) при  $\theta = \gamma_S = 0$  в виде

$$C_{K\Gamma} = \begin{bmatrix} \cos \psi_K & -\sin \psi_K & 0 \\ \sin \psi_K & \cos \psi_K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.284)$$

В этом частном случае матрицы, стоящие в правой части (6.282), легко перемножить. В полученной таким образом матрице  $\Delta C_{\text{КГ}}$  отберем элементы  $c_{\text{КГ}}^{(ij)}$ , фигурирующие в (6.273). В результате получим следующие выражения для ошибок  $\Delta\vartheta$ ,  $\Delta\gamma_S$ ,  $\Delta\psi_{\text{К}}$  в ориентации объекта:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\vartheta &= -\{(\gamma_x - \Delta\varphi) \cos \psi_{\text{К}} - (\gamma_y + \Delta\lambda_a \cos \varphi) \sin \psi_{\text{К}}\} = -\gamma_x, \\ \Delta\gamma_S &= -\{(\gamma_x - \Delta\varphi) \sin \psi_{\text{К}} + (\gamma_y + \Delta\lambda_a \cos \varphi) \cos \psi_{\text{К}}\} = -\gamma_Y, \\ \Delta\psi_{\text{К}} &= \gamma_z + \Delta\lambda_a \sin \varphi = \gamma_Z. \end{aligned} \right\} \quad (6.285)$$

В правой части (6.285)  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$  являются проекциями векторов ошибок в положении приборного трехгранника  $\xi_p \eta_p \zeta_p$  и расчетного трехгранника  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  на оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , связанного с объектом трехгранника  $XYZ$ . Первый вектор ошибок задается своими проекциями  $\gamma_{\xi_a}$ ,  $\gamma_{\eta_a}$ ,  $\gamma_{\zeta_a}$  на оси опорного абсолютного (инерциального) трехгранника  $\xi_a \eta_a \zeta_a$  и он обусловлен собственным дрейфом гиросплатформы и неточной начальной выставкой. Второй вектор ошибок задается проекциями  $-\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda_a \cos \varphi$ ,  $\Delta\lambda_a \sin \varphi$  (см. п. 6.1.4) на оси географического трехгранника  $xyz$  и он обусловлен ошибками  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda_a$  инерциальной системы в определении координат местоположения объекта.

#### § 6.4. Уравнения ошибок бесплатформенной инерциальной системы

**6.4.1. Уравнения ошибок ориентации.** Уравнения ошибок ориентации будем составлять для бесплатформенной инерциальной системы, которая реализована по второму варианту алгоритма, изложенному в п. 5.5.1. По этому варианту алгоритма ориентация связанного с объектом трехгранника  $XYZ$  в инерциальном пространстве устанавливается вычислением матрицы направляющих косинусов  $C_{\text{ак}}$ . Элементы этой матрицы находятся решением системы линейных уравнений, которые в матричной форме записываются в виде (см. (3.106))

$$\dot{C}_{\text{ак}} = C_{\text{ак}} \check{\omega}_{\text{К}}, \quad (6.286)$$

где в соответствии с (3.104) кососимметричная матрица  $\check{\omega}_{\text{К}}$  имеет вид

$$\check{\omega}_{\text{К}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_Z & \omega_Y \\ \omega_Z & 0 & -\omega_X \\ -\omega_Y & \omega_X & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.287)$$

Компоненты  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  абсолютной угловой скорости трехгранника  $XYZ$  определяются гироскопами. Уравнение ошибок ориентации в матричной форме получается варьированием

уравнения (6.286). Выполняя эту операцию, получим

$$\Delta \dot{C}_{\text{ак}} = \Delta C_{\text{ак}} \check{\omega}_{\text{К}} + C_{\text{ак}} \delta \check{\omega}_{\text{К}}. \quad (6.288)$$

Кососимметричную матрицу ошибок  $\delta \check{\omega}_{\text{К}}$  будем записывать в виде

$$\delta \check{\omega}_{\text{К}} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\omega_{3\text{К}} & \delta\omega_{2\text{К}} \\ \delta\omega_{3\text{К}} & 0 & -\delta\omega_{1\text{К}} \\ -\delta\omega_{2\text{К}} & \delta\omega_{1\text{К}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.289)$$

С учетом (4.116) эквивалентные смещения нулей гироскопов имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega_{1\text{К}} &= \omega_x \delta h_\omega + \delta\omega_x, \\ \delta\omega_{2\text{К}} &= \omega_y \delta h_\omega + \delta\omega_y, \\ \delta\omega_{3\text{К}} &= \omega_z \delta h_\omega + \delta\omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.290)$$

В уравнении (6.288) элементы матриц  $C_{\text{ак}}$ ,  $\check{\omega}_{\text{К}}$  и  $\delta \check{\omega}_{\text{К}}$  считаются известными функциями времени, поэтому (6.288) представляют в компактной записи систему девяти линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка. Из решений этой системы уравнений находим ошибки в определении девяти направляющих косинусов. При решении такой системы следует задать начальные условия, т. е. значения матрицы ошибок  $\Delta C_{\text{ак}}$  при  $t = 0$ , т. е.  $\Delta C_{\text{ак}}(0)$ . Элементы  $\Delta c_{\text{ак}}^{(ij)}(0)$  в этой матрице определяют ошибки начальной выставки бесплатформенной инерциальной системы. Решение матричного дифференциального уравнения (6.288) можно свести к квадратуре.

Для этой цели сделаем замену переменных, положив

$$\Delta C_{\text{ак}} = \Delta B C_{\text{ак}}. \quad (6.291)$$

Если подставить (6.291) в матричное уравнение (6.288), то в результате получим

$$\Delta \dot{B} C_{\text{ак}} + \Delta B (\dot{C}_{\text{ак}} - C_{\text{ак}} \check{\omega}_{\text{К}}) = C_{\text{ак}} \delta \check{\omega}_{\text{К}}. \quad (6.292)$$

Но в соответствии с (6.286) выражение, стоящее в левой части уравнения в скобках, тождественно равно нулю. Учитывая это обстоятельство и умножая обе части уравнения (6.292) справа на матрицу  $C_{\text{ак}}^{-1} = C_{\text{ак}} = C_{\text{Ка}}$ , получим

$$\Delta \dot{B} = C_{\text{ак}} \delta \check{\omega}_{\text{К}} C_{\text{Ка}}. \quad (6.293)$$

Матрицу, стоящую в правой части полученного уравнения, с учетом общих выражений (3.109) и (3.116) можно представить

в виде кососимметричной матрицы

$$\delta\ddot{\omega}_a = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\omega_{3a} & \delta\omega_{2a} \\ \delta\omega_{3a} & 0 & -\delta\omega_{1a} \\ -\delta\omega_{2a} & \delta\omega_{1a} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \delta\omega_{1a} \\ \delta\omega_{2a} \\ \delta\omega_{3a} \end{bmatrix} = C_{ак} \begin{bmatrix} \delta\omega_{1к} \\ \delta\omega_{2к} \\ \delta\omega_{3к} \end{bmatrix}. \quad (6.294)$$

Здесь  $\delta\omega_{1a}$ ,  $\delta\omega_{2a}$ ,  $\delta\omega_{3a}$  суть проекции вектора ошибок гиросистем на оси  $\xi_a$ ,  $\eta_a$ ,  $\zeta_a$  абсолютной (инерциальной) системы координат  $\xi_a\eta_a\zeta_a$ . В исходном виде этот вектор задан своими проекциями  $\delta\omega_{1к}$ ,  $\delta\omega_{2к}$ ,  $\delta\omega_{3к}$  на оси  $X, Y, Z$  связанной системы координат  $XYZ$ .

Интегрируя уравнения (6.293) и учитывая (6.294), получим

$$\Delta B(t) = \Delta C_{ак}(0) C_{ка}(0) + \int_0^t \delta\ddot{\omega}_a(\tau) d\tau. \quad (6.295)$$

Первое слагаемое правой части (6.295) определяет в соответствии с (6.291) матрицу  $\Delta B(0)$ . Если обе части матричного уравнения (6.295) умножить справа на матрицу  $C_{ак}(t)$ , то с учетом (6.291) получим решение уравнения (6.288) в виде

$$\Delta C_{ак}(t) = \Delta C_{ак}(0) C_{ка}(0) C_{ак}(t) + \left( \int_0^t \delta\ddot{\omega}_a(\tau) d\tau \right) C_{ак}(t). \quad (6.296)$$

Нетрудно видеть, что при  $t=0$   $\Delta C_{ак}(t) = \Delta C_{ак}(0)$ . Первое слагаемое правой части определяет ошибки в направляющих косинусах, зависящие от ошибок в начальной выставке, второе слагаемое — от инструментальных ошибок гироскопических датчиков абсолютной угловой скорости.

При анализе уравнений (3.107) указывалось, что достаточно решить, например, первые две группы уравнений и таким образом найти направляющие косинусы осей  $\xi_a$ ,  $\eta_a$ . Направляющие косинусы оси  $\zeta_a$  могут быть затем определены из векторного равенства  $\zeta_a^0 = \xi_a^0 \times \eta_a^0$ . Компонентами единичных векторов  $\xi_a^0$  и  $\eta_a^0$  в системе координат  $XYZ$  являются  $c_{ак}^{(11)}$ ,  $c_{ак}^{(12)}$ ,  $c_{ак}^{(13)}$  и  $c_{ак}^{(21)}$ ,  $c_{ак}^{(22)}$ ,  $c_{ак}^{(23)}$  соответственно, тогда компоненты вектора  $\zeta_a^0$  будут определяться выражениями

$$\left. \begin{aligned} c_{ак}^{(31)} &= c_{ак}^{(12)} c_{ак}^{(23)} - c_{ак}^{(13)} c_{ак}^{(22)}, \\ c_{ак}^{(32)} &= c_{ак}^{(13)} c_{ак}^{(21)} - c_{ак}^{(11)} c_{ак}^{(23)}, \\ c_{ак}^{(33)} &= c_{ак}^{(11)} c_{ак}^{(22)} - c_{ак}^{(12)} c_{ак}^{(21)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.297)$$

Варьированием этих выражений получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta c_{ак}^{(31)} &= \Delta c_{ак}^{(12)} c_{ак}^{(23)} + c_{ак}^{(12)} \Delta c_{ак}^{(23)} - \Delta c_{ак}^{(13)} c_{ак}^{(22)} - c_{ак}^{(13)} \Delta c_{ак}^{(22)}, \\ \Delta c_{ак}^{(32)} &= \Delta c_{ак}^{(13)} c_{ак}^{(21)} + c_{ак}^{(13)} \Delta c_{ак}^{(21)} - \Delta c_{ак}^{(11)} c_{ак}^{(23)} - c_{ак}^{(11)} \Delta c_{ак}^{(23)}, \\ \Delta c_{ак}^{(33)} &= \Delta c_{ак}^{(11)} c_{ак}^{(22)} + c_{ак}^{(11)} \Delta c_{ак}^{(22)} - \Delta c_{ак}^{(12)} c_{ак}^{(21)} - c_{ак}^{(12)} \Delta c_{ак}^{(21)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.297a)$$

Если третья строка матрицы  $C_{ак}$  находится по формулам (6.297), то в матричном равенстве (6.296) следует определить только элементы первых двух строк матрицы  $\Delta C_{ак}$ , элементы третьей строки  $\Delta C_{ак}$  будут найдены по формулам (6.297a).

**6.4.2. Уравнения ошибок в определении проекций кажущегося ускорения на оси инерциального трехгранника.** В бесплатформенной инерциальной системе оси чувствительности акселерометров устанавливаются параллельно осям  $X, Y, Z$  связанного с объектом трехгранника  $XYZ$ . Поэтому они измеряют проекции  $a_X, a_Y, a_Z$  кажущегося ускорения на указанные оси. Вследствие этого инструментальные ошибки акселерометров (эквивалентные сдвиги нулей) могут быть записаны в форме

$$\left. \begin{aligned} \delta a_{1к} &= a_X \delta h_a + \delta a_X, \\ \delta a_{2к} &= a_Y \delta h_a + \delta a_Y, \\ \delta a_{3к} &= a_Z \delta h_a + \delta a_Z, \end{aligned} \right\} \quad (6.298)$$

где, как и прежде,  $\delta h_a$  обозначает ошибку масштабного коэффициента, а  $\delta a_X, \delta a_Y, \delta a_Z$  — сдвиг нуля соответствующего акселерометра.

Проекции  $a_{\xi_a}, a_{\eta_a}, a_{\zeta_a}$  кажущегося ускорения на оси  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$  инерциального трехгранника  $\xi_a\eta_a\zeta_a$  вычисляются по формуле (5.79). Ошибки в определении величин  $a_{\xi_a}, a_{\eta_a}, a_{\zeta_a}$  получаются варьированием (5.79) с учетом формул (6.298). Таким образом, получим

$$\begin{bmatrix} \Delta a_{\xi_a} \\ \Delta a_{\eta_a} \\ \Delta a_{\zeta_a} \end{bmatrix} = \delta C_{ак} \begin{bmatrix} a_X \\ a_Y \\ a_Z \end{bmatrix} + C_{ак} \begin{bmatrix} \delta a_{1к} \\ \delta a_{2к} \\ \delta a_{3к} \end{bmatrix}. \quad (6.299)$$

Здесь для матрицы  $\Delta C_{ак}$ , определяемой (6.296), принято новое обозначение  $\delta C_{ак}$ .

Новым обозначением мы хотим подчеркнуть, что для последующих уравнений ошибок  $\delta C_{ак}$  должна рассматриваться как входное возмущение. Действительно, весь последующий анализ ошибок нужно вести по уравнениям предыдущего пункта, начиная с уравнения (6.227). Только в уравнениях (6.227) и во всех последующих уравнениях величины  $\Delta a_{\xi_a}, \Delta a_{\eta_a}, \Delta a_{\zeta_a}$  нужно определять не по уравнениям (6.224)–(6.226), а по формулам (6.299). Но величины  $\Delta a_{\xi_a}, \Delta a_{\eta_a}, \Delta a_{\zeta_a}$  находятся в правых частях указанных выше уравнений ошибок и поэтому рассматриваются там как входные возмущения.

**6.4.3. Уравнения ошибок инерциальной системы полуаналитического типа с вычислителем направляющих косинусов платформы.** Алгоритм такой системы был рассмотрен в п. 5.5.3. Для составления уравнений ошибок можно величины  $\omega_{x_c}''$  и  $\omega_{y_c}''$  опре-

делять не по формулам (5.83), а по соотношениям (6.201). Тогда уравнения ошибок гиросплатформы, акселерометров и интеграторов скорости для рассматриваемой системы будут точно такими, как в п. 2.1 настоящей главы, т. е. будут совпадать с уравнениями (6.205) и (6.207). Из уравнений (6.205) и (6.207) были получены уравнения (6.214). При решении уравнений (6.214) получаем углы  $\gamma_{x_c}''$  и  $\gamma_{y_c}''$ , которые определяют отклонение гиросплатформы от плоскости гравитационного горизонта. Далее, из третьего уравнения (6.205) простым интегрированием — угол  $\gamma_{z_c}''$ , определяющий уход гиросплатформы в «азимуте», и, наконец, из уравнений (6.207) простым интегрированием находим  $\Delta\omega_{x_c}''$  и  $\Delta\omega_{y_c}''$ . Последние величины могли использоваться для нахождения ошибок  $\Delta\lambda_a$ ,  $\Delta\varphi''$ ,  $\Delta\chi_c''$ . Во-первых, варьированием (5.88) получаем выражения \*)

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi'' &= \frac{\Delta c_{ac}^{(33)}}{\cos \varphi''}, \\ \Delta\lambda_a &= \frac{\Delta c_{ac}^{(23)} \cos \chi_c'' - \Delta c_{ac}^{(13)} \sin \lambda_a}{\cos \varphi''}, \\ \Delta\chi_c'' &= \frac{\Delta c_{ac}^{(32)} \cos \chi_c'' - \Delta c_{ac}^{(31)} \sin \chi_c''}{\cos \varphi''}. \end{aligned} \right\} \quad (6.300)$$

Ошибки в нахождении элементов  $c_{ac}^{(ij)}$  матрицы  $C_{ac}$  могут быть определены из решения дифференциальных уравнений, которые в матричной форме получаются варьированием (5.89). Таким образом,

$$\dot{\Delta C}_{ac} = \Delta C_{ac} \dot{\omega}_c + C_{ac} \delta \dot{\omega}_c, \quad (6.301)$$

где кососимметричная матрица  $\dot{\omega}_c$  определяется формулой (5.90).

Полученное уравнение формально совпадает с (6.288), поэтому решения (6.301) (по аналогии с (6.296)) можно записать в виде

$$\Delta C_{ac}(t) = \Delta C_{ac}(0) C_{ac}(0) C_{ac}(t) + \left( \int_0^t \delta \dot{\omega}_c(\tau) d\tau \right) C_{ac}(t). \quad (6.302)$$

В этом выражении  $\delta\omega_{x_c}''$  и  $\delta\omega_{y_c}''$  совпадают с полученными ранее ошибками  $\Delta\omega_{x_c}''$  и  $\Delta\omega_{y_c}''$ . Из матричного уравнения нужно определить элементы второй и третьей строк. Ошибка в элементе  $c_{ac}^{(13)}$  определяется затем из выражения

$$\Delta c_{ac}^{(13)} = c_{ac}^{(21)} \Delta c_{ac}^{(32)} + \Delta c_{ac}^{(21)} c_{ac}^{(32)} - c_{ac}^{(22)} \Delta c_{ac}^{(31)} - \Delta c_{ac}^{(21)} c_{ac}^{(32)}. \quad (6.303)$$

Таким образом, выражения для определения ошибок  $\Delta\lambda_a$ ,  $\Delta\varphi''$ ,  $\Delta\chi_c''$  найдены.

\*) Предлагаем читателю сравнить с (6.272).

*Сферическим треугольником* называется фигура, образованная тремя дугами больших кругов, попарно соединяющих три точки на сфере (рис. П. 1). На рис. П. 1  $a, b, c$  — стороны сферического треугольника,  $A, B, C$  — вершины и углы при вершинах сферического треугольника,  $R$  — радиус соответствующей сферы. Площадь сферического треугольника  $\sigma = R^2 (A + B + C - \pi)$ . Сферический избыток  $A + B + C - \pi = \sigma/R^2$  является мерой телесного угла, опирающегося на сферический треугольник. Сумма углов сферического треугольника больше  $180^\circ$ , т. е.  $A + B + C > \pi$ .

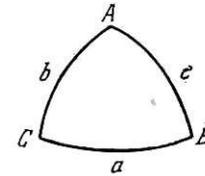


Рис. П.1. Сферический треугольник.

Приведем основные формулы для сферического треугольника.

1. Теорема синусов:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

2. Теорема косинусов:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

3. Теорема о пяти элементах:

$$\sin a \cos B = -\sin b \cos c \cos A + \cos b \sin c.$$

Теоремы двойственности:

$$4. \quad \sin A \cos b = \sin B \cos C \cos a + \cos B \sin C,$$

$$5. \quad \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

$$6. \quad \sin A \operatorname{ctg} B = \sin c \operatorname{ctg} C - \cos c \cos A.$$

1. Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации (автономные системы).— М.: Наука, 1966.
2. Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации (корректируемые системы).— М.: Наука, 1967.
3. Аппель П. Теоретическая механика. В 2 томах.— М.: Физматгиз, 1960.
4. Арлей Н., Бух Н. Введение в теорию вероятности и математическую статистику.— М.: ИЛ, 1951.
5. Белавин О. В., Зерова М. В. Современные средства радионавигации.— М.: Советское радио, 1965.
6. Бессекретный В. А., Фабрикант Е. А. Динамический синтез систем гироскопической стабилизации.— М.: Судостроение, 1968.
7. Блажко С. Н. Курс сферической астрономии.— М.: Гостехиздат, 1954.
8. Броксмейер И. Ф. Системы инерциальной навигации.— М.: Судостроение, 1967.
9. Бромберг П. В. Матричные методы в теории импульсного и релейного регулирования.— М.: Наука, 1967.
10. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов.— М.: Гостехиздат, 1955.
11. Булгаков Б. В. Колебания.— М.: Гостехиздат, 1954.
12. Выгодский Н. Я. Дифференциальная геометрия.— М.: Гостехиздат, 1949.
- 13а. Пельпор Д. С. Теория гироскопов и гиросtabilизаторов.— М.: Высшая школа, 1971.
- 13б. Бромберг П. В., Михалев И. А., Никитин Е. А., Бауман В. А., Балашова А. А. Гироскопические приборы и системы. /Под ред. Д. С. Пельпора.— М.: Высшая школа, 1971.
- 13в. Никитин Е. А., Шестов С. А., Матвеев В. А. Элементы гироскопических приборов. /Под ред. Д. С. Пельпора.— М.: Высшая школа, 1972.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Гостехиздат, 1953.
15. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятности.— М.: ГИТТЛ, 1950.
16. Горенштейн И. А., Шульман И. А. Инерциальные навигационные системы.— М.: Машиностроение, 1970.
17. Дубошин Г. Н. Теория притяжения.— М.: Физматгиз, 1961.
18. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы.— М.: Наука, 1968.
19. Инерциальная навигация /Под ред. О'Доннелла.— М.: Наука, 1968.
20. Инерциальная система управления /Под ред. Питмана.— М.: Воениздат, 1964.
21. Ишлинский А. Ю. Механика специальных гироскопических систем.— Киев: Изд-во АН УССР, 1952.
22. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем.— М.: АН СССР, 1963.
23. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в механических вопросах.— М.: АН СССР, 1963.
24. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики.— М.: ГИТТЛ, 1933.
25. Липтон Н. Начальная выставка инерциальной системы на подвижном основании.— М.: Наука, 1971.
- 26а. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложение к задачам механики.— М.: Гостехиздат, 1950.
- 26б. Лурье А. И. Аналитическая механика.— М.: Физматгиз, 1961.
27. Лэнинг Д. Х., Беттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления.— М.: ИЛ, 1958.
28. Мак-Клур К. Л. Теория инерциальной навигации.— М.: Наука, 1964.
29. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.— М.: Гостехиздат, 1956.
30. Михайлов А. А. Курс гравиметрии в теории фигуры Земли.— М.: Ред. бюро ГУГК при СНК СССР, 1939.
31. Никитин Е. А., Балашова А. А. Проектирование дифференцирующих и интегрирующих гироскопов и акселерометров.— М.: Машиностроение, 1969.
32. Пельпор Д. С. Теория гироскопических стабилизаторов.— М.: Машиностроение, 1965.
33. Пельпор Д. С., Колосов Ю. А., Рахтенко Е. Р. Расчет и проектирование гироскопических стабилизаторов.— М.: Машиностроение, 1972.
34. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления.— М.: ГИТТЛ, 1957.
35. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии.— М.: Гостехиздат, 1956.
36. Рилли У., Холлистер У., Денхард У. Теория проектирования и испытаний гироскопов.— М.: Мир, 1972.
37. Ройтенберг Я. Н. Гироскопы.— М.: Наука, 1966.
38. Селезнев В. П. Навигационные устройства.— М.: Оборонгиз, 1966.
39. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.— М.: ГИТТЛ, 1938.
40. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний.— М.: Гостехиздат, 1951.
41. Тузов Г. И. Выделение и обработка информации в доплеровских системах.— М.: Советское радио, 1967.
42. Фридлиндер Г. О. Инерциальные системы навигации.— М.: Физматгиз, 1961.
43. Фридлиндер Г. О., Козлов М. С. Авиационные гироскопические приборы.— М.: Оборонгиз, 1961.
44. Эрике К. Космический полет. Т. 1.— М.: Физматгиз, 1960.
45. Эскобал П. Методы астродинамики.— М.: Мир, 1971.

Предисловие . . . . .	3
<b>Глава I. Фигура Земли, поле силы тяжести Земли, координаты местоположения . . . . .</b>	
§ 1.1. Фигура Земли и координаты точек на ее поверхности . . . . .	5
1.1.1. Геоид (5). 1.1.2. Земной сфероид (5). 1.1.3. Координаты точек на земном сфероиде (6). 1.1.4. Семейство $h$ -эллипсоидов вращения (7).	
§ 1.2. Поле силы тяжести Земли и уровенные поверхности . . . . .	11
1.2.1. Гравитационное поле Земли (11). 1.2.2. Поле силы тяжести (16). 1.2.3. Уровенные поверхности поля силы тяжести (17). 1.2.4. Ускорения сил тяжести и тяготения на $h$ -эллипсоиде (20). 1.2.5. Аномалии силы тяжести и уклонения вертикали (24). 1.2.6. Сопровождающие трехгранники (25).	
§ 1.3. Координаты местоположения и формулы счисления . . . . .	27
1.3.1. Относительные геоцентрические координаты (27). 1.3.2. Формулы счисления прямоугольных координат (30). 1.3.3. Формулы счисления географических координат (31). 1.3.4. Счисление гравитационных координат (34). 1.3.5. Счисление геоцентрических координат (38). 1.3.6. Счисление абсолютных координат (38). 1.3.7. Другие модели криволинейных координат (41). 1.3.8. Угловые скорости сопровождающих трехгранников (43). 1.3.9. Ортодромические системы координат (46).	
§ 1.4. Сферическая модель Земли . . . . .	57
1.4.1. Геометрические параметры модели (57). 1.4.2. Модели полей тяготения и силы тяжести (59). 1.4.3. Формулы счисления для сферической модели Земли (61).	
<b>Глава II. Некоторые вопросы геометрии кривых на поверхности</b>	
§ 2.1. Траектории на поверхности . . . . .	64
2.1.1. Общие сведения (64). 2.1.2. Сопровождающий траекторный трехгранник (67). 2.1.3. Геодезический трехгранник и накопление ошибок в ориентации его осей в азимуте (68).	
<b>Глава III. Ускорение и его представление в различных координатных системах . . . . .</b>	71
§ 3.1. Инерциальная система координат . . . . .	71
3.1.1. Бариецентрическая инерциальная система координат (71). 3.1.2. Движение в геоцентрической системе координат (72).	
§ 3.2. Абсолютное ускорение . . . . .	78
3.2.1. Выражения проекций вектора $W$ абсолютного ускорения на оси произвольно ориентированной системы координат (78). 3.2.2. Выражения проекций вектора $W$ абсолютного ускорения на оси координат через проекции земной относительной скорости $v$ на те же оси (80).	

§ 3.3. Кажущееся ускорение в некоторых координатных системах . . . . .	83
3.3.1. Инерциальная система координат (83). 3.3.2. Экваториальная система координат, жестко связанная с Землей (84). 3.3.3. Горизонтальные системы координат (85). 3.3.4. Координатные системы сферической модели Земли (85).	
§ 3.4. Ускорение в косоугольных системах координат . . . . .	98
3.4.1. Контравариантные составляющие (98). 3.4.2. Ковариантные составляющие (103). 3.4.3. Некоторые свойства матрицы преобразования (105).	
§ 3.5. Преобразование координатных систем . . . . .	111
3.5.1. Преобразование координатных систем поворотом (111). 3.5.2. Малые рассогласования координатных систем (117). 3.5.3. Составляющие некоторых векторов в моделирующей системе координат (119).	
<b>Глава IV. Чувствительные элементы инерциальных систем . . . . .</b>	122
§ 4.1. Линейный осевой акселерометр . . . . .	122
4.1.1. Принцип действия и уравнения движения (122). 4.1.2. Условия квазистатического измерения (126). 4.1.3. Измерение вектора кажущегося ускорения (131).	
§ 4.2. Интегрирующее устройство . . . . .	132
§ 4.3. Однокомпонентный гироскопический измеритель абсолютной угловой скорости . . . . .	134
§ 4.4. Гиросtabilизированные платформы . . . . .	135
<b>Глава V. Алгоритмы инерциальных систем навигации . . . . .</b>	140
§ 5.1. Классификация инерциальных систем . . . . .	140
5.1.1. Общие положения (140). 5.1.2. Классификация инерциальных систем (141).	
§ 5.2. Инерциальные системы полуаналитического типа . . . . .	143
5.2.1. Инерциальная система с географическим навигационным и географическим опорным трехгранниками (143). 5.2.2. Инерциальная система с географическим навигационным и азимутально-свободным опорным трехгранниками (145). 5.2.3. Инерциальная система с ортодромическим навигационным и ортодромическим опорным трехгранниками (150). 5.2.4. Инерциальная система с ортодромическим навигационным и азимутально-свободным опорным трехгранниками (162). 5.2.5. Обобщенный алгоритм инерциальной системы (166).	
§ 5.3. Инерциальные системы аналитического типа . . . . .	178
§ 5.4. Бесплатформенные инерциальные системы . . . . .	185
5.4.1. Инерциальная система с однокомпонентными гироскопами абсолютной угловой скорости (185). 5.4.2. Инерциальная система со свободными гироскопами (188).	
§ 5.5. Полуаналитическая инерциальная система с непосредственным определением ориентации опорного трехгранника . . . . .	190
<b>Глава VI. Уравнения ошибок . . . . .</b>	194
§ 6.1. Система с ориентацией опорного трехгранника по географической вертикали . . . . .	194
6.1.1. Общие положения (194). 6.1.2. Уравнения ошибок инерциальной системы с географическими опорным и навигационным трехгранниками (196). 6.1.3. Анализ уравнений ошибок для неподвижного объекта, находящегося на экваторе (208). 6.1.4. Расщепление уравнений ошибок (221). 6.1.5. Уравнения ошибок инерциальной системы с географическим навигационным и азимутально-свободным опорным трехгранниками (229). 6.1.6. Уравнения ошибок инерциальной системы с ортодромическими опорным и навигационным трехгранниками (234). 6.1.7. Уравнения ошибок инерциальной системы с ортодромическим навигационным и азимутально-свободным опорным трехгранниками (240). 6.1.8. Уравнения ошибок инерциальной системы с тремя акселерометрами (241). 6.1.9. Учет ошибок в установке осей чувствительности измерительных элементов (262).	

§ 6.2. Система с ориентацией опорного трехгранника по гравитационной вертикали . . . . .	255
6.2.1. Уравнения ошибок инерциальной системы с гравитационным опорным и навигационным трехгранниками (255). 6.2.2. Уравнения ошибок инерциальной системы с гравитационным навигационным и азимутально-свободным опорным трехгранниками (262). 6.2.3. Уравнения ошибок инерциальной системы с гравитационным ортодромическим навигационным трехгранником (266).	
§ 6.3. Уравнения ошибок инерциальной системы аналитического типа . . . . .	268
6.3.1. Уравнения ошибок (268). 6.3.2. Анализ уравнений ошибок неподвижного в абсолютном пространстве объекта (273). 6.3.3. Преобразование ошибок в географическую систему координат (279).	
§ 6.4. Уравнения ошибок бесплатформенной инерциальной системы . . . . .	284
6.4.1. Уравнения ошибок ориентации (284). 6.4.2. Уравнения ошибок в определении проекций кажущегося ускорения на оси инерциального трехгранника (287). 6.4.3. Уравнения ошибок инерциальной системы полуаналитического типа с вычислителем направляющих косинусов платформы (287).	
П р и л о ж е н и е. Элементы сферической тригонометрии . . . . .	289
Литература . . . . .	290

Введение индекса ( $i$ )	стр 40	} 85
Введение индекса ( $m$ )	стр 78	
Введение угла $\chi_m$	стр ↑	
Положительное $\chi_m > 0$	стр 87	
$\chi_m$ —	стр 95	

Павел Владимирович Бромберг

## ТЕОРИЯ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ НАВИГАЦИИ

М., 1979 г., 296 стр. с илл.

Редактор А. А. Могилевский

Техн. редактор Л. В. Лихачева

Корректор Л. Н. Боровина

ИБ № 11462

Сдано в набор 30.03.79. Подписано к печати 06.07.79.

Т-11245. Бумага  $60 \times 90 \frac{1}{16}$ , тип. № 1.

Обыкновенная гарнитура. Высокая печать.

Усл. печ. л. 18,5. Уч.-изд. л. 18,49. Тираж 2400 экз.

Заказ № 1737. Цена книги 2 р. 10 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука» 121099,

Москва Г-99, Шубинский пер., 10

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

ВЫЙДУТ В СВЕТ  
В 1980 Г.:

*Бахшиян Б. Ц., Назиров Р. Р., Эльясберг П. Е.,* Определение и коррекция движения.

*Белоцерковский С. М., Кочетков Ю. А., Красовский А. А., Новицкий В. В.,* Введение в аэроавтоупругость.

*Максимов Г. Ю.,* Теоретические основы разработки космических аппаратов.

Серия «Механика космического полета»

*Егоров В. А., Гусев Л. И.,* Динамика перелетов между Землей и Луной.

Пр  
Лите

Введ

Введ

Виз

Поис