Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»

К. В. Балдин, Н. А. Брызгалов, А. В. Рукосуев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебник

2-е издание

Под общей редакцией доктора экономических наук, профессора К. В. Балдина

Рекомендовано уполномоченным учреждением Министерства образования и науки РФ — Государственным университетом управления в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки «Экономика» и экономическим специальностям

Регистрационный номер рецензии 542 от 29.12.2008 г. (Федеральный институт развития образования)

Москва, 2018

УДК 330.115
ББК 65.01
Б20

Авторы:

К. В. Балдин — доктор экономических наук, профессор; *Н. А. Брызгалов* — кандидат технических наук, доцент; *А. В. Рукосуев* — старший преподаватель.

Рецензенты:

И. В. Минаев — доктор технических наук, профессор; *Н. Н. Пилипенко* — доктор экономических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ

Балдин К. В.

Б20 Математическое программирование: Учебник / К. В. Балдин, Н. А. Брызгалов, А. В. Рукосуев. / Под общ. ред. д.э.н., проф. К. В. Балдина. — 2-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2018. — 218 с.

ISBN 978-5-394-01457-4

В учебнике рассматриваются теоретические основы математического программирования с позиций методологии системного анализа. Представлены методы решения задач линейного, нелинейного, динамического программирования и некоторых специальных задач линейного программирования. Рассматриваются проблемы применения известных методов и моделей теории игр в разработке рациональных управленческих решений в неопределенных условиях. В приложениях представлены задачи для самостоятельного решения.

Для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки «Экономика», «Менеджмент» и «Торговое дело».

Подписано в печать 20.09.2017. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1. Печ. л. 13,75.
Тираж 100 экз.

Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»
129347, Москва, Ярославское шоссе, д. 142, к. 732
Тел.: 8 (495) 668-12-30, 8 (499) 183-93-23
E-mail: sales@dashkov.ru — отдел продаж;
office@dashkov.ru — офис; http://www.dashkov.ru

ISBN 978-5-394-01457-4

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ДЗЛП — двойственная задача линейного программирования;
ДП — динамическое программирование;
ЗЛП — задача линейного программирования;
ИО — исследование операций;
КЭА — комплексно-экономический анализ;
ЛП — линейное программирование;
ЛПР — лицо принимающее решение;
МДП — метод динамического программирования;
МТС — материально-технические средства;
НДБР — начальное допустимое базисное решение;
НЛП — нелинейное программирование;
ОДР — область допустимых решений;
ОФ — ограничивающая функция;
ПЗЛП — прямая задача линейного программирования;
ППП — пакет прикладных программ;
ПЭВМ — персональная электронно-вычислительная машина;
СМ — симплекс-метод;
СПУ — сетевое планирование и управление;
ТЗЛП — транспортная задача линейного программирования;
ТМО — теория массового обслуживания;
ТПР — теория принятия решения;
ЦЛП — целочисленное линейное программирование;
ЦФ — целевая функция;
ЭВМ — электронно-вычислительная машина;
ЭВТ — электронно-вычислительная техника;
ЭИС — экономическая информационная система.

ВВЕДЕНИЕ

Математическое программирование — совокупность методов принятия оптимальных решений на основе нахождения оптимума функции многих переменных, находящихся на границах области допустимых решений. При этом область допустимых решений определяется соответствующими функциональными ограничениями. В математическое программирование входит линейное, дискретное, нелинейное, выпуклое, динамическое программирование, теория игр, теория графов и теория массового обслуживания.

Особое место в математическом программирование занимает линейное программирование, характеризуемое высокой надежностью и простотой вычислительного алгоритма, удобного для разработки машинной программы. Наиболее изученным разделом математического программирования является линейное программирование. Для решения задач этого класса разработан целый ряд эффективных методов, алгоритмов и программ. Линейное программирование представляет собой важнейшую часть математической дисциплины, занимающейся изучением решения экстремальных задач. В общем виде вербальная постановка задач линейного программирования состоит в нахождении наибольшего или наименьшего значения целевой функции при заданных ограничениях.

Целью выпуска данного учебного пособия является формирование у студентов навыков постановки задач оптимизации на вербальном и математическом уровнях, а также решение задач предлагаемыми методами и соответствующая интерпретация полученных результатов. В книге введена единая общепризнанная терминология и система обозначений, что позволяет студентам использовать методы оптимизации как средство, предназначенное для обоснования управленческих решений.

Первая глава посвящена методологическим основам математического программирования, а также системному подходу к организации проведения комплексного экономического анализа управленческих решений. В последующих главах представлены методы решения задач линейного и целочисленного линейного программирования. Задаче линейного программирования можно сопоставить некоторую другую задачу, двойственную к исходной. В этой связи большое значение имеют методы решения двойственной задачи линейного программирования, а также анализ чувствительности задачи линейного программирования.

В заключительных главах нашли свое достойное отражение методы решения специальных задач линейного программирования транспортного типа. Дальнейшее развитие получила концептуальная и математическая постановка специальной задачи оптимального планирования однопродуктовой и многопродуктовой транспортной задачи. Представлены методы и модели нелинейного и динамического программирования, сетевого планирования и управления, теории игр. Приведены технологии разработки и принятия эффективных управленческих решений в условиях природной неопределенности.

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Цели, задачи и принципы исследования экономических операций

Исследование операций как самостоятельное научное направление возникло из потребностей наилучшей организации экономических операций, а также прогнозирования их исхода при принятии руководством различных решений. Однако с течением времени стало очевидно, что подобные организационные задачи (согласования, упорядочения, распределения и др.) возникают и в других, самых различных сферах человеческой деятельности и имеют, несмотря на их качественное различие, сходные черты. Во-первых, во всех этих задачах рассматривается некоторая совокупность мероприятий (система действий), направленных на достижение конкретной цели. Во-вторых, считаются заданными некоторые фиксированные условия, характеризующие обстановку выполнения этих мероприятий и изменить которые не представляется возможным (например, отпущенные средства, располагаемые ресурсы, качественные характеристики используемых технических средств и др.). В-третьих, в рамках этих фиксированных условий необходимо принимать решения, чтобы рассматриваемая совокупность мероприятий была в определенном смысле наиболее выгодной. Этой общности оказалось достаточно для построения единой системы методов, которые и стали называться "исследованием операций" (ИО).

Под операцией в данном случае понимается система действий, объединенных общим замыслом и направленных на *достижение определенной цели*. Операция — это обобщенное понятие, охватывающее все те виды деятельности человека, непременным атрибутом которых является принятие решений. Примеры экономических операций: анализ финансово-хозяйственной деятельности предприятия, анализ эффективности привлекательности инвестиционного проекта.

Принятие решения по своей сути представляет собой выбор одного из множества возможных вариантов осуществления операции. Способность делать правильный выбор — ценное качество, которое присуще людям в разной степени. Высокопрофессиональные менеджеры, например, отличались и отличаются от своих коллег или конкурентов прежде всего умением делать наилучший выбор, т. е. принимать лучшие решения. Но всякое решение лучше, разумнее, если оно будет подкреплено количественными, математическими расчетами. Для проведения таких расчетов и служат методы исследования операций. Таким образом, в современном понимании *исследование операций — это научный метод, дающий в распоряжение руководителя количественные основания для принятия им решений, связанных с организацией и осуществлением операции*.

Объектом исследования операций является операция, а в качестве *предмета* исследования операций выступают закономерности, связывающие организацию и условия проведения операции с ее конечным результатом.

Необходимо подчеркнуть, что процедура непосредственного принятия решений выходит за рамки исследования операций, и процесс исследования завершается представлением руководителю рекомендаций, полученных на основе применения математических методов. Поэтому *цель исследования операций* заключается в выработке научно-обоснованных рекомендаций для принятия решений.

Операция, как правило, всегда проводится при фиксированных условиях, т. е. управление ею осуществляется в рамках имеющихся различного рода ограничений: социальных, экономических, технических, финансовых, материальных, людских и т. д. Исходя из этого, основной *задачей исследования опера-*

ций можно считать выявление и количественное обоснование наилучших вариантов проведения операции в условиях существования различных ограничений.

Методологическую основу исследования операций составляет *системный анализ* как совокупность методологических средств, используемых для подготовки и обоснования решений по сложным проблемам различного, в том числе и военного, характера. Системное представление любого объекта, в том числе и операции, требует рассмотрения этого объекта в трех аспектах:

– как нечто целое (система);

– как часть наиболее общей системы (надсистемы или более масштабной операции);

– как совокупность более мелких частей (элементов, подсистем, подопераций). Здесь уместно привести слова известного историка Л. Н. Гумилева, в которых наиболее четко изложена суть системного анализа: “Изучение любой системы целесообразно лишь в целом. Даже если нас интересует только какая-нибудь деталь, то все равно надо окинуть взором всю систему, найти место этой детали, установить ее соподчиненность в системной иерархии, взаимосвязи, а уж потом говорить о той части, которая заставила поставить проблему”.

Практическая реализация методологии системного анализа при проведении исследования конкретной операции заключается в том, чтобы придерживаться определенных принципов: цели, внешнего дополнения, декомпозиции, целостности. Принцип — это всякое основание, из которого надо исходить и которым необходимо руководствоваться в деятельности для достижения успеха.

Принцип цели является важнейшим принципом системного анализа, на основании которого происходит объединение экономических объектов и разрозненных действий людей по их использованию в единую целенаправленную деятельность, т. е. экономическую в операцию. Исходя из этого принципа, необходимо в первую очередь определить цели предстоящей операции. До тех пор, пока цель не определена, нет смысла говорить вообще о какой-либо операции. Важность этого принципа для исследования операций состоит еще и в том, что формулирование цели является исходным моментом всего последующего процесса исследования конкретной операции. Однако необходимо подчеркнуть, что *выявление и формулирование цели операции не входит в рамки исследования операций,* и эти вопросы являются предметом изучения других наук, например теории принятия решений. Для операций экономического характера цель может быть представлена в форме задачи, поставленной вышестоящим руководителем, менеджером и т. д.

Принцип декомпозиции выступает как основание для снижения сложности процесса исследования операций. В соответствии с этим принципом процесс исследования операции может быть расчленен на три взаимосвязанных уровня: концептуальный, операциональный и детальный (так называемая вертикальная декомпозиция). Исследуемая операция фиксируется в этом случае на операциональном уровне, концептуальный уровень формируется для вскрытия целей операции, а с детального уровня привлекается информация о составе и структуре тех средств, которые используются в операции. “Горизонтальная” декомпозиция предполагает разбиение операции, рассматриваемой в данном случае на операциональном уровне, на отдельные составляющие ее элементы и подпроцессы. В качестве элементов рассматривают активные средства операции, условия и способы ее проведения, а среди процессов, сопровождающих операцию, выделяют целевые подпроцессы, непосредственно приводящие к требуемому результату, и функциональные, обеспечивающие целевые подпроцессы. Естественно, что исследовать отдельные элементы и подпроцессы операции несравненно легче, чем всю операцию в целом. Таким образом, процесс исследования операции носит иерархический характер (“вертикальная” декомпозиция), т. е. осуществляется последовательное привлечение необходимой информации от выше- и нижележащих уровней исследования с детализацией ее на рассматриваемом уровне (“горизонтальная” декомпозиция).

Однако декомпозиция операции по ее элементам и подпроцессам в последующем требует их объединения с целью восстановления эмерджентных свойств, знание которых способствует выявлению наиболее рациональных способов проведения операции. Объединение элементов операции является отражением уже другого принципа — *принципа целостности*, следование которому требует выявления *эмерджентных* (от англ. *emergency* — "внезапное появление") свойств операции. Эмерджентность проявляется в том, что свойства операции не являются простой суммой свойств отдельных элементов операции.

В основе декомпозиции процесса исследования операции лежит важнейший общесистемный *принцип внешнего дополнения*. Руководствуясь этим принципом необходимо выявить всю совокупность, систему проводимых или планируемых операций, определить масштаб исследуемой операции и ее место в этой системе, установить ее соподчиненность и взаимосвязи с другими операциями. Внешнее дополнение позволяет сформулировать цели исследуемой операции, согласовать их с целями других, более масштабных операций, а также ввести объективные критерии для оценки степени их достижения. Эти действия выполняются на концептуальном уровне и, например, роль внешнего дополнения при исследовании операций экономического характера, как правило, играет вышестоящее руководство (см. принцип цели). На операциональном уровне роль внешнего дополнения принадлежит тому лицу, которое будет принимать решение, и именно оно определяет состав и структуру активных средств исследуемой операции, а также степень их участия в ней.

Содержанием исследования операций с теоретической точки зрения является математический анализ оптимизационных задач, т. е. задач, в которых осуществляется процесс поиска *оптимальных решений*, нахождение их *оптимальных решений*, разработка новых и совершенствование существующих *методов оптимизации*. *Оптимальным* (от лат. *optimus* — наилучший) *называется такое решение, которое обеспечивает наибольшую в определенном смысле выгодность, полезность* *операции*. Поэтому исследование операций иногда называют теорией принятия оптимальных решений. Именно в интересах поиска оптимальных решений разрабатываются методы оптимизации. *Методы оптимизации — это методы построения алгоритмов нахождения экстремумов функций и точек, в которых они достигаются, при наличии ограничений и без них*. Понятие “оптимум” является более содержательным, чем понятие “экстремум”.

С практической точки зрения содержание исследования операций состоит в составлении оптимизационных задач и в нахождении их оптимальных решений.

Основным *методом исследования операций* является математическое моделирование как метод исследования целенаправленных процессов путем построения и изучения их моделей. Разработка математических моделей требует привлечения определенного математического аппарата, составляющего математическую основу исследования операций. Это те разделы математики, которые были созданы независимо от исследования операций, но аппарат которых систематически употребляется для решения задач исследования операций. В настоящее время математическую основу исследования операций составляют математический анализ (вместе с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений и вариационным исчислением), теория вероятностей, линейная алгебра и др.

Основными *средствами исследования операций* следует считать математические модели и методы. *Математическая модель* является основным теоретическим инструментом, позволяющим рассматривать операцию как единое целое, и *представляет собой записанную в математических символах абстракцию реального явления, так конструируемую, чтобы ее анализ давал возможность проникнуть в сущность явления*. Конечной целью разработки математических моделей является выработка рекомендаций по принятию решения, прогноз результатов проведения операции и определение возможных воздействий на ход ее проведения. Математическими методами исследования операций принято называть те разделы математики, которые специально разработаны для решения задач исследования операций. В настоящее время их основу составляют *методы оптимизации*.

1.2. Основные понятия исследования операций

Главным субъектом всякого решения является лицо, принимающее решение (ЛПР). Это собирательный образ, за которым может стоять либо одно лицо (например, руководитель), либо группа лиц (например, совет директоров, совет учредителей и т. д.), вырабатывающих в этом случае коллективное решение. ЛПР выполняет основную роль при принятии решения, оно облечено властью, имеет в своем распоряжении различного рода силы и средства (располагает возможностями), обеспечено необходимой информацией и несет ответственность за принимаемые решения [6]. Исследование операций всегда проводится только в интересах ЛПР.

Однако учесть все особенности исследуемой операции, глубоко разобраться в целях операции, способах ее достижения и иных обстоятельствах, связанных с выбором решения, одному человеку, пусть даже и подготовленному, зачастую бывает очень трудно. В этом случае для помощи ЛПР привлекается исследователь (или группа исследователей) — специалист в области исследования операций. Задача исследователя заключается в том, чтобы с использованием математических моделей и методов обосновать рациональные способы использования ресурсов, обеспечивающие достижение установленных целей. Он не принимает ответственных решений, а только помогает ЛПР в этом, выдавая ему рекомендации, необходимые для принятия таких решений. По сути дела, исследователь, обладая необходимыми знаниями и навыками в рассматриваемой предметной области, несет на себе основную нагрузку исследования, и весь процесс исследования операции проводится им исходя из той информации, которую ему предоставляет ЛПР.

Процесс исследования операций начинается с того момента, когда ЛПР четко и однозначно сформулирует исследователю цель операции. *Под целью операции обычно понимают некоторый требуемый результат деятельности, моделирующий "желательное" для ЛПР состояние.* Это "желательное" состояние может быть намечено самим ЛПР исходя из решаемой задачи, исходной обстановки и будущего развития ситуации либо может быть задано внешне (например, в форме задачи, поставленной вышестоящим руководителем). Цель операции формулируется вербально.

Любую операцию следует рассматривать как целенаправленный процесс преобразования различных видов ресурсов в требуемый результат. Для осуществления такого преобразования необходимы активные средства, к которым в операциях экономического характера относятся *экономические информационные системы* (ЭИС) и *ресурсы. Экономические информационные системы — это совокупность взаимосвязанных технически программных объектов и персонала, объединенных для решения задач экономического характера. Под ресурсами обычно понимаются источники, запасы материальных, технических, денежных, энергетических и других средств, а также внутренние резервы и возможности ЭИС*.

Допустимые способы использования активных средств являются стратегиями (альтернативами, вариантами решения) ЛПР в данной операции. Множество допустимых стратегий обозначим через $U = \{u\}$. Слово "допустимые" в данном выше определении следует понимать как не выходящие за пределы технических, экономических, физических возможностей (ограничений) [8]. Среди допустимых стратегий U обычно находятся и оптимальные стратегии $u^* \in U^* \in U$, превосходящие остальные по каким-либо признакам. *Под способами обычно понимаются порядок и приемы использования активных средств.* Порядок определяется либо последовательностью выполнения мероприятий, в которых задействуются активные средства, либо установлением количественных соотношений между распределяемыми ресурсами. Содержательно различающихся друг от друга способов может быть немного, а вот способов, различающихся друг от друга лишь количественными параметрами, может быть бесконечное множество. Принятие решения — это волевой акт, совершаемый ЛПР и заключающийся в выборе им наилучшей по его представлениям стратегии проведения операции. Примерами стратегий могут быть: принятая последовательность выхода предприятия из состояния банкротства, количество привлекаемых инвестиций, методы проведения анализа финансового предприятия и т. д.

Всякая операция представляет собой процесс, осуществляемый во времени, проходящий различные этапы своего развития и завершающийся получением конечного *результата. Результат операции — это полученные посредством деятельности характеристики итогового состояния операции, в том числе и не предусмотренные сознанием в виде цели деятельности. Вербальное описание конечного результата операции называется ее исходом (конечным итогом).* Между стратегией проведения операции и ее исходом существует некоторая взаимосвязь, условно называемая “механизмом ситуации”. Различают два типа этих “механизмов”: детерминистский (условия определенности) и неопределенный (условия неопределенности). Условия определенности характеризуются тем, что ЛПР (и исследователь) имеют ясное представление о том, к какому конкретному исходу операции приведет та или иная стратегия ее проведения. Для условий неопределенности подобная ясность отсутствует. *Методы оптимизации* применимы, как правило, в рамках детерминистского “механизма ситуации”.

Исход операции зависит от множества различных по своей природе *факторов*, характеризующих качество, способы и условия использования активных средств, задействованных ЛПР в операции. *Под факторами операции понимаются объективные условия и обстоятельства, определяющие ее особенности и непосредственно влияющие на ее исход.* Из множества факторов выделяются подмножества управляемых и неуправляемых факторов. К управляемым относятся те факторы, на которые ЛПР способно влиять по своему усмотрению в интересах достижения цели операции. Отнесение тех или иных факторов к управляемым или неуправляемым определяется постановкой задачи исследования. Стратегия как установленный порядок использования активных средств может характеризоваться набором величин (или вектором) $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^т$, являющихся формальным отображением множества управляемых факторов.

Принятие решения представляет собой выбор ЛПР одной или нескольких наилучших стратегий из множества *допустимых*. Формальное представление множества допустимых стратегий U производится заданием ограничений на значения компонент вектора $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^т$, которые, как правило, имеют вид равенств или неравенств: $g(X) \le 0$; $h(X) = 0$, где $g(X)$ и $h(X)$ — векторы: $g(X) = (g_1(X), g_2(X), ..., g_k(X))^т$ и $h(X) = (h_{k+1}(X), h_{k+2}(X), ..., h_m(X))^т$.

Для осуществления такого выбора должен быть разработан способ сравнения стратегий между собой и определения с точки зрения ЛПР наиболее предпочтительных. Существо этого способа состоит в том, что каждую отдельную стратегию $u \in U$ оценивают конкретным показателем, и сравнение стратегий, таким образом, сводится к сравнению соответствующих им показателей. *Показатель — это специальная числовая функция, заданная на множестве стратегий и позволяющая различать стратегии по предпочтительности*. Показатель может быть скалярным и векторным. В той части теории исследования операций, которая связана с применением рассматриваемых в данном пособии *методов оптимизации*, показатель всегда является скалярным и носит название целевой функции $y(u)$. Те числовые значения, которые эта функция принимает, называются *оценками* целевой функции.

Выбор конкретной наилучшей стратегии осуществляется по определенным правилам, называемым критериями. Критерий выбирается на основе *принципов рационального поведения*. Рациональность в поведении ЛПР означает, что он стремится выбирать и реализовывать лишь те стратегии, которые приведут его к наиболее предпочтительным для него исходам. *Под принципами рационального поведения понимаются неко-*

торые основания, по которым те или иные стратегии ЛПР квалифицирует как наиболее предпочтительные. Различают два принципа рационального поведения: пригодности и оптимальности. В соответствии с *принципом пригодности* рациональной $u^{п} \in U$ будет считаться такая стратегия проведения операции, для которой оценка показателя выбора $y(u)$ будет превышать некоторое наперед заданное (требуемое) значение $y_{тр}$, т. е. $u^{п}$: $y(u) \geq y_{тр}$. Критерий выбора, основанный на принципе пригодности, приводит, как правило, к отбору не самой лучшей стратегии проведения операции.

В *принципе оптимальности* находят свое отражение черты интуитивного понимания любым человеком наиболее выгодного, разумного, справедливого. Как правило, человека чаще всего устраивает только наилучший из всех возможных вариантов событий. Принцип оптимальности является *ведущим* в теории исследования операций. Критерий, выбранный на основе этого принципа, предусматривает выбор таких стратегий, которые характеризуются экстремальным значением целевой функции, т. е.

$$u^* = \arg \underset{u \in U}{\operatorname{extr}}\, y(u),$$

где extr = {max, min}.

Критерий и показатель выбора стратегий являются математической моделью цели операции. Это означает, что при заданном критерии именно по количественному значению целевой функции ЛПР может судить о степени достижения цели операции.

Формально задача исследования операций сводится к заданию в явном виде связей между характеристиками управляемых факторов X стратегий $u \in U$, характеристиками детерминированных неуправляемых факторов и значениями целевой функции $y(u)$ и формулировке ее как оптимизационной:

$$\text{определить } u^* = \arg \underset{u \in U}{\operatorname{extr}}\, y(u),$$

где $y(u) = f(X)$, $U = \{u = (x_1, x_2, .., x_n) \mid g(X) \leq 0;\ h(X) = 0\}$.

Решение, связанное с выбранной математической моделью, составляют:

1) конкретный набор значений управляемых параметров, характеризующих оптимальную стратегию, т. е.

$$u^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*);$$

2) значение целевой функции $y(u^*) = f(X^*)$.

Оптимизация — это мощное средство решения проблем, но использовать его следует все более осторожно по мере возрастания их сложности. Методы оптимизации, как и любые другие, имеют определенные недостатки:

1) "хрупкость" оптимального решения: незначительные на первый взгляд изменения в условиях задачи (исходных данных) могут привести к выбору существенно различающихся стратегий;

2) нахождение оптимального значения целевой функции в соответствии с принятым критерием часто отождествляется с целью, а на самом деле цель операции и целевая функция с критерием оптимальности относятся друг к другу как модель и оригинал;

3) методы оптимизации не позволяют учитывать психологические особенности ЛПР, и именно с этим связаны самые большие неудачи исследования операций. Целевая функция и критерий оптимальности лишь косвенно, приближенно характеризуют цель, формулируемую ЛПР вербально в соответствии со своими представлениями о способах разрешения проблемы. Человек в задачах ИО выступает как "механический" элемент, придаток сложных систем.

1.3. Классификация методов оптимизации и их краткая характеристика

Классификация — распределение предметов какого-либо рода на классы согласно наиболее существенным признакам, присущим предметам данного рода и отличающим их от предметов других родов, при этом каждый класс занимает в получившейся системе определенное постоянное место и подразделяется на подклассы.

Классификация методов оптимизации может осуществляться по различным признакам. По признаку наличия или отсутствия ограничений в сформированных задачах исследования операций все методы оптимизации подразделяются на два класса: условной и безусловной оптимизации. Методы *безусловной* оптимизации предназначены для поиска оптимального значения целевой функции при отсутствии ограничений, накладываемых на управляемые переменные. Методы же *условной* оптимизации, напротив, ориентированы на нахождение оптимального значения целевой функции при наличии ограничений.

По способам нахождения экстремумов целевой функции методы как условной, так и безусловной оптимизации подразделяются на численные и аналитические. Классификация методов оптимизации приведена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Классификация методов оптимизации

Методы безусловной оптимизации		**Методы условной оптимизации**	
аналитические	*численные*		*аналитические*
Классические методы поиска экстремума функций одной или нескольких переменных	Методы поиска; методы, использующие производные	Методы математического программирования (линейное, нелинейное, целочисленное, динамическое, стохастическое и др.)	Метод множителей Лагранжа

Аналитические методы безусловной оптимизации рассматриваются, как правило, в курсе дифференциального и интегрального исчисления.

К численным методам безусловной оптимизации относятся методы решения задач нелинейного программирования без ограничений. Эти методы подразделяются на две группы: методы, использующие в процессе поиска производные, и методы, не использующие производные (методы поиска).

Численные методы условной оптимизации рассматриваются в рамках методов математического программирования. Математическое программирование в настоящее время — это самостоятельная математическая дисциплина, посвященная теории и методам нахождения экстремума функций многих переменных при наличии ограничений на эти переменные в форме равенств или неравенств.

К аналитическим методам условной оптимизации следует отнести лишь один метод — множителей Лагранжа. Применение этого метода сопряжено с определенными трудностями: во-первых, он применим лишь к задачам, содержащим ограничения в виде равенств, и, во-вторых, не всякая целевая функция может иметь производные, удобные для работы с ними.

Методика составления и решения задач исследования операций обусловлена некоторыми характерными для таких задач чертами. Во-первых, задачи ИО в подавляющем большинстве случаев не поддаются аналитическому решению и должны решаться численными методами. Во-вторых, численное решение задач ИО возможно только с использованием электронно-вычислительной техники (ЭВТ).

Помимо перечисленных методов существуют и другие, которые эффективно применяются при решении задач оптимизации. К ним относятся *графические методы,* основанные на графическом изображении функции, подлежащей максимизации или минимизации, в зависимости от одной или нескольких переменных. Преимущество этих методов в том, что они просты и сразу показывают, существует решение или нет. Однако и применимость этих методов ограничена функциями одной или двух переменных. Другую группу методов составляют *экспериментальные методы.* Существо этих методов в том, что экстремум целевой функции ищется в непосредственных экспериментах с реальными переменными вместо использования для этих целей математических моделей.

1.4. Методика проведения исследования операций

Всякое деление процессов на этапы носит условный характер и определяется целями такого деления. Приводимое ниже выделение этапов исследования операций проводится с целью установления логически обоснованной последовательности действий при решении конкретных задач. Условность деления заключается в том, что строгое следование от одного этапа к другому не всегда выполнимо и на некоторых этапах возникает необходимость возвращения к уже пройденным этапам или отдельным элементарным операциям. Тем не менее последовательное выполнение приведенных ниже этапов позволяет облегчить процедуру решения задачи исследования операций.

Этап 1. Вербальная (содержательная) постановка задачи.

Этот этап имеет своей целью систематизировать все сведения и данные, содержащиеся в исходной задаче. На этом этапе возможны наиболее интенсивные контакты между исследователем и ЛПР, заинтересованным в решении поставленной задачи. От того, насколько качественно будет выполнен первый этап, зависит успешность всего процесса исследования операций.

На этом этапе выполняются следующие действия:

1) формулирование цели операции в виде ответов на вопросы, что сделать, где сделать, к какому сроку, а также уяснение содержания операции;

2) определение цели моделирования;

3) определение присущих операции условий ее проведения, что выражается в установлении активных средств и обстановки;

4) выявление возможных стратегий проведения операции, т. е. установление порядка использования активных средств. Этот этап завершается вербальной (содержательной) формулировкой цели проведения операции, что необходимо для лучшего понимания сущности поставленной задачи.

Этап 2. Формализация задачи или построение математической модели.

Общих способов построения математических моделей до сих пор не существует, и в каждом конкретном случае модель строится исходя из целевой направленности операции и задачи научного исследования, с учетом требуемой точности решения, а также точности, с какой могут быть известны исходные данные. Иными словами, искусство составлять математические модели действительно искусство, и опыт в этом деле может быть приобретен лишь постепенно.

На этом этапе выполняются:

1) определение размерности задачи. Размерность задачи, как правило, связана с конкретными видами деятельности или способами использования активных средств;

2) введение необходимых обозначений, при этом вводятся символы и идентификаторы, обозначающие элементы исходной задачи. Здесь же по возможности осуществляется и классификация принятых обозначений в соответствии с разделением факторов на управляемые и неуправляемые;

3) выбор характеристик операции, обозначающих результаты. На этом этапе четко формулируются результаты операции, строится (по возможности) целевая функция $y(u)$ и устанавливаются направления предпочтения на них, т. е. формируется и критерий выбора наилучшей стратегии;

4) формулирование ограничений задачи, при этом записывается система равенств и неравенств, моделирующих условия достижения цели и действие объективных законов. Система равенств и неравенств может быть построена на основе:

- аналитических выражений, вытекающих из объективных физических законов;
- эмпирических выражений, вытекающих из результатов экспериментов;
- нормативных соотношений, устанавливаемых директивными документами;

5) установление “временного горизонта", т. е. определение того интервала времени, в течение которого или на который будут справедливы полученные решения;

6) формулирование задачи математического программирования. Оно выполняется на математическом языке без привязки к условиям конкретной задачи исследования операций,

например: *определить значения управляемых переменных* $X = (x_1, x_2,.,x_n)^т$, *обеспечивающих экстремум заданной целевой функции* y(u) *на заданном множестве стратегий* U = {u}.

Этап 3. Установление типа математической модели и решение поставленной задачи с использованием соответствующего метода оптимизации.

Результат решения поставленной задачи, как уже было отмечено ранее, включает в себя два основных элемента:

1) оптимальную стратегию, характеризуемую вектором значений управляемых переменных: $u^* = (x_1, x_2,.,x_n)$;

2) оптимальное значение целевой функции $y(u^*)$.

Эти элементы составляют формальное решение и используются затем при выработке рекомендаций ЛПР для принятия им принципиального (ответственного) решения.

Этап 4. Проверка модели на непротиворечивость, чувствительность, реалистичность и работоспособность.

При проверке модели на непротиворечивость выясняется, не дает ли модель результаты, противоречащие логике при изменении некоторых важнейших параметров, особенно вблизи их граничных значений.

Проверка модели на чувствительность имеет своей целью выявить, как реагируют и реагируют ли вообще выходные данные модели на изменения входных данных.

Проверка на реалистичность позволяет установить соответствие модели частным случаям, для которых уже имеются фактические данные.

Основная цель проверки модели на работоспособность состоит в выяснении возможности получать результаты в сжатые сроки, а также в установлении величины затрат и ресурсов на ее эксплуатацию.

Этап 5. Реализация результатов исследования операций. Для исследователя реализация результатов исследования операции заключается в выработке рекомендаций ЛПР для принятия им обоснованных решений. Эти рекомендации по проведению операции могут содержать несколько последовательно излагаемых (письменно или устно) сообщений:

1) краткое повторение условий исходной задачи;

2) изложение полученных рекомендаций и их краткое обоснование;

3) соображения по границам их применимости;

4) соображения по возможному влиянию различных способов использования активных средств на результат операции;

5) рекомендации для конкретного действия.

Как правило, для проведения исследования операции привлекается группа исследователей, в которую включаются специалисты из различных областей знаний. Поэтому выполнение всех перечисленных этапов исследования операций должно происходить при условии четкой координации и слаженности работы всех членов исследовательской группы.

1.5. Ключевые понятия системного подхода

Реакция всякого субъекта на проекты, подобные организации проведения комплексного экономического анализа управленческих решений, чаще всего выражается таким понятием, как сложность. Сложным мы называем все то, что не охватывается сознанием как нечто целое и обозримое в своих границах. В этом суждении отражается существо проблемы сложности — она напрямую связана со свойством субъекта. Чем мощнее способности удержания целого, тем реже явления осознаются как сложные. Но каким бы развитым ни было сознание, существуют объективные ограничения на свойство удержания целого там, где имеет место большое разнообразие компонентов наблюдаемого.

Именно по отношению к таким ситуациям с 50-х гг. XX в. разрабатывается и в основном разработана технология исследования сложных явлений (объектов) посредством расчленения их на простые, доступные осмыслению и связанные части. Эта технология получила название системной технологии по этимологическому значению ее основной идеи — идеи системы.

Использование для исследования сложного объекта его представления в виде системы (греч. *systema* — целое, составленное из частей), т. е. его метафизического образа, позволяет упростить сложность при сохранении существенного в исследуемом объекте. Технология исследований в целом — подход к исследованию объектов, основанный на представлении их в виде систем, получил название системного подхода. Таким образом, происхождение системного подхода следует рассматривать как реакцию исследователей на феномен возрастающей сложности мира.

Центральным понятием системного подхода является система и связанные с ней близкие понятия — “*сложная система*”, “*большая система*”, “*открытая система*” и т. д. (рис. 1.1).

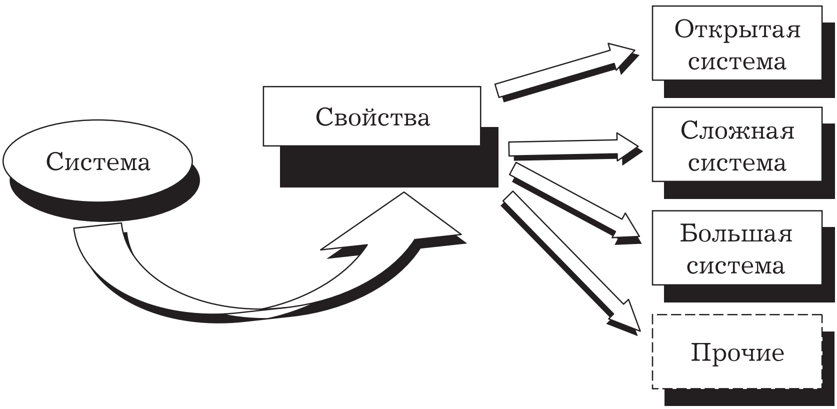


Рис. 1.1. Схема формирования ключевых понятий системного подхода

Именно вокруг этих понятий концентрируется системное движение в современной науке. Рассмотрим более подробно каждое из них и попытаемся выявить те свойства системы, которые, с одной стороны, определяют ее значимость в решении широкого класса задач, а с другой — являются основаниями для выделения ключевых понятий системного подхода в отдельные классы.

Рассуждая о сложных объектах как о системах, нельзя избежать влияния традиционного и не совсем правильного именования системами всего того, что представляется малопонятным. Введем некоторое представление о системе, которое далее будет утверждаться.

Систем в проявленной природе не существует — мир устроен целостно и неделимо. Разделение его и его видимых объектов на части условно и осуществляется человеком, во-первых, по привычке, во-вторых, из-за отсутствия правильного видения мира и, в-третьих, ради вполне определенных целей. Все в природе связано со всем и подчиняется единым законам.

Это утверждение не является методологическим приемом, а отражает известную издревле и подтверждаемую современной наукой идею. То, что отдельность предметов друг от друга условна, можно доказать различными способами.

В современной литературе понятие "система" получило самое широкое толкование. Известно свыше десятка определений "системы". Причем со временем это понятие менялось не только по форме, но, по мере продвижения вперед в исследовании систем — и по содержанию.

Общее в современных определениях то, что:

1) система строится исследователем с некоторой значимой для него точки зрения;

2) система состоит из нескольких компонентов (более чем одного);

3) эти компоненты взаимодействуют между собой во имя достижения общей цели;

4) система как единое целое строит свои отношения с окружающей средой.

Термин "система" возникает и используется там, где человеку удобно понимать и разъяснять мир, представляя его поделенным на части, которые связаны друг с другом, т. е. образуют целостность. Каждая система одного и того же объекта выражает лишь определенную грань его сущности. Рассмотрение объектов как систем является одним из способов представления объектов наряду с другими (несистемными).

Естественное стремление человека, постигая мир, делить его на части возникает от ограниченности его сознания, которое до известной поры “не умеет работать” с миром как с бесконечностью. Мы постигаем бесконечное посредством ограниченных форм, доступных осмыслению. Мы делим бесконечный объект на части, которые связываем в своем сознании разнообразными отношениями. Можно сказать, что сложность определяется количеством систем, которые следует приписать объекту для достижения необходимой степени его понимания. Получается, что сложность — категория эпистемологическая, т. е. познавательная, субъективная, зависящая от исследовательской задачи и способности “познавателя”. Сложность не является свойством исследуемых объектов.

Любая система “открывается” с некоторой точки зрения исследователя, которая является по отношению к системе причиной. Во всяком системном представлении объекта должна быть разъяснена принимаемая точка зрения. Иначе ее системный облик не убедителен ни для кого. Без ясного понимания точки зрения на объект его системное описание теряет смысл. Смена точек зрения сопровождается сменой системных представлений. Так, например, с точки зрения изменений некоторая организация может быть представлена в виде системы процессов преобразования компетентности персонала, навыков менеджеров, ролей в командах и других аспектов организации. С точки зрения состава организации она может быть представлена системой из совокупности отделов, связанных отношениями подчинения или взаимодействия. С других точек зрения могут быть выражены другие грани организации.

Представление объектов как систем отличается от других представлений тем, что оно производится посредством мысленного выделения некоторых элементов объекта и отношении между ними, то есть структуры. Этой процедуре может быть подвергнута любая часть объекта или элемент структуры системы. Переход исследовательского внимания от общей структуры к частной сопровождается детализацией, разделением сущности объекта. С точки зрения формальной логики это линия конкретизации понятия об объекте. Обратная линия как линия рассмотрения более общих структур системы — абстрагирование (рис. 1.2).

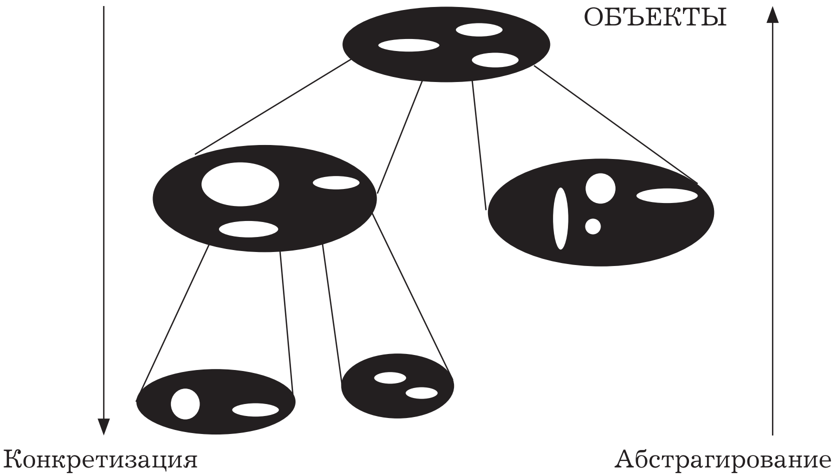


Рис. 1.2. Представление объектов

Так, исследование организации может проходить от представления ее самой как целостности к системному представлению ее частей как целостностей. Такая линия конкретизации “проникает” в объект, в отдельные его части.

Сохранение в ходе такого исследования цепи рассмотрения систем позволяет восстанавливать все целостное представление, удерживая одновременно и частные детали, и единый облик организации.

Следуя одному из фундаментальных принципов мироздания — принципу двойственности (или полярности), в любом объекте или явлении можно выделить два полюса, две противоположные по какому-либо признаку грани: плюс — минус, простота — сложность, бесконечное — конечное и др. Такого рода полюсами в системах являются неизменное — изменяющееся (неподвижное — подвижное, постоянное — переменное). Неизменное выражается структурами, а изменяющееся — функциями. В структурах исследователь пытается “удержать” нечто постоянное в объекте, в функциях — выразить изменяющееся.

Это обстоятельство лежит в основании разделения всего потока системных исследований на два русла: структурные и функциональные. В первом предметом исследования являются составы, конфигурации, топологии и т. д. систем, во втором — динамические характеристики, устойчивость, эффективность, т. е. все то, что при неизменной структуре системы зависит от свойств ее элементов и отношений.

Можно сказать, что функциональные исследования следуют за структурными. Сначала объект представляется с некоторой точки зрения как целостность, разделенная на взаимосвязанные части. Затем выраженная таким образом структура объекта как системы может исследоваться функционально. При этом представляются разнообразные воздействия на объект и исследуются его реакции на них, т. е. исследуется функция системы.

Все приведенные суждения о системах как об инструментах познания свидетельствуют об их идеальной сущности. Можно сказать, что системы есть особенные идеи объектов. Всякое системное исследование представляет собой движение сознания как бы в сторону от объекта, от реальности. Это движение образует как бы новый мир — мир идей, мир сущностей, мир, “заключенный в скобки”. Работа в этом мире находится на грани научных и ненаучных способов познания. Общим для них и особенно важным в этом мире остается необходимость обоснованности утверждений.

В современной науке нет однозначного понимания существа и меры обоснованности знаний. В области системных знаний это обстоятельство является настоящей проблемой, поскольку для обоснования системологических утверждений, т. е. трансцендентальных, абстрактных конструкций самих по себе, должны применяться еще более абстрактные сущности. Это зачастую выводит исследователя за границу традиционно принятых представлений о “вещах”. По этой причине обоснованность передаваемого знания часто становится зависимой от уровня сознания принимающего его, от степени его собственного доверия основаниям.

Здесь особое значение имеет процедура интерпретации конструкций, используемых в качестве оснований системологических постулатов, и самих постулатов. Разъяснение метафизических конструкций — чрезвычайно сложная концептуальная работа. Она нуждается в особенном инструментарии. Речь идет об инструментарии представления и исследования систем.

Обращение к системному облику некоторого конкретного объекта тотчас же вводит в круг исследований новые объекты. Одна и та же система может быть сопоставлена различным по природе объектам. Например, система, представляющая строение объекта, т. е. выражающая отношение между элементами типа "состоять из.", может быть одной и той же для экономического объекта, для бухгалтерии, для коллектива людей и для языкового предложения. "Восстановление" объектов по системе осуществляется в виде интерпретации, т. е. сопоставления компонентам системы (элементам и отношениям) компонентов объектов, что открывает свободу в выборе примеров для пояснения системных конструкций, в выборе интерпретационной области рассуждений. При этом критерием выбора во всех случаях разъяснения системных построений должна служить ясность.

Существенные особенности систем наиболее полно и кратко учтены в определении "системой называется организованное сложное целое" работы. Такое определение не зависит от характера природы системы и выявляет три основных ее свойства: организованность, сложность, целостность.

Организованность как свойство системы может быть рассмотрена в двух смыслах:

– организованность как упорядоченность компонентов системы;

– организованность как порядок представления объекта в виде системы: выделение элементов, установление связей и отношений между ними, подчинение системы целевому назначению, выявление отношений системы с окружающей средой.

Исходя из этих взглядов на организованность системы, ее признаками являются: иерархичность построения ее структуры; отношения между различными уровнями иерархии; порядок подчинения низших уровней высшим. И сама организованность как свойство позволяет статическим системам сохранять свое постоянство во времени и в пространстве на различных этапах рассмотрения объекта исследования, а динамическим — осуществлять целенаправленное саморегулирование.

Организованность как свойство систем в ряде работ рассматривается как основание для их классификации. В частности, по уровню организованности системы выделяются классы плохо организованных и хорошо организованных систем. В работе эти классы дополняются классом самоорганизующихся систем, объединяющим саморегулирующиеся, саморазвивающиеся, самообучаемые и другие системы. Уровень организованности системы тем выше, чем сильнее свойства целого отличаются от простой суммы свойств его частей.

Понятие “***сложность***” по сути многоаспектное и в различных работах, в соответствии с целями исследования, используется по-разному. Наиболее конструктивный подход к анализу этого понятия и проблем, связанных с ним, представлен в работе.

В частности, определение сложной системы напрямую связывается с целями введения этого понятия и его использования при исследовании систем. Так, рассматриваются:

– гносеологический характер целей, направленных на получение знаний о системе и на преодоление сложности получения этих знаний;

– онтологический характер, связанный с сущностью системы, реальным существованием таких ее свойств, как структурная сложность, сложность поведения, сложность выбора поведения, сложность развития и т. д.

С учетом этих взглядов определение сложной системы уместно представить в следующем виде: система называется сложной с гносеологических позиций, если ее познание требует совместного привлечения многих теорий и моделей, а в некоторых случаях — многих научных дисциплин (организации междисциплинарного исследования) и реализации в модельных представлениях установки на глубокий учет неопределенностей вероятностного и детерминированного характера.

Система называется сложной с онтологических позиций, если в реальной деятельности существенно проявляется один или несколько следующих видов ее сложности:

– структурная сложность, определяемая по числу элементов системы, числу и разнообразию связей между ними, количеству иерархических уровней и общему числу подсистем, входящих в состав системы;

– сложность функционирования (поведения), определяемая характеристиками множества состояний, правилами перехода из состояния в состояние, характеристиками воздействия среды на систему и обратного воздействия системы на среду, степенью неопределенности перечисленных характеристик и правил;

– сложность выбора поведения в многоальтернативных ситуациях, который определяется характеристиками целенаправленности системы, гибкостью ее реакции на заранее неизвестные воздействия среды;

– сложность развития, определяемая характеристиками соответствующих эволюционных и скачкообразных процессов.

Содержательный анализ выделенных признаков системы показывает, что в основе ее сложности лежат факторы неопределенности в различных своих проявлениях. В частности, привлечение для познания системы “многих моделей, многих теорий, а в некоторых случаях — и многих научных дисциплин” вследствие узко аспектного характера каждой из них может быть сопряжено с неопределенностями различных видов:

– лингвистическая неопределенность — неопределенность, имеющая непосредственное отражение в нечеткости, неоднозначности слов и фраз естественного языка, его синтаксической и семантической нечеткости выражения понятий в различных предметных областях;

– поссибилистическая неопределенность — неопределенность, порождающая неточность оценки возможностей различных моделей, теорий, научных дисциплин, самих систем при выполнении различных действий;

– аксиологическая неопределенность — неопределенность, связанная с проведением оценок полезности тех или иных альтернативных вариантов формирования систем;

– мультикритериальная неопределенность — неопределенность, сопутствующая многоцелевому подходу к оценке обстановки и вызывающая необходимость поиска компромисса между различными критериями при принятии решений;

– структурная неопределенность — неопределенность, связанная со сложностью, неясностью, нечеткостью представления структур систем в мышлении человека, решением так называемых плохо структурированных проблем системного анализа;

– логическая неопределенность — неопределенность (многозначность, нечеткость) оценки истинности знаний, их неполнота и противоречивость, а также неопределенность логического вывода.

Таким образом, свойство сложности системы придает исследованию различных граней объекта субъективную окраску, поскольку в значительной степени полнота представления факторов неопределенности при исследовании различных систем зависит от уровня мышления исследователя, его знаний, опыта, способности к обобщению. И то, что для одного исследователя кажется простым, обыденным, естественным, для другого представляется неподъемной ношей.

Обобщение и анализ направлений и результатов исследований проблемы сохранения ***целостности*** дают возможность выделить, по крайней мере, три важнейших ее аспекта.

1. Целостность как совокупность абстрактных свойств объектов, которые выделяют их как системы среди других объектов (не систем) благодаря наличию в них "связности" на различных уровнях. Целостность в этом смысле выражает специфическую точку зрения на предмет исследования. В ее ракурсе системы рассматриваются как бы в различных "фокусах". При максимальном "фокусе" должна различаться граница системы, через

которую осуществляется ее взаимодействие со средой (коммуникативная грань объекта). При этом внутренняя структура подсистем неразличима, и предмет исследования видится целиком в своей функциональной самостоятельности. Минимальный "фокус" позволяет различить структуру системы на самом высоком уровне детализации (элементный, структурный, модельный аспекты объекта). Переходы между "фокусами" должны сопровождаться различением уровней организации. Каждому новому уровню должен соответствовать свой уровень связанности между подсистемами, свой тип причинно-следственных отношений между ними. Проявляя это свойство целостности, переходы по линии "элемент — подсистема—система" осуществляются в виде процессов конкретизации или абстрагирования конструкций, задающих систему. При этом к "целостным" относятся только такие приращения конкретного (абстрактного), при которых проявляются новые организационные структуры.

2. Целостность как совокупность специфических требований к исследованию систем, обеспечивающих сохранение их системных свойств. Предметом исследования с позиций целостности является структура "Минимальной" структурой системы или ее подсистем, подлежащих рассмотрению, следует считать такую, дальнейшая конкретизация которой не выявляет новой организации. Под организацией здесь понимается свойство системы, которое характеризует ее способность предопределять свое будущее и позволяет предсказывать ее поведение во времени (аспект развития объекта).

Анализ систем должен исключать рассмотрение их в абсолютной самостоятельности. Всякая подсистема должна представляться как объект с "входами" и "выходами", через которые он включен в систему.

Следует различать части объекта, являющиеся как бы ступенями в одной иерархической лестнице организационных структур, т. е. являющихся подсистемами, от тех частей, которые, несмотря на конструктивную принадлежность к объекту, не связаны причинно-следственными или иными отношениями. Речь идет о различении системы от суммы систем.

3. Целостность как формальное свойство связанности, элементов системы, присущей организованной системе, способной к сохранению и развитию, обладающей структурой. В этом смысле целостность характеризует степень участия элементов (подсистем) во взаимодействии. Если установить гипотетически крайние "значения" целостности от абсолютной, когда во взаимодействии находятся все элементы системы на рассматриваемом уровне детализации, до нулевой, когда элементы независимы друг от друга, то движение от абсолютной целостности к нулевой есть движение от системы к не системе.

Для развивающихся и самоорганизующихся систем, т. е. систем с эволюционирующей организацией, целостность как формальное свойство характеризует мгновенное положение уровня их организованности. Для них целостность динамична (заметим, что динамика целостности обнаруживается в рамках другой целостности более высокого порядка).

Таким образом, формально целостность характеризует степень зависимости поведения системы от поведения ее элементов и от структуры, упорядочивает организацию самой системы.

Процесс представления объектов в виде систем, формирование систем на различных этапах их рассмотрения подчиняется принципам системного подхода.

1.6. Принципы и аспекты системного подхода

Под принципами (лат. *principium* — основа, начало) понимаются основные идеи, правила представления объекта в виде систем и раскрытия их основных свойств. Сформированные в настоящее время принципы в своей совокупности имеют цель создание концептуальных основ для объединения методов исследования и описания систем на различных этапах рассмотрения — от абстрактного образа до физического воплощения в едином понятийном (возможно, математическом) аппарате.

При всем многообразии разработанных принципов в современной литературе отсутствует единое понимание общих принципов системного подхода. Этот феномен объясняется, с одной стороны, различием природы объектов, исследуемых с помощью систем, понятийного аппарата описания таких объектов, а с другой — многоаспектностью самого системного подхода и различием во взглядах исследователей, использующих его в своей практике.

Не претендуя на полноту представления принципов, выделим основные из них:

– принцип *целостности* — является отображением одного из основных свойств системы и определяет необходимость рассмотрения системы как единого целого, что означает не сведение свойств элементов и частей системы к их простой сумме, а глубокое исследование этих свойств, их влияние на свойства всей системы, составляющих ее элементов и частей. При этом большое значение имеет исследование отношений как внутри системы, так и системы в целом, ее элементов и частей с окружающей средой;

– принцип *иерархичности* — определяет многоуровневую структуру построения систем, позволяющую снизить степень неопределенности и формировать разнообразия альтернативных вариантов представления систем. При этом рассмотрение систем на каждом уровне иерархии подчиняется требованию сохранения их целостности. В соответствии с этим принципом исследуемая система является элементом системы более высокого порядка, а элементы исследуемой системы выступают как системы более низкого порядка;

– принцип *коммуникативности* — определяет связи (отношения) системы с окружающей средой. Сама среда рассматривается как сложное, неоднородное, многоуровневое образование, задающее требования и ограничения к системе, ее элементам и частям;

– принцип *альтернативности* — определяет необходимость формирования разнообразия альтернативного представления систем в целях охвата всего разнообразия проблем, решаемых с их помощью, с одной стороны, и выбора наиболее рациональных вариантов систем, с другой;

– принцип *целенаправленности* — система строится в соответствии с желаемым результатом (целью) исследования объектов. Причем главная цель имеет иерархическую структуру, представляющую собой многоуровневую совокупность частных целей. Уровни иерархии целей определяются этапами рассмотрения объектов, организованностью, сложностью и размерами систем, представляющих эти объекты. Формулировка или другие способы представления целей отражают их активную роль в познании и реалистичность. Цели согласовываются между собой как на одном уровне, так и на межуровневом рассмотрении, при этом учитываются зависимость целей от внешних и внутренних факторов. Основные положения принципа целенаправленности подчиняются принципу целостности;

– принцип *открытости* — система строится таким образом, чтобы на различных этапах ее рассмотрения имелась возможность дополнять ее структуру элементами, связями и отношениями, а сама система была доступной для изменения и развития по различным компонентам;

– принцип *адаптивности* — система ориентирована на существование в условиях изменения внутренних и внешних факторов.

При детальном анализе представленных принципов нетрудно заметить, что системный подход позволяет раскрыть большинство граней исследуемых объектов, дает возможность представить внутренние и внешние факторы в виде интегрированного целого, отобразить все многообразие альтернатив исследования, обеспечить необходимый уровень организованности как самого объекта, так и процесса его исследования.

Исследование современных сложных систем основано на **системном подходе** — методологии исследования объединений элементов в природе и обществе как систем. При этом под методологией понимается учение о структуре, организации, методах и средствах деятельности. Несмотря на развитие этого метода познания (системного подхода), до недавнего времени традиционным подходом к исследованию системных объектов было стремление к разложению их на отдельные части, в результате чего исчезла специфика системы.

Именно системный подход является основой методологической установки исследования систем вооружения, который реализуется посредством системного анализа. Под **системным анализом** понимаются методы обоснования решений по сложным проблемам политического, социального, военного, экономического, научного и технического характера.

Процесс системного анализа включает:

а) постановку задачи на проведение исследования;

б) сбор необходимых исходных данных;

в) построение модели, отображающей взаимосвязи реальной сложной системы;

г) расчет и сравнение различных вариантов;

д) выработку прогнозов и предложений;

е) экспериментальную проверку полученных результатов.

Системный анализ опирается на ряд прикладных математических дисциплин и современных методов управления. Техническая основа системного анализа — ЭВМ и информационные системы. Системный анализ, таким образом, является методологическим основанием подготовки и обоснования решений по сложным проблемам научного, экономического, технического и военного характера. Использование методологии системного анализа в процессе производства систем вооружений невозможно без применения системотехники.

Системотехника — научно-техническое направление, охватывающее решение комплекса теоретических и практических задач, возникающих при планировании, проектировании и разработке сложных систем вооружения, например таких, как ракетные комплексы и системы.

Одним из разделов системотехники является синтез сложных технических систем — научная дисциплина, разрабатывающая методы синтеза систем на основе изучения объективных закономерностей процессов функционирования систем. Синтез систем опирается на математическое моделирование и на ряд прикладных математических дисциплин, в первую очередь на математическое программирование.

Анализом системы иногда называют раздел системотехники, охватывающий комплекс теоретических и практических задач, решаемых при планировании сложных систем.

Системный подход содержит ряд аспектов, изучение единства и взаимосвязи которых дает о нем правильное представление. Рассмотрим основные аспекты системного подхода.

1. **Системно-компонентный аспект** отражает изучение состава системы на основе выделения ее основных элементов, взаимодействие которых обеспечивает присущие только системе в целом новые качественные особенности. Принципы выделения составных элементов системы определяются объектом и задачей исследования, а также охватом учитываемых аспектов.

2. **Системно-структурный аспект** предполагает изучение внутренних связей и взаимодействие элементов системы. Структура — это внутренняя форма системы, определяющая способ взаимодействия составляющих систему компонентов. Она зависит от параметров элементов системы, связывает и преобразует их, придавая целостность системе, и обусловливает возникновение новых качеств, не присущих ни одному из элементов системы. Определение связей элементов системы и их изучение является одним из основных вопросов оценки эффективности, так как на этой основе определяются технические решения по системной увязке элементов. Структурные свойства систем определяются характером и устойчивостью взаимосвязей между элементами. Различают *структуры детерминированные*, характеризующиеся либо неизменными взаимосвязями, либо меняющимися по некоторому закону; *вероятностные*, если взаимосвязи описываются законами теории вероятностей; *хаотические*, если взаимосвязи элементов непредсказуемы.

3. **Системно-функциональный аспект** отражает изучение функциональных зависимостей между элементами системы. Функции системы представляют собой интегрированный результат функционирования образующих систему компонентов. Функциональная зависимость имеет место между компонентами

данной системы, между компонентами и системой в целом, между системой в целом и другой системой, в состав которой она входит.

В зависимости от характера взаимодействия с другими системами функции систем можно распределить в порядке возрастания следующим образом:

– пассивное существование (материал для других систем);
– обслуживание систем более высокого порядка;
– противостояние другим системам;
– поглощение других систем;
– преобразование других систем.

Функции компонентов по отношению к системе должны носить целесообразный характер и согласовываться по времени и в пространстве, формируя систему как единое целое. Функциональное описание компонентов иерархично. Обычно выделяют координацию и субординацию функции: *координация* — согласование функций компонентов системы по горизонтали и *субординация* — согласование функций компонентов по вертикали. Субординация определяет подчиненность функций одних компонентов другим, указывает специфическое место и неодинаковое значение каждого из компонентов в осуществлении функций системы.

4. **Системно-интегральный аспект** предусматривает изучение системообразующих механизмов, присущих данной системе. Этот аспект характеризует факторы системности и свойства, обеспечивающие сохранение качественной специфики системы, ее функционирование и развитие. Здесь выясняются новые качества, присущие системе в целом и не присущие каждому компоненту в отдельности. Для технических систем это связано с выявлением новых дополнительных возможностей системы, получаемых за счет правильного объединения отдельных ее элементов.

Представленные четыре аспекта системного подхода в совокупности характеризуют внутреннее изучение системы.

5. **Системно-коммуникационный аспект** предполагает изучение системы во взаимодействии с окружающей средой и выделение возмущающих факторов. Всякая система сущест-

вует в определенной взаимосвязи с другими системами. Эти внешние по отношению к данной системе образования, с которыми система связана сетью коммуникаций, составляют ее среду или окружение.

6. **Системно-исторический аспект** направлен на изучение ретроспективы и перспективы развития системы, т. е. требует представления системы в непрерывном ее развитии. Каждая техническая система проходит этапы разработки, эксплуатации и последующего совершенствования на новом уровне.

Для разработки систем необходимо знать, как возникла данная система, какие этапы совершенствования проходила в своем развитии, какой она стала в настоящее время и какие перспективы развития имеет в будущем. Всякая система для своего формирования черпает материал из предшествующих и существующих систем. Новая система возникает на основе разрозненных сначала компонентов других систем с учетом опыта их создания. Это позволяет использовать все лучшее, что накоплено в технике за время создания подобных систем. Вместе с тем уже на этапе разработки системы необходимо исследовать перспективу ее развития, т. е. предусмотреть возможность модернизации элементов. Это необходимо в связи с быстрым моральным старением некоторых элементов, а также в связи с существенным различием гарантируемых сроков эксплуатации элементов различного типа.

Следует отметить, что исследование сложных систем — творческий процесс. При этом те или иные аспекты системного подхода могут использоваться неполностью, может быть усилен какой-нибудь или несколько аспектов. Однако всестороннее исследование предполагает только совокупное использование всех аспектов системного подхода.

Потенциальные возможности системного подхода постоянно побуждают исследователей, с одной стороны, к обобщению этого подхода, построению общих научных основ исследования объектов любой природы и созданию “общей теории систем” (системологии), а с другой — к поиску технологий его практической реализации. Результатами этих работ стало появление таких научных дисциплин, как системный анализ и системотехника, а также широкая интеграция этих дисциплин с кибернетическими и информационными отраслями знаний.

Выделение системного анализа и системотехники (системного анализа экономических систем) в самостоятельные направления системного подхода явилось реакцией на феномен невозможности полной формализации задач исследования сложных, плохо структурированных систем и возникающих при этом проблем, т. е. с геделевской трудностью о неполноте формальных систем (теорема Геделя о неполноте формальных систем). Поэтому в системном анализе акцентируется внимание на трудностях формулировок задач и способах преодоления этих трудностей, а также на поиске приемов расчленения сложной исходной проблемы на подпроблемы, на разработке формализованных приемов разделения системы на подсистемы, целей на подцели, больших неопределенностей на маленькие, а также на поиске возможности работы в условиях неполной информации, ограниченности ресурсов и дефицита времени.

1.7. Системный подход к управлению методами решения задач комплексного экономического анализа

Решение задач комплексно-экономического анализа (КЭА) связано с последовательным уменьшением неопределенности, вызванной, как правило, сложностью объектов и предметов, и существующей в наибольшей степени в начале анализа. Поэтому процесс постановки задач анализа, в ходе которого происходит наиболее существенное уменьшение неопределенности, играет центральную роль в последующем выборе методов их решения и, как следствие, в качестве результатов анализа.

Методы решения задач

Многообразие задач КЭА, поставленных правильным способом, образует особенное пространство. Это пространство должно быть упорядочено для того, чтобы в нем можно было идентифицировать конкретную задачу и сопоставить ей соответствующие методы решения для достижения конкретной цели КЭА. В этой связи возникает необходимость разработки подхода к такой классификации задач, которая бы помогала выбору методов. Тогда выбор методов решения задач можно рассматривать как процесс управления этими методами. С позиций системного подхода к прояснению этого вопроса необходимо построить некоторую структуру задач и структуру методов и построить структуру системы управления выбором методов.

Пространство задач следует построить на основе анализа пары понятий “сложность — размер” и формировать таким образом, чтобы наиболее полно разграничить задачи по этим признакам. Под “сложной” понимается задача, для решения которой требуется совместное привлечение многих моделей, многих теорий, а в некоторых случаях — многих научных дисциплин (организации междисциплинарного исследования), и реализация модельных представлений ориентирована на глубокий учет неопределенности различного рода, т. е. в основу понятия “сложность” положены факторы неопределенности в различных проявлениях.

Под большими задачами понимаются задачи (простые или сложные), число подсистем (элементов) которых велико, но в ходе решения задач требуется сохранение их целостности. То есть учет “размеров” задач при их классификации подчиняется требованию сохранения сложности при формировании структуры исследуемой задачи, создании модельных представлений, а также при получении и обработке результатов исследований.

Многообразие задач, основанных на различении их по этим признакам, представляется в виде пространства (строго говоря, поля) на двумерной модели: по оси абсцисс расположен уровень неопределенности задачи, которая выражает ее “сложность”, а по оси ординат — целостность как требование к задаче, которое конструктивно выражает ее “размер” (рис.1.3).

В этом пространстве выделяются особенные области.

Рис. 1.3. Обобщенная схема конструктивной классификации задач

Рассмотрим крайние значения каждого свойства задач как некоторые полюса, между которыми располагается континуум действительных свойств. Тогда, следуя диалектическим представлениям о единстве противоположностей и гармоничному сочетанию полярных свойств в естественных объектах, выделим на этих континуумах особенные области. Это будут области некоторых “гармоничных” соотношений полярных свойств и “негармоничных”, т. е. таких, где свойства одного из полюсов преобладают над свойствами другого полюса. Это можно сделать на основе принципа “золотого сечения” (рис. 1.4).

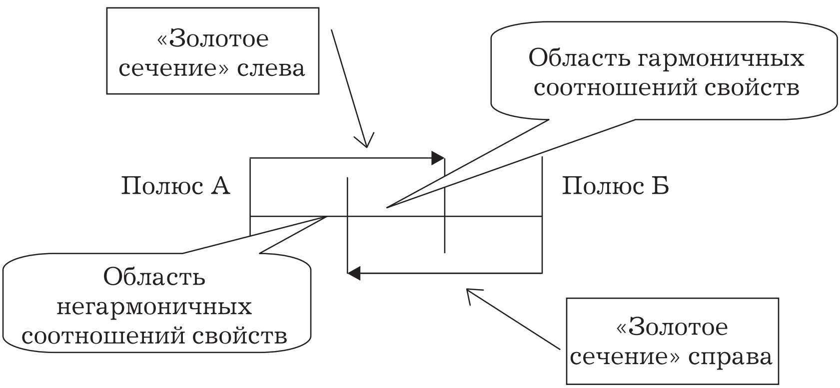


Рис. 1.4. Области свойств в диалектической паре

Поскольку каждая из областей на такой диалектической шкале отличается от соседних по свойствам, то становится легче рассуждать о тех задачах, которые “попадают” в эти области; С учетом этой идеи пространство задач может быть представлено более конструктивно (рис. 1.5).

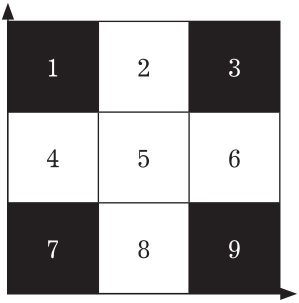


Рис. 1.5. Схема конструктивной классификации задачи

На схеме теперь можно выделить характерные области, где располагаются задачи с близкими соотношениями свойств целостности и неопределенности. На рисунке светлые области — области относительно умеренных значений этих свойств, а затемненные — области с ярко выраженным преобладанием свойств того или иного значения. В этих крайних позициях модели расположены зоны “рискованных” задач, то есть задач, решение которых возможно лишь с использованием специальных методов (зоны 1, 3, 7, 9). Рассмотрим эти области подробнее.

Область 1. Тривиальные задачи. В этом случае анализ не требует высокоэффективных методов решения задач. При этом существует риск израсходовать ресурс без получения новых, актуальных, значимых результатов.

Область 3. Это задачи, не требующие построения комплексных моделей анализа, но связанные с глубоким исследованием факторов, образующих частные задачи. Существует риск упрощения задач, что может привести к упрощенным решениям, снижающим значимость результатов анализа. В этих случаях требуется привлечение качественных методов исследования и решения задач.

Область 7. Чаще всею это задачи, требующие тщательной структуризации для решения, но несложные с расчетной точки зрения. Здесь же могут быть задачи, со слабо исследованным содержанием.

Область 9. Это задачи повышенной сложности. Их решение связано с глубокими исследованиями разнообразных и многочисленных факторов, построением многих моделей.

Здесь существует риск того, что результаты не будут получены.

Остальные области (2, 4, 5, 6, 8) “содержат” задачи, по отношению к которым могут быть применены методы из более широкой сферы инструментария, чем к задачам из областей “риска”.

Задачи, сформулированные и идентифицированные в соответствии с этими методическими положениями, можно считать приспособленными к поиску методов их решения.

Типология методов решения задач

Для построения системы методов решения задач КЭА необходимо множество методов рассматривать сквозь призму пары понятий “объект решений — глубина решений”.

Первое понятие связано со множеством тех особенностей задач, дня которых предназначены методы. Это задачи, связанные либо со структурами предметов, либо с функциями. Структура и функции как два полюса находятся в диалектическом единстве, которое выражается в том, что они дополняют друг друга и одновременно противоположны друг другу по свойствам. Методы решения задач, отражающих структурные проблемы, и задач, отражающих проблемы функциональные, имеют различные основания для применения. В первом случае объектом исследования являются составы, конфигурации, топологии и т. д. предмета КЭА, а во втором — динамические характеристики, устойчивость, эффективность, экономические показатели, т. е. все то, чем богат предмет, что при заданной структуре зависит от свойств его элементов, связей и отношений между ними.

Второе понятие пары (“глубина решений”) связано с особенностями ожидаемых решений задач КЭА со шкалой качественных и количественных. решений. Качественные (концептуальные) решения применяются с пользой там, где степень неопределенности представлений велика. Там продвижение в понимании свойств происходит за счет выделения и сопоставления сущностей, свойств, построения качественных моделей предметной области. Там, где качества сопоставлены, где появляется ясность в понимании объектов, уместны количественные методы и модели. Они позволяют получать и исследовать конкретные характеристики объектов.

На основании этих суждений классификационная "сетка" методов может быть построена по аналогии с пространством задач в виде поля, на котором обозначены особенные области (рис. 1.6).

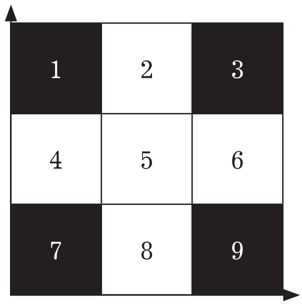


Рис. 1.6. Схема пространства методов решения задач комплексного экономического анализа

На схеме можно выделить следующие характерные области методов решения задач:

Область 1. Это в основном методы исследования количественных характеристик; методы теории эффективности, надежности, исследования динамических характеристик объектов, оптимизации и подобные им.

Область 3. Методы качественных решений: методы теории вероятностей, многозначной, вероятностной и индуктивной логики, исследования операций, теории алгоритмов и т. д.

Область 7. Методы количественного исследования свойств структур предмета; методы функционального анализа, теории множеств, сигнальных графов, математической информатики и т. д.

Область 9. Методы качественного исследования структур предмета; методы теории родов структур, топологии, морфологические методы, методы типа дерева целей, "Дельфи" и т. д.

В остальных областях (2, 4, 5, 6, 8) "располагаются" методы "широкого" назначения — такие, которые могут быть применены для задач широкого спектра.

В целом представленная классификация методов упорядочивает их множество таким образом, что оно оказывается приспособленным для установления соответствия между ними и видами задач.

Управление методами решения задач

Управление методами решения задач КЭА как управление инструментальной базой КЭА должно осуществляться ради поддержания качества анализа экономических систем. Качество собственно КЭА — совокупность свойств деятельностей, образующих собственно КЭА, и результатов этих деятельностей, обуславливающая их соответствие целям КЭА.

Рациональный выбор методов для решения задач следует организовать как управление отношением $G \subseteq Z \times M$ между множеством типов задач Z и множеством методов их решения M в целях. При этом следует иметь в виду, что любая задача может быть решена не одним, а несколькими методами. Такого рода управление можно рассматривать как управление инструментальной базой КЭА.

Для организации управления инструментальной базой необходимо иметь в виду следующие особенности этого процесса.

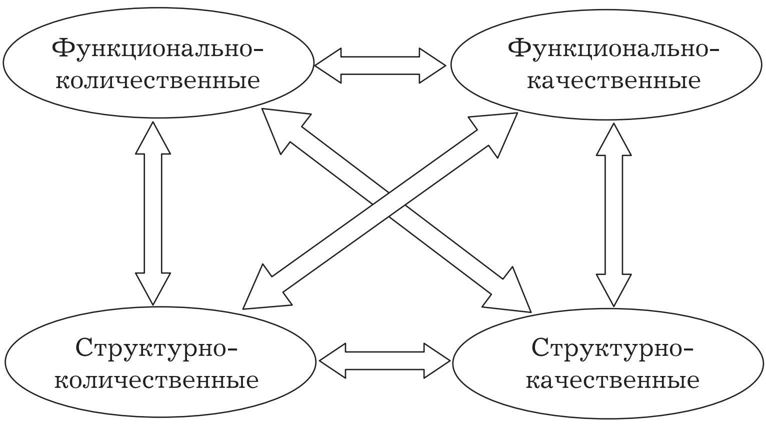


Рис. 1.7. Схема противоречий в пространстве методов решения задач комплексного экономического анализа

1. В области методов решения задач M существуют естественные противоречия. Например, между методами иссле-

дования структур и методами исследования функций, между количественными и качественными методами. В соответствии с приведенной классификацией методов таких противоречий несколько (рис. 1.7).

2. Управление отношением G между задачами Z и методами их разрешения M — это управление противоречиями между методами M ради поддержания гармоничных “значений” G. Эта задача из области гомеостатики. В ней установление рационального соответствия G достигается за счет представления задач в виде той или иной структуры (классификации) и на основании облика этой структуры — выбора соответствующих методов их решения.

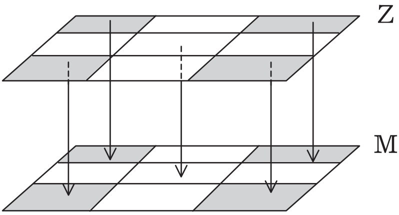


Рис. 1.8. Схема отношений между классификационными пространствами задач (Z) и методами их решения (M)

3. Правило выбора методов решения сложных задач содержится в отношении между типами задач и методами их исследования. Представленные пространства типов задач (см. рис. 1.5) и методов их решения (см. рис. 1.6) могут быть использованы в качестве такого правила. В них каждой области из пространства Z соответствуют аналогичные области из пространства M (рис. 1.8).

4. Конструктивное воплощение правила выбора методов для задач определяется следующими принципами:

– методы выбираются исходя из задач, а не из возможностей субъекта;

– эффективность использования методов должна быть выше затрат на их реализацию;

– обеспечение практической применимости методов (соответствия методов условиям и ограничениям их использования при решении задач);

– результаты реализации методов должны отражать одно из следующих свойств: эффективность решения задач; точность решения задач; соотношение эффективности и точности решения задач;

– обеспечение достоверности результатов при реализации методов;

– обеспечение стабильности и устойчивости решений при использовании методов;

– сбалансированность методов решения общей и частной задач.

Принципы реализации методов противоречивы в своей основе, поэтому стратегия выбора методов прежде всего должна обеспечивать их применимость и сбалансированность при решении задач, а остальные принципы реализуются как некоторый компромисс, обеспечивающий цели решения задач.

5. Выбор методов решения задач с использованием описанного подхода целесообразно выстраивать как некоторый гомеостатический механизм управления соответствием между типами задач и методами их решения в целях поддержания постоянства высокого значения качества КЭА. Это постоянство может быть достигнуто управлением противоречием между некоторыми стратегиями использования методов решения. Под стратегиями использования методов решения задач КЭА понимается некоторая обоснованная и упорядоченная последовательность применения тех или иных методов решения задач. Поскольку использование каждой стратегии влечет за собой конкретное значение качества решения задачи, то выбор стратегии применения методов может позволить выбрать стратегию с более высоким значением качества.

Структура такого управления как управления инструментальной базой КЭА, может быть представлена в виде гомеостатической системы (рис. 1.9).

В этом механизме главное значение приобретают процедуры оценки качества решения задач КЭА и выработки решений относительно выбора той или иной стратегии применения методов. Эти процедуры должны осуществляться в контуре управления, отвечающем за качество решения за-

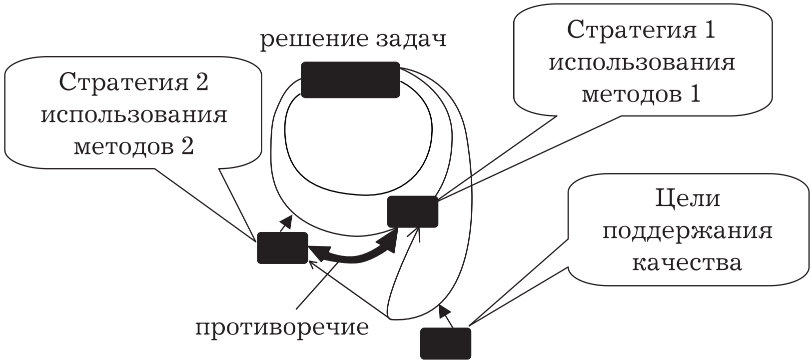


Рис. 1.9. Структура управления инструментальной базой КЭА

дач. Такой механизм управления инструментальной базой КЭА в организационном плане может быть построен на конкурсной основе.

2. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

2.1. Постановка задачи линейного программирвоания

Задача линейного программирования (ЛП) ассоциируется с задачей распределительного типа, в которой требуется распределить ограниченные ресурсы по нескольким видам деятельности. Интерпретация задачи ЛП в этом случае состоит в следующем. Моделируемая ЭИС характеризуется наличием нескольких видов деятельности j ($j = 1, ..., n$), для осуществления которых требуются имеющиеся в ограниченном количестве различные ресурсы b_i, ($i = 1, ..., m$). Интенсивность расходования каждого из ресурсов на каждый из видов деятельности ЭИС известна и равна a_{ij}. Результативность или ценность каждого j-го вида деятельности ЭИС характеризуется величиной c_j. Цель построения модели заключается в определении уровней каждого вида деятельности ЭИС x_j, при которых оптимизируется общий результат деятельности ЭИС в целом при выполнении ограничений, накладываемых на использование ресурсов, т. е. $\leq b_i$, $i = 1, ..., m$. Структура целевой функции (ЦФ) $y(u)$ =отражает вклад каждого вида деятельности ЭИС в общий результат. При максимизации c_j представляет собой “полезность” j-го вида деятельности (ущерб, наносимый конкуренту по бизнесу; предотвращенный ущерб), а в случае минимизации характеризует затраты (потери собственные; расход материальных средств).

Линейность модели выявляется или принимается в качестве допущения на этапе формализации задачи. Линейность предполагает наличие двух свойств — пропорциональности и аддитивности, присущих как целевой функции, так и ограничениям. *Пропорциональность целевой функции* означает, что вклад каждой управляемой переменной в целевую функцию пропорционален величине этой переменной. *Аддитивность* же *целевой функции* заключается в том, что целевая функция представляет собой сумму вкладов от различных управляемых переменных. *Пропорциональность ограничений* проявляется в том, что общий объем потребляемых ресурсов прямо пропорционален величинам управляемых переменных. *Аддитивность ограничений* состоит в том, что величина ресурса должна представлять собой сумму расходов по видам деятельности, каждое слагаемое которой пропорционально величине соответствующей управляемой переменной.

В формализованном виде задачу ЛП можно представить следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c} \textit{определить}\ u^* = \arg\underset{u\in U}{extr}\ y(u) \\ \text{где } y(u) = f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,\ U = \{u = (x_1, x_2,..,x_n)\ | \\ (\leq, = \textit{или} \geq)\ b_i,\ i = 1, ..., m;\ x_j > 0\}. \end{array}\right\} \quad (2.1)$$

Условие неотрицательности, накладываемое на переменные x_j, означает, что ни одному виду деятельности ЭИС не может быть приписан отрицательный уровень.

Ограничение типа ≥ нельзя рассматривать как ограничение в буквальном смысле этого слова. Наличие такого неравенства предполагает необходимость обязательного выполнения каких-либо планов, заданий, нормативов.

Математическая формулировка задачи ЛП выглядит следующим образом: *необходимо определить значения управляемых переменных x_j, доставляющих экстремум целевой функции $y(u)$ на всем множестве стратегий $U = \{u\}$ и удовлетворяющих всем имеющимся в задаче ограничениям*. Этой формулировкой задача ЛП считается поставленной математически, что позволяет осуществлять поиск ее оптимального решения известными математическими методами.

Формальную постановку задачи ЛП (2.1) для удобства можно представить в упрощенном виде:

определить max (или min) W(x) = при ограничениях:

(≤, = или ≥) b_i, i = 1, ..., m; $x_j \geq 0$,

где W(x) — новое обозначение ЦФ, т. е. W(x) = y(u) = f(x).

Для решения задач ЛП разработано множество методов, но наиболее популярными из них являются графический и симплексный методы, позволяющие получить гораздо больше информации, нежели просто найденное оптимальное решение.

2.2. Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод решения задач ЛП основан на их геометрической интерпретации и применяется для задач, имеющих две переменные. В случае трех переменных графическое решение задачи ЛП становится менее наглядным, а при большем числе переменных вообще невозможным.

Графическим методом решение получают в результате последовательно выполняемых шагов, содержание которых составляют:

1) построение области допустимых решений (ОДР);

2) поиск точки ОДР, соответствующей оптимальному решению;

3) определение координат этой точки.

1. *Построение области допустимых решений*. Область допустимых решений представляет собой часть плоскости (в многомерном случае — часть гиперпространства), все точки которой удовлетворяют всем ограничениям, имеющимся в данной задаче ЛП. Условие неотрицательности переменных $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ ограничивает область их допустимых значений первым квадрантом. Другие границы ОДР на плоскости $x_1 0\, x_2$ изображаются прямыми линиями, построенными на основе ограничений при замене в них знаков неравенства знаками равенства. Каждая линия определяет на плоскости две области: в одной

из них все точки удовлетворяют заданным ограничениям, в другой — нет. Ту область, в которой выполняются ограничения в виде неравенств, указывают стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных. Кроме того, для удобства восприятия возле каждой линии проставляют номер соответствующего ограничения.

В каждой точке ОДР, принадлежащей внутренней области или границе образовавшегося выпуклого многоугольника, все ограничения выполняются. Поэтому решения, соответствующие этим точкам, являются *допустимыми*. С содержательной точки зрения каждая точка ОДР представляет собой конкретную стратегию проведения операции $u = (x_1, x_2)$, а множество всех точек ОДР — множество всех возможных стратегий $U = \{u\}$.

2. *Поиск оптимальной точки ОДР*. Построенная ОДР представляет собой выпуклый многоугольник. В теории линейного программирования доказывается, что своего оптимального значения ЦФ достигает в *угловой* (или *экстремальной*) точке выпуклого многоугольника решений. Если ЦФ задавать некоторые фиксированные возрастающие значения $W(x) = c_1x_1 + c_2x_2 = const$, то полученные уравнения на плоскости определят семейство параллельных прямых линий. Вектор $C = (c_1, c_2)^т$, перпендикулярный этим линиям, указывает направление наискорейшего возрастания ЦФ, т. е. является вектором *градиента* ЦФ. Соответственно, направление, противоположное направлению, указываемому вектором градиента, характеризует направление убывания ЦФ (при решении задач ее минимизации).

Для практического осуществления поиска оптимальной точки ОДР необходимо:

1) определить вектор градиента ЦФ $\nabla W(x) = (\partial W(x)/\partial x_1; \partial W(x)/\partial x_2)^т = (c_1, c_2)^т$. Длина вектора градиента не связана со значением ЦФ, поэтому достаточно указать лишь его направление;

2) построить прямую, перпендикулярную вектору градиента;

3) перемещая эту прямую параллельно самой себе в направлении вектора градиента дойти до угловой точки ОДР, где ЦФ достигает максимального допустимого значения.

3. *Определение значений управляемых переменных*. Решение задачи ЛП составляют координаты (x_1, x_2) угловой точки ОДР, через которую проходит линия, соответствующая уравнению ЦФ. Числовые значения этих переменных получают из решения системы линейных уравнений, которым на графике соответствуют пересекающиеся линии.

Пример 2.1. Определить $\max W(x) = x_1 + 4x_2$ при ограничениях:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\le 4;\\
-x_1 + x_2 &\le 2;\\
x_1, x_2 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

Графическое решение задачи представлено на рис. 2.1.

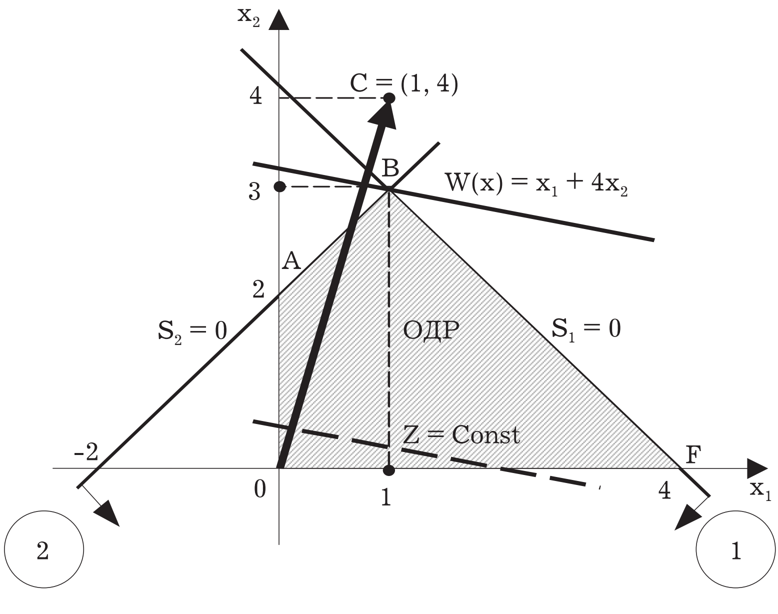


Рис. 2.1. Графическое решение задачи ЛП

Решение задачи составляют:

1) значение целевой функции $W(x) = 13$;

2) координаты экстремальной точки $u = \{x_1 = 1, x_2 = 3\}$.

Нахождение решения задачи ЛП на основе ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. Строят прямые, уравнения, которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.
2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.
3. Находят многоугольник решений.
4. Строят вектор $C = (c_1; c_2)$.
5. Строят прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, проходящую через многоугольник решений.
6. Передвигают прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ в направлении вектора C, в результате чего либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.
7. Определяют координаты точки максимума функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Пример 2.2. Для производства двух видов изделий (A и B) предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в табл. 2.1. В ней же указана прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Таблица 2.1

Вид сырья	**Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие**		**Общее количество сырья (кг)**
	A	**B**	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия	30	40	

Учитывая, что изделия A и B могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен),требуется составить такой план, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной.

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида А и x_2 изделий вида В. Поскольку производство продукции ограничено имеющимися в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Общая прибыль от реализации x_1 изделий вида А и x_2 изделий вида В составит $W(x) = 30x_1 + 40x_2$.

Таким образом, мы переходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств следует найти такое, при котором функция $W(x)$ принимает максимальное значение.

Найдем решение сформулированной задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Сначала определим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим знаками точных равенств и найдем соответствующие прямые:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300, & \text{(I)} \\ 4x_1 + 4x_2 = 120, & \text{(II)} \\ 3x_1 + 12x_2 = 252, & \text{(III)} \\ x_1 = 0, & \text{(IV)} \\ x_2 = 0. & \text{(V)} \end{cases}$$

Эти прямые изображены на рис. 2.2.

Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют исходному неравенству, а другой нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь

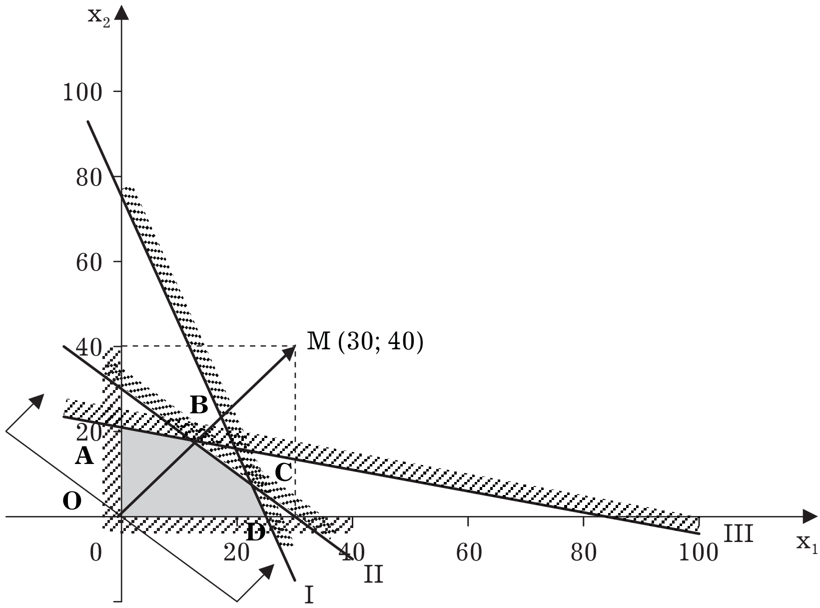


Рис. 2.2

точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае — другая полуплоскость.

Найдем, например, полуплоскость, определяемую неравенством $12x_1 + 4x_2 \leq 300$. Для этого, построив прямую $12x_1 + 4x_2 = 300$ (I), возьмем какую-нибудь точку, принадлежащую одной из двух плоскостей, например точку O(0;0). Координаты этой точки удовлетворяют неравенству $12 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 300$; значит, полуплоскость, которой принадлежит точка O(0;0), определяется неравенством $12x_1 + 4x_2 \leq 300$. Это и показано стрелками на рис. 2.2.

Пересечение полученных полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи.

Как видно из рис. 2.2, многоугольником решений является пятиугольник *OABCD*. Координаты любой точки, принадлежащей этому пятиугольнику, удовлетворяют данной системе неравенств и условию неотрицательности переменных. Поэтому сформулированная задача будет решена, если мы сможем найти точку, принадлежащую пятиугольнику *OABCD*, в которой функция W(x) принимает максимальное значение. Чтобы найти указанную точку, построим вектор C = (30; 40) и прямую $30x_1 + 40x_2 = h$, где h — некоторая постоянная такая, что прямая $30x_1 + 40x_2 = h$ имеет общие точки с многоугольником решений. Положим, например, h = 480 и построим прямую $30x_1 + 40x_2 = 480$.

Если теперь взять какую-нибудь точку, принадлежащую построенной прямой и многоугольнику решений, то ее координаты определяют такой план производства изделий A и B, при котором прибыль от их реализации равна 480 руб. Далее, полагая h равным некоторому числу, большему чем 480, мы будем получать различные параллельные прямые. Если они имеют общие точки с многоугольником решений, то эти точки определяют планы производства изделий A и B, при которых прибыль от их реализации превзойдет 480 руб.

Перемещая построенную прямую $30x_1 + 40x_2 = 480$ в направлении вектора C, видим, что последней общей точкой ее с многоугольником решений задачи служит точка B. Координаты этой точки и определяют план выпуска изделий A и B, при котором прибыль от их реализации является максимальной.

Найдем координаты точки B как точки пересечения прямых II и III. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_1 = 12$, $x_2 = 18$. Следовательно, если предприятие изготовит 12 изделий вида A и 18 изделий вида B, то оно получит максимальную прибыль, равную $W(x)_{max} = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080$ руб.

Содержательная интерпретация полученных результатов приводит к следующим выводам:

1) изделий первого вида должно быть произведено 12 единиц; изделий второго вида — 18 единиц;

2) на производство изделий задействовано полностью сырье 3-го и 2-го вида; при этом будет сэкономлено 216 единиц сырья 1-го вида;

выручка, соответствующая оптимальной организации производства, составит 1080 у.д.е.;

Примеры для решения задач ЛП графическим методом представлены в приложении 2.

2.3. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

2.3.1. Стандартная форма задач линейного программирования

Симплекс-метод (СМ) решения задач ЛП относится к числу *итерационных* методов, а это означает, что в процессе поиска оптимального решения выполняемые в определенной последовательности однотипные вычислительные процедуры повторяются до тех пор, пока это решение не будет получено.

В основе построения СМ лежит положение о том, что оптимальному решению всегда соответствует одна из *угловых* (или *экстремальных*) точек области допустимых решений. Исходя из этого в вычислительной процедуре СМ реализуется упорядоченный процесс, при котором начиная с некоторой *начальной допустимой* угловой точки осуществляются переходы от одной *допустимой* угловой точки ОДР к другой. Каждый очередной переход осуществляется только в смежную (соседнюю) точку, при этом переход к предшествующей, уже пройденной экстремальной точке производиться не может. Перед каждым очередным переходом в смежную точку выполняется проверка на *оптимальность* той точки, которая в данный момент достигнута процедурой поиска оптимального решения СМ.

Одна из главных трудностей, возникающих при организации поиска СМ, заключается в определении *начальной допустимой* точки. С целью уменьшения этой трудности задачу ЛП приводят к стандартной форме, которая предполагает следующее:

1. Все ограничения-неравенства представляются в виде равенств с *неотрицательной* правой частью. Для приведения ограничений, записанных в виде неравенств типа ≤ или ≥, к равенствам необходимо прибавить остаточную переменную к левой части ограничения типа ≤ или вычесть избыточную переменную из левой части ограничения типа ≥. С содержательной точки зрения *остаточная* переменная представляет собой остаток, неизрасходованную часть какого-то ресурса, а *избыточная* переменная — превышение результатов деятельности над нормативными или плановыми заданиями. И на *остаточные*, и на *избыточные* переменные также накладывается условие неотрицательности.

Правые части сформированных таким образом равенств всегда можно сделать неотрицательными, умножив обе части равенств на (-1).

Пример 2.3. Даны ограничения-неравенства задачи ЛП:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ge b_2,\\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le -b_3,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Результатом приведения к стандартному виду является следующая система линейных равенств:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + s_1 = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - s_2 = b_2,\\
&-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - s_3 = b_3,\\
&x_1, x_2 \ge 0, s_1, s_2, s_3 \ge 0.
\end{aligned}
$$

2. На значения всех переменных задачи накладывается условие *неотрицательности*. Если какая-либо из переменных не имеет ограничения в знаке, то ее представляют в виде раз-

ности двух неотрицательных переменных: $x_i = x_i' - x_i''$, где x_i', $x_i'' \geq 0$. Представленную таким образом переменную подставляют во все ограничения и в целевую функцию.

Пример 2.4. Дана задача ЛП: найти max $W(x) = c_1x_1 + c_2x_2$ при ограничениях

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2,\\
&x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ — не ограничена в знаке.}
\end{aligned}
$$

Выполнение условия неотрицательности всех переменных приводит к следующей задаче: найти max $W(x) = c_1x_1 + c_2x'_2 - c_2x''_2$ при ограничениях:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x'_2 - a_{12}x''_2 \leq b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x'_2 - a_{22}x''_2 \geq b_2,\\
&x_1 \geq 0,\ x'_2,\ x''_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

в) целевая функция задачи ЛП, представленной в стандартной форме, может подлежать как максимизации, так и минимизации. Исходную ЦФ в ряде случаев можно изменить: максимизация некоторой ЦФ эквивалентна минимизации той же ЦФ, взятой с противоположным знаком, и наоборот. Например, задача максимизации ЦФ $W(x) = x_1 + 4x_2$ эквивалентна задаче минимизации ЦФ $(-W(x)) = (-1)x_1 + (-4)x_2$.

2.3.2. Основные понятия симплекс-метода

Если задача ЛП имеет ограничения только типа $\leq$, трудностей в получении начального допустимого решения не возникает. В результате приведения задачи ЛП к стандартной форме ограничения задачи образуют систему линейных уравнений с n неизвестными, образующими векторное пространство, размерность которого m определяется количеством ограничений исходной задачи. При $m = n$ система уравнений имеет единственное решение, при $m > n$ в задаче ЛП возникает избыточность (часть уравнений оказывается лишней), и при $m < n$ задача ЛП будет иметь бесчисленное множество решений. Именно этот последний случай и рассматривается в теории линейного программирования.

Пример 2.5. Задача ЛП из примера 2.1 после приведения к стандартной форме приобретает вид:

найти max $W(x) = x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2$

при ограничениях:

$x_1 + x_2 + s_1 = 4,$

$- x_1 + x_2 + s_2 = 2,$

$x_1, x_2 \geq 0, s_1, s_2 \geq 0.$

Для этой задачи $m = 2$, а $n = 4$.

Всякая угловая точка ОДР соответствует *базисному решению* задачи ЛП, представленной в стандартной форме. Для определения понятия *базисного решения* рассмотрим систему линейных уравнений из примера 2.5. Коэффициенты при переменных и правые части ограничений этой системы являются координатами m-мерных векторов: $P_1 = (1; -1)^т$, $P_2 = (1; 1)^т$, $P_3 = (1; 0)^т$, $P_4 = (0; 1)^т$, $B = (4; 2)^т$. Систему линейных уравнений можно записать в векторной форме:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3s_1 + P_4s_2 = B.$$

Каждая остаточная переменная вводится только в одно ограничение, поэтому в остальных ограничениях коэффициенты при этой переменной, естественно, будут равны нулю. По этой причине в рассматриваемой системе линейных уравнений векторы P_3, P_4 являются линейно независимыми единичными векторами, т. е. составляют базис всей приведенной системы векторов. Переменные s_1, s_2, в данном случае соответствующие векторам базиса, называются базисными, а переменные x_1, x_2 — небазисными, или свободными. С геометрической точки зрения роль *базисных переменных* состоит в том, что они определяют величину проекции вектора B на направления векторов базиса (рис. 2.3).

С введением остаточных переменных базисное решение получить нетрудно. Базисным решением является такое частное решение системы линейных уравнений, которое получено следующим образом: все (n – m) *свободных переменных* приравниваются нулю, а m *базисных переменных*, в качестве которых и выступают остаточные переменные, приравниваются правым частям уравнений.

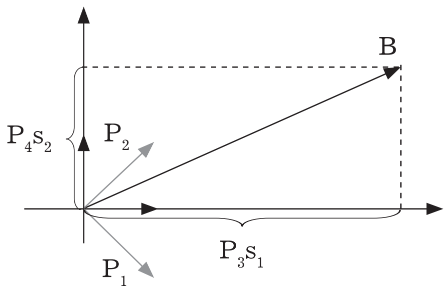


Рис. 2.3. Векторное представление ограничений задачи ЛП

Если базисное решение удовлетворяет условию неотрицательности правых частей, то оно называется допустимым базисным решением. Исходной точкой поиска в СМ является начало координат. Решение, удовлетворяющее этой точке, называется начальным. Для задачи ЛП из примера 2.5 *начальным допустимым базисным решением* является следующее: в качестве *базисных* принимаются остаточные переменные, которые принимают значения $s_1 = 4$, $s_2 = 2$, остальные переменные x_1, x_2 являются в этом случае *свободными* и приравниваются нулю. Таким образом, для задачи ЛП, имеющей ограничения только типа ≤, *начальное допустимое базисное решение* получается после приведения ее к стандартному виду.

С помощью метода исключений Жордана — Гаусса можно найти все базисные решения системы уравнений, последовательно переходя от одного единичного базиса к другому. Общее количество таких базисных решений определяется количеством сочетаний $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, которое по своей сути отражает максимальное количество итераций, которое может быть выполнено при решении задачи ЛП симплекс-методом. Однако на самом деле количество таких итераций гораздо меньше, поскольку в симплекс-методе реализуется такой целенаправленный процесс перехода от одной экстремальной точки к другой, что в результате происходит увеличение значения ЦФ (в задаче ее максимизации).

Смежные экстремальные точки ОДР различаются только одной переменной в каждой группе базисных и свободных переменных. Например, на рис. 2.1 началу координат соответствуют базисные переменные s_1, s_2 и небазисные x_1, x_2. Для соседней точки F группу базисных переменных составляют x_1 и s_2, а группу небазисных — x_2 и s_1. Как видно, группы базисных и небазисных переменных в точках O и F действительно различаются лишь одной компонентой. Это свойство экстремальных точек позволяет определить каждую последующую смежную экстремальную точку путем замены одной из текущих небазисных переменных текущей базисной переменной.

Для рассмотрения этого процесса взаимной замены переменных вводятся понятия включаемой и исключаемой переменных. *Включаемая* переменная — это небазисная в данный момент переменная, но которая будет включена в состав базисных на следующей итерации. *Исключаемая* переменная — это переменная, которая на следующей итерации будет исключена из состава базисных.

2.3.3. Алгоритм симплекс-метода

Рассмотрим задачу ЛП примера 2.5. Процедуру решения задачи с использованием СМ удобнее представить с помощью табл. 2.2, которая является реализацией обычной жордановой таблицы.

В левом столбце таблицы отображаются номер итерации и указываются включаемые и исключаемые на очередной итерации переменные. В столбце “Базис. перем” вписываются базисные на данной итерации переменные. Столбец “Решения” содержит правые части ограничений задачи ЛП на нулевой итерации, базисные решения, получаемые в ходе очередной итерации, в этом же столбце будет находиться и оптимальное решение задачи. В столбце “Условия допустимости” содержится отношение, с помощью которого осуществляется проверка условий *допустимости* при выборе переменной, исключаемой из состава базисных. Столбец “Контрольная сумма” служит для проверки правильности проводимых расчетов и в каждой клеточке содержит арифметическую сумму всех чисел соответствующей строки. Остальные столбцы содержат в заголовке имена всех базисных и небазисных переменных.

Шаг 0. Используя стандартную форму задачи ЛП определить начальное допустимое базисное решение (НДБР), приравняв нулю (n – m) свободных переменных. На этом шаге строится исходная таблица и в нее заносятся все базисные переменные, коэффициенты при переменных в ограничениях, а также их правые части. Для ЦФ в таблице вводится отдельная строка (W(x)-строка). Для включения в таблицу ЦФ преобразуют путем переноса ее правой части влево от знака равенства, например, $W(x) - x_1 - 4x_2 - 0s_1 - 0s_2 = 0$.

Таблица 2.2

Номер итерации	**Базис. перем**	x_1	x_2	s_1	S_2	**Решение**	**Условие допустимости**	**Контрольная сумма**
0 (x_2 вкл., s_2 искл.)	Z	-1	-4	0	0	0	0	-5
	s_1	1	1	1	0	4	4/1 = 4	7
	s_2	-1	$\boxed{1}$	0	1	2	2/1 = 2	3
1 (x_1 вкл., s_1 искл.)	Z	-5	0	0	4	8		7
	s_1	$\boxed{2}$	0	1	-1	2	2/2 = 1	4
	x_2	-1	1	0	1	2	—	3
2 (оптимум)	Z	0	0	5/2	3/2	13		17
	x_1	1	0	1/2	-1/2	1		2
	x_2	0	1	1/2	1/2	3		5

Шаг 1. Из числа текущих небазисных переменных выбирается включаемая в базис новая переменная, положительное приращение которой приводит к увеличению ЦФ. На этом шаге проверяется условие оптимальности: в задачах максимизации ЦФ, включаемой в состав базисных, является переменная, которая имеет наибольший отрицательный коэффициент в

Z–строке симплекс-таблицы. Если все коэффициенты Z–строки оказались положительными, то это свидетельствует о достижении ЦФ ***оптимального*** значения. В задачах минимизации ЦФ признаком оптимальности решения является отрицательность всех коэффициентов Z–строки. Переменная, включаемая в состав базисных, определяет *ведущий* столбец таблицы.

Шаг 2. Из числа переменных текущего базиса выбирается исключаемая переменная, которая должна принять нулевое значение. На этом шаге проверяется условие допустимости: в задачах и максимизации, и минимизации ЦФ исключаемой выбирается та базисная переменная, для которой отношение постоянной в правой части соответствующего ограничения к *положительному* коэффициенту ведущего столбца минимально, т. е. $s_i = \min\{b_1/a_{11}; b_2/a_{21}\}$. Существо этой проверки состоит в том, что следующая экстремальная точка, в которую будет осуществлен переход, должна принадлежать ОДР. Величина отношения определяет приращение, которое получает включаемая в состав базисных переменная. Переменная, исключаемая из состава базисных, определяет *ведущую* строку.

Шаг 3. Находится новое базисное решение, соответствующее новым базисным и небазисным переменным. Элемент таблицы на пересечении ведущей строки и ведущего столбца называется *ведущим*. Очередная итерация проводится по следующей схеме:

1) все элементы ведущей строки делятся на ведущий элемент;

2) все элементы ведущего столбца заменяются нулями, а сам ведущий элемент — единицей;

3) все остальные элементы симплекс-таблицы, включая Z-строку и элементы столбцов “Решение” и “Контрольная сумма”, вычисляются по правилу “прямоугольника”

$$\bar{a}_{ij} = \frac{a_{ij}a_{ks} - a_{is}a_{kj}}{a_{ks}},$$

где a_{ks} — ведущий элемент.

Осуществляется переход к шагу 1.

a_{is}	…	a_{ij}
…	…	…
a_{ks}	…	a_{kj}

2.3.4. Метод искусственных переменных

Задачи ЛП с использованием СМ легко решаются лишь при ограничениях типа ≤. При ограничениях-равенствах или ограничениях типа ≥, когда имеют дело с остаточными переменными, возникают трудности, связанные с получением *начального допустимого базисного решения*.

Для получения этого решения используются искусственные переменные, которые включаются в левые части уравнений, не содержащих очевидных базисных решений.

Обеспечивая получение НДБР, эти переменные играют роль остаточных переменных, но, не имея физического смысла, в процессе оптимизации они должны оказаться равными нулю.

С применением искусственных переменных связаны два основных метода: метод больших штрафов (М-метод) и двухэтапный метод.

Метод больших штрафов. В этом методе в задачу ЛП вводится обратная связь, которая обеспечивает получение оптимального решения при нулевых искусственных переменных. В качестве такой обратной связи используется *штраф*, накладываемый на ЦФ за использование искусственных переменных.

Пример 2.6. Рассмотрим задачу ЛП примера 2.1, введя в условия дополнительное ограничение:

определить $\max W(x) = x_1 + 4x_2$

при ограничениях: $x_1 + x_2 \le 4$

$$-x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 + 3x_2 \ge 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

После приведения задачи ЛП к стандартному виду, получим:

найти $\max W(x) = x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 &= 4;\\ -x_1 + x_2 + s_2 &= 2;\\ x_1 + 3x_2 - s_3 &= 3;\\ x_1, x_2 \geq 0, s_1, s_2, s_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

При обычном подходе для получения начального допустимого базисного решения необходимо приравнять нулю небазисные переменные x_1, x_2, а базисные переменные s_1, s_2, s_3 приравнять правым частям уравнений. Однако в этом случае переменная s_3 имеет отрицательное значение, что противоречит условию неотрицательности всех переменных задачи ЛП. Введем в третье уравнение искусственную переменную R_1, которая будет играть роль остаточной переменной. За использование этой переменной в ЦФ вводится штраф — достаточно большой отрицательный коэффициент M. В задачах минимизации ЦФ этот коэффициент является положительным. В результате задача ЛП приводится к следующему виду:

найти $\max W(x) = x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 - MR_1$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 &= 4;\\ -x_1 + x_2 + s_2 &= 2;\\ x_1 + 3x_2 - s_3 + R_1 &= 3;\\ x_1, x_2 \geq 0, s_1, s_2, s_3, R_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Система линейных равенств содержит $m = 3$ уравнения и $n = 6$ переменных, поэтому начальное базисное решение должно содержать $n - m = 3$ нулевых переменных и 3 базисных переменных. Если положить равными нулю свободные переменные x_1, x_2, s_3, то сразу будет получено требуемое начальное базисное решение: $s_1 = 4$, $s_2 = 2$, $R_1 = 3$.

После этого условия задачи переформулируются таким образом, чтобы процесс решения можно было представить в удобной табличной форме (табл. 2.3).

Таблица 2.3

№ итерации	Базис. перем.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R_1	Решение	Условие допустимости
0 (x_2 вкл., R_1 искл.)	Z	-1-M	-4-M	0	0	M	0	-M	
	s_1	1	1	1	0	0	0	4	4
	s_2	-1	1	0	1	0	0	2	2
	R_1	1	1	0	0	-1	1	1	1
1 (s_3 вкл., s_2 искл.)	Z	3	0	0	0	-4	4+M	4	
	s_1	0	0	1	0	1	-1	3	3
	s_2	-2	0	0	1	1	-1	1	1
	x_2	1	1	0	0	-1	1	1	-
2 (x_1 вкл., S_1 искл.)	Z	-5	0	0	4	0	M	8	
	s_1	2	0	1	-1	0	0	2	1
	s_3	-2	0	0	1	1	-1	1	-
	x_2	-1	1	0	1	0	0	2	-
3 (оптимум)	Z	0	0	5/2	1/2	0	M	13	
	x_1	1	0	1/2	-1/2	0	0	1	
	s_3	0	0	1	0	1	-1	7	
	x_2	0	1	1/2	1/2	0	0	3	

Для этого необходимо, чтобы начальное решение в явном виде присутствовало в столбце, характеризующем правые части всех уравнений задачи. С этой целью в уравнение ЦФ подставляется выражение для искусственной переменной, полученное из соответствующего ограничения: $R_1 = 3 - x_1 - 3x_2 + s_3$. В результате получается следующее выражение для ЦФ:

$$W(x) = x_1 + 4x_2 - M(3 - x_1 - 3x_2 + s_3).$$

После приведения подобных членов Z-уравнение в симплекс-таблице будет иметь вид: $W(x) - (1 + M)x_1 - (4 + 3M)x_2 + Ms_3 = -3M$.

Последовательность решения задачи представлена в табл. 2.3.

Оптимальному решению соответствует точка $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, где ЦФ $W(x) = 13$. Так как в решении отсутствует искусственная переменная, то оно является допустимым оптимальным решением задачи.

Двухэтапный метод. Недостаток М-метода обусловлен большой величиной штрафа М, что зачастую приводит к ошибкам в вычислениях из-за процедуры округления чисел. В двухэтапном методе штраф не используется, поэтому он лишен такого недостатка. Процедура поиска оптимального решения здесь организована как бы в два этапа (отсюда и название этого метода).

На *первом этапе* вводятся искусственные переменные, необходимые для получения стартовой точки; формируется фиктивная ЦФ φ как сумма искусственных переменных, выраженных из соответствующих ограничений. Решается задача минимизации функции φ. Если минимальное значение функции φ равно нулю, то исходная задача имеет допустимое решение, в противном случае задача решения не имеет. Основная цель первого этапа — получение начального решения исходной задачи.

На *втором этапе* решается исходная задача, при этом в качестве начального решения используется оптимальное решение, полученное на первом этапе.

В симплекс-таблице для двухэтапного метода вводится еще одна строка для фиктивной ЦФ φ. На первом этапе условие оптимальности проверяется только по элементам φ-строки, а с элементами Z-строки выполняются обычные для симплекс-метода процедуры расчетов. С достижением нулевого значения функции φ-строка, соответствующая этой функции, из симплекс-таблицы исключается и дальнейшие итерации, составляющие второй этап, осуществляются с использованием элементов Z-строки.

Пример 2.7. Рассмотрим задачу примера 2.6. После приведения исходной задачи ЛП к стандартному виду и введения искусственной переменной формируется фиктивная ЦФ:

$$\varphi = R_1 = 3 - x_1 - 3x_2 + s_3.$$

Для включения в симплекс-таблицу функция приводится к виду: $\varphi + x_1 + 3x_2 - s_3 = 3$.

Решение задачи симплекс-методом представлено в табл. 2.4.

Таблица 2.4

№ итерации	Базис. перем.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R_1	Решение	Условие допустимости
0 (x_2 вкл., R_1 искл.)	Z	-1	-4	0	0		0	0	
	φ	1	3	0	0	-1	0	3	
	s_1	1	1	1	0	0	0	4	4
	s_2	-1	1	0	1	0	0	2	2
	R_1	1	1	0	0	-1	1	1	1
1 (s_3 вкл., s_2 искл.)	Z	1/3	0	0	0	-4/3	4/3	4	
	φ	0	0	0	0	0	-1/3	0	
	s_1	2/3	0	1	0	1/3	-1/3	3	3
	s_2	-4/3	0	0	1	1/3	-1/3	1	1
	x_2	1/3	1	0	0	-1/3	1/3	1	-
2 (x_1 вкл., s_1 искл.)	Z	-5	0	0	4	0	0	8	
	s_1	2	0	1	-1	0	0	2	1
	s_3	-4	0	0	3	1	-1	3	-
	x_2	-1	1	0	1	0	0	2	-
3 (оптимум)	Z	0	0	5/2	1/2	0	0	13	
	x_1	1	0	1/2	-1/2	0	0	1	
	s_3	0	0	1	0	1	-1	7	
	x_2	0	1	1/2	1/2	0	0	3	

Количество необходимых итераций М-метода и двухэтапного метода всегда одинаково. Преимуществом двухэтапного метода является то, что при его применении не требуется использование в расчетах постоянной М.

Примеры задач, решаемых рассмотренным выше методом, представлены в приложении 3.

2.4. Двойственная задача линейного программирования

Двойственная задача — это вспомогательная задача ЛП, формулируемая с помощью определенных правил непосредственно из условий исходной задачи, которая в этом случае называется *прямой* задачей ЛП (ПЗЛП).

Необходимость изучения двойственной задачи ЛП (ДЗЛП) обусловлена следующими причинами. Во-первых, трудности в решении задач ЛП зависят не от количества переменных n, а от количества ограничений m, определяющих число итераций симплекс-метода. Поэтому, если ПЗЛП, еще не приведенная к стандартной форме, содержит большое количество ограничений ($m > n$), то в этом случае целесообразно перейти к ДЗЛП. Сформированная ДЗЛП будет иметь m переменных и n ограничений, т. е. количество итераций при этом уменьшится. Во-вторых, наличие связей между оптимальными решениями ПЗЛП и ДЗЛП позволили разработать *двойственный симплекс-метод*, который находит применение при анализе чувствительности задач ЛП и в процедурах целочисленного линейного программирования.

При переходе к ДЗЛП в качестве исходной принимается стандартная форма прямой задачи ЛП. ДЗЛП формируется по следующим правилам:

1) каждому ограничению ПЗЛП соответствует переменная ДЗЛП y_i, $i = 1, \ldots, m$; правая часть ограничения ПЗЛП b_i становится коэффициентом ЦФ W(x) ДЗЛП при переменных y_i;

2) каждой переменной ПЗЛП x_j, $j = 1, \ldots, n$, соответствует ограничение ДЗЛП; коэффициенты ЦФ Z ПЗЛП c_j становятся правыми частями ограничений ДЗЛП;

3) коэффициенты a_{ij} при переменных x_j в ПЗЛП становятся коэффициентами при переменных y_i в ДЗЛП.

При переходе к ДЗЛП происходит изменение направления оптимизации, ограничений и переменных, что отражено в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Прямая задача ЛП в стандартной форме	**Двойственная задача ЛП**		
	ЦФ	**Ограничения**	**Переменные**
max	min	$\geq$	Не имеют ограничений в знаке
min	max	$\leq$	

Пример 2.8. Дана прямая задача ЛП:

найти max $W(x) = x_1 + 2x_2$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \le 8; \\ & -x_1 + x_2 \le 2; \\ & x_1 + x_2 \ge 4; \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Необходимо сформировать двойственную задачу ЛП.

Для построения ДЗЛП требуется прямую задачу привести к стандартной форме:

найти max $W(x) = x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 - MR_3$

при ограничениях:

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 + & x_2 + & s_1 & & & = 8 \to y_1; \\ -x_1 + & x_2 + & & s_2 & & = 2 \to y_2; \\ x_1 + & x_2 - & & s_3 + & R_3 & = 4 \to y_3; \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1, & x_2 \ge & 0, & s_1, & s_2, & s_3 \ge & 0. \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{1-е} & \text{2-е} & \text{3-е} & \text{4-е} & \text{5-е} & \text{6-е} & W(x) \\ \text{огр.} & \text{огр.} & \text{огр.} & \text{огр.} & \text{огр.} & \text{огр.} & \end{array}$$

В соответствии с приведенными выше правилами сформированная ДЗЛП имеет вид:

найти min $W(x) = 8y_1 + 2y_2$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} & y_1 - y_2 + y_3 \ge 1, \\ & y_1 + y_2 + y_3 \ge 2, \\ & y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ -y_3 \ge 0\ (y_3 \le 0),\ y_3 \ge -M. \end{aligned}$$

По правилам, приведенным в табл. 2.5, двойственные переменные y_1, y_2, y_3 не ограничены в знаке, однако введение остаточных переменных в ПЗЛП приводит к появлению более жестких условий: $y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$ — неотрицательности переменных. Для переменной y_3 условие неограниченности в знаке остается в силе. Дело в том, что величина M имеет большое положительное значение, поэтому ограничение $y_3 \ge -M$ равносильно неограниченности переменной y_3 как в знаке, так и в значении.

При решении ДЗЛП ее необходимо представить в виде разности двух неотрицательных переменных: $y_3 = y_3' - y_3''$, $y_3' \ge 0$, $y_3'' \ge 0$.

Между оптимальными решениями прямой и двойственной задачами ЛП существует тесная взаимосвязь. Это означает, что решение одной из этих задач без каких-либо дополнительных вычислений может быть получено из итоговой оптимальной симплекс-таблицы другой задачи.

Рассмотрим эту связь на прямой и двойственной задачах примера 2.8. В табл. 2.6 и 2.7 приведены оптимальные решения соответственно прямой и двойственной задач ЛП. Из сравнения таблиц можно установить следующее. Во-первых, в точке, соответствующей оптимальным решениям обеих задач, выполняется равенство: max W(x) = min W(x). В задаче максимизации ЦФ последовательно увеличивается от начального значения до оптимального W(x) = 13. В задаче минимизации ЦФ уменьшается от начального значения до оптимального W(x) = 13. Из этого следует, что процессы максимизации и минимизации сходятся в некоторой "точке равновесия", после достижения которой ЦФ задач улучшить невозможно. Такая точка достигается при равенстве значений ЦФ и соответствует их оптимальным значениям. Во-вторых, базисные решения ПЗЛП можно получить непосредственно из оптимальной симплекс-таблицы ДЗЛП, и наоборот. В табл. 2.4 темным цветом выделены переменные начального базиса прямой задачи и коэффициенты при них в Z-строке. Этим переменным соответствуют 3-е, 4-е и 6-е ограничения ДЗЛП ($y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq -M$).

Двойственные переменные определяются по следующему правилу: коэффициент при начальной базисной переменной в оптимальном Z-уравнении ПЗЛП равен разности между левой и правой частями ограничения ДЗЛП, ассоциированного с данной начальной переменной. В данном случае $3/2 = y_1 - 0$, $1/2 = y_2 - 0$, $M = y_3 + M$. Отсюда, $y_1 = 3/2$, $y_2 = 1/2$ и $y_3 = 0$, в справедливости чего можно убедиться, сравнив эти значения двойственных переменных с оптимальным решением ДЗЛП в табл. 2.6.

Аналогичным образом могут быть получены значения переменных ПЗЛП из оптимальной симплекс-таблицы ДЗЛП. В табл. 2.7, где приведено оптимальное решение ДЗЛП, выделены темным цветом переменные начального базиса ДЗЛП и коэффициенты при них в оптимальной Z-строке. Очевидно, что двойственной к ДЗЛП будет являться исходная ПЗЛП. Поэтому при построении двойственной к ДЗЛП задачи переменной R_1 будет соответствовать переменная x_1 прямой задачи, а переменной R_2 — переменная x_2 прямой задачи с условиями $x_1 \geq M$ и $x_2 \geq M$.

Таблица 2.6

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R_3	**Решение**
Z	0	0	3/2	1/2	0	M	13
s_3	0	0	1	0	1	-1	4
x_2	0	1	1/2	1/2	0	0	5
x_1	1	0	1/2	-1/2	0	0	3

Значения переменных ПЗЛП определяются по следующему правилу: коэффициенты в оптимальном Z-уравнении равны разности между левыми и правыми частями соответствующих ограничений прямой задачи, ассоциированных с начальными переменными ДЗЛП. В данном случае имеем: $3 - M = x_1 - M$, $5 - M = x_2 - M$, откуда $x_1 = 3$ и $x_2 = 5$, что соответствует оптимальному решению ПЗЛП в табл. 2.6.

Таблица 2.7

Базис	y_1	y_2	y_3'	y_3''	s_1	R_1	s_2	R_2	**Решение**
Z	0	0	0	0	-3	3 – M	-5	5 – M	13
y_1	1	0	-1	0	-1/2	1/2	-1/2	1/2	3/2
y_2	0	1	0	-1	1/2	-1/2	-1/2	1/2	1/2

Соотношения двойственности задач ЛП позволили разработать *двойственный симплекс-метод*, при котором сначала получается недопустимое, но лучшее, чем оптимальное решение, а затем осуществляется систематическое приближение его к области допустимых решений. Этот метод используется для определенного класса задач ЛП, в которых уже на начальной итерации можно получить оптимальное, но недопустимое решение. Но еще важнее то, что он используется при анализе чувствительности задач ЛП. Применение двойственного симплекс-метода предусматривает выполнение следующих действий:

1) преобразование всех ограничений задачи ЛП в ограничения типа $\leq$, при этом часть ограничений будет иметь отрицательные правые части; для всех ограничений вводятся остаточные переменные;

2) проверка условий допустимости, которая заключается в выявлении переменной, исключаемой из состава базисных на очередной итерации. В качестве исключаемой выбирается наибольшая по абсолютной величине отрицательная базисная переменная. Если все базисные переменные неотрицательны, то это свидетельствует о получении оптимального и допустимого решения;

3) проверка условия оптимальности, которая заключается в выборе переменной, включаемой в состав базисных на очередной итерации. Для этого вычисляются отношения коэффициентов Z-строки к соответствующим коэффициентам ведущей строки. Отношения с положительным или нулевым значением знаменателя не учитываются. В задаче минимизации ЦФ вводимой переменной должно соответствовать наименьшее из указанных отношений, а в задачах максимизации ЦФ — отношение, наименьшее по абсолютной величине. Задача ЛП не имеет решения, если знаменатели всех отношений равны нулю или положительны;

4) после выбора включаемой и исключаемой переменных осуществляется обычная операция преобразования строк симплекс-таблицы.

Пример 2.9. Найти $\min W(x) = 2x_1 + x_2$

при ограничениях

$$3x_1 + x_2 \geq 3;$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6;$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3;$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

После преобразований получим следующую задачу:

найти $\min W(x) = 2x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

при ограничениях

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 + s_1 &= -3; \\
4x_1 + 3x_2 + s_2 &= -6; \\
x_1 + 2x_2 + s_3 &= 3; \\
x_1, x_2 \geq 0, s_1, s_2, s_3 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Начальная симплекс-таблица представлена в табл. 2.8.

В соответствии с условием допустимости в качестве исключаемой из состава базисных выбирается переменная s_2, поскольку имеет наибольшее отрицательное значение.

Таблица 2.8

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**Решение**
Z	-2	-1	0	0	0	0
s_1	-3	-1	1	0	0	-3
s_2	-4	-3	0	1	0	-6
s_3	1	2	0	0	1	3

Включаемой в состав базисных является переменная x_2, для которой характерно минимальное отношение коэффициента Z-строки к коэффициенту ведущей строки — 1/3 (для переменной x_1 это отношение составляет $1/2 > 1/3$). Далее выполняется процедура пересчета симплекс-таблицы.

Примеры ДЗЛП для последующего их решения представлены в приложении 3.

2.5. Анализ чувствительности задачи линейного программирования

Задача ЛП имеет *статическое* оптимальное решение, поэтому, как только изменяются исходные условия, полученное решение теряет свою актуальность. Анализ чувствительности задачи ЛП как раз и связан с исследованием возможных изменений полученного оптимального решения в результате изменений исходных данных задачи. Анализ чувствительности — это процесс, который реализуется после того, как получено оптимальное решение.

Для проведения такого анализа используется итоговая симплекс-таблица, из которой либо непосредственно, либо при помощи простых вычислений получают важную и существенную информацию относительно

1) оптимального решения,

2) статуса ресурсов,

3) ценности каждого ресурса,

4) чувствительности оптимального решения к изменению запасов ресурсов,

5) чувствительности к вариациям коэффициентов ЦФ.

Оптимальное решение. С точки зрения практического применения результатов решения задачи ЛП классификация переменных на базисные и небазисные не имеет значения, поэтому ее можно не учитывать. Переменные, которые отсутствуют в столбце “Базис”, имеют нулевые значения, значения же остальных переменных и значение ЦФ приводятся в столбце “Решение”.

Определение статуса ресурсов. Определение статуса ресурсов предусматривает отнесение ресурсов задачи ЛП к разряду *дефицитных* или *недефицитных*. К дефицитным относятся ресурсы, если в оптимальном решении предусматривается их полное использование; если же ресурс используется неполностью, то такой ресурс следует отнести к недефицитным. Статус ресурсов любой задачи ЛП определяется на основании значений остаточных переменных. Если остаточная переменная равна нулю, то это свидетельствует о полном использовании ресурса, т. е. ресурс является дефицитным. Если же остаточная переменная не равна нулю, то это означает, что ресурс использован неполностью и относится, таким образом, к недефицитным.

Ценность ресурсов. Ценность ресурса характеризуется величиной улучшения оптимального значения ЦФ, приходящегося на единицу прироста объема рассматриваемого ресурса. В итоговой симплекс-таблице ценность ресурсов можно определить по значениям коэффициентов при остаточных переменных s_i, $i = 1, ..., m$, начального базиса, фигурирующих в z-уравнении оптимальной симплекс-таблицы. Поскольку переменная s_i всегда связана только с ресурсом i, то идентификация ресурса происходит однозначно. Столбцы итоговой симплекс-таблицы, связанные с искусственными переменными, при анализе чувствительности могут быть удалены как не содержащие полезной информации.

Пример 2.10. Рассмотрим задачу ЛП, придав ей экономическое содержание:

найти $\max W(x) = 4x_1 + 3x_2$

при ограничениях: $3x_1 + 8x_2 \le 24$ (ресурс 1);
$2x_1 + x_2 \le 8$ (ресурс 2);
$- x_1 + x_2 \le 2$ (ресурс 3);
$x_1, x_2 \ge 0$.

Предположим, что речь идет об определении объемов производства продукции двух типов: x_1 (прод.1) и x_2 (прод. 2). Для их производства используются три вида ресурсов, запасы которых ограничены и представлены правыми частями ограничений. Коэффициенты при переменных в ограничениях характеризуют интенсивность расходования ресурсов на единицу каждого вида продукции. Коэффициенты ЦФ имеют смысл стоимости продукции каждого вида (например, тыс. руб./прод. j), а ЦФ в этом случае — прибыль от реализации изготавливаемой продукции (тыс. руб.).

Итоговая симплекс-таблица задачи ЛП представлена в табл. 2.9.

Таблица 2.9

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**Решение**
Z	0	0	1/6	4/7	0	18
x_1	1	0	1/6	-1/4	0	2
x_2	0	1	-1/12	5/8	0	3
s_3	0	0	-1/4	7/8	1	2

Из таблицы видно, что переменная $s_3 = 2$, а переменные s_1, s_2, будучи небазисными, равны нулю. Это означает, что ресурс 3 является недефицитным, а ресурсы 1 и 2 — дефицитными, т. е. расходуемыми полностью без остатка.

Ценность ресурсов определяется только для дефицитных ресурсов. В данном случае эта информация содержится в Z-строке для переменных s_1 и s_2. Размерность каждого элемента итоговой симплекс-таблицы устанавливается отношением единиц измерения элементов столбца "Решение" к единицам измерения каждой из переменных, сопоставленных со столбцами. Поэтому, элемент в столбце для s_1 имеет размерность [тыс. руб./ресурс 1] и характеризует интенсивность улучшения оптимального значения ЦФ при увеличении на единицу запасов ресурса 1. Величины, характеризующие ценность ресурсов, называют еще *теневыми ценами* или *издержками производства.* Учитывая, что значения двойственных переменных определяются с помощью коэффициентов в Z-строке, можно сделать следующий вывод: двойственные переменные характеризуют издержки производства. Любое ограничение ДЗЛП $\geq$ (или $\leq$) c_j отражает суммарные издержки на производство j-го вида продукции.

Анализ чувствительности оптимального решения к изменению запасов ресурсов. Для проведения такого анализа используется следующий прием: вводится некоторая величина Δ_i в правую часть для ресурса b_i. Допустим, что такая величина введена для ресурса 2 в исходную задачу ЛП. Если провести вновь все алгебраические преобразования и выполнить все итерации, то в итоговой симплекс-таблице величина Δ_2 будет фигурировать только в столбце "Решение", так как этот столбец не может быть ведущим. Коэффициенты при Δ_2 равны коэффициентам столбца для переменной s_2, соответствующей ресурсу 2. Эти результаты представлены в табл. 2.10.

Так как введение Δ_2 сказывается только на правой части симплекс-таблицы, то изменение запасов ресурса может повлиять только на допустимость решения. Поэтому Δ_2 не может быть отрицательной и должна быть ограничена таким интервалом значений, при которых выполняется условие неотрица-

Таблица 2.10

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Решения	
Z	0	0	1/6	4/7	0	18 +	$4/7\Delta_2$
x_1	1	0	1/6	-1/4	0	2 –	$1/4\Delta_2$
x_2	0	1	-1/12	5/8	0	3 +	$5/8\Delta_2$
s_3	0	0	-1/4	7/8	1	2 +	$7/8\Delta_2$

тельности правых частей ограничений (или неотрицательности переменных), т. е.

$$x_1 = 2 - 1/4\Delta_2 \geq 0,$$
$$x_2 = 3 + 5/8\Delta_2 \geq 0,$$
$$s_3 = 2 + 7/8\Delta_2 \geq 0.$$

Решение этой системы неравенств приводит к результату: $-16/7 \leq \Delta_2 \leq 8$. Любое значение Δ_2, выходящее за пределы указанного интервала (т. е. уменьшение запаса ресурса 2 на 16/7 единиц или увеличение его на 8 единиц), приведет к недопустимости решения и новой совокупности базисных переменных. При известных границах изменения Δ_2 устанавливаются реальные границы изменения запасов ресурса 2:

$$24 + \Delta_{2\min} \leq b_2 \leq 24 + \Delta_{2\max}.$$

Аналогичная процедура выполняется для всех остальных ресурсов, являющихся дефицитными.

Анализ чувствительности к вариациям коэффициентов ЦФ. Существо анализа сводится к установлению допустимых границ изменения коэффициентов ЦФ, при которых оптимальные значения переменных задачи ЛП остаются неизменными (хотя значение ЦФ при этом меняется).

Для установления таких границ, например, коэффициета c_1, вводится величина изменения δ_1 этого коэффициента в уравнение ЦФ. Поскольку уравнение ЦФ не может быть в процессе преобразований ведущей строкой, то приращение δ_1 будет фигурировать только в Z-строке итоговой симплекс-таблицы. ЦФ в этом случае принимает вид: $W(x) = (4 + \delta_1)x_1 + 3x_2$. Если провести вновь все преобразования, то получим следующие изменения в симплекс-таблице (табл. 2.11).

Таблица 2.11

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Решение
Z	0	0	$1/6 + 1/6\delta_1$	$4/7 - 1/4\delta_1$	0	$18 + 2\delta_1$
x_1	1	0	1/6	-1/4	0	2

Коэффициенты при δ_1 в Z-строке равны коэффициентам при соответствующих переменных в строке для x_1, поскольку именно для этой переменной была введена величина δ_1 в исходное уравнение ЦФ.

По условиям оптимальности для задачи максимизации ЦФ все элементы Z-строки должны быть неотрицательными, поэтому составляется система неравенств:

$$1/6 + 1/6\delta_1 \geq 0;$$
$$4/7 - 1/4\delta_1 \geq 0.$$

Решая систему неравенств, получим: $-1 \leq \delta_1 \leq 16/7$. Эти результаты определяют пределы изменения коэффициента c_1 в ЦФ: $4 + \delta_{1min} \leq c_1 \leq 4 + \delta_{1max}$. Таким образом, при уменьшении коэффициента ЦФ до значения $4 + (-1) = 3$ и при увеличении его до значения $4 + 16/7 = 44/7$ оптимальные значения базисных переменных остаются неизменными, хотя значение ЦФ изменяется в соответствии с выражением $18 + 2\delta_1$.

Аналогичным образом определяются границы изменения остальных коэффициентов ЦФ при переменных задачи ЛП.

2.6. Классификация методов решения задач целочисленного линейного программирования

Целочисленное линейное программирование (ЦЛП) — раздел математического программирования, ориентированный на решение задач, в которых на все или на некоторые переменные наложено требование целочисленности. В соответствии с этим определением все задачи ЦЛП подразделяются на полностью целочисленные и частично целочисленные. В *полностью целочисленных* задачах требование целочисленности накладывается на все переменные, а в *частично целочисленных* задачах — только на часть переменных.

Основные трудности решения задач ЦЛП связаны с эффектом округления чисел, возникающим при использовании ЭВТ. Округление чисел неприемлемо для получения решения задачи ЦЛП по следующим причинам:

1) решение в результате округления может быть получено в точке, не являющейся на самом деле оптимальной. Например, если значение одной из базисных переменных в оптимальном решении равно 10,1, то округление ее до 10 может привести к недопустимости решения, т. е. к выходу из области допустимых решений;

2) округление не имеет смысла в том случае, если переменные задачи ЦЛП — булевы, т. е. могут принимать только два значения: 0 или 1;

3) округление невозможно в том случае, если в задаче речь идет о неделимых объектах, например о предприятиях, наручных часах, людях и т. д.

Существуют следующие методы решения задач ЦЛП:

1. ***Методы отсечений.*** К этой группе методов относятся методы отсекающих плоскостей Гомори, которые разработаны для решения как частично, так и полностью целочисленных задач. Существо метода состоит в следующем: сначала решается задача ЦЛП как задача линейного программирования без учета требования целочисленности, а затем вводятся дополнительные ограничения, которые отсекают от области допустимых решений части плоскости, не содержащие целочисленных значений переменных.

2. ***Комбинаторные методы.*** К этой группе методов относится метод ветвей и границ. Существо метода заключается в переборе всех допустимых целочисленных решений. Основная трудность реализации метода состоит в формировании множества приемлемой мощности допустимых целочисленных решений.

3. ***Комбинированные методы.*** Эти методы используются только тогда, когда целочисленные переменные являются бу-

левыми. Булевы свойства переменных значительно упрощают процесс решения задачи ЦЛП, поэтому существуют специальные процедуры приведения таких задач к виду, где целочисленные переменные преобразуются в булевые. К этой группе методов может быть отнесен метод частичного перебора.

2.7. Метод отсекающих плоскостей Гомори

Идея метода заключается в преобразовании многогранника области допустимых решений, полученного при решении задачи линейного программирования без учета условий целочисленности переменных, в выпуклый многогранник, экстремальная точка которого является искомым решением задачи ЦЛП.

2.7.1. Метод Гомори для полностью целочисленных задач

Необходимым условием применения этого алгоритма является целочисленность всех коэффициентов и правых частей ограничений. Невыполнение этого условия не позволяет получить целочисленного решения. Дело в том, что требование целочисленности распространяется и на дополнительные переменные задачи ЦЛП, а наличие дробных коэффициентов в ограничениях приводит к нарушению этого требования.

Рассмотрим алгоритм решения полностью целочисленной задачи ЛП.

1. *Решение задачи линейного программирования без учета условий целочисленности переменных.* Такая задача ЛП называется задачей с ослабленными ограничениями. Если все базисные переменные задачи целочисленны, то решение считается полученным и выполнение дальнейших процедур не имеет смысла.

2. *Формирование уравнения отсекающих плоскостей Гомори.* Из итоговой симплекс-таблицы выбираются строки, которые соответствуют нецелочисленным значениям базисных

переменных. Такие строки называются *производящими*. Все последующие действия основаны на том положении, что любое нецелое число может быть представлено в виде суммы ближайшего наибольшего целого числа и дробной части:

$$\alpha = [\alpha] + f,$$

где $[\alpha]$ — наибольшее целое число, меньшее или равное α ($[\alpha] \le \alpha$), f — дробная часть числа, $0 \le f < 1$. Примеры: $3\frac{5}{7} = 3 + \frac{5}{7}$; $-2\frac{2}{9} = -3 + \frac{7}{9}$.

Производящую строку записывают в виде следующего уравнения:

$$x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \beta_i,\ i = 1, ..., m,$$

где β_i — нецелое число, расположенное в столбце "Решение",

q_j — дополнительная (остаточная или избыточная) переменная,

α_{ij} — коэффициент при дополнительной переменной.

Фигурирующие в этом уравнении величины α_{ij} и β_i представляют также в виде суммы целого и дробного чисел:

$$\alpha_{ij} = [\alpha_{ij}] + f_{ij},\ 0 \le f_{ij} < 1;$$
$$\beta_i = [\beta_i] + f_i,\ 0 \le f_i < 1.$$

После подстановки в исходное уравнение получают следующее выражение:

$$x_i + \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}] q_j + \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j = [\beta_i] + f_i.$$

После переноса вправо целых частей уравнение приобретает следующий вид:

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j = x_i + \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}] q_j - [\beta_i]. \qquad (2.2)$$

Так как x_i и q_j должны быть целочисленными, то правая часть этого выражения также должна быть целочисленной. Но исходя из имеющегося равенства следует вывод о том, что и левая часть этого выражения тоже должна быть целочисленной.

Поскольку $q_j \geq 0$ по условиям задачи ЛП, а $f_{ij} \geq 0$ по представлению дробного числа, то $\sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j \geq 0$. Из этого следует, что левая часть последнего равенства может быть представлена в виде

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j \leq f_i.$$

Учитывая то условие, что $0 < f_i < 1$, неравенство приобретает вид

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j < 1.$$

Левая часть этого неравенства не может быть равной 1, поэтому, делая логическое заключение, можно записать:

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j \leq 0. \tag{2.3}$$

Это неравенство является выражением необходимого условия целочисленности и одновременно его можно рассматривать как дополнительное ограничение задачи линейного программирования.

В соответствии с процедурами решения задачи ЛП неравенство (2.3) приводится к стандартному виду введением остаточной переменной s_{n+1}:

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j + s_{n+1} = 0.$$

Из нескольких производящих строк, имеющихся в итоговой симплекс-таблице, выбирается та, которая характеризуется максимальным значением дробной части базисной переменной f_i.

Величина f_i определяет вклад дробной части в приближение решения задачи ЦЛП к оптимальной целочисленной точке ОДР: чем больше дробная часть, тем ближе значение базисной переменной к целочисленному оптимальному решению.

После выбора производящей строки формируется уравнение отсечения:

$$s_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} q_j = -f_i. \tag{2.4}$$

Такая форма представления уравнения необходима для удобства его записи в итоговую симплекс-таблицу. Это ограничение-равенство определяет отсечение Гомори для полностью целочисленных задач.

Уравнение (2.4) является математической формой описания плоскости, отсекающей от ОДР ту ее часть, которая не содержит целочисленных значений. Это уравнение можно получить, выразив небазисные переменные q_j из исходных ограничений стандартной задачи ЛП и подставив их в уравнение (2.4).

3. *Формирование и решение дополнительной задачи ЛП.* Для решения этой задачи используется двойственный симплекс-метод, описанный в предыдущей лекции.

Результатом решения дополнительной задачи ЛП может быть целочисленное значение всех переменных, тогда задача считается решенной, В противном случае осуществляется переход к п. 2 алгоритма.

Количество шагов в методе отсечений Гомори не может быть больше количества переменных исходной задачи, куда входят как переменные задачи линейного программирования (ЗЛП), так и дополнительные переменные (n + m).

Пример 2.11. Рассмотрим следующую задачу ЦЛП:

Найти max $Z = x_1 + 2x_2$

при ограничениях: $3/2x_1 + 1/2x_2 \le 7/2$,

$x_1 + 3x_2 \le 7$,

$x_1, x_2 \ge 0$, целые.

Решение.

Учитывая требование целочисленности коэффициентов при переменных в линейных ограничениях, необходимо обе части первого ограничения умножить на наименьший общий знаменатель. В результате выполнения этой процедуры исходная задача ЦЛП приобретает вид:

найти max $Z = x_1 + 2x_2$
при ограничениях:

$$3x_1 + x_2 \le 7,$$
$$x_1 + 3x_2 \le 7,$$
$$x_1, x_2 \ge 0, \text{ целые.}$$

После приведения к стандартному виду задача представляется следующим образом:

найти max $Z = x_1 + 2x_2$
при ограничениях:

$$3x_1 + x_2 + s_1 = 7;$$
$$x_1 + 3x_2 + s_2 = 7;$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0, \text{ целые.}$$

Решение этой задачи без учета целочисленности переменных, т. е. задачи с ослабленными ограничениями, приводит к следующей итоговой симплекс-таблице (табл. 2.12).

Таблица 2.12

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	**Решение**
z	0	0	1/8	5/8	21/4
x_1	1	0	3/8	-1/8	7/4
x_2	0	1	-1/8	3/8	7/4

Как видно из таблицы, базисные переменные имеют нецелочисленные значения, поэтому следующим шагом является формирование отсекающей плоскости Гомори, для чего из симплекс-таблицы выбирается производящая строка. Поскольку при целочисленных значениях переменных значение ЦФ тоже будет целочисленным, то в качестве производящей строки может выбираться и Z-строка симплекс-таблицы. Выбор строки осуществляется по максимуму дробной части f_i тех чисел, что представлены в столбце “Решение”. В данном случае максимальные и равные значения дробной части $f_1 = f_2 = 3/4$ имеют числа, соответствующие базисным переменным x_1 и x_2. Поэтому любая из этих строк может быть выбрана в качестве производящей. Допустим, в качестве производящей выбрана строка, соответствующая базисной переменной x_1.

Отсечение Гомори строится на основании равенства (2.4):

$$s_3 = 3/8s_1 - 1/8s_2 - 3/4, \text{ или}$$
$$s_3 - 3/8s_1 + 1/8s_2 = -3/4.$$

Подстановка этого уравнения в итоговую симплекс-таблицу и последующее выполнение итераций двойственного симплекс-метода приводят к таблице с целочисленными значениями базисных переменных (табл. 2.13):

Таблица 2.13

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**Решение**
z	0	0	1/8	5/8	0	5 1/4
x_1	1	0	3/8	-1/8	0	1 3/4
x_2	0	1	-1/8	3/8	0	1 3/4
s_3	0	0	-3/8	1/8	1	-3/4
z	0	0	0	2/3	1/3	5
x_1	1	0	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1/3	-1/3	2
s_1	0	0	1	- 1	-8/3	2

В том, что составленное выше отсечение Гомори действительно исключает некоторые области многогранника допустимых решений, можно убедиться следующим образом. Для этого в уравнение отсечения Гомори вместо переменных s_1 и s_2 необходимо подставить их выражения, полученные из ограничений стандартной задачи ЛП:

$$s_3 - 3/8(7 - 3x_1 - x_2) + 1/8(7 - x_1 - 3x_2) = -3/4$$

или $s_3 + x_1 = 1$. Это уравнение эквивалентно неравенству $x_1 \le 1$, которое может рассматриваться как дополнительное, третье, ограничение исходной задачи ЦЛП.

Графическое решение задачи представлено на рис. 2.4. Жирными точками на рисунке показаны точки ОДР, характеризующиеся целочисленными значениями переменных, а штриховой линией — линия, соответствующая третьему ограничению. Как видно, этим ограничением от ОДР отсекается та ее часть, которая не содержит целочисленных значений переменных (на рисунке она заштрихована). Оптимальное целочисленное решение рассматриваемой задачи достигается в точке E.

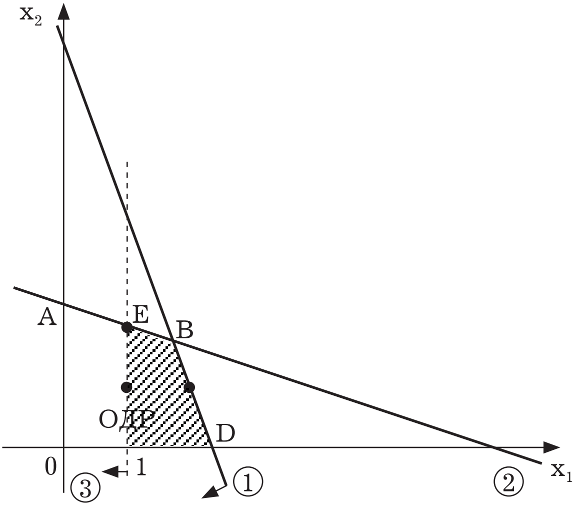


Рис. 2.4. Графический метод решения задач

Задачи для самостоятельного решения

Используя рассмотренные методы найти решение следующих задач:

2.1. $F = 7x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 110, \\ 11x_1 - 3x_2 - x_4 = 24, \\ 2x_1 - 7x_2 - x_5 = 110, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ x_j \text{ — целые } (j = \overline{1,5}).$$

2.2. $F = -5x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 7x_5 + 6x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 \leq 24, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \leq 30, \\ -4x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6 \leq 60, \end{cases}$$

$$0 \leq x_j \leq 10,\ x_j \text{ — целые } (j = \overline{1,6}).$$

2.3. $F = 60x_1 + 70x_2 + 120,4x_3 + 130x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16, \\ x_1 + 1{,}85x_2 + x_3 + x_4 \le 16, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ge 10, \\ 4x_1 + 6{,}9x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100, \\ 6{,}3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 100, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ x_j \text{ — целые } (j = \overline{1,4}).$$

2.4. $F = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 3x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 + 5x_6 = 11, \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_5 + 3x_6 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ x_j \text{ — целые } (j = \overline{1,6}).$$

2.7.2. Метод Гомори для частично-целочисленных задач

Для частично-целочисленных задач характерно то, что требование целочисленности накладывается только на часть переменных. В целом последовательность решения этих задач такова же, как и полностью целочисленных задач, а именно:

1) решается задача ЦЛП с ослабленными ограничениями;

2) на основе итоговой симплекс-таблицы выбирается производящая строка и формируется уравнение отсечения Гомори;

3) решается дополнительная задача ЛП с применением двойственного симплекс-метода. Различие с первым алгоритмом состоит лишь в способе формирования уравнения отсечения Гомори.

Допустим, что получено решение задачи ЦЛП с ослабленными ограничениями. Из итоговой симплекс-таблицы выписывается производящая строка для той переменной x_k, на которую наложено требование целочисленности:

$$x_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j = \beta_k,$$

где q_j — небазисная переменная, на которую в общем случае условие целочисленности может быть и не наложено.

Правую часть равенства представляют в виде суммы целой и дробной частей числа:

$$x_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j = [\beta_k] + f_k.$$

После группирования целых и дробных частей получают:

$$x_k - [\beta_k] = f_k - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j.$$

Здесь возможны две ситуации. Если $x_k \le [\beta_k]$, то $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j \ge f_k$; если же $x_k \ge [\beta_k] + 1$, тогда $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j \le f_k - 1$.

Поскольку нецелочисленные коэффициенты α_{kj} могут быть как положительными, так и отрицательными, то их разделяют следующим образом. Вводят J^+ — множество индексов j, для которых $\alpha_{kj} \ge 0$, и J^- — множество индексов, для которых $\alpha_{kj} < 0$. После небольших преобразований:

$$\sum_{j \in J^+}^{n} \alpha_{kj} q_i \ge f_k, \quad \frac{f_k}{f_k - 1} \sum_{j \in J^-}^{n} \alpha_{kj} q_j \ge f_k,$$

либо составляют совместное уравнение

$$-\left\{ \sum_{j \in J^+}^{n} \alpha_{kj} q_j + \frac{f_k}{f_k - 1} \sum_{j \in J^-}^{n} \alpha_{kj} q_j \right\} \le f_k$$

либо, добавляя остаточную переменную, формируют уравнение отсекающей плоскости:

$$\left\{ s_{n+1} - \sum_{j \in J^+}^{n} \alpha_{kj} q_j - \frac{f_k}{f_k - 1} \sum_{j \in J^-}^{n} \alpha_{kj} q_j \right\} = f_k.$$

Это уравнение определяет искомое отсечение Гомори для частично-целочисленных задач и представляет собой необходимое условие целочисленности переменной x_k.

Далее решается дополнительная задача ЛП (с расширенной симплекс-таблицей) двойственным симплекс-методом и определяется целочисленное значение рассматриваемой переменной.

Основным недостатком метода отсекающих плоскостей Гомори является невозможность решения целочисленных задач большой размерности.

Задачи для самостоятельной работы

Используя метод Гомори для частично-целочисленных задач, необходимо определить:

$$F = \frac{-5x_1 + 2x_2}{3x_1 + 4x_2} \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 16, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 18, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0.$$

$$F = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 11, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0.$$

2.8. Метод ветвей и границ

Этот метод так же, как и метод отсечений Гомори, применим для решения как полностью, так и частично-целочисленных задач и тоже основан на первоначальном решении задачи ЛП с ослабленными ограничениями. Идея метода основана на переборе всех возможных комбинаций целочисленных значений переменных задачи. Однако при большой размерности задачи ЦЛП подобный перебор может потребовать много времени, а иногда и вообще невозможен. Рациональность этого процесса обеспечивается рядом процедур, которые существенно снижают количество просматриваемых комбинаций.

Процесс решения задачи состоит из нескольких последовательно выполняемых шагов.

1. *Решение задачи ЛП с ослабленными ограничениями.* Если ЦФ и переменные удовлетворяют требованию целочисленности, то полученное решение рассматривается в качестве оптимального. В противном случае переходят к шагу 2.

2. *Формирование ветвей исследования.* Допустим, условию целочисленности не удовлетворяют переменные x_k, x_r. Тогда на основе дробного значения, например, x_k формируются две не связанные между собой подзадачи:

а) $x_k \le [x_k]$;
б) $x_k \ge [x_k] + 1$.

В общем случае выбор переменной, на основе которой организуется процесс ветвления, влияет на эффективность решения задачи. Для такого выбора существуют специальные эмпирические или эвристические процедуры [21, 14].

3. *Решение подзадачи* а). Решение осуществляется на основе итоговой симплекс-таблицы. Рассматриваемое неравенство приводится к стандартному виду путем добавления остаточной переменной, которая вводится в задачу как базисная:

$$x_k + s_{n+1} = [x_k].$$

Базисная переменная x_k из симплекс-таблицы выражается через небазисные переменные и подставляется в последнее выражение, в результате чего получается:

$$s_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{kj} q_j \ge 0 = -f_i.$$

Выполняется очередная итерация двойственного симплекс-метода, позволяющая получить целочисленное значение переменной x_k.

Если полученное решение удовлетворяет условиям целочисленности, то его следует рассматривать как нижнюю (в задаче максимизации ЦФ) границу задачи. Она характеризуется, таким образом, целочисленностью всех или части переменных и наилучшим в сравнении с другими подзадачами значением ЦФ. Граница вводится для повышения эффективности вычислений в том смысле, что, если в результате разрешения очередной подзадачи получено худшее, чем граница, решение, дальнейшее ветвление задачи в этом направлении нецелесообразно. Тем самым исключаются из рассмотрения те комбинации целочисленных значений переменных, которые заведомо будут иметь худшее в сравнении с границей значение ЦФ. Если в результате решения очередной подзадачи будет получено лучшее, чем граница, значение ЦФ, то тогда устанавливается новое значение границы.

4. *Решение подзадачи* б). Решение осуществляется аналогично пункту 3.

Пример 2.12. Рассмотрим задачу ЦЛП из примера 2.11. Из табл. 2.12 видно, что обе переменные являются нецелочисленными, поэтому на основе одной из них, например x_2, организуется ветвящийся процесс поиска целочисленных значений. Дерево подзадач, порождаемых в процессе применения метода ветвей и границ, представлено на рис. 2.5.

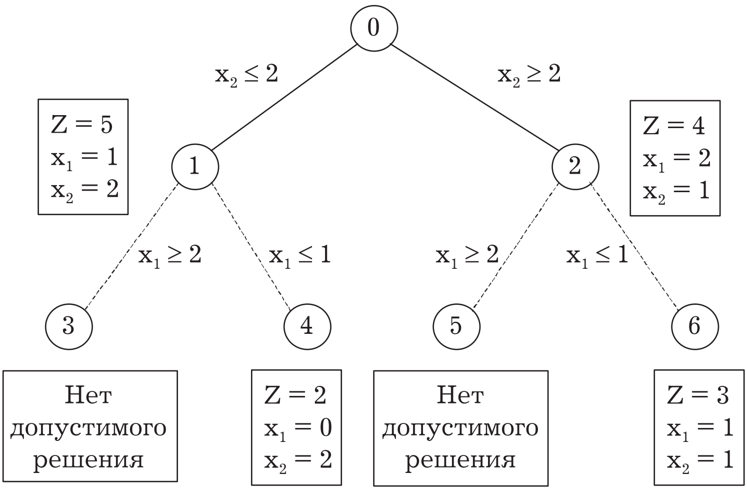


Рис. 2.5. Дерево подзадач

Исходя из значения выбранной переменной $x_2 = 1\ 3/4$ формируются две подзадачи: $x_2 \leq 2$ и $x_2 \geq 1$. Результат решения второй подзадачи: $Z = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Это решение удовлетворяет требованию целочисленности, поэтому оно может рассматриваться в качестве *границы*. Дальнейшее ветвление задачи нецелесообразно, поскольку оно приведет к худшему решению. Действительно, если продолжить ветвление и рассмотреть подзадачу $x_1 \leq 1$, то ее решением будет: $Z = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Допустимого же решения подзадачи $x_1 \geq 2$ вообще не существует.

Первая подзадача имеет решение: $Z = 5$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Как видно, это решение лучше того, что было принято в качестве границы. Поэтому решение второй подзадачи должно быть принято в качестве *новой границы* задачи. Дальнейшее ветвление также нецелесообразно, поскольку приведет к ухудшению значения ЦФ. На рис. 2.5 штриховыми линиями показаны те ветви, для которых соответствующие им подзадачи нецелесообразны для решения.

Таким образом, введением *границ* удается существенно уменьшить количество решаемых подзадач в ходе поиска оптимального целочисленного решения.

В настоящее время метод ветвей и границ является наиболее надежным средством решения целочисленных задач.

3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1. Вербальная и математическая постановка транспортной задачи линейного программирования

Сфера применения общих методов линейного программирования очень обширна, однако решение практических задач связано с большим количеством переменных, что приводит к значительным вычислительным трудностям. Учитывая специфику конкретной решаемой задачи, трудности эти можно преодолеть, представляя совокупность неизвестных матрицей. Наиболее характерной и актуальной, довольно изученной задачей является так называемая задача транспортного типа.

Под транспортной задачей в настоящее время понимается целый комплекс задач, имеющий специфическую постановку и алгоритм решения.

Транспортная задача представляет собой задачу обоснования решения по скалярному показателю. По существу она является задачей линейного программирования, которую можно решать симплекс — методом. Однако специфическая структура условий задачи позволяет разработать более эффективный вычислительный метод.

Транспортная модель, как правило, используется для составления наиболее экономичного плана перевозок из нескольких пунктов (поставщиков) в пункты доставки (потребители). При этом в качестве критерия оптимальности обычно берется либо минимальная стоимость перевозок, либо минимальное время его доставки. Транспортную модель можно применять для решения задач, связанных с управлением запасами, составлением сменных графиков, распределением сил и средств и т. д.

Рассмотрим вербальную постановку транспортной задачи и планирование перевозок материально-технических средств.

Вербальная постановка задачи

Планируются перевозки одного вида материально-технических средств (МТС) от нескольких поставщиков нескольким потребителям. Известны запасы материально-технических средств поставщиков и потребности в МТС потребителей. Известна или может быть вычислена стоимость перевозки единицы МТС из каждого исходного пункта (каждого поставщика) в каждый пункт назначения (каждому потребителю). Величина транспортных расходов на любом маршруте прямо пропорциональна объему перевозимых МТС. Потребности каждого потребителя могут удовлетворяться за счет нескольких поставщиков. Цель планирования состоит в определении количества МТС, которые следует перевезти от каждого поставщика каждому потребителю, с тем чтобы общие транспортные расходы были минимальными (рис. 3.1).

Неотрицательные переменные x_{ij} можно записать в виде матрицы:

$$\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{m1} & x_{m2} & ... & x_{mn} \end{Vmatrix}, \tag{3.1}$$

которую можно обозначить $\|X_{ij}\|$.

Совокупность неизвестных X_{ij} (3.1), удовлетворяющая ограничениям первой и второй групп в (3.2), называется планом перевозок. План, для которого достигается минимум первого выражения в (3.2), называется оптимальным. Величины же X_{ij} называются перевозками.

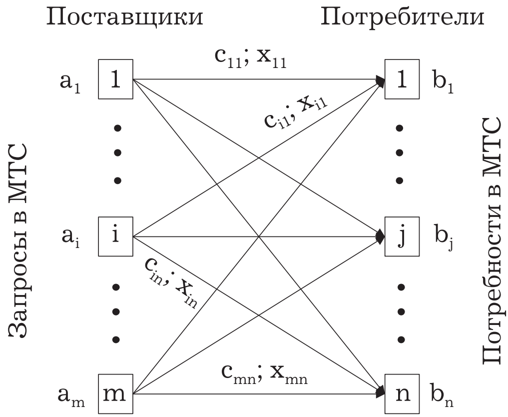


Рис. 3.1. Организация перевозок МТС:
m — количество поставщиков; n — количество потребителей; a_i — запасы МТС i-го поставщика; b_j — потребности в МТС j-го потребителя; c_{ij} — стоимость перевозок; x_{ij} — количество перевозимых МТС

В нашем случае *математическая постановка транспортной задачи* линейного программирования в общем виде будет выглядеть следующим образом:

$$\left.\begin{gathered} x^*\colon \min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{при ограничениях} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i=1,2,\ldots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \quad j=1,2,\ldots,n \\ x_{ij} \ge 0 \text{ для всех } i \text{ и } j \end{gathered}\right\} \qquad (3.2)$$

Первая группа ограничений указывает, что суммарный объем перевозимых МТС от некоторого поставщика не может превышать сосредоточенных в нем запасов МТС. Вторая группа ограничений требует, чтобы суммарные перевозки

МТС некоторому потребителю полностью удовлетворяли бы его спрос.

Если в задаче (3.2) все неравенства выполняются как равенства, т. е. суммарный объем запасов МТС равен суммарному спросу, то транспортную модель называют сбалансированной транспортной моделью. Именно для сбалансированной транспортной модели разработаны эффективные методы решения.

Если суммарный спрос меньше суммарных запасов, т. е.:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

то переход к сбалансированной модели осуществляют путем введения в рассмотрение фиктивного потребителя с номером n+1 с заявкой:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

При этом стоимость перевозки МТС фиктивному потребителю принимается равной нулю ($c_{i,\,n+1} = 0, \forall_i$).

Если суммарные запасы меньше суммарного спроса, т. е.:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

то вводят фиктивного поставщика с номером $m + 1$ и запасом

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

при нулевой стоимости перевозок МТС от этого поставщика ($c_{m+1,\,j} = 0, \forall_j$).

Следует заметить, что в оптимизационной задаче (3.2) маршруты перевозок должны быть маршрутами “минимальной стоимости”.

Для более компактного представления транспортной модели используют так называемую транспортную таблицу, которая может иметь следующий вид:

Поставщики	Потребители		
	1	...	n
1	c_{11} x_{11}	...	c_{1n} x_{1n}
...	...	...	...
m	c_{m1} x_{m1}	...	c_{mn} x_{mn}
Потребности	b_1	...	b_n

Приведем наглядный пример: необходимо со склада города (гор.) и области (обл.) перевезти потребное число МТС потребителям (потр.). Тогда транспортная таблица будет иметь следующий вид (табл. 3.1):

Таблица 3.1

Поставщик	Потребитель			ВП*
	1	2	3	
Склад города	3	5	6	40
Склад области	10	9	12	60
Потребности	25	45	30	

*ВП — возможности поставщиков.

Стоимость перевозки будет иметь вид:

$$C_{ij} = \nu_{ij} \cdot L_{ij},$$

где L_{ij} — расстояние между i и j пунктами;

ν_{ij} – стоимость перевозки 1 условной единицы груза на 1 единицу расстояния.

Если $\nu_{ij} = 1$ условной единице, то $C_{ij} = L_{ij}$.

3.2. Решение транспортной задачи

Так как транспортная задача является задачей линейного программирования, то основные этапы ее решения будут такими же, как и при решении задачи линейного программирования симплекс-методом, а именно:

I этап. Нахождение начального допустимого решения.

II этап. Выделение из небазисных переменных вводимой в базис переменной (метод потенциалов). Если все небазисные переменные удовлетворяют условию оптимальности, то следует закончить вычисления; в противном случае — перейти к III этапу.

3 этап. Выбор выводимой из базиса переменной (используя условия допустимости) из числа переменных текущего базиса; затем нахождение нового базисного решения и возвращение ко II этапу.

Рассмотрим подробнее каждый этап решения транспортной задачи, учитывая ее специфику.

I этап. Определение начального допустимого решения

Для сбалансированной транспортной задачи существует только $m + n - 1$ независимых уравнений. Таким образом, как и в симплекс-методе, начальное базисное допустимое решение должно иметь $m+n-1$ базисных переменных.

Начальное базисное решение транспортной задачи получают непосредственно из транспортной таблицы. Для этого можно использовать три процедуры.

1. ***Правило "северо-западного угла"***

При нахождении опорного плана транспортной задачи методом "северо-западного угла" на каждом шаге рассматривают первый из оставшихся пунктов отправления и первый из оставшихся пунктов назначения. Заполнение транспортной таблицы начинается с левого верхнего угла (северо-западного), двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз (увеличение i, увеличение j). Переменной X_{11} приписывают максимальное значение, допускаемое ограничениями на спрос и запасы.

После этого вычеркивают соответствующий столбец или строку, фиксируя этим, что остальные переменные вычеркнутого столбца (строки) полагаются равными нулю. Если ограничения выполняются одновременно, то можно вычеркнуть либо строку, либо столбец. Процесс завершается тогда, когда будет присвоено значение переменной x_{min}.

Исходный опорный план, построенный по правилу "северо-западного угла", обычно оказывается весьма далеким от оптимального, так как при его формировании не учитывается стоимость перевозок (величина c_{ij}). Более совершенным правилом является правило "минимального элемента".

2. ***Правило "минимального элемента"***

В методе "северо-западного угла" на каждом шаге потребность первого из оставшихся пунктов назначения удовлетворяется за счет запасов первого из оставшихся пунктов отправления. Очевидно, что выбор пунктов назначения и отправления целесообразно производить, ориентируясь на стоимость перевозок, а именно на каждом шаге следует выбирать какую-либо клетку, отвечающую минимальному тарифу (если таких клеток несколько, то следует выбирать любую из них), и рассматривать пункты назначения и отправления, соответствующие выбранной клетке.

Правило "минимального элемента" заключается в том, чтобы перевозить максимально возможные объемы из пунктов отправления маршрутами минимальной стоимости. Заполнение таблицы начинаем с клетки, которой соответствует наименьшая стоимость перевозки (элемент c_{ij}) из всей таблицы. Переменной этой клетки x_{ij} присваивается максимально возможное значение с учетом ограничений. Затем остаток по столбцу или строке помещается в клетку того же столбца или строки, которой соответствует следующее по величине значение c_{ij} и т. д. Иными словами, последовательность заполнения клеток определяется по величине c_{ij}, а помещаемая в этих клетках величина x_{ij} такая же, как и в правиле "северо-западного угла".

Нахождение опорного плана по этим двум процедурам будет выполнено в подразд. 3.3.

3. ***Метод аппроксимации Фогеля***

При определении оптимального плана транспортной задачи методом аппроксимации Фогеля на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце условий задачи. Среди указанных разностей выбирают максимальную. В строке (или столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф. Клетку, в которой он записан, заполняют на данной итерации.

Этот метод дает наилучшее начальное приближение, часто оказывающееся оптимальным планом.

Алгоритм решения транспортной задачи методом аппроксимации Фогеля следующий:

I этап. Определение начального допустимого плана.

1. Для каждой строки таблицы необходимо упорядочить элементы стоимости перевозок c_{ij} по возрастанию. Определить величину “штрафа” строки как разность значений второго и первого элемента в ранжированном ряду.

2. Для каждого столбца таблицы необходимо упорядочить элементы стоимости перевозок c_{ij} по возрастанию. Далее необходимо определить величину штрафа столбца.

3. Определить строку (или столбец), имеющую (имеющий) наибольший штраф по всем штрафам строк и столбцов, а в ней (в нем) — элемент с минимальной величиной стоимости перевозок c_{ij}. Зафиксировать индексы (i, j) этого элемента.

4. Присвоить наибольшее значение из допустимых (с учетом ограничений) переменной x_{ij}, индексы которой соответствуют шагу 3.

5. Скорректировать величины a_i и b_j и вычеркнуть строку i, если $a_i = 0$, или столбец j, если $b_j = 0$.

6. Проверить, все ли величины a_i и b_j равны нулю, если да, то окончить вычисления; в противном случае взять в качестве исходной оставшуюся часть таблицы и перейти к шагу 3.

Как правило, применение метода аппроксимации Фогеля позволяет получить либо опорный план, близкий к оптимальному, либо сам оптимальный план.

II этап. Определение вводимой в базис переменной ("метод потенциалов").

Отметим, что "метод потенциалов" эквивалентен принципу решения задачи линейного программирования и использованию условия оптимальности в симплекс-методе. Сначала находят опорный план транспортной задачи, а затем его улучшают до получения "оптимального плана". Содержание "метода потенциалов" заключается в следующем:

1. Каждой строке i и столбцу j транспортной таблицы ставится в соответствие числа u_i и v_j, называемые потенциалами. Они должны для каждой базисной переменной x_{ij} текущего решения удовлетворять условию $u_i + v_j = c_{ij}$. Эти условия приводят к системе, состоящей из $m + n - 1$ уравнений (так как имеется всего $m + n - 1$ базис-переменных), в которых фигурируют $m + n$ неизвестных. Значение потенциалов определяют из этой системы уравнений, придавая одному из них произвольное значение (например, $u_1 = 0$).

2. Определяются оценки $\overline{c}_{pq}$ для небазисных переменных в соответствии с соотношением:

$$\overline{c}_{pq} = u_p + v_q - c_{pq}.$$

3. Если все оценки $\overline{c}_{pq}$ неположительны, то найденное решение оптимально, в противном случае необходимо определить новую вводимую в базис переменную.

4. Вводимой в базис переменной является небазисная переменная, имеющая самую большую положительную оценку $\overline{c}_{pq}$.

Наиболее эффективным методом определения вводимой переменной является метод дифференциальных рент. Если при определении оптимального плана транспортной задачи методом потенциалов сначала находился какой-нибудь ее опорный план, а затем он последовательно улучшался, то при нахождении решения транспортной задачи методом дифференциальных рент сначала наилучшим образом распределяют между пунктами назначения часть груза (так называемое *условно оптимальное распределение)* и на последующих итерациях постепенно уменьшают общую величину нераспределенных поставок.

Первоначальный вариант распределения груза определяют следующим образом. В каждом из столбцов таблицы данных транспортной задачи находят минимальный тариф. Найденные числа заключают в кружки, а клетки, в которых стоят указанные числа, заполняют. В них записывают максимально возможные числа. В результате получают некоторое распределение поставок груза в пункты назначения. Это распределение в общем случае не удовлетворяет ограничениям исходной транспортной задачи. Поэтому в результате последующих шагов следует постепенно сокращать нераспределенные поставки груза так, чтобы при этом общая стоимость перевозок оставалась минимальной. Для этого сначала определяют избыточные и недостаточные строки.

Строки, соответствующие поставщикам, запасы которых полностью распределены, а потребности пунктов назначения, связанных с данными потребителями запланированными поставками, не удовлетворены, считаются недостаточными. Эти строки иногда называют также отрицательными. Строки, запасы которых исчерпаны неполностью, считаются избыточными. Иногда их называют также положительными.

После того как определены избыточные и недостаточные строки, для каждого из столбцов находят разности между числом в кружке и ближайшим к нему тарифом, записанным в избыточной строке. Если число в кружке находится в положительной строке, то разность не определяют. Среди полученных чисел находят наименьшее. Это число называется *промежуточной рентой*. После определения промежуточной ренты переходят к новой таблице. Эта таблица получается из предыдущей таблицы прибавлением к соответствующим тарифам, стоящим в отрицательных строках, промежуточной ренты. Остальные элементы остаются прежними. При этом все клетки новой таблицы считают свободными. После построения новой таблицы начинают заполнение ее клеток. Теперь уже число заполняемых клеток на одну больше, чем на предыдущем этапе. Эта дополнительная клетка находится в столбце, в котором была записана промежуточная рента. Все остальные клетки находятся по одной в каждом из столбцов и в них записаны наименьшие для данного столбца числа, заключенные в кружки. Заключены в кружки и два одинаковых числа, стоящих в столбце, в котором в предыдущей таблице, была записана промежуточная рента.

Поскольку в новой таблице число заполняемых клеток больше, чем число столбцов, то при заполнении клеток следует пользоваться специальным правилом, которое состоит в следующем. Выбирают некоторый столбец (строку), в котором имеется одна клетка с помещенным в ней кружком. Эту клетку заполняют и исключают из рассмотрения данный столбец (строку). После этого берут некоторую строку (столбец), в которой имеется одна клетка с помещенным в ней кружком. Эту клетку заполняют и исключают из рассмотрения данную строку (столбец). Продолжая так, после конечного числа шагов заполняют все клетки, в которых помещены кружки с заключенными в них числами. Если к тому же удается распределить весь груз, имеющийся в пунктах отправления, между пунктами назначения, то получают оптимальный план транспортной задачи. Если же оптимальный план не получен, то переходят к новой таблице. Для этого находят избыточные и недостаточные строки, промежуточную ренту и на основе этого строят новую таблицу. При этом могут возникнуть некоторые затруднения при определении знака строки, когда ее нераспределенный остаток равен нулю. В этом случае строку считают положительной при условии, что вторая заполненная клетка, стоящая в столбце, связанном с данной строкой еще одной заполненной клеткой, расположена в положительной строке.

После конечного числа описанных выше итераций нераспределенный остаток становится равным нулю. В результате получают оптимальный план данной транспортной задачи.

Описанный выше метод решения транспортной задачи имеет более простую логическую схему расчетов, чем рассмотренный выше метод потенциалов. Поэтому в большинстве случаев для нахождения решения конкретных транспортных задач с использованием электронно-вычислительных машин (ЭВМ) применяется метод дифференциальных рент.

III этап. Определение переменной, выводимой из базиса (построение цикла).

Процедура построения цикла эквивалентна использованию условия допустимости в симплекс-методе.

1. Строится замкнутый цикл, соответствующий вводимой переменной. Он состоит из последовательности горизонтальных и вертикальных связанных отрезков, концами которых должны быть базисные переменные (за исключением тех концов, которые относятся к вводимой в базис переменной). Для каждого базисного решения и соответствующей небазисной переменной можно построить лишь один цикл.

2. Нечетным вершинам цикла (начиная с вводимой в базис переменной) присваивается знак “+”, четным — “–” (будем называть эти клетки плюсовыми и минусовыми).

3. Определяется выводимая из базиса переменная, которой является одна из базисных переменных, расположенных в вершинах цикла, отмеченных знаком “-” и имеющих наименьшее значение.

4. Формируется новое допустимое базисное решение. Для этого переменные, находящиеся в вершинах цикла, соответствующим образом корректируются, а именно уменьшаются или увеличиваются на величину вводимой в базис переменной в зависимости от знака вершины цикла.

Описанный выше переход от одного опорного плана транспортной задачи к другому ее опорному плану называется сдвигом по циклу пересчета. Следует отметить, что при сдвиге по циклу пересчета число занятых клеток остается неизменным и равным $(n + m - 1)$.

Однако при определении опорного плана или в процессе решения задачи может быть получен вырожденный опорный план. Чтобы избежать зацикливания, следует соответствующие нулевые элементы опорного плана заменить сколь угодно малым числом ε и решать задачу как невырожденную. В оптимальном плане такой задачи необходимо считать $\varepsilon = 0$.

Пример 3.1. Найти квазиоптимальное решение транспортной задачи по методу Фогеля.

Матрица транспортной задачи представлена таблицей вида:

	B1: 30 т	**B2: 40 т**	**B3: 60 т**	**B4: 20 т**
A1: 90 т	(0,4)	(4,0)	(2,7)	(4,8)
A2: 35 т	(0,6)	(3,2)	(1,9)	(4,0)
A3: 25 т	(4,6)	(1,0)	(2,2)	(1,1)

В скобках в клетках таблицы представлены цены перевозок.

Найти план по методу Фогеля.

Решение

1. **Справка**

Поиск квазиоптимального решения транспортной задачи по алгоритму Фогеля включает выполнение следующих шагов:

a) Для каждой строки таблицы упорядочить элементы цен перевозок c_{ij} по возрастанию. Вычислить величину так называемого штрафа строки как разность значений второго и первого элемента в ранжированном ряду.

b) Для каждого столбца таблицы упорядочить элементы цен перевозок c_{ij} по возрастанию и вычислить величину "штрафа столбца" аналогично шагу 1.

c) Найти строку или столбец, имеющую (имеющий) наибольший штраф по всем штрафам строк и столбцов, а в ней (в нем) — элемент с минимальной величиной стоимости перевозок c_{ij}. Зафиксировать индексы (i, j) этого элемента.

d) Присвоить переменной x_{ij}, индексы которой соответствуют шагу c, наибольшее из допустимых для нее значений (с учетом ограничений задачи).

e) Скорректировать величины a_i и b_j и вычеркнуть строку i, если оказалось, что $a_i = 0$, или столбец j, если $b_j = 0$.

f) Проверить, все ли величины a_i и b_j равны нулю. Если да, то окончить вычисления; в противном случае взять в качестве исходной оставшуюся часть таблицы и перейти к шагу c алгоритма.

2. Вычисляем штрафы строк:

Ранжированные цены в строках:	Штрафы строк:
(0,4; 2,7; 4,0; 4,8)	2,3
(0,6; 1,9; 3,2; 4,0)	1,3
(1,0; 1,1; 2,2; 4,6)	0,1

3. Вычисляем штрафы столбцов:

Штрафы столбцов:	Разности штрафов столбцов:
(0,4; 0,6; 4,6)	0,2
(1,0; 3,2; 4,0)	2,2
(1,9; 2,2; 2,7)	0,3
(1,1; 4,0; 4,8)	2,9

4. Определяем максимальный штраф. Он составляет 2,9 и находится в четвертом столбце. Фиксируем элемент с наименьшей ценой перевозок в четвертом столбце: это элемент с координатами (3, 4).

5. Присвоим переменой x_{34} наибольшее из допустимых для нее значений 20.

6. Корректируем содержимое исходной таблицы, уменьшив запас на складе А3 на 20 т и вычеркнув четвертый столбец:

	В1: 30 т	**В2: 40 т**	**В3: 60 т**
А1: 90 т	(0,4)	(4,0)	(2,7)
А2: 35 т	(0,6)	(3,2)	(1,9)
А3: 5 т	(4,6)	(1,0)	(2,2)

7. Вычисляем штрафы строк:

Ранжированные цены в строках:	Штрафы строк:
(0,4; 2,7; 4,0)	2,3
(0,6; 1,9; 3,2)	1,3
(1,0; 2,2; 4,6)	1,2

8. Вычисляем штрафы столбцов:

Штрафы столбцов:	Разности штрафов столбцов:
(0,4; 0,6; 4,6)	0,2
(1,0; 3,2; 4,0)	2,2
(1,9; 2,2; 2,7)	0,3

9. Определяем максимальный штраф. Он составляет 2,3 и находится в первой строке. Фиксируем элемент с наименьшей ценой перевозок в первой строке: это элемент с координатами (1, 1).

10. Присвоим переменой x_{11} наибольшее из допустимых для нее значений 30.

11. Продолжая действовать таки образом, окончательно получим квазиоптимальный план перевозок:

	B1: 30 т	**B2: 40 т**	**B3: 60 т**	**B4: 20 т**
A1: 90 т	30	35	25	
A2: 35 т			35	
A3: 25 т		5		20

Можно проверить, что полученное решение оказалось оптимальным.

3.3. Практическое решение задачи оптимального планирования

Перевозки товаров различными транспортными средствами в ряде случаев приводят к таким нежелательным явлениям, как порожние пробеги, простои, встречные и нерациональные перевозки. Для их исключения используются методы оптимального планирования перевозок, в частности такая экономико-математическая модель, как транспортная задача.

Простейшим примером транспортной задачи является задача о планировании перевозок некоторого продукта из конечного числа пунктов отправления в конечное число пунктов назначения при обеспечении минимальных затрат на выполнение данной операции.

Постановку и методику решения подобных задач рассмотрим с использованием следующего примера:

Пример 3.2. Три поставщика некоторого товара располагают следующими запасами: первый — 120 единиц, второй — 100 единиц, третий — 80 единиц. Товар должен быть перевезен трем потребителям: спрос первого — 90 единиц; спрос второго — 90 единиц; спрос третьего — 120 единиц. Известны также показатели затрат (c_{ij}) на перевозку единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю.

Требуется составить оптимальный план перевозок, приводящий к наименьшим затратам на выполнение данной операции.

Под планом перевозок понимается матрица

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix},$$

в которой x_{ij} — количество единиц товара, планируемого к перевозке от поставщика с номером i к потребителю с номером j.

Для решения задачи исходные данные удобно свести в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Поставщики	**Возможности поставщиков**	**Потребители и их спрос**		
		1	**2**	**3**
		90	**90**	**120**
1	120	7	6	4
2	100	3	8	5
3	80	2	3	7

Каждую клетку таблицы пометим двойным индексом (i, j). Первый (i) — номер поставщика, второй (j) — номер потребителя.

В табл. 3.2. числа 7, 6, 4 и т. д. обозначают стоимости перевозок c_{ij}.

Математическая постановка данной задачи имеет вид:

найти минимум целевой функции (показателя эффективности)

$Z = 7x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} + 3x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + +2x_{31} + 3x_{32} + 7x_{33}$
при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = 120;\ \ \sum_{j=1}^{n} x_{2j} = 100;\ \ \sum_{j=1}^{n} x_{3j} = 80;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i1} = 90;\ \ \sum_{i=1}^{m} x_{i2} = 90;\ \ \sum_{i=1}^{m} x_{i3} = 120;\ \ x_{ij} \ge 0$$

Транспортная задача относится к классу задач линейного программирования. Решение таких задач обычно связано с получением опорного (допустимого) плана и последующим его улучшением.

Опорный план может быть получен различными методами. Рассмотрим два из них: *метод минимального элемента,* или *метод наименьших затрат* и *метод “северо-западного” угла.*

В соответствии с методом наименьших затрат выберем в таблице клетку, имеющую наименьший показатель затрат, т. е. клетку (3, 1). Произведем поставку в эту клетку, равную 80 единицам, поскольку первому потребителю требуется 90 единиц, а у третьего поставщика в наличии лишь 80 единиц. Первому потребителю необходимо еще 10 единиц товара. Он может получить их или от первого, или от второго поставщика. Так как показатель затрат в клетке (2, 1) меньше, чем в клетке (1, 1), то записываем 10 единиц в клетку (2, 1).

Второй поставщик, отдав 10 единиц, будет располагать 90 единицами. Их можно направить второму или третьему потребителю. В связи с тем, что показатель затрат в клетке (2, 3) меньше, чем в клетке (2, 2), направим их третьему потребителю. Недостающие 30 единиц третий потребитель получит от первого поставщика.

Оставшиеся у первого поставщика 90 единиц запишем в клетку (1, 2) и, тем самым, удовлетворим спрос второго потребителя.

На этом распределение можно считать законченным. Приведенную выше последовательность действий и результаты распределения иллюстрирует табл. 3.3.

Таблица 3.3

B_j		**2**	**6**	**4**	
Поставщики	**Возможности поставщиков**	**Потребители и их спрос**			**A_i**
		1	**2**	**3**	
		90	**90**	**120**	
1	120	7 2	6 — 90	4 + 30	0
2	100	3 + 10	8 7	5 — 90	1
3	80	2 — 80	3 + 6	7 4	0

Пример 3.3. Теперь решим задачу поиска опорного плана ***методом “северо-западного” угла.***

При этом методе не обращают никакого внимания на показатели затрат. Начав заполнение таблицы с клетки (1, 1) — “северо-западный” угол таблицы, последовательно ступенями спускаются вниз до клетки (3, 3). Полученный опорный план представлен в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Поставщики	**Возможности поставщиков**	**Потребители и их спрос**			A_i
		1	**2**	**3**	
		90	**90**	**120**	
1	120	7 90	6 30	4 3	0
2	100	3 9	8 60	5	2
3	80	2 11	3 10	7 80	4
B_j		7	6	3	

Получив опорный план, необходимо оценить соответствующую ему стоимость перевозок (показатель эффективности или целевую функцию). Для плана, полученного методом наименьших затрат, Z = 1300 ед. Во втором случае имеем 2050 ед.

Следующим этапом решения задачи, независимо от того, каким методом был найден опорный план, является последовательное его улучшение до получения оптимального распределения.

С этой целью каждому поставщику товаров поставим в соответствие потенциалы A_1, A_2, A_3 и запишем их в дополнительном столбце табл. 3.3; 3.4, а каждому потребителю — потенциалы B_1, B_2, B_3, которые запишем в дополнительной строке. Один из потенциалов, например A_1, приравняем к нулю, а остальные найдем с использованием зависимости (решение производится для первого опорного плана):

$$A_{ij} = A_i + B_j.$$

Запишем данное соотношение для всех заполненных клеток ($X_{ij} > 0$) и определим A_2, A_3, B_1, B_2, B_3. Для незаполненных клеток ($X_{ij} = 0$) запишем аналогичную зависимость

$$\overline{C}_{ij} = A_i + B_j,$$

левую часть которой принято называть *псевдостоимостью*.

Условие оптимальности плана заключается в том, что для каждой свободной клетки ($X_{ij} = 0$)

$$\overline{C}_{ij} < C_{ij}.$$

Найдем для свободных клеток разности $\hat{\Delta}_{ij} = C_{ij} - \overline{C}_{ij}$. Поскольку одна из разностей, соответствующая клетке (3, 2) табл. 3.3, отрицательна, то улучшение плана начинаем именно с нее.

Заметим, что если отрицательных разностей несколько, то первой выбирается клетка, для которой разность по абсолютной величине больше.

Догрузим клетку (3, 2), поставив в нее знак плюс (+), и составим цепь пересчета по правилу: цепь пересчета строится в виде прямоугольника, одна из вершин которого находится в свободной клетке (3, 2), а остальные — в занятых; все углы должны быть прямыми; в одной строке и в одном столбце не должно быть более двух вершин; всем вершинам приписываются чередующиеся знаки (плюс — догрузить, минус — разгрузить).

Из клеток со знаком минус (–) выбирается наименьшая величина груза min (80, 90, 90) = 80 и перемещается последовательно по клеткам построенной цепи: 80 единиц добавляются в клетки со знаком плюс и изымаются из клеток со знаком минус.

Таким образом, получаем новый план перевозок. Применив к нему рассмотренную выше методику, можно убедиться, что этот план является оптимальным.

Ниже приведена табл. 3.5, иллюстрирующая методику решения задачи (для опорного плана, полученного методом наименьших затрат):

Таблица 3.5

	90	90	120
120	7	6 − 10	4 + 110
100	3 − 90	8	5 − 10
80	2	3 + 80	7

В общем случае математическая постановка транспортной задачи имеет вид

$$\mathrm{W(x)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot \mathrm{x}_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = m_i; \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = n_j; x_{ij} \geq 0.$$

В рассмотренном примере

$$\sum_{i=1}^{m} m_i = \sum_{j=1}^{n} n_j,$$

т. е. возможности поставщиков равны суммарному спросу потребителей. Транспортные задачи подобного вида называют *закрытыми*. Задачи, для которых это условие не выполняется, представляют собой *открытые* задачи.

Для решения открытых задач их приводят к закрытому виду путем введения фиктивного поставщика или фиктивного потребителя с возможностями по поставке или спросом, определяемыми по формуле

$$\sum_{i=1}^{m} m_i = \sum_{j=1}^{n} n_j.$$

В остальном методика решения задачи остается неизменной.

Рассмотрим пример решения открытой задачи.

Пример 3.4. Пусть требуется найти оптимальное распределение поставок в следующей задаче:

найти минимум целевой функции (показателя эффективности)

$$W(x) = 4x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + \\ + 7x_{24} + 4x_{31} + 4x_{32} + 5x_{33} + 3x_{34}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = 40; \quad \sum_{j=1}^{n} x_{2j} = 60; \quad \sum_{j=1}^{n} x_{3j} = 90;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i1} = 45; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{i2} = 35; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{i3} = 55; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{i4} = 65;$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Введем фиктивного поставщика с возможностями по поставкам

$$\left|(45+35+55+65) - (40+60+90)\right| = 10.$$

Для этого исходную таблицу дополним фиктивной строкой и проведем первоначальное распределение поставок (табл. 3.6).

Таблица 3.6

	45	**35**	**55**	**65**
40	4	1 / 35	3 / 5	5
60	2 / 10	2	3 / 50	7
90	4 / 35	4	5	3 / 55
Ф(10)	0	0	0	0 / 10

Полученное распределение поставок неоптимально.

Выполнив по приведенной выше методике необходимые действия, можно установить, что для клетки (4, 3) разность Δ_{43}

отрицательна и среди отрицательных разностей наибольшая по абсолютной величине. Следовательно, улучшение плана следует начать именно с нее. Ниже приведена соответствующая цепь пересчета (табл. 3.7):

Таблица 3.7

	45	**35**	**55**	**65**
40	4	1 35	3 5	5
60	2 20	2	3 40	7
90	4 25	4	5	3 65
Ф(10)	0	0	0 10	0

Данная таблица уже не содержит отрицательных разностей Δ_{ij}. Следовательно, приведенное в ней распределение поставок — *оптимальное.*

В заключение отметим, что оптимизация перевозок может осуществляться не только по затратам, но также и по другим показателям, например времени. Кроме того, следует помнить о том, что задачи линейного программирования вообще и транспортная задача в частности в настоящее время решаются с использованием ЭВМ и соответствующего пакета прикладных программ для них.

3.4. Многопродуктовая транспортная задача

Многие задачи линейного программирования относятся к классу задач, которые называют распределительными, или λ — задачами (лямбда-задачами), а также обобщенными транспортными задачами. В терминах перевозок распределительную задачу можно сформулировать следующим образом: пусть имеются запасы МТС, сконцентрированные в пунктах отправления, причем в различных пунктах имеются различные виды запасов. Все эти запасы или часть их требуется доставить потребителям, причем для каждого потребителя указано количество запасов МТС. Расходы на перевозку МТС считаются известными. Задача заключается в нахождении плана перевозок, обращающего в минимум суммарные расходы на транспортировку.

Ранее рассматривалась транспортная задача, в которой фигурировал один вид МТС (один продукт). А как быть, если необходимо спланировать перевозку нескольких видов МТС (несколько продуктов)? Для решения данной задачи можно сформулировать два пути:

1. Сформировать по каждому виду перевозимых МТС свою транспортную задачу (однопродуктовую). Частные решения этих задач и будут представлять оптимальный план перевозок.

2. Сформировать одну (многопродуктовую) транспортную задачу.

Рассмотрим более подробно второй путь.

Пример 3.5. Для трех пользователей необходимо пополнить запасы бензина АИ–76 и АИ–92. Пополнение запасов может производиться из хранилища города (гор.) и области (обл.). Запасы и потребности бензина представлены в табл. 3.8 и 3.9. Возможности поставщиков (гор. и обл.) и спрос потребителей указаны в табл. 3.10.

Таблица 3.8

Бензин	**Склад гор.**	**Склад обл.**
АИ–76	40	60
АИ–92	20	30

Таблица 3.9

Бензин	**1 потр.**	**2 потр.**	**3 потр.**
АИ–76	25	45	30
АИ–92	15	35	—

Протяженность маршрутов представлена в табл. 3.10.

Таблица 3.10

Хранилище	1 потр.	2 потр.	3 потр.
Склад гор.	30	50	60
Склад обл.	100	90	120

В целях упрощения вычислений предположим, что $C_{ij} = L_{ij}$, где C_{ij} — стоимость перевозки между пунктами i и j; L_{ij} — протяженность маршрута между пунктами i и j.

Для того чтобы учесть многопродуктовый характер задачи, сформируем транспортную модель следующим образом. Вместо того чтобы рассматривать каждого поставщика как один исходный пункт, разобьем его на несколько пунктов в соответствии с количеством видов перевозимых горюче-смазочных материалов (ГСМ). Аналогично поступим и с пунктами назначения (потребителями). В результате для нашего примера получим 4 поставщика и 5 потребителей (рис. 3.2).

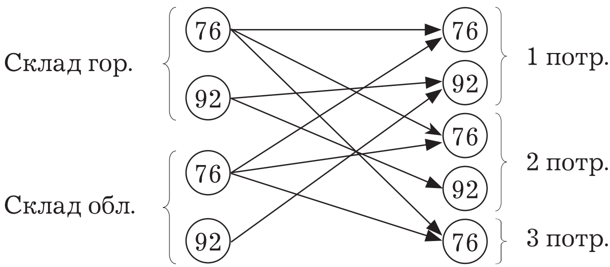


Рис. 3.2. Схема реализации многопродуктовой задачи

Заметим, что некоторые маршруты недопустимы, поскольку в данной постановке задачи не допускается взаимная компенсация различных марок бензина. Это необходимо учесть при построении транспортной таблицы, а именно запрещенным маршрутам приписывают очень высокую стоимость перевозки.

Транспортная таблица для многопродуктовой транспортной задачи в условиях нашего примера имеет следующий вид (табл. 3.11):

Таблица 3.11

Поставщик	**Потребитель**					**Продукт**	
	1 потр.		**2 потр.**		**3 потр.**	**АИ-76**	**АИ-92**
Склад гор.	3	М	5	М	6	40	20
	М	3	М	5	М		
Склад обл.	10	М	9	9	12	60	30
	М	10	М	М	М		
АИ-76	25		45		30		
АИ-92		15		35	—		

М — недопустимые маршруты

Данную транспортную таблицу можно разбить на несколько таблиц по видам продуктов (в нашем случае на две). Следует заметить, что с вычислительной точки зрения небольшие подзадачи решать проще, чем одну сложную. Но разбиение многопродуктовой модели на однопродуктовые можно осуществлять только в том случае, если нет взаимной связи между отдельными видами продуктов. Если такая связь существует, то многопродуктовую модель не удается столь просто разбить на однопродуктовые.

Пример 3.6. В условиях предыдущего примера предположим, что в 1 потр. возможна взаимная компенсация АИ–76 и АИ–92 на 10%, во 2 потр. — на 20%. При построении транспортной таблицы необходимо в 1-й и 2-й потр. добавить по одному потребителю, величины спроса которых определим из данных о процентном соотношении заменяемых видов ГСМ.

$$\text{1 потр.:}\quad \left.\begin{aligned} 25 \times 0{,}1 &= 2{,}5 \\ 15 \times 0{,}1 &= 1{,}5 \end{aligned}\right\} \quad \Sigma = 4;$$

$$\text{2 потр.:}\quad \left.\begin{aligned} 45 \times 0{,}2 &= 9 \\ 35 \times 0{,}2 &= 7 \end{aligned}\right\} \quad \Sigma = 16.$$

Σ — сумма спросов первого и второго потребителей.

Далее необходимо сформировать транспортную таблицу следующего вида (табл. 3.12):

Таблица 3.12

Поставщик		Потребитель							
Продукт		1 потр.			2 потр.			3 потр.	
		АИ-76	**АИ-92**	**АИ-76, АИ-92**	**АИ-76**	**АИ-92**	**АИ-76, АИ-92**	**АИ-76**	
Склад гор.	**АИ-76**	3	М	3	5	М	5	6	40
	АИ-92	М	3	3	М	5	5	М	20
Склад обл.	**АИ-76**	10	М	10	9	М	9	12	60
	АИ-92	М	10	10	М	9	9	М	30
		22,5	13,5	4	36	28	16	30	

3.5. Транспортная модель с промежуточными пунктами

В стандартной транспортной модели предполагается, что прямой маршрут между поставщиком и потребителем является маршрутом минимальной стоимости. Это означает, что определению стоимостей перевозок единицы продукта в стандартной транспортной модели должна предшествовать предварительная работа, связанная с выявлением кратчайших маршрутов (применяются математические методы нахождения кратчайшего пути).

Другой метод определения минимальной стоимости прямой перевозки связан с постановкой транспортной задачи как задачи с промежуточными пунктами. При этом допускается перевозка груза (частично или полностью) через другие поставщики или потребители транзитом, прежде чем он достигнет установленного потребителя. В задаче с промежуточными пунктами автоматически отыскивается маршрут минимальной стоимости между поставщиком и потребителем без предварительного определения кратчайшего маршрута.

Введение промежуточных пунктов дает возможность перевозить весь объем МТС от поставщиков через любого другого поставщика или потребителя. Это означает, что любую вершину транспортной сети (как исходный пункт, так и пункт назначения) можно рассматривать, как транзитный пункт. Поскольку априори неизвестно, какие вершины будут обладать этим свойством, можно сформулировать задачу таким образом, чтобы каждую вершину можно было рассматривать и как поставщика, и как потребителя. Другими словами, число поставщиков, так же как и число потребителей в задаче с промежуточными пунктами, равно сумме поставщиков и потребителей в стандартной задаче.

Пример 3.7. Рассмотрим задачу из примера 3.6 и сделаем поясняющий рисунок (при стоимости буфера В = 100) спроса или суммарных запасов стандартной транспортной задачи (рис. 3.3), т. е.

$$B \geq \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Стоимости в расчете на единицу груза оцениваются на основании данных о маршрутах. При этом очевидно, что коэффициент стоимости перевозки между первоначально заданными поставщиками и потребителями остаются такими же, как в стандартной транспортной модели. Необходимо заметить, что стоимость перевозки из некоторого пункта в него же равна нулю и стоимость перевозки может меняться в зависимости от направления движения.

В табл. 3.13 представлено оптимальное решение рассмотренной выше задачи с промежуточными пунктами, в которой емкость буфера равна 100.

Из таблицы видно, что диагональные элементы получены в результате использования буфера. Они не дают никакой информации об окончательном решении. Внедиагональные элементы обеспечивают получение решения, которое представлено на рис. 3.4.

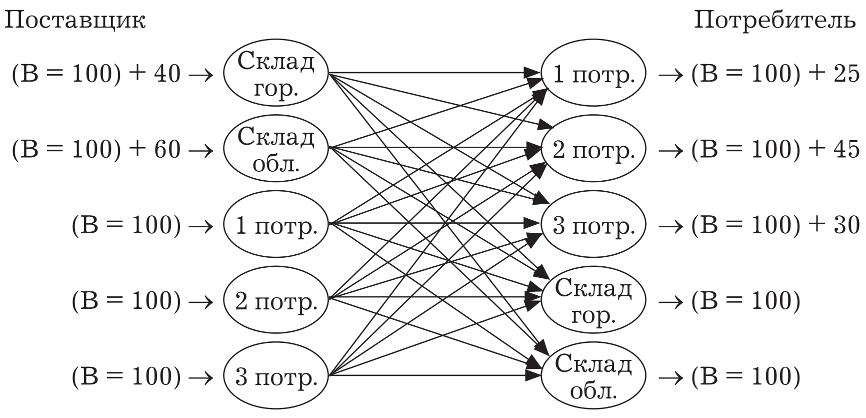


Рис. 3.3. Схема реализации

Таблица 3.13

	Склад города	**Склад области**	**Потребитель**			
			1 потр.	**2 потр.**	**3 потр.**	
Склад города	100		(40)			140
Склад области		100	0	(60)	2	160
1 потр.		0	85	(15)		100
2 потр.				70	(30)	100
3 потр.		2			100	100
	100	100	125	145	130	

Решение как однопродуктовой, так и многопродуктовой транспортных задач линейного программирования может быть проведено с использованием персональной электронно-вычислительной машины (ПЭВМ). Для этого необходимо подготовить исходные данные для пакета прикладных программ (ППП) ПЭВМ, ввести их и осуществить управление процессом реше-

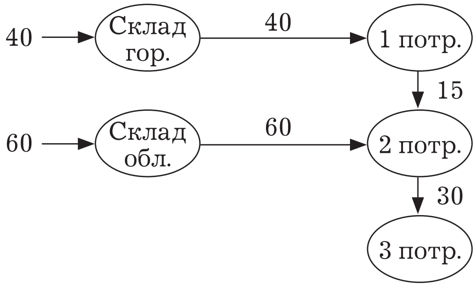


Рис. 3.4. Схема решения задачи

ния задачи, обеспечив выдачу необходимых результатов, по которым принимается решение.

Примеры для решения транспортных задач ЛП представлены в приложении 1.

4. ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

4.1. Экономическая и геометрическая интерпретации задачи нелинейного программирования

В общем виде задача нелинейного программирования состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$f\,(x_{1,}\, x_2, \ldots, x_n) \tag{4.1}$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} g_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i \;(i = \overline{1, k}\,), \\ g_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \;(i = \overline{k+1, m}\,), \end{cases} \tag{4.2}$$

где f и g_i — некоторые известные функции n переменных,

b_i — заданные числа.

В результате решения задачи должна быть определена точка $X^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n)$, координаты которой удовлетворяют соотношениям (4.2), и такая, что для всякой другой точки $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей условиям (4.2), выполняется неравенство $f(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n) \ge f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $[f(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n) \le \le f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$.

Если f и g_i — линейные функции, то данная задача является задачей линейного программирования.

Соотношения (4.2) образуют систему ограничений и включают в себя условия неотрицательности переменных, если такие условия имеются. Условия неотрицательности переменных могут быть заданы и непосредственно.

В евклидовом пространстве E_n система ограничений (4.2) определяет область допустимых решений задачи. В отличие от задачи линейного программирования она не всегда является выпуклой.

Один из наиболее мощных методов решения задач нелинейного программирования состоит в преобразовании задачи каким-либо образом к виду, допускающему применение симплексного алгоритма. Природа “преобразования”, с помощью которого нелинейная задача может быть приведена к форме, допускающей применение симплексного метода, очень сильно зависит от типа задачи. В некоторых случаях не требуется никакой предварительной аппроксимации, в других аппроксимация нужна. Однако эта аппроксимация может быть сделана сколь угодно точной (ценой увеличения объема вычислений).

Широко применяется *градиентный метод*. Он представляет собой итеративную процедуру, в которой переходят шаг за шагом от одного допустимого решения к другому так, что значение целевой функции улучшается. Однако в отличие от симплексного метода ЛП в нем не используется переход от одной вершины к другой. Вообще говоря, для сходимости к решению здесь требуется бесконечное число итераций.

В последнее время широкое применение нашли методы штрафных функций и барьеров. *Метод штрафных функций* аппроксимирует задачу с ограничениями задачей без ограничений с функцией, которая налагает штраф за выход из допустимой области.

Идея *метода барьеров* аналогична методу штрафных функций, однако аппроксимация здесь осуществляется “изнутри” допустимой области.

Если определена область допустимых решений, то нахождение решения задачи (4.1), (4.2) сводится к определению такой точки этой области, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня: $f(x_1, x_2, ..., x_n) = h$. Указанная точка может находиться как на границе области допустимых решений, так и внутри нее.

Процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования (4.1), (4.2) с использованием ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. Находят область допустимых решений задачи, определяемую соотношениями (4.2) (если она пуста, то задача не имеет решения).

2. Строят гиперповерхность $f(x_1, x_2, ..., x_n) = h$.

3. Определяют гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня или устанавливают неразрешимость задачи из-за неограниченности функции (4.1) сверху (снизу) на множестве допустимых решений.

4. Находят точку области допустимых решений, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня, и определяют в ней значение функции (4.1).

Пример 4.1. Найти максимальное значение функции

$$W(\mathrm{X}) = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \tag{4.3}$$

при условиях:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & \le & 24, \\ x_1 & + & 2x_2 & \le & 15, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \le & 24, \\ & & x_2 & \le & 4, \\ & & x_1, x_2 & \ge & 0. \end{array}\right. \begin{array}{r} \\ (4.4) \\ \\ \\ (4.5) \end{array}$$

Решение. Так как целевая функция (4.3) нелинейная, то задача (4.3)–(4.5) является задачей нелинейного программирования. Областью допустимых решений данной задачи является многоугольник $0ABC$ (рис. 4.1). Следовательно, для нахождения ее решения нужно определить такую точку многоугольника $0ABC$, в которой функция (4.3) принимает максимальное значение. Построим линию уровня $\mathrm{F} = \mathrm{x}_2 - x_1^2 + 6x_1 = h$, где h — некоторая постоянная, и исследуем ее поведение при различных значениях h. При каждом значении h получаем параболу, которая тем выше отдалена от оси $0x_1$, чем больше значение h (см. рис. 4.1). Значит, функция F принимает максимальное значение в точке касания одной из парабол с границей многоугольника $0ABC$. Координаты точки D можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13, \\ x_2 = 4. \end{cases} \tag{4.6}$$

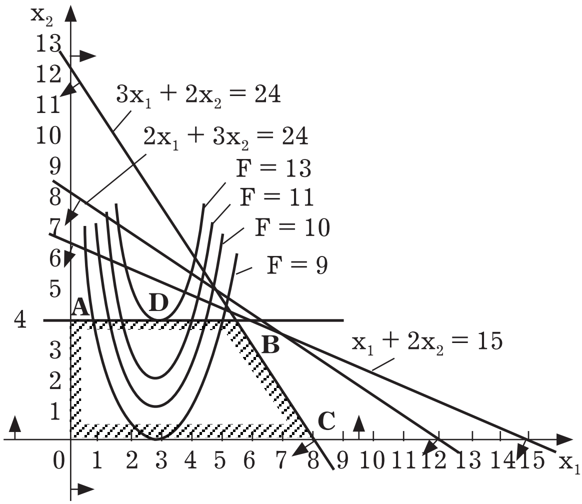


Рис. 4.1

Решая эту систему, получим $x_1^* = 3$; $x_2^* = 4$. Итак, $F_{max} = 13$ при $X^* = (3; 4)$.

Как видим, в задаче (4.3)–(4.5) точка максимального значения целевой функции не является вершиной многоугольника решений. Поэтому процедура перебора вершин, которая использовалась при решении задач ЛП, неприменима для решения данной задачи.

Пример 4.2. Найти максимальное и минимальное значения функции

$$W(X) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \tag{4.7}$$

при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12, \end{cases} \tag{4.8}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{4.9}$$

Решение. Областью допустимых решений задачи (4.7)–(4.9) является треугольник (рис. 4.2). Полагая значение целевой функции (4.7) равным некоторому числу h, получаем линии уровня, а именно окружности $(x_1 - 3)^2 + (x^2 - 4)^2 = h$ с центром E (3; 4) и радиусом $\sqrt{h}$. С увеличением (уменьшением) числа h значения функции F соответственно увеличиваются (уменьшаются).

Проводя из точки E окружности разных радиусов, видим, что минимальное значение целевая функция принимает в точке D, в которой окружность касается области решений. Для определения координат этой точки воспользуемся равенством угловых коэффициентов прямой $10x_1 - x_2 = 8$ и касательной к окружности в точке D. Из уравнения прямой $x_2 = 10x_1 - 8$ видим, что ее угловой коэффициент в точке D равен 10. Угловой же коэффициент касательной к окружности в точке D определим как значение производной функции x_2 от переменной x_1 в этой точке. Рассматривая x_2 как неявную функцию переменной x_1 и дифференцируя уравнение окружности, получим $2(x_1 - 3) + 2(x^2 - 4)x_2' = 0$, откуда $x_2' = -(x_1 - 2)/(x_2 - 4)$.

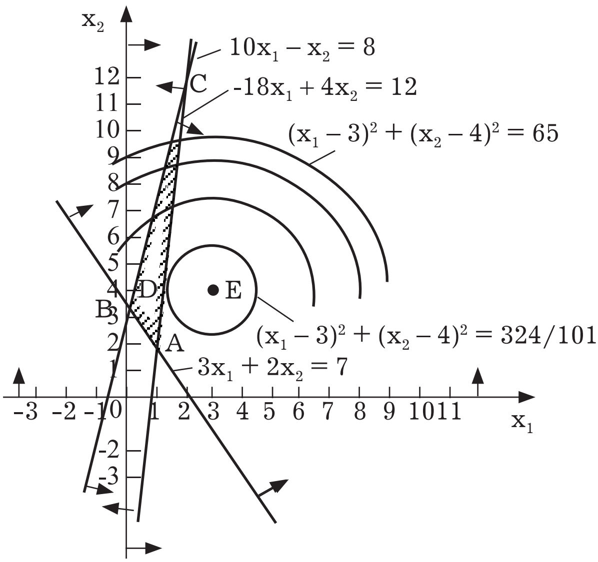


Рис. 4.2

Приравнивая найденное выражение числу 10, получаем одно из уравнений для определения координат точки E. Присоединяя к нему уравнение прямой, на которой лежит точка E, имеем систему

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 43, \\ 10x_1 - x_2 = 8, \end{cases}$$

откуда $x_1^* = 123/101$; $x_2^* = 422/101$. Таким образом, $F_{min} = (123/101 - 3)^2 + (422/101 - 4)^2 = 324/101$.

Как видно из рис. 4.2, целевая функция принимает максимальное значение в точке С (2; 12). Ее координаты определены путем решения системы уравнений прямых, на пересечении которых находится точка C. Таким образом, максимальное значение функции $F_{max} = 65$.

Пример 4.3. Найти максимальное и минимальное значения функции

$$W(X) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \qquad (4.10)$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \end{cases} \qquad (4.11)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \qquad (4.12)$$

Решение. Областью допустимых решений исходной задачи является многоугольник $ABCDE$ (рис. 4.3), а линиями уровня — окружности $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = h$ с центром E (4; 3) и радиусом $R = \sqrt{h}$.

Из рис. 4.3. видно, что целевая функция принимает минимальное значение в точке F (4; 3), а максимальное — в точке C (13; 10,5). Следовательно, $F_{min} = 0$ *и* $F_{max} = 137{,}25$.

Пример 4.4. Найти максимальное значение функции

$$W(X) = 3x_1 + 4x_2 \qquad (4.13)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 25, \\ x_1 x_2 \geq 4, \end{cases} \qquad (4.14)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \qquad (4.15)$$

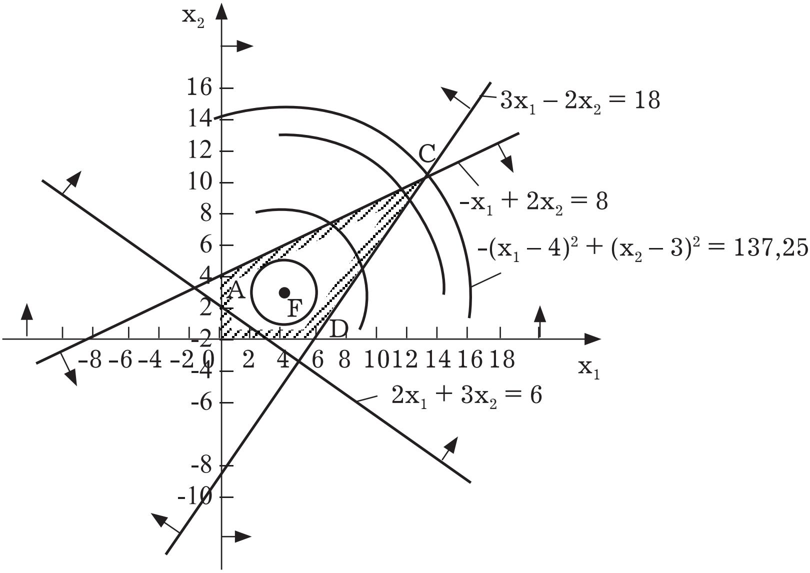


Рис. 4.3

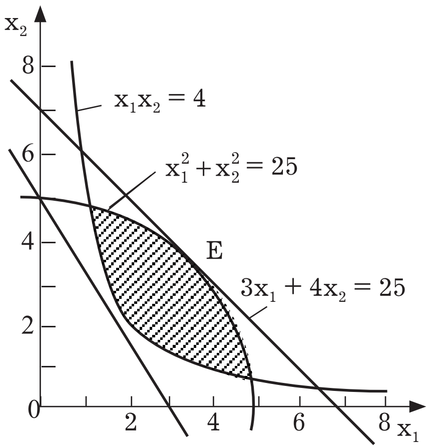


Рис. 4.4

Решение. Область решений задачи (4.13)–(4.15) изображена на рис. 4.4. На этом рисунке построены две линии уровня, представляющие собой прямые. Из рис. 4.4. видно, что максимальное значение целевая функция задачи принимает в точке E, в которой прямая касается окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$. Для определения координат точки E воспользуемся равенством угловых коэффициентов прямой $3x_1 + 4x_2 = h$ (где h — некоторая постоянная) и касательная к окружности в точке E. Рассматривая x_2 как неявную функцию переменной x_1, почленно дифференцируем уравнение окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$ и получим $2x_1 + 2x_2x_2' = 0$ или $x_2' = -x_1/x_2$.

Приравнивая найденное выражение числу $k = -3/4$, получаем одно из уравнений для определения координат точки E. В качестве второго уравнения возьмем уравнения окружности. Таким образом, для определения координат точки E имеем систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 25, \end{cases}$$

откуда $x_1^* = 4;\ \ x_2^* = 3$. Значит, $F_{max} = 3^2 + 4^2 = 25$.

4.2. Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим частный случай общей задачи нелинейного программирования (4.1), (4.2), предполагая, что система ограничений (4.2) содержит только уравнения, отсутствуют условия неотрицательности переменных и $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ — функции, непрерывные вместе со своими частными производными

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max\ (\min); \tag{4.16}$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i\ (i = \overline{1, m}). \tag{4.17}$$

В курсе математического анализа задачу (4.16), (4.17) называют задачей на условный экстремум, или классической задачей оптимизации.

Чтобы найти решение этой задачи, вводят набор переменных $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, называемых *множителями Лагранжа*, и составляют функцию Лагранжа

$$F(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2,...,\mathrm{x}_n,\ \lambda_1,\ \lambda_2,...,\lambda_m)=$$
$$=f(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,...,\mathrm{x}_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[b_i-g_i(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,...,\mathrm{x}_n)]. \qquad (4.18)$$

Находят частные производные $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}_j}\ (j=\overline{1,n})$ и $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \lambda_i}\ (i=\overline{1,m})$ и рассматривают систему $n+m$ уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{j}}=\dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{j}}-\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial \mathrm{g}_i}{\partial \mathrm{x}_j}=0\ \ (j=\overline{1,n}); \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \lambda_i}=\mathrm{b}_i-g_i(x_1,x_2,...,x_n)=0\ \ (i=\overline{1,m}) \end{cases} \qquad (4.19)$$

с $n+m$ неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mathrm{m}$.

Всякое решение системы уравнений (4.19) определяет точку $\mathrm{X}=(\mathrm{x}_1^0,\mathrm{x}_2^0,...,\mathrm{x}_\mathrm{n}^0)$, в которой может иметь место экстремум функции f $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Следовательно, решив систему уравнений (4.19), получают все точки, в которых функция (4.16) может иметь экстремальные значения. Дальнейшее исследование найденных точек проводят так же, как и в случае безусловного экстремума.

Таким образом, определение экстремальных точек задачи (4.16), (4.17) методом множителей Лагранжа включает следующие этапы:

1. Составляют функцию Лагранжа.

2. Находят частные производные от функции Лагранжа по переменным $\mathrm{x_j}$ и λ_i и приравнивают их нулю.

3. Решая систему уравнений (4.19), находят точки, в которых целевая функция задачи может иметь экстремум.

4. Среди точек, подозрительных на экстремум, находят такие, в которых достигается экстремум, и вычисляют значения функции (4.16) в этих точках.

Пример 4.5. По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий способом I затраты равны $4\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_1^2$ руб., а при изготовлении x_2 изделий способом II они составляют

$8x_2 + x_2^2$ руб. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.

Решение. Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \quad (4.20)$$

при условиях

$$x_1 + x_2 = 180, \quad (4.21)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (4.22)$$

Сначала найдем решение задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Областью допустимых решений исходной задачи является отрезок прямой *AB* (рис. 4.5), а линиями уровня — окружности с центром в точке *E* (–2; –4).

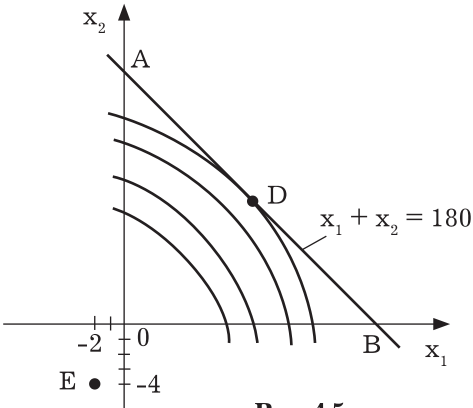


Рис. 4.5

Проводя из точки *E* окружности разных радиусов, видим, что минимальное значение целевая функция принимает в точке *D*. Чтобы найти координаты этой точки, воспользуемся тем, что угловой коэффициент к окружности $4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 = C$ в точке *D* совпадает с угловым коэффициентом прямой $x_1 + x_2 = 180$ и, следовательно, равен –1. Рассматривая x_2 как неявную функцию от x_1 и дифференцируя уравнение окружности, имеем

$$4 + 2x_1 + 8x_2' + 2x_2x_2' = 0 \text{ или } x_2' = -(2 + x_1)/(4 + x_2).$$

Приравнивая полученное выражение числу –1, получаем одно из уравнений для определения координат точки *D*. Присоединяя к нему уравнение прямой, на которой лежит точка *D*, имеем систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 180, \end{cases}$$

откуда $x_1^* = 91$; $x_2^* = 89$. Это означает, что если предприятие изготовит 91 изделие технологическим способом I и 89 изделий способом II, то общие затраты будут минимальными и составят 17 278 руб.

Решим теперь задачу, используя метод множителей Лагранжа. Найдем минимальное значение функции (4.20) при условии (4.21), т. е. без учета требования неотрицательности переменных. Для этого составим функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2).$$

Вычислим ее частные производные по x_1, x_2, λ и приравнивая их нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Перенося в правые части первых двух уравнений λ и приравнивая их левые части, получим

$$4 + 2x_1 = 8 + 2x_2, \text{ или } x_1 - x_2 = 2$$

Решая последнее уравнение совместно с уравнением $x_1 + x_2 = 180$, находим $x_1^* = 91$ и $x_2^* = 89$, т. е. получили координаты точки *D*, удовлетворяющим условиям (4.22). Эта точка является подозрительной на экстремум. Используя вторые частные производные, можно показать, что в точке *D* функция *f* имеет условный минимум. Этот результат и был получен выше.

Следует отметить, что такой же результат мы получим и в том случае, если исследование на условный экстремум функции *f* сведем к исследованию на безусловный экстремум функции f_1, полученной из *f* в результате ее преобразований. А именно: если из уравнения связи (4.21) найдем $x_2 = 180 - x_1$ и подставим это выражение в (4.20), то получим функцию одной переменной x_1:

$$f_1 = 4x_1 + x_1^2 + 8(180 - x_1) + (180 - x_1)^2.$$

Найдем стационарную точку этой функции из уравнения $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - 8 - 2\,(180 - x_1) = 0$, или $4x_1 - 364 = 0$, откуда $x_1^* = 91$; $x_2^* = 89$. Так же как и выше, устанавливаем, что в данной точке функция *f* имеет минимальное значение.

Пример 4.6. Найти точки экстремума функции $f = x_1^2 + x_2^2$ при условии $x_1 + x_2 = 5$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$F = (x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(5 - x_1 - x_2).$$

Найдем ее частные производные по x_1, x_2 и λ, приравняем их нулю. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 5 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \qquad (4.23)$$

Из первого и второго уравнений имеем $x_1 - x_2 = 0$. Решая это уравнение совместно с третьим из системы (4.23), находим $x_1 = 5/2$; $x_2 = 5/2$. Таким образом, в точке (5/2; 5/2) данная функция может иметь уловный экстремум. Чтобы определить, достигается ли в этой точке условный экстремум, нужно провести дополнительные исследования. В частности, используя вторые частные производные, можно показать, что в этой точке функция имеет условный минимум и $F_{min} = 25/2$.

Метод множителей Лагранжа можно применять и в том случае, когда условия связи представляют собой неравенства. Так, если требуется найти экстремум функции $z = f(X)$ при условии $g(X) \le b$, то сначала следует найти точки безусловного экстремума функции $z = f(X)$ из уравнений $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \ (k = \overline{1, n})$, затем среди этих точек отобрать те, координаты которых удовлетворяют условию связи $g(X) \le b$, и, наконец, определить точки, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_k} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_k} = 0 \, (k = \overline{1, n}), \\ g(X) = b. \end{cases}$$

Точки, найденные в результате решения этой системы, вместе с точками, определенными на первом этаже и удовлетворяющими условию $g(X) < b$, подлежат дальнейшему исследованию, как и при нахождении безусловного экстремума.

4.3. Задачи динамического программирования

Как известно, условия, в которых находятся экономисты и вообще люди, связанные с управлением производством и финансами, характеризуются непрерывно изменяющимися ситуациями, многообразными и взаимосвязанными факторами. Их приходится учитывать при *принятии решения* на любом уровне управления каким-либо экономическим процессом, т. е. *в динамике* (в развитии) этого процесса. Выбрать *образ действия* или *средство воздействия* надо для того, чтобы от *фактического* состояния перейти к *желаемому* или *цели*, но как осуществить такой переход зачастую бывает не ясно. Существующие варианты перехода называют *стратегиями*, которые характеризуются результатами, т. е. степенью достижения поставленной цели.

Принятие решения — процесс, итогом которого является выбор одной альтернативы (стратегии, управления) достижения цели из имеющихся. *Принять наилучшее решение* — значит выбрать оптимальную в каком-либо смысле стратегию (управление).

Для выбора оптимального управления в некотором классе задач применяется *метод динамического программирования* (МДП). В основе идеи метода лежит принцип оптимальности Беллмана. Название метода отражает возможность применения его к решению задач, где процесс, требующий оптимизации, развернут во времени. Однако он применим и к задачам, в которых время явно не присутствует, но они имеют подходящие свойства. Рассмотрим конкретный пример.

4.3.1. Задача об оптимальном распределении однородного ресурса

Предприятие может вложить деньги в количестве A = 500 условных единиц (у.е.) в модернизацию четырех производственных процессов P_1, P_2, P_3, P_4. Экономисты предприятия рассчитали, какова будет эффективность, если вкладывать 100, 200, 300, 400 или 500 у.е. денег в каждый из процессов по отдельности. Требуется распределить вложение средств между производственными процессами так, чтобы суммарная эффективность была максимальной.

Решение. Обозначим через x_i (где i= 1, 2, 3, 4) вложение средств в i-й процесс, а через $f_i = f_i(x_i)$, где i = 1, 2, 3, 4, — эффективность такого вложения. По условию задачи x_i может принимать значения 0, 100, ..., 500.

Для лучшего понимания решим эту задачу для конкретных значений $f_i = f_i(x_i)$, рассчитанных экономистами, а затем обобщим. Пусть известны четыре таблицы зависимости f_i от x_i, которые можно свести в одну (табл. 4.1):

В условиях данной задачи управлением или стратегией будет выбор значений x_1, x_2, x_3, x_4, которые можно записать в виде вектора $X = (x_1\ x_2, x_3, x_4)$. Вектор X часто называют *допусти-*

Таблица 4.1

x_i, i = 1, 2, 3, 4	$f_1(x_1)$	$f_2(x_2)$	$f_3(x_3)$	$f_4(x_4)$
100	40	60	50	70
200	60	80	100	130
300	80	100	120	160
400	100	150	150	180
500	140	170	180	210

мым решением, или планом. По условию задачи $\sum_{i=1}^{4} x_i = A$, так как только при полном вложении средств можно достигнуть максимальной эффективности. Целью поставленной задачи является поиск наибольшего значения функции (будем называть ее *целевой функцией*, или *критерием*) $f(X) = \sum_{i=1}^{4} f_i(x_i)$. Для обозначения такой цели в математике принято использовать формулу $f(X) \to \max$. Функция $f(X)$ не может принимать сколь угодно большие значения из-за условия $\sum_{i=1}^{4} x_i = A$, которое по этой причине называется *ограничением.* Итак, формально задача поставлена:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{4} f_i(x_i) \to \max \text{ при ограничении } \sum_{i=1}^{4} x_i = A.$$

В этом случае говорят, что составлена *математическая модель* экономической ситуации. Для того чтобы сориентироваться, рассмотрим различные “пробные” варианты вложения:

$X_1 = (0, 0, 0, 500)$ $\quad f(X_1) = 0 + 0 + 0 + 210 = 210,$
$X_2 = (0, 100, 0, 400)$ $\quad f(X_2) = 0 + 60 + 0 + 180 = 240,$
$X_3 = (0, 0,200, 300)$ $\quad f(X_3) = 0 + 0 + 100 + 160 = 260,$
$X_4 = (200, 100, 100, 100)$ $\quad f(X_4) = 60 + 60 + 50 + 70 = 240,$

и т. д.

Анализируя, например, последний план, видим по таблице, что 200 у.е., приходящиеся на P_3 и P_4 по 100 у.е. на каждый и дающие в сумме эффективность 50 + 70 = 120, выгоднее целиком вложить в P_4, так как $f_4(200) = 130$. Таким образом, план $X_5 = (200, 100, 0, 200)$, дающий эффективность $f(X_5) = 60 + 60 + 0 + 130 = 250$, лучше плана X_4. Переходя от плана к плану, видим, что стратегию можно каким-либо образом целенаправленно менять, увеличивая значение критерия. Назовем план $X^* = (x^*_1, x^*_2, x^*_3, x^*_4)$, на котором целевая функция достигает максимального значения, *оптимальным управлением*, *оптимальной стратегией*, или *оптимальным планом*. В основу решения данной задачи можно положить следующий довольно очевидный принцип:

если для всех процессов в задаче весь ресурс распределен оптимально, то и для части процессов приходящаяся на них при таком распределении доля ресурса также распределена оптимально.

В противном случае значение целевой функции можно увеличить, и найденное не будет максимальным. Сформулированный выше принцип является частным случаем общего *принципа оптимальности*, формулировка которого будет дана ниже. Вспомним, как мы перешли от X_4 к X_5: попытались оптимально распределить среди P_3 и P_4 их долю ресурса. Обозначим через $\varphi_i(x)$ *максимальную* эффективность производства при внесении средств в объеме x (доли) в i производственных процессов вместе, т. е. при $i = 1$ — в P_1, при $i = 2$ — в P_1 и P_2, при $i = 3$ — в P_1, P_2 и P_3 вместе и т. д. Эту величину можно назвать оптимальным значением *промежуточной целевой функции*, ведь для нее так же как и для целевой функции, ищется значение максимальной эффективности, но только при вложении определенной доли ресурса и при $i \neq 4$ только в часть процессов. Ясно, что эта доля для $i = 1, 2, 3$ может принимать значения от 0 до 500 с шагом 100, и лишь во все 4 процесса необходимо поместить весь ресурс — A у.е. денег. Таким образом, имеем

$$i = \overline{1,4}; \ \sum_{k=1}^{i} x_k.$$

Согласно терминологии, принятой при решении оптимизационных задач, будем называть оптимальное вложение какой-либо доли ресурса во все или часть процессов *состоянием системы*, или просто *состоянием*. Предположим, что задача решена и, исходя из этого, разобьем рассуждения на логические шаги. Получаем:

1 шаг

max $f(X) = \varphi_4(A)$, т. е. весь ресурс вложен оптимально во все процессы. (Конечно, возможны оптимальные вложения и других долей ресурса во все процессы, т. е. другие состояния на первом шаге, но они нас не интересуют). Исходя из принципа оптимальности, сформулированного выше, этот максимум следует искать среди всех возможных комбинаций вложения ресурса в процесс P_4 в объеме x_4 и оптимального вложения оставшейся доли ресурса, т. е. $A — x_4$, в остальные три процесса:

$$\varphi_4(A) = \max_{0 \le x_4 \le A} \{f_4(x_4 + \varphi_3(A - x_4))\}. \qquad (4.24)$$

Ясно, что этот максимум можно найти, если известны значения φ_3 для всех возможных значений аргумента, т. е. для $x = 0$, 100, 200, 300, 400, 500. Таким образом, чтобы узнать состояние системы на первом шаге, надо знать все возможные состояния на втором. Продолжим аналогичные рассуждения для получения значений φ_3.

2 шаг

Доля ресурса x, вложенная в P_1, P_2 и P_3, складывается из вложения в P_3 и совместного вложения в P_2 и P_1. Таким образом, для всех возможных значений этой доли мы должны определить максимум среди всех возможных комбинаций вложения ресурса в процесс P_3 в объеме x_3 и оптимального вложения оставшейся доли ресурса, т. е. $x - x_3$, в остальные два процесса:

$$\varphi_3(x) = \max_{0 \le x_3 \le x} \{f_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3)\}. \qquad (4.25)$$

Здесь x_3 может меняться от 0 до x с шагом 100, а доля x — от 0 до A с шагом 100.

3 шаг

По аналогии имеем:

$$\varphi_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le x} \{f_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)\}. \qquad (4.26)$$

4 шаг

Это последний шаг, так как ищется оптимальное вложение только в один производственный процесс — P_i, и вся доля x вкладывается только в него. Ясно, что может сложиться ситуация, когда в P_1 и P_2 вкладывается весь ресурс (это зависит от значений эффективности вложений в эти процессы), причем на долю P_1 может остаться любое допустимое количество ресурса. Таким образом, исходя из возможных состояний системы на предпоследнем шаге определим ее состояния на последнем. Имеем:

$$\varphi_1(x) = \max_{0 \le x_1 \le x}\{f_1(x_1)\}. \tag{4.27}$$

Здесь x_1 меняется от 0 до x с шагом 100, а доля x — от 0 до A с тем же шагом.

Из проведенных рассуждений видно, что решение надо искать, начиная с *последнего* шага, т. е. с построения таблицы $\varphi_1(x)$. Поскольку наибольшее значение $f_1(x_1)$ получается при наибольшем значении x_1, то значения $\varphi_1(x)$ будут равны $f_1(x_1)$ при x_1=x: $\varphi_1(x) = f_1(x)$. Продвигаясь последовательно от последнего шага к первому, будем для удобства вносить в соответствующую таблицу как значение $\varphi_i(x)$, так и значение (или несколько значений x_i, на котором достигается

$$\max_{0 \le x_i \le x}\{f_i(x_i) + \varphi_{i-1}(x - x_i)\}.$$

Это значение x_i назовем условно-оптималъным решением, или *управлением*, и обозначим x_i^0.

1. По формуле (4.27) строим таблицу максимальной эффективности вложения доли x в процесс P_1 $\varphi_1(x)$ и условно-оптимальных значений x_i^0, совпадающих на этом шаге со значениями x. При этом предполагается, естественно, что не вложенная в P_1 часть ресурса вкладывается в процессы $P_2 - P_4$ (табл. 4.2).

2. Проводим расчет максимальной эффективности вложения доли x в процессы P_1 и P_2 $\varphi_2(x)$ по формуле (4.26) и находим условно-оптимальные значения $x_2^0 = 0$.

$\varphi_2(0)$= 0 — средства не вкладываются, и отдачи нет; $x_2^0 = 0$.

При x = 100 эту долю можно распределить так: 0 — в P_2 и 100 — в P_1 или 100 — в P_2 и 0 — в P_1. При этом для формулы

Таблица 4.2

x	$\varphi_1(x)$	x_i^0
0	0	0
100	40	100
200	60	200
300	80	300
400	100	400
500	140	500

(4.26) значения $f_2(x_2)$ берем из табл. 4.1, а значения φ_1 для соответствующего значения аргумента — из табл. 4.2:

$$\varphi_2(100) = \max\begin{Bmatrix} 0+40 \\ 60+0 \end{Bmatrix} = 60, \qquad x_2^0 = 100.$$

При x = 200 эту долю можно распределить так: 0 — в P_2 и 200 — в P_1, или 100 — в P_2 и 100 — в P_1 или 200 — в P_2 и 0 — в P_1. При этом для формулы (4.26) значения $f_2(x_2)$, так же как и ранее, берем из таблицы 4.1, а значения φ_1 для соответствующего значения аргумента — из таблицы 4.2:

$$\varphi_2(200) = \max\begin{Bmatrix} 0+60 \\ 60+40 \\ 80+0 \end{Bmatrix} = 100, \qquad x_2^0 = 100.$$

Аналогично получаем

$$\varphi_2(300) = \max\begin{Bmatrix} 0+80 \\ 60+60 \\ 80+40 \\ 100+0 \end{Bmatrix} = 120, \qquad x_2^0 = 100 \text{ или } x_2^0 = 200.$$

$$\varphi_2(400) = \max\begin{Bmatrix} 0+100 \\ 60+80 \\ 80+60 \\ 100+40 \\ 150+0 \end{Bmatrix} = 150, \qquad x_2^0 = 400.$$

$$\varphi_2(500) = \max\begin{Bmatrix} 0 + 140 \\ 60 + 100 \\ 80 + 80 \\ 100 + 60 \\ 150 + 40 \\ 170 + 0 \end{Bmatrix} = 190, \quad x_2^0 = 400.$$

Внесем полученные результаты в таблицу для $\varphi_2(x)$ и x_2^0 (табл. 4.3).

Таблица 4.3

x	$\varphi_2(x)$	x_2^0
0	0	0
100	60	100
200	100	100
300	120	100, 200
400	150	400
500	190	400

3. Проводим расчет максимальной эффективности вложения доли x в процессы P_1, P_2 и P_3 $\varphi_3(x)$по формуле (4.25) и находим условно-оптимальные значения x_2^0. При этом для формулы (4.25) значения $f_3(x_3)$, так же как и ранее, берем из табл. 4.1, а значения φ_2 для соответствующего значения аргумента — из табл. 4.3.

$\varphi_3(0) = 0$; $x_3^0 = 0$.

$$\varphi_3(100) = \max\begin{Bmatrix} 0 + 60 \\ 50 + 0 \end{Bmatrix} = 60, \quad x_3^0 = 0.$$

$$\varphi_3(200) = \max\begin{Bmatrix} 0 + 100 \\ 50 + 60 \\ 100 + 0 \end{Bmatrix} = 110, \quad x_3^0 = 100.$$

$$\varphi_3(300) = \max\begin{Bmatrix} 50 + 100 \\ 100 + 60 \\ 120 + 0 \end{Bmatrix} = 160, \quad x_3^0 = 200.$$

$$\varphi_3(400)=\max\left\{\begin{matrix} 0\ +150 \\ 50\ +120 \\ 100+100 \\ 120+\ 60 \\ 150+\ \ 0 \end{matrix}\right\}=200,\quad x_3^0=200.$$

$$\varphi_3(500)=\max\left\{\begin{matrix} 0\ +190 \\ 50\ +150 \\ 100+120 \\ 120+100 \\ 150+\ 60 \\ 180+\ \ 0 \end{matrix}\right\}=220,\quad x_3^0=200 \text{ или } x_3^0=300.$$

Внесем полученные результаты в таблицу для $\varphi_3(x)$ и x_3^0 (табл. 4.4).

Таблица 4.4

X	$\varphi_3(x)$	x_3^0
0	0	0
100	60	0
200	110	100
300	160	200
400	200	200
500	220	200, 300

4. Проводим расчет максимальной эффективности вложения доли x в процессы P_1, P_2, P_3 и P_4 $\varphi_4(x)$по формуле (4.24). Как уже говорилось выше, такой расчет необходимо провести только для $x = A = 500$ у.е. денег, а условно-оптимальные значения x_4^0 будут совпадать с оптимальными x_4^*:

$$\varphi_4(500)=\max\left\{\begin{matrix} 0\ +220 \\ 70\ +200 \\ 130+160 \\ 160+110 \\ 180+\ 60 \\ 210+\ \ 0 \end{matrix}\right\}=290,\quad x_4^0=x_4^*=200.$$

Итак, получили, что максимальная эффективность вложения средств во все производства вместе составит 290 при вложении в P_4 доли $x_4^0 = 200$ у.е. Следовательно, на вложения в процессы P_1, P_2, P_3 останется 300 у.е. денег. По табл. 4.4 устанавливаем, что наиболее эффективное вложение доли $x = 300$ в эти процессы достигается при $x_3^0 = 200$. Это значение и будет оптимальным: $x_3^* = 200$. Далее, при таком распределении на процессы P_1 и P_2 останется 500 – 200 – 200 = 100 у.е. По табл. 4.3 находим, что наиболее эффективное вложение доли $x = 100$ в эти процессы достигается при $x_2^0 = 100$. Это значение и будет оптимальным: $x_2^* = 100$. Таким образом, доля вложения x_1 в оптимальном плане составит $x_1^0 = 0$. Оптимальный план $X^* = (0, 100, 200, 200)$ и эффективность при этом будет максимальной и составит 0 + 60 + 100 + 130 = 290.

Обобщим только что рассмотренную задачу. Пусть в m производственных процессов $P_1, \ldots, P_m$ вкладывается однородный ресурс (деньги, рабочая сила, время, и т. д.) в общем объеме A. Известны таблицы с некоторым шагом по x_i функций $f_i(x_i)$ "полезности" вложений в i-й процесс (i = 1, 2, ..., m). Требуется найти оптимальное распределение ресурса, т. е.

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) \to \max \text{ при ограничении } \sum_{i=1}^{m} x_i = A.$$

Согласно проведенным выше рассуждениям и принципу оптимальности, получим

$$\max f(X) = \varphi_m(A) = \max_{0 \le x_m \le A} \{f_m(x_m) + \varphi_{m-1}(A - x_m)\}. \quad (4.28)$$

$$\varphi_i(x) = \max_{0 \le x_i \le x} \{f_i(x_i) + \varphi_{i-1}(x - x_i)\}, \ i = m-1, \ldots, 2. \quad (4.29)$$

$$\varphi_1(x) = \max_{0 \le x_i \le x} \{f_1(x_1)\}. \quad (4.30)$$

Соотношение (4.29) называется *рекуррентным соотношением Беллмана* и соответствует принципу *оптимальности.* Смысл этой формулы таков: какое бы состояние на некотором шаге мы ни взяли, оптимальное управление на последующих шагах будет таким же, как если бы это состояние было начальным. Поставленная задача решалась с помощью *последова-*

тельной максимизации функции эффективности для любого допустимого значения аргумента. Метод последовательной максимизации и называют *методом динамического программирования*. Здесь он применен к задаче, в которой время явно не присутствует, но она разбивается на ряд последовательных шагов, которые можно, интерпретировать как различные моменты времени. Характеристика задач, к которым применим МДП, дается ниже.

4.3.2. О применимости метода динамического программирования

Скажем несколько слов о тех оптимизационных задачах, которые можно решать методом динамического программирования. Любую задачу максимизации функции нескольких переменных $f(X)$, где $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $X \in A$, всегда можно представить в виде последовательности задач максимизации по каждой переменной: сначала по x_1 с условием, что x_1 может принимать значения из некоторого множества R_1 затем по x_2, учитывая предыдущий шаг. Таким образом, значения, которые может принимать переменная x_2, зависят от значений переменной x_1, или, другими словами, каждому значению переменной x_1 соответствует некоторое множество допустимых значений x_2. Поэтому будем отмечать этот факт так: $x_2 \in R_2(x_1)$. Оптимизируя по переменной x_i с учетом предыдущего шага оптимизации, приходим к выводу, что каждому набору значений переменных $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$ соответствует некоторое множество допустимых значений x_i, т. е. $x_i \in R_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1})$.

Таким образом,

$$\max_{X \in A} f(X) = \max_{x_1 \in R_1,} \ \max_{x_2 \in R_2(x_1)} \ \ldots \ \max_{x_n \in R_n(x_1, ..., x_{n-1})} f(X);$$

Сложность состоит в том, что множества $R_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1})$ трудно определить. Они должны быть построены так, чтобы совокупность ограничений $x_1 \in R_1, x_2 \in R_2(x_1), x_n \in R_n(x_1, ..., x_{n-1})$ равнялась ограничению $X \in A$. К простейшим случаям, когда

R_i строятся легко и можно применять МДП, относятся задачи, в которых

1) целевая функция является *аддитивной,* т. е.

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \tag{4.31}$$

(в этой записи под $f_i(x_i)$ подразумевается значение величины, выражением которой является целевая функция, при конкретном значении x_i), и ограничения вида $x_i \in R_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$ могут быть представлены явно, например, так:

$$A = \left\{ X \mid \sum_{i=1}^{n} g_{ij}(x_i) \le b_j \right\}, \quad j = \overline{1, m};$$

2) справедлив принцип оптимальности. В общем виде он формулируется следующим образом: ***оптимальное управление (стратегия) обладает тем свойством, что любая его часть начиная с некоторого шага также является оптимальным управлением, т. е. каким бы путем мы не пришли к некоторому состоянию на некотором шаге, оптимальное управление на последующих шагах будет таким же, как если бы это состояние было начальным.***

Заметим, что в тех случаях, когда целевая функция (критерий) в первоначальной постановке не является аддитивной, то постановку задачи надо постараться видоизменить так, чтобы новый критерий стал аддитивным. Например, пусть

$$f(X) = f_1(x_1), f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$$

(такой критерий называют *мультиплексным*), тогда, прологарифмировав, получим

$$\ln f(X) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_i(x_i).$$

4.3.3. Алгоритм метода динамического программирования

Отметим сразу же: чтобы применить этот алгоритм в каждом конкретном случае, надо определиться с теми объектами, которые в нем упоминаются. Соответствующая терминология уже была введена ранее, но для облегчения понимания будем пояснять в скобках, что означает тот или иной момент для разобранной задачи. Для того чтобы реализовать этот алгоритм, надо убедиться, что задача может быть решена методом динамического программирования (для этого достаточно выполнения требований (4.24) и (4.25), а затем, исходя из принципа оптимальности, провести рассуждения, приводящие к формулам типа (4.28)–(4.30).

1. Задаем набор значений переменной, которая характеризует последний шаг рассуждений (в разобранной задаче — переменной x_1, используем формулу (4.30)), и возможные состояния системы на предпоследнем шаге (возможные оптимальные вложения в процессы P_1,P_2). Для каждого возможного состояния и каждого значения выбранной переменной вычисляем значение промежуточной целевой функции. Из них для каждого исхода предпоследнего шага (т. е. возможных оптимальных вложений в процессы P_1,P_2) выбираем оптимальные значение промежуточной целевой функции и соответствующее ему значение рассматриваемой переменной (условно-оптимальное) и заносим их в таблицу (может быть несколько равных оптимальных значений промежуточной целевой функции и несколько соответствующих им условно-оптимальных значений рассматриваемой переменной). В итоге должны получить таблицу, аналогичную табл. 4.2.

2. Переходим к новой переменной. На этом этапе пользуемся рекуррентным соотношением Беллмана, т. е. формулой, аналогичной формуле (4.29), но составленной для решаемой задачи. Рассматриваем все возможные значения очередной переменной при условно-оптимальных значениях ранее рассмотренных переменных. Оптимальное значение промежуточной целевой функции, фигурирующей в рекуррентном соотношении Беллмана, считываем из предыдущей таблицы. Среди всех полученных таким образом величин находим максимальную и заносим ее в таблицу, аналогичную табл. 4.3, как оптимальное значение промежуточной целевой функции, соответствующей рассматриваемой переменной, а значение этой переменной,

при котором достигается максимум, называем условно-оптимальным значением и также заносим в таблицу. Если рассматриваемая переменная характеризует 1-й шаг, то переходим к п. 3, иначе повторяем п. 2 для следующей переменной.

3. При заданном по условию задачи ограничении (*A* у.е. денег) для каждого возможного значения переменной, характеризующей 1-й шаг (в рассмотренной задаче — x_m), вычисляем значение целевой функции, выбираем максимальное и определяем значение рассматриваемой переменной, при котором этот максимум достигается. Может быть несколько равных максимальных значений целевой функции и несколько соответствующих значений переменной.

4. При известном оптимальном значении переменной, характеризующей предыдущий шаг, определяем исходные данные для следующего шага и по соответствующей таблице — оптимальное значение (значения) следующей переменной. Если эта переменная не характеризует последний шаг (в нашем примере — x_1), то повторяем п. 4 для следующей переменной, иначе переходим к п. 5.

5. Выписываем оптимальное решение (стратегию) и максимальное значение целевой функции.

Рассмотрим применение метода динамического программирования еще к одному виду оптимизационных задач и продемонстрируем при этом применение только что разобранного алгоритма.

4.3.4. Задача об оптимальной загрузке транспортного средства неделимыми предметами (задача о рюкзаке)

В самолет требуется погрузить четыре вида предметов массой P_1, P_2, P_3 и P_4 так, чтобы сумма эффективностей этих предметов (стоимость, например) была наибольшей. Грузоподъемность самолета W_1. V_1, V_2, V_3, V_4 — соответствующая эффективность каждого вида предметов.

Решение. Построим математическую модель данной ситуации. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — количество предметов 1, 2, 3 и

4-го видов соответственно. Планом или управлением будет вектор $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Эффективность предметов каждого вида составит $V_i x_i$, где $i = 1, 2, 3, 4$, а суммарная эффективность как раз и будет целевой функцией, или критерием:

$$f(X)= V_1x_1 + V_2x_2 + V_3x_3 + V_4x_4 \to \max. \qquad (4.32)$$

Ясно, что перегружать самолет нельзя, количество предметов является целым неотрицательным числом, и это влечет ограничения

$$\sum_{i=1}^{4} x_i P_i \le W, \quad x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}. \qquad (4.33)$$

Формулы (4.32), (4.33) и являются математической моделью данной ситуации. Турист, собираясь в поход, пакует свой рюкзак, исходя из его размеров, своих сил и “полезности” предметов. Первые две величины вызывают разумные ограничения, не позволяющие как угодно увеличивать суммарную полезность груза. Вот почему сформулированная задача называется еще задачей о рюкзаке.

Формула (4.32) говорит о том, что критерий в этой задаче — аддитивный (эффективность равна сумме эффективностей; здесь $f_i(x_i)$ из формулы (4.31) равны $V_i x_i$), формулы (4.33) указывают на достаточно простые ограничения, позволяющие находить множество допустимых значений одной из переменных, если известны другие. Теперь ответим на вопрос, справедлив ли для этой задачи принцип оптимальности. Допустим, что самолет загружен оптимально. В таком случае очевидно, что доля грузоподъемности, приходящаяся на предметы того или иного вида или нескольких, но не всех, видов, также используется оптимально. В противном случае критерий можно еще увеличить. Таким образом, данная задача удовлетворяет принципу оптимальности и для ее решения можно применить МДП.

Проведем рассуждения, аналогичные рассуждениям в задаче о капиталовложениях. Обозначим через $\varphi_i(x)$ максимальную эффективность при размещении предметов 1, 2, ..., i-го видов при общем их весе, не превосходящем x. Понятно, что размещая предметы всех четырех видов мы должны использовать грузоподъемность самолета полностью, т. е при $i = 4$ будем искать значение φ_4 при $x = W$. Учтем при этом, что, размещая x_4 предмета 4-го вида, мы используем для них x_4P_4 от общей грузоподъемности, а на остальные три вида остается $W - x_4P_4$. Ясно, что x_4P_4 не должно превышать W, поэтому количество предметов 4-го вида может принимать значения от нуля до $[W/P_4]$. Таким образом

$$\max f(X) = \varphi_4(W) = \max_{0 \le x_4 \le [W/P_4]} \{V_4x_4 + \varphi_3(W - x_4P_4)\}. \tag{4.34}$$

Размещая предметы не всех видов, мы должны получить значения максимальной эффективности для любой доли x от 0 до W. Поэтому

$$\varphi_i(x) = \max_{0 \le x_i \le [W/P_i]} \{V_ix_i + \varphi_{i-1}(W - x_iP_i)\}, \quad i = 3,2. \tag{4.35}$$

Соотношение (4.35) — рекуррентное соотношение Беллмана для данной модели.

И, наконец,

$$\varphi_1(x) = \max_{0 \le x_1 \le [W/P_1]} \{V_ix_i\}. \tag{4.36}$$

Для решения задачи реализуем алгоритм динамического программирования начиная с формулы (4.28) и придавая имеющимся фиксированным величинам конкретные значения. Пусть $W = 83$, $P_1 = 24$, $P_2 = 22$, $P_3 = 16$, $P_4 = 10$, $V_1 = 96$, $V_2 = 85$, $V_3 = 50$, $V_4 = 20$.

1. (п. 1 алгоритма ДП). При загрузке самолета предметами 1-го вида на их долю x теоретически может остаться любая часть грузоподъемности от 0 до 83 (так мы учитываем возможные состояния системы на предпоследнем шаге). В зависимости от этой доли переменная, характеризующая последний шаг, т. е. x_1, может принимать целый набор значений. Например, при $x = 20$ $x_1 = 0$, так как предмет 1-го типа весит 24, а при $x = 67$ x_1 может принять значения 0, 1, 2. Ясно, что в последнем случае максимальная эффективность достигается при $x_1 = 2$ и составляет $\varphi_1(67) = 96 \cdot 2 = 192$. Это значение x_1 будем считать условно-оптимальным для данного значения x и обозначать x_1^0.

Составим таблицу значений $\varphi_1(x)$ Для x от 0 до 83 с шагом 1, в которую будем вносить соответствующее x_1^0. Поскольку одно и то же значение $\varphi_1(x)$ и x_1^0 будем получать для целого промежутка значений x, то для краткости вместо нескольких строк в соответствующей графе таблицы укажем этот промежуток (табл. 4.5).

Таблица 4.5

x	$\varphi_1(x)$	x_1^0
0...23	0	0
24...47	96	1
48...71	192	2
72...83	288	3

2. (п. 2 алгоритма ДП). Переходим к переменной x_2, используя формулу (4.35) при $i = 2$, т. е. загружаем самолет оптимально предметами 1-го и 2-го видов:

$$\varphi_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le [x/22]} \{85x_2 + \varphi_1(x - 22x_2)\}.$$

Чтобы не загромождать изложение, покажем, как рассчитать $\varphi_2(x)$ только для некоторых значений доли грузоподъемности x, приходящейся на предметы 1-го и 2-го типов, а затем приведем всю таблицу $\varphi_2(x)$ целиком.

Например, при $x = 40$ x_2 может принимать значения только 0 или 1, так как $0 \le x_2 \le [40/22]$. Поэтому мы можем не брать предметов 2-го типа ($x_2 = 0$) и всю эту грузоподъемность использовать для предметов 1-го типа. По табл. 4.5 находим, что в этом случае максимальная эффективность ($\varphi_1(40)$) равна 96.

Если мы возьмем 1 предмет 2-го типа, то на долю предметов 2-го типа останется грузоподъемность $40 - 22 = 18$, и по табл. 4.5 находим, что в этом случае $\varphi_1(18) = 0$. Проведенные рассуждения отражает формула

$$\varphi_2(40) = \max \begin{Bmatrix} 85 \cdot 0 + 96 \\ 85 \cdot 1 + 0 \end{Bmatrix} = 96, \qquad x_2^0 = 0.$$

Далее, при $x = 71$ в силу существующих ограничений x_2 может принимать значения от 0 до $[71/22] = 3$, т. е. 0, 1, 2, 3.

Итак, мы можем не брать предметов 2-го типа ($x_2 = 0$) и эту грузоподъемность использовать для предметов 1-го типа. По табл. 4.5 находим, что в этом случае $\varphi_1(71) = 192$. Если мы возьмем 1 предмет 2-го типа, то на долю предметов 1-го типа останется грузоподъемность 71 – 22 = 49, и по табл. 4.5 находим, что $\varphi_1(49) = 192$. Эффективность такого размещения равна $85 \cdot 1 + 192 = 277$. Если мы возьмем 2 предмета 2-го типа, то на долю предметов 1-го типа останется грузоподъемность $71 - 22 \cdot 2 = 27$, и по табл. 4.5 находим, что $\varphi_1(27) = 96$. Эффективность такого размещения равна $85 \cdot 2 + 96 = 266$. Если мы возьмем 3 предмета 2-го типа, то на долю предметов 1-го типа останется грузоподъемность $71 - 22 \cdot 3 = 5$, и по табл. 4.5 находим, что в этом случае $\varphi_1(5) = 0$. Эффективность такого размещения равна $85 \cdot 3 + 0 = 255$. Следовательно, по формуле (4.35) получаем $\varphi_2(71) = 277$. Более компактно проведенные рассуждения выглядят так:

$$\varphi_2(71) = \max\begin{Bmatrix} 85\cdot 0+192 \\ 85\cdot 1+192 \\ 85\cdot 2+\ 96 \\ 85\cdot 3+\ \ 0 \end{Bmatrix} = 277, \qquad x_2^0 = 1.$$

Для всех возможных значений x получаем таблицу $\varphi_2(x)$ и x_2^0(табл. 4.6)

Таблица 4.6

x	$\varphi_2(x)$	x_2^0	x	$\varphi_2(x)$	x_2^0
0...21	0	0	48...65	192	0
22...23	85	1	66...67	255	3
24...43	96	0	68...69	266	2
44...45	170	2	70...71	277	1
46...47	181	1	72...83	288	0

3. (повторение п. 2 алгоритма ДП). При загрузке самолета предметами 1, 2 и 3-го видов для расчета значений $\varphi_3(x)$ используем формулу (4.35):

$$\varphi_3(x) = \max_{0 \le x_3 \le [x/16]} \{50x_2 + \varphi_2(x - 16x_3)\}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям п. 2, получаем таблицу $\varphi_3(x)$ и x_3^0(табл. 4.7)

Таблица 4.7

x	$\varphi_3(x)$	x_3^0	x	$\varphi_3(x)$	x_3^0
0...15	0	0	56...59	196	2
16...21	50	1	60...61	220	1
22...23	85	0	62...63	231	1
24...31	96	0	64... 65	242	1
32...37	100	2	66... 6 7	255	0
38...39	135	1	68...69	266	0
40...43	146	1	70...71	277	0
44...45	170	0	72...79	288	0
46...47	181	0	80...81	292	2
48...55...	192	0	82...83	305	1

4. (п. 3 алгоритма ДП). Наконец, по формуле (4.34) при заданном по условию задачи ограничении (4.28) находим значение $\varphi_4(x)$ при $x = W = 83$

$$\varphi_4(83) = \max_{0 \le x_4 \le [83/10]} \{20x_2 + \varphi_3(83 - 10x_4)\}.$$

$$\varphi_4(83) = \max \begin{Bmatrix} 20\cdot 0 + 305 \\ 20\cdot 1 + 288 \\ 20\cdot 2 + 231 \\ 20\cdot 3 + 192 \\ 20\cdot 5 + 100 \\ 20\cdot 6 + \ \ 85 \\ 20\cdot 7 + \ \ \ 0 \\ 20\cdot 8 + \ \ \ 0 \end{Bmatrix} = 308, \quad x_4^* = x_4^0 = 1.$$

Получим теперь остальные компоненты оптимального плана.

• (п. 4 алгоритма ДП). Определяем исходные данные для следующего шага: поскольку x_4^*=1, то на предметы 1, 2 и 3-го вида остается доля грузоподъемности, равная $W - x_4^*$ P=

$= 83 - 10 = 73$. По табл. 4.7 находим, что при таком значении грузоподъемности $x_3^0 = x_3^* = 0$, следовательно, на долю предметов 1 и 2 видов останется $W - x_4^* P_4 - x_3^* P_3 = 83 - 10 - 0 = 73$. Это исходные данные для следующего шага.

• (повторение п. 4 алгоритма ДП). По табл. 4.6 находим, что при таком значении грузоподъемности $x_2^0 = x_2^* = 0$ и на долю предметов 1-го вида останется $W - x_4^* P_4 - x_3^* P_3 - x_2^* P_2 = 83 - 10 - - 0 - 0 = 73$.

• (повторение п. 4 алгоритма ДП). При таких исходных данных на этом шаге по табл. 4.5 находим, что $x_1^0 = x_1^* = 3$.

• (п. 5 алгоритма ДП). Итак, $X^* = (3, 0, 0, 1)$ и $\max f(X) = f(X^*) = 3 \cdot 96 + 0 \cdot 85 + 0 \cdot 50 + 1 \cdot 20 = 308$.

4.3.5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.1. Решить задачу об оптимальном вложении однородного ресурса в объеме 800 у.е. в четыре производственных процесса, если известна эффективность вложения в каждый из процессов (табл. 4,8):

Таблица 4.8

x_i, i = 1, 2, 3, 4	$f_1(x_1)$	$f_2(x_2)$	$f_3(x_3)$	$f_4(x_4)$
100	40	60	50	20
200	60	80	100	70
300	80	100	120	130
400	100	150	150	160
500	140	170	180	180
600	170	200	200	210
700	200	220	240	240
800	220	250	250	270

Задача 4.2. Решить задачу об оптимальном вложении однородного ресурса в объеме 70 у.е. в пять производственных процессов если известна эффективность вложения в каждый из процессов (табл. 4.9):

Таблица 4.9

x_i, i = 1, 2, 3, 4	$f_1(x_1)$	$f_2(x_2)$	$f_3(x_3)$	$f_4(x_4)$	$f_5(x_5)$
10	30	50	20	10	40
20	40	70	30	30	70
30	60	80	50	50	80
40	70	90	70	70	90
50	80	110	80	90	100
60	100	120	100	110	110
70	130	160	110	120	140

4.4. Сетевое планирование и управление

Сложность задач, решаемых руководителями фирм и предприятий в условиях рыночной экономики, требует от них знания и умелого применения методов эффективного управления и контроля. Одним из таких методов является планирование и управление с использованием сетевых моделей. Сетевое планирование и управление (СПУ) предназначено для управления комплексом взаимосвязанных работ, требующих четкой координации действий многих исполнителей.

Целью СПУ является оптимизация плана выполнения работ. Содержательно СПУ является методикой решения определенного вида задач, состоящей из графических и контрольных приемов, обеспечивающих моделирование и оперативную корректировку планов выполнения различных работ.

Практика управления и экономические исследования показывают, что СПУ значительно сокращает время решения сложных управленческих задач.

Приведем пример.

Комплекс работ по переводу магазина на самообслуживание включает:

1) составление сметы;
2) приобретение оборудования;
3) подбор кадров;
4) монтаж оборудования;

5) подготовку кадров;
6) оформление торгового зала;
7) доставку товаров;
8) заказ и получение форменной одежды;
9) заказ и получение ценников;
10) выкладку товаров;
11) заполнение ценников;
12) открытие магазина.

Приведенный объем работ можно представить в виде сетевой модели (рис. 4.6), символом $\boldsymbol{p_i}$ обозначен номер работы из приведенного выше перечня.

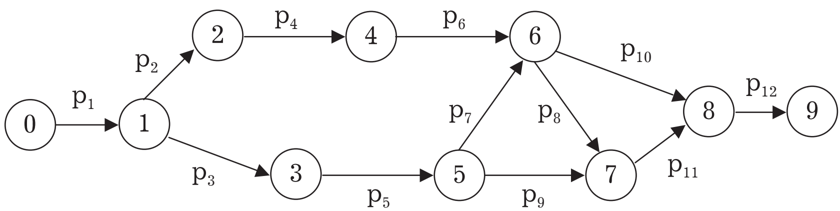


Рис. 4.6

Использование СПУ в данном конкретном случае позволило существенно уменьшить общую продолжительность работ. Основные преимущества СПУ перед другими методами планирования и управления отражены на схеме (рис. 4.7).

В настоящее время модели и методы СПУ широко используются при планировании и осуществлении строительно-монтажных работ, планировании торговой деятельности, составлении бухгалтерских отчетов, разработке торгово-финансового плана и т. д.

Последующее изложение требует введения ряда понятий и определений, а именно:

Сетевая модель — графическое изображение плана выполнения работ в виде ориентированного графа.

Граф — совокупность множества вершин и соединяющих их дуг (ребер).

Рис. 4.7

Ориентированный граф — граф, на котором все дуги помечены стрелками, что позволяет определить, какая из любой пары смежных вершин является конечной, а какая начальной.

Сетевая модель — ориентированный конечный граф, имеющий начальную и конечную вершину. Она может быть представленна в виде графа или таблици.

Два основных элемента сетевой модели — работа и событие.

Работа — процесс, требующий затрат ресурсов.

Фиктивная работа — связь между событиями без затрат ресурсов.

Ожидание — тоже работа, поскольку расходуется такой ресурс как время.

Событие — результат (промежуточный или конечный) выполнения одной или нескольких предшествующих работ.

Начальное событие — событие, не имеющее предшествующих событий.

Завершающее событие — событие, не имеющее последующих событий.

Путь — любая непрерывная последовательность (цепь) работ и событий.

Для построения сетевой модели большое значение имеет подготовительный этап работы. На этом этапе определяются перечень и последовательность выполнения работ, взаимосвязи исполнителей (работ), продолжительность выполнения отдельных работ, потребность в ресурсах, а также осуществляется вербальная (описательная) постановка задачи.

Вариант вербальной постановки задачи построения сетевой модели приведен ниже.

При ограничениях на ресурсы найти такой вариант организации заданного комплекса работ, который приводил бы к минимуму функции цели — времени выполнения комплекса работ.

Сетевые модели обычно изображают в виде графа, включающего вершины — события и соединяющие их дуги — работы. При этом используются следующие правила:

1. При вычерчивании сетевого графика работы располагают так, чтобы каждая работа следовала за теми, от которых она зависит.

2. События нумеруют слева направо и сверху вниз.

3. В сетевой модели не должно быть событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события.

4. В сетевом графике не должно быть событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа.

5. В сети не должно быть замкнутых контуров и петель, т. е. путей, соединяющих некоторые события с ними же самими.

6. Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой — стрелкой.

7. В сети рекомендуется иметь одно исходное и одно завершающее события.

Одно из важнейших понятий сетевого графика — понятие пути. Среди различных путей сетевого графика наибольший интерес представляет полный путь — любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец — с завершающим.

Наиболее продолжительный полный путь в сетевым графике называется критическим. Критическими называются также работы и события, расположенные на этом пути.

Основные временные параметры сетевого графика

Временные параметры сетевой модели рассмотрим с использованием табл. 4.10:

Таблица 4.10

№ п/п	Параметр	Обозначение	Примечание
1	Событие	I	Кодируется номером
2	Работа	(i, j)	Кодируется номерами событий, которые она связывает
3	Продолжительность работы	t(i, j)	
4	Продолжительность полного пути	t(L)	Любой путь, начало которого совпадает с исходным событием, а конец с завершающим
5	Ранний срок совершения события	$t_р(j) = \max_i [t_р(i) + t(i,j)]$	Ранний (ожидаемый) срок совершения события определяется продолжительностью максимального пути, предшествующего этому событию
6	Поздний срок совершения события	$t_п(i) = \min_j [t_п(j) - t(i,j)]$	Наиболее поздний (максимальный) срок наступления события, при котором еще возможно выполнение всех последующих работ в установленные сроки
7	Резерв времени события	$R(i) = t_п(i) - t_р(i)$	
8	Ранний срок начала работы	$t_{рн}(i, j) = t_р(i)$	
9	Ранний срок окончания работы	$t_{ро}(i, j) = t_р(i) + t(i, j)$	
10	Поздний срок начала работы	$t_{пн}(i, j) = t_п(j) - t(i, j)]$	

№ п/п	Параметр	Обозначение	Примечание
11	Поздний срок окончания работы	$t_{по}(i, j) = t_п(j)$	
12	Полный резерв времени работы	$R_п(i, j) = t_р(j) - t_р(i) - t(i, j)$	Показывает на сколько можно увеличить продолжительность данной работы, чтобы общий срок выполнения всего комплекса работ не изменился
13	Частный резерв времени работы первого вида	$R1(i, j) = t_п(j) - t_п(i) - t(i, j)$	На это время можно увеличить продолжительность данной работы, не изменяя позднего срока ее начального события
14	Независимый (свободный) резерв времени работы	$R_с(i, j) = t_р(j) - t_р(i) - t(i, j) = R_п(i, j) - R(j)$	На это время можно увеличить продолжительность данной работы, не изменяя раннего срока ее конечного события
15	Независимый резерв работы	$R_н(i, j) = t_р(j) - t_р(i) - t(i, j) = R_п(i, j) - R(i) - R(j)$	Образуется, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие работы начинаются в ранние сроки
16	Продолжительность критического пути	$T_{кр}$	Наиболее продолжительный полный путь
17	Резерв времени пути	$R(L) = t_{кр} - t(L)$	

Для иллюстрации приведенных положений рассмотрим следующий пример.

Пример 4.7. При разработке инвестиционного проекта выделено 12 событий:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 24 связывающие их работы: (0, 1), (0, 3), (0, 5), (1, 2), (1, 4), (1, 3), (2, 7), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 7), (4, 6), (5, 6), (5, 8), (5, 9), (6, 7), (6, 10), (6, 9), (6, 8), (7, 10), (8, 9), (9, 10), (9, 11), (10, 11).

Требуется построить сетевой график реализации проекта и оценить основные временные параметры полученной сетевой модели.

Сетевая модель в данном случае представляет собой граф, изображенный на рис. 4.8. Пусть продолжительности работ в рассматриваемом примере соответствуют числам, которыми помечены дуги (ребра) на графе рис. 4.8.

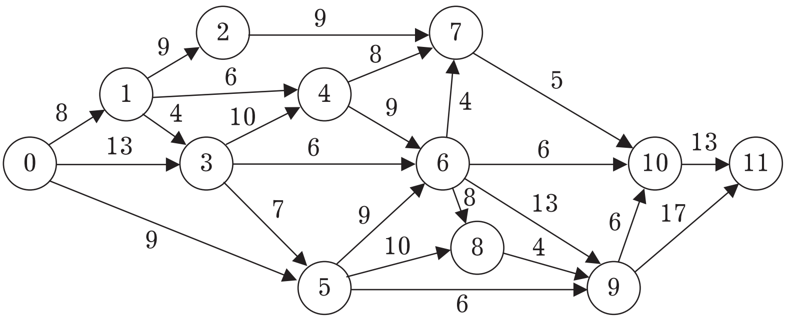


Рис. 4.8

Тогда основные временные параметры сетевого графика примут значения, приведенные в табл. 4.11–4.13.

Таблица 4.11

Номер события	Сроки наступления событий		Резерв времени
	$t_р(i)$	$t_п(i)$	R(i)
0	0	0	0
1	8	9	1
2	17	40	23
3	13	13	0

Окончание табл. 4.11

Номер события	**Сроки наступления событий**		**Резерв времени**
	$t_р(i)$	$t_п(i)$	$R(i)$
4	23	26	3
5	20	20	0
6	29	29	0
7	33	43	10
8	37	38	1
9	42	42	0
10	48	48	0
11	$t_{кр} = 61$	61	0

Таблица 4.12

№ п/п	**Работа (i, j)**	**t (i, j)**	$t_{рн}(i, j)$	$t_{ро}(i, j)$	$t_{пн}(i, j)$	$t_{по}(i, j)$
•	(0, 1)	8	0	8	1	9
•	(0, 3)	13	0	13	0	13
•	(0, 5)	9	0	9	11	20
•	(1, 2)	9	8	17	31	40
•	(1, 4)	6	8	14	20	26
•	(1, 3)	4	8	12	9	13
•	(2, 7)	9	17	20	40	43
•	(3, 4)	10	13	23	16	26
•	(3, 5)	7	13	20	13	20
•	(3, 6)	6	13	19	23	29
•	(4, 7)	8	23	31	35	43
•	(4, 6)	9	23	26	26	29
•	(5, 6)	9	20	29	20	29
•	(5, 8)	10	20	30	28	38
•	(5, 9)	6	20	26	36	42
•	(6, 7)	4	29	33	39	43
•	(6, 10)	6	29	24	43	48
•	(6, 9)	13	29	42	29	42
•	(6, 8)	8	29	37	30	38
•	(7, 10)	5	33	38	43	48
•	(8, 9)	4	37	41	38	42
•	(9, 10)	6	42	48	42	48
•	(9, 11)	17	42	59	44	61
•	(10, 11)	13	48	61	43	61

Таблица 4.13

№ п/п	Работа (i, j)	$R_п(i, j)$	$R_1(i, j)$	$R_с(i, j)$	$R_н(i, j)$
1	(0, 1)	1	1	0	0
2	(0, 3)	0	0	0	0
3	(0, 5)	11	11	11	11
4	(1, 2)	23	22	0	-
5	(1, 4)	12	11	9	8
6	(1, 3)	1	0	1	0
7	(2, 7)	23	0	13	-
8	(3, 4)	9	3	0	0
9	(3, 5)	0	0	0	0
10	(3, 6)	10	10	10	10
11	(4, 7)	12	9	2	-
12	(4, 6)	9	0	3	0
13	(5, 6)	0	0	0	0
14	(5, 8)	8	8	7	7
15	(5, 9)	16	16	16	16
16	(6, 7)	10	10	0	0
17	(6, 10)	14	14	14	14
18	(6, 9)	0	0	0	0
19	(6, 8)	1	1	0	0
20	(7, 10)	10	0	10	0
21	(8, 9)	1	0	1	0
22	(9, 10)	0	0	0	0
23	(9, 11)	2	2	2	2
24	(10, 11)	0	0	0	0

Следует заметить, что в случае несложных сетевых моделей результаты расчета временных параметров фиксируют прямо на графике (рис. 4.9)

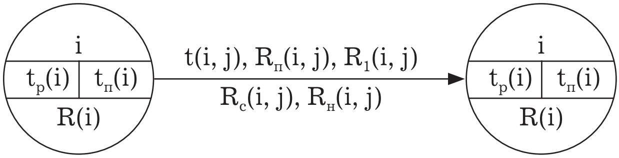


Рис. 4.9

Понятие об оптимизации сетевых графиков

Решение задачи оптимизации состоит в последовательном переносе средств, человеческих и других ресурсов с некритических работ на критические до тех пор, пока все работы не будут находиться на критических путях, т. е. не будут иметь резервов. При этом длительность всех путей становится равной.

На практике оптимизацию сетевых моделей осуществляют с учетом напряженности отдельных работ, которая оценивается коэффициентом напряженности

$$K_{н}(i,j)=\frac{t(L_{max})-t'(L_{кр})}{t_{кр}-t'(L_{кр})},$$

где $t(L_{max})$ — длительность максимального из некритических путей, проходящего через работу (i, j);

$t'(L_{кр})$ — продолжительность части критических работ, входящих в путь L_{max};

$t_{кр}$ — продолжительность критического пути.

Очевидно, $0 < К_{н}(i, j) < 1$. Чем ближе $К_{н}$ к единице, тем сложнее выполнить эту работу в установленные сроки.

Вычисленные значения коэффициентов напряженности позволяют классифицировать работы по зонам:

- критическая зона — $[К_{н}(i, j) > 0{,}8]$;
- подкритическая зона — $[0{,}6 < К_{н}(i, j) < 0{,}8]$;
- резервная зона — $[К_{н}(i, j) < 0{,}6]$.

С учетом изложенного оптимизация сетевого графика представляет процесс улучшения организации выполнения комплекса работ. Она проводится с целью сокращения длины критического пути, выравнивания значений коэффициентов напряженности работ, рационального использования ресурсов.

В первую очередь принимаются меры по сокращению продолжительности работ, находящихся на критическом пути.

Это достигается:

1) перераспределением всех видов ресурсов;

2) сокращением трудоемкости критических работ за счет их передачи на другие пути, имеющие резервы времени;

3) параллельным выполнением работ критического пути;

4) изменением состава и структуры работ.

У параллельно выполняемых работ можно смещать начала этих работ в пределах,установленных для них полных резервов. Если полный и свободный резервы равны, то начало работы (i, j) можно выбирать в любой точке отрезка $[t_p(i); t_n(j) - t(i, j)]$. В случае когда свободный резерв меньше полного, то начало работы (i, j) можно сместить от раннего срока наступления события i только в пределах отрезка $[t_p(i); t_p(j) + R_c(i, j)]$.

В процессе сокращения продолжительности работ критический путь может измениться, и в дальнейшем процесс оптимизации будет направлен на сокращение продолжительности работ нового критического пути. Так будет продолжаться до получения рационального результата.

4.5. Классические и современные методы теории игр

Предприниматель задумал проведение финансовой операции, которая принесет доход. Он уже достаточно грамотный в понимании того, что такое предпринимательский риск, и прекрасно понимает, что планы и жизнь — это большая разница. И он рассуждает так. Вначале нужно сделать все, чтобы выполнить необходимое условие отсутствие риска. Нужно представить себе классическую схему "ЕСЛИ-ТО...". Например: "Если сложится самое благоприятное сочетание неуправляемых внешних и внутренних факторов, то как я должен буду повести дело, как воздействовать на управляемые факторы экономического процесса, чтобы ничего не потерять и получить максимальную прибыль?"

Поразмыслив над этим вопросом, предприниматель наверняка найдет наилучшее для фиксированного комплекса условий решение. Для этого ему необходимо применить весь известный ему арсенал финансовых и экономических приемов снижения риска. В частности, например, известные эвристические правила хеджирования валютного риска требуют оперативно принимать и не спешить отдавать сильную валюту, а со слабой валютой поступать наоборот, производить закупки товаров и услуг в слабой валюте, а продажи — в сильной, стараться использовать форвардные и фьючерсные контракты и валютные опционы и т. п.

При выборе конкретного варианта действий из перечисленных следует иметь в виду, что опционы дают возможность воспользоваться благоприятной рыночной ситуацией, но фактически обменный курс будет выше курса использования опциона на величину опционной премии. И вообще операции с опционами — дело довольно сложное... И дело тут редко доходит до действительной поставки активов. Чаще проигравшая сторона оплачивает свой проигрыш деньгами. При этом американский опцион можно предъявить к исполнению в любой момент не позже определенной даты. Поэтому держатель такого опциона пребывает в постоянном напряжении: как поступить? а вдруг сейчас — самый выгодный момент? Но ведь и за саму возможность выбора наиболее выгодного момента американский опцион стоит дороже. Обо все этом нужно помнить, поскольку затраты нужно будет вычесть из дохода!

Формально оно может быть представлено так: если экономическая обстановка сложится в виде s_1, то необходимо применить наилучшую для такого случая стратегию a_1. Далее он рассуждает: "А если все сложится не так, как я представил себе в обстановке $\mathbf{s}_1$? — тогда моя стратегия $\mathbf{a}_1$ уже не будет наилучшим решением". Предприниматель делает естественный вывод: поскольку не ясно, какова будет реально сложившаяся в будущем обстановка, то и не ясно, чем может закончиться операция. Поэтому надо рассмотреть не один, а несколько сценариев развития событий, надо оценить не одну, а несколько возможных обстановок проведения экономической операции, подобрать не одну, а несколько стратегий для нее.

В результате глубоких размышлений, обращения к собственному опыту, советов со своими партнерами и экспертами предприниматель пришел к выводу о том, что в период проведения его экономической операции и по ее завершении, скорее всего, сложится только одна из возможных обстановок $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$, ..., $\mathbf{s}_\mathbf{n}$. Он обозначил множество этих возможных экономических условий через $\mathbf{S}$. Далее предприниматель на основе своего личного опыта, своих теоретических знаний, а также на основе советов специалистов сформировал под каждое конкретное условие $\mathbf{s}_j \in \mathbf{S}$ наилучшую экономическую стратегию $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, ..., $\mathbf{a}_\mathbf{m}$ и получил множество $\mathbf{A}$ стратегий. Таким образом, у него сформировалась матрица размером $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ возможных операционных ситуаций. Затем наступил этап экономических расчетов. Для каждой ситуации ($\mathbf{a}_i$, $\mathbf{s}_j$) рассчитали величины $\mathbf{y}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{доход}}$ — значение полезного эффекта (“доход”), который желательно максимизировать, и $\mathbf{y}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{затраты}}$ — значение негативного эффекта (“затраты”), который желательно минимизировать. В итоге для каждой ситуации ($\mathbf{a}_i$, $\mathbf{s}_j$) был определен результат $\mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j) = \mathbf{y}_{\mathbf{ij}} = (\mathbf{y}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{доход}} - \mathbf{y}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{затраты}})$, характеризующий величину чистой прибыли предпринимателя.

Теперь почти все необходимые данные для принятия решения на проведение экономической операции получены. Остается решить следующую задачу: если известны все ситуации ($\mathbf{a}_i$, $\mathbf{s}_j$) и все возможные результаты $\mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$ для них, то какую наилучшую стратегию $\mathbf{a}^*$ из возможных $\mathbf{A}$ стратегий следует применить в операции, чтобы результат оказался наилучшим?

В такой постановке задачу можно решить, если только мы сначала решим, что следует понимать под *словами “наилучший результат в условиях природной неопределенности”*. Из теории игр знаем, что такое гарантированный результат и на основании какого принципа он получен. Здесь можно увидеть полную аналогию с теорией игр. К слову, раздел теории принятия решений (ТПР), занимающийся решением задач принятия решений в условиях природной неопределенности, называют “игры с природой”. Название в большей степени историческое и обусловлено представлением о неопределенности ситуации как полностью враждебной. Но, тем не менее, оно уже дает ответ на вопрос: с чего начать анализ игры с природой? Ответ такой: с того же, с чего начинали анализ антагонистических и неантагонистических игр: с редуцирования матрицы игры, которое состоит в отбрасывании доминированных строк и столбцов.

Первые попытки разработки методического аппарата и методов анализа игр с природой восходят к началу 50-х гг. XX в. Все они могут быть отнесены к типу эвристических, поскольку авторы формировали эти подходы и методы на основе наблюдений за практическими ситуациями, а затем аппроксимировали результаты выбора в виде специальных принципов оптимальности. Каждый из этих принципов, хотя и бессистемно, учитывал какие-то особенности личности ЛПР.

Затем, вплоть до конца 80-х гг. XX в., практически не наблюдалось никаких изменений в методологическом подходе. Крупные экологические катастрофы и экономические потрясения, политические провалы начала 90-х гг. XX в. вновь заставили предпринимателей и политиков вновь потребовать от ученых вернуться к вопросам методологии. Нужно было на основе накопленных знаний сформировать новые представления о том, что такое "наилучшее решение" в условиях априорной неопределенности. Потребовалось с системных позиций выяснить, чем руководствуются в принятии решений наиболее успешные из бизнесменов, чем в настоящее время отличаются методы работы удачливых менеджеров больших финансовых систем. Не менее интересно, на что ориентируются проницательные биржевые аналитики, брокеры, риэлторы, работники диспетчерских служб аэропортов, операторы служб и систем охраны и лица других профессий, большинства из которых не было еще в середине 50-х гг. XX в. Оказалось, что часто перечисленные лица интуитивно чувствуют степень возможности того или иного исхода, даже могут описать эти чувства в терминах шансов. Иногда они ощущают меру риска через ожидание больших величин потерь или больших выигрышей. Иногда они субъективно стремятся застраховаться или, наоборот, попытаться уловить удачную конъюнктуру.

Особую роль в решении рисковых задач играют интуиция менеджера и инсайд. Интуиция представляет собой способность непосредственно, как бы внезапно, без логического продумывания находить правильное решение проблемы. Интуитивное решение как внутреннее озарение, просветление мысли, раскрывающее суть изучаемого вопроса. Интуиция является непременным компонентом творческого процесса. Психология рассматривает интуицию во взаимосвязи с чувственным и логическим познанием и практической деятельностью как непосредственное знание в его единстве со знанием опосредованным, ранее приобретенным. Инсайд — осознанное решение некоторой проблемы. Субъективно инсайд переживают как неожиданное озарение, постижение. В момент самого инсайда решение осознается очень ясно, однако эта ясность часто носит кратковременный характер и нуждается в сознательной фиксации решения.

Практическое использование классических методов анализа “игр с природой” оказалось затруднено именно в силу недостаточной проработанности вопросов, связанных с отождествлением того или иного из таких методов анализа решений с личностью ЛПР и его отношением к риску. При этом описания классических методов практически не содержали информации о том, какой из них более адекватно отражает те или иные особенности системы предпочтений ЛПР.

Таким образом, можно выделить два этапа развития методов и технологий для анализа решений в условиях природной неопределенности: классический этап и современный. По этой же причине все методы и технологии условно разделим на классические и современные, учитывающие несколько характеристик личности ЛПР.

Анализ всей доступной информации о том, какими соображениями руководствуются подобные ЛПР, когда они принимают ответственные решения в условиях, сходных с “природной” неопределенностью, позволил выдвинуть ряд гипотез о восприятии нестохастического риска. На основе таких гипотез затем были предложены критерии оценки характеристик личности ЛПР и сформированы технологии принятия решений в условиях “природной” неопределенности.

Изложение полученных результатов анализа решений в условиях подобного “механизма” риска проводится в рамках единой терминологии, поскольку, как оказалось, классические и, так сказать, современные методы “игр с природой” укладываются в единую методологическую схему. Наша цель — построение формальных моделей принятия решений, которые предприниматель может использовать на практике.

Введем понятие риска для случая природной неопределенности. Определим такой риск как “плату” за возможность получения наиболее благоприятного исхода в операции. Таким образом, в качестве наказания за принятие рискованного решения выступает угроза получения неблагоприятного исхода. В соответствии с таким определением риск можно оценивать, например, величиной разности между наиболее и наименее предпочтительными результатами для каждой из возможных стратегий. Можно также оценивать величиной разности между текущими результатами и уровнем притязаний. Напомним, что ранее под уровнем притязаний мы договорились понимать любой результат, достижение которого отождествляется в сознании ЛПР с конечным успехом. Например, уровень притязаний менеджеры часто расценивают как самый лучший результат из возможных при данных обстоятельствах. Брокеры иногда считают, что это некоторый вполне конкретный результат между худшим и лучшим при данных обстоятельствах или даже — любой не самый худший. Это, возможно, объясняется тем, что брокер “живет с продаж”, а за все риски, по сути, отвечает клиент.

Применительно к задачам принятия решений в условиях неопределенности можно ввести следующие характеристики отношения ЛПР к нестохастическому риску:

- *не склонное к риску* — ЛПР, которое опасается много проиграть и поэтому при оценке возможных стратегий в первую очередь обращает внимание на величины связанных с ними наихудших результатов; иными словами, если при анализе ситуаций и принятии решений предприниматель главное внимание сосредоточивает на величинах результатов, а среди них — только на значения неудовлетворительных исходов, то такой предприниматель, скорее всего, не склонен рисковать в условиях “природной” неопределенности;

- *склонное к риску* — ЛПР, которое боится мало выиграть и поэтому при оценке возможных стратегий в первую очередь обращает внимание или на величины связанных с ними наилучших результатов, или на величины потенциальных потерь; если при анализе ситуаций и принятии решений предприниматель главное внимание сосредоточивает на величинах наилучших из возможных результатов, а также стремится в обязательном порядке оценивать величины возможных сожалений, то это предприниматель, скорее всего, должен отнести себя к лицам, склонным к нестохастическому риску в “игре с природой”;
- *безразличное к риску* — ЛПР, которое придает одинаковый вес как наилучшим, так и наихудшим результатам, учитывая возможные промежуточные результаты; таким образом, если при анализе ситуаций и принятии решений предприниматель одинаково внимательно оценивает и очень плохие, и очень хорошие результаты, и величины сожалений для ситуаций, т. е. подвергает ситуации всестороннему взвешенному анализу, то этому предпринимателю, пожалуй, можно считать себя *взвешенно относящимся к “природному” риску*.

Итак, рассмотрим классические методики анализ “игр с природой” в рамках введенных допущений, определений и формальных обозначений. Напомним, что в каждой ситуации ($\mathbf{a}_i$, $\mathbf{s}_j$) игры предпочтительность исхода экономической операции оценивается предпринимателем скалярной величиной $\mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$ прибыли, которую он стремится максимизировать.

Предположим, что предприниматель рассматривает вопрос о поставке в следующем году партии определенного товара на рынок. Он понимает, что выгодность этой коммерческой операции зависит и от того, к какой стратегии интервенции на рынке аналогичных товаров он прибегнет, и от того, какой будет конъюнктура на рынке аналогичных товаров (объемы поставок, уровень спроса, время экспозиции товара на рынке, цена на единицу товара и др.). По заказу предпринимателя маркетинговая служба провела исследования перспектив рынка аналогичных товаров и выявила четыре его возможных состояния $\mathbf{s}_j \in \mathbf{S}$, различающихся по предпочтительности для продвижения собственных объемов товара и сопровождающих его услуг. С целью максимизации величины $\mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$ прибыли для каждого из этих возможных состояний рынка были разработаны четыре стратегии $\mathbf{a}_i \in \mathbf{A}$ продвижения товаров и услуг.

После этого предприниматель поставил задачу перед аналитическим департаментом предприятия оценить величины $\mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$ прибыли для каждого из возможных состояний $(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$. Результаты расчетов величин прибыли $\mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$ в рублях для каждой из стратегий торговли и всех состояний рынка аналогичных товаров представлены в табл. 4.14.

Таблица 4.14

Результаты расчетов величин прибыли $\mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$ для стратегий торговли и всех состояний рынка аналогичных товаров (руб.)

Стратегии торговли	Возможные состояния рынка аналогичных товаров и услуг			
	$\mathbf{s}_1$	$\mathbf{s}_2$	$\mathbf{s}_3$	$\mathbf{s}_4$
$\mathbf{a}_1$	32065	34980	20405	2915
$\mathbf{a}_2$	29150	20405	34980	8745
$\mathbf{a}_3$	11660	23320	17490	14575
$\mathbf{a}_4$	20405	40810	2915	20405

Предприниматель поставил руководителю аналитического департамента задачу вначале произвести оценку предпочтительности этой, достаточно компактной совокупности стратегий торговли. Затем на основании анализа полученных результатов служащим аналитического департамента надлежало разработать предложения для принятия решений. В этих предложениях должны были присутствовать базовые предпосылки, на основе которых были сделаны те ли иные выводы (т. е. информации о том, какую систему предпочтений аналитики заложили в модель принятия решений), а также практические выводы и конкретные рекомендации для принятия решений. Если ни одна из имеющихся альтернатив не будет признана наилучшей для принятия решений, то аналитическому департаменту совместно с маркетинговой службой надлежало разработать дополнительные варианты или предложить новые стратегии продвижения товара на рынке.

Получив задачу, начальник аналитического департамента решил вначале для оценки предпочтительности стратегий использовать классические критерии выбора. Для этого прежде всего требовалось описать характеристики личности ЛПР и его отношение к "природному" риску.

Для того чтобы продемонстрировать работу классических критериев, будем в нашем примере последовательно выдвигать гипотезу об этих элементах предпочтений ЛПР для принятия им предпринимательских решений.

Критерий Вальда. Таким критерием обычно руководствуется ЛПР, которое при выборе решения абсолютно не приемлет риск. ЛПР оценивает каждую из альтернатив $\mathbf{a_i} \in \mathbf{A}$ гарантированным для нее результатом $\mathbf{y}^{-}(\mathbf{a_i}): \min\limits_{\mathbf{s_j} \in \mathbf{S}} \mathbf{y}(\mathbf{a_i}, \mathbf{s_j})$, представляющим собой то худшее из возможного, хуже чего не будет для этой альтернативы ни при каких обстоятельствах. После этого наилучшей считают альтернативу $\mathbf{a}^*$, выбранную по уже знакомому нам принципу "лучшее из худшего":

$$\mathbf{a}^*: \max_{\mathbf{a_i} \in \mathbf{A}} \min_{\mathbf{s_j} \in \mathbf{S}} \mathbf{y}(\mathbf{a_i}, \mathbf{s_j}).$$

Другое название метода Вальда — "максиминный критерий" — обусловлено видом правой части формального выражения для него. В табл. 4.15 представлены гарантированные результаты для каждой стратегии в нашем примере и значение наибольшего гарантированного результата, равного 11660 руб. Это результат соответствует стратегии $\mathbf{a}_3$.

Предприниматель, который абсолютно не склонен к риску, считает себя крайним пессимистом, который уверен, что для него неуспех операции крайне нежелателен независимо от того, какими могут быть другие, благоприятные исходы, скорее всего, должен выбирать именно такой критерий принятия решений.

Таблица 4.15

Гарантированные результаты для стратегии

СТРАТЕГИИ ТОРГОВЛИ	**Характеристики стратегий по критерию Вальда**	
	Гарантированные результаты, руб.	**Наибольший гарантированный результат, руб.**
$\mathbf{a}_1$	2915	
$\mathbf{a}_2$	8745	
$\mathbf{a}_3$	11660	11660
$\mathbf{a}_4$	2915	

Если наш предприниматель именно такой, то ему следует присмотреться только к стратегии торговли $\mathbf{a}_3$ и для нее оценивать предпочтительность намеченного стратегического плана торговли. В зависимости от того, как сложится конъюнктура на рынке в будущем, эта стратегия может ему принести прибыль в размере или 11660 руб., или 23320 руб., или 17490 руб., или 14575 руб., но меньше, чем **11660** руб. не будет. Если такая картина предпринимателя устраивает, ему следует принять именно эту стратегию $\mathbf{a}_3$, поскольку она совсем не рискованная в смысле наибольшего гарантированного результата. Таким образом, доходчивость и логичность критерия Вальда, простота вычислений для принятия решения — это его достоинства. Однако, как известно, именно эти свойства критерия наибольшего гарантированного результата иногда превращаются в его самый значительный недостаток, если применять его формально. Для того чтобы показать, как это происходит, предположим, что матрица результатов содержит всего две строки и четыре столбца состояний “природы”, как это представлено в табл. 4.16

Таблица 4.16

Иллюстрация недостатка критерия Вальда

Стратегии	$\mathbf{s}_1$	$\mathbf{s}_2$	$\mathbf{s}_3$	$\mathbf{s}_4$
$\mathbf{a}_1$	0,99	1000	1000	1000
$\mathbf{a}_2$	1	1	1	1

Гарантированный результат в табл. 4.16 для стратегии $\mathbf{a}_1$ равен 0,99, а для альтернативы $\mathbf{a}_2$ он равен 1,0. Следовательно, формально по критерию Вальда наилучшей следует считать альтернативу $\mathbf{a}_2$. Но на самом деле, каждому понятно, что с точки зрения не формального, а практического бизнеса результаты 0,99 и 1,0 — это одно и то же. Поэтому формально получается, что мы выбираем стратегию, которая для всех связанных с ней ситуаций дает один и тот же результат. А вот для стратегии $\mathbf{a}_1$ практически такой же результат получается только в одной из связанных с ней ситуаций, а в остальных своих ситуациях эта стратегия на три порядка лучше, чем стратегия $\mathbf{a}_2$. И об этой формальной стороне критерия Вальда нужно постоянно помнить. Таким образом, этот критерий принимает во внимание только наихудшие значения для конкретной стратегии, а то, какие по величинам наилучшие результаты дает эта же стратегия, а также — сколько таких "лучших" результатов у нее — этот критерий вообще не принимает во внимание.

Критерий Сэвиджа. Это критерий ЛПР, склонного к риску, являющегося *крайним пессимистом.* В этом критерии используют не результаты $\mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$, а так называемое "сожаление" от неиспользованных возможностей. По замыслу автора величина сожаления вычисляется для каждой возможной ситуации как разность между наилучшим при данном состоянии природы результатом и всеми текущими для этого состояния. Обозначим "сожаление" в ситуации $(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$ через $\mathbf{z}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$. Тогда формальное выражение для величины сожаления в ситуации $(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$ выглядит следующим образом:

$$\mathbf{z}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j) = \max_{\mathbf{a}_i \in \mathbf{A}} \mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j) - \mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j),$$

т. е. из наилучшего результата $\max\limits_{\mathbf{a}_i \in \mathbf{A}} \mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$ для фиксированного состояния $\mathbf{s}_j$ природы вычитаем текущий результат $\mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$ для этого состояния, и эта разность характеризует величину недовольства, "сожаления" ЛПР своим необдуманным поступком. После того как для всех ситуаций сожаления вычислены, мы можем заменить матрицу $\|\mathbf{y}_{ij}\|$ результатов $\mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$ матрицей $\|\mathbf{z}_{ij}\|$

величин сожалений $\mathbf{z}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$. Получим матрицу сожалений для ситуаций нашего примера.

Предположим, предприниматель точно знает, что конъюнктура на рынке товара сложится в точности как в $\mathbf{s}_1$ состоянии “природы”. Он выберет наилучшую из его стратегий, чтобы получить наибольшую прибыль. Формально это означает, что нужно найти в столбце $\mathbf{s}_1$ наилучший результат. Применив эти рассуждения к исходным данным нашего примера, увидим, что наилучший результата 32065 руб. дает применение стратегии $\mathbf{a}_1$. А если предприниматель применит для этого же состояния рынка иную стратегию, например, $\mathbf{a}_2$, получит он ту же прибыль? Нет, прибыль составит всего 29150 руб., т. е. он потеряет 2915 руб. и будет сожалеть о своем нерациональном поступке. Следовательно, если мы вычтем из наилучшего результата в столбце $\mathbf{s}_1$ все остальные результаты этого же столбца, то мы получим для этого столбца величины $\mathbf{z}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$ сожалений в рублях. Нулевое по величине сожаление будет только для ситуации $(\mathbf{a}_1, \mathbf{s}_1)$. Затем так же можно вычислить сожаления и для остальных состояний рынка.

Матрица сожалений представлена в табл. 4.17.

Таблица 4.17

Результаты расчетов величин сожалений $\mathbf{z}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$ для торговли и всех состояний рынка аналогичных товаров

Стратегии торговли	Возможные состояния рынка аналогичных товаров и услуг			
	$\mathbf{s}_1$	$\mathbf{s}_2$	$\mathbf{s}_3$	$\mathbf{s}_4$
$\mathbf{a}_1$	0	5830	14575	17490
$\mathbf{a}_2$	2915	20405	0	11660
$\mathbf{a}_3$	20405	17490	17490	5830
$\mathbf{a}_4$	11660	0	32065	0

Далее Сэвидж предложил для оценки предпочтительности альтернатив проводить анализ так же, как в методе Вальда:

- для каждой альтернативы $\mathbf{a}_i$ получить оценку гарантированного, т. е. наибольшего сожаления:

$$z^{-}(a_i): \max_{s_j \in S} z(a_i, s_j);$$

• найти наилучшую альтернативу a^*, обеспечивающую ЛПР наименьшее гарантированное сожаление:

$$a^*: \min_{a_i \in A} \max_{s_j \in S} z(a_i, s_j).$$

В соответствии с записанным формальным правилом критерий Сэвиджа называют также критерием минимаксных сожалений.

В табл. 4.18 представлены значения гарантированных сожалений.

Таблица 4.18

Гарантированные сожаления для стратегий

СТРАТЕГИИ ТОРГОВЛИ	**Характеристики стратегий по критерию Сэвиджа**	
	Гарантированные сожаления, руб.	**Наименьшее гарантированное сожаление, руб.**
a_1	17490	17490
a_2	20405	
a_3	20405	
a_4	32065	

Что же мы видим? Наилучшей по критерию Сэвиджа является стратегия a_1! Это противоречит тому, что мы получили, когда использовали критерий Вальда. Не удивляет? — Не должно! Было бы гораздо больше подозрений, если бы оценки по столь разным критериям в результате совпали. Ведь эти критерии — для разных по своим устремлениям ЛПР: критерий Вальда для того, кто боится много проиграть, а критерий Сэвиджа для того, кто боится мало выиграть. Но, в принципе, разумеется, совпадения результатов применения разных критериев возможны.

Итак, поскольку теоретической основой обоих рассмотренных нами критериев является принцип наилучшего гарантированного результата (для критерия Вальда — сам результат, а для критерия Сэвиджа — сожаление) основные достоинства и недостатки у критерия Сэвиджа те же, что и у критерия Вальда. Но есть у критерия минимаксных сожалений и специфический недостаток. Дело в вычислении величин сожалений по ситуациям. Поэтому критерий Сэвиджа чувствителен к составу исходного множества альтернатив.

Пусть игра с природой моделируется матрицей, представленной в табл. 4.19.

Таблица 4.19

Матрица гипотетической игры с природой

Стратегии	s_1	s_2
$\mathbf{a}_1$	α	1000
$\mathbf{a}_2$	1	1

При этом пусть $0 < \beta < \alpha < 1$. Тогда сожаления для указанной матрицы результатов будут такими, как это отображено в табл. 4.20.

Таблица 4.20

Матрица сожалений гипотетической игры с природой

Стратегии	s_1	s_2
$\mathbf{a}_1$	$1 - \alpha$	0
$\mathbf{a}_2$	0	999

Наименьшие гарантированные сожаления, равные $1 - \alpha$, обеспечивает стратегия $\mathbf{a}_1$, которая и является наилучшей для рассматриваемого примера.

А теперь пусть число стратегий увеличили, и матрица рассматриваемой нами гипотетической игры (см. табл. 4.19) приобрела вид, представленный в табл. 4.21. Достаточно просто убедиться, что решение в подобной игре неустойчиво к добавленной “посторонней” альтернативе и зависит от того, останется ли она в числе стратегий ЛПР или нет.

Таким образом, эта матрица, представленная в табл. 4.19, получена из матрицы предыдущего примера с добавлением

Таблица 4.21

Матрица игры с природой, неустойчивой по отношению к “посторонней” альтернативе

Стратегии	s_1	s_2
$\mathbf{a}_1$	α	1000
$\mathbf{a}_2$	1	1
$\mathbf{a}_3$	1000	β

еще одной строки для стратегии $\mathbf{a}_3$. По матрице результатов с добавленной альтернативой вычислим значения сожалений. Они будут такими, какими они представлены в табл. 4.22.

Таблица 4.22

Матрица сожалений игры с природой, неустойчивой по отношению к “посторонней” альтернативе

Стратегии	s_1	s_2
$\mathbf{a}_1$	$1000 - \alpha$	0
$\mathbf{a}_2$	999	999
$\mathbf{a}_3$	0	$1000 - \beta$

Так что же получается? — Критерий Сэвиджа выделяет в качестве наилучшей стратегию $\mathbf{a}_2$, хотя, если по какой-либо причине стратегия $\mathbf{a}_3$ не сможет быть реализована, то наилучшей будет альтернатива $\mathbf{a}_1$, а $\mathbf{a}_2$ перестанет быть наилучшей. Таким образом, критерий Сэвиджа не обладает свойством независимости (устойчивости) от “посторонних” (дополнительных) альтернатив. Это очень важное помнить, если вы решите дополнять перечень уже имеющихся альтернатив какими-то новыми.

Критерий Гурвица. Критерий используют для следующих элементов системы предпочтений ЛПР: оно безразлично к риску и является *реалистом.* В качестве количественной характеристики для каждой стратегии предпринимателю рекомендуется использовать величину $\mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \gamma)$, которая формируется в виде линейной функции наихудшего (пессимистического) и наилучшего (оптимистического) для нее значений прибыли. Для этого используют специальный коэффициент пессимизма-оптимизма, называемый также *коэффициентом Гурвица*. Обозначим этот коэффициент через γ. Значения коэффициента выбирают из диапазона [0; 1] по правилу:

- $\gamma = 0$, если ЛПР считает, что состояние “природы” в операции будет самым благоприятным (оптимистический прогноз);
- $\gamma = 1$, если ЛПР считает, что состояние “природы” в операции будет самым неблагоприятным благоприятным (пессимистический прогноз);
- $0 < \gamma < 1$, если ЛПР считает, что состояние “природы” в операции будет не самым плохим, но и не самым благоприятным.

Каждую альтернативу оценивают взвешенным результатом вида:

$$\mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \gamma) = \gamma \min_{s_j \in \mathbf{S}} \mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j) + (\mathbf{1} - \gamma) \cdot \max_{s_j \in \mathbf{S}} \mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j).$$

Затем наилучшую альтернативу $\mathbf{a}^*$ отыскивают обычным порядком, т. е. максимизацией величин $\mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \gamma)$: $\mathbf{a}^*$: $\max_{a_i \in \mathbf{A}} \mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \gamma)$. Легко заметить, что если $\gamma = 0$, то модель выбора по критерию Гурвица отражает предпочтения ЛПР, руководствующегося правилом “все сложится самым удачным образом” (*крайний оптимист*); если $\gamma = 1$, то сразу получается критерий Вальда, который моделирует крайне пессимистичное отношение ЛПР к возможным условиям проведения операции.

Значение коэффициента γ может быть назначено ЛПР эвристически из интервала [0; 1] или это значение можно оценить с использованием специальных процедур, сходных с процедурами определения субъективных вероятностей.

Определим наилучшую по критерию Гурвица стратегию для нашего примера. В табл. 4.23 представлены значения линейной функции $\mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \gamma)$ Гурвица при значении коэффициента пессимизма-оптимизма γ, равного 0,2.

Таким образом, по критерию Гурвица наилучшей оказывается стратегия $\mathbf{a}_4$. Понятно, что наилучшим это решение может быть признано только тем предпринимателем, который считает себя

Таблица 4.23

Значения линейной функции $y(a_i, \gamma)$ Гурвица при $\gamma = 0{,}2$.

СТРАТЕГИИ ТОРГОВЛИ	Характеристики стратегий по критерию Гурвица	
	Величина $y(a_i, \gamma)$, руб.	Наибольшее значение результата по Гурвицу, руб.
a_1	28567	
a_2	29733	
a_3	20988	
a_4	33231	33231

нейтрально относящимся к риску в части осознания возможности получения как наилучших, так и наилучших результатов, т. е. *реалистом.* Кроме того, он считает, что возможности таких альтернативных исходов не одинаковы. Поэтому он придает больший вес оптимистичному исходу, а не пессимистичному. Причем эта его личная уверенность достаточно сильная, и поэтому значение величины γ — коэффициента пессимизма-оптимизма, называемого также *коэффициентом Гурвица,* составляет величину 0,2. Если бы предприниматель отдавал таким исходам одинаковый вес — принял бы $\gamma = 0{,}5$, — то получилось бы две оптимальной по Гурвицу стратегии, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_4$, а если бы он был более пессимистично настроен ($\gamma = 0{,}8$) — наилучшей оказалась бы стратегия $\mathbf{a}_3$.

Заметим, что критерий Гурвица может не различать явно различающиеся по предпочтительности стратегии в силу того, что каждой из них ставит в соответствие оценку, являющуюся линейной комбинацией только наихудшего и наилучшего результатов для альтернатив.

Поясним это на следующем примере. Пусть игра с природой описывается матрицей, представленной табл. 4.24.

Таблица 4.24

Матрица игры с природой, иллюстрирующая недостаток критерия Гурвица

Стратегии	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	0	0	1000	0
a_2	1000	999	999	0

Стратегии $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ существенно отличаются по предпочтительности. Так, у первой альтернативы только один ненулевой исход, а у второй их три (весьма значительные по величине). В то же время у них одинаковые наилучшие (равные 1000) и наихудшие (равные 0) результаты и, следовательно, по критерию Гурвица эти альтернативы эквивалентны. Но для практики, разумеется, вторая стратегия несомненно лучше первой.

Критерий Лапласа-Бернулли. Этот критерий для ЛПР, не склонного к риску и являющегося *реалистом.* В его основу положена концепция недостаточного основания Лапласа и принцип рандомизации, о котором мы также уже говорили. Согласно концепции недостаточного основания, если нет никаких оснований полагать, что какие-либо из **n** возможных состояний природы более возможны по отношению к другим, то их целесообразно полагать субъективно равновозможными, т. е. имеющими одинаковую $\mathbf{p(s_j) = \frac{1}{n}}$ субъективную вероятность появления. После этого, опираясь принцип рандомизации, считаем ситуацию случайной и применяем критерий наибольшего среднего результата. В итоге критерий Лапласа-Бернулли принимает вид:

$$\mathbf{a^*}\colon \max_{\mathbf{a_i \in A}} \mathbf{M_y(a_i)} = \max_{\mathbf{a_i \in A}} \sum_{\mathbf{s_j \in S}} [\mathbf{p(s_j) y(a_i, s_j)}] = \max_{\mathbf{a_i \in A}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{y(a_i, s_j)}.$$

Результаты расчетов величин средней субъективно ожидаемой прибыли для стратегий торговли представлены в табл. 4.25.

Таблица 4.25

Результаты расчетов величин средней субъективно ожидаемой прибыли для стратегий торговли

СТРАТЕГИИ ТОРГОВЛИ	**Характеристики стратегий по критерию Лапласа-Бернулли**	
	Величины средней субъективно ожидаемой прибыли, руб.	**Наибольшее значение величины средней субъективно ожидаемой прибыли, руб.**
$\mathbf{a}_1$	22591,25	
$\mathbf{a}_2$	23320	23320
$\mathbf{a}_3$	16761,25	
$\mathbf{a}_4$	21133,75	

Расчеты для исходных данных нашего примера показывают следующее: наилучшей по критерию недостаточного основания Лапласа-Бернулли наилучшей следует считать стратегию $\mathbf{a}_2$.

Для наглядности и в качестве промежуточного итога сведем результаты применения всех классических критериев в табл. 4.26, где наилучшая стратегия отмечена звездочкой в строке для соответствующей стратегии торговли.

Таблица 4.26

Результаты применения классических критериев

Стратегии торговли	Результаты применения классических критериев					
	Вальда	Сэвиджа	Гурвица			Лапласа-Бернулли
			$\gamma = 0,2$	$\gamma = 0,5$	$\gamma = 0,8$	
$\mathbf{a}_1$		*				
$\mathbf{a}_2$				*	*	*
$\mathbf{a}_3$	*					
$\mathbf{a}_4$			*	*		

А теперь в дополнение к рассмотренным классическим критериям несколько новых критериев принятия решений в условиях природной неопределенности. Первый шаг на этом пути — модификация классического критерия путем ослабления его очевидных недостатков.

Модифицированный критерий Гурвица. Основная идея модификации состоит в том, чтобы при оценке каждой альтернативы помимо наименее и наиболее предпочтительных результатов присутствовали бы и промежуточные. В итоге критерий принял вид:

$$\mathbf{a}^* : \max_{\mathbf{a}_i \in \mathbf{A}} \mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \gamma)$$

при ограничении $\dfrac{1}{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j) \geq \mathbf{y}^{\text{притяз}}$,

где $\mathbf{y}^{\text{притяз}}$ — установленный ЛПР уровень притязаний по среднему арифметическому из величин возможных результатов для альтернатив.

Предположим, что $\mathbf{y}^{\text{притяз}}$ = 22000 руб. При таком значении уровня притязаний только для первых двух альтернатив выполняется условие превышения средних арифметических значений результата над уровнем притязаний. Значения средних арифметических результатов составляют 22591,25 руб. и 23320 руб. соответственно. В этом легко убедиться, рассмотрев данные для результатов применения критерия Лапласа-Бернулли. Среди стратегий-претендентов наилучшим значением линейной функции Гурвица $\mathbf{y}(\mathbf{a}_i,\gamma)=\gamma\cdot\min\limits_{s_j\in \mathbf{S}}\mathbf{y}(\mathbf{a}_i,\mathbf{s}_j)+(\mathbf{1}-\gamma)\cdot\max\limits_{s_j\in \mathbf{S}}\mathbf{y}(\mathbf{a}_i,\mathbf{s}_j)$ обладает вторая стратегия (28567 руб. у первой стратегии и 29733 руб. у второй). Таким образом, $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}_2$.

Модифицированный критерий Сэвиджа. При модификации введено расширенное толкование понятия “сожаление”. Если субъектом движет желание коренным образом изменить ситуацию, добиться существенного выигрыша в ней, пусть даже ценой каких-то потерь, то “риск” — просто плата за возможность получения наиболее благоприятного исхода в операции, а “сожаление” — мера подобно трактуемого риска. В результате, в дополнение к классическому понятию “сожаления” предложено измерять его также и величиной разности между уровнем притязаний и текущим результатом. Поэтому вполне возможно, что могут быть получены “сожаления” как со знаком плюс, так и со знаком минус. Иными словами, отрицательное сожаление означает “значительный успех”, выраженный в превышении полученного результата над выбранным уровнем притязаний. А далее все просто: использован тот же подход, что и в модифицированном методе Гурвица — введено понятие “уровень притязаний по сожалениям”. Обозначим эту величину через $\mathbf{z}^{\text{притяз}}$. В итоге такой модификации получаем критерий следующего вида:

$$\mathbf{a}^*:\min_{a_i\in \mathbf{A}}\max_{s_j\in \mathbf{S}}\mathbf{z}(\mathbf{a}_i,\mathbf{s}_j)$$

при ограничении $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum\limits_{j=1}^{n}\mathbf{z}(\mathbf{a}_i,\mathbf{s}_j)\le \mathbf{z}^{\text{притяз}}$.

Пусть в рамках рассматриваемого нами примера $\mathbf{z}^{\text{притяз}}$ = = 9000 руб., т. е. при сожалениях, не превышающих 9000 руб., предприниматель готов рассматривать кандидатов на звание лучшей стратеги. Оказывается, что среднее арифметическое значений сожалений для стратегий только в одном случае удовлетворяет уровень притязаний по величинам сожалений. Только для стратегии $\mathbf{a}_2$ величина среднего арифметического ее сожалений составляет 8745 руб., а у трех остальных стратегий эта величина выше порогового значения в 9000 руб. Поэтому у предпринимателя нет выбора — перед ним дилемма: или он будет руководствоваться стратегией $\mathbf{a}_2$, или ему предстоит расширить множество альтернатив и при этом постоянно помнить, к чему может привести добавление “посторонних” альтернатив.

Разумеется, это не все модификации классических методов, а лишь их часть.

Однако имеются новые критерии, позволяющие напрямую оперировать предложенными формальными характеристиками личности ЛПР.

Критерий субъективно средних результатов соответствует предпочтениям ЛПР, *не склонного к риску*, являющегося *разумным оптимистом.* Такое ЛПР оценивает состояния природы величинами результатов, но рассматривает результаты через призму субъективного восприятия состояний природы. Субъективные вероятности состояний природы принимаются пропорциональными суммарным результатам для каждого состояния “природы”. Согласно этому критерию лучшей следует считать ту стратегию, которая приводит к максимальному субъективно среднему результату:

$$\mathbf{a}^* : \max_{\mathbf{a}_i \in \mathbf{A}} \sum_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{p}(\mathbf{s}_j) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j),$$

причем субъективные вероятности $\mathbf{p}(\mathbf{s}_j)$ определяются по формуле

$$\mathbf{p}(\mathbf{s}_j) = \frac{\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{m}} \mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)}{\sum_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{m}} \mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)}.$$

При тех исходных данных, которыми мы оперируем в общем для анализ примере, значения субъективных вероятностей $\mathbf{p}(s_j)$ конъюнктуры рынка составят:

$\mathbf{p}(s_1) = 0{,}28$, $\mathbf{p}(s_2) = 0{,}36$, $\mathbf{p}(s_3) = 0{,}23$ и $\mathbf{p}(s_4) = 0{,}14$.

Окончательно величины субъективно средних результатов для стратегий получаются равными тем, которые представлены в табл. 4.27.

Таблица 4.27

Величины субъективно средних результатов для стратегий

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$
26412,43	24511,35	17540,7	23725,57

Таким образом, по критерию субъективно средних результатов наилучшей является стратегия $\mathbf{a}_1$, дающая в среднем прибыль в 26412,43 руб.

Предположим теперь, что ЛПР ***склонно к риску*** и является *разумным **оптимистом***. В таком случае оно, скорее всего, оценивает ситуации величинами сожалений и намерено измерять субъективные вероятности возможных состояний “природы”. Величины субъективных вероятностей состояний природы вычисляем пропорционально суммарным результатам для каждого состояния. А сам критерий — его можно назвать *критерием средних субъективных сожалений* — выглядит так:

$$\mathbf{a}^* : \min_{\mathbf{a}_i \in \mathbf{A}} \sum_{\mathbf{s}_j \in \mathbf{S}} [\mathbf{p}(\mathbf{s}_j)\mathbf{z}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)],$$

причем величины $\mathbf{p}(s_j)$ субъективных вероятностей определяют по формуле

$$\mathbf{p}(\mathbf{s}_j) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)}.$$

В нашем пример величины субъективных вероятностей для этого критерия те же, что и для предыдущего критерия.

Умножив их на соответствующие ситуациям величины сожалений $\mathbf{z}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j)$, получаем величины средних субъективных сожалений, такие как это представлено в табл. 4.28.

Таблица 4.28

Величины средних субъективных сожалений

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$
7807,13	9708,217	16678,87	10494

Минимальное сожаление соответствует применению стратегии $\mathbf{a}_1$.

Критерий субъективной вероятностной гарантии. Этот критерий характерен для ЛПР, *безразличного к риску*, который может указать субъективные оценки $\mathbf{p}(\mathbf{s}_j)$ вероятностей состояний природы в числовой форме, а также требуемый уровень результата (уровень притязаний). Критерий рекомендует лучшей считать ту стратегию, которая приводит к наибольшему значению вероятности получения результата не хуже требуемого:

$$\mathbf{a}^*: \max_{\mathbf{a}_i \in \mathbf{A}} \sum_{\mathbf{s}_j \in \mathbf{S}(\mathbf{a}_i)} \mathbf{p}(\mathbf{s}_j),$$

где $\mathbf{S}(\mathbf{a}_i \mid \mathbf{y}^{\text{притяз}}) = \{\mathbf{s}_i \mid \mathbf{y}(\mathbf{a}_i, \mathbf{s}_j) > \mathbf{y}^{\text{притяз}}\}$ — те состояния природы, для которых результат применения стратегии $\mathbf{a}_i$ оказался лучше уровня $\mathbf{y}^{\text{притяз}}$ притязаний.

Предположим, анализируя с помощью экспертов возможные уровни конъюнктуры рынка аналогичных товаров, предприниматель оценил попарно возможные состояния $\mathbf{s}_j$ рынка и применил процедуру определения субъективных вероятностей через вербальные высказывания типа “более вероятно”, “равновероятно”, “менее вероятно”. Результаты оценки составили следующие величины:

$\mathbf{p}(s_1) = 0{,}38$, $\mathbf{p}(s_2) = 0{,}36$, $\mathbf{p}(s_3) = 0{,}20$ и $\mathbf{p}(s_4) = 0{,}06$.

Уровень притязаний $\mathbf{y}^{\text{притяз}}$ по результатам установлен в 30000 руб. Используя значения прибыли для ситуаций, найдем те ситуации, для которых результаты превышают 30000 руб. (табл. 4.29).

Таблица 4.29

Ситуации (a_i, s_j), значения величин прибыли $y(a_i, s_j)$ для которых превышают $y^{притяз}$ = 30000 руб.

Стратегии торговли	Возможные состояния рынка аналогичных товаров и услуг			
	$p(s_1) = 0{,}38$	$p(s_2) = 0{,}36$	$p(s_3) = 0{,}20$	$p(s_4) = 0{,}06$
a_1	32065	34980		
a_2			34980	
a_3				
a_4		40810		

Анализ данных табл. 4.29 показывает следующее. Для первой стратегии $\mathbf{a}_1$ вероятность получения результата, превышающего установленный уровень $\mathbf{y}^{притяз}$ = 30000 руб., составляет $\mathbf{p}(s_1) + \mathbf{p}(s_2) = 0{,}38 + 0{,}36 = 0{,}74$; для стратегии $\mathbf{a}_2$ — вероятность этого события равна $\mathbf{p}(s_3) = 0{,}20$, для стратегии $\mathbf{a}_3$ вероятность превышения уровня притязаний равна нулю, а для стратегии $\mathbf{a}_4$ – $\mathbf{p}(s_2) = 0{,}36$. В итоге по критерию субъективной вероятностной гарантии наилучшей следует признать стратегию $\mathbf{a}_1$.

Критерий субъективно ожидаемой полезности моделирует выбор ЛПР, которое не только может указать субъективные вероятности состояний природы в числовой форме, но и согласно для оценки результатов свою индивидуальную функцию полезности для рассматриваемых условий. Эмпирическая функция $\mathbf{u}^N(\mathbf{y})$ для оценки полезности результатов $\mathbf{y}$ в условиях "природного" риска имеет вид степенной зависимости

$$\mathbf{u}^N(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^{\alpha},$$

где $\mathbf{y}$ — нормированные результаты операции;

α — параметр функции,

и трансформирует значения нормированных результатов операции в отрезок [0;1]. Нормирование результатов проводят по линейной зависимости вида

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{y}^{\text{н}} - \mathbf{y}^{\text{н}}_{\min}}{\mathbf{y}^{\text{н}}_{\max} - \mathbf{y}^{\text{н}}_{\min}},$$

где $\mathbf{y}^{\text{н}}$ — результат в натуральной шкале;

$\mathbf{y}^{\text{н}}_{\min} = \min\limits_{\mathbf{a_i} \in \mathbf{A}} \min\limits_{\mathbf{s_j} \in \mathbf{S}} \mathbf{y}(\mathbf{a_i}, \mathbf{s_j})$ — минимальный из результатов для всех ситуаций в натуральной шкале;

$\mathbf{y}^{\text{н}}_{\max} = \max\limits_{\mathbf{a_i} \in \mathbf{A}} \max\limits_{\mathbf{s_j} \in \mathbf{S}} \mathbf{y}(\mathbf{a_i}, \mathbf{s_j})$ — максимальный из всех результатов в натуральной шкале.

Параметру α функции устанавливают значения из следующей шкалы:

$$\alpha = \begin{cases} 0{,}125 & \text{— } \textit{если} \text{ существенная несклонность к риску;} \\ 0{,}5 & \text{— } \textit{если} \text{ незначительная несклонность к риску;} \\ 1{,}0 & \text{— } \textit{если} \text{ взвешенное отношение к риску;} \\ 2{,}0 & \text{— } \textit{если} \text{ незначительная склонность к риску;} \\ 5{,}0 & \text{— } \textit{если} \text{ существенная склонность к риску.} \end{cases}$$

В итоге наилучшей следует считать ту стратегию $\mathbf{a}^*$, которая характеризуется наибольшей ожидаемой субъективной полезностью результатов:

$$\mathbf{a}^* : \max_{\mathbf{a_i} \in \mathbf{A}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{p}(\mathbf{s_j}) \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{N}}(\mathbf{y}(\mathbf{a_i}, \mathbf{s_j})).$$

Применим этот критерий для сравнения стратегий, предполагая, что $\alpha = 5$. Предварительно вычислим нормированные значения величин прибыли. Они представлены в табл. 4.30.

Таблица 4.30

Нормированные значения величин прибыли

Стратегии торговли	Возможные состояния рынка аналогичных товаров и услуг			
	$\mathbf{s_1}$	$\mathbf{s_2}$	$\mathbf{s_3}$	$\mathbf{s_4}$
$\mathbf{a_1}$	0,731	0,804	0,440	0,004
$\mathbf{a_2}$	0,658	0,440	0,804	0,149
$\mathbf{a_3}$	0,222	0,513	0,367	0,295
$\mathbf{a_4}$	0,440	0,949	0,004	0,440

Значения величин функции $\mathbf{u}^N(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^\alpha$ полезности предпринимателя сведены в табл. 4.31.

Таблица 4.31

Значения величин функции $\mathbf{u}^N(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^\alpha$ полезности предпринимателя

Стратегии торговли	**Возможные состояния рынка аналогичных товаров и услуг**			
	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	0,51	0,62	0,17	0,00
a_2	0,40	0,17	0,62	0,02
a_3	0,04	0,23	0,11	0,07
a_4	0,17	0,89	0,00	0,17

Теперь остается вычислить ожидаемую субъективную полезность. Результаты вычислений сведены в табл. 4.32.

Таблица 4.32

Величины субъективно ожидаемых полезностей стратегий

a_1	a_2	a_3	a_4
0,45	0,32	0,13	0,39

Таким образом, с использованием введенных понятий (тип личности, отношение к “природному” риску) оказалось достаточно легко привести классические и современные методы анализа “игр с природой” в стройную систему, а также сформулировать сравнительно простые правила для процедуры подбора критерия, который наиболее адекватно отражает особенности принятия решений конкретным ЛПР в условиях “природного” риска.

При этом наиболее общие рекомендации по применению критериев таковы:

- критерием Вальда следует руководствоваться предпринимателю, который считает себя крайним пессимистом и, кроме того, абсолютно не склонен рисковать в рассматриваемой экономической операции;

• критерий Сэвиджа минимаксных сожалений следует рекомендовать для оценки предпочтительности альтернатив тому предпринимателю, который, хотя и относит себя к классу пессимистов, в данной операции весьма заинтересован в ее результатах и очень опасается упустить выгодный шанс, мало выиграть;

• критерий Гурвица пессимизма-оптимизма хорош для тех предпринимателей, которые взвешенно относятся к риску в условиях "природной" неопределенности и могут хотя бы качественно оценить меру собственного пессимизма или оптимизма; для таких лиц, принимающих решения, авторы рекомендуют для коэффициента γ — коэффициента пессимизма-оптимизма Гурвица — назначать значения по правилу:

$\gamma \geq 0{,}7$, если "крайний пессимист";

$\gamma \approx 0{,}55...0{,}65$, если "разумный пессимист";

$\gamma \leq 0{,}3$, если "крайний оптимист";

$\gamma \approx 0{,}35...0{,}45$, если "разумный оптимист".

• критерием Лапласа-Бернулли следует руководствоваться ЛПР, которое несклонно к риску и считает себя реалистом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Авондо-Бодино Дж.* Применение в экономике теории графов. — М.: Прогресс, 1968.

2. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 1986.

3. *Афанасьев М. Ю., Багриновский К. А., Матюшок В. М.* Прикладные задачи исследования операций. — М.: ИНФРА-М, 2005.

4. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / Пер. с англ. — М.: Мир, 1982.

5. *Балдин К. В., Быстров О. Ф.* Математические методы в экономике. — Воронеж: МОДЭК, 2003.

6. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования / Пер. с англ. Под ред. А. А. Первозванского. — М.: Наука, 1965.

7. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. В 3 т. / Пер. с англ. — М.: Мир, 1972-1973.

8. *Вентцель Е. С.* Введение в исследование операций. — М.: Советское радио, 1964.

9. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. — М.: Советское радио, 1972.

10. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. — М.: Советское радио, 1984.

11. *Вентцель Е. С.* Элементы динамического программирования. — М.: Наука, 1964.

12. *Вентцель Е. С.* Элементы теории игр. — М.: Физматгиз, 1969.

13. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология. — М.: Высшая школа, 2001.

14. *Вильямс Н. Н.* Параметрическое программирование в экономике (методы оптимальных решений). — М.: Статистика, 1976.

15. *Воробьев С. Н., Балдин К. В.* Управление рисками в предпринимательстве. — М.: ИТК Дашков и К°, 2007.

16. *Глухов В. В., Медников М. Д., Коробко С. Б.* Математические методы и модели для менеджмента. — М.-СПб.-Краснодар: Лань, 2007.

17. *Гольдштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. — М.: Наука,1969.

18. *Грешилов А. А.* Прикладные задачи математического программирования. — М.: МГТУ, 1990.

19. *Гуревич Т. Ф., Лущук В. О.* Сборник задач по математическому программированию. — М.: Колос, 1977.

20. *Давыдов Э. Г.* Исследование операций. — М.: Высшая школа, 1990.

21. *Данциг Дж.* Линейное программирование. — М.: Мир, 1981.

22. *Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К.* Геометрическое программирование. — М.: Мир, 1972.

23. *Дегтярев Ю. И.* Исследование операций. — М.: Высшая школа, 1986.

24. *Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г.* Введение в прикладную теорию игр / Под ред. И. Н. Воробьева. — М.: Наука, 1981.

25. *Еремин И. И., Астафьев Н. Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. — М.: Наука, 1976.

26. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций. — Киев: Высшая школа, 1979.

27. *Зуховицкий С. И., Радчик И. А.* Математические методы сетевого планирования. — М.: Наука, 1965.

28. *Калихман И. Л.* Сборник задач по математическому программированию. — М.: Высшая школа, 1975.

29. *Карлик С.* Математические методы в теории игр, программировании, экономике. — М.: Мир, 1964.

30. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. — М.: Наука, 1975.

31. *Кондаков Н. И.* Логический словарь. — М.: Наука, 1971.

32. Исследование операций в экономике / Под ред. Н. Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ, 2006.

33. *Кузнецов А. В., Холод Н. И., Костевич Л. С.* Руководство к решению задач по математическому программированию. — Минск: Вышэйшая школа, 1978.

34. *Кузнецов Б. Т.* Математические методы и модели исследования операций. – М.: ЮНИТИ, 2005.

35. *Мак-Кинси Дж.* Введение в теорию игр. — М.: Физматгиз, 1960.

36. *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. — М.: Наука, 1990.

37. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. — М.: Наука, 1981.

38. *Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.* Методы оптимизации. — М.: Наука, 1978.

39. Исследование операций. В 2 т. / Пер. с англ. Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. — М.: Мир, 1981.

40. Надежность и эффективность в технике: Справочник: В 10 т. Т. 3 Эффективность технических систем. — М.: Машиностроение, 1988.

41. *Невежин В. П., Кружилов С. И.* Сборник задач по курсу: Экономико-математическое моделирование. — М: 2005.

42. *Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания. — М.: Машиностроение, 1969.

43. *Партыка Т. Л., Попов И. И.* Математические методы. — М.: ФОРУМ-ИНФРА-М, 2007.

44. *Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф. П.* Введение в системный анализ. — М.: Высшая школа, 1989.

45. Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю. В. Прохоров. — М.: Советская энциклопедия, 1988.

46. *Раскин Л. Г., Кириченко И. О.* Многоиндексные задачи линейного программирования. Теория, методы, приложения. — М.: Радио и связь, 1982.

47. *Резников Б. А.* Системный анализ и методы системотехники. — М.: Высшая школа, 1990.

48. *Саати Т. Л.* Математические методы исследования операций. — М.: Воениздат, 1963.

49. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. — М.: Советское радио, 1971.

50. Словарь по кибернетике / Под ред. В.С. Михалевича. 2-е изд. — Киев: Гл. ред. УСЭ им М. П. Бажана, 1989.

51. *Таха Х.* Введение в исследование операций: В 2 кн. / Пер. с англ. — М.: Мир, 1985.

52. *Терехов Л. Л.* Экономико-математические методы. — М.: Статистика, 1972.

53. *Триус Е. Б.* Задачи математического программирования транспортного типа. — М.: Радио и связь, 1977.

54. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей / Пер. с англ. Под ред. Б. Г. Сумнова. — М.: Мир, 1984.

55. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. — М.: Мир, 1967.

56. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975.

57. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях / Пер с англ. Под ред. А. А. Фридмана. — М.: Мир, 1974.

58. *Хуторецкий А. Б.* Модели исследования операций. — Новосибирск, Изд-во СО РАН, 2006.

59. *Шикин Е. В.* Исследование операций. — М.: Проспект, 2006.

60. *Щедрин Н. И., Кархов А. Н.* Математические методы программирования в экономике. — М.: Статистика, 1974.

61. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В. В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 2006.

62. *Юдин Д. Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации. — М.: ЮНИТИ, 2005.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Решить следующие транспортные задачи (здесь A — вектор мощностей поставщиков, B — вектор мощностей потребителей, C — матрица транспортных издержек на единицу груза):

а) $A = (100; 150; 50)$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}$;

$B = (75; 80; 60; 85)$,

б) $A = (300; 350; 150; 200)$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

$B = (400; 400; 200)$,

в) $A = (20; 30; 40; 20)$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

$B = (40; 40; 20)$.

Приложение 2

Решить задачи линейного программирования графическим методом:

1. $W(X) = 2x_1 + x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. $W(X) = x_1 - 3x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 6, \\ -2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge -3, \\ x_1 - 2x_2 \le 2. \end{cases}$$

3. $W(X) = 4x_1 - 3x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 5, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 20, \\ 8x_1 - 3x_2 \ge 0, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 0. \end{cases}$$

4. $W(X) = -x_1 + 4x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ -8x_1 + 3x_2 \le 24, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge -12. \end{cases}$$

5. $W(X) = x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_2 \le 6, \\ -3x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 \le 12. \end{cases}$$

6. $W(X) = 3x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge -4, \\ x_1 + x_2 \ge 0, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le 2. \end{cases}$$

7. $W(X) = 3x_1 + 5x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 0, \\ 3x_1 + x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 20, \\ x_1 - x_2 \ge 0. \end{cases}$$

8. $W(X) = 2x_1 + 5x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ -2x_1 + 5x_2 \ge 3, \\ -x_1 + 2_2 \le 2. \end{cases}$$

9. $W(X) = x_1 + 3x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 7, \\ x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10. $W(X) = x_1 + 4x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12. \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

11. $W(X) = -3x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6, \\ 3x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

12. $W(X) = x_1 + 4x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 0, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

13. $W(X) = 6x_1 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 16, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 4, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 34, \\ x_j \ge 0\ \forall j. \end{cases}$$

14. $W(X) = 3x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -22, \\ -6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 17, \\ x_j \ge 0\ \forall j. \end{cases}$$

15. $W(X) = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\ x_j \ge 0\ \forall j. \end{cases}$$

16. $W(\mathrm{X}) = 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 = 4, \\ 7x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ x_j \geq 0 \ \forall j. \end{cases}$$

17. $W(\mathrm{X}) = 11x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 2x_5 \to \min;$

$$\begin{cases} -x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 18, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_j \geq 0 \ \forall j. \end{cases}$$

18. $W(\mathrm{X}) = x_1 - 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ 4x_2 + x_3 + x_4 = 12, \\ x_j \geq 0 \ \forall j. \end{cases}$$

Приложение 3

Решить симплексным методом следующие задачи:

1. $W(X) = x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

2. $W(X) = -11x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ -2x_1 + 2x_3 + x_4 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

3. $W(X) = x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

4. $W(X) = -3x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + 3x_2 - x_4 = -3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

5. $W(X) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 3, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq -4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

6. $W(X) = -4x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 18, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

7. $W(X) = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 12, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

8. $W(X) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 15, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 12, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

9. $W(X) = 6x_1 + 12x_2 + 3x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 15, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \le 10, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

10. $W(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 9, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 \le 12, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

11. $W(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \le 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \le 3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

12. $W(X) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 \le 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 7, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

13. $W(X) = -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

14. $W(X) = -x_1 + x_2 - 3x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

15. $W(X) = -3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 14, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 16, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

16. $W(X) = -5x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 2, \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 10, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 \le 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

17. $W(X) = x_1 + 2x_2 - 2x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 8, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 12, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

18. $W(X) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Приложение 4

Составить двойственные задачи для следующих задач:

1. $W(X) = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

2. $W(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

3. $W(X) = 2x_1 - x_3 + x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 12, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 18, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

4. $W(X) = 4x_1 + 13x_2 + 3x_3 + 6x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 9x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

5. $W(X) = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4, \\ x_1 + 2x_3 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

6. $W(X) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \le 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

7. $W(X) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \ge 2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

8. $W(X) = x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \ge 1, \\ -2x_1 + 3x_2 = 1, \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

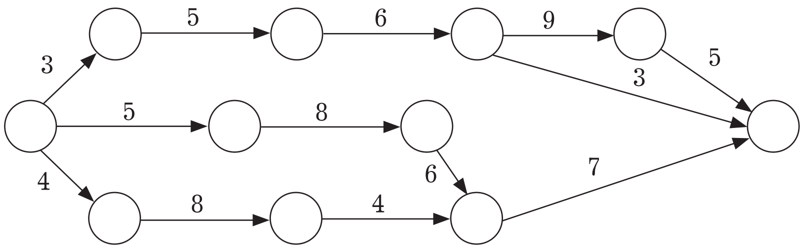
9. С помощью метода Лагранжа найти условный экстремум функционала W:

а) $W = x_1 x_2$ при $x_1^2 + x_2^2 = 2$;

б) $W = x_1^3 + x_2^3$ при $x_1 + x_2 = 2,\ x_1, x_2 \ge 0$;

в) $W = x_1 + x_2$ при $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 1$.

10. Сетевой график с указанием продолжительности работ в днях приведен на рисунке [61]:



Требуется:

а) пронумеровать события;

б) выделить критический путь и найти его длину;

в) определить резервы времени каждого события;

г) определить полные резервы времени некритических работ.

Приложение 5

Решите задачи нелинейного программирования:

1. Найти максимальное значение функции $F = x_1x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

2. Найти минимальное значение функции $F = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)$ при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. Найти максимальное значение функции $F = 4x_1 + 3x_2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \leq 0, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

4. Найти максимальное значение функции $F = x_1x_2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Составьте математические модели задач:

5. На развитие предприятий отрасли на планируемый год выделено 220 млн руб. Эти средства могут быть распределены между тремя предприятиями. Каждый вариант распределения обеспечивает к концу года определенный доход отрасли. Учитывая возможные варианты распределения капитальных вложений между предприятиями и получаемый при этом доход, определить такой вариант распределения капиталовложений, при котором доход отрасли является максимальным.

Предприятие	**Размер капиталовложений (млн руб.)**	**Доход (тыс. руб.)**	**Размер капиталовложений (млн руб.)**	**Доход (тыс. руб.)**	**Размер капиталовложений (млн руб.)**	**Доход (тыс. руб.)**
1	От 10 до 30	14,3	От 30 до 60	16,2	60 и более	17,2
2	От 10 до 40	13,5	От 40 до 70	17,8	70 и более	18,3
3	От 10 до 50	18,4	От 50 до 80	19,3	80 и более	19,4

6. Между n предприятиями отрасли необходимо распределить выпуск некоторой однородной продукции. Затраты, связанные с производством x_i $(i = \overline{1,n})$ единиц продукции на *j*-м предприятии, зависят от объема производства и определяются функциями $f_i(x_i)$. Зная, что продукции должно быть изготовлено не менее b единиц, составить такой план производства продукции предприятиями отрасли, при котором общие затраты, связанные с ее производством, минимальны.

7. В *m* пунктах отправления сосредоточена однородная продукция в количествах, равных $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц. Эту продукцию нужно перевезти в *n* пунктов назначения в объемах, равных $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц. Цены, связанные с перевозкой единицы продукции, зависят от объемов перевозимой продукции и определяются функциями $f_{ij}(x_{ij})$, где ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$) количество единиц продукции, перевозимой из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Определить, сколько единиц продукции из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения следует доставить, чтобы вся продукция была перевезена в пункты назначения в необходимых объемах при минимальной общей стоимости перевозок.

Приложение 6

Найдите условные экстремумы функций:

1. $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 12. \end{cases}$$

2. $f = x_1 x_2 x_3$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 x_2 + x_2 x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 = 8. \end{cases}$$

3. $f = x_1 x_2 + x_2 x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

4. $f = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 4x_2 x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 = 19, \\ x_1 + 2x_2 x_3 = 11. \end{cases}$$

5. $f = x_1 x_2 x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = 8. \end{cases}$$

6. Найдите максимальное значение функции $f = x_1^2 x_2^3 x_3^4$ при условии $x_1 + x_2 + x_3 = 18$.

7. На двух предприятиях отрасли необходимо изготовить 200 изделий некоторой продукции. Затраты, связанные с производством x_1 изделий на I предприятии, равны $4x_1^2$ руб., а затраты, обусловленные изготовлением x_2 изделий на II предприятии, составляют $20x_2 + 6x_2^2$ руб. Определить, сколько изделий на каждом из предприятий следует произвести, чтобы общие затраты, обусловленные изготовлением необходимой продукции, были минимальными.

8. Изготовление некоторой продукции в производственном объединении можно осуществить двумя технологическими способами. При I способе изготовление x_1 изделий требует затрат, равных $a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2$ руб., а при II способе затраты на изготовление x_2 изделий составляют $b_0 + b_1x_2 + b_2x_2^2$ руб. (a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 — некоторые положительные числа). Составить план производства продукции, согласно которому должно быть произведено d изделий при наименьших общих затратах.