

А. В. ЗЕНКОВ

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
ДЛЯ ИТ-СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ**

Учебное пособие

Москва Вологда
«Инфра-Инженерия»
2022

УДК 512:517.5
ББК 22.19
3-56

Рецензенты:

доктор педагогических наук, профессор кафедры информационных технологий и статистики Уральского государственного экономического университета *Плещёв Владимир Васильевич*;
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры шахматного искусства и компьютерной математики Уральского государственного экономического университета *Мельников Юрий Борисович*

Зенков, А. В.

3-56 Вычислительная математика для IT-специальностей : учебное пособие / А. В. Зенков. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2022. – 128 с. : ил., табл.
ISBN 978-5-9729-0883-7

Учебное пособие соответствует 1-семестровому лекционному курсу, читаемому автором для студентов IT-специальностей. Рассмотрены основные источники погрешностей, действия с приближенными числами, интерполяция, численное дифференцирование и интегрирование, численное решение уравнений, систем уравнений и обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены индивидуальные задания для практических занятий и лабораторных работ, которые предполагаются к выполнению в пакете численных и символьных расчетов Mathcad.

Для студентов прикладного бакалавриата по направлениям «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», «Информатика и вычислительная техника», «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и «Бизнес-информатика».

УДК 512:517.5
ББК 22.19

На обложке приведён фрагмент статьи Э. Варинга 1779 г., в которой впервые была опубликована формула интерполяционного полинома Лагранжа. Этот полином играет важную роль в нашей книге.

Статья находится в открытом доступе по адресу <https://www.jstor.org/stable/106408>

ISBN 978-5-9729-0883-7

© Зенков А. В., 2022

© Издательство «Инфра-Инженерия», 2022

© Оформление. Издательство «Инфра-Инженерия», 2022

Предисловие

Учебное пособие соответствует 1-семестровому (15 недель) лекционному курсу Вычислительной математики, читаемому автором для студентов прикладного бакалавриата по направлениям «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», «Информатика и вычислительная техника», «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и «Бизнес-информатика» Уральского федерального университета и содержит материал, который реально освоить за 2 часа лекций и 2 часа лабораторных работ в неделю, отводимые учебным планом на данный предмет.

Каждая глава заканчивается индивидуальными заданиями для практических занятий (после I главы) и лабораторных работ, которые предполагаются к выполнению в пакете численных и символьных расчетов Mathcad. Предварительное знание его не предполагается; памятка по Mathcad (Приложение I) и образец выполнения в Mathcad лабораторной работы по интерполированию функций (Приложение II) позволят быстро овладеть базовыми навыками расчетов в этом интуитивно понятном пакете.

Компетенции, которыми овладевают студенты при изучении данного курса:

Знать

- Сравнительные преимущества и недостатки аналитических и численных методов решения математических задач.

- Основные ситуации, в которых требуется использование приближенных методов решения типовых математических задач.

Уметь

- Оценить точность результата, полученного численным методом.
- Выбрать подходящий метод приближенных вычислений (с учетом объема вычислений, необходимых для достижения требуемой точности результата).

- Использовать математический аппарат приближенных вычислений в самостоятельных исследованиях.

Владеть

- Методами численного решения типовых математических задач.

- Базовыми навыками реализации численных методов в пакете Mathcad.

Учебная литература по вычислительной математике необозримо обширна. В конце книги приведены источники, повлиявшие на её содержание.

Автор просит присылать сообщения о найденных недостатках по адресу zenkow@mail.ru

Введение

Вычислительная математика (численные методы, вычислительные методы, методы вычислений) – раздел математики, изучающий приближенные, численные способы решения математических задач, которые либо не решаются, либо трудно решаются точными, аналитическими методами (вычислительная математика в узком смысле). Примерами таких задач являются численное решение уравнений, численные дифференцирование и интегрирование и др. Кроме перечисленного, к вычислительной математике (в широком смысле) относят вопросы, связанные с программированием и реализацией вычислительных алгоритмов на ЭВМ.

Из определения следует, что есть две группы математических методов: аналитические (доставляющие точный результат) и численные (результат – приближённый). Деление методов вычислений на аналитические и численные несколько условно и нуждается в уточнении.

Пример 1. При аналитическом решении квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ по известной формуле¹ $x_{1,2} = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) / (2a)$ в ответ входит корень $\sqrt{\dots}$. Если он не извлекается точно, то для получения численного значения корней потребуется численная процедура приближенного вычисления корня. Итак, результатом *аналитического* расчёта окажутся *приближённые* числа.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{\cos x}{x}.$$

Оно легко «решается» аналитически:

$$y(x) = C \exp \left\{ \int_{x_0}^x \frac{\cos t}{t} dt \right\},$$

но интеграл – «неберущийся», и вычислять его придется численно.

Итак, даже в тех случаях, когда можно далеко продвинуться в аналитическом решении задачи, не исключено применение на каком-либо этапе численных методов для получения ответа в практически удобном виде.

¹ Заметим, что это точная формула – в том смысле, что при ее выводе не делались какие-либо упрощения и огрубления. Вычисления по точным формулам – это аналитические вычисления. Ниже нам встретятся формулы численных расчетов, которые принципиально являются приближенными (при этом их погрешность можно оценить).

Часто аналитические методы называют «точными», а численные – «приближенными». Приведенные примеры показывают, что и аналитические методы могут приводить к приближенному результату.

Кроме того, аналитические методы могут быть приближенными по существу, оставаясь аналитическими – например, когда функция заменяется первыми слагаемыми ее ряда Тейлора.

При прочих равных условиях аналитическое решение задачи на ЭВМ выполняется гораздо медленнее, чем численное. Примерами математических пакетов, предназначенных как для аналитических (символьных), так и для численных расчётов, являются Maple, Mathematica, MATLAB, Mathcad.

Резюмируем сравнительные характеристики аналитических и численных методов:

Аналитические методы	Численные методы
I. Точность результатов	
Получаемые результаты обычно точны – с оговорками, сделанными выше	Результаты заведомо являются приближёнными
II. Универсальность	
Далеко не любая математическая задача может быть решена аналитически	Численно решается практически любая задача
III. Информативность решения	
Сравнительно велика; например, решение может выглядеть как функция, заданная аналитически (т.е. формулой), и с ней удобно производить дальнейшие математические преобразования	Сравнительно невелика; например, решение может выглядеть как функция, заданная таблично, и такой способ представления функции затрудняет работу с ней (позволяет лишь построить график по точкам)
IV. Скорость выполнения на ЭВМ (при прочих равных условиях)	
Сравнительно невелика	Сравнительно велика

Итак, аналитические и численные методы вычислений являются, скорее, взаимодополняющими, чем конкурирующими.

Контрольные вопросы

- 1) Что является предметом вычислительной математики (в узком и широком смысле)?
- 2) Каковы сравнительные преимущества и недостатки аналитических и численных методов решения математических задач?

ГЛАВА 1. ПОГРЕШНОСТИ

1. Источники погрешностей

Поскольку вычислительная математика отыскивает приближенное решение задач, не решаемых точно, такому решению всегда свойственна погрешность. Рассмотрим её источники.

1) Погрешность модели. Природа слишком сложна и многообразна, чтобы пытаться изучать ее во всей полноте присущих ей в том числе и малозначимых взаимосвязей. Любая (естественная) наука изучает не природу непосредственно, а те модели, которые создаются самой этой наукой для описания природных явлений. Модель – это идеализированное описание явления, в котором выявлены основные и игнорируются второстепенные свойства явления. Хорошая модель – это верный шарж, меткая карикатура на изучаемое явление. Естественно, что моделирование, сопровождаемое огрублением и упрощением, вносит погрешность в результат описания явления. Математическая модель создается на языке математики, но оценка погрешности математической модели есть прерогатива не математики, а той науки, в рамках которой изучается явление.

Заметим, что моделирование свойственно не только науке, оно пронизывает любой вид творчества. Писатель, создавая жизнеописание вымышленных героев (подчас очень объемное – см., например, «Войну и мир» Л. Толстого или «Жан-Кристоф» Р. Роллана), тоже занимается моделированием (но средствами искусства, а не науки).

2) Погрешность исходных данных. Как правило, математическая модель содержит некоторые параметры, зависящие от исходных данных. Поскольку последние определяются обычно из экспериментов, неизбежно сопровождаемых ошибками измерений, возникает погрешность исходных данных.

Возникает вопрос: не может ли погрешность исходных данных (пусть даже малая) непоправимо исказить результат? Иногда это, действительно, возможно – такие задачи называются некорректными (и это как раз многие задачи, представляющие практический интерес). Современная вычислительная математика выработала способы их регуляризации, т. е. замены некорректной задачи близкой к ней в некотором смысле корректной задачей, в которой малое изменение исходных данных приводит к малому изменению результата. Мы не можем подробно на этом останавливаться.

Погрешности в решении, обусловленные моделированием и исходными данными, называются неустранимыми. Они не зависят от математики и присутствуют, даже если решение поставленной математической задачи найдено точно.

Теперь рассмотрим устранимые погрешности. Полностью избавиться от них невозможно, но уменьшить их влияние в рамках математики вполне реально.

3) Погрешность метода. После того, как математическая модель создана, вычисления в рамках модели обычно можно выполнять по-разному. Сложная математическая задача заменяется более простой. Например, вычисление определенного интеграла заменяется вычислением интегральной суммы. При этом неизбежно возникает погрешность метода вычислений, которой в дальнейшем мы будем уделять большое внимание при рассмотрении конкретных численных методов.

4) Погрешность округления. Любые расчеты, выполняемые как вручную, так и с помощью вычислительной техники, производятся с конечным числом цифр, поэтому приходится прибегать к округлению промежуточных и окончательного ответа. Так возникает погрешность округления, которая может накапливаться в ходе вычислений (опасный процесс, способный обесценить результат вычислений!). Даже те результаты, которые получены точными, аналитическими методами, испытывают влияние погрешности округлений и в действительности могут оказаться приближенными.

Полная погрешность является результатом взаимодействия разных видов погрешностей и не может быть меньше, чем наибольшая из составляющих ее погрешностей.

2. Абсолютная и относительная погрешности

Для оценки погрешности вводятся понятия абсолютной и относительной погрешностей.

Пусть x – точное значение некоторой величины (нам оно неизвестно и никогда не будет известно², поскольку определяется оно с помощью измерений, страдающих неточностями); a – приближенное значение той же величины ($a \approx x$). Абсолютная погрешность приближенного числа a определяется как $\Delta_a = |x - a|$. Но, поскольку значение x неизвестно, то и абсолютную погрешность узнать невозможно! Чтобы разрешить парадокс, вводят предельную абсолютную погрешность Δ_a^* – такое значение, которого абсолютная погрешность заведомо не превзойдет при данном способе измерений:

$$|x - a| \leq \Delta_a^*. \quad (1)$$

Из (1) следует, что $a - \Delta_a^* \leq x \leq a + \Delta_a^*$, поэтому желательно возможно меньшее значение Δ_a^* : это уменьшит длину интервала, содержащего искомое

² В философии есть знаменитое понятие «вещи в себе», введенное Иммануилом Кантом.

значение x и, следовательно, понизит неопределенность в наших знаниях об этой величине.

В технике формулу (1) часто записывают в виде $x = a \pm \Delta_a^*$, причем Δ_a^* называется *допусками*. Никакое изделие не может быть изготовлено с абсолютно точным соблюдением номинальных размеров; допуски показывают возможные (допустимые) отклонения от номинала.

Итак, абсолютная погрешность оценивает точность измерений, но эта оценка неполна, поскольку не учитывает характерный размер изучаемого явления (объекта). Так, например, абсолютная погрешность в 1 см при измерении длины комнаты – вероятно, вполне приемлемая точность, но при измерении роста человека эта же погрешность будет сочтена непозволительно грубой.

Исчерпывающим показателем качества измерений является относительная погрешность δ_a (соответственно, предельная относительная погрешность δ_a^*) приближенного числа a как отношение абсолютной погрешности (предельной абсолютной погрешности) к модулю числа a :

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}, \quad \delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|a|}.$$

Относительная погрешность является величиной безразмерной, т. е. не зависит от выбора системы единиц измерения, что позволяет сравнивать качество измерений разнородных величин (бессмысленным является вопрос о том, что больше: 1 кг или 1 м, но сравнение качества измерений массы и длины в терминах относительной погрешности вполне допустимо). Измеряется δ_a (δ_a^*) в долях единицы или в процентах.

Пример. Согласно ныне действующим (с 2019 г.) определениям международного Комитета по константам для науки и технологии (CODATA) входящая в закон всемирного тяготения гравитационная постоянная

$$\gamma = (6,67430 \pm 0,00015) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2},$$

а масса электрона

$$m_e = (9,1093837015 \pm 0,0000000028) \cdot 10^{-31} \text{ кг}.$$

Сравнить точность определения этих фундаментальных физических констант.

Решение. Для гравитационной постоянной предельная относительная погрешность

$$\delta_\gamma^* = \frac{0,00015}{6,67430} = 2,2 \cdot 10^{-5},$$

а для массы электрона

$$\delta_{m_e}^* = \frac{0,0000000028}{9,1093837015} = 3,0 \cdot 10^{-10}.$$

В последнем случае относительная погрешность оказывается на пять порядков меньшей, т. е. масса электрона определена гораздо точнее, чем гравитационная постоянная.

С понятиями абсолютной и относительной погрешности связаны понятия *верных* и *значащих* цифр.

Если абсолютная погрешность приближенного числа не превышает единицы последнего (самого правого) разряда его десятичной записи, то цифры числа называют *верными* (или *точными*).

По умолчанию десятичная запись приближенного числа должна содержать только верные цифры, и тогда по записи числа сразу можно определить предельную абсолютную погрешность, с которой оно известно.

Цифры, не являющиеся верными, называются сомнительными.

Пример. Даны приближенные числа $a = 9,7$, $b = 9,70$, $c = 5600$, $d = 5,6 \cdot 10^3$. Указать предельную абсолютную погрешность для каждого числа.

Решение. Для числа a погрешность $\Delta_a^* \leq 0,1$, для числа b : $\Delta_b^* \leq 0,01$, для числа c : $\Delta_c^* \leq 1$, для числа d : $\Delta_d^* \leq 0,1 \cdot 10^3 = 100$.

Итак, числа a и b , c и d , равные с точки зрения «обычной» математики, существенно различны в вычислительной математике: из абсолютной погрешности мы заключаем, что число b известно точнее, чем число a , а число c – точнее, чем d . Кроме того, нуль, стоящий справа в дробной части десятичного числа, важен, и им нельзя пренебрегать, если мы хотим составить верное суждение о точности числа.

Значащими цифрами приближенного числа называются все цифры его десятичной записи, кроме нулей, находящихся левее первой отличной от нуля цифры.

Пример. Числа 0,004205 и 3,0200 имеют соответственно четыре и пять значащих цифр. Итак, нули, находящиеся слева, значащими не являются, а нуль, записанный в конце десятичной дроби, всегда является значащей цифрой.

3. Действия с приближенными числами

Теорема 1. Абсолютная погрешность алгебраической³ суммы нескольких приближенных чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей этих чисел.

В частности, для двух чисел a и b любого знака получаем $\Delta_{a \pm b} \leq \Delta_a + \Delta_b$.

Из этой теоремы следует, что абсолютная погрешность алгебраической суммы не меньше абсолютной погрешности наименее точного из слагаемых,

³ Под алгебраической суммой понимается как сумма, так и разность.

т. е. увеличение точности за счет других слагаемых невозможно. Поэтому бессмысленно сохранять излишние десятичные знаки в более точных слагаемых (не говоря уже о том, что с многозначными числами труднее работать). Отсюда вытекает следующее

Правило сложения и вычитания приближенных чисел

1) Выделить наименее точное число (или числа), т. е. такое, в десятичной записи которого наименьшее число верных десятичных знаков;

2) округлить остальные числа так, чтобы каждое из них содержало на один (запасной) знак больше, чем выделенное число;

3) выполнить сложение и вычитание с учетом сохраненных знаков;

4) полученный результат округлить до предпоследнего знака.

Напомним **правила** округления числа, т. е. его замены числом с меньшим количеством значащих цифр:

А. если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то сохраняемые десятичные знаки оставляют без изменения;

Б. если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последний из сохраняемых знаков увеличивают на 1;

В. если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а среди следующих за ней цифр есть отличные от нуля, то последний из сохраняемых знаков увеличивают на 1;

Г. если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а все последующие – нули (или последующих нет), то последний из сохраняемых десятичных знаков увеличивают на 1, когда он нечетен, и сохраняют неизменным, когда он четен (правило четной цифры).

Пример. Округляя число 43,471 до одного знака после запятой, получим 43,5 (правило Б), а при округлении до двух знаков после запятой получим 43,47 (правило А). Округляя число 1,825001 до двух знаков после запятой, получим 1,83 (правило В). Округляя число 7,465 до сотых долей, получим 7,46; сохраняемая цифра не увеличивается на единицу, поскольку она четна. При округлении числа 7,47500 до сотых долей получим 7,48 – нечетная цифра увеличилась на единицу (правило Г).

Смысл правила Г – в том, что в алгебраической сумме большого числа слагаемых округление по избытку будет встречаться примерно с той же частотой, что и округление по недостатку, и произойдет (частичная) взаимная компенсация погрешностей округления; правило Г предотвращает лавинообразный рост погрешности округления.

Теперь проиллюстрируем правило сложения и вычитания приближенных чисел.

Пример. Найти сумму приближенных чисел $a = 214,8$, $b = 0,015$, $c = 4,17$, $d = 0,000713$. По умолчанию все цифры в этих числах считать верными.

Решение. Наименее точное слагаемое – a , поскольку в нем только один верный десятичный знак. Округлим остальные слагаемые до двух знаков после запятой: $b \rightarrow 0,02$, $c \rightarrow 4,17$, $d \rightarrow 0,00$. Теперь сложим округленные числа: $214,8 + 0,02 + 4,17 + 0,00 = 218,99$. Округляя результат до одного знака после запятой, получим окончательный ответ: $219,0$.

Теорема 2. Относительная погрешность произведения (частного) приближенных чисел не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел.

В частности, для трех чисел $\delta_{ab/c} \leq \delta_a + \delta_b + \delta_c$.

Из теоремы следует, что относительная погрешность произведения и частного не может быть меньше относительной погрешности наименее точного из исходных чисел (т. е. имеющего меньше всего *верных значащих* цифр). Поскольку относительная погрешность числа определяется количеством его верных значащих цифр, то при умножении и делении бессмысленно оставлять значащих цифр больше, чем их было в исходном числе с наименьшим количеством верных значащих цифр.

Отсюда следует

Правило умножения и деления приближенных чисел

- 1) Из всех чисел, которые предстоит умножать и делить, выделить наименее точное – то, в котором меньше всего верных значащих цифр;
- 2) округлить остальные числа так, чтобы каждое из них содержало на одну (запасную) значащую цифру больше, чем выделенное число;
- 3) выполнить умножение и деление округленных чисел с учетом сохраненных значащих цифр;
- 4) оставить в ответе столько значащих цифр, сколько их было в наименее точном числе.

Пример. Найти произведение приближенных чисел $a = 3,5$ и $b = 83,368$, все цифры которых верные.

Решение. В первом числе две верные значащие цифры, а во втором – пять. Второе число округлим до трех значащих цифр: $b \rightarrow 83,4$. После округления перемножим числа: $ab = 3,5 \cdot 83,4 = 291,9 \approx 2,9 \cdot 10^2$. В ответе оставлены две значащие цифры – столько, сколько их было в множителе с наименьшим количеством верных значащих цифр.

Индивидуальные задания

а) Определить, какое равенство точнее.

б) Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки. Определить абсолютную погрешность результата.

в) Найти предельные абсолютную и относительную погрешности приближенного числа, все цифры которого по умолчанию верные.

Варианты

Вариант 1. а) $14/17 = 0,824$, $\sqrt{53} = 7,28$; б) $23,3748$, $\delta = 0,27\%$; в) $0,645$.

Вариант 2. а) $7/3 = 2,33$, $\sqrt{58} = 7,62$; б) $13,5726 \pm 0,0072$; в) $4,8556$.

Вариант 3. а) $27/31 = 0,871$, $\sqrt{42} = 6,48$; б) $0,088748$, $\delta = 0,56\%$; в) $71,385$.

Вариант 4. а) $23/9 = 2,56$, $\sqrt{87} = 9,33$; б) $4,57633 \pm 0,00042$; в) $6,8346$.

Вариант 5. а) $6/7 = 0,857$, $\sqrt{41} = 6,40$; б) $46,7843$, $\delta = 0,32\%$; в) $7,38$.

Вариант 6. а) $12/7 = 1,71$, $\sqrt{47} = 6,86$; б) $0,38725 \pm 0,00112$; в) $0,00646$.

Вариант 7. а) $21/13 = 1,62$, $\sqrt{63} = 7,94$; б) $45,7832$, $\delta = 0,18\%$; в) $3,6765$.

Вариант 8. а) $16/7 = 2,29$, $\sqrt{11} = 3,32$; б) $0,75244 \pm 0,00013$; в) $5,374$.

Вариант 9. а) $18/7 = 2,57$, $\sqrt{22} = 4,69$; б) $46,453$, $\delta = 0,15\%$; в) $6,125$.

Вариант 10. а) $17/9 = 1,89$, $\sqrt{17} = 4,12$; б) $0,66385 \pm 0,00042$; в) $24,6$.

Вариант 11. а) $51/11 = 4,64$, $\sqrt{35} = 5,92$; б) $0,66385$, $\delta = 0,34\%$; в) $0,543$.

Вариант 12. а) $19/12 = 1,58$, $\sqrt{12} = 3,46$; б) $4,88445 \pm 0,00052$; в) $4,633$.

Вариант 13. а) $13/7 = 1,857$, $\sqrt{7} = 2,65$; б) $2,8867$, $\delta = 0,43\%$; в) $63,749$.

Вариант 14. а) $49/13 = 3,77$, $\sqrt{14} = 3,74$; б) $5,6483 \pm 0,0017$; в) $0,00858$.

Вариант 15. а) $5/3 = 1,667$, $\sqrt{38} = 6,16$; б) $3,7542$, $\delta = 0,32\%$; в) $0,389$.

Вариант 16. а) $17/11 = 1,545$, $\sqrt{18} = 4,243$; б) $0,8647 \pm 0,0013$; в) $0,864$.

Вариант 17. а) $7/22 = 0,318$, $\sqrt{13} = 3,61$; б) $0,3944$, $\delta = 0,15\%$; в) $21,7$.

Вариант 18. а) $13/17 = 0,765$, $\sqrt{31} = 5,57$; б) $3,6878 \pm 0,0013$; в) $8,74$.

Вариант 19. а) $50/19 = 2,63$, $\sqrt{27} = 5,20$; б) $0,85638$, $\delta = 0,22\%$; в) $231,57$.

Вариант 20. а) $21/29 = 0,724$, $\sqrt{44} = 6,63$; б) $13,6853 \pm 0,0023$; в) $2,16$.

Вариант 21. а) $17/19 = 0,895$, $\sqrt{52} = 7,21$; б) $7,521$, $\delta = 0,12\%$; в) $0,5748$.

Вариант 22. а) $6/11 = 0,545$, $\sqrt{83} = 9,11$; б) $3,7832 \pm 0,0043$; в) $2,678$.

Вариант 23. а) $16/19 = 0,842$, $\sqrt{55} = 7,416$; б) $17,356$, $\delta = 0,11\%$; в) $0,5718$.

Вариант 24. а) $23/15 = 1,53$, $\sqrt{98} = 9,899$; б) $8,7432 \pm 0,0023$; в) $0,578$.

Вариант 25. а) $2/21 = 0,095$, $\sqrt{22} = 4,69$; б) $24,5641$, $\delta = 0,09\%$; в) $4,478$.

Вариант 26. а) $12/11 = 1,091$, $\sqrt{68} = 8,246$; б) $0,5532 \pm 0,0014$; в) $3,4479$.

Вариант 27. а) $6/7 = 0,857$, $\sqrt{48} = 6,928$; б) $14,5841$, $\delta = 0,17\%$; в) $0,421$.

Вариант 28. а) $15/7 = 2,14$, $\sqrt{10} = 3,16$; б) $4,5012 \pm 0,0013$; в) $1,4229$.

Вариант 29. а) $4/17 = 0,235$, $\sqrt{105} = 10,25$; б) $1,1341$, $\delta = 0,12\%$; в) $2,401$.

Вариант 30. а) $7/15 = 0,467$, $\sqrt{30} = 5,48$; б) $6,7702 \pm 0,0015$; в) $11,1239$.

Пример решения одного варианта

а) $9/19 = 0,474$, $\sqrt{103} = 10,149$. Найдем значения этих выражений с большим числом десятичных знаков: $a = 9/19 = 0,47368\dots$, $b = \sqrt{103} = 10,14889\dots$
Вычислим предельные абсолютные погрешности, округляя их с избытком:

$$\Delta_a = |0,47368 - 0,474| = 3,2 \cdot 10^{-4} \leq 0,0004,$$

$$\Delta_b = |10,14889 - 10,149| = 1,1 \cdot 10^{-4} \leq 0,0002.$$

Предельные относительные погрешности составляют

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{0,0004}{0,474} \approx 8 \cdot 10^{-4} = 0,08\%,$$

$$\delta_b = \frac{\Delta_b}{|b|} = \frac{0,0002}{10,149} \approx 2 \cdot 10^{-5} = 0,002\%.$$

Поскольку δ_b много меньше, чем δ_a , равенство $\sqrt{103} = 10,149$ является гораздо более точным.

б) Пусть приближенное число $c = 72,354 \pm 0,021$. Поскольку предельная абсолютная погрешность $\Delta_c = 0,021 < 0,1$, число c придется округлить до десятых, и окончательно, только с верными цифрами, оно запишется в виде $72,4$.

Пусть приближенное число $d = 5,272$ известно с относительной погрешностью $\delta_d = 0,1\%$. Поскольку $\Delta_d = |d| \cdot \delta_d = 5,272 \cdot 0,001 = 0,005272 < 0,01$, число d придется округлить до сотых, и окончательно, только с верными цифрами, оно запишется в виде $5,27$.

в) Пусть приближенное число $f = 14,278$. Поскольку все его цифры верные, предельная абсолютная погрешность $\Delta_f \leq 0,001$. Тогда предельная относительная погрешность

$$\delta_f = \frac{\Delta_f}{|f|} = \frac{0,001}{14,278} \approx 7 \cdot 10^{-5} \approx 10^{-4} = 0,01\%.$$

Контрольные вопросы

- 1) Что такое моделирование? Для чего создаются модели? Что такое математическая модель?
- 2) Какие источники погрешностей выделяются в вычислительной математике?
- 3) Какие источники погрешностей относятся к неустранимым и к устранимым?
- 4) Что такое абсолютная погрешность приближённого числа? В чём практический недостаток этого понятия?
- 5) Что такое предельная абсолютная погрешность приближённого числа? Почему для практики это понятие более приемлемо, чем абсолютная погрешность?
- 6) Почему характеристика точности измерений с помощью абсолютной и предельной абсолютной погрешности неполна?
- 7) Что такое относительная и предельная относительная погрешности приближённого числа? Каковы их свойства?
- 8) Что такое точные (верные) цифры приближённого числа?
- 9) Сформулировать теорему об абсолютной погрешности алгебраической суммы конечного числа приближённых чисел.
- 10) Как следует складывать и вычитать приближённые числа?
- 11) Каковы правила округления чисел? В чём практический смысл правила чётной цифры?
- 12) Что такое значащие цифры приближённого числа?
- 13) Сформулировать теорему об относительной погрешности произведения (частного) конечного числа приближённых чисел.
- 14) Как следует умножать и делить приближённые числа?

ГЛАВА 2. АППРОКСИМАЦИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ

Аппроксимацией (приближением) функции $f(x)$ называется отыскание функции $g(x)$, близкой в некотором смысле к $f(x)$. Аппроксимирующая функция $g(x)$ должна быть «проще» исходной. Как понимается близость функций и в чем критерий простоты, об этом речь пойдет ниже.

Аппроксимация может потребоваться в следующих случаях:

1) известны, например, из эксперимента, значения функции $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n$ (итак, функция $y = f(x)$ задана таблично). Требуется найти значение $f(x)$ при таком значении аргумента x^* , которого нет среди узлов x_1, x_2, \dots, x_n , но сделать это по каким-либо причинам затруднительно⁴. Тогда можно найти аппроксимирующую функцию $g(x)$; если она «близка» к $f(x)$ на множестве узлов $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то и в нужной точке x^* , вероятно, $f(x^*) \approx g(x^*)$;

2) функция $f(x)$ задана аналитически, т. е. формулой, но эта формула слишком сложна⁵ для регулярного использования. И в этом случае выгодно аппроксимировать $f(x)$ более простой функцией $g(x)$ и все расчеты выполнять с ней.

Какие функции наиболее «просты» и в силу этого удобны в качестве аппроксимирующих? Чаще всего используются полиномы (многочлены) – линейные комбинации степенных функций:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n. \quad (2)$$

Действительно, с полиномами легко выполняются основные операции арифметики (сложение, вычитание, умножение, деление) и высшей математики (дифференцирование и интегрирование). Легко вычисляется и значение поли-

⁴ Например, экспериментальная установка, на которой выполнены измерения, уже разобрана.

⁵ Известно, например, что интеграл вида $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$ от любой дробно-рациональной функции ($P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – полиномы) всегда берущийся, т. е. первообразная выражается в конечном виде через элементарные функции, но формула для первообразной может быть очень громоздкой: $\int \frac{dx}{x^3(x^3+a^3)^2} = -\frac{1}{3a^3x^2(x^3+a^3)} - \frac{5}{6a^6x^2} - \frac{5}{18a^8} \ln \frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2} - \frac{5}{3a^8\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$. Это отнюдь не предел сложности!

нома при любом x . Итак, мы будем понимать простоту в операциональном смысле.

Иногда (но не в нашем лекционном курсе) применяют обобщенные полиномы вида

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x),$$

где $\varphi_i(x)$, $i=1,2,\dots,n$, – линейно независимые функции. Например, функции $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$ тоже обладают удобными свойствами и используются для разложения произвольных $f(x)$ при весьма общих условиях в тригонометрические ряды Фурье.

Рассмотрим теперь некоторые подходы к понятию близости функций.

1. Интерполяция. Требуется найти полином $P_n(x)$, принимающий те же значения, что и аппроксимируемая функция $f(x)$, в $(n+1)$ узле:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Тогда полином $P_n(x)$ называется интерполяционным, а точки x_0, x_1, \dots, x_n – узлами интерполяции.

Если число узлов велико, то отыскание интерполяционного полинома, как мы увидим далее, будет трудоемким. Кроме того, точное равенство $P_n(x_i) = f(x_i)$ может оказаться бессмысленным требованием, если сами значения $f(x_i)$ аппроксимируемой функции в узлах получены из эксперимента и потому заведомо неточно.

2. Наилучшее приближение. Пусть функция $f(x)$ задана таблично в узлах x_0, x_1, \dots, x_n . Подберем полином $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ так, чтобы сумма квадратов разностей значения аппроксимируемой функции и полинома по всем узлам минимизировалась:

$$\sum_{i=0}^n (f(x_i) - P_n(x_i))^2 \rightarrow \min.$$

Из этого условия определяются коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n искомого полинома.

На этом пути мы пришли бы к знаменитому методу наименьших квадратов, но рассматривать его здесь мы не будем.

Займемся подробнее интерполяцией. Итак, пусть функция $f(x)$ задана таблично в $(n+1)$ узле:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \dots, \quad f(x_n) = y_n.$$

Требуется найти интерполяционный полином, такой, что

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3)$$

Геометрически это означает, что график полинома проходит через точки $M_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ (рис. 1).

Интерполяционный полином используется для приближенного вычисления значений функции $f(x)$ в точке, отличной от узлов интерполяции: $f(x) \approx P_n(x)$. Если значение x лежит между узлами интерполяции, то приближенное отыскание значения $f(x)$ называется интерполированием (в узком смысле); если же значение x лежит левее или правее всех узлов, то говорят об интерполировании в широком смысле (или экстраполировании).

Степень интерполяционного полинома, построенного по $(n+1)$ точке, в исключительных случаях может оказаться меньше n . Например, если все точки $M_i(x_i, y_i)$ лежат на одной прямой (наклонной или горизонтальной), то полином будет иметь первую (соответственно, нулевую) степень. Понятно, что такие случаи крайне редки: погрешности измерений приведут к разбросу точек.

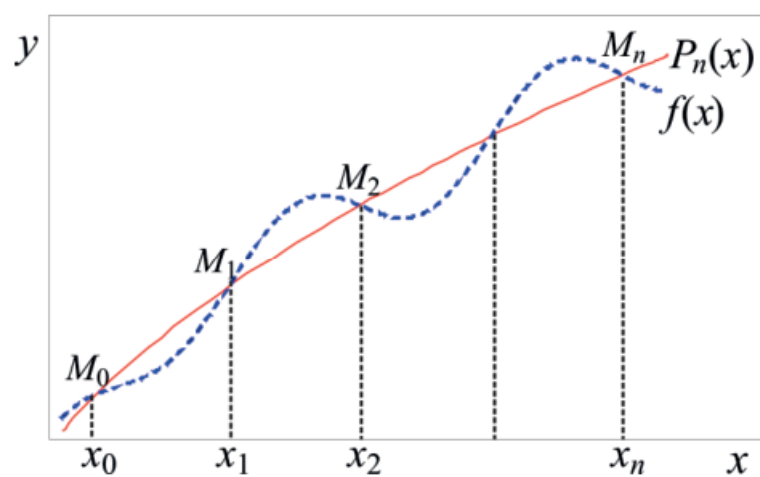


Рис. 1. Графики аппроксимируемой функции и интерполяционного полинома для неё

В общем случае по заданным значениям $f(x)$ в $(n+1)$ узле конструируется полином степени n , притом, единственным образом. Покажем это. Подставляя в общий вид полинома (2) условия (3), получим систему из $(n+1)$ линейного уравнения

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n = y_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = y_n. \end{cases}$$

с $(n+1)$ неизвестными – коэффициентами полинома a_0, a_1, \dots, a_n . Решать эту систему можно, например, по правилу Крамера. Если главный определитель

системы (составленный из коэффициентов при неизвестных) отличен от нуля, то система имеет решение и, притом, единственное. В нашем случае главный определитель имеет специальный вид (так называемый определитель Вандермонда):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Поскольку узлы интерполяции x_0, x_1, \dots, x_n – различные числа, этот определитель отличен от нуля. Итак, решение системы – коэффициенты интерполяционного полинома a_0, a_1, \dots, a_n – существует и единственно. Поэтому по данным значениям $f(x)$ в $(n+1)$ узле можно построить полином $P_n(x)$ степени n , притом, единственным образом. Есть несколько способов построения, приводящих к одинаковому результату. Мы рассмотрим простейший способ, предложенный Лагранжем (1736–1813).

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОЛИНОМ ЛАГРАНЖА

Для системы узлов x_0, x_1, \dots, x_n введем коэффициенты Лагранжа вида

$$L_n^i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \quad (4)$$

Здесь индекс i может принимать значения $0, 1, \dots, n$. В числителе каждый сомножитель представляет собой разность переменного x и значения одного из узлов (за исключением пропущенного i -го узла, что отмечено верхним индексом в обозначении функции L_n^i). Знаменатель формально отличается от числителя тем, что вместо переменного x подставлено значение отсутствующего, i -го, узла интерполяции x_i . После упрощений становится понятно, что коэффициент Лагранжа $L_n^i(x)$ является полиномом n -й степени (что отмечено нижним индексом в обозначении L_n^i).

При подстановке значения j -го узла в качестве аргумента коэффициента Лагранжа получится:

$$L_n^i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i \text{ (числитель будет совпадать со знаменателем),} \\ 0, & j \neq i \text{ (одна из скобок вверху обратится в ноль).} \end{cases}$$

Тогда полином Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_n^i(x) = f(x_0)L_n^0(x) + f(x_1)L_n^1(x) + \dots + f(x_n)L_n^n(x) \quad (5)$$

удовлетворяет условиям (3)

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

и имеет степень n , т. е. является искомым интерполяционным полиномом.

Пример. Функция $y = f(x)$ задана таблично своими значениями в четырех узлах:

Номер узла, i	0	1	2	3
узлы x_i	-1	0	2	5
$y_i = f(x_i)$	1	-3	2	4

Построить для $y = f(x)$ интерполяционный полином Лагранжа и, пользуясь им, приближенно найти значение y в точке $x = 1$, которой нет среди узлов.

Решение. Применяя формулу (5), получим

$$\begin{aligned} L_3(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\ &+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \\ &= 1 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(-1-0)(-1-2)(-1-5)} - 3 \cdot \frac{(x+1)(x-2)(x-5)}{(0+1)(0-2)(0-5)} + \\ &+ 2 \cdot \frac{(x+1)(x-0)(x-5)}{(2+1)(2-0)(2-5)} + 4 \cdot \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(5+1)(5-0)(5-2)} = \\ &= \frac{19}{45}x^3 + \frac{233}{90}x^2 - \frac{89}{90}x - 3. \end{aligned}$$

Тогда

$$f(1) \approx L_3(1) = -\frac{19}{45} + \frac{233}{90} - \frac{89}{90} - 3 = -\frac{82}{45} = -1,82.$$

Итак, ответ получен, но вопрос о его точности пока остается открытым. Заметим, что имела место интерполяция в узком смысле, поскольку точка $x = 1$ лежит между узлами интерполяции.

ПОГРЕШНОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПОЛИНОМА ЛАГРАНЖА

Погрешностью интерполяции называется модуль разности значений аппроксимируемой функции и ее интерполяционного полинома:

$$R_n(x) = |f(x) - L_n(x)|. \quad (6)$$

Применимость этой формулы ограничена. Действительно, если значение $f(x)$ известно точно, то надобность в аппроксимации отпадает, и вопрос о погрешности интерполяции становится беспредметен.

По определению формула (6) дает точное значение погрешности интерполяции. Иногда практичнее оказывается приближенная формула, оценивающая погрешность сверху. Пусть узлы интерполяции x_0, x_1, \dots, x_n все принадлежат отрезку $[a, b]$. Предположим, что аппроксимируемая функция имеет производную $(n+1)$ -го порядка на этом отрезке. Без доказательства:

$$R_n(x) = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|, \quad (7)$$

где $\xi \in [a, b]$ – некоторая (вообще говоря, неизвестная) точка, лежащая между узлами интерполяции; в ней вычисляется $(n+1)$ -я производная аппроксимируемой функции. Вычисление промежуточной точки ξ и производной (высокого порядка!) настолько трудны, что делают (точную) формулу (7) фактически неприменимой. Ее можно упростить и огрубить; если каким-либо способом оценить сверху $(n+1)$ -ю производную:

$$\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1},$$

(M_{n+1} – число), то получим следующую оценку погрешности интерполяции:

$$R_n(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|. \quad (8)$$

Заметим, что и последняя формула при табличном задании функции трудно применима, поскольку приходится дифференцировать численно, а это отдельная непростая задача (см. следующую главу).

Пример. Функция $f(x) = \ln x$ задана таблично своими значениями в узлах $x_0 = 100$, $x_1 = 101$, $x_2 = 102$, $x_3 = 103$, и по табличным данным построен интерполяционный полином Лагранжа $L_3(x)$, который применен для приближенного вычисления $\ln 100,5$. Оценить, с какой точностью получается это значение.

Решение. Требуется оценить погрешность интерполяции $R_3(100,5)$. Согласно формуле (8)

$$R_3(x) \leq \frac{M_4}{4!} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)|,$$

где $M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| = \max_{x \in [100, 103]} |\ln^{(4)}(x)|$ (минимальный отрезок, содержащий все четыре узла, есть отрезок $[100, 103]$). Четвертая производная логарифма

$\ln^{(4)}(x) = -6/x^4$, поэтому $M_4 = \max_{x \in [100, 103]} \left| -\frac{6}{x^4} \right| = \frac{6}{100^4}$. Оценка погрешности интерполяции:

$$R_3(100,5) = |\ln 100,5 - L_3(100,5)| \leq \frac{6}{100^4 4!} |(100,5 - 100)(100,5 - 101)(100,5 - 102)(100,5 - 103)| < 10^{-8}.$$

Итак, вычисление $\ln 100,5$ с помощью интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ даст ответ с восемью верными десятичными знаками, т. е. очень точный ответ.

Контрольные вопросы

- 1) Что такое аппроксимация?
- 2) Какими удобными для практики свойствами должна обладать аппроксимирующая функция по сравнению с аппроксимируемой?
- 3) В каких ситуациях прибегают к аппроксимации?
- 4) Что такое интерполяция, как она связана с аппроксимацией?
- 5) В каком смысле понимается простота функций в задачах аппроксимации?
- 6) В каком смысле понимается близость функций в задачах аппроксимации?
- 7) Что такое близость функций в смысле интерполяции?
- 8) Что такое близость функций в смысле наилучшего приближения?
- 9) Почему в качестве аппроксимирующих функций, как правило, выбираются полиномы?
- 10) Как связаны степень интерполяционного полинома и количество узлов интерполяции?
- 11) Интерполяционный полином Лагранжа требует для своего построения значений аппроксимируемой функции в узлах интерполяции. При этом он как аппроксимирующая функция должен быть проще исходной функции. Нет ли здесь противоречия?
- 12) Что такое погрешность интерполяции?
- 13) Почему вычисление погрешности интерполяции по определению не всегда возможно?
- 14) Что такое оценка погрешности интерполяции? Почему и она может оказаться затруднительной?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

Построить интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(x)$ с узлами интерполирования $x_i, i = 0, 1, 2$. Вычислить значения $f(x)$ и полинома Лагранжа в точке a . Построить графики полинома Лагранжа и аппроксимируемой функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x_2]$. Вычислить точно и оценить погрешность интерполяции в точке a .

Образец выполнения работы в пакете Mathcad см. в Приложении II в конце книги.

Варианты заданий

1.	$f(x) = (\ln x)^{13/4};$	$x_i = 2, 3, 4;$	$a = 2,5$
2.	$f(x) = (\ln x)^{17/4};$	$x_i = 9, 11, 13;$	$a = 10,5$
3.	$f(x) = (\ln x)^{12/5};$	$x_i = 4, 5, 6;$	$a = 4,5$
4.	$f(x) = (\ln x)^{4/7};$	$x_i = 3, 6, 9;$	$a = 8,5$
5.	$f(x) = (\ln x)^{11/3};$	$x_i = 5, 6, 7;$	$a = 5,5$
6.	$f(x) = (\ln x)^{13/3};$	$x_i = 9, 11, 13;$	$a = 11,5$
7.	$f(x) = (\ln x)^{11/2};$	$x_i = 6, 7, 8;$	$a = 6,5$
8.	$f(x) = (\ln x)^{12/11};$	$x_i = 10, 12, 14;$	$a = 13,5$
9.	$f(x) = (\ln x)^{1/2};$	$x_i = 7, 8, 9;$	$a = 7,5$
10.	$f(x) = (\ln x)^{13/7};$	$x_i = 8, 11, 14;$	$a = 12,5$
11.	$f(x) = (\ln x)^{3/2};$	$x_i = 8, 9, 10;$	$a = 8,5$
12.	$f(x) = (\ln x)^{10/9};$	$x_i = 11, 13, 15;$	$a = 12,5$
13.	$f(x) = (\ln x)^{11/5};$	$x_i = 2, 4, 6;$	$a = 4,5$
14.	$f(x) = (\ln x)^{9/7};$	$x_i = 9, 12, 15;$	$a = 11,5$
15.	$f(x) = (\ln x)^{10/7};$	$x_i = 4, 6, 8;$	$a = 6,5$
16.	$f(x) = (\ln x)^{9/5};$	$x_i = 5, 8, 11;$	$a = 9,5$
17.	$f(x) = (\ln x)^{11/7};$	$x_i = 6, 8, 10;$	$a = 8,5$

18. $f(x) = (\ln x)^{9/2};$ $x_i = 11, 12, 13;$ $a = 11,5$
19. $f(x) = (\ln x)^{12/7};$ $x_i = 2, 5, 8;$ $a = 5,5$
20. $f(x) = (\ln x)^{3/5};$ $x_i = 6, 9, 12;$ $a = 11,5$
21. $f(x) = (\ln x)^{1/3};$ $x_i = 5, 8, 11;$ $a = 8,5$
22. $f(x) = (\ln x)^{10/7};$ $x_i = 6, 9, 12;$ $a = 10,5$
23. $f(x) = (\ln x)^{5/3};$ $x_i = 2, 6, 10;$ $a = 6,5$
24. $f(x) = (\ln x)^{13/5};$ $x_i = 7, 10, 13;$ $a = 12,5$
25. $f(x) = (\ln x)^{9/4};$ $x_i = 3, 6, 9;$ $a = 6,5$
26. $f(x) = (\ln x)^{8/9};$ $x_i = 2, 4, 6;$ $a = 4,5$
27. $f(x) = (\ln x)^{5/7};$ $x_i = 8, 12, 16;$ $a = 9,5$
28. $f(x) = (\ln x)^{7/11};$ $x_i = 5, 7, 9;$ $a = 8,5$
29. $f(x) = (\ln x)^{7/13};$ $x_i = 3, 5, 7;$ $a = 3,5$
30. $f(x) = (\ln x)^{11/20};$ $x_i = 11, 14, 17;$ $a = 15,5$

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Напомним сначала, как выполняется дифференцирование, т. е. нахождение производной, в математическом анализе, и выясним, почему такой подход не всегда возможен.

Пусть имеется функция, заданная аналитически, т. е. формулой $y = f(x)$. Начальное значение аргумента есть x_0 ; при этом функция принимает значение $y_0 = f(x_0)$. Если аргумент испытает приращение Δx , так что новое значение аргумента $x_1 = x_0 + \Delta x$, то ему будет соответствовать новое значение функции $y_1 = f(x_1)$. Приращение функции в точке x_0 есть $\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$. Отношение $\Delta f(x_0)/\Delta x$ приращения функции к приращению аргумента показывает среднюю скорость изменения функции на отрезке от x_0 до x_1 . Если теперь устремить приращение аргумента к нулю, то предел отношения (если этот предел существует) по определению равен значению производной функции в точке x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \quad (9)$$

К сожалению, эта формула применима не всегда. Если функция $f(x)$ задана таблично своими значениями в узлах x_0, x_1, \dots , то приращение аргумента $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, как бы мало оно ни было, всегда конечно, и его нельзя устремить к нулю.

x	x_0	x_1	x_2	x_3	\dots
y	y_0	y_1	y_2	y_3	\dots

Например, индекс РТС, являющийся основным показателем фондового рынка России, рассчитывается каждые 15 секунд. Можно вычислить среднюю скорость изменения индекса на каждом временном интервале, но найти точное значение производной индекса РТС по времени невозможно.

Итак, к численному дифференцированию приходится прибегать в тех случаях, когда функция $f(x)$, которую нужно продифференцировать, задана таблично. Кроме того, даже если функция задана аналитически, но очень сложной формулой⁶, нахождение производной по определению (9) может оказаться проблематичным – вычислить значения $f(x_i)$ затруднительно.

Идея численного дифференцирования несложна: вместо функции $f(x)$ рассматривается некоторая «близкая» к ней функция⁷ $g(x)$, определяемая достаточно простой формулой, и, поскольку $f(x) \approx g(x)$, то и их производные, вероятно, близки:

$$f'(x) \approx g'(x); \quad (10)$$

это должно быть верно и для вторых производных:

⁶ См. примечание 2.

⁷ Как мы помним, говорят об аппроксимации $f(x)$ с помощью $g(x)$.

$$f''(x) \approx g''(x) \quad (11)$$

и т. д.

В действительности эта идея очень рискованна: близость функций, вообще говоря, отнюдь не предопределяет близость их производных. В качестве примера рассмотрим две функции: $f(x)$ и $g(x) = f(x) + \frac{1}{n}\sin n^2x$. Поскольку $|f(x) - g(x)| = \left|\frac{1}{n}\sin n^2x\right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, разность функций при достаточно больших n сколь угодно мала, т. е. функции близки. Но разность их производных $|f'(x) - g'(x)| = |f'(x) - [f'(x) + n\cos n^2x]| = |n\cos n^2x|$ не мала, т. к. $\max_{x \in (-\infty, \infty)} |n\cos n^2x| = n$, т. е. производные не близки.

Это можно показать и проще, опираясь на геометрический смысл производной $f'(x_0)$: она равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (см. рис. 2).

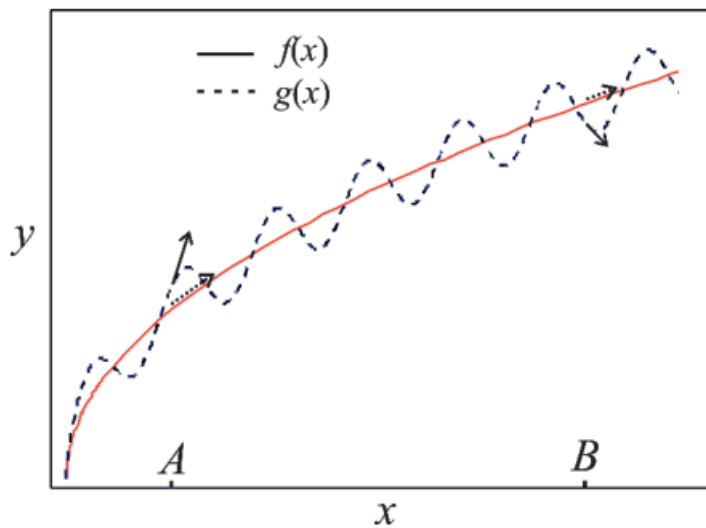


Рис. 2. Функции $f(x)$ и $g(x)$ близки, т. к. ординаты точек двух графиков при одинаковых абсциссах мало отличаются. Но направления касательных, проведенных к графикам (см., например, точки A и B), резко различны, т. е. производные $f'(x)$ и $g'(x)$ не близки

Итак, вообще говоря, наивная идея (2)–(3) неверна, но, если в качестве аппроксимирующей функции $g(x)$ используется интерполяционный полином Лагранжа, построенный по значениям $f(x)$ во многих узлах с небольшим расстоянием между ними, то приближенно вычислить $f'(x)$, заменяя ее на $g'(x)$, все же возможно, и возникающая при этом погрешность численного дифференцирования может быть оценена.

Пусть функция $f(x)$ задана таблично своими значениями в равноотстоящих узлах $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. По этим значениям построим полином Лагранжа $L_n(x)$, и тогда $f'(x) \approx L'_n(x)$, $f''(x) \approx L''_n(x)$ и т. д. Приведем вычисления для простейшего случая $n = 2$.

ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЛЯ ТРЕХ РАВНООТСТОЯЩИХ УЗЛОВ

Итак, имеются три узла x_0, x_1, x_2 , удаленные друг от друга на расстояние h (*шаг*) – см. рис. 3.

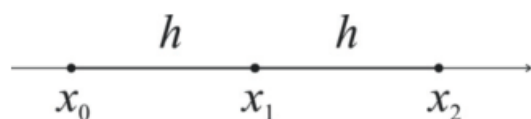


Рис. 3. Три равноотстоящих узла

Интерполяционный полином Лагранжа

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \quad (12)$$

Введем вспомогательную переменную $q = \frac{x-x_0}{h}$, тогда $x = x_0 + hq$, и получаем

$$L_2(x) = \frac{1}{2}y_0(q-1)(q-2) - y_1q(q-2) + \frac{1}{2}y_2q(q-1).$$

Полином Лагранжа выглядит теперь компактнее, но его нельзя непосредственно продифференцировать по x , поскольку аргументом стала q . По правилу дифференцирования сложной функции $(L_2)_x' = (L_2)_q' q_x' = \frac{1}{h}(L_2)_q'$, и получаем следующее приближенное соотношение для производной:

$$f'(x) \approx L_2'(x) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2}y_0(2q-3) - y_1(2q-2) + \frac{1}{2}y_2(2q-1) \right]. \quad (13)$$

Аналогично, для второй производной:

$$f''(x) \approx L_2''(x) = \frac{1}{h^2} [y_0 - 2y_1 + y_2]. \quad (14)$$

Подстановка $x = x_0 + hq$ при $q = 0, 1, 2$ дает соответственно $x = x_0, x_1, x_2$. Поэтому из (13) и (14) можно при таких значениях q найти приближенные выражения для производных в каждом из трех узлов (последнее слагаемое в каждой из нижеследующих формул – погрешность численного дифференцирования, которую мы приводим без доказательства):

Первая производная

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \quad (15)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad (16)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \frac{h^2}{3} f'''(\xi). \quad (17)$$

Вторая производная

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - hf'''(\xi), \quad (18)$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{h^2}{12} f^{IV}(\xi), \quad (19)$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + hf'''(\xi) \quad (20)$$

(поскольку в формулу (14) переменная q не вошла, вторая производная в разных узлах различается только погрешностью). Во всех формулах ξ есть некоторая (неизвестная) промежуточная точка, лежащая между узлами.

Мы подробно рассмотрели способ получения формул численного дифференцирования для случая трех равноотстоящих узлов. Приведем без вывода аналогичные формулы для случая четырех равноотстоящих узлов x_0, x_1, x_2, x_3 , находящихся на расстоянии h друг от друга.

ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

ДЛЯ ЧЕТЫРЕХ РАВНООТСТОЯЩИХ УЗЛОВ

Первая производная

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4}f^{IV}(\xi), \quad (21)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12}f^{IV}(\xi), \quad (22)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12}f^{IV}(\xi), \quad (23)$$

$$f'(x_3) = \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4}f^{IV}(\xi). \quad (24)$$

Вторая производная

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + \frac{11}{12}h^2f^{IV}(\xi), \quad (25)$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{1}{12}h^2f^{IV}(\xi), \quad (26)$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) - \frac{1}{12}h^2f^{IV}(\xi), \quad (27)$$

$$f''(x_3) = \frac{1}{h^2}(-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3) + \frac{11}{12}h^2f^{IV}(\xi). \quad (28)$$

Замечания к формулам численного дифференцирования:

1) Оценка погрешности уже первой производной требует предварительного знания третьей (формулы 15–17) и даже четвертой (формулы 21–24) производной (!), и притом – в заранее неизвестной точке ξ . Тем самым погрешность численного дифференцирования оценивается настолько сложно, что в лабораторной работе эта оценка не предполагается.

2) Выполняется некоторое правило симметрии, позволяющее *частично* проверить правильность написания формул, а именно: коэффициенты при y_i входят в формулы парами; для первой производной в узлах, симметричных относительно центрального, коэффициенты повторяются с обратным знаком, если прочитать формулу справа налево – ср. формулы (15) и (17), (21) и (24), (22) и (23). Для второй производной – то же, но без смены знака (ср. (25) и (28), (26) и (27)). Разумеется, выполнение правила симметрии ещё не гарантирует правиль-

ности написания формулы, поскольку возможны ошибки, не связанные с коэффициентами при u_i .

3) В узлах, близких к центральному, формулы численного дифференцирования проще и отличаются большей точностью (меньшей погрешностью), чем в крайних узлах.

4) С увеличением количества узлов точность формул численного дифференцирования повышается (это неудивительно, ведь возрастает количество информации о дифференцируемой функции, которой мы располагаем).

5) С ростом порядка производной точность формул уменьшается (погрешность растет). Это связано с тем, что дифференцирование ухудшает свойства функции (дифференцируемая всюду функция может иметь производную функцию, которая не везде будет дифференцируемой; непрерывная функция может перейти в разрывную). Следовательно, изначально близкие функции будут порождать всё менее близкие производные после неоднократного дифференцирования.

Контрольные вопросы

1) Почему определением производной, вводимым в математическом анализе, не всегда можно воспользоваться?

2) В каких ситуациях прибегают к численному дифференцированию?

3) На какой идее основаны методы численного дифференцирования? В чём потенциальная опасность этой идеи? Как уменьшить эту опасность?

4) Как можно частично проверить правильность написания формул численного дифференцирования для равноотстоящих узлов с помощью «правила симметрии»?

5) Как оценивается погрешность численного дифференцирования? Почему эта оценка трудно реализуема?

6) Как изменяется погрешность численного дифференцирования с увеличением количества узлов интерполяции и с увеличением порядка производной? Объяснить природу этих зависимостей.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2а

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Для функции $f(x)$, заданной таблично в пяти узлах x_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4$, найти значения ее 1-й и 2-й производных в первых четырех узлах, используя формулы численного дифференцирования (21)–(28) без учёта погрешности.

Варианты заданий

1) x_i y_i 1,25 4,82835 1,27 4,84418 1,29 4,85989 1,31 4,87523 1,33 4,86331	2) x_i y_i 13,5 4,90583 13,7 4,92007 13,9 4,93459 14,1 4,94882 14,3 4,96571	3) x_i y_i 0,145 4,97674 0,147 4,99043 0,149 5,00391 0,151 5,01730 0,153 5,03207
4) x_i y_i 0,451 0,43587 0,452 0,43677 0,453 0,43766 0,454 0,43856 0,455 0,43945	5) x_i y_i 0,724 0,90000 0,725 0,89957 0,726 0,89914 0,727 0,89870 0,728 0,89825	6) x_i y_i 0,349 0,34196 0,350 0,34290 0,351 0,34384 0,352 0,34478 0,353 0,34488
7) x_i y_i 0,725 0,66314 0,727 0,66463 0,729 0,66612 0,731 0,66761 0,733 0,66769	8) x_i y_i 0,251 0,24837 0,254 0,25128 0,257 0,25418 0,260 0,25708 0,263 0,25718	9) x_i y_i 0,341 2,19280 0,343 2,20293 0,345 2,21309 0,347 2,22331 0,349 2,23347
10) x_i y_i 0,112 1,29419 0,113 1,29718 0,114 1,30017 0,115 1,30317 0,116 1,30616	11) x_i y_i 0,119 1,31522 0,121 1,32130 0,123 1,32730 0,125 1,33353 0,127 1,33970	12) x_i y_i 0,441 2,76058 0,445 2,78612 0,449 2,81190 0,453 2,83792 0,457 2,86226
13) x_i y_i 0,117 1,30918	14) x_i y_i 0,750 5,62341	15) x_i y_i 0,261 1,82390

0,122	1,32434	0,751	5,63638	0,263	1,83231
0,127	1,33968	0,752	5,64937	0,265	1,84077
0,132	1,35519	0,753	5,66239	0,267	1,84927
0,137	1,37068	0,754	5,67535	0,269	1,85776

16)	x_i	y_i	17)	x_i	y_i	18)	x_i	y_i
	0,271	1,86638		0,281	1,90985		0,291	1,96434
	0,273	1,87499		0,283	1,91867		0,293	1,96336
	0,275	1,88365		0,285	1,92752		0,295	1,97242
	0,277	1,89234		0,287	1,93642		0,297	1,98155
	0,279	1,90169		0,289	1,94421		0,299	1,99043

19)	x_i	y_i	20)	x_i	y_i	21)	x_i	y_i
	0,501	3,16957		0,511	3,24340		0,521	3,31894
	0,503	3,18420		0,513	3,33426		0,523	3,33426
	0,505	3,19889		0,515	3,27341		0,525	3,34965
	0,507	3,21366		0,517	3,28851		0,527	3,36511
	0,509	3,22821		0,519	3,29573		0,529	3,37858

22)	x_i	y_i	23)	x_i	y_i	24)	x_i	y_i
	0,531	3,39625		0,541	3,47536		0,551	3,55631
	0,533	3,41193		0,543	3,49140		0,553	3,57373
	0,535	3,42768		0,545	3,50752		0,555	3,58922
	0,537	3,44350		0,547	3,52371		0,557	3,60579
	0,539	3,45919		0,549	3,53902		0,559	3,60588

25)	x_i	y_i	26)	x_i	y_i	27)	x_i	y_i
	0,561	3,63915		0,351	11,80685		0,432	4,72234
	0,563	3,65595		0,353	11,81567		0,434	4,73463

0,565	3,67282	0,355	11,82452	0,436	4,74693
0,567	3,68978	0,357	11,83442	0,438	4,76823
0,569	3,70650	0,359	11,84121	0,440	4,78053

28)	x_i	y_i	29)	x_i	y_i	30)	x_i	y_i
	0,125	0,64324		0,931	2,24837		0,341	4,49281
	0,127	0,64473		0,934	2,25128		0,343	4,50294
	0,129	0,64622		0,937	2,25418		0,345	4,51305
	0,131	0,64771		0,940	2,25708		0,347	4,52338
	0,133	0,64791		0,943	2,25748		0,349	4,53349

ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Если функция $f(x)$ задана аналитически (формулой), и ее первообразная $F(x)$ является элементарной функцией, то определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Существуют ситуации, когда этой формулой невозможно или затруднительно воспользоваться:

1. Подынтегральная функция $f(x)$ задана графически или таблично; тогда первообразная $F(x)$ не существует.

2. Подынтегральная функция $f(x)$ задана аналитически, но неопределённый интеграл $\int f(x) dx$ не берущийся, т. е. не выражается в *конечном* виде через элементарные функции (известно, что многие практически важные интегралы таковы, в качестве примера приведем $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$).

3. Подынтегральная функция $f(x)$ задана аналитически, и интеграл $\int f(x) dx$ – берущийся, но первообразная $F(x)$ слишком громоздка (см. примечание в начале главы о численном дифференцировании).

Во всех этих случаях приходится прибегать к приближенному, численному нахождению определенного интеграла. Для этого подынтегральную функцию $f(x)$ заменяют другой, «близкой» к ней функцией, которая легко интегрируется.

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-КОТЕСА

В качестве функции, «близкой» к $f(x)$, возьмем интерполяционный полином Лагранжа $L_m(x)$, совпадающий с $f(x)$ в узлах интерполяции x_0, x_1, \dots, x_m , лежащих на отрезке интегрирования $[a, b]$. Полином Лагранжа имеет вид

$$L_m(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i) L_m^i(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где $L_m^i(x)$ – коэффициенты Лагранжа (полиномы степени m):

$$L_0^0(x) \equiv 1,$$
$$L_m^i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_m)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_m)}.$$

Если полином Лагранжа «близок» к функции $f(x)$, то и интегралы от них тоже должны быть близки⁸:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_m(x) dx = \sum_{i=0}^m f(x_i) \int_a^b L_m^i(x) dx.$$

Вводя так называемые коэффициенты Котеса (1682–1716)

$$c_m^i = \int_a^b L_m^i(x) dx,$$

получаем формулу Ньютона-Котеса порядка m :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_m(x) dx = \sum_{i=0}^m c_m^i f(x_i).$$

Она позволяет приближенно представить значение определенного интеграла в виде линейной комбинации значений подынтегральной функции в узлах интерполяции.

Пример. Вычислить коэффициенты Котеса c_1^0 и c_1^1 .

Решение. Пусть значения функции $f(x)$ заданы в двух узлах: $x_0 = a$ и $x_1 = b$. Тогда функцию можно аппроксимировать полиномом Лагранжа первой степени:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx L_1(x) = f(x_0)L_1^0(x) + f(x_1)L_1^1(x) = \\ &= f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}. \end{aligned}$$

Интеграл от аппроксимируемой функции

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &\approx \frac{f(a)}{a-b} \int_a^b (x-b) dx + \frac{f(b)}{b-a} \int_a^b (x-a) dx = \\ &= f(a)\frac{b-a}{2} + f(b)\frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем коэффициенты Котеса – весовые коэффициенты при значениях аппроксимируемой функции $f(a)$ и $f(b)$:

⁸ В случае численного дифференцирования, как мы знаем, такое рассуждение оказалось рискованным, но здесь оно вполне оправданно. Причина – в том, что дифференцирование ухудшает свойства функции (производная дифференцируемой всюду функции может стать недифференцируемой в данной точке, производная непрерывной функции – разрывной функцией), а интегрирование, как обратная к дифференцированию операция, улучшает свойства функции.

$$c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}.$$

Попутно отметим очевидный смысл последней формулы: определенный интеграл (геометрически равный площади криволинейной трапеции) в самом грубом приближении подсчитывается как площадь трапеции (рис. 4).

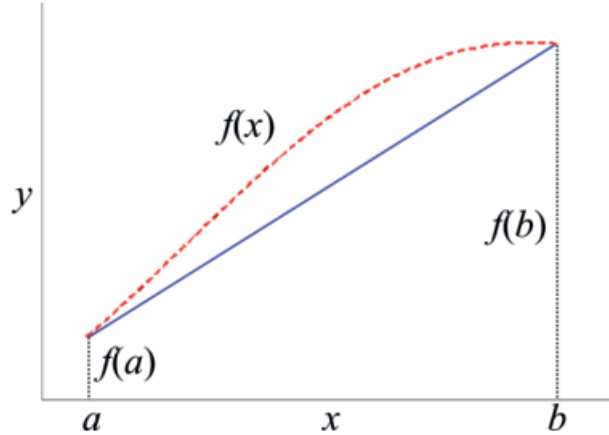


Рис. 4. Геометрическая иллюстрация простейшей формулы Ньютона-Котеса. Основания трапеции – отрезки длиной $f(a)$ и $f(b)$, высота трапеции равна $(b-a)$

Итак, принципиально вычисление коэффициентов Котеса c_m^i несложно, но при больших m оно становится трудоемким. Впрочем, значения этих коэффициентов и не нужно вычислять, поскольку они табулированы. Пусть узлы интерполяции являются равноотстоящими с шагом h :

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_m = a + mh = b.$$

Приведем фрагмент таблицы коэффициентов Котеса c_m^i при $m = 1, 2, \dots, 6$:

Таблица 1. Коэффициенты Котеса c_m^i в случае равноотстоящих узлов

m	Коэффициенты Котеса c_m^i			
1	$c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}$			
2	$c_2^0 = c_2^2 = \frac{b-a}{6}$,	$c_2^1 = \frac{4(b-a)}{6}$		
3	$c_3^0 = c_3^3 = \frac{b-a}{8}$,	$c_3^1 = c_3^2 = \frac{3(b-a)}{8}$		
4	$c_4^0 = c_4^4 = \frac{7(b-a)}{90}$,	$c_4^1 = c_4^3 = \frac{16(b-a)}{45}$,	$c_4^2 = \frac{2(b-a)}{15}$	
5	$c_5^0 = c_5^5 = \frac{19(b-a)}{288}$,	$c_5^1 = c_5^4 = \frac{25(b-a)}{96}$,	$c_5^2 = c_5^3 = \frac{25(b-a)}{144}$	
6	$c_6^0 = c_6^6 = \frac{41(b-a)}{840}$,	$c_6^1 = c_6^5 = \frac{9(b-a)}{35}$,	$c_6^2 = c_6^4 = \frac{9(b-a)}{280}$,	$c_6^3 = \frac{34(b-a)}{105}$

Покажем, как пользоваться этой таблицей. Пусть функция $f(x)$ задана в трех точках: a , b и точке $M = \frac{a+b}{2}$ – середине отрезка $[a, b]$. Тогда, выбирая из

строки $m = 2$ коэффициенты Котеса c_2^0, c_2^1, c_2^2 , запишем определенный интеграл в виде

$$\int_a^b f(x) dx \approx c_2^0 f(a) + c_2^1 f(M) + c_2^2 f(b) = \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{4(b-a)}{6} f(M) + \frac{b-a}{6} f(b).$$

Формула Ньютона-Котеса, будучи приближенным способом интегрирования, вообще говоря, вычисляет определенный интеграл с некоторой погрешностью (кроме очевидного случая, когда подынтегральная функция является полиномом степени меньшей, чем порядок формулы Ньютона-Котеса, но тогда эта формула не нужна).

Погрешность R численного интегрирования по формуле Ньютона-Котеса – это модуль разности точного значения интеграла и приближенного значения, получающегося при замене подынтегральной функции полиномом Лагранжа:

$$R_m = \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b L_m(x) dx \right|.$$

Воспользоваться определением, как правило, невозможно, поскольку неизвестно точное значение интеграла (будь оно известно – не пришлось бы интегрировать численно).

Преобразуем это выражение и воспользуемся формулами (7), (8) оценки погрешности интерполяции:

$$\begin{aligned} R_m &= \left| \int_a^b [f(x) - L_m(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - L_m(x)| dx = \\ &= \int_a^b \left| \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m) \right| dx \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \int_a^b |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m)| dx. \end{aligned} \quad (29)$$

Напомним, что $\xi \in [a, b]$ – некоторая (неизвестная) точка отрезка интегрирования, $M_{m+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(m+1)}(x)|$. Поскольку найти их нелегко, практическое значение оценки (29) ограничено. Иногда применяют эмпирическое правило *половинного шага*: выполняют двойной пересчет интеграла с шагами h и $h/2$ и условно считают, что совпадающие десятичные знаки двух результатов являются верными цифрами.

Формула (29) непрактична, но из нее можно получить полезные выводы. Огрубим формулу (29) еще больше, учитывая, что каждый из сомножителей вида $|x - x_i|$ не превосходит $(b - a)$ – длины отрезка интегрирования:

$$R_m \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \int_a^b (b-a)^{m+1} dx = \frac{M_{m+1}(b-a)^{m+2}}{(m+1)!}.$$

Отсюда видно, что уменьшения погрешности формулы Ньютона-Котеса можно достичь двояко: увеличением ее порядка m (факториал в знаменателе – настолько быстро возрастающая функция, что вся дробь, несомненно, уменьшится с ростом m , безотносительно к тому, как изменяется M_{m+1}) и/или сужением отрезка интегрирования. Но первый путь малопривлекателен: формула Ньютона-Котеса при большом m громоздка и трудна в использовании. Удобнее воспользоваться второй возможностью: отрезок интегрирования разбить на узкие участки, на каждом из которых даже формула Ньютона-Котеса небольшого порядка m обеспечит достаточную точность. Таким путем мы приходим к известным формулам численного интегрирования: формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.

ФОРМУЛА ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных элементарных отрезков с шагом $h = \frac{b-a}{n}$ точками $a_0 = a, a_1 = a+h, a_2 = a+2h, \dots, a_n = a+nh = b$. На каждом элементарном отрезке $[a_{k-1}, a_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, аппроксимируем функцию $f(x)$ полиномом Лагранжа нулевой степени по значению $f(a_{k-1})$ на левом конце элементарного отрезка: $L_0(x) = f(a_{k-1}) = y_{k-1}$. Геометрически это означает замену криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком $f(x)$, ступенчатой фигурой (рис. 5).

Эта фигура состоит из прямоугольников с основанием h и высотами $y_i = f(a_i)$, $i = 0, 1, n-1$. Тогда интеграл $\int_a^b f(x) dx$, численно равный площади криволинейной трапеции, приближенно получается как сумма площадей прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_0 h + y_1 h + \dots + y_{n-1} h = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad (30)$$

Получена формула прямоугольников приближенного вычисления интегралов.

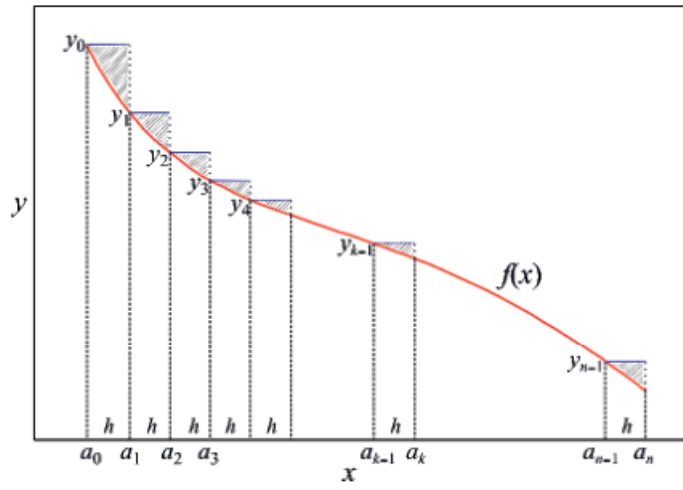


Рис. 5. Приближенное вычисление интеграла по формуле прямоугольников

Из рисунка 5 видно, что погрешность этой формулы должна быть велика (она определяется суммарной площадью заштрихованных фигур). Для оценки погрешности воспользуемся формулой (29). На одном элементарном отрезке $[a_{k-1}, a_k]$

$$\left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx - \int_{a_{k-1}}^{a_k} L_0(x) dx \right| \leq \frac{M_1}{1!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |x - a_{k-1}| dx =$$

$$= \frac{M_1}{1!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} (x - a_{k-1}) dx = M_1 \frac{(x - a_{k-1})^2}{2} \Big|_{a_{k-1}}^{a_k} = \frac{M_1 h^2}{2},$$

где $M_1 = \max_{[a, b]} |f'(x)|$. Область интегрирования $[a, b]$ содержит n элементарных отрезков, поэтому результирующая погрешность формулы прямоугольников

$$R_0 \leq \frac{M_1 h^2}{2} n = \frac{M_1 h}{2} (b - a) = O(h), \quad (31)$$

где мы учли, что $h = \frac{b-a}{n}$. Напомним, что применяемое в математическом анализе обозначение $O(h)$ (читается «О большое относительно h ») обозначает бесконечно малую того же порядка малости, что и h .

Итак, погрешность линейно зависит от шага h разбиения области интегрирования на элементарные отрезки. Это означает, что попытка увеличить на 1 количество верных знаков в приближённом значении интеграла (т. е. уменьшить погрешность R_0 в 10 раз) обернётся необходимостью уменьшить шаг тоже в 10 раз. Но прохождение отрезка интегрирования с шагом, в 10 раз меньшим, приведёт к 10-кратному росту количества узлов и лавинообразному увеличению объёма вычислений. Таким образом, формула прямоугольников непрактична: слишком больших усилий потребуется для вычисления интеграла с высокой точностью.

Заметим, что при табличном задании подынтегральной функции $f(x)$ применить формулу оценки погрешности (31) скорее всего не удастся, поскольку значение M_1 взять неоткуда⁹.

ФОРМУЛА ТРАПЕЦИЙ

По-прежнему будем делить отрезок интегрирования $[a, b]$ на n элементарных отрезков точками $a_k = a + kh$, $k = 1, 2, \dots, n$ с шагом $h = \frac{b-a}{n}$. На каждом элементарном отрезке $[a_{k-1}, a_k]$, аппроксимируем функцию $f(x)$ полиномом Лагранжа $L_1(x)$ первой степени с узлами на концах отрезка – в двух точках $x_0 = a_{k-1}$, $x_1 = a_k$. Поскольку графиком полинома 1-й степени является прямая, геометрически эта аппроксимация заключается в замене каждой дуги кривой $[y_{k-1}, y_k]$ хордой (прямолинейным отрезком), стягивающей концы дуги. Уже здесь, не говоря о нижеследующей более точной формуле Симпсона, расхождение между графиком $f(x)$ и аппроксимирующей линией (здесь это ломаная, состоящая из прямолинейных звеньев) столь мало, что построить наглядную иллюстрацию, подобную рисунку 5, затруднительно. Рассмотрим только один элементарный отрезок, преувеличивая расхождение между линиями (рис. 6).

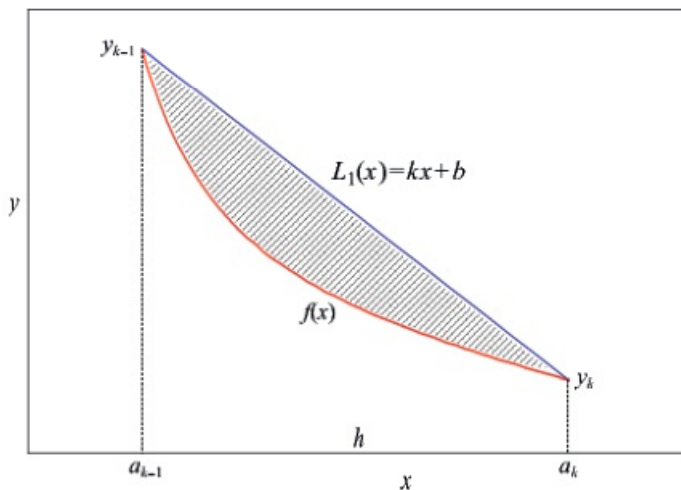


Рис. 6. Приближенное вычисление интеграла по формуле трапеций

На элементарном отрезке $[a_{k-1}, a_k]$ построена трапеция площадью $\frac{y_{k-1} + y_k}{2} h$, и из таких трапеций складывается фигура, приближающая исходную

криволинейную трапецию. Тогда интеграл $\int_a^b f(x) dx$, численно равный площа-

⁹ Читателю предлагается ответить на вопрос, можно ли в этом случае воспользоваться правилом половинного шага для определения верных цифр.

ди криволинейной трапеции, приближенно получается как сумма площадей трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} h + \frac{y_1 + y_2}{2} h + \frac{y_2 + y_3}{2} h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h =$$

$$= \frac{h}{2} [y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n]. \quad (32)$$

Получена формула трапеций приближенного вычисления интегралов.

Совокупность сегментов, подобных заштрихованному на рис. 6, определяет погрешность формулы трапеций. Для оценки погрешности воспользуемся формулой (29). На одном элементарном отрезке $[a_{k-1}, a_k]$

$$\left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx - \int_{a_{k-1}}^{a_k} L_1(x) dx \right| \leq \frac{M_2}{2!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |(x - a_{k-1})(x - a_k)| dx =$$

$$= \frac{M_2}{2!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |x^2 - x(a_{k-1} + a_k) + a_{k-1}a_k| dx = -\frac{M_2}{2!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} [x^2 - x(a_{k-1} + a_k) + a_{k-1}a_k] dx = \frac{M_2 h^3}{12},$$

где $M_2 = \max_{[a, b]} |f''(x)|$. Область интегрирования $[a, b]$ содержит n элементарных отрезков, поэтому результирующая погрешность формулы трапеций

$$R_1 \leq \frac{M_2 h^3}{12} n = \frac{M_2 h^2}{12} (b - a) = O(h^2). \quad (33)$$

Итак, погрешность квадратично зависит от шага h разбиения области интегрирования на элементарные отрезки, а поскольку при возведении малого числа в квадрат оно уменьшается, то для формулы трапеций погрешность будет меньше, чем для формулы прямоугольников при данном h (ср. с формулой (31)). Попытка увеличить на 1 количество верных знаков в приближенном значении интеграла (т. е. уменьшить погрешность R_1 в 10 раз) потребует уменьшения h в $\sqrt{10} \approx 3,2$ раза (а не в 10 раз, как было в случае формулы прямоугольников). Объём вычислений уже не увеличивается на порядок! Таким образом, формула трапеций выгоднее формулы прямоугольников.

При табличном задании подынтегральной функции формула (33) оценки погрешности оказывается непрактичной.

ФОРМУЛА СИМПСОНА

По-прежнему будем разбивать отрезок интегрирования $[a, b]$ на n элементарных отрезков узлами $a_k = a + kh$, $k = 1, 2, \dots, n$ с шагом $h = \frac{b-a}{n}$, но теперь количество разбиений пусть будет четным: $n = 2s$, где s – целое число. Рассмотрим

рим два смежных элементарных отрезка с тремя узлами a_{2k-2} , a_{2k-1} , a_{2k} (рис. 7).

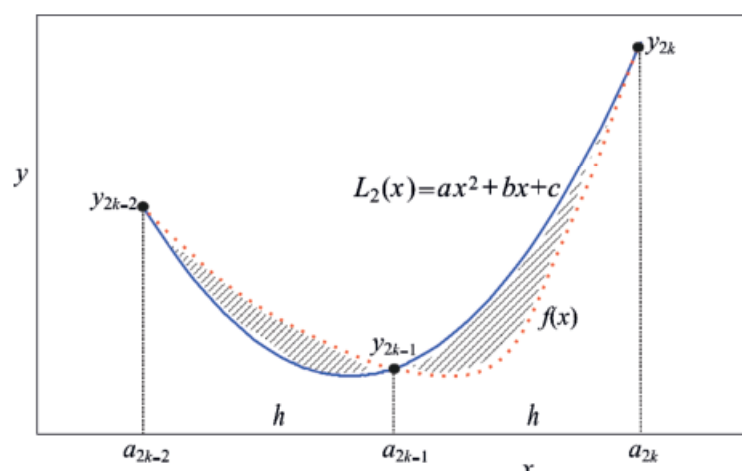


Рис. 7. Приближенное вычисление интеграла по формуле Симпсона

По значениям в трех узлах функция $f(x)$ аппроксимируется полиномом Лагранжа второй степени $L_2(x) = ax^2 + bx + c$, графиком которого является парабола. Дуги парабол очень близки к графику $f(x)$, поэтому расхождение между ними (штрихованные области) на рис. 7 преувеличено. По формуле Ньютона-Котеса для отрезка $[a_{2k-2}, a_{2k}]$, беря коэффициенты Котеса из таблицы 1 при $m = 2$, получим

$$\begin{aligned} \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} f(x) dx &\approx \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} L_2(x) dx = c_2^0 f(a_{2k-2}) + c_2^1 f(a_{2k-1}) + c_2^2 f(a_{2k}) = \\ &= \frac{2h}{6} y_{2k-2} + 4 \cdot \frac{2h}{6} y_{2k-1} + \frac{2h}{6} y_{2k} = \frac{h}{3} (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}). \end{aligned} \quad (34)$$

Применяя формулу (34) к каждому отрезку $[a_{2k-2}, a_{2k}]$, $k = 1, 2, \dots, s$, получим:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{a_0}^{a_2} f(x) dx + \int_{a_2}^{a_4} f(x) dx + \dots + \int_{a_{2s-2}}^{a_{2s}} f(x) dx \approx \\ &\approx \frac{h}{3} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + (y_4 + 4y_5 + y_6) + \dots + (y_{2s-2} + 4y_{2s-1} + y_{2s})]. \end{aligned}$$

Итого,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2s}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2s-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2s-1})]. \quad (35)$$

Получена формула Симпсона (1710–1761) приближенного вычисления определенного интеграла.

Оценим погрешность с помощью формулы (29). Для одного сдвоенного элементарного отрезка $[a_{2k-2}, a_{2k}]$

$$\left| \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} f(x) dx - \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} L_2(x) dx \right| \leq \frac{M_3}{3!} \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} |(x - a_{2k-2})(x - a_{2k-1})(x - a_{2k})| dx = \frac{M_3 h^4}{96},$$

где $M_3 = \max_{[a,b]} |f'''(x)|$. Область интегрирования $[a, b]$ содержит $n/2$ сдвоенных элементарных отрезков, поэтому результирующая погрешность формулы Симпсона

$$R_2 \leq \frac{M_3 h^4}{96} \frac{n}{2} = \frac{M_3 h^3}{192} (b - a) = O(h^3). \quad (36)$$

Получение на единицу большего количества верных знаков в приближённом значении интеграла (т. е. уменьшение R_2 в 10 раз) потребует уменьшения h (увеличения объёма вычислений) в $\sqrt[3]{10} \approx 2,2$ раза.

Формула Симпсона (при заданном h) оказывается точнее формулы трапеций, не говоря уже о формуле прямоугольников.

Понятно, что при табличном задании подынтегральной функции воспользоваться формулой (36) для оценки погрешности численного интегрирования практически нереально, поскольку значение M_3 взять неоткуда.

Пример. Вычислить интеграл $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле Ньютона-Котеса при

$m = 4$, а также по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 4$; сравнить результаты с точным значением интеграла.

Решение. Будем вести вычисления с пятью десятичными знаками. Для аналитически заданной подынтегральной функции $f(x) = 1/x$ оценить погрешность численного интегрирования по формулам (29), (31), (33), (36) возможно, но излишне, поскольку интеграл точно вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница, с чего мы и начнем:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 = \mathbf{0,69315\dots}$$
 (бесконечная непериодическая дробь).

Интерполяционный полином Лагранжа степени $m = 4$ в формуле Ньютона-Котеса используется, если на отрезке интегрирования есть пять равноудаленных узлов. В данном случае шаг (расстояние между узлами) $h = \frac{b-a}{4} = \frac{2-1}{4} = 0,25$.

Для подынтегральной функции $f(x) = 1/x$ составим таблицу значений в узлах:

k	$x_k = x_0 + kh$	$y_k = 1/x_k$
0	$x_0 = 1$	$y_0 = 1$
1	$x_1 = x_0 + h = 1,25 = 5/4$	$y_1 = 1/\frac{5}{4} = 4/5 = 0,80000$
2	$x_2 = x_1 + h = 1,5 = 3/2$	$y_2 = 1/\frac{3}{2} = 2/3 = 0,66667$
3	$x_3 = x_2 + h = 1,75 = 7/4$	$y_3 = 1/\frac{7}{4} = 4/7 = 0,57143$
4	$x_4 = x_3 + h = 2$	$y_4 = 1/2 = 0,50000$

Приближенное значение интеграла по формуле Ньютона-Котеса при $m = 4$:

$$I_{\text{Cotes}} = \sum_{i=0}^4 c_4^i y_i = c_4^0 y_0 + c_4^1 y_1 + c_4^2 y_2 + c_4^3 y_3 + c_4^4 y_4 =$$

$$= \frac{7}{90} \cdot 1,00000 + \frac{16}{45} \cdot 0,80000 + \frac{2}{15} \cdot 0,66667 + \frac{16}{45} \cdot 0,57143 + \frac{7}{90} \cdot 0,50000 = \mathbf{0,69318}.$$

Сравнивая результат с точным, видим, что формула Ньютона-Котеса дает четыре верных десятичных знака.

Приближенное значение интеграла по формуле прямоугольников (30):

$$I_{\text{пря}} = h[y_0 + y_1 + y_2 + y_3] =$$

$$= 0,25[1,00000 + 0,80000 + 0,66667 + 0,57143] = \mathbf{0,75953}.$$

Ни одного верного десятичного знака!

Приближенное значение интеграла по формуле трапеций (32):

$$I_{\text{трап}} = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4] = \mathbf{0,69702}.$$

Два верных знака после запятой.

Приближенное значение интеграла по формуле Симпсона (35):

$$I_{\text{Симп}} = \frac{h}{3}[(y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2y_2] = \mathbf{0,69325}.$$

Три верных знака после запятой!

Итак, точнее всех, как и можно было ожидать, оказалась формула Ньютона-Котеса. Ее недостатки – громоздкость и необходимость привлечения специальных таблиц (коэффициентов Котеса). Формулы, являющиеся упрощенными следствиями из формулы Ньютона-Котеса, дают не столь точные результаты. При этом формула Симпсона, будучи гораздо проще формулы Ньютона-Котеса, успешно с ней конкурирует по точности. Формула прямоугольников столь груба (при взятом нами шаге h), что вряд ли применима на практике.

Видимо, формулы трапеций и Симпсона являются самыми «практичными», сочетая простоту и удовлетворительную точность.

Заметим еще раз, что при табличном задании подынтегральной функции попытка оценки погрешности численного интегрирования по формулам (29), (31), (33), (36) наталкивается на непреодолимые трудности.

Контрольные вопросы

- 1) Почему вычисление определённого интеграла по формуле Ньютона-Лейбница не всегда возможно?
- 2) В каких ситуациях прибегают к численному нахождению определённого интеграла?
- 3) Какова идея численного интегрирования?
- 4) Каковы смысл и назначение формулы Ньютона-Котеса?
- 5) Что такое погрешность численного интегрирования? Почему определением погрешности воспользоваться невозможно? Как оценить эту погрешность? Почему формула оценки погрешности тоже мало пригодна?
- 6) В чём состоит эмпирическое правило половинного шага для определения верных цифр результата численного интегрирования?
- 7) Какова идея получения формул прямоугольников, трапеций, Симпсона из формулы Ньютона-Котеса? Каковы сравнительные достоинства и недостатки всех четырёх формул?
- 8) Привести оценку (по порядку величины) погрешности вычисления определённого интеграла по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона; каковы трудности при оценке погрешности?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2б

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Для функции $f(x)$, заданной таблично в пяти узлах x_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4$, приближенно вычислить определенный интеграл на отрезке $[x_0; x_4]$, используя формулы Ньютона-Котеса, прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Варианты заданий см. в лабораторной работе № 2а.

ГЛАВА 5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Корнем уравнения $f(x) = 0$ называется значение $x = \bar{x}$, подстановка которого в уравнение превращает его в верное числовое равенство. Например, если в уравнение $x^2 + 5x + 4 = 0$ подставить $x = -1$, то получим $0 = 0$ (верно). Решить уравнение – значит найти его корни. Далеко не каждое уравнение допускает аналитическое решение:

1) Трансцендентные уравнения, как правило, не решаются аналитически, за исключением специальных случаев («школьного» типа), когда уравнение удастся удачной подстановкой свести к алгебраическому, например, $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

2) Даже для алгебраического уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

степени выше четвертой, вообще говоря, не существует формулы, выражающей корни через коэффициенты уравнения при помощи конечного числа арифметических операций и извлечения корней (в частных случаях, например, для уравнения $x^{42} - 4x^{21} + 3 = 0$, такие формулы могут существовать, но в общем случае нет). Невозможность аналитического решения уравнений степени пятой и высших доказана трудами Абеля (1802–1829) и Галуа (1811–1832).

Поэтому большое значение имеет задача приближенного, численного отыскания корней уравнений. Для этого:

а) определяют количество корней уравнения и изолируют (отделяют) каждый из них. Отрезком изоляции называется отрезок, на котором лежит только один корень уравнения;

б) вычисляют каждый корень с требуемой точностью.

Для отделения корней уравнения $f(x) = 0$ применяют графический и аналитический методы.

В первом из них строят график функции $y = f(x)$ и приближенно находят точки его пересечения с осью Ox .

Пример. Для отделения корней уравнения $x^3 - 4x + 5 = 0$ строим график функции $f(x) = x^3 - 4x + 5$ (рис. 8). График пересекает ось абсцисс в единственной точке на отрезке $[-3, -2]$, который и будет отрезком изоляции корня.

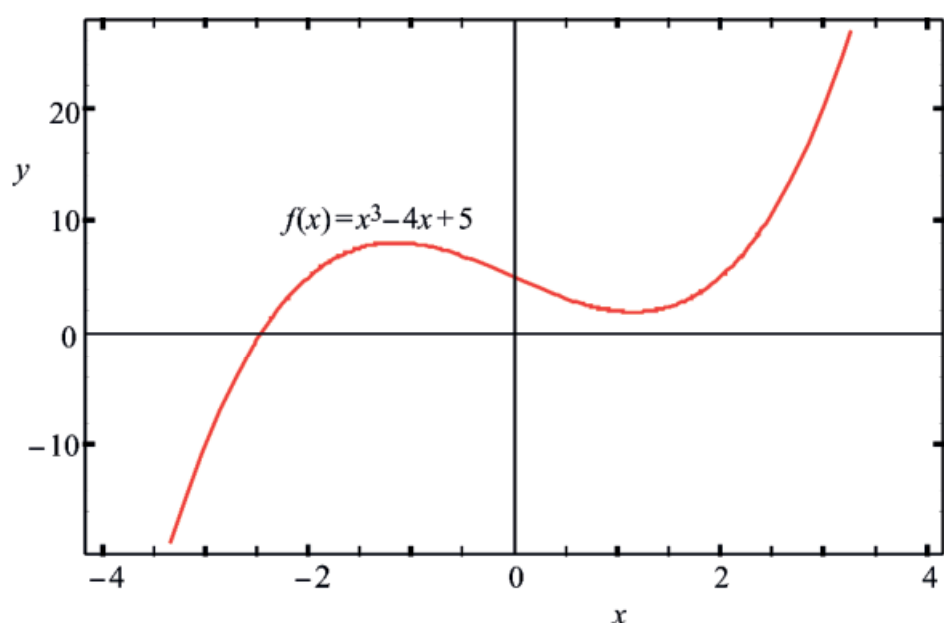


Рис. 8. Графическое отделение корней. Из графика видно, что единственный корень уравнения $x^3 - 4x + 5 = 0$ лежит на отрезке $[-3, -2]$

Аналитический способ отделения корней уравнения $f(x) = 0$ основан на том, что для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$ и принимающей на его концах значения разных знаков, существует по меньшей мере одна точка $\bar{x} \in [a, b]$, такая, что $f(\bar{x}) = 0$. Если на этом отрезке функция $f(x)$ монотонна, то корень \bar{x} единственный, в противном случае корней может быть несколько (рис. 9).

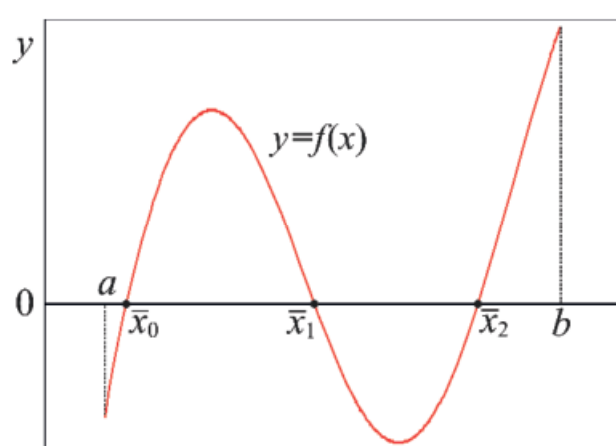


Рис. 9. На концах отрезка $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков; поскольку она немонотонна на этом отрезке, то уравнение $f(x) = 0$ имеет несколько корней (точки $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2$)

Поэтому можно составить таблицу значений функции с небольшим шагом, обращая внимание на знаки функции. Поскольку знаки $f(x_1)$ и $f(x_2)$ в таблице различны, на отрезке от x_1 до x_2 должен лежать корень уравнения $f(x) = 0$.

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0) > 0$
x_1	$f(x_1) > 0$
x_2	$f(x_2) < 0$
...	...
x_n	$f(x_n)$

Графический метод отделения корней удобен в диалоговом режиме решения задачи на ЭВМ, а аналитический – а автоматизированном, без участия человека.

Начнем теперь рассмотрение методов вычисления корней с заданной точностью.

1. МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ (ДИХОТОМИЯ¹⁰)

Метод непосредственно следует из аналитического способа отделения корней. Пусть для уравнения $f(x)=0$ найден первичный отрезок $[x_0, x_1]$ изоляции корня. Вычислим середину отрезка $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$. Если случайно окажется, что $f(x_2)=0$, то x_2 является корнем уравнения $f(x)=0$. Если же $f(x_2) \neq 0$, то из двух половин $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_1]$ первичного отрезка выберем для дальнейшего деления пополам ту, на концах которой функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Выбранный отрезок снова разделим пополам и найдем половину с противоположными знаками $f(x)$ на концах и т. д.

Критерий достижения требуемой точности (критерий обрыва счета): если корень надо вычислить с точностью ε , то деление пополам следует продолжать до тех пор, пока длина очередного отрезка не станет меньше 2ε ; тогда середина этого отрезка даст значение корня с точностью ε .

Свойства дихотомии:

а) идейная простота метода;

б) непритязательность к свойствам функции $f(x)$: она должна быть лишь непрерывной, а дифференцируемость (которая потребуется в более мощных методах) не предполагается.

К сожалению, отрицательные свойства перевешивают:

в) очень медленная сходимость. Пусть, например, первичный отрезок изоляции имеет единичную длину. После первого шага дихотомии длина уменьшится до $1/2$, после второго – до $(1/2)^2$ и т. д. Поскольку $(1/2)^{10} = 1/1024 < 0,001$, после десяти шагов дихотомии обеспечиваются лишь три верных десятичных знака искомого корня¹¹. Повлиять на скорость сходимости при дихотомии невозможно, поэтому скорость – *стабильно* низкая.

г) неприменимость к вычислению корней четной кратности (рис. 10).

Напомним понятие *кратных* корней.

¹⁰ Διχοτομία – разрубание пополам, разделение надвое (древнегреч.).

¹¹ «Гора родила мышь».

Уравнение $(x-0,5)(x-1,5)^2(x-2,5)^3=0$ имеет невырожденный корень $x_1=0,5$, двукратно вырожденный корень $x_{2,3}=1,5$ и трёхкратно вырожденный корень $x_{4,5,6}=2,5$. Если несколько корней уравнения принимают одинаковое числовое значение, то они называются кратными. Корни нечётной кратности x_1 и $x_{4,5,6}$ можно вычислить с помощью дихотомии, а корень чётной кратности $x_{2,3}$ – нет, т.к. на концах отрезка изоляции, окружающего точку 1,5, функция $f(x)=(x-0,5)(x-1,5)^2(x-2,5)^3$ будет иметь одинаковые знаки.

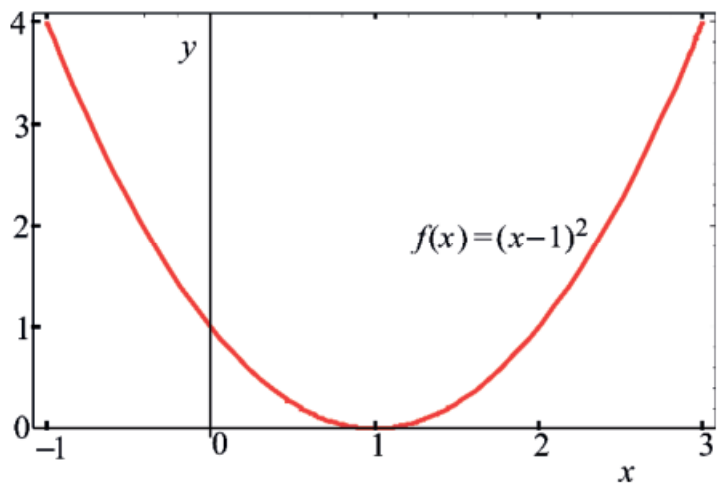


Рис. 10. Уравнение $(x-1)^2=0$ имеет двукратный корень $x_{1,2}=1$, но к нему невозможно подступиться методом дихотомии, т.к. по обе стороны от точки $x=1$ знак функции $f(x)=(x-1)^2$ одинаков

д) неприменимость к решению систем уравнений.

2. МЕТОД ИТЕРАЦИЙ (ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ)

Пусть имеется уравнение $f(x)=0$. Приведем его к равносильному виду $x=\varphi(x)$, удобному для итераций¹² (ниже покажем, как это сделать).

Выберем некоторое начальное приближение x_0 и найдем следующие приближения, выполняя однообразные вычисления (итерации)

$$x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \dots$$

Отсюда понятно удобство для итераций перехода от записи уравнения в виде $f(x)=0$ к виду $x=\varphi(x)$: значение аргумента в левой части равенства является следующим приближением по отношению к тому, которое подставлялось в функцию $\varphi(x)$. При подстановке значения аргумента в $f(x)$ удастся лишь проверить, получается ли (случайно!) число 0 без возможности итераций.

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то итерационный процесс $x_n = \varphi(x_{n-1}), n=1, 2, \dots$, называется сходящимся. Пусть функция $\varphi(x)$ непре-

¹² Iteratio – повторение, повторное действие (лат.).

ривна. Тогда, переходя к пределу $n \rightarrow \infty$ в рекуррентном соотношении $x_n = \varphi(x_{n-1})$, можно перенести знак предельного перехода через знак функции:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right).$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} = \bar{x}$ является корнем уравнения $x = \varphi(x)$.

Условие и скорость сходимости итерационного процесса определяются следующей теоремой.

Теорема. Пусть корень \bar{x} уравнения $x = \varphi(x)$, а также последовательные приближения к нему $x_0, x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \dots$ принадлежат отрезку изоляции $[a, b]$, на котором

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad (37)$$

(число q будем называть коэффициентом сжатия¹³).

Тогда:

1) Отображение $\varphi(x)$ является сжимающим¹⁴, и итерационный процесс $x_n = \varphi(x_{n-1})$ сходится к корню \bar{x} уравнения $x = \varphi(x)$;

2) Критерий достижения требуемой точности ε : как только для абсолютной погрешности Δ n -го приближения к корню выполнится условие

$$\Delta = |\bar{x} - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon, \quad (38)$$

счет можно оборвать.

Метод итераций сходится при любом выборе начального приближения x_0 , лишь бы оно попадало в отрезок $[a, b]$, где выполняется условие сходимости (37). Благодаря этому метод является самоисправляющимся, т. е. ошибка в вычислениях, не выводящая за пределы области сходимости $[a, b]$, не повлияет на конечный результат, т. к. ошибочное значение можно рассматривать как новое начальное значение x_0 . Методы вычислений, обладающие свойством самоисправления, особенно надежны.

Из формулы (37) следует, что в качестве значения коэффициента сжатия q можно взять

$$q = \max_{[a, b]} |\varphi'(x)|. \quad (39)$$

¹³ Название не является общепринятым; часто это число называют коэффициентом Липшица (1832–1903).

¹⁴ Отображение называется так потому, что каждое приближение оказывается ближе к корню, чем его предшественник: отображение буквально *сжимает* их к \bar{x} .

Из оценки погрешности (38) следует, что скорость сходимости итерационного процесса к корню \bar{x} особенно велика при коэффициенте сжатия $q \approx 0$. Когда q приближается к единице (со стороны меньших значений), сходимость замедляется. При $q \geq 1$ последовательность приближений $x_0, x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \dots$ расходится, и найти корень уравнения $x = \varphi(x)$ с его помощью невозможно. Итак, наиболее благоприятен для вычислений случай $q \approx 0$, поскольку при нем небольшого количества итераций хватит для вычисления корня с высокой точностью.

Рассмотрим, как привести уравнение $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$, удобному для итераций, и как обеспечить благоприятное значение q .

1) Прибавляя x к обеим частям уравнения $f(x) = 0$, получим $x = f(x) + x$. Обозначая правую часть как новую функцию, $f(x) + x = \varphi(x)$, приводим уравнение к нужному виду $x = \varphi(x)$.

2) Если окажется, что на отрезке изоляции корня $[a, b]$ для введенной функции значение $\max_{[a, b]} |\varphi'(x)|$ недостаточно мало, применим более общий прием введения параметра λ : сначала от уравнения $f(x) = 0$ перейдем к равносильному (при $\lambda \neq 0$) уравнению $\lambda f(x) = 0$, а затем прибавим x в обеих частях: $x = \lambda f(x) + x$ и, вводя новую функцию $\varphi(x) = \lambda f(x) + x$, получаем удобное для итераций уравнение $x = \varphi(x)$. Поскольку, согласно (37)–(39), высокая скорость сходимости обеспечивается при $q = \max_{[a, b]} |\varphi'(x)| \approx 0$, выберем на отрезке изоляции $[a, b]$ некоторую точку (например, середину отрезка) x_0 и потребуем, чтобы в ней $\varphi'(x_0) = \lambda f'(x_0) + 1 = 0$. Отсюда найдем значение параметра $\lambda = -1/f'(x_0)$, обеспечивающее благоприятное q (его величину можно найти графически, построив график функции $y = |\varphi'(x)|$ на отрезке $[a, b]$ изоляции корня).

3) Часто приводит к цели простой прием: по-другому выразить x из уравнения $x = \varphi(x)$, если первоначальный вариант оказался неудачным. Смысл этой рекомендации станет ясен из нижеследующего примера.

Пример. Методом итераций найти корни уравнения

$$5x - 6 \ln x - 7 = 0 \quad (40)$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. Графическим методом найдем количество корней и отрезки их изоляции. Если график строится вручную, то его построение для функции $f(x) = 5x - 6 \ln x - 7$ затруднительно. Проще преобразовать уравнение к виду $\ln x = \frac{5x-7}{6}$ и найти абсциссы точек пересечения графиков функций $f_1(x) = \ln x$ и $f_2(x) = \frac{5x-7}{6}$ (рис. 11). При вычислениях на ЭВМ, например, в пакете Mathcad, разбиение функции на $f_1(x)$ и $f_2(x)$ излишне!

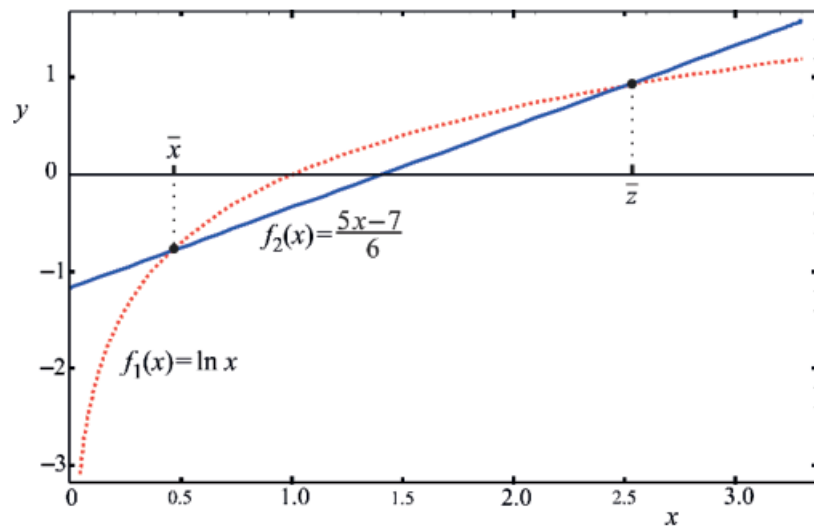


Рис. 11. Уравнение $5x - 6 \ln x - 7 = 0$ имеет два корня $\bar{x} \in [0,1;1]$ и $\bar{z} \in [2;3]$. Первый из отрезков изоляции не должен начинаться в нуле, т. к. в этой точке функция $\ln x$ терпит разрыв

Приведем уравнение (40) к виду, удобному для итераций. Можно, например, выразить x из первого слагаемого:

$$x = \frac{6 \ln x + 7}{5}, \quad (41)$$

тогда в итерационном процессе будет использоваться функция $\varphi(x) = \frac{1}{5}(6 \ln x + 7)$, и нужно проверить, будет ли такой процесс сходящимся. Для этого вычислим производную $\varphi'(x) = \frac{6}{5x}$ и найдем коэффициент сжатия $q = \max |\varphi'(x)|$ на каждом отрезке изоляции корня. На правом отрезке изоляции $[2;3]$

$$q_1 = \max_{[2;3]} |\varphi'(x)| = \max_{[2;3]} \frac{6}{5x} = \frac{6}{5x} \Big|_{x=2} = 0,6 < 1.$$

Итерационный процесс будет сходящимся, и его можно использовать для нахождения корня \bar{z} .

На левом отрезке $[0,1;1]$ изоляции корня

$$\max_{[0,1;1]} |\varphi'(x)| = \max_{[0,1;1]} \frac{6}{5x} = \frac{6}{5x} \Big|_{x=0,1} = 12 > 1,$$

и функция $\varphi(x) = \frac{1}{5}(6 \ln x + 7)$ непригодна для вычисления корня \bar{x} , т. к. итерационный процесс будет расходящимся. Поэтому для отрезка $[0,1;1]$ по-другому выразим x из уравнения (40), а именно – выразим x , который был аргументом логарифма: $x = e^{\frac{5x-7}{6}}$, и введем функцию

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{5x-7}{6}\right),$$

которую надо проверить на пригодность к использованию в итерационном процессе. Поскольку

$$\begin{aligned} q_2 = \max_{[0,1;1]} |\psi'(x)| &= \max_{[0,1;1]} \frac{5}{6} \exp\left(\frac{5x-7}{6}\right) = \frac{5}{6} \exp\left(\frac{5x-7}{6}\right) \Big|_{x=1} = \\ &= \frac{5}{6} e^{-1/3} = \frac{5}{6\sqrt[3]{e}} \approx 0,597 \approx 0,6 < 1, \end{aligned}$$

функция $\psi(x)$ обеспечит сходимость итерационного процесса (случайно коэффициент сжатия совпал с q_1)

Итак, резюмируем:

а) Для нахождения корня $\bar{x} \in [0,1;1]$ строим итерационный процесс

$$x_{n+1} = \exp\left(\frac{5x_n - 7}{6}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

начальное приближение $x_0 = 0,5$; коэффициент сжатия $q_2 = 0,6$;

критерий достижения требуемой точности: как только для абсолютной погрешности Δ выполнится условие

$$\Delta = |\bar{x} - x_n| \leq \frac{q_2}{1-q_2} |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon = 0,001,$$

счет можно оборвать (ответ записать с тремя верными десятичными знаками, гарантируемыми достигнутой точностью).

б) Для корня $\bar{z} \in [2;3]$ строим итерационный процесс

$$z_{n+1} = \frac{6 \ln z_n + 7}{5}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

начальное приближение $z_0 = 2,5$; коэффициент сжатия $q_1 = 0,6$;

критерий достижения требуемой точности: как только выполнится условие

$$\Delta = |\bar{z} - z_n| \leq \frac{q_1}{1-q_1} |z_n - z_{n-1}| < \varepsilon = 0,001,$$

счет можно оборвать.

В качестве начального приближения к корню традиционно (но не обязательно – в силу самоисправления) берут середину отрезка его изоляции.

Результаты вычислений сведем в таблицы:

Номер итерации	Приближение к корню	Следующее приближение	Оценка погрешности
n	x_n	$\psi(x_n) = \exp\left(\frac{5x_n - 7}{6}\right)$	$\frac{q_2}{1-q_2} x_n - x_{n-1} $
0	0,5	0,4724	–
1	0,4724	0,4616	0,016
2	0,4616	0,4575	$6,177 \cdot 10^{-3}$
3	0,4575	0,4559	$2,351 \cdot 10^{-3}$
4	0,4559	0,4553	$8,926 \cdot 10^{-4} < \varepsilon$

n	z_n	$\varphi(z_n) = \frac{6 \ln z_n + 7}{5}$	$\frac{q_1}{1-q_1} z_n - z_{n-1} $
0	2,5	2,4995	–
1	2,4995	2,4993	$6,767 \cdot 10^{-4} < \varepsilon$

На нулевой итерации оценить погрешность невозможно (поставлен прочерк), поскольку никакого значения, предшествующего нулевому приближению, не существует.

Итак, $\bar{x} \approx x_4 = 0,455$; $\bar{z} \approx z_1 = 2,499$.

Свойства метода итераций:

- а) дифференцируемость функций, участвующих в расчетах;
- б) самоисправляемость вычислительного процесса;
- в) скорость сходимости зависит от величины коэффициента сжатия q . Благоприятных (близких к нулю) значений q всегда можно достичь введением параметра λ для ускорения сходимости; таким образом, в методе итераций скорость сходимости *потенциально* высока;

г) когда уравнение имеет несколько корней, как правило, для нахождения каждого из них приходится индивидуально строить итерационный процесс, поскольку сходимость одного процесса на разных отрезках изоляции обычно не достигается.

3. МЕТОД НЬЮТОНА

Пусть в уравнении $f(x) = 0$ функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x) \neq 0$; x_n есть некоторое приближение к корню \bar{x} рассматриваемого уравнения. В окрестности точки x_n разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 + \frac{f'''(x_n)}{3!}(x - x_n)^3 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(k)}(x_n)}{k!}(x - x_n)^k + \dots$$

и ограничимся линейным по x слагаемым включительно:

$$0 = f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n). \quad (41)$$

Отсюда

$$x \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

и, вслед за Ньютоном, левую часть этого выражения будем рассматривать как следующее, $(n + 1)$ -е, приближение некоторого итерационного процесса:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (42)$$

Формула (42) представляет метод Ньютона численного решения уравнений. Другое название – метод линеаризации, поскольку функция $f(x)$ приближенно заменена линейной (41).

Выясним геометрический смысл итерационного процесса (42). В точке с абсциссой x_0 проведем касательную к графику функции $y = f(x)$ (рис. 12); уравнение касательной:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Найдем точку пересечения этой прямой с осью абсцисс (в этой точке $y = 0$):

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

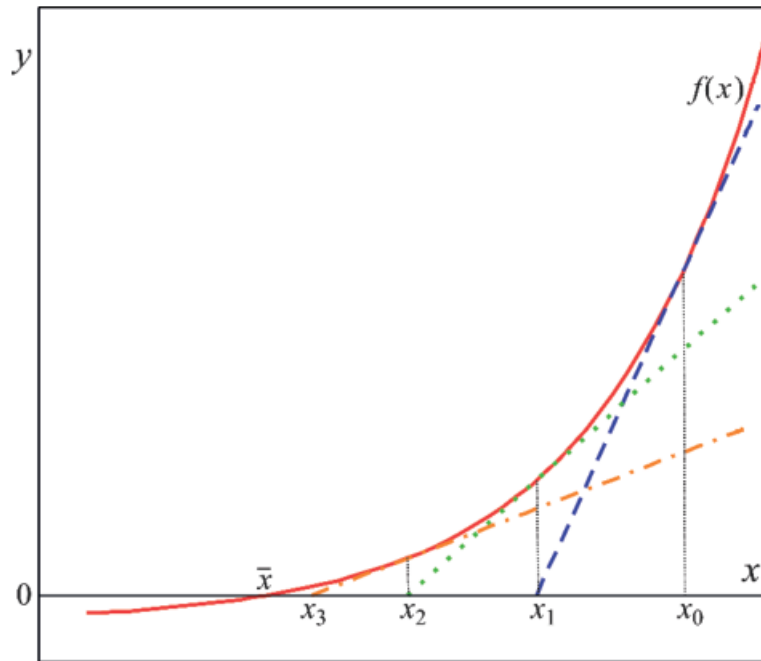


Рис. 12. Геометрическая иллюстрация метода Ньютона

Согласно формуле (42) полученное значение – это следующее приближение x_1 . В точке с абсциссой x_1 проведем еще одну касательную к графику $f(x)$; уравнение касательной:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Точка пересечения этой прямой с осью абсцисс

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Это будет второе приближение x_2 и т. д.

Итак, на каждой итерации график функции $f(x)$ заменяется его касательной. Поэтому метод Ньютона называют еще методом касательных.

Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай рассмотренного выше метода итераций. В самом деле, от уравнения $f(x) = 0$ можно перейти к равносильному

$$-\frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \text{ или } x - \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 + x.$$

Вводя функцию

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

приходим к виду $x = \varphi(x)$, удобному для итераций. Скорость сходимости итерационного процесса, как известно, определяется значением $|\varphi'(x)|$ на отрезке изоляции корня. В нашем случае

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Если подставить сюда корень $x = \bar{x}$, то, с учетом равенства $f(\bar{x}) = 0$ (в уравнение подставлен его собственный корень!), получаем

$$\varphi'(\bar{x}) = 0.$$

Таким образом, в точках, очень близких к корню \bar{x} уравнения $f(x) = 0$, скорость сходимости итерационного процесса бесконечно велика! Тогда можно сделать вывод о том, что при выборе начального приближения x_0 достаточно близко к \bar{x} метод Ньютона (42) должен обеспечивать быструю сходимость последовательности приближений $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ к искомому корню \bar{x} .

К сожалению, этот вывод несколько поспешен. Рассмотрим уравнение $\operatorname{arctg} x = 0$ (рис. 13). Начальное приближение x_0 близко к корню $\bar{x} = 0$, но каждое следующее приближение все дальше от него.

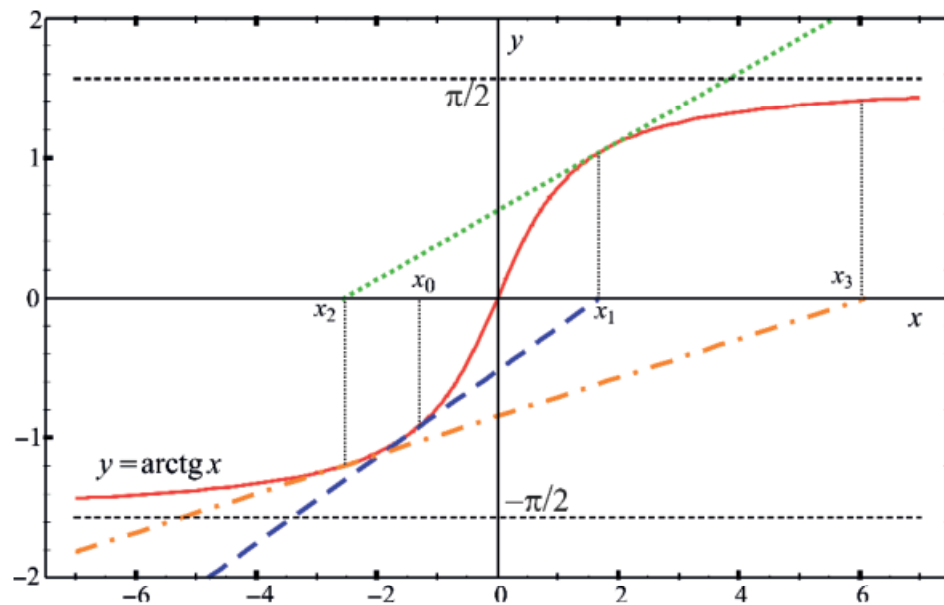


Рис. 13. Пример расходящейся последовательности приближений $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ в методе Ньютона

Оказывается, что при сохранении знака производных $f'(x), f''(x)$ на отрезке $[a, b]$ изоляции корня уравнения $f(x) = 0$ последовательность приближений в методе Ньютона сходится, если в качестве начального приближения x_0 взять любую точку отрезка $[a, b]$.

Если же $f''(x)$ меняет знак на отрезке изоляции корня, то сходимость итерационного процесса возможна, но не гарантируется¹⁵. В рассмотренном примере ситуация именно такова: при переходе через $x = 0$ вторая производная

$$(\operatorname{arctg} x)'' = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

меняет знак (направление выпуклости графика арктангенса меняется на противоположное; $x = 0$ – точка перегиба).

Пример. Решить методом Ньютона уравнение

$$5x - 6 \ln x - 7 = 0. \quad (40)$$

Решение. Выше корни этого уравнения уже изолированы: $\bar{x} \in [0, 1; 1]$ и $\bar{x} \in [2; 3]$. Для функции

$$f(x) = 5x - 6 \ln x - 7$$

¹⁵ Почему не нужно рассматривать случай нарушения знакопостоянства $f'(x)$?

первая и вторая производные $f'(x) = 5 - 6/x$, $f''(x) = 6/x^2$ сохраняют знак на обоих отрезках изоляции корней, что является гарантией сходимости итерационных процессов.

Для левого корня $\bar{x} \in [0,1;1]$ выбираем начальное приближение, например, $x_0 = 0,5$ (в силу самоисправляемости метода это может быть любая точка отрезка изоляции); следующие приближения по Ньютону:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{5x_n - 6 \ln x_n - 7}{5 - \frac{6}{x_n}} = \frac{6x_n \ln x_n + x_n}{5x_n - 6}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для правого корня $\bar{z} \in [2;3]$ при начальном приближении, например, $z_0 = 3,5$, итерационный процесс строится точно так же, как для левого:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = \frac{6z_n \ln z_n + z_n}{5z_n - 6}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Когда нужная точность будет достигнута? Воспользуемся известной формулой *конечных приращений* Лагранжа для дифференцируемой функции $f(x)$

$$f(\alpha) - f(\beta) = f'(\xi) \cdot (\alpha - \beta),$$

где (заранее неизвестная) промежуточная точка $\xi \in [a, b]$. Пусть здесь $\alpha = x_n$, β равняется \bar{x} – искомому значению корня, тогда $f(\beta) = 0$, и

$$f(x_n) = f'(\xi) \cdot (x_n - \bar{x}).$$

Отсюда получаем критерий обрыва счета в методе Ньютона: как только абсолютная погрешность n -го приближения

$$\Delta = |x_n - \bar{x}| = \left| \frac{f(x_n)}{f'(\xi)} \right| \leq \frac{|f(x_n)|}{m},$$

где $m = \min_{[a,b]} |f'(x)|$, станет меньше требуемой точности ε :

$$\frac{|f(x_n)|}{m} < \varepsilon, \tag{43}$$

точность будет достигнута, и вычисления можно прекратить, записав ответ: $\bar{x} \approx x_n$.

Свойства метода Ньютона:

- а) функции, участвующие в расчетах, должны быть дифференцируемыми;
- б) вычислительный процесс (42) самоисправляющийся;
- в) универсальность: нахождение всех корней, сколько бы их не было, обслуживается одним и тем же вычислительным процессом (42) – в противопо-

ложность методу итераций, в котором, как правило, для каждого корня приходится индивидуально строить итерационный процесс;

г) скорость сходимости итерационного процесса обычно бывает *автоматически* высока, что делает излишним ускорение сходимости;

д) на каждом шаге вычислений требуется вычислять производную $f'(x_n)$, что может иногда представлять проблему при сложно заданной функции. Разумеется, Mathcad, в котором предлагается выполнять лабораторные работы, всегда справится с нахождением производной. Но существуют программные пакеты, в которых вычисление производной не предусмотрено. Тогда придётся делать это вручную, т. е. полная автоматизация вычислительного процесса не будет достигнута.

На частичное устранение этого возможного недостатка метода Ньютона направлено введение двух методов, являющихся его следствиями – метода секущих и метода хорд.

4. МЕТОД СЕКУЩИХ

Поскольку математически производная является пределом отношения приращения функции к приращению ее аргумента

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

то, убирая предельный переход, получим приближенное значение производной

$$f'(x) \approx \frac{f(z) - f(x)}{z - x}. \quad (44)$$

В соответствии с этим в методе секущих производная приближенно вычисляется по формуле

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}. \quad (45)$$

Подставляя в (42) это выражение для производной, приходим к следующему итерационному процессу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (46)$$

для которого надо указать два начальных приближения x_0 и x_1 (в отличие от метода Ньютона, где требовалось только x_0). С геометрической точки зрения в методе секущих (46) касательная заменяется секущей, проходящей через точки кривой $y = f(x)$ с абсциссами x_n и x_{n-1} (рис. 14).

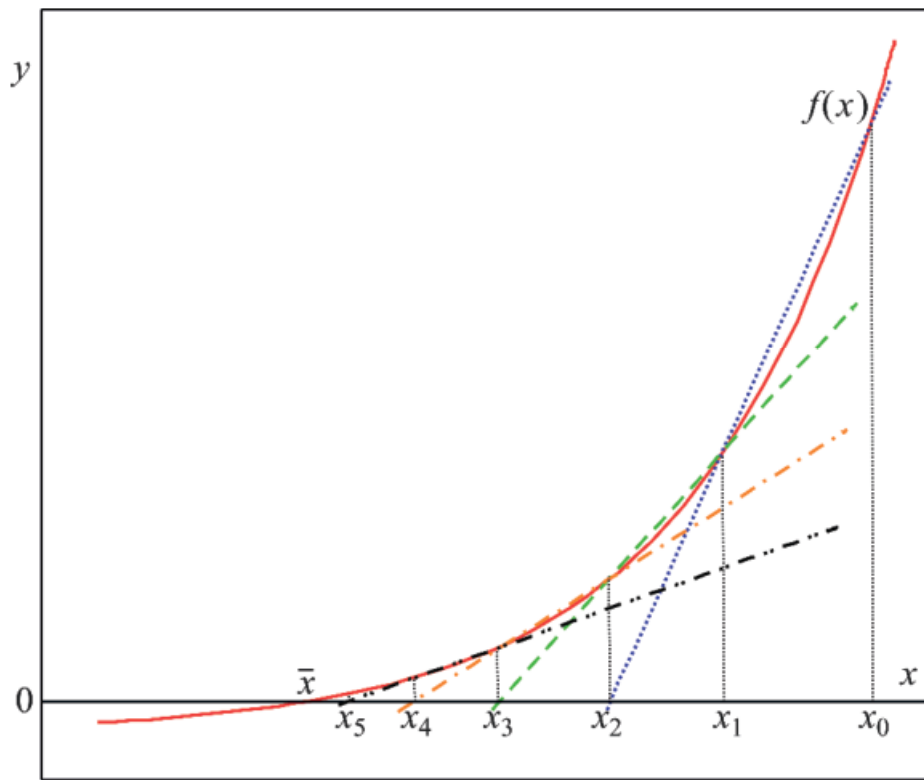


Рис. 14. Геометрическая иллюстрация метода секущих

Свойства метода секущих:

- а) поскольку метод секущих является модификацией метода Ньютона (метода касательных), он наследует все свойства последнего;
- б) скорость сходимости итерационного процесса ниже, чем в методе касательных (вследствие огрубления, заложенного приближением (45)), но остается высокой;
- в) производная $f'(x_n)$ изгоняется из вычислительного процесса, но лишь частично, поскольку для контроля точности (43) она по-прежнему нужна!

5. МЕТОД ХОРД

Применим в формуле (42) еще более грубое приближение для производной:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \quad (47)$$

(в самом деле, точки x_n и x_0 дальше друг от друга, чем x_n и x_{n-1} в (45)). Подставляя в (42) это выражение для производной, получим итерационный процесс метода хорд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (48)$$

для которого, как и в методе секущих, надо указать два начальных приближения x_0 и x_1 . Геометрически в методе хорд касательная заменяется хордой, проходящей через точки кривой $y = f(x)$ с абсциссами x_n и x_0 (рис. 15).

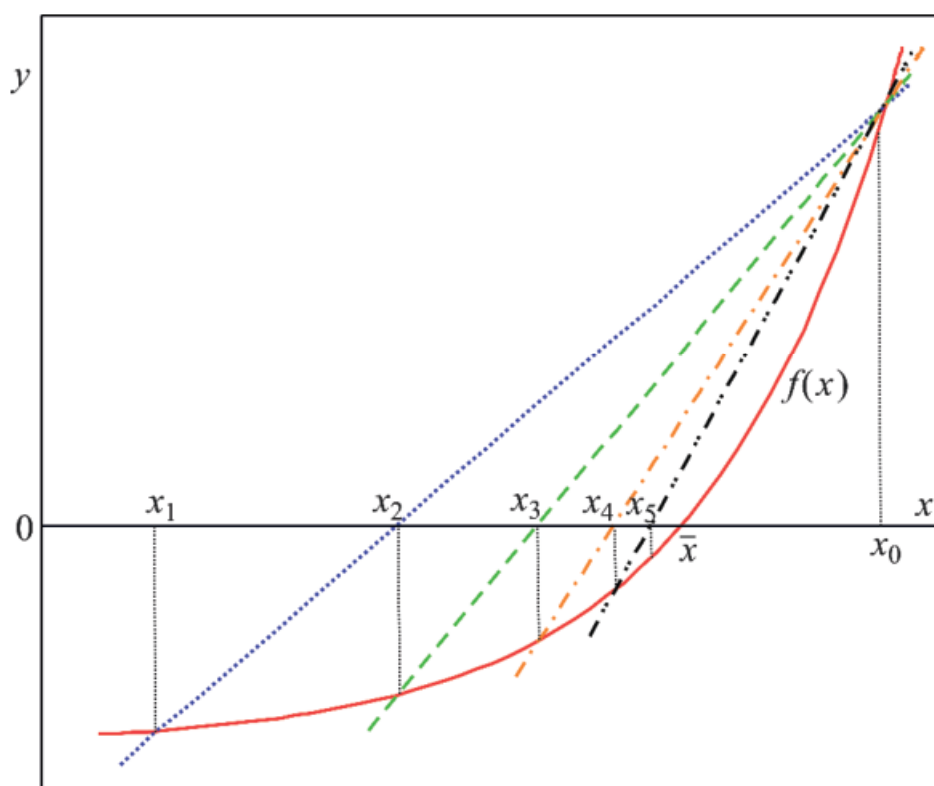


Рис. 15. Геометрическая иллюстрация метода хорд

Метод хорд имеет те же свойства, что и метод секущих, но скорость сходимости, при прочих равных условиях, обычно еще несколько ниже, чем у последнего (оставаясь высокой).

Контрольные вопросы

- 1) В каких ситуациях приходится решать уравнение численно?
- 2) Что такое отрезок изоляции корня? В чём состоят графический и аналитический способы изоляции корней?
- 3) Как подбирается в методе дихотомии (половинного деления) та половина исходного отрезка изоляции, на которой лежит корень? В чём состоит критерий достижения требуемой точности при дихотомии? Каковы достоинства и недостатки этого метода?
- 4) Как преобразовать уравнение $f(x) = 0$ к виду, удобному для итераций? В чём состоит это удобство? Как определяется коэффициент сжатия (коэффициент Липшица)? На что влияет его значение? Как уменьшить коэффициент сжатия?
- 5) В чём состоит свойство самоисправления всех итерационных методов? Сохраняет ли свойство самоисправления свою значимость в компьютерную эпоху (если компьютер не ошибается, то нечего и исправлять)?
- 6) Каков критерий достижения требуемой точности при итерациях? Каковы сравнительные достоинства и недостатки метода итераций?
- 7) Объяснить происхождение альтернативных названий метода Ньютона (метод касательных, метод линеаризации). Каковы условия сходимости после-

довательности приближений к искомому корню в методе Ньютона? Каковы последствия нарушения этих условий? Каков критерий достижения требуемой точности? Каковы сравнительные достоинства и недостатки метода Ньютона?

8) Как получаются методы секущих и хорд из метода Ньютона? Какая цель преследуется при выводе этих следствий метода Ньютона? Каков геометрический смысл методов? В чём причина большей грубости метода хорд по сравнению с методом секущих? Каковы достоинства и недостатки методов секущих и хорд по сравнению с методом Ньютона?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Для заданного уравнения $f(x)=0$ изолировать все корни; найти *один* из них методами дихотомии, итераций, Ньютона, хорд и секущих; достичь точности 10^{-2} методом дихотомии и 10^{-3} остальными методами.

Варианты заданий

- | | |
|------------------------------|---------------------------------|
| 1) $\ln x + x - 2 = 0,$ | 16) $2 \ln x + x - 2 = 0,$ |
| 2) $\ln x + x^2 - 8 = 0,$ | 17) $2 \ln x + x^2 - 3 = 0,$ |
| 3) $\ln x + 2x^2 - 6 = 0,$ | 18) $2 \ln x + 2x^2 - 5 = 0,$ |
| 4) $2 \ln x - x^2 + 5 = 0,$ | 19) $\sin x - x^2 + 4 = 0,$ |
| 5) $2 \ln x + 2x - 3 = 0,$ | 20) $\sin x + x - 2 = 0,$ |
| 6) $\sin x + x^2 - 1 = 0,$ | 21) $3 \sin x + x^2 - 1 = 0,$ |
| 7) $\sin x + 2x^2 - 5 = 0,$ | 22) $\sin x + 2x^2 - 5 = 0,$ |
| 8) $\sin x - x + 3 = 0,$ | 23) $3 \sin x - x + 3 = 0,$ |
| 9) $3 \sin x - x^2 + 4 = 0,$ | 24) $\cos x + x - 2 = 0,$ |
| 10) $3 \sin x + x - 2 = 0,$ | 25) $\cos x + 3x - 6 = 0,$ |
| 11) $\cos x + x^3 - 2 = 0,$ | 26) $2 \ln^2 x + 2x^2 - 3 = 0,$ |
| 12) $\cos x + 2x - 3 = 0,$ | 27) $2 \ln x + x - 7 = 0,$ |
| 13) $\cos x - x^3 + 2 = 0,$ | 28) $2 \ln x + 0,01x^2 = 0,$ |
| 14) $\ln x - x^2 + 5 = 0,$ | 29) $\ln^2 x + 0,25x - 3 = 0,$ |
| 15) $\ln x + 2x - 3 = 0,$ | 30) $\ln x + x^2 - 3 = 0.$ |

ГЛАВА 6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Линейные системы

Пусть задана система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Вводя матрицу коэффициентов при неизвестных (матрицу системы)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

столбец правых частей (неоднородностей) и столбец неизвестных¹⁶

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

можно записать систему (49) в матричном виде

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Методы решения линейных систем можно разбить на две группы: точные (прямые) и приближенные (итерационные).

К точным методам относятся такие, которые в предположении, что вычисления ведутся точно (без округлений), за конечное, заранее оцениваемое количество шагов вычислений приводят к точным значениям неизвестных x_i . Фактически, из-за почти неизбежных округлений при вычислениях, результаты, получаемые точными методами, будут содержать погрешности. Точными являются, например, известные методы Крамера (1704–1752) и Гаусса (1777–1855).

К приближенным относятся такие методы, которые даже в предположении отсутствия погрешности округлений доставляют решение системы лишь с заданной точностью. Точное решение системы достигается асимптотически как

¹⁶ Эти столбцы формально можно считать векторами.

результат бесконечного процесса. Примерами приближенных методов являются метод простой итерации¹⁷ и его модификация – метод Зейделя (1821–1896).

Прежде чем переходить к приближенным методам, напомним некоторые особенности методов Крамера и Гаусса.

Правило Крамера применимо, когда

- количество неизвестных n в системе равно числу уравнений m ; тогда матрица системы A – квадратная, и ей можно сопоставить определитель $\det A$;
- матрица A – невырожденная, т. е. $\det A \neq 0$.

При выполнении этих (довольно стеснительных!) условий решение системы (49) можно найти по формулам (правилу) Крамера

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad (50)$$

где A_i – матрица, получаемая из исходной матрицы A заменой ее i -го столбца столбцом правых частей b_i .

- Итак, для решения системы из n уравнений с n неизвестными по правилу Крамера нужно вычислить $n + 1$ определитель n -го порядка, что очень трудоемко (при самой экономичной организации вычислений потребуются выполнить порядка $\frac{2}{3}n^4$ арифметических операций);

- таким образом, правило Крамера удобно в теоретических приложениях (доказывание теорем, вывод формул и т. п.) – благодаря компактности формулы (50), но крайне неудобно для практического решения систем.

Почти во всех отношениях более предпочтительным является метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных). Он не требует невырожденности матрицы A ; более того, она может даже не быть квадратной. Если же решается система из n уравнений с n неизвестными, то для реализации метода Гаусса потребуется примерно

$$\frac{2n(n+1)(n+2)}{3} + n(n-1)$$

или порядка $\frac{2}{3}n^3$ арифметических операций (сравните с оценкой для правила Крамера!).

¹⁷ Смысл слова «простая» выяснится ниже, при обсуждении метода Зейделя как варианта данного метода.

МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Пусть система из n уравнений с n неизвестными

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

записана в векторно-матричной форме

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (52)$$

и приведена к виду

$$\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{f}, \quad (53)$$

удобному для итерирования ($C_{n \times n}$ – некоторая матрица, \mathbf{f} – вектор-столбец).

Удобство состоит в том, что, задав начальное приближение

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

и подставляя его в правую часть уравнения (53), слева получим следующее приближение:

$$\mathbf{x}^{(1)} = C\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{f}$$

и, вообще,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = C\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (54)$$

В развернутой записи:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \dots + c_{1n}x_n^{(k)} + f_1, \\ \dots &\dots \\ x_n^{(k+1)} &= c_{n1}x_1^{(k)} + c_{n2}x_2^{(k)} + \dots + c_{nn}x_n^{(k)} + f_n. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Выполняя итерации, получим последовательность векторов $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \dots$. Сходится ли эта последовательность, и если да – сходится ли она к искомому решению системы (51)?

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

Прежде чем сформулировать эти условия, напомним некоторые понятия функционального анализа.

Обобщением понятия длины m -мерного вектора \mathbf{x} является норма вектора $\|\mathbf{x}\|$, из множества способов введения которой в численных методах наиболее употребительными являются следующие три нормы:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^m |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m |x_i|^2}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|. \quad (56)$$

Первые две являются частными случаями (при $p=1$ и $p=2$) общей нормы Минковского (1864–1909)

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1,$$

а последняя получается из нее предельным переходом при $p \rightarrow \infty$. Заметим, что норма $\|\mathbf{x}\|_2$ является естественным обобщением длины вектора, вычисляемой по теореме Пифагора в 2- и 3-мерном геометрических пространствах, на случай m -мерного пространства. Норма $\|\mathbf{x}\|_2$ называется евклидовой.

Число

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \quad (57)$$

называется нормой матрицы A . Поскольку умножение матрицы A на вектор \mathbf{x} можно рассматривать как преобразование, переводящее вектор \mathbf{x} в новый вектор $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, то дробь $\|A\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ в формуле (57) является нечем иным как коэффициентом сжатия q , с которым мы уже имели дело в предыдущей главе. Каждой из векторных норм (56) соответствует своя норма матрицы:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2}, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|. \quad (58)$$

Для вычисления нормы $\|A\|_1$ надо найти сумму модулей элементов каждого столбца матрицы A , а затем выбрать максимальную из этих сумм. Для вычисления нормы $\|A\|_\infty$ то же надо сделать не со столбцами, а со строками матрицы A . Для нормы $\|A\|_2$ дана лишь оценка сверху, поскольку точное значение этой нормы вычисляется трудоёмко.

Пример. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & -0,1 & -0,3 \end{pmatrix}$$

вычислить $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ и оценить $\|A\|_2$.

Решение. В соответствии с формулами (58)

$$\|A\|_1 = \max \{0,1 + 0,2 + 0; 0,4 + 0,3 + 0,1; 0 + 0,1 + 0,3\} = 0,8;$$

$$\|A\|_\infty = \max \{0,1 + 0,4 + 0; 0,2 + 0,3 + 0,1; 0 + 0,1 + 0,3\} = 0,6;$$

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |a_{ij}|^2} = \\ &= \sqrt{(0,1)^2 + (-0,4)^2 + 0^2 + (0,2)^2 + (0,3)^2 + (0,1)^2 + 0^2 + (-0,1)^2 + (-0,3)^2} = \\ &= \sqrt{0,41} \approx 0,64.\end{aligned}$$

Теперь можно сформулировать теорему, устанавливающую условие сходимости метода простой итерации и критерий обрыва итерационного процесса (54).

Теорема о сходимости итерационного процесса. Пусть выполнено условие

$$\|C\| < 1. \quad (59)$$

Тогда:

- 1) решение \bar{x} системы (51) существует и единственно;
- 2) при произвольном векторе начального приближения $x^{(0)}$ последовательность приближений сходится к точному решению системы \bar{x} :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \bar{x},$$

и справедлива оценка абсолютной погрешности k -го приближения, обобщающая формулу (38):

$$\Delta = \|x^{(k)} - \bar{x}\| \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|, \quad (60)$$

где в качестве коэффициента сжатия $q = \|C\|$ можно использовать любую норму матрицы (58), удовлетворяющую условию (59).

Несколько замечаний к теореме.

1. Из сходимости итераций по одной из норм следует и сходимость по другой норме, т. е., например, если $\|x^{(k)} - \bar{x}\|_1 \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то и $\|x^{(k)} - \bar{x}\|_2 \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и наоборот.

2. Критерий достижения требуемой точности ε (критерий обрыва счета): вычисления можно прервать, как только абсолютная погрешность Δ , оцениваемая по формуле (60), станет меньше ε . Практически (в соответствии с нормой $\|x\|_\infty$ в (56)) следует проверить для каждой компоненты вектора k -го приближения выполнение условия

$$\frac{q}{1-q} \|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (61)$$

3. Как и для любого сходящегося итерационного процесса, здесь выполняется условие самоисправления: вектор начального приближения $x^{(0)}$ произволен, и при любом его выборе итерационный процесс сойдется к одному и тому

$$\sum_{j=1}^4 |c_{1j}| = |c_{11}| + |c_{12}| + |c_{13}| + |c_{14}| = \frac{1,2+2,1+0,9}{20,9} \approx 0,20, \quad \sum_{j=1}^4 |c_{2j}| \approx 0,24, \quad \sum_{j=1}^4 |c_{3j}| \approx 0,25,$$

$$\sum_{j=1}^4 |c_{4j}| \approx 0,15.$$

$$\|C\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq 4} \sum_{j=1}^4 |c_{ij}| = \max\{0,20; 0,24; 0,25; 0,15\} = 0,25.$$

Итак, коэффициент сжатия $q = \|C\|_{\infty} = 0,25 < 1$. При таком значении q скорость сходимости итерационного процесса будет высокой, поскольку $q/(1-q) = 1/3$.

В качестве вектора начального приближения возьмем столбец неоднородностей в (63):

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 21,70/20,9 \\ 27,46/21,2 \\ 28,76/19,8 \\ 49,72/32,1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,04 \\ 1,30 \\ 1,45 \\ 1,55 \end{pmatrix}.$$

Итерации будем продолжать до тех пор, пока оценка погрешности

$$\frac{q}{1-q} \|\mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i^{(k-1)}\| = \frac{1}{3} \|\mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i^{(k-1)}\| \quad (64)$$

не станет меньше $\varepsilon = 10^{-3}$ для всех компонент вектора.

Первая итерация (ср. с (63)):

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{20,9} (21,70 - 1,2x_2^{(0)} - 2,1x_3^{(0)} - 0,9x_4^{(0)}) = \frac{1}{20,9} (21,70 - 1,2 \cdot 1,30 - 2,1 \cdot 1,45 - 0,9 \cdot 1,55) = 0,75,$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{21,2} (27,46 - 1,2x_1^{(0)} - 1,5x_3^{(0)} - 2,5x_4^{(0)}) = \frac{1}{21,2} (27,46 - 1,2 \cdot 1,04 - 1,5 \cdot 1,45 - 2,5 \cdot 1,55) = 0,95,$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{19,8} (28,76 - 2,1x_1^{(0)} - 1,5x_2^{(0)} - 1,3x_4^{(0)}) = \frac{1}{19,8} (28,76 - 2,1 \cdot 1,04 - 1,5 \cdot 1,30 - 1,3 \cdot 1,55) = 1,14,$$

$$x_4^{(1)} = \frac{1}{32,1} (49,72 - 0,9x_1^{(0)} - 2,5x_2^{(0)} - 1,3x_3^{(0)}) = \frac{1}{32,1} (49,72 - 0,9 \cdot 1,04 - 2,5 \cdot 1,30 - 1,3 \cdot 1,45) = 1,36,$$

итак, $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0,95 \\ 1,14 \\ 1,36 \end{pmatrix}.$

(Вычисления пока можно проводить с небольшим числом знаков после запятой, поскольку трудно ожидать высокой точности от вектора 1-го приближения).

Вторая итерация: $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,8106 \\ 1,0118 \\ 1,2117 \\ 1,4077 \end{pmatrix};$

Третья итерация: $\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,7978 \\ 0,9977 \\ 1,1975 \\ 1,3983 \end{pmatrix};$

Четвертая итерация: $\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,8004 \\ 1,0005 \\ 1,2005 \\ 1,4003 \end{pmatrix}.$

Оценим точность (63), достигнутую после четвертой итерации:

$$\frac{1}{3} \|\mathbf{x}_1^{(4)} - \mathbf{x}_1^{(3)}\| = 0,0009, \quad \frac{1}{3} \|\mathbf{x}_2^{(4)} - \mathbf{x}_2^{(3)}\| = 0,0009, \quad \frac{1}{3} \|\mathbf{x}_3^{(4)} - \mathbf{x}_3^{(3)}\| = 0,001,$$

$$\frac{1}{3} \|\mathbf{x}_4^{(4)} - \mathbf{x}_4^{(3)}\| = 0,0007.$$

Поскольку максимальная из оценок (третья) не меньше $\varepsilon = 0,001$, продолжаем вычисления.

Пятая итерация: $\mathbf{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0,7999 \\ 0,9999 \\ 1,1999 \\ 1,3999 \end{pmatrix}.$

Оценим точность после пятой итерации:

$$\frac{1}{3} \|\mathbf{x}_1^{(5)} - \mathbf{x}_1^{(4)}\| = 1,7 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{1}{3} \|\mathbf{x}_2^{(5)} - \mathbf{x}_2^{(4)}\| = 2 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{1}{3} \|\mathbf{x}_3^{(5)} - \mathbf{x}_3^{(4)}\| = 2 \cdot 10^{-4},$$

$$\frac{1}{3} \|\mathbf{x}_4^{(5)} - \mathbf{x}_4^{(4)}\| = 1,3 \cdot 10^{-4}.$$

Абсолютная погрешность

$$\Delta_5 = \|\mathbf{x}^{(5)} - \bar{\mathbf{x}}\|_{\infty} \leq \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \|\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^{(4)}\|_{\infty} = \frac{1}{3} \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| = 2 \cdot 10^{-4} < 10^{-3} = \varepsilon.$$

Итак, абсолютная погрешность впервые стала меньше требуемой по условию задачи. Вычисления заканчиваем и записываем ответ, округляя $\mathbf{x}^{(5)}$ до трех верных десятичных знаков, которые гарантируются достигнутой точностью $\varepsilon = 0,001$:

$$\bar{\mathbf{x}} \approx \mathbf{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0,800 \\ 1,000 \\ 1,200 \\ 1,400 \end{pmatrix}.$$

Для информации: точное решение системы (62) есть $x_1 = 0,8$, $x_2 = 1,0$, $x_3 = 1,2$, $x_4 = 1,4$.

Замечания. 1) При практической реализации метода простой итерации, например, в Маткаде, рекомендуется ввести четыре функции нескольких переменных, соответствующие правым частям уравнений (63), и на каждой итера-

ции вызывать эти функции по их именам, не переписывая явно саму систему (63).

2) Понятно, что не всегда простейший переход от (62) к (63) обеспечивает выполнение условия сходимости (59) по какой-нибудь норме. Могут потребоваться дополнительные элементарные преобразования строк в исходной системе (62). Пример таких преобразований приведен ниже, при рассмотрении метода Зейделя.

Резюме по методу простой итерации.

1) Метод приводит к выполнению однообразных вычислительных операций и легко программируется на ЭВМ.

2) Как и всегда в методе итераций, скорость сходимости зависит от величины коэффициента сжатия q . При $q \in (0, 1)$ сходимость имеется, при этом $q \approx 0$ обеспечивает высокую скорость сходимости (достижение высокой точности результата за небольшое количество итераций), а при q , приближающемся к единице (со стороны меньших значений), скорость сходимости уменьшается. В этом случае, а также при $q \geq 1$, исходную систему уравнений надо заменить эквивалентной ей системой (линейно комбинируя уравнения), для которой q будет благоприятным. Такое ускорение сходимости всегда возможно, но, к сожалению, общих рекомендаций относительно того, как его добиться, не существует. Это – существенный недостаток метода итераций применительно к системам линейных уравнений.

3) Если итерации сходятся достаточно быстро, то для достижения заданной точности результата может потребоваться меньше вычислительных операций, чем, например, $\sim \frac{2}{3}n^3$ (вычислительная сложность метода Гаусса), и тогда метод простой итерации будет реальным конкурентом метода Гаусса в решении систем линейных уравнений. Добавим, что метод Гаусса программируется существенно сложнее, и работает по принципу «все или ничего»: либо мы получаем значения всех неизвестных (если метод доведен до конца), либо ничего не получаем. В методе итераций на каждом шаге получают значения всех неизвестных (пусть и грубые, при малом числе итераций).

4) Метод – самоисправляющийся (в отличие от методов Крамера и Гаусса).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4а

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Варианты заданий

Решить систему линейных уравнений методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Для проверки сравнить полученный ответ с результатом применения функции *Find* в Mathcad (см. Приложение III).

$$1. \begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,23x_2 + 0,41x_3 - 0,06x_4 + 0,67, \\ x_2 = 0,18x_1 + 0,12x_2 - 0,33x_3 - 0,88, \\ x_3 = 0,12x_1 + 0,32x_2 - 0,05x_3 + 0,67x_4 - 0,18, \\ x_4 = 0,05x_1 - 0,11x_2 + 0,09x_3 - 0,12x_4 + 1,44. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 = 0,34x_2 + 0,23x_3 - 0,06x_4 + 1,42, \\ x_2 = 0,11x_1 - 0,23x_2 - 0,18x_3 + 0,36x_4 - 0,66, \\ x_3 = 0,23x_1 - 0,12x_2 + 0,15x_3 - 0,35x_4 + 1,08, \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,11x_2 - 0,47x_3 + 0,17x_4 + 1,72. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 = 0,06x_1 + 0,17x_2 + 0,34x_3 + 0,16x_4 + 2,43, \\ x_2 = 0,32x_1 + 0,23x_2 - 0,35x_4 - 1,12, \\ x_3 = 0,16x_1 - 0,08x_2 - 0,12x_4 + 0,43, \\ x_4 = 0,09x_1 + 0,21x_2 - 0,13x_3 + 0,83. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 = 0,08x_2 - 0,23x_3 + 0,36x_4 + 1,37, \\ x_2 = 0,16x_1 - 0,22x_2 + 0,18x_3 - 2,38, \\ x_3 = 0,15x_1 + 0,12x_2 + 0,35x_3 - 0,17x_4 + 0,38, \\ x_4 = 0,25x_1 + 0,21x_2 - 0,19x_3 + 0,03x_4 + 0,64. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,13x_2 - 0,08x_3 + 0,16x_4 + 2,42, \\ x_2 = 0,17x_1 - 0,22x_2 + 0,13x_3 - 0,21x_4 + 1,48, \\ x_3 = 0,05x_1 - 0,08x_2 + 0,34x_4 - 0,16, \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,11x_2 - 0,19x_3 + 0,06x_4 + 1,64. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 = 0,12x_1 + 0,23x_2 - 0,33x_3 + 0,07x_4 + 0,17, \\ x_2 = 0,45x_2 - 0,23x_3 + 0,07x_4 - 0,38, \\ x_3 = 0,12x_1 - 0,08x_3 + 0,77x_4 + 0,88, \\ x_4 = 0,08x_1 + 0,09x_2 + 0,39x_3 + 0,22x_4 - 1,74. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 = 0,03x_1 - 0,05x_2 + 0,21x_3 - 0,36x_4 + 0,43, \\ x_2 = 0,28x_1 + 0,52x_2 - 0,83x_3 + 0,07x_4 - 1,8, \\ x_3 = 0,33x_1 + 0,12x_2 - 0,08x_3 - 0,07x_4 - 0,8, \\ x_4 = 0,08x_1 + 0,17x_2 + 0,29x_3 + 0,32x_4 + 1,7. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x_1 = 0,17x_2 - 0,31x_3 + 0,16x_4 - 1,2, \\ x_2 = 0,18x_2 + 0,43x_3 - 0,08x_4 + 0,38, \\ x_3 = 0,22x_1 + 0,18x_2 + 0,25x_3 + 0,07x_4 + 0,48, \\ x_4 = 0,08x_1 + 0,07x_2 + 0,71x_3 + 0,04x_4 - 1,24. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 = 0,02x_1 + 0,03x_2 - 0,62x_3 + 0,06x_4 - 1,6, \\ x_2 = 0,03x_1 + 0,28x_2 + 0,33x_3 - 0,07x_4 + 1,1, \\ x_3 = 0,09x_1 + 0,12x_2 + 0,42x_3 + 0,27x_4 - 1,7, \\ x_4 = 0,19x_1 - 0,21x_2 + 0,08x_3 + 0,37x_4 + 1,4. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1 = 0,52x_1 + 0,03x_2 + 0,11x_4 - 0,22, \\ x_2 = 0,07x_1 - 0,38x_2 - 0,03x_3 + 0,41x_4 + 1,8, \\ x_3 = 0,04x_1 + 0,42x_2 + 0,15x_3 - 0,07x_4 - 1,1, \\ x_4 = 0,15x_1 + 0,17x_2 - 0,13x_3 + 0,19x_4 + 0,34. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x_1 = 0,23x_2 - 0,17x_3 + 0,06x_4 + 0,21, \\ x_2 = 0,52x_1 + 0,12x_3 + 0,17x_4 - 1,18, \\ x_3 = 0,16x_1 - 0,18x_2 + 0,21x_3 - 0,88, \\ x_4 = 0,11x_1 + 0,21x_2 + 0,03x_3 + 0,02x_4 + 0,74. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 = 0,15x_1 + 0,05x_2 - 0,08x_3 + 0,16x_4 - 0,47, \\ x_2 = 0,32x_1 - 0,42x_2 - 0,13x_3 + 0,11x_4 + 1,24, \\ x_3 = 0,17x_1 + 0,06x_2 - 0,08x_3 + 0,12x_4 + 1,18, \\ x_4 = 0,21x_1 - 0,16x_2 + 0,39x_3 - 0,84. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x_1 = 0,17x_1 + 0,26x_2 - 0,11x_3 - 0,16x_4 - 1,41, \\ x_2 = 0,13x_1 - 0,12x_2 + 0,09x_3 - 0,06x_4 + 0,48, \\ x_3 = 0,12x_1 + 0,05x_2 - 0,03x_3 + 0,12x_4 - 2,38, \\ x_4 = 0,13x_1 + 0,18x_2 + 0,24x_3 + 0,45x_4 + 0,72. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x_1 = 0,23x_1 + 0,21x_2 + 0,06x_3 - 0,34x_4 + 1,47, \\ x_2 = 0,05x_1 + 0,33x_3 + 0,12x_4 - 0,57, \\ x_3 = 0,35x_1 - 0,27x_2 - 0,05x_4 + 0,68, \\ x_4 = 0,12x_1 - 0,43x_2 + 0,34x_3 - 0,22x_4 - 2,14. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x_1 = 0,15x_1 + 0,23x_2 + 0,11x_3 + 0,18x_4 - 1,41, \\ x_2 = 0,12x_1 - 0,14x_2 + 0,08x_3 + 0,09x_4 - 0,83, \\ x_3 = 0,16x_1 + 0,24x_2 - 0,35x_4 + 1,18, \\ x_4 = 0,23x_1 - 0,08x_2 + 0,59x_3 + 0,22x_4 + 0,64. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1 = 0,22x_1 - 0,14x_2 + 0,06x_3 - 0,16x_4 + 1,27, \\ x_2 = 0,12x_1 + 0,32x_3 - 0,18x_4 - 0,78, \\ x_3 = 0,08x_1 - 0,12x_2 + 0,23x_3 + 0,32x_4 - 0,58, \\ x_4 = 0,25x_1 + 0,21x_2 + 0,19x_3 + 1,51. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x_1 = 0,12x_1 - 0,23x_2 + 0,25x_3 - 0,16x_4 + 1,07, \\ x_2 = 0,14x_1 + 0,34x_2 - 0,18x_3 + 0,24x_4 - 0,89, \\ x_3 = 0,33x_1 + 0,03x_2 + 0,45x_3 - 0,37x_4 + 1,18, \\ x_4 = 0,12x_1 - 0,05x_2 + 0,12x_4 - 1,14. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 = 0,08x_1 - 0,03x_2 - 0,06x_4 - 1,7, \\ x_2 = 0,54x_1 + 0,24x_3 - 0,08x_4 + 0,81, \\ x_3 = 0,33x_1 - 0,37x_2 + 0,25x_4 - 0,98, \\ x_4 = 0,11x_1 + 0,03x_3 + 0,52x_4 + 0,14. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x_1 = 0,05x_1 - 0,06x_2 - 0,12x_3 + 0,13x_4 - 2,17, \\ x_2 = 0,04x_1 - 0,14x_2 + 0,68x_3 + 0,11x_4 + 1,8, \\ x_3 = 0,34x_1 + 0,08x_2 - 0,05x_3 + 0,47x_4 - 2,18, \\ x_4 = 0,11x_1 + 0,15x_2 - 0,03x_4 - 0,8. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x_1 = 0,07x_1 - 0,08x_2 + 0,11x_3 - 0,18x_4 - 0,51, \\ x_2 = 0,14x_1 - 0,42x_2 + 0,21x_4 + 1,18, \\ x_3 = 0,13x_1 + 0,31x_2 - 0,19x_4 - 1,02, \\ x_4 = 0,08x_1 - 0,33x_2 + 0,28x_4 - 0,28. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x_1 = 0,21x_2 - 0,12x_3 + 0,31x_4 + 2,7, \\ x_2 = 0,34x_1 - 0,11x_3 + 0,21x_4 - 1,5, \\ x_3 = 0,11x_1 + 0,23x_2 - 0,42x_4 + 1,28, \\ x_4 = 0,17x_1 - 0,21x_2 + 0,31x_3 - 0,18. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x_1 = 0,15x_1 - 0,08x_2 + 0,32x_3 - 0,23x_4 - 0,87, \\ x_2 = -0,21x_1 + 0,04x_2 + 0,11x_3 + 0,31x_4 - 0,68, \\ x_3 = 0,51x_1 - 0,06x_2 + 0,07x_3 - 0,17x_4 + 1,78, \\ x_4 = 0,31x_1 - 0,45x_2 - 1,28. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x_1 = 0,12x_1 + 0,26x_2 - 0,19x_3 - 0,17x_4 + 1,23, \\ x_2 = -0,18x_1 - 0,44x_3 + 0,18x_4 - 0,31, \\ x_3 = 0,12x_1 + 0,13x_2 - 0,35x_3 + 0,07x_4 - 0,48, \\ x_4 = 0,31x_1 - 0,05x_2 + 0,05x_3 - 0,27x_4 - 0,16. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x_1 = 0,14x_1 + 0,31x_2 - 0,17x_3 + 0,21x_4 - 1,73, \\ x_2 = -0,218x_1 + 0,32x_3 + 0,19x_4 + 0,61, \\ x_3 = 0,32x_1 - 0,15x_2 + 0,05x_3 - 0,17x_4 - 0,88, \\ x_4 = 0,11x_1 + 0,25x_2 - 0,13x_3 + 0,96. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x_1 = 0,13x_1 + 0,22x_2 - 0,41x_3 - 0,04x_4 + 2,13, \\ x_2 = 0,23x_1 - 0,31x_3 + 0,11x_4 - 0,18, \\ x_3 = 0,06x_1 + 0,13x_2 - 0,21x_4 + 1,48, \\ x_4 = 0,71x_1 - 0,04x_2 - 0,05x_3 + 2,46. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x_1 = 0,17x_1 - 0,24x_2 - 0,12x_3 + 0,14x_4 - 1,33, \\ x_2 = 0,11x_1 + 0,22x_2 - 0,37x_3 + 0,27x_4 + 0,81, \\ x_3 = 0,05x_1 - 0,12x_2 + 0,13x_3 - 0,17x_4 - 1,16, \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,04x_2 + 0,05x_3 + 0,57. \end{cases}$$

27.
$$\begin{cases} x_1 = 0,33x_1 - 0,28x_2 + 0,02x_3 + 1,43, \\ x_2 = 0,31x_1 - 0,21x_2 - 0,35x_3 + 1,41, \\ x_3 = 0,12x_1 + 0,08x_2 - 0,13x_3 - 0,15x_4 - 1,06, \\ x_4 = 0,14x_1 - 0,34x_2 - 0,15x_3 - 1,47. \end{cases}$$
28.
$$\begin{cases} x_1 = 0,26x_1 - 0,14x_2 + 0,02x_3 + 0,24x_4 + 1,73, \\ x_2 = 0,15x_1 + 0,12x_2 - 0,17x_3 + 0,26x_4 - 0,65, \\ x_3 = 0,35x_1 + 0,22x_2 - 0,03x_3 - 0,27x_4 + 2,26, \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,24x_2 - 0,15x_3 + 0,23x_4 - 1,17. \end{cases}$$
29.
$$\begin{cases} x_1 = 0,16x_1 + 0,13x_2 - 0,32x_3 - 0,16x_4 - 0,64, \\ x_2 = 0,34x_1 - 0,08x_2 + 0,15x_3 - 0,18x_4 + 1,42, \\ x_3 = 0,15x_1 + 0,32x_2 + 0,13x_3 - 0,25x_4 - 2,06, \\ x_4 = 0,11x_1 - 0,26x_2 - 0,08x_3 + 0,24x_4 + 0,83. \end{cases}$$
30.
$$\begin{cases} x_1 = 0,23x_1 - 0,04x_2 + 0,22x_3 - 0,14x_4 + 1,24, \\ x_2 = 0,34x_1 - 0,23x_2 + 0,07x_3 - 0,88, \\ x_3 = 0,26x_1 + 0,31x_2 - 0,02x_3 + 0,29, \\ x_4 = 0,07x_1 - 0,21x_2 + 0,27x_3 - 0,13x_4 - 1,19. \end{cases}$$

МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

Как известно, метод простой итерации для решения системы уравнений базируется на простой идее вычисления вектора $(k+1)$ -й итерации с использованием компонент вектора предыдущей, k -й итерации (55). Метод Зейделя является модификацией метода простой итерации и несколько усложняет эту процедуру. А именно, при вычислении вектора $(k+1)$ -й итерации используются не только компоненты вектора k -й итерации, но и уже вычисленные к данному моменту компоненты вектора текущей, $(k+1)$ -й итерации:

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9, & (\text{I} + \text{II}) \\ 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7, & (\text{II} + 2 \cdot \text{III} - \text{I}) \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4. & (\text{III} - \text{II}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1 = 2,4x_1 - 0,5x_2 - 2,4x_3 + 1,9, \\ 10x_2 = -2,2x_1 + 0,9x_2 - 4,4x_3 + 9,7, \\ 10x_3 = 1,3x_1 - 0,2x_2 + 4,2x_3 - 1,4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,24x_1 - 0,05x_2 - 0,24x_3 + 0,19, \\ x_2 = -0,22x_1 + 0,09x_2 - 0,44x_3 + 0,97, \\ x_3 = 0,13x_1 - 0,02x_2 + 0,42x_3 - 0,14. \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^4 |c_{1j}| = |c_{11}| + |c_{12}| + |c_{13}| + |c_{14}| = 0,24 + 0,05 + 0,24 = 0,53,$$

$$\sum_{j=1}^4 |c_{2j}| = 0,75, \quad \sum_{j=1}^4 |c_{3j}| = 0,57,$$

$$\|C\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 |c_{ij}| = \max \{0,53; 0,75; 0,57\} = 0,75 = q < 1.$$

Итак, обеспечена сходимость (правда, не очень быстрая) итерационного процесса Зейделя.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 46

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЗЕЙДЕЛЯ

Варианты заданий

Преобразовав систему линейных уравнений к виду, удобному для итераций, решить её методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Для проверки сравнить полученный ответ с результатом применения функции *Find* в Mathcad (см. Приложение III).

$$1. \begin{cases} 3,2x_1 - 11,5x_2 + 3,8x_3 = 2,8, \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 - 6,4x_3 = -6,5, \\ 2,4x_1 + 7,2x_2 - 1,2x_3 = 4,5. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2,4x_1 + 3,7x_2 - 8,3x_3 = 2,3, \\ 1,8x_1 + 4,3x_2 + 1,2x_3 = -1,2, \\ 3,4x_1 - 2,3x_2 + 5,2x_3 = 3,5. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5,4x_1 - 2,4x_2 + 3,8x_3 = 5,5, \\ 2,5x_1 + 6,8x_2 - 1,1x_3 = 4,3, \\ 2,7x_1 - 0,6x_2 + 1,5x_3 = -3,5. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2,4x_1 + 2,5x_2 - 2,9x_3 = 4,5, \\ 0,8x_1 + 3,5x_2 - 1,4x_3 = 3,2, \\ 1,5x_1 - 2,3x_2 + 8,6x_3 = -5,5. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 0,9x_1 + 2,7x_2 - 3,8x_3 = 2,4, \\ 2,5x_1 + 5,8x_2 - 0,5x_3 = 3,5, \\ 4,5x_1 - 2,1x_2 + 3,2x_3 = -1,2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 1,5x_1 + 2,3x_2 - 3,7x_3 = 4,5, \\ 2,8x_1 + 3,4x_2 + 5,8x_3 = -3,2, \\ 1,2x_1 + 7,3x_2 - 2,3x_3 = 5,6. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 6,3x_1 + 5,2x_2 - 0,6x_3 = 1,5, \\ 3,4x_1 - 2,3x_2 + 3,4x_3 = 2,7, \\ 0,8x_1 + 1,4x_2 + 3,5x_3 = -2,3. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3,7x_1 - 2,3x_2 + 4,5x_3 = 2,4, \\ 2,5x_1 + 4,7x_2 - 7,8x_3 = 3,5, \\ 1,6x_1 + 5,3x_2 + 1,3x_3 = -2,4. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 4,1x_1 + 5,2x_2 - 5,8x_3 = 7,1, \\ 3,8x_1 - 3,1x_2 + 4,1x_3 = 5,3, \\ 7,8x_1 + 5,3x_2 - 6,3x_3 = 5,8. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3,7x_1 + 3,1x_2 + 4,1x_3 = 5,1, \\ 3,9x_1 + 4,5x_2 - 4,8x_3 = 4,9, \\ -2,1x_1 - 3,7x_2 + 1,8x_3 = 2,7. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 7,1x_1 + 6,8x_2 + 6,1x_3 = 7,1, \\ 5,1x_1 + 4,8x_2 + 5,3x_3 = 6,1, \\ 8,2x_1 + 7,8x_2 + 7,1x_3 = 5,8. \end{cases}$$

12.
$$\begin{cases} 3,3x_1 + 3,7x_2 + 4,2x_3 = 5,8, \\ 2,7x_1 + 2,3x_2 - 2,9x_3 = 6,1, \\ 4,1x_1 + 4,8x_2 - 5,1x_3 = 6,9. \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} 2,8x_1 + 3,8x_2 - 3,2x_3 = 4,5, \\ 2,5x_1 - 2,8x_2 + 3,3x_3 = 7,1, \\ 6,5x_1 - 7,3x_2 + 4,8x_3 = 6,3. \end{cases}$$
14.
$$\begin{cases} 1,7x_1 - 2,2x_2 + 2,9x_3 = 1,9, \\ 2,1x_1 + 1,9x_2 - 2,3x_3 = 2,8, \\ 4,2x_1 + 3,9x_2 - 3,1x_3 = 5,1. \end{cases}$$
15.
$$\begin{cases} 3,8x_1 + 4,2x_2 - 2,3x_3 = 4,8, \\ -2,1x_1 + 4,1x_2 - 6,1x_3 = 3,3, \\ 1,8x_1 + 1,2x_2 - 2,2x_3 = 5,8. \end{cases}$$
16.
$$\begin{cases} 7,7x_1 + 5,2x_2 + 4,9x_3 = 1,8, \\ 3,1x_1 + 1,2x_2 + 1,8x_3 = 2,3, \\ 4,5x_1 + 3,2x_2 + 2,8x_3 = 3,4. \end{cases}$$
17.
$$\begin{cases} 5,4x_1 - 6,2x_2 - 0,5x_3 = 0,6, \\ 3,4x_1 + 2,3x_2 + 0,8x_3 = -0,8, \\ 2,4x_1 - 1,1x_2 + 3,8x_3 = 1,8. \end{cases}$$
18.
$$\begin{cases} 3,8x_1 + 6,7x_2 - 1,2x_3 = 5,2, \\ 6,4x_1 + 1,3x_2 - 2,7x_3 = 3,8, \\ 2,4x_1 - 4,5x_2 + 3,5x_3 = -0,8. \end{cases}$$
19.
$$\begin{cases} 4,4x_1 - 3,5x_2 + 7,4x_3 = 2,5, \\ 3,1x_1 - 0,6x_2 - 2,3x_3 = -1,5, \\ 0,8x_1 + 7,4x_2 - 0,5x_3 = 6,4. \end{cases}$$
20.
$$\begin{cases} 2,8x_1 + 0,9x_2 - 1,5x_3 = 3,5, \\ 4,4x_1 - 2,8x_2 + 6,7x_3 = 2,6, \\ 5,1x_1 + 3,7x_2 - 1,4x_3 = -0,6. \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} 5,6x_1 + 2,7x_2 - 1,7x_3 = 1,9, \\ 3,4x_1 - 3,6x_2 - 6,6x_3 = -2,4, \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 + 3,7x_3 = 1,2. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 3,6x_1 + 1,8x_2 - 4,7x_3 = 3,8, \\ 2,7x_1 - 3,6x_2 + 1,9x_3 = 0,4, \\ 1,5x_1 + 4,5x_2 + 3,3x_3 = -1,6. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 5,4x_1 - 2,3x_2 + 3,4x_3 = -3,5, \\ 4,2x_1 + 1,7x_2 - 2,3x_3 = 2,7, \\ 3,4x_1 + 2,4x_2 + 7,3x_3 = 1,9. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 3,2x_1 - 2,5x_2 + 3,7x_3 = 6,5, \\ 0,4x_1 + 0,6x_2 + 1,7x_3 = -0,4, \\ 1,6x_1 + 2,3x_2 - 1,5x_3 = 4,2. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 7,6x_1 + 5,8x_2 + 4,7x_3 = 10,1, \\ 3,8x_1 + 4,2x_2 + 2,5x_3 = 9,7, \\ 2,9x_1 + 2,2x_2 + 3,8x_3 = 7,4. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 3,3x_1 + 2,1x_2 + 2,9x_3 = 0,8, \\ 4,1x_1 + 3,7x_2 + 4,8x_3 = 5,3, \\ 2,5x_1 + 1,9x_2 + 1,1x_3 = 3,2. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 9,1x_1 + 5,6x_2 + 7,8x_3 = 9,8, \\ 3,8x_1 + 5,1x_2 + 2,8x_3 = 6,3, \\ 4,1x_1 + 5,7x_2 + 1,2x_3 = 5,8. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3,1x_1 + 2,8x_2 + 1,9x_3 = 0,3, \\ 1,9x_1 + 3,2x_2 + 2,1x_3 = 2,2, \\ 7,5x_1 + 3,8x_2 + 4,8x_3 = 5,4. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 1,7x_1 + 2,9x_2 + 1,8x_3 = 0,8, \\ 2,1x_1 + 3,3x_2 + 1,9x_3 = 1,3, \\ 4,2x_1 - 1,7x_2 + 1,3x_3 = 2,8. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 2,7x_1 + 3,3x_2 + 1,3x_3 = 2,1, \\ 3,5x_1 - 1,7x_2 + 2,8x_3 = 1,7, \\ 4,1x_1 + 5,8x_2 - 1,8x_3 = 0,8. \end{cases}$$

Нелинейные системы

Решение систем нелинейных и/или трансцендентных уравнений, вообще говоря, является гораздо более сложной задачей, чем решение линейных систем. Наиболее труден этап отделения (изоляции) корней. Для системы с двумя неизвестными можно использовать геометрические построения, но при большем числе неизвестных такой подход неприменим.

Описанные ниже итерационные методы вычисления корней исходят из того, что задача отделения корней уже решена, и имеется достаточно малая область изоляции, в которой находится подлежащий уточнению корень.

Для простоты будем рассматривать нелинейную систему из двух уравнений с двумя неизвестными

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= 0, \\ f_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Предположим, что начальные приближения корней $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ в области изоляции получены.

Преобразуем систему (66) к виду, удобному для итераций:

$$\left. \begin{aligned} x &= F_1(x, y), \\ y &= F_2(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Подставляя в правые части уравнений (67) вместо x , y начальные приближения, получим первые приближения к корням:

$$\left. \begin{aligned} x^{(1)} &= F_1(x^{(0)}, y^{(0)}), \\ y^{(1)} &= F_2(x^{(0)}, y^{(0)}). \end{aligned} \right\}$$

Аналогично вычисляются вторые приближения:

$$\left. \begin{aligned} x^{(2)} &= F_1(x^{(1)}, y^{(1)}), \\ y^{(2)} &= F_2(x^{(1)}, y^{(1)}) \end{aligned} \right\}$$

и, вообще,

$$\left. \begin{aligned} x^{(k+1)} &= F_1(x^{(k)}, y^{(k)}), \\ y^{(k+1)} &= F_2(x^{(k)}, y^{(k)}) \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

(метод простой итерации) или

$$\left. \begin{aligned} x^{(k+1)} &= F_1(x^{(k)}, y^{(k)}), \\ y^{(k+1)} &= F_2(x^{(k+1)}, y^{(k)}) \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

(метод Зейделя).

Возникают последовательности приближений

$$x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots \quad (70)$$

и

$$y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}, \dots \quad (71)$$

Сходятся ли эти последовательности?

Для ответа на этот вопрос перейдём к векторно-матричной форме записи, подобно тому, как это делалось в случае линейных систем(53). Введём вектор неизвестных

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

и вектор-функцию

$$\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{X}) \\ F_2(\mathbf{X}) \end{pmatrix}.$$

Система (67) примет вид

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}).$$

Введём матрицу Якоби (1804–1851) $\mathbf{F}'(\mathbf{X})$, составленную из частных производных по аргументам:

$$\mathbf{F}'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial x} & \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial x} & \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Теорема о сходимости итерационного процесса. Пусть в некоторой окрестности решения $\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ системы (67) функции $F_1(x)$, $F_2(x)$ дифференцируемы, и выполнено условие

$$\|\mathbf{F}'(\mathbf{X})\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial x} & \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial x} & \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial y} \end{pmatrix} \right\| \leq q < 1, \quad (72)$$

где q (коэффициент сжатия) – постоянная.

Тогда независимо от выбора начального приближения $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix}$ из

данной окрестности

1) последовательности приближений (70), (71) не выходят из этой окрестности и сходятся, соответственно, к \bar{x} и \bar{y} – решению системы;

2) справедлива оценка абсолютной погрешности k -го приближения

$$\Delta = \left\| \mathbf{X}^{(k)} - \bar{\mathbf{X}} \right\| \leq \frac{q}{1-q} \left\| \mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}^{(k-1)} \right\|, \quad (73)$$

которая используется в критерии достижения требуемой точности: как только оценка (73) становится меньше ε (требуемой точности), итерации можно прекратить.

Замечания. 1) Условие (72) означает, что в окрестности решения производные $\partial F_i / \partial x_j$ малы для всех i, j . Таким образом, исходную систему (66) надо преобразовать к такому виду (67), чтобы функции $F_i(x)$ слабо менялись при изменении аргументов. Общих рецептов, как этого добиться, не существует.

2) В зависимости от используемой нормы векторов (56) и матриц (58) можно конкретизировать (73) и сформулировать следующие наиболее часто используемые критерии обрыва счета:

Норма $\| \cdot \|_1$

Пусть в окрестности решения системы (67) выполнены равенства

$$\left| \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial x} \right| \leq q_1 < 1, \quad (74a)$$

$$\left| \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial y} \right| \leq q_2 < 1. \quad (74b)$$

Обозначим $Q = \max \{q_1, q_2\}$.

Как только окажется, что

$$\frac{Q}{1-Q} \left(\left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right| + \left| y^{(k)} - y^{(k-1)} \right| \right) < \varepsilon,$$

итерации можно прервать, поскольку требуемая точность достигнута.

Норма $\| \cdot \|_\infty$

Пусть в окрестности решения системы (67) выполнены равенства

$$\left| \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial y} \right| \leq \tilde{q}_1 < 1, \quad (75a)$$

$$\left| \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial y} \right| \leq \tilde{q}_2 < 1. \quad (75b)$$

Обозначим $\tilde{Q} = \max\{\tilde{q}_1, \tilde{q}_2\}$.

Как только окажется, что

$$\frac{\tilde{Q}}{1-\tilde{Q}} \max\left\{ \left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right|, \left| y^{(k)} - y^{(k-1)} \right| \right\} < \varepsilon,$$

итерации можно прервать, поскольку требуемая точность достигнута.

Пример. Решить методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ систему

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= x + 3 \lg x - y^2 = 0, \\ f_2(x, y) &= 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Решение. Найдём прямоугольник изоляции решений графически. В обоих уравнениях выразим y :

$$y = \pm \sqrt{x + 3 \lg x}, \quad y = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x},$$

построим кривые и найдем точки их пересечения (см. рис. 16). Таких точек две: $A(1,4; -1,4)$ и $B(3,4; 2,2)$.

Рассмотрим вторую из этих точек и уточним значения \bar{x} , \bar{y} методом Зейделя. Систему (76) надо привести к виду (67), удобному для итераций. Это можно сделать по-разному.

Первая попытка:

$$x = y^2 - 3 \lg x, \quad y = 2x + 1/x - 5. \quad (77)$$

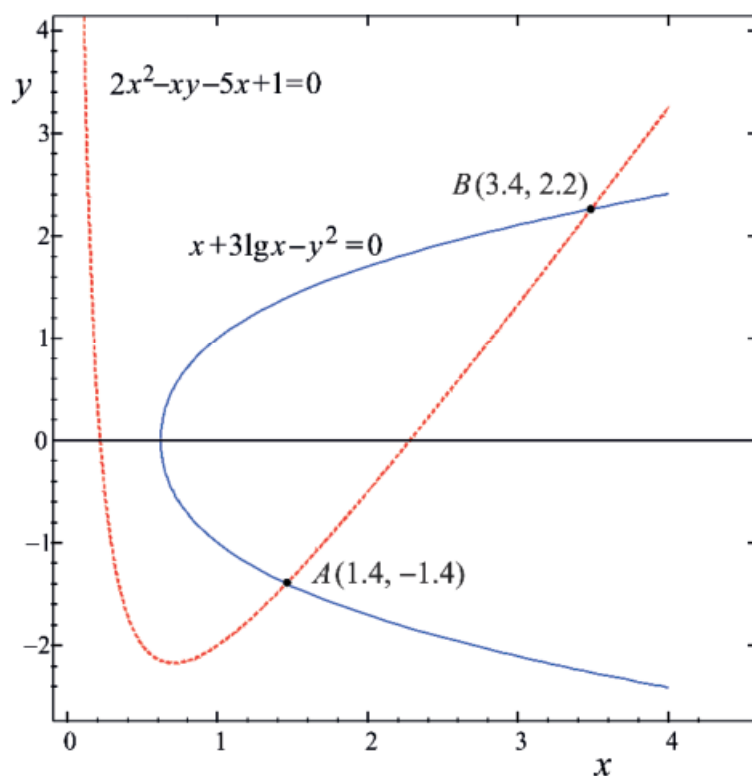


Рис. 16. Отделение корней системы (76) графическим способом. Кривые пересекаются в двух точках – A и B

Введем функции

$$F_1(x, y) = y^2 - 3 \lg x, \quad F_2(x, y) = 2x + 1/x - 5.$$

Их частные производные:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{3}{x \ln 10}; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2 - \frac{1}{x^2}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0.$$

Будем руководствоваться нормой $\|\cdot\|_1$ и проверим выполнение условий (74a), (74b). В окрестности точки $B(3, 4; 2, 2)$

$$\left| \frac{\partial F_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial F_2}{\partial x} \right| > 1, \quad \left| \frac{\partial F_1}{\partial y} \right| > 4.$$

Условия сходимости итерационного процесса не выполнены. По норме $\|\cdot\|_\infty$ (75a), (75b) ситуация не лучше (проверьте!). Использовать систему (77) для уточнения корней нельзя.

Вторая попытка. Выразим теперь x из второго уравнения системы (76), а y – из первого:

$$x = \sqrt{\frac{x(5+y)-1}{2}}; \quad y = \sqrt{x + 3 \lg x} \quad (78)$$

(знаки перед радикалами поставлены с учетом расположения точки B в I координатной четверти).

Введем функции

$$F_3(x, y) = \sqrt{\frac{x(5+y)-1}{2}}; \quad F_4(x, y) = \sqrt{x + 3 \lg x}$$

и найдем их частные производные:

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{5+y}{2\sqrt{x(5+y)-1}}; \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{2\sqrt{x(5+y)-1}}; \quad (79)$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial x} = \frac{1 + \frac{3}{x \ln 10}}{2\sqrt{x + 3 \lg x}}; \quad \frac{\partial F_4}{\partial y} = 0.$$

В качестве области изоляции корня, судя по рис. 16, можно взять прямоугольник $3 < x < 4$, $2 < y < 2,5$. Применяя норму $\|\cdot\|_\infty$, проверим выполнение условий (75a), (75b). Для этого вычислим значения сумм частных производных в вершинах¹⁸ прямоугольника изоляции и найдем максимальные значения этих сумм:

¹⁸Вероятнее, что максимальное значение достигается в какой-нибудь (неизвестной) внутренней точке прямоугольника, но поиск ее сложен, а ошибка в определении максимума будет невелика, в силу непрерывности рассматриваемых функций в этом (малом) прямоугольнике.

$$\left| \frac{\partial F_3}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial F_3}{\partial y} \right| \leq 0,92 = \tilde{q}_1 < 1, \quad \left| \frac{\partial F_4}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial F_4}{\partial y} \right| \leq 0,34 = \tilde{q}_2 < 1.$$

Итого, $\tilde{Q} = \max\{\tilde{q}_1, \tilde{q}_2\} = 0,92 < 1$. Условие сходимости итерационного процесса выполнено. Правда, скорость сходимости будет невелика, поскольку коэффициент сжатия близок к единице (ниже рассматривается вопрос о том, как ускорить сходимость итерационного процесса).

По норме $\|\cdot\|_1$ (74a), (74b) ситуация аналогична (проверьте самостоятельно).

Итак, можно начинать вычисления по методу Зейделя.

1) В качестве начального приближения выберем приблизительный центр прямоугольника изоляции

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,4 \\ 2,2 \end{pmatrix}.$$

2) Итерационный процесс имеет вид:

$$x^{(k+1)} = \sqrt{\frac{x^{(k)}(5 + y^{(k)}) - 1}{2}}; \quad y^{(k+1)} = \sqrt{x^{(k+1)} + 3 \lg x^{(k+1)}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

3) Критерий обрыва счета: как только абсолютная погрешность Δ , оцениваемая по максимуму выражением

$$\frac{\tilde{Q}}{1 - \tilde{Q}} \max \left\{ \left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right|, \left| y^{(k)} - y^{(k-1)} \right| \right\} = \frac{0,92}{1 - 0,92} \max \left\{ \left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right|, \left| y^{(k)} - y^{(k-1)} \right| \right\},$$

станет меньше требуемой точности $\varepsilon = 10^{-2}$, итерации можно завершить.

Начало расчетов:

$$x^{(1)} = \sqrt{\frac{x^{(0)}(5 + y^{(0)}) - 1}{2}} = \sqrt{\frac{3,4(5 + 2,2) - 1}{2}} = 3,426, \quad y^{(1)} = \sqrt{3,426 + 3 \lg 3,426} = 2,243,$$

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,426 \\ 2,243 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3,451 \\ 2,250 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3,466 \\ 2,255 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}^{(4)} = \begin{pmatrix} 3,475 \\ 2,258 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{X}^{(5)} = \begin{pmatrix} 3,480 \\ 2,259 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}^{(6)} = \begin{pmatrix} 3,483 \\ 2,260 \end{pmatrix}.$$

Оценим точность, достигнутую после шестой итерации:

$$\frac{0,92}{1 - 0,92} \max \left\{ \left| x^{(6)} - x^{(5)} \right|, \left| y^{(6)} - y^{(5)} \right| \right\} = 11,5 \cdot \max \{0,03, 0,01\} = 0,34 > \varepsilon = 0,01,$$

Видим, что требуемая точность не достигнута (и долго еще не будет достигнута). Ускорение сходимости насущно необходимо...

Заключительные замечания к методу итераций для нелинейных систем.

1) Условие сходимости итерационного процесса для линейных систем (59) является естественным следствием соответствующего условия для нелинейных систем (72). В самом деле, если функция линейна:

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n,$$

то ее частная производная по данному аргументу равна коэффициенту при этом аргументе:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = c_{ik},$$

т. е. матрица Якоби $F'(X)$ превращается в матрицу C (53).

2) Подобно тому, как скорость сходимости итерационного процесса для решения одного уравнения можно повысить введением удачно подобранного параметра λ , для системы уравнений введение нескольких параметров позволяет ускорить сходимость итераций. Рассмотрим для простоты систему из двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= 0, \\ f_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

От исходных уравнений перейдем к их линейным комбинациям

$$\left. \begin{aligned} \alpha \cdot f_1(x, y) + \beta \cdot f_2(x, y) &= 0, \\ \gamma \cdot f_1(x, y) + \delta \cdot f_2(x, y) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – (пока неизвестные) числа; окончательно,

$$\left. \begin{aligned} x &= x + \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) = F_1(x, y), \\ y &= y + \gamma f_1(x, y) + \delta f_2(x, y) = F_2(x, y). \end{aligned} \right\}$$

Скорость сходимости итерационного процесса определяется коэффициентом сжатия, который, в свою очередь, связан с частными производными функций $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$. Вычислим частные производные в точке начального приближения $M_0(x^{(0)}, y^{(0)})$ и приравняем их нулю для обеспечения максимальной скорости сходимости в окрестности M_0 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{M_0} &= 1 + \alpha \frac{\partial f_1(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial x} + \beta \frac{\partial f_2(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big|_{M_0} &= \alpha \frac{\partial f_1(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y} + \beta \frac{\partial f_2(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Из этих двух уравнений, линейных по α, β , найдем сами параметры α и β . Аналогично, из условий

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial x} \right|_{M_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial F_2}{\partial y} \right|_{M_0} = 0$$

найдем параметры γ и δ .

Рассмотрим пример ускорения сходимости.

Пример. Построить быстро сходящийся итерационный процесс для отыскания положительного решения системы

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ x^3 - y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

методом простой итерации.

Решение. Графическим способом (см. рис.17) находим начальное приближение $x^{(0)} = 0,8$, $y^{(0)} = 0,6$.

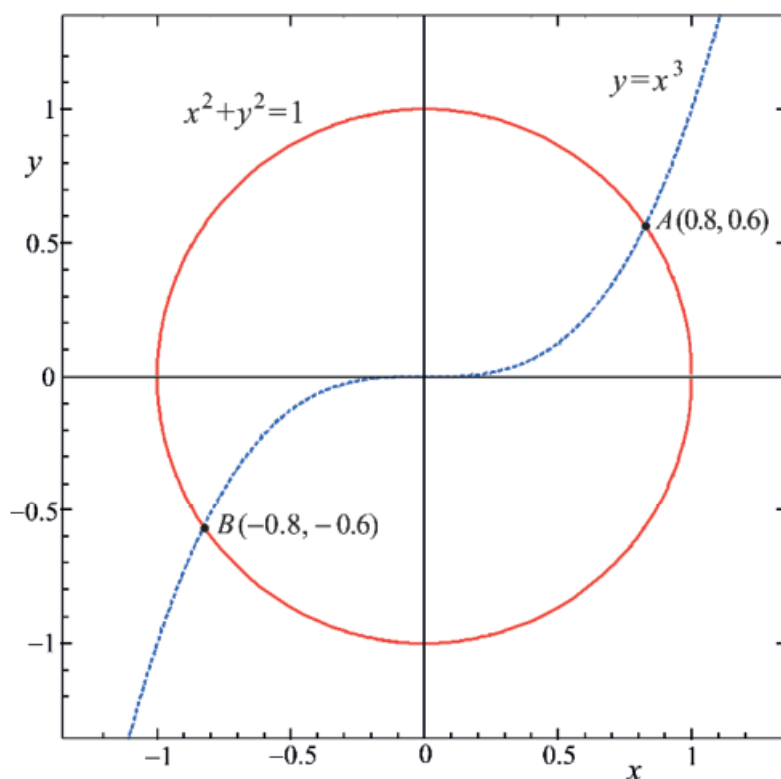


Рис. 17. Окружность и кубическая парабола пересекаются приблизительно в точках $A(0,8, 0,6)$ и $B(-0,8, -0,6)$. Координаты этих точек можно использовать в качестве нулевых приближений при решении системы (80)

Вводим функции с параметрами:

$$F_1(x, y) = x + \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y), \quad F_2(x, y) = y + \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y).$$

Дифференцируем и подставляем точку A :

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial x} \right|_A = \left(1 + \alpha \cdot 2x + \beta \cdot 3x^2 \right) \Big|_{\substack{x=0,8 \\ y=0,6}} = 1 + 1,6\alpha + 1,92\beta = 0,$$

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial y} \right|_A = (\alpha \cdot 2y + \beta \cdot (-1)) \Big|_{\substack{x=0,8 \\ y=0,6}} = 1,2\alpha - \beta = 0.$$

Решая совместно эти уравнения, находим $\alpha \approx -0,3$, $\beta \approx -0,3$.

Теперь то же для $F_2(x, y)$:

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial x} \right|_A = (\gamma \cdot 2x + \delta \cdot 3x^2) \Big|_{\substack{x=0,8 \\ y=0,6}} = 1,6\gamma + 1,92\delta = 0,$$

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial y} \right|_A = (1 + \gamma \cdot 2y + \delta \cdot (-1)) \Big|_{\substack{x=0,8 \\ y=0,6}} = 1 + 1,2\gamma - \delta = 0.$$

Отсюда $\gamma \approx -0,5$, $\delta \approx 0,5$. Итак,

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= x - 0,3(x^2 + y^2 - 1) - 0,3(x^3 - y), \\ F_2(x, y) &= y - 0,5(x^2 + y^2 - 1) + 0,5(x^3 - y). \end{aligned} \quad (81)$$

Строим итерационный процесс, который будет быстро сходиться:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - 0,3 \left[\left(x^{(k)} \right)^2 + \left(y^{(k)} \right)^2 - 1 \right] - 0,3 \left[\left(x^{(k)} \right)^3 - y^{(k)} \right],$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - 0,5 \left[\left(x^{(k)} \right)^2 + \left(y^{(k)} \right)^2 - 1 \right] + 0,5 \left[\left(x^{(k)} \right)^3 - y^{(k)} \right].$$

Для контроля точности придется вычислить коэффициент сжатия. Это можно сделать так же, как в предыдущем примере, окружая точку A небольшим прямоугольником изоляции и вычисляя в его вершинах значения частных производных функций $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ (81).

Контрольные вопросы

1) В чём принципиальное различие между точными (прямыми) и приближёнными (итерационными) методами решения систем линейных уравнений? Каковы их сравнительные преимущества и недостатки?

2) Каковы условия сходимости итерационного процесса в методе простой итерации для линейных систем?

3) В чём отличие метода Зейделя от метода простой итерации? Каковы преимущества метода Зейделя?

4) Каковы условия сходимости итерационного процесса в методах простой итерации и Зейделя для нелинейных систем? Как можно ускорить сходимость в случае системы из двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4В

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Варианты заданий

Графически отделить корни и решить системы методом простой итерации или методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Для проверки сравнить полученный ответ с результатом применения функции *Find* в Mathcad (см. Приложение III).

1. а)
$$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1,2, \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,4) = x^2, \\ 0,6x^2 + 2y^2 = 1 \quad (x > 0, y > 0). \end{cases}$$

2. а)
$$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0,5, \\ x - \cos y = 3. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1,6x, \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (x > 0, y > 0). \end{cases}$$

3. а)
$$\begin{cases} \sin x + 2y = 2, \\ x + \cos(y-1) = 0,7. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,1) = x^2, \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

4. а)
$$\begin{cases} \cos x + y = 1,5, \\ \sin(y - 0,5) = 2x - 1. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sin(x+y) - 1,2x = 0,2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

5. а)
$$\begin{cases} \sin(x + 0,5) - y = 1, \\ \cos(y - 2) + x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,3) = x^2, \\ 0,9x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

$$6. \text{ а) } \begin{cases} \cos(x + 0,5) + y = 0,8, \\ \sin y - 2x = 1,6. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin(x + y) - 1,3x = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$7. \text{ а) } \begin{cases} \sin(x - 1) + y = 1,3, \\ x - \sin(y + 1) = 0,8. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg} xy = x^2, \\ 0,8x^2 = 1 - 2y^2. \end{cases}$$

$$8. \text{ а) } \begin{cases} \cos(x + 1) = 2y, \\ x + \sin y = -0,4. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin(x + y) = 1,5x + 0,1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$9. \text{ а) } \begin{cases} \cos(x + 0,5) - y = 2, \\ \sin y - 2x = 1. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg} xy - x^2 = 0, \\ 0,7x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

$$10. \text{ а) } \begin{cases} \cos(x + 2) - y = 1,5, \\ \cos(y - 2) + x = 0,5. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin(x + y) - 1,2x = 0,1, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

$$11. \text{ а) } \begin{cases} \sin(y + 1) - x = 1,2, \\ 2y + \cos x = 2. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,2) = x^2, \\ 0,6x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

$$12. \text{ а) } \begin{cases} \cos(y - 1) + x = 0,5, \\ \cos x - y + 3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin(x+y) - 1,5x = -0,1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$13. \text{ а) } \begin{cases} \sin y + 2x = 2, \\ y + \cos(x-1) = 0,7. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,4) = x^2, \\ 0,8x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

$$14. \text{ а) } \begin{cases} x + \cos y = 1,5, \\ 2y - \sin(x-0,5) = 1. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin(x+y) - 1,2x = -0,1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$15. \text{ а) } \begin{cases} \sin(y + 0,5) - x = 1, \\ y + \cos(x-2) = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,1) = x^2, \\ 0,9x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

$$16. \text{ а) } \begin{cases} x + \cos(y + 0,5) = 0,8, \\ 2y - \sin x = -1,6. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin(x+y) = 1,4x, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$17. \text{ а) } \begin{cases} \sin(y-1) + x = 1,3, \\ y - \sin(x+1) = 0,8. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,1) = x^2, \\ 0,5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

$$18. \text{ а) } \begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0, \\ y + \sin x = -0,4. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin(x+y) = 1,1x - 0,1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$19. \text{ а) } \begin{cases} \cos(y + 0,5) - x = 2, \\ \sin x - 2y = 1. \end{cases}$$

- б)
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x-y) = xy, \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$
20. а)
$$\begin{cases} \sin(y+2) - x = 1,5, \\ y + \cos(x-2) = 0,5. \end{cases}$$
- б)
$$\begin{cases} \sin(x-y) - xy = -1, \\ x^2 - y^2 = 3/4. \end{cases}$$
21. а)
$$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1, \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$$
- б)
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,2) = x^2, \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$
22. а)
$$\begin{cases} y + \cos(x-1) = 0,8, \\ x - \cos y = 2. \end{cases}$$
- б)
$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1,5x, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$
23. а)
$$\begin{cases} \sin x + 2y = 1,6, \\ x + \cos(y-1) = 1. \end{cases}$$
- б)
$$\begin{cases} \operatorname{tg} xy - x^2 = 0, \\ 0,5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$
24. а)
$$\begin{cases} y + \cos x = 1,2, \\ 2x - \sin(y-0,5) = 2. \end{cases}$$
- б)
$$\begin{cases} \sin(x+y) + 0,2 = 1,2x, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$
25. а)
$$\begin{cases} \sin(x+0,5) - y = 1,2, \\ x + \cos(y-2) = 0. \end{cases}$$
- б)
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,1) - x^2 = 0, \\ 0,7x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$
26. а)
$$\begin{cases} \cos(x+1/2) + y = 1, \\ \sin y - 2x = 2. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin(x+y) - 1,5x = 0,2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$27. \text{ а) } \begin{cases} \sin(x-1) + y = 1,5, \\ x - \sin(y+1) = 1. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg} xy - x^2 = 0, \\ 0,6x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

$$28. \text{ а) } \begin{cases} \sin(y+1) - x = 1, \\ 2y + \cos x = 2. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin(x+y) = 1,2x, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$29. \text{ а) } \begin{cases} x + \cos(y-1) = 0,8, \\ y - \cos x - 2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,3) - x^2 = 0, \\ 0,5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

$$30. \text{ а) } \begin{cases} \cos(x-1) + y = 1, \\ \sin y + 2x = 1,6. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin(x+y) - 1,1x = 0,1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

ГЛАВА 7. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Напомним некоторые нужные для дальнейшего понятия. Решением дифференциального уравнения (ДУ) I порядка $y' = f(x, y)$, разрешенного относительно производной, называется функция $y = \varphi(x)$, при подстановке в уравнение обращающая его в тождество:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Задача Коши

$$\left. \begin{array}{l} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right\} \quad (82)$$

состоит в нахождении частного решения ДУ, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$. Геометрический смысл задачи Коши: найти такую интегральную кривую (график решения), которая проходит через заданную начальную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Аналитическое решение задачи Коши (или решение в квадратурах) заключается в получении частного решения путем выполнения конечного числа операций дифференцирования, интегрирования и арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление). К сожалению, круг задач, решаемых в квадратурах, крайне узок, поэтому актуальна задача приближенного, численного интегрирования ДУ.

Решить задачу Коши численно – значит для заданной последовательности значений аргумента (узлов) x_0, x_1, \dots, x_n и числа y_0 (значения искомой функции в начальном узле x_0), не находя самого решения $y = \varphi(x)$, приближенно вычислить значения y_1, y_2, \dots, y_n этого решения в остальных узлах. Численное решение задачи Коши позволяет вместо отыскания точного решения $y = \varphi(x)$ в виде формулы получить таблицу значений

x_i	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
$\varphi(x_i)$	$y_0 = \varphi(x_0)$	y_1	y_2	\dots	y_n

этой функции¹⁹. Для численного решения задачи Коши практически нет ограничений.

¹⁹ Потом можно получить и приближенное задание функции формулой, например, аппроксимируя ее полиномом Лагранжа.

Рассмотрим некоторые способы численного интегрирования ДУ.

МЕТОД ЛОМАННЫХ ЭЙЛЕРА

Метод (ломаных) Эйлера (1707–1783) основан на кусочной замене искомой функции полиномом первой степени, т. е. на линейной интерполяции. Впрочем, точнее было бы говорить о линейной экстраполяции, т. к. речь идет о нахождении значений функции $y = \varphi(x)$ в соседних узлах, а не между узлами.

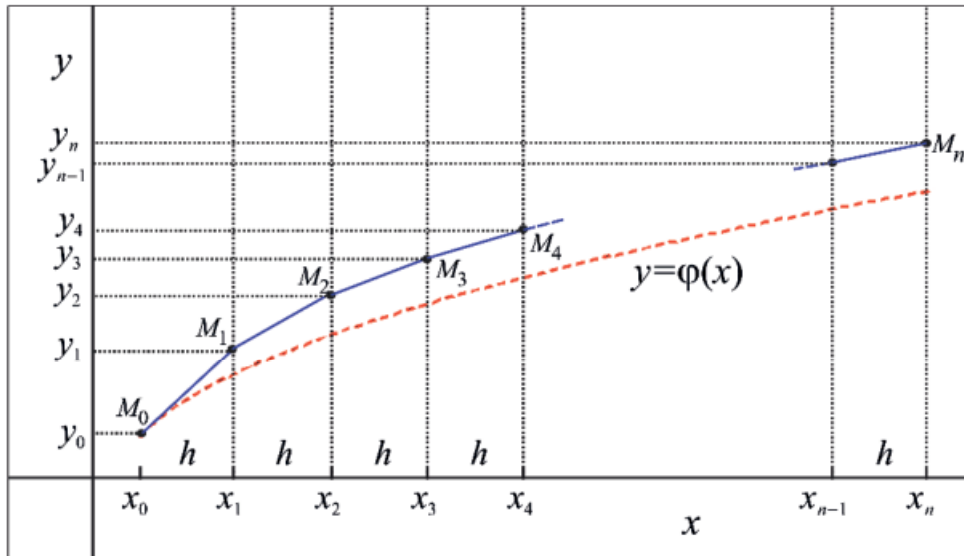


Рис. 18. Ломаная Эйлера (сплошная ломаная линия) приближенно представляет гипотетический график решения задачи Коши (штриховая линия). Последний график неизвестен, поскольку задача Коши не решена в квадратурах. Обе линии исходят из начальной точки $M_0(x_0, y_0)$; расхождение между ними постепенно возрастает

Выбрав малый шаг h , построим систему равноотстоящих узлов x_0, x_1, x_2, \dots , где $x_k = x_0 + kh$ (рис. 18).

В начальной точке $M_0(x_0, y_0)$ проведем прямую с угловым коэффициентом $k_0 = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ в силу ДУ (82)). Эта прямая является касательной к (неизвестной) интегральной кривой – графику искомого решения $y = \varphi(x)$ задачи Коши. Уравнение касательной:

$$y - y_0 = k_0(x - x_0) \text{ или } y = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0). \quad (83)$$

В качестве приближенного решения задачи Коши (82) в узле x_1 примем ординату y_1 точки пересечения касательной с вертикальной прямой $x = x_1$:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h.$$

Через точку $M_1(x_1, y_1)$ проведем прямую с угловым коэффициентом $k_1 = y'(x_1) = f(x_1, y_1)$ в силу ДУ (82)). Ее уравнение:

$$y = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot (x - x_1). \quad (84)$$

Эта прямая уже не является касательной к интегральной кривой $y = \varphi(x)$, т. к. точка $M_1(x_1, y_1)$ – фиктивная, она не лежит на интегральной кривой. Пересечение прямой (84) с вертикалью $x = x_2$ – точка M_2 – имеет ординату $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot (x_2 - x_1) = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot h$.

Через точку $M_2(x_2, y_2)$ проведем прямую с угловым коэффициентом $k_2 = y'(x_2) = f(x_2, y_2)$ до пересечения с вертикалью $x = x_3$. Ордината точки пересечения $y_3 = y_2 + f(x_2, y_2) \cdot h$. Точка $M_3(x_3, y_3)$, вообще говоря, находится дальше по вертикали от интегральной кривой $y = \varphi(x)$, чем M_2 (см. рис. 18). Погрешность метода с каждым следующим шагом увеличивается.

Итого получаем ломаную Эйлера, составленную из отрезков прямых

$$y = y_k + f(x_k, y_k) \cdot (x - x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (85)$$

Ордината каждой последующей угловой точки ломаной

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k). \quad (86)$$

Метод ломаных Эйлера груб и дает удовлетворительную точность лишь при малом шаге h . Действительно, разложим точное решение ДУ $y' = f(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности узла x_k :

$$y(x_k + h) = y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k) \cdot h + O(h^2) = y(x_k) + f(x_k, y_k) \cdot h + O(h^2).$$

Сравнивая эту формулу с формулой (86), получаем, что погрешность последней – того же порядка малости, что и h^2 .

Пример. Решить задачу Коши

$$\left. \begin{array}{l} y' = -y, \\ y(0) = 1 \end{array} \right\}$$

с шагом $h = 0,2$ на отрезке $[0, 1]$ методом Эйлера; сравнить приближенное решение с точным.

Решение. Начнем с решения в квадратурах. Дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{dy}{dx} = -y$$

является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим их:

$$\frac{dy}{y} = -dx,$$

проинтегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx; \quad \ln|y| = -x + C; \quad y = e^{C-x}.$$

Общее решение ДУ найдено. Накладываем на него начальное условие:

$$y(0) = e^{C-0} = 1; \quad C = 0.$$

Итого, частное решение ДУ (решение задачи Коши): $y = e^{-x}$.

Теперь применим приближенный метод Эйлера. В обозначениях (82)

$$f(x, y) = -y, \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1.$$

Тогда, в силу (86),

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) = y_k + 0,2 \cdot f(x_k, y_k) = y_k - 0,2y_k = 0,8y_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Составим сопоставительную таблицу значений y_k приближенного решения по Эйлерау и значений точного решения $y_k^* = e^{-x_k}$:

k	0	1	2	3	4	5
$x_k = x_0 + hk$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y_k	1	0,8	0,64	0,512	0,4096	0,32768
y_k^*	1	0,8187	0,6703	0,5488	0,4493	0,3679

Грубое согласие между точными и приближенными результатами есть, но оно постепенно ухудшается.

Резюме по методу Эйлера.

1) Расчетные формулы метода Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \quad \text{где } \Delta y_k = h \cdot f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (87)$$

2) Метод Эйлера – представитель одношаговых приближенных методов, в которых решение в $(k+1)$ -м узле получается на основе решения только в одном предыдущем, k -м узле. Тем самым, информация о более ранних уже вычисленных значениях игнорируется. «Расточительный» подход к получаемым результатам оборачивается повышенным объемом вычислений. Одношаговые методы – не самые экономичные в этом смысле.

3) Как и в любом одношаговом методе, начиная со второго шага, исходное значение y_k в формуле $y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$ самó является приближенным, т. е., вообще говоря, погрешность на каждом последующем шаге систематически возрастает.

4) Оценка погрешности метода затруднительна. Часто пользуются эмпирическим правилом двойного пересчета (половинного шага): дважды проходят заданный отрезок интегрирования ДУ с шагами h и $h/2$. Совпадение соответствующих десятичных знаков в полученных результатах дает основание считать эти знаки верными.

5) Уменьшение h повышает точность вычислений, но резко увеличивает их объем. В целом, метод ломаных Эйлера применим только для грубой прикидки.

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

К методу Эйлера можно прийти и без геометрических построений. Разложим искомое решение задачи Коши

$$\left. \begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

в ряд Тейлора в окрестности начальной точки x_0 :

$$y(x) = \underbrace{y(x_0)}_{=y_0 \text{ (н.у.)}} + \underbrace{y'(x_0)}_{=f(x_0, y_0) \text{ в силу ДУ}} \cdot (x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots \quad (88)$$

Ограничиваясь в разложении первыми двумя (линейными по x) слагаемыми и полагая $x = x_1$, снова получим формулу (86) метода Эйлера:

$$y(x_1) = y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

Учтем теперь еще одно, квадратичное по x слагаемое в (88). Для этого потребуется вычислить $y''(x_0)$. Продифференцируем по x обе части ДУ $y' = f(x, y)$:

$$(y')' = y''(x) = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=f(x, y) \text{ в силу ДУ}} = f'_x + f'_y \cdot f.$$

Полагая в (88) $x = x_1$, получим во втором порядке разложения:

$$y(x_1) = y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left[f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot f(x, y) \right] \Bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot h^2.$$

Первые два слагаемых в правой части соответствуют методу Эйлера, а третья – поправка к нему. Для произвольного узла:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) + \frac{1}{2} \left[f'_x + f'_y \cdot f \right] \Bigg|_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}} \cdot h^2. \quad (89)$$

Удерживая в ряду Тейлора (88) больше слагаемых, можно было бы получить сколь угодно точные формулы приближенного решения задачи Коши.

В этом состоит метод последовательного дифференцирования, который еще называют методом разложения решения в степенной ряд.

Неудобство разложения решения ДУ в степенной ряд связано с тем, что в расчетные формулы, наряду с $f(x, y)$, входят ее частные производные. В выведенную формулу (89), включающую слагаемые до h^2 включительно, входят f'_x , f'_y ; в формулу с h^3 войдут вторые частные производные и т. д. Но вычисление частных производных трудно автоматизировать – это задача не для стандартно применяемых языков программирования²⁰. Поэтому частные производные пришлось бы искать вручную и конструировать с их помощью громоздкие формулы.

Альтернативой методу последовательного дифференцирования является метод Рунге-Кутты, лишенный отмеченного недостатка.

МЕТОД РУНГЕ-КУТТЫ

Идея, предложенная Рунге (1856–1927) и Куттой (1867–1944), заключается в том, чтобы при численном решении задачи Коши (82) не использовать в расчетных формулах частные производные функции $f(x, y)$; использовать только ее саму, зато вычислять на каждом шаге ее значения в нескольких точках²¹.

Проиллюстрируем это на примере одного из возможных методов Рунге-Кутты II порядка. Из определения производной

$$y'(x_k) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x_k)}{\Delta x} = \lim_{x_{k+1} \rightarrow x_k} \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h}. \quad (90)$$

В финальное выражение входят значения функции y в двух точках, а производной уже нет. Подставим это приближенное выражение для производной в решаемое ДУ $y' = f(x, y)$, беря значение правой части в k -м узле:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k).$$

Отсюда $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$, и мы снова получили метод Эйлера (86)! Но, поскольку для аппроксимации производной y' взяты две точки, то и для правой части ДУ $f(x, y)$ логично привлечь две точки:

$$\frac{1}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]. \quad (91)$$

Совмещая (90) и (91):

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{1}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})],$$

²⁰ Разве что, для языков сверхвысокого уровня – Mathematica, Maple, MATLAB.

²¹ Та же идея применялась нами в методах хорд и секущих численного решения уравнений – см. формулу (44).

после преобразования получим:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]. \quad (92)$$

Искомой величиной в уравнении (92) является значение y_{k+1} , входящее в обе части уравнения. Решать это уравнение можно методом итераций, беря в качестве начального приближения то значение $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$, которое получается в методе Эйлера. Тогда

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left[f(x_k, y_k) + f \left(x_k + h, \underbrace{y_k + h \cdot f(x_k, y_k)}_{\text{Эйлер}} \right) \right] \quad (93)$$

или, для придания этой формуле стандартного вида,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad (94)$$

где

$$r_1 = h \cdot f(x_k, y_k), \quad (95)$$

$$r_2 = h \cdot f(x_k + h, y_k + r_1). \quad (96)$$

Формулы (94)–(96) представляют метод Рунге-Кутты II порядка²². Применяют их в такой последовательности: вначале находят r_1 (95), его подставляют в r_2 (96); в заключение вычисляют y_{k+1} (94).

Покажем, что эти формулы с точностью до h^2 включительно согласуются с формулой (89), полученной другим способом. Для этого выражение $f(x_k + h, y_k + h \cdot f(x_k, y_k))$, входящее в (93), разложим в ряд по степеням h до линейных слагаемых включительно²³:

$$f(x_k + h, y_k + h \cdot f(x_k, y_k)) \approx f(x_k, y_k) + f'_x(x_k, y_k) \cdot h + f'_y(x_k, y_k) \cdot h f(x_k, y_k).$$

Подставим преобразованное выражение в формулу (93), откуда оно было извлечено:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &\approx y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k) + \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_k, y_k) + f'_x(x_k, y_k) \cdot h + f'_y(x_k, y_k) \cdot h f(x_k, y_k) \right] = \\ &= y_k + h \cdot f(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2} \cdot \left[f'_x(x_k, y_k) + f'_y(x_k, y_k) \cdot f(x_k, y_k) \right]. \end{aligned}$$

²² Формально порядок метода можно связать с количеством величин r_i или, что то же, с количеством точек, в которых вычисляется значение функции $f(x, y)$.

²³ Вспомним ряд Тейлора для функции двух переменных: $f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \dots$

Это точно совпадает с формулой (89), выведенной методом последовательного дифференцирования. Но формулы (94)–(96) не требуют вычисления частных производных, поэтому они удобнее.

Подробно ознакомившись с методом Рунге-Кутты II порядка, заметим, что чаще используются родственные, более точные (но и более громоздкие) методы Рунге-Кутты высших порядков.

Один из самых известных – метод Рунге-Кутты IV порядка, часто без уточнений называемый просто методом Рунге-Кутты:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4), \quad (97)$$

где

$$r_1 = h \cdot f(x_k, y_k), \quad (98)$$

$$r_2 = h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{r_1}{2}\right), \quad (99)$$

$$r_3 = h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{r_2}{2}\right), \quad (100)$$

$$r_4 = h \cdot f(x_k + h, y_k + r_3), \quad (101)$$

причем вначале последовательно вычисляются r_1, r_2, r_3, r_4 , а затем – y_{k+1} (97).

Пример. Решить задачу Коши

$$\left. \begin{aligned} y' &= y(1-x), \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

методом Рунге-Кутты на отрезке $[0; 0,5]$ с шагом $h = 0,05$. Сравнить полученное решение с точным и решением по методу Эйлера.

Решение. Начнем с нахождения точного решения. ДУ является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = y(1-x); \quad \frac{dy}{y} = (1-x)dx; \quad \int \frac{dy}{y} = \int (1-x)dx; \quad \ln|y| = x - x^2/2 + \ln C.$$

Итак, общее решение ДУ (102):

$$y(x) = Ce^{x-x^2/2}.$$

Применим начальное условие:

$$y(0) = Ce^0 = 1; \quad C = 1.$$

Итак, получено точное решение $y(x) = e^{x-x^2/2}$ задачи Коши.

Подробно покажем первый (из десяти!) этап приближённого решения методом Рунге-Кутты. Правая часть ДУ $f(x, y) = y(1-x)$; $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Вычислим величины r_i :

$$r_1 = h f(x_0, y_0) = 0,05 \cdot y_0(1-x_0) = 0,05 \cdot 1 \cdot (1-0) = 0,05;$$

$$r_2 = h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{r_1}{2}\right) = 0,05 \cdot \left(y_0 + \frac{r_1}{2}\right) \left(1 - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right) =$$

$$= 0,05 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{2}\right) \cdot \left(1 - \left(0 + \frac{0,05}{2}\right)\right) = 0,04997;$$

$$r_3 = h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{r_2}{2}\right) = 0,05 \cdot \left(y_0 + \frac{r_2}{2}\right) \left(1 - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right) =$$

$$= 0,05 \cdot \left(1 + \frac{0,04997}{2}\right) \cdot \left(1 - \left(0 + \frac{0,05}{2}\right)\right) = 0,04997;$$

$$r_4 = h f(x_0 + h, y_0 + r_3) = 0,05 \cdot (y_0 + r_3) (1 - (x_0 + h)) =$$

$$= 0,05 \cdot (1 + 0,04997) \cdot (1 - (0 + 0,05)) = 0,04987.$$

Тогда

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4) = 1 + \frac{1}{6}(0,05 + 2 \cdot 0,04997 + 2 \cdot 0,04997 + 0,04987) = 1,049958.$$

Сравнение решений, получаемых разными методами:

x	y		
	Эйлер	Рунге-Кутты IV порядка	точное решение $y = e^{x-x^2/2}$
0	1	1	1
0,05	1,05*	1,049958	1,049958
0,1	1,099875**	1,099659	1,099659
0,15	1,149369	1,148837	1,148837
.			
0,45	1,423065	1,417295	1,417295
0,5	1,462199	1,454991	1,454991

Примечание. Вычисления методом Эйлера:

$$* \quad y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 1 + h y_0 (1 - x_0) = 1 + 0,05 \cdot 1 \cdot (1 - 0) = 1,05.$$

$$** \quad y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = 1,05 + 0,05 y_1 (1 - x_1) = 1,05 + 0,05 \cdot 1,05 \cdot (1 - 0,05) = 1,099875.$$

Отметим превосходное согласие результатов в двух последних столбцах.

Резюме по численному решению ДУ.

1) Метод Рунге-Кутты, сравнимый по точности с методом разложения в степенной ряд, лучше поддается автоматизации на ЭВМ, поскольку не требует вычисления частных производных. Метод Эйлера уступает по точности этим методам.

2) Все рассмотренные методы решения ДУ – метод Эйлера, метод разложения в степенной ряд, метод Рунге-Кутты – являются одношаговыми. Напомним, что это означает построение y_{k+1} на основе только y_k с игнорированием более ранних предшествующих результатов.

3) Все одношаговые методы имеют проблемы с оценкой погрешности результатов. На практике применяется эмпирическое правило двойного пересчета (половинного шага).

4) Все одношаговые методы сопряжены с избыточными вычислениями, объем которых можно существенно уменьшить при более рачительном использовании уже полученных результатов.

5) Альтернативой одношаговым являются многошаговые методы интегрирования ДУ – семейство методов Адамса²⁴. В этих методах для вычисления y_{k+1} используются несколько значений приближенного решения на предыдущих шагах: $y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots$. Поскольку к моменту вычисления y_{k+1} они уже найдены, можно избежать многочисленных вычислений значений $f(x, y)$. Но, чтобы метод Адамса мог стартовать, первые значения y_0, y_1, \dots , все-таки приходится находить одношаговыми методами. В целом, методы Адамса в несколько раз менее трудоемки, чем метод Рунге-Кутты.

Контрольные вопросы

1) Каковы сравнительные преимущества и недостатки аналитического и численного решений задачи Коши?

2) Каков геометрический смысл метода (ломаных) Эйлера? Каковы его свойства?

3) В чём состоит недостаток метода последовательного дифференцирования?

4) Какова идея, лежащая в основе методов Рунге-Кутты? Каковы сравнительные свойства методов Рунге-Кутты в сопоставлении с другими одношаговыми методами, а также с многошаговыми методами?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Постановка задачи

Решить аналитически, а также численно, методами Эйлера и Рунге-Кутты IV порядка в диапазоне $x \in [0, 2]$ с шагом $h = 0,2$, задачу Коши

²⁴ Англ. астроном Джон Адамс (1819–1892), по неравномерностям в движении планеты Уран вычисливший орбиту дотолле неизвестной планеты Нептун. Именно для этих вычислений Адамс и изобрел свой метод.

$$\left. \begin{aligned} y' &= (-1)^{n+p+q} \cdot a, b \cdot y + c, d \cdot x^2 + l, m; \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Личные параметры решающего $a, b, c, d, l, m, n, p, q$ определяются следующим образом:

ab – количество букв в его фамилии,

cd – количество букв в его имени,

lm – его возраст,

nrq – последние три цифры номера академической группы.

Пример выполнения лабораторной работы.

Джон Адамс, 19-ти лет, студент группы PhM-561819 Кембриджского университета, используя параметры $ab = 05$, $cd = 04$, $lm = 19$, $nrq = 819$, получает задачу

$$\left. \begin{aligned} y' &= 0,5y + 0,4x^2 + 1,9; \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Дано неоднородное ДУ первого порядка

$$y' - 0,5y = 0,4x^2 + 1,9 \quad (104)$$

со следующими свойствами:

а) оно является линейным (искомая функция y и ее производная y' присутствуют только в 1-й степени и друг на друга не умножаются);

б) это уравнение с постоянными коэффициентами (имеются в виду коэффициенты при y и y' ; в данном случае: $-0,5$ и 1 , соответственно);

с) неоднородность в ДУ (слагаемые, не содержащие искомой функции и/или ее производной; в данном случае: $0,4x^2 + 1,9$) является полиномом.

Свойства а,б,с очень ценны, поскольку в этом случае ДУ *всегда* решается в квадратурах.

Напомним, как это делается.

1) Общее решение y неоднородного линейного ДУ (НЛДУ) равно сумме общего решения \bar{y} соответствующего однородного ДУ (ОЛДУ) и частного решения y^* НЛДУ:

$$y = \bar{y} + y^* \quad (105)$$

Поэтому

1.1) на первом этапе отбросим неоднородность и решим ОЛДУ

$$y' - 0,5y = 0 \quad (106)$$

ОЛДУ с постоянными коэффициентами решается с помощью подстановки Эйлера, а именно, решение отыскивается в экспоненциальном виде $y = Ce^{\lambda x}$, где C – произвольная константа, λ – характеристическое число.

Подставим $y = Ce^{\lambda x}$ и производную $y' = \lambda Ce^{\lambda x}$ в ОЛДУ (105):

$$\lambda Ce^{\lambda x} - 0,5Ce^{\lambda x} = 0.$$

После сокращения на C и экспоненту получим характеристическое уравнение

$$\lambda - 0,5 = 0,$$

из которого находим характеристическое число $\lambda = 0,5$.

Общее решение ОЛДУ получено:

$$\bar{y} = Ce^{0,5x}. \quad (107)$$

1.2) Найдем частное решение y^* НЛДУ. Поскольку неоднородность $0,4x^2 + 1,9$ является полиномом второй степени, будем искать y^* тоже в виде полинома второй степени, но с неопределенными коэффициентами: $y^* = Kx^2 + Lx + M$, где числа K, L, M подлежат определению. Найдем производную $(y^*)' = 2Kx + L$ и подставим y^* и производную в НЛДУ (104):

$$2Kx + L - 0,5(Kx^2 + Lx + M) = 0,4x^2 + 1,9.$$

В обеих частях равенства – полиномы 2-й степени. Коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа должны быть равны:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -0,5K = 0,4, \\ x^1 & 2K - 0,5L = 0, \\ x^0 & L - 0,5M = 1,9. \end{array}$$

Решая эту систему, например, с помощью процедуры *Find* в Маткаде, получим:

$$K = -0,8, \quad L = -3,2, \quad M = -10,2.$$

Частное решение НЛДУ получено:

$$y^* = -0,8x^2 - 3,2x - 10,2. \quad (108)$$

В силу (105) общее решение исходного неоднородного ДУ

$$y = Ce^{0,5x} - 0,8x^2 - 3,2x - 10,2. \quad (109)$$

2) Накладываем на это решение начальное условие (103) $y(0) = 1$:

$$y(0) = Ce^0 - 10,2 = C - 10,2 = 1; \quad C = 11,2.$$

Точное (аналитическое) решение задачи Коши получено:

$$y = 11,2e^{0,5x} - 0,8x^2 - 3,2x - 10,2.$$

Численное решение задачи Коши (103) методом Эйлера в Маткаде представлено на следующих двух страницах.

Решаем ДУ первого порядка $y' = f(x, y)$.

Определяем правую часть: $f(x, y) := 0,5y + 0,4x^2 + 1,9$.

Начальная точка: $x_0 := 0$ $y_0 := 1$ шаг $h := 0.2$

Диапазон изменения индекса точек: $i := 0..10$.

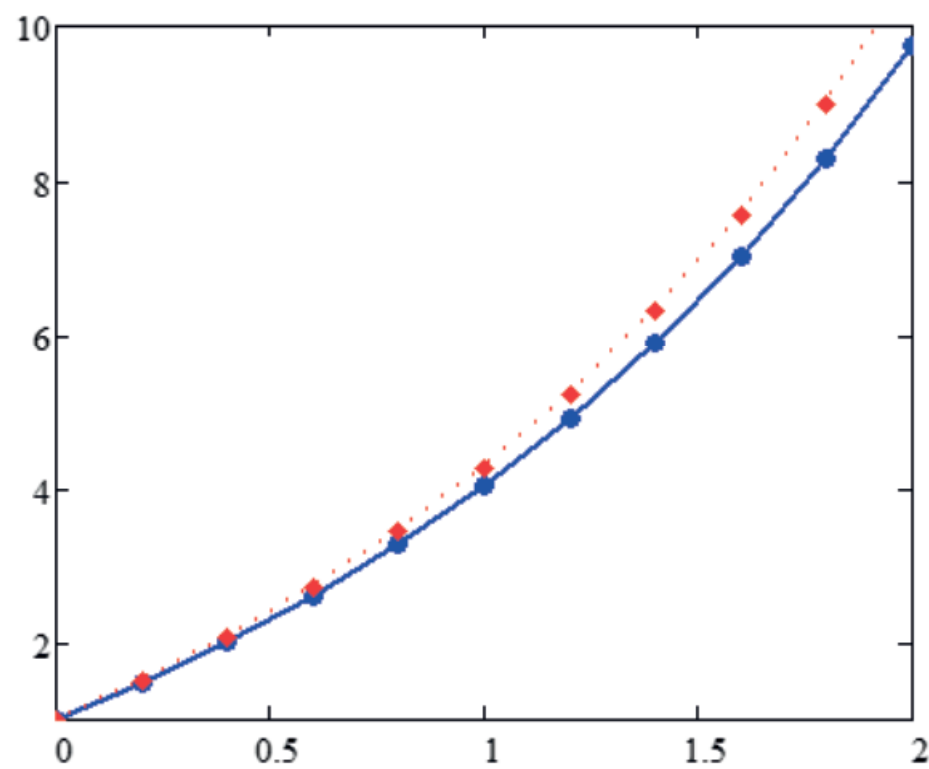
Вычисления в методе Эйлера: $x_{i+1} := x_i + h$, $y_{i+1} := y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$.

Таблица значений численного решения ДУ:

	0		0
0	0	0	1
1	0.2	1	1.48
2	0.4	2	2.011
3	0.6	3	2.605
4	0.8	4	3.274
x = 5	1	5	4.033
6	1.2	6	4.896
7	1.4	7	5.881
8	1.6	8	7.006
9	1.8	9	8.292
10	2	10	9.76
11	2.2	11	11.436

Аналитическое решение: $g(x) := 11,2e^{0,5x} - 0,8x^2 - 3,2x - 10,2$ $k := 0..10$.

Сопоставительный график аналитического (ромбы) и численного (кружки) решений:



ГЛАВА 8. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ МОНТЕ-КАРЛО

Рассматривавшиеся до сих пор алгоритмы вычислительных методов являются детерминированными (предопределенными) алгоритмами. Это означает, что при многократной реализации алгоритма с одинаковыми начальными данными всякий раз получаются одни и те же результаты.

Помимо детерминированных, существуют и стохастические (вероятностные) алгоритмы, результаты реализации которых меняются от одной серии вычислений к другой случайным образом.

Рассмотрим вычисление одномерного интеграла $I^{(1)} = \int_a^b f(x)dx$ по одной из квадратурных формул (прямоугольников, трапеций, Симпсона, Ньютона-Котеса):

$$I^{(1)} = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i), \quad (110)$$

в каждой из которых значения подынтегральной функции в узлах берутся с весами c_i (в случае формулы Ньютона-Котеса это коэффициенты Котеса).

Для вычисления двойного интеграла $I^{(2)} = \iint_G f(x, y)dx dy$ по области интегрирования G можно аналогично применить кубатурную формулу

$$I^{(2)} \approx \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} f(x_i, y_k). \quad (111)$$

Так же можно поступить и с любым многомерным интегралом произвольной размерности.

Пусть интервал интегрирования по каждой переменной разбивается на $n = 10$ равных частей (как мы видели при рассмотрении квадратурных формул, это обеспечивает не очень высокую точность результата). Тогда для вычисления одномерного интеграла придется найти сумму 10 слагаемых, для двумерного интеграла – сумму 10^2 слагаемых, а для аналогичного 10-мерного интеграла (они нередко возникают в теоретической физике) – сумму 10^{10} слагаемых, что может быть проблематично даже для современных ЭВМ²⁵.

Итак, применение детерминированных алгоритмов может приводить к обвалному возрастанию объёма вычислений при попытке обобщения задачи.

В таких задачах предпочтительнее стохастические алгоритмы, объединяемые общим названием «метод Монте-Карло»²⁶. Стохастические алгоритмы ос-

²⁵ Так называемое «проклятие размерности».

²⁶ По названию города в государстве Монако, известного своими игорными домами (как известно, в азартных играх выигрыш подчиняется законам теории вероятностей).

нованы на моделировании случайных процессов и законах теории вероятностей и математической статистики.

Метод Монте-Карло появился в 1940-х годах в трудах Джона фон Неймана (1903–1957) и Станислава Улама (1909–1984) и оказался спасительным при решении сложных вычислительных задач на медленных ЭВМ 1-го поколения.

Вычисление интеграла I методом Монте-Карло основано на соотношении $I = y_{\text{ср}} \cdot \sigma$, где $y_{\text{ср}}$ – среднее значение подынтегральной функции в области интегрирования, а σ – мера (длина отрезка интегрирования для $I^{(1)}$, площадь области интегрирования G для $I^{(2)}$; в общем случае – объём многомерной области интегрирования). Выберем в этой области n равномерно распределенных случайных точек M_i . При большом n

$$y_{\text{ср}} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(M_i),$$

откуда

$$I \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \sigma.$$

В частности, в одномерном случае

$$I^{(1)} = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot (b - a),$$

где x_i – случайные числа, равномерно распределенные на отрезке интегрирования $[a, b]$.

Если случайные числа γ_i равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$, то для преобразования их к отрезку интегрирования $[a, b]$ применяют масштабирование

$$x_i = a + (b - a) \cdot \gamma_i. \quad (112)$$

Приведем простейшие примеры использования метода Монте-Карло.

Пример 1. Вычислить $\int_0^1 f(x) dx$, где подынтегральная функция удовлетворяет условию $0 \leq f(x) \leq 1$ на отрезке интегрирования.

Решение. Пусть случайные числа γ_i равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Будем рассматривать последовательные пары чисел $(\gamma_{2i}, \gamma_{2i+1})$ как координаты случайных точек $M_i(x_i, y_i)$, равномерно распределенных в единичном квадрате (рис. 19).

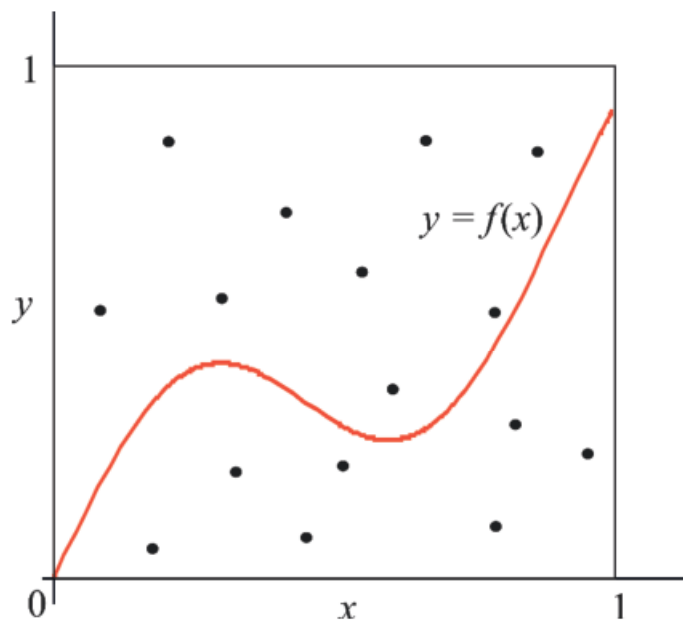


Рис. 19. К вычислению одномерного интеграла методом Монте-Карло

Пусть *испытание* состоит в «бросании» случайной точки M_i в единичный квадрат. Вероятность попадания точки *под* кривую $y = f(x)$ равна площади фигуры, заключенной под кривой, т. е. искомому интегралу. Условие попадания точки под кривую: $\gamma_{2i+1} < f(\gamma_{2i})$. Доля от общего числа испытаний, в которой это условие выполняется, приближенно равна отношению площадей криволинейной трапеции S_1 и единичного квадрата $S_{\blacksquare} (= 1)$:

$$\frac{S_1}{S_{\blacksquare}} \approx \frac{m}{n},$$

где n – полное количество испытаний, m – количество испытаний, в которых условие попадания удовлетворилось. Тогда приближенное значение интеграла

$$I^{(1)} = \int_a^b f(x)dx = S_1 \approx \frac{m}{n},$$

и это равенство выполняется тем точнее, чем больше испытаний произведено.

Пример 2. Вычислить многомерный интеграл

$$I^{(3)} = \int_G f(x, y, z) dx dy dz$$

по *единичному* кубу G при условии

$$0 \leq f(x, y, z) \leq 1$$

внутри куба.

Решение. Рассмотрим гиперкуб \bar{G} в четырехмерном пространстве $\{x, y, z, u\}$ и случайные равномерно распределенные в гиперкубе точки. Координатами этих точек являются четверки случайных чисел $(\gamma_{4i}, \gamma_{4i+1}, \gamma_{4i+2}, \gamma_{4i+3})$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Доля случайных точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\gamma_{4i+3} < f(\gamma_{4i}, \gamma_{4i+1}, \gamma_{4i+2}),$$

дает приближенное значение интеграла.

Отметим характерные особенности метода Монте-Карло:

1) Трудоемкость решения задачи с увеличением ее размерности возрастает незначительно;

2) Метод удобен для реализации на ЭВМ, но малоприменим для ручного счета, поскольку для достижения приемлемой точности требуется использование большого массива случайных точек (об оценке точности результатов в методе Монте-Карло см. ниже).

Возникает вопрос о том, где взять большой массив случайных чисел. Разумеется, не может быть и речи о том, чтобы хранить в памяти ЭВМ таблицу случайных чисел (почему?). Числа должны генерироваться по мере надобности. Для получения случайных чисел может использоваться

а) физический генератор – это был бы наилучший, наиболее качественный способ получения случайных чисел. Известно, например, что атомы радиоактивного вещества распадаются по закону случайных чисел: распадется ли данный атом в ближайшую секунду или через тысячу лет – предсказать невозможно. Таким образом, радиоактивный препарат в сочетании со счетчиком радиоактивных распадов был бы идеален. Но такой способ дорог, сложен в реализации, небезопасен. Поэтому почти всегда вместо физических генераторов применяется;

б) компьютерная программа. Разумеется, программа работает детерминированно, и результатом ее работы являются числа не случайные, а псевдослучайные: до исчерпания периода повторения (для хороших программ он исчисляется миллионами чисел) псевдослучайные числа близки по свойствам истинно случайным, но этот период нельзя превышать, поскольку иначе заново пойдут те же числа, и случайности уже не будет.

Пример. Исторически один из первых алгоритмов генерации псевдослучайных чисел (остроумный, но малоудачный) предложен фон Нейманом: надо взять затравочное двузначное число, возвести его в квадрат, результат усечь снова до двух цифр, опять возвести в квадрат и т. д.

Рассмотрим примеры:

$$\begin{aligned} i. \quad x_0 = \mathbf{46}, \quad 46^2 = 2 \mathbf{11} 6; \quad x_1 = \mathbf{11}, \quad 11^2 = \mathbf{12} 1; \quad x_2 = \mathbf{12}, \quad 12^2 = \mathbf{14} 4; \\ x_3 = \mathbf{14}, \quad 14^2 = \mathbf{19} 6; \quad x_4 = \mathbf{19}, \quad 19^2 = \mathbf{36} 1; \quad x_5 = \mathbf{36}, \quad 36^2 = 1 \mathbf{29} 6, \dots \end{aligned}$$

Уменьшая полученные числа в 100 раз, приходим к последовательности

$$\{0,46; 0,11; 0,12; 0,14; 0,19; 0,36; 0,29; \dots\}$$

псевдослучайных чисел, распределенных на отрезке $[0, 1]$. К сожалению, поскольку, как правило, числа не превышают $1/2$, равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$ нет.

ii. . $y_0 = \mathbf{34}$, $34^2 = 1 \underline{15} 6$; $y_1 = \mathbf{15}$, $15^2 = \underline{22} 5$; $y_2 = \mathbf{22}$, $22^2 = \underline{48} 4$; $y_3 = \mathbf{48}$, $48^2 = 2 \underline{30} 4$; $y_4 = \mathbf{30}$, $30^2 = \underline{90} 0$; $y_5 = \mathbf{90}$, $90^2 = 8 \underline{10} 0$; $y_6 = \mathbf{10}$, $90^2 = 8 \underline{10} 0$; $y_7 = \mathbf{10}, \dots$ – быстро возникло зацикливание ($y_7 = y_6$), и снова нет равномерного распределения.

в) последовательность цифр иррационального числа, поскольку оно записывается как бесконечная непериодическая десятичная дробь.

Например,

$$\pi = 3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510\dots; (113)$$

$$e = 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995\dots;$$

$$\sqrt{2} = 1,4142135623 7309504880 1688724209 6980785696 7187537694\dots$$

Рассмотрим вопрос об оценке точности результатов вычислений в методе Монте-Карло. Пусть, например, I – точное значение интеграла, а $i_1^{(n)}$ – его приближенное значение, полученное как доля от общего числа испытаний при n «бросаниях» случайной точки в методе Монте-Карло. Традиционная для численных методов оценка точности вида $|i_1^{(n)} - I| \leq R$, где R – достоверно известное число, неприемлема для теории вероятностей и математической статистики. Требуется вероятностная оценка: с данной доверительной вероятностью (*надежностью*) P полученное значение $i_1^{(n)}$ попадает в данный доверительный интервал радиуса R вокруг точного значения интеграла I .

Итак, оценка погрешности в методе Монте-Карло относится не к самой погрешности, а к ширине доверительного интервала (при данной доверительной вероятности P). Если вероятность P велика (близка к 1), то практически результат в методе Монте-Карло будет не хуже, чем в традиционных квадратурных методах, где оценка погрешности R часто завышена и трудно реализуема (см., например, формулы (29), (31), (33), (36), относящиеся к детерминированным квадратурным методам).

Проведем k серий «бросаний», в каждой из которых – по n испытаний (с разными наборами случайных чисел). После обработки результатов «бросаний» получатся приближенные значения искомого интеграла

$$i_1^{(n)}, i_2^{(n)}, \dots, i_k^{(n)}.$$

Если n, k – велики, то асимптотически, при $n \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$, согласно центральной предельной теореме теории вероятностей, приближенные значения интеграла распределены нормально, с плотностью вероятности

$$p(i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(i-I)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

где I – точное значение интеграла, σ^2 – дисперсия. Поскольку они неизвестны, приходится пользоваться их статистическими оценками, но тогда вместо нормального распределения (распределения Гаусса) надо применять распределение Стьюдента.

Наилучшей (состоятельной и несмещенной) оценкой I является выборочное среднее по k сериям испытаний

$$\mathcal{J} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k i_j^{(n)},$$

а оценкой дисперсии σ^2 – выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k (i_j^{(n)} - \mathcal{J})^2.$$

Доверительный интервал для искомого точного значения интеграла I определяется неравенством

$$\mathcal{J} - \varepsilon < I < \mathcal{J} + \varepsilon, \quad (114)$$

где ε вычисляется согласно распределению Стьюдента:

$$\varepsilon = t(P, k) \frac{s}{\sqrt{k}}. \quad (115)$$

Здесь $t(P, k)$ – коэффициент Стьюдента, зависящий от доверительной вероятности P и количества серий k (приводим для справки фрагмент таблицы значений $t(P, k)$).

Из формулы (115) следует, что точность результатов в методе Монте-Карло возрастает медленно. Для того чтобы повысить точность в 10 раз (т. е. получить одну добавочную верную цифру в ответе), надо выполнить в 100 раз больше вычислений!

Чем ответственнее принимаемое решение и серьезнее последствия ошибки, тем большее значение доверительной вероятности надо использовать. Для большинства ситуаций используется $P = 0,95$. Как показывает формула (114) и табличные значения, увеличение P приводит к расширению доверительного интервала.

Значения в последней строке таблицы соответствуют нормальному распределению, являющемуся предельным для распределения Стьюдента.

$k \backslash P$	0,95	0,99	0,999
10	2,26	3,25	4,78
20	2,09	2,86	3,88
50	2,01	2,68	3,50
100	1,98	2,63	3,39
∞	1,96	2,58	3,29

Не нужно думать, что интегрированием исчерпывается круг задач, решаемых методом Монте-Карло. Он применяется при решении многих задач математики и естественных наук, а также в теории массового обслуживания, теории очередей, теории надежности и др.

Рассмотрим пример, связанный с теорией надежности.

Устройство состоит из четырех модулей, поломка любого из которых приводит к порче всего устройства (рис. 20).

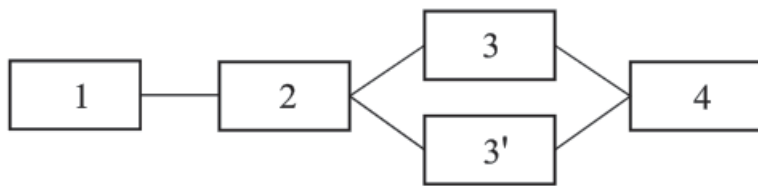


Рис. 20. К примеру по имитационному моделированию

Самый ненадежный модуль 3 продублирован, так что после его поломки немедленно включается дублер 3'. Для каждого модуля известна кривая отказов, показывающая вероятность поломки модуля после t часов непрерывной работы (рис. 21; как по рисунку сопоставить надежность модулей?). Для получения кривой отказов на заводе-изготовителе большую партию модулей держат во включенном состоянии до поломки. Можно ли вычислить время исправной работы всего устройства, исходя из кривой отказов для входящих в него модулей? (понятно, что находить его экспериментально для всего устройства может быть слишком затратно).

Итак, устройство выйдет из строя, если сломаются *оба* третьих модуля или любой другой. Пусть время исправной работы k -го элемента до поломки есть t_k ; тогда время жизни всего устройства

$$T = \min\{t_1, t_2, t_3 + t'_3, t_4\}. \quad (116)$$

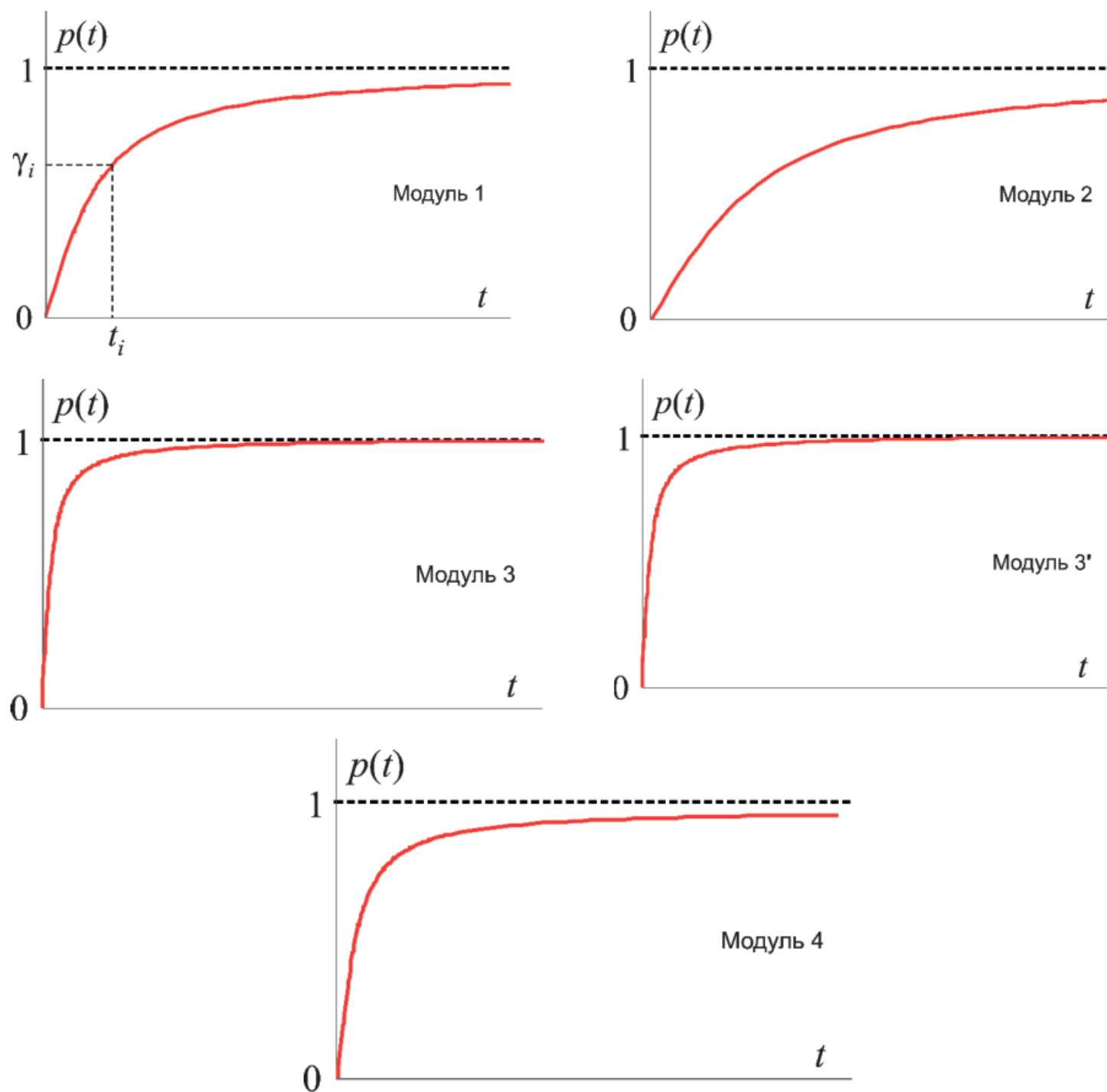


Рис. 21. Кривые отказов для модулей устройства. По горизонтали – продолжительность t (в часах) непрерывной исправной работы модуля до поломки, по вертикали – вероятность поломки модуля после t часов исправной работы

Проведем математическое испытание устройства. Разыграем поломку каждого модуля с помощью равномерно распределенных случайных чисел γ_i . Откладывая γ_1 на оси ординат кривой отказов 1-го модуля, на оси абсцисс считаем время его исправной работы (рис. 23). Время жизни 2-го модуля определим по случайному числу γ_2 и т. д. Затем по формуле (116) найдем время жизни устройства в данном испытании.

Повторив испытание N раз, можно вычислить среднее время жизни устройства

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_k T_k$$

(а затем и построить кривую отказов для всего устройства) *без* проведения натуральных испытаний!

Рассмотренный пример иллюстрирует методы имитационного моделирования, активно развивающегося в последние десятилетия.

Контрольные вопросы

- 1) Каковы сравнительные преимущества и недостатки детерминированных и стохастических вычислительных алгоритмов?
- 2) Что может послужить источником случайных чисел для метода Монте-Карло?
- 3) В чём различие оценки точности результатов вычислений в детерминированных методах и методе Монте-Карло?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧИСЛА ПИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Постановка задачи

Эта лабораторная работа не делится на варианты и выполняется в аудитории одновременно силами всех студентов академической группы.

Методом Монте-Карло найти площадь круга, уравнение окружности которого имеет вид

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25. \quad (117)$$

- 2) Использовать полученный результат для статистического вычисления числа π .

Выполнение

Круг с центром в точке $O(1, 2)$ имеет радиус $r = 5$ (рис. 22). Опишем около круга квадрат со стороной 10 (диаметр круга).

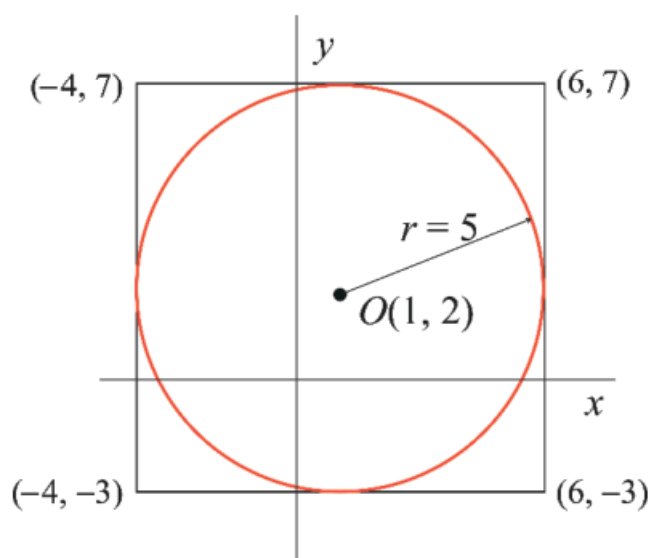


Рис. 22. К вычислению площади круга методом Монте-Карло

При «бросании» n случайных точек в квадрат часть из них (m точек) попадет в круг. Доля таких точек равна отношению площадей круга и квадрата:

$$\frac{m}{n} = \frac{S_{\odot}}{S_{\blacksquare}},$$

откуда

$$S_{\odot} = \frac{m}{n} S_{\blacksquare} = 100 \cdot \frac{m}{n}. \quad (118)$$

Разумеется, площадь круга ($S = \pi r^2$) не требуется находить столь странным способом, поэтому основной интерес будет представлять вторая часть задания.

Здесь же обсудим процедуру случайных бросаний. Будем использовать для численных экспериментов таблицу случайных чисел γ_i , равномерно распределенных на $[0, 1]$.

0,0589	0,3529	0,5869	0,3455	0,7900	0,6307
0,6733	0,3646	0,1281	0,4871	0,7698	0,2346
0,4799	0,7676	0,2867	0,8111	0,2871	0,4220
0,9486	0,8931	0,8216	0,8912	0,9534	0,6991
0,6139	0,3919	0,8261	0,4291	0,1394	0,9745
0,5933	0,7876	0,3866	0,2302	0,9025	0,3428
0,9341	0,5199	0,7125	0,5954	0,1605	0,6037
0,1782	0,6358	0,2108	0,5423	0,3567	0,2569
0,3473	0,7472	0,3575	0,4208	0,3070	0,0546
0,5644	0,8954	0,2926	0,6975	0,5513	0,0305

Поскольку для точек квадрата $-4 \leq x \leq 6$, $-3 \leq y \leq 7$ (рис. 24), подвергнем случайные числа из таблицы масштабированию (112):

$$x = -4 + 10\gamma, \quad y = -3 + 10\gamma. \quad (119)$$

Случайная точка, брошенная в квадрат, попадет в круг, если при подстановке ее координат в формулу (116) окажется, что

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 25.$$

Если же

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 > 25,$$

то точка попала в квадрат *вне* круга.

Будем извлекать из таблицы случайные числа парами, двигаясь по первому столбцу сверху вниз: $\gamma_1 = 0,0589$, $\gamma_2 = 0,6733$. Масштабируем:

$$x = -4 + 10\gamma_1 \approx -3,411, \quad y = -3 + 10\gamma_2 \approx 3,733.$$

Случайную точку $M_1(-3,411, 3,733)$ бросаем в квадрат. Поскольку

$$(-3,411 - 1)^2 + (3,733 - 2)^2 < 25,$$

точка M_1 попадает в круг.

Продолжаем случайные бросания; $\gamma_3 = 0,4799$, $\gamma_4 = 0,9486$. Масштабируем:

$$x = -4 + 10\gamma_3 \approx 0,799, \quad y = -3 + 10\gamma_4 \approx 6,486.$$

Поскольку для случайной точки $M_2(0,799, 6,486)$

$$(0,799 - 1)^2 + (6,486 - 2)^2 < 25,$$

она тоже попадает в круг.

Студенты самостоятельно продолжают расчеты, выбирая для себя индивидуально по 5–6 точек и сообщая результаты преподавателю, который подводит на доске итоги: полное количество бросаний n и попаданий m .

2) Комбинируя формулу (118) для площади круга с известным ее значением $\pi r^2 = 25\pi$, получаем возможность статистического определения числа π :

$$\pi \approx 4 \cdot \frac{m}{n}.$$

При этом должно выполняться условие $m \gg 1$, $n \gg 1$, для чего и требуется участие большого количества студентов.

Доверительный интервал (114) строить излишне, поскольку значение числа π с любым количеством верных десятичных знаков (113) известно, и сразу можно найти абсолютную погрешность результата.

Описанные действия легко программируются, что позволяет избежать натурального эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лапчик М. П. Численные методы: Учеб. пособие для студ. вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер. – М.: Академия, 2005. – 384 с.
2. Иванов В. М. Численные методы. – Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2003. – 114 с.
3. Амосов А. А. Вычислительные методы: Учеб. пособие / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. – М.: Лань, 2014. – 672 с.
4. А. Н. Тихонов, Д. П. Костомаров. Вводные лекции по прикладной математике. – М.: Наука, 1984. – 192 с.
5. Е. А. Волков. Численные методы. – М.: Лань, 2008. – 256 с.
6. Р. М. Минькова, Р. А. Вайсбурд. Методы вычислительной математики. – Свердловск: Изд. УПИ им. С. М. Кирова, 1981. – 88 с.
7. Г. Н. Воробьева, А. Н. Данилова. Практикум по численным методам. – М.: Высш. шк., 1979. – 184 с.
8. Н. Н. Калиткин. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
9. Н. И. Данилина, Н. С. Дубровская, О. П. Кваша, Г. Л. Смирнов, Г. И. Феклисов. Численные методы. – М.: Высш. шк., 1976. – 368 с.
10. Н. В. Копченова, И. А. Марон. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Лань, 2009. – 370 с.
11. Р. С. Гутер, П. Т. Резниковский. Программирование и вычислительная математика. Вып. 2: Вычислительная математика. Программная реализация вычислительных методов. – М.: Наука, 1971. – 264 с.
12. Б. П. Демидович, И. А. Марон. Основы вычислительной математики. – М.: Лань, 2011. – 672 с.
13. Таха Х. А. Введение в исследование операций. 7-е издание. – М.: Вильямс, 2005. – 912 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ЗНАКОМСТВО С MATHCAD²⁷

Эти четыре упражнения надо выполнить в едином файле, располагая записи одну под другой. Сохранить файл как Памятку по Маткаду

1. ЗАДАНИЕ ФУНКЦИИ, ЗАПИСЬ ЦИКЛА, ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ

Наберите на клавиатуре в среде Mathcad

$$f(x) := -2 \cdot e^{(-x^2)} \cdot \cos(2 \cdot x - 3)$$

$$x := -1, -0.8; 0.6$$

x =

$$f(x) =$$

$$f(-3.7) =$$

На рабочем листе Mathcad появится:

x =	f(x) =
-1	-0.209
-0.8	0.118
-0.6	0.684
-0.4	1.348
-0.2	1.858
0	1.98
0.2	1.647
0.4	1.003
0.6	0.317

$f(-3.7) = 1.272 \times 10^{-6}$

²⁷ Вид рабочего листа Маткада может в деталях отличаться от приведённого ниже, в зависимости от конкретной версии программы.

2. ВЫЧИСЛЕНИЯ ПО ФОРМУЛАМ

Решим в Mathcad квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Задаём значения коэффициентов и используем стандартную формулу

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} :$$

a := 1 b := -3 c := 2

D := b² - 4·a·c

x₁ := $\frac{(-b + \sqrt{D})}{2 \cdot a}$ x₁ = 2

x₂ := $\frac{(-b - \sqrt{D})}{2 \cdot a}$ x₂ = 1

Заметим, что обращаться к переменной (функции) можно только правее и/или ниже того места на рабочем листе Mathcad, где они определены.

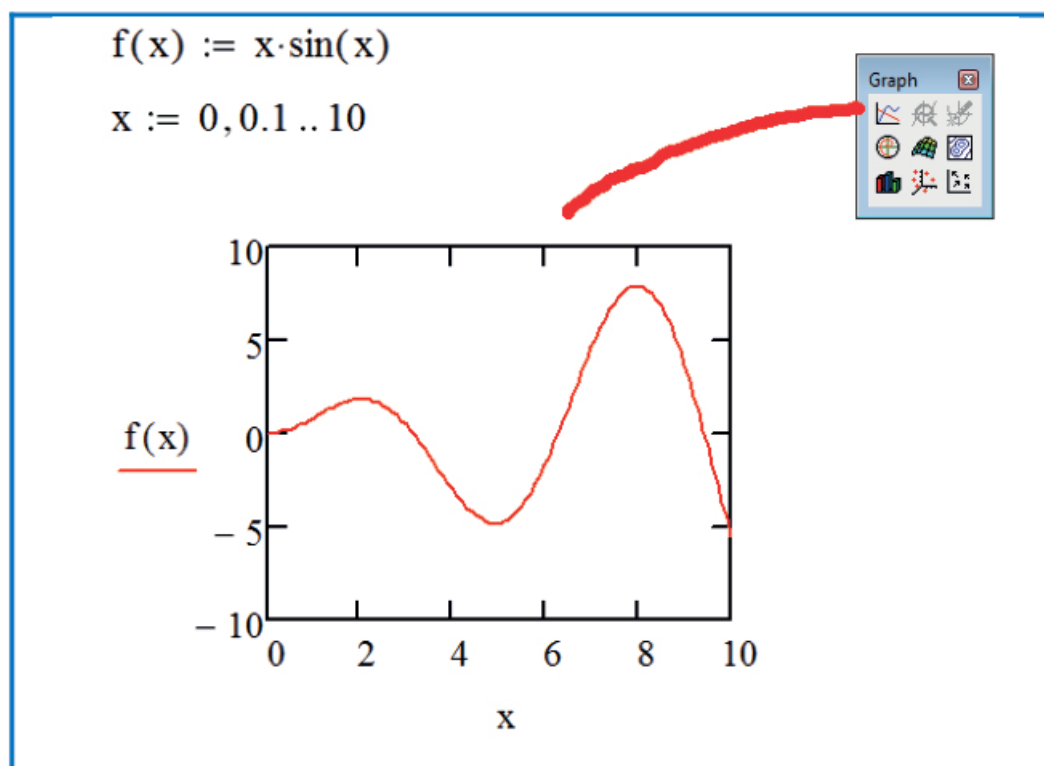
3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

The screenshot shows the Mathcad interface with the following content:

- Equation: $h(x) := \frac{d}{dx} f(x)$
- Equation: $h(-1.75) = -0.36$
- Equation: $S := \int_0^1 f(x) dx$
- Equation: $S = 0.715$

A "Calculus" palette is open, showing various mathematical symbols. Red arrows point from the $\frac{d}{dx}$ symbol in the first equation to the $\frac{d}{dx}$ symbol in the palette, and from the \int symbol in the second equation to the \int symbol in the palette.

4. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ



ПРИЛОЖЕНИЕ II

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ № 1 В ПАКЕТЕ Mathcad

Лабораторная работа № 1

Интерполирование функций

Аппроксимируемая функция

$$F(x) := x^5 - 34 \cdot x - 2$$

Узлы интерполяции

$$x_0 := 2$$

$$x_1 := 5$$

$$x_2 := 8$$

Интерполяционный полином Лагранжа

$$A(x) := F(x_0) \cdot \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)}$$

$$B(x) := F(x_1) \cdot \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)}$$

$$C(x) := F(x_2) \cdot \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)}$$

$$L_2(x) := A(x) + B(x) + C(x)$$

промежуточная точка

$$a := 5.5$$

Значения аппроксимируемой и аппроксимирующей функций в точке a

$$F(a) = 4.844 \times 10^3$$

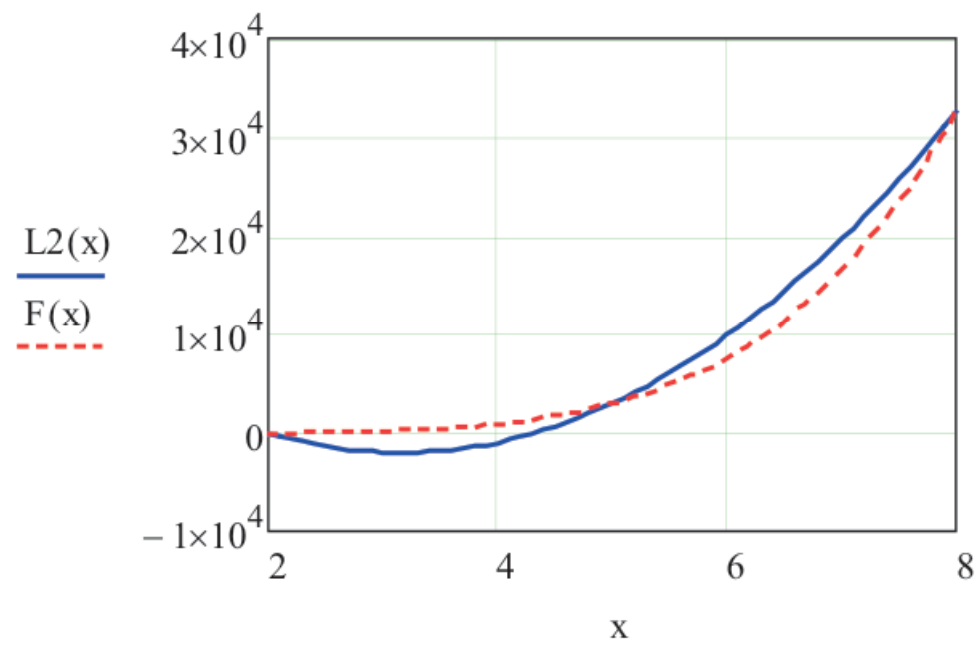
$$L_2(a) = 6.033 \times 10^3$$

Погрешность интерполяции в точке a

$$|F(a) - L_2(a)| = 1.189 \times 10^3$$

Графики аппроксимируемой и аппроксимирующей функций

$$x := 2, 2.1 \dots 8$$

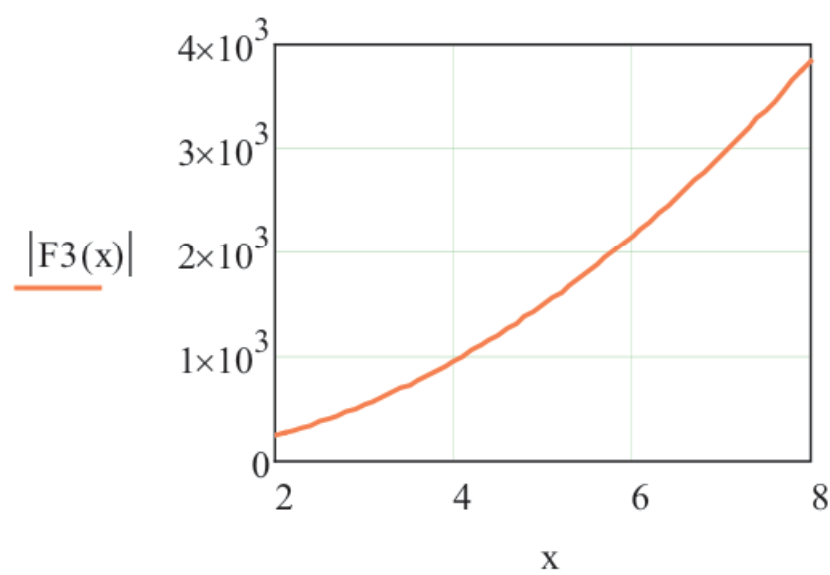


Оценка погрешности интерполяции

$$F3(x) := \frac{d^3}{dx^3} F(x)$$

График модуля третьей производной

$x := 2, 2.1 \dots 8$



Максимум достигается при $x = 8$

$$M3 := |F3(8)|$$

$$M3 = 3.84 \times 10^3$$

Оценка погрешности интерполяции $R_2(x)$ в точке a

Завершить самостоятельно!

ПРИЛОЖЕНИЕ III

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПАКЕТЕ Mathcad

Решение систем уравнений в MathCAD

Задаём начальные (затравочные) значения переменных

$$x := 1 \quad y := 1 \quad z := 1 \quad w := 1$$

После оператора *Given* (Дано) задаём ограничения на переменные (в данном случае ограничения представлены системой из 4 линейных уравнений). Левая и правая части каждого уравнения соединяются знаком равенства, который берётся из панели *Boolean* (Булевские).

Given

$$x = 0.23x - 0.04y + 0.21z - 0.18w + 1.24$$

$$y = 0.45x - 0.23y + 0.06z - 0.88$$

$$z = 0.26x + 0.34y - 0.11z + 0.62$$

$$w = 0.05x - 0.26y + 0.34z - 0.12w - 1.17$$

Вычисляются значения переменных:

$$\begin{pmatrix} xval \\ yval \\ zval \\ wval \end{pmatrix} := \text{Find}(x, y, z, w)$$

Искомые значения переменных:

$$xval = 2.04821441 \quad yval = 0.08583184 \quad zval = 1.06461133 \quad wval = -0.64994438$$

Проверка результата подстановкой в первое уравнение системы:

$$0.23 \cdot xval - 0.04 \cdot yval + 0.21 \cdot zval - 0.18 \cdot wval + 1.24 = 2.04821441$$

Ответ верен!

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Введение.....	4
ГЛАВА 1. ПОГРЕШНОСТИ.....	6
1. Источники погрешностей.....	6
2. Абсолютная и относительная погрешности.....	7
3. Действия с приближенными числами.....	9
Правило сложения и вычитания приближенных чисел.....	10
Правило умножения и деления приближенных чисел.....	11
Индивидуальные задания.....	12
Пример решения одного варианта.....	13
Контрольные вопросы.....	14
ГЛАВА 2. АППРОКСИМАЦИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ.....	15
Интерполяционный полином Лагранжа.....	18
Погрешность интерполяционного полинома Лагранжа.....	19
Контрольные вопросы.....	21
Лабораторная работа №1. Интерполирование функций.....	22
ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ.....	24
Формулы численного дифференцирования для четырех равноотстоящих узлов.....	27
Контрольные вопросы.....	28
Лабораторная работа № 2а. Численное дифференцирование.....	28
ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.....	32
Формула Ньютона-Котеса.....	32
Формула прямоугольников.....	36
Формула трапеций.....	38
Формула Симпсона.....	39
Контрольные вопросы.....	43
Лабораторная работа № 2б. Численное интегрирование.....	43
ГЛАВА 5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ.....	44
1. Метод половинного деления (дихотомия).....	46
2. Метод итераций (последовательных приближений).....	47
3. Метод Ньютона.....	52
4. Метод секущих.....	57
5. Метод хорд.....	58
Контрольные вопросы.....	59
Лабораторная работа № 3. Численное решение уравнений.....	60

ГЛАВА 6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ.....	61
Линейные системы.....	61
Метод простой итерации.....	63
Условия сходимости итерационного процесса.....	63
Лабораторная работа № 4а. Решение систем линейных уравнений методом простой итерации.....	70
Метод Зейделя.....	74
Лабораторная работа № 4б. Решение систем линейных уравнений методом Зейделя.....	76
Нелинейные системы.....	80
Контрольные вопросы.....	88
Лабораторная работа № 4в. Решение систем нелинейных уравнений.....	89
ГЛАВА 7. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	94
Метод ломаных Эйлера.....	95
Метод последовательного дифференцирования.....	98
Метод Рунге-Кутты.....	99
Контрольные вопросы.....	103
Лабораторная работа № 5. Численное решение дифференциальных уравнений.....	103
ГЛАВА 8. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ МОНТЕ-КАРЛО.....	107
Контрольные вопросы.....	115
Лабораторная работа № 6. Вычисление числа Пи методом Монте-Карло.....	115
Литература.....	118
ПРИЛОЖЕНИЕ I.....	119
ПРИЛОЖЕНИЕ II.....	122
ПРИЛОЖЕНИЕ III.....	124

Книги почтой

Заказ можно сделать на сайте издательства
www.infra-e.ru

№ п/п	Наименование книги	Кол- во
1	Вычислительная математика	
2	Информатика. Курс лекций	
3	Классическая электродинамика	
4	Конструкционная прочность	
5	Математическая статистика в задачах и упражнениях	
6	Основы информационной безопасности	
7	Основы классической электродинамики	
8	Расчеты на прочность – это просто!	
9	Термодинамика и газодинамика	
10	Техническая термодинамика	
11	Численные методы	
12	Электродинамика, радиоволновые процессы и технологии	

Учебное издание

ЗЕНКОВ Андрей Вячеславович

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ИТ-СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Учебное пособие

ISBN 978-5-9729-0883-7



Подписано в печать 29.10.2021
Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».

Издательство «Инфра-Инженерия»
160011, г. Вологда, ул. Козленская, д. 63
Тел.: 8 (800) 250-66-01
E-mail: booking@infra-e.ru
<https://infra-e.ru>

Издательство приглашает
к сотрудничеству авторов
научно-технической литературы