БАКАЛАВРИАТ и МАГИСТРАТУРА

ФИНАНСОВЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

С.Я. Криволапов, М.Б. Хрипунова

МАТЕМАТИКА на Python

Рекомендовано
Экспертным советом УМО в системе ВО и СПО
в качестве **учебника** для направлений бакалавриата
«Экономика» и «Бизнес-информатика»

BOOK.ru
ЭЛЕКТРОННО-БИБЛИОТЕЧНАЯ СИСТЕМА

КНОРУС • МОСКВА • 2022

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я73
К82

Рецензенты:
Ю.А. Алхутов, профессор ВлГУ, д-р физ.-мат. наук, проф.,
В.В. Щнголев, профессор Департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, д-р физ.-мат. наук

Криволапов, Сергей Яковлевич.

К82 Математика на Python : учебник / С.Я. Криволапов, М.Б. Хрипунова. — Москва : КНОРУС, 2022. — 456 с. — (Бакалавриат и магистратура).

ISBN 978-5-406-09765-6

Содержит инструкцию по установке языка на ПК, большое количество практических примеров использования языка Python для решения математических задач. Каждая тема включает примеры решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения. Учебник логически связан с программой курса математики, утвержденной в Финуниверситете, и состоит из двух основных частей: математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии.

Соответствует ФГОС ВО последнего поколения.

Для аспирантов, магистрантов, студентов бакалавриата, которые стремятся знать самые современные вычислительные технологии, а также тех, кто хочет научиться программировать на языке Python.

Ключевые слова: математика на Python, бизнес-информатика, экономика, линейная алгебра, математический анализ.

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я73

Криволапов Сергей Яковлевич
Хрипунова Марина Борисовна

МАТЕМАТИКА НА PYTHON

Изд. № 650891. Формат 60×90/16. Гарнитура «TimesNewRoman».
Усл. печ. л. 28,5. Уч.-изд. л. 21,34. Тираж 500 экз.

ООО «Издательство «КноРус».
117218, г. Москва, ул. Кедрова, д. 14, корп. 2.
Тел.: +7 (495) 741-46-28.
E-mail: welcome@knorus.ru www.knorus.ru

Отпечатано в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5.
Тел.: +7 (495) 221-89-80.

ISBN 978-5-406-09765-6

Содержание

Введение

Владение цифровыми математическими методами анализа количественных данных является необходимым условием достижения целей, стоящих перед современным экономистом. Многие профессиональные навыки, формируемые в ходе изучения дисциплин математического блока, могут быть наилучшим образом развиты с применением информационных технологий. Авторам представляется целесообразным, в современных условиях, на всех ступенях высшего экономического образования внедрение в учебный процесс, наряду с традиционными методами решения, компьютерных форматов. Для этого могут быть использованы различные цифровые средства обработки данных – специальные программы и пакеты. Авторы надеются, что такой подход позволит обучающимся применять язык Питон для решения задач по экономическим дисциплинам в университете и в дальнейшей профессиональной деятельности.

Язык Python – это интерпретируемый, объектно-ориентированный язык программирования высокого уровня удобный для работы с большими данными. Создал этот язык в 1989-1991 годах программист нидерландского происхождения Гвидо ван Россум (Guido van Rossum), позаимствовав многие средства из других языков программирования. Название языка произошло от названия популярного в 1970-х прошлого века британского комедийного телешоу «Летающий цирк Монти Пайтона» (Monty Python’s Flying Circus).

Python обладает простым и выразительным синтаксисом. Язык поддерживает несколько парадигм программирования: структурное, объектно-ориентированное, функциональное и аспектно-ориентированное. Python распространяется совершенно бесплатно, не имеет ограничений в условиях применения. Так же не ограничивается коммерческое использование программных продуктов, написанных на этом языке, лицензионные отчисления не осуществляются. Программисты вольны модернизировать язык, не ставя в известность автора. Удобство языка и бесплатность применения сделали его популярным во многих сферах исследовательской и коммерческой деятельности. Так:

- Компании JPMorgan Chase, UBS, Getco и Citadel применяют Python для прогнозирования финансового рынка.
- Компания Google использует Python в своей поисковой системе.

- Такие компании, как Intel, Cisco, Hewlett-Packard, Seagate, Qualcomm и IBM, используют Python для тестирования аппаратного обеспечения.
- Служба коллективного использования видеоматериалов YouTube в значительной степени реализована на Python.
- NSA использует Python для шифрования и анализа разведданных.
- Популярная программа BitTorrent для обмена файлами в пиринговых сетях написана на языке Python.
- Популярный веб-фреймворк App Engine от компании Google использует Python в качестве прикладного языка программирования.
- NASA, Los Alamos, JPL и Fermilab используют Python для научных вычислений. Для решения дифференциальных уравнений, на базе Python разработана среда Феникс.

На сегодняшний день существуют три версии Питон. Мы предлагаем использовать версию 3.0, которая была выпущена 3 декабря 2008 года.

Настоящее издание содержит инструкцию по установке языка на ПК, большое количество практических примеров использования языка Python для решения математических задач. Каждая тема включает примеры решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения. Учебник логически связан с программой курса математики, утвержденной в Финуниверситете, и состоит из двух основных частей: математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии.

Учебник может быть использован студентами, магистрантами и аспирантами, а также всеми интересующимися и владеющими начальными навыками программирования и знаниями по математическим дисциплинам.

Авторы выражают глубокую благодарность д.ф.-м.н., профессору Ю.А. Алхутову и д.ф.м.н. В.В. Щиголеву за рецензирование рукописи, сделанные замечания и внесенные предложения.

Раздел I. Установка, начало работы, библиотеки и функции

Установка и начало работы

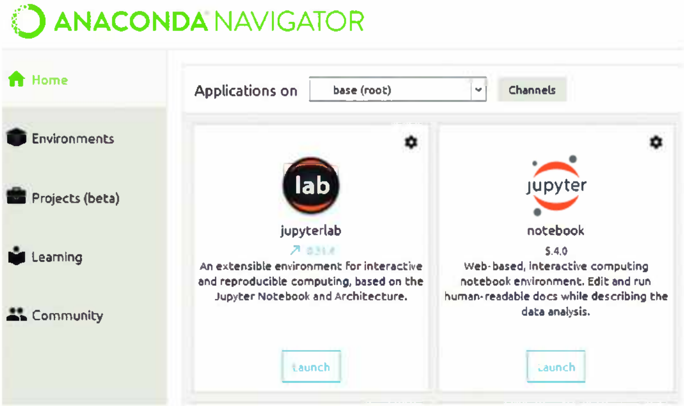
Существует несколько способов установки Python на компьютер (ноутбук).

Использование интегрированной среды IDLE. Скачать версию Python. После устаиовки, запустить среду разработкн IDLE. Запуститься среда IDLE, с помощью которой можно вводить инструкции Python и мгновеиио получать результат.

Еще одним вариантом работы со средой IDLE является создание файлов и их исиолнение. Для этого нужно создать новый файл. В созданиом файле набрать инструкции на языке Python. Созданный скринт сохранить на диске с расширеннем .py. При запуске файла результат отобразится в окие IDLE.

Использование интегрированной среды разработки Jupiter Notebook, которая входнт в пакет Anaconda.

Предлагаем поступить следующим образом: установнм на компьютер дистрибутив Anaconda, удобиый для зануска программы и нзучения языка. Этот пакет включает в себя интерпретатор языка Python (есть версии 2 и 3, мы установим 3, 64 bit) и пабор паиболее часто используемых библиотек. Например, если у вас устаиовлена ОП Windows, с сайта https://www.anaconda.com/download/ нужио скачать устаиовочный файл и следовать указаииям. Вы можете озиакомиться с лицензией п указать папку для устаиовки. Отметим, что устаиовка возможна если в названии вашего профиля на компьютере только латипские буквы, ипаче иужно будет создать новый профиль с латинским названием н потом установить Anaconda. После установки активнруем программу, откроется Анаконда навнгатор.



An extensible environment for interactive and reproducible computing, based on the Jupyter Notebook and Architecture.

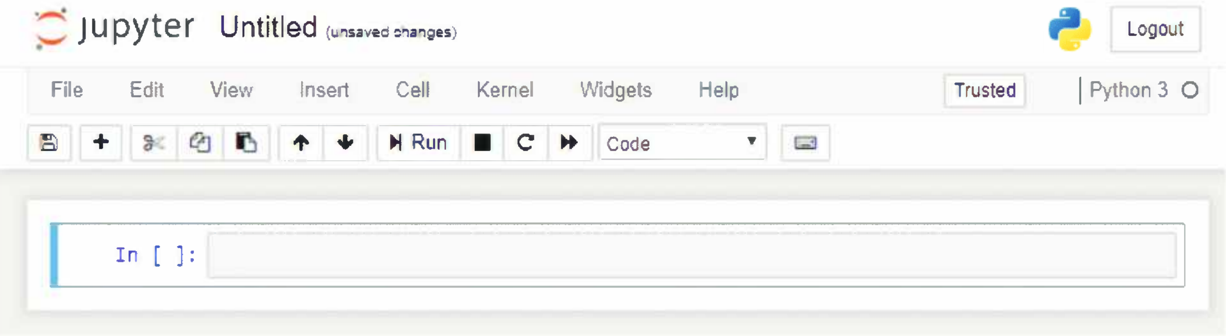
Web-based, interactive computing notebook environment. Edit and run human-readable docs while describing the data analysis.

Нажмем на jupyter, в результате получим на экране следующее:

Anaconda3	10 часов назад
Contacts	11 часов назад

Создадим папку для нашего документа. Для этого нажмем на New справа на экране и выберем Folder. Поставим галочку напротив имени папки «Untitled folder» и нажмем Rename, назовем папку «Python, hi».

Зайдем в эту папку, и создадим в ней ноутбук, для этого нажмем на New и выберем Python 3. Все, можем работать. Код или текст будем вводить в строки, показанные ниже.



Если это код, то на панели инструментов нужно выбрать «Code», если текст, то «Markdown». Если мы хотим написать пояснения в одной строчке с кодом, введем # и потом текст пояснения.

Для запуска программы используйте сочетаиие клавиш Ctrl+Enter или Shift+Enter, или иажмите на зиачок ▶ Run

Python поддержнвает набор самых обычных математическнх операций, что позволяет исиользовать для решения математических задач.

Сложение	a+b
Вычитание	a-b
Умножение	a*b
Делеиие	a/b
Неполное частиое от деления	a//b
Остаток от деления	a%b
Измененне знака числа	-a
Модуль числа	abs(a)
Возведеиие в степеиь	a**b

Например, вычислим 3+7. Для этого выставим «Code», введем в ячейку 3+7 и нажмем Ctrl+Enter или Shift+Enter. В первом случае мы получим 10 под строчкой ввода, во втором еще будет создана новая ячейка ниже первоначальной.

Вычислить 3+7

```
In [2]: 3+7
Out[2]: 10

In [3]: 3+7
Out[3]: 10

In [ ]: |
```

Операторы Python

Перечнслим основные операторы:

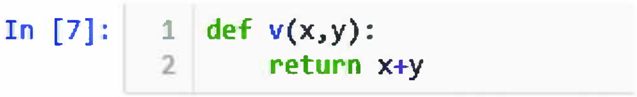
1. if – условный оператор
2. Else – последовательность действнй которая выполняется если условие в блоке if ложно
3. while, for – операторы цикла

4. def – оператор определения функции
5. return – возврат функции
6. pass – оператор ничего не делает. Используется для пустых блоков кода

Именные функции, инструкции def и return, pass, import

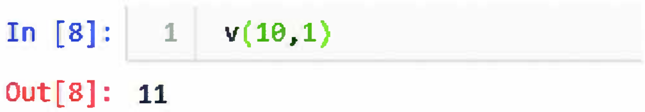
Функция определяется с помощью оператора def.

Например, функция, возвращающая сумму двух объектов, задается так



```
In [7]: def v(x,y):
            return x+y
```

Инструкция return говорит, что нужно вернуть значение. В нашем случае функция возвращает сумму *x* и *y* как числовых величин. Например, если сумма двух чисел 10 и 1 равна 11 (является числом):

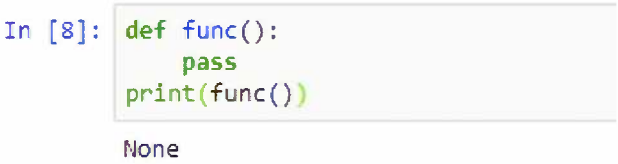


```
In [8]: v(10,1)

Out[8]: 11
```

Интересно, что операцию сложения можно осуществить и при нечисловых значениях. Например, к строке «abcd» прибавить подстроку «e», в результате получим новую строку:

```
In [9]: v('abcd','e')

Out[9]: 'abcde'
```

Отметим, что функция может и не заканчиваться инструкцией return, при этом функция вернет значение None, то есть ничего не выведется:



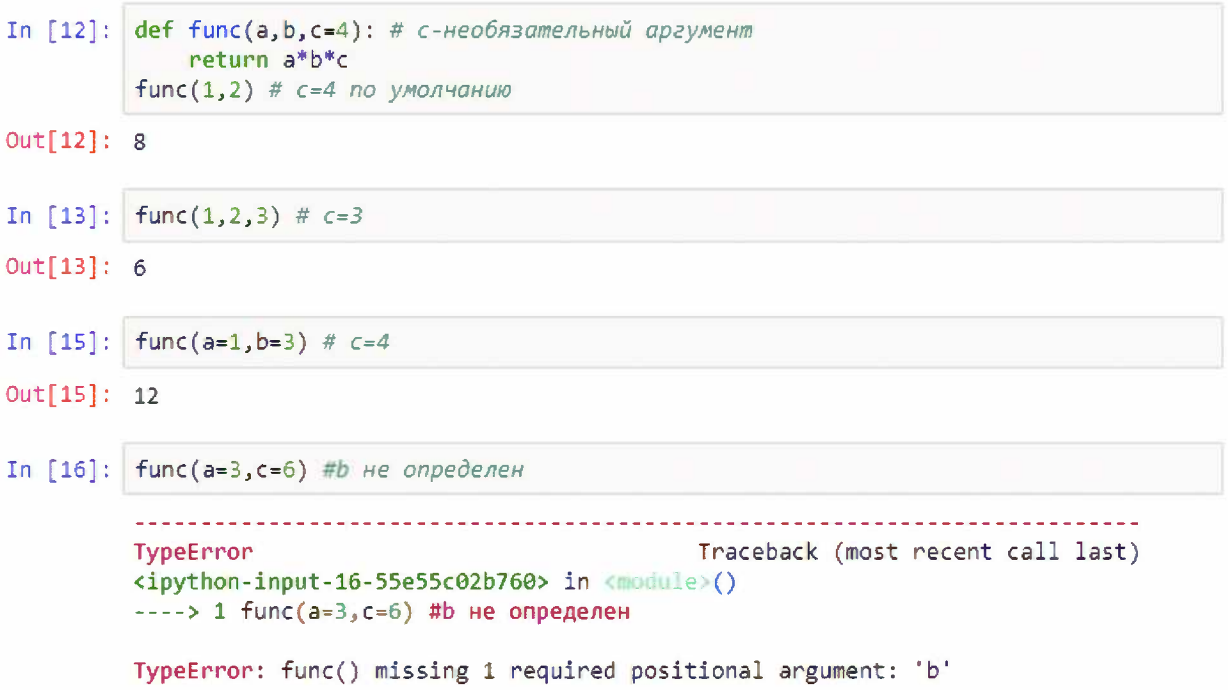
```
In [8]: def func():
            pass
        print(func())

        None
```

где в качестве тела приведенной выше функции используется «пустой оператор» pass.

Импортировать файлы с программами, называемые библиотеками (модулями), позволяет инструкция import. Подробнее остановимся на ней и ее синтаксисе в разделе «Библиотеки Python».

Аргументы функции

Аргументы функции указываются в скобках и обозначаются буквами. При вызове функции из основной программы аргументам придаются конкретные значения в зависимости от типа аргументов в описании функции. Ниже приведен пример функции, вычисляющей произведение трех чисел. При этом аргумент с является необязательным, он задан изначально равным 4, если аргумент с в вызове отсутствует, он считается равным 4, если же он присутствует, то в функцию передается указанное значение.

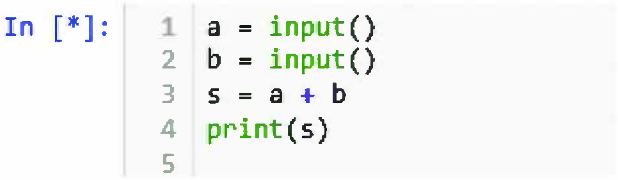


```
In [12]: def func(a,b,c=4): # c-необязательный аргумент
             return a*b*c
         func(1,2) # c=4 по умолчанию

Out[12]: 8

In [13]: func(1,2,3) # c=3

Out[13]: 6

In [15]: func(a=1,b=3) # c=4

Out[15]: 12

In [16]: func(a=3,c=6) #b не определен

         ---------------------------------------------------------------------------
         TypeError                                 Traceback (most recent call last)
         <ipython-input-16-55e55c02b760> in <module>()
         ----> 1 func(a=3,c=6) #b не определен

         TypeError: func() missing 1 required positional argument: 'b'
```

Input, print, условные конструкции, циклы

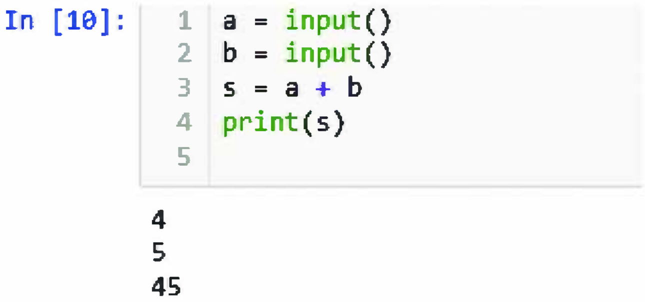
Для ввода данных в программу используется функция input. Она считывает одну строку. Для того, чтобы вывести значения на экран используется функция print(). Проиллюстрируем на примере.

Чтобы ввести данные с клавиатуры в программу используют функцию input. Считаем два числа и сохраним их в переменные *a* и *b*, пользуясь оператором присваивания =. Затем найдем сумму этих чисел.



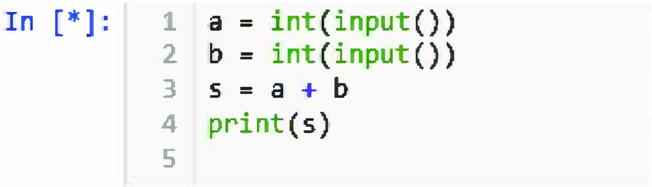
```
In [*]: a = input()
        b = input()
        s = a + b
        print(s)

```

Если вы попробуете запустить данную программу и введете для примера, числа 4 и 5, результат будет таким:



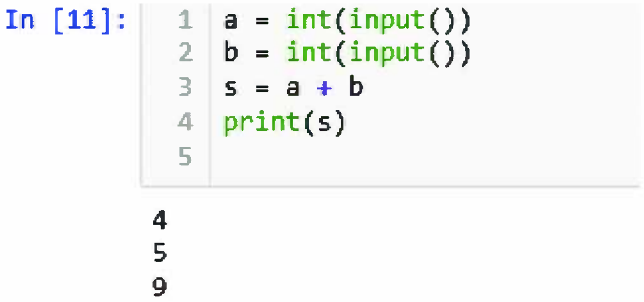
```
In [10]: a = input()
         b = input()
         s = a + b
         print(s)

4
5
45
```

То есть, данная программа находит сумму не двух чисел 4 и 5, а складывает две строки «4» и «5», в результате получается 45. Чтобы посчитать сумму чисел 4 и 5 нужно использовать функцию преобразования типов int, которая «делает» из строки число:



```
In [*]: a = int(input())
        b = int(input())
        s = a + b
        print(s)
```

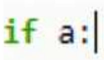
В результате получим правильный результат:



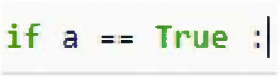
```
In [11]: a = int(input())
         b = int(input())
         s = a + b
         print(s)

4
5
9
```

Условная конструкция if-elif-else

if-elif-else – оиератор ветвления выбирает, какое действие следует выполнить, в зависимости от значения переменных в момент проверки условия, которое следует за словом if. Синтаксис условной конструкции if таков: if(если) условное выражение: вывод, дальше иеобязательные части elif условиые выражения: и else иначе. В Python приято использовать укорочеииую форму проверки условия



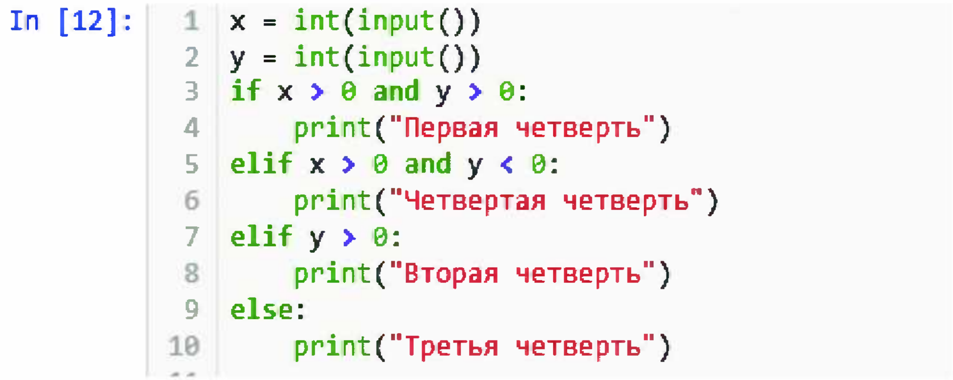
`if a:` вместо



`if a == True :`,

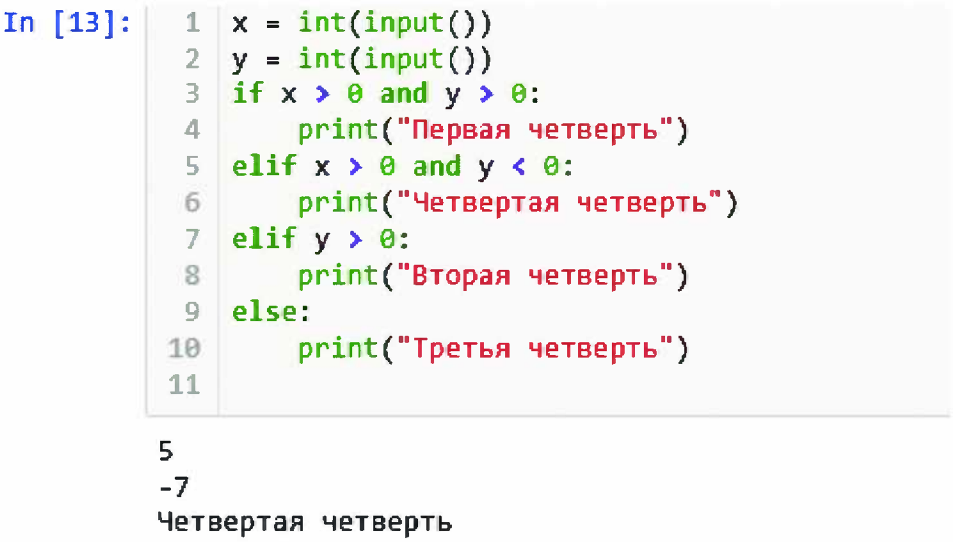
elif – не обязательная часть, следует за if и показывает альтернативное условие, которое требуется проверить. Далее else: тоже не обязательное, показывает, что будет, если не if не elif не выполняются.

Например, с клавиатуры вводится два числа – координаты точки на плоскости. Требуется определить, к какой координатиой четверти принадлежит даниая точка. В примере мы будем использовать операторы print, input и условную коиструкцию:



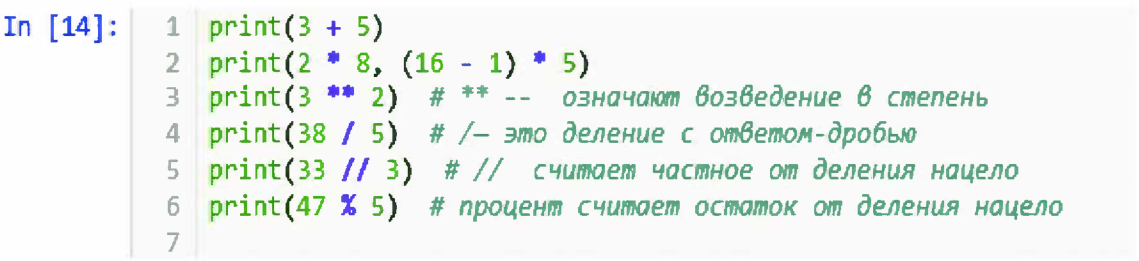
```
In [12]:
x = int(input())
y = int(input())
if x > 0 and y > 0:
    print("Первая четверть")
elif x > 0 and y < 0:
    print("Четвертая четверть")
elif y > 0:
    print("Вторая четверть")
else:
    print("Третья четверть")
```

В результате, введя, например, числа 5 и –7 получим:



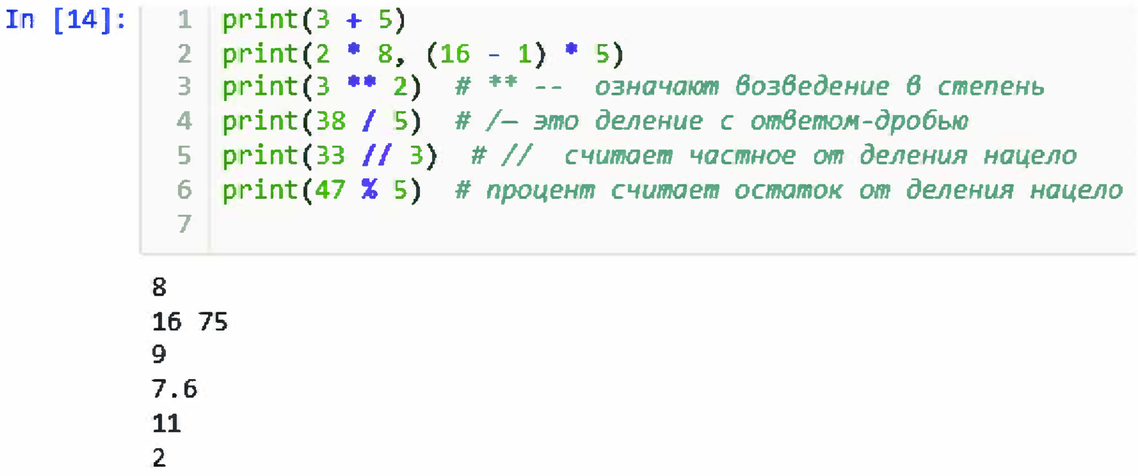
```
In [13]:
x = int(input())
y = int(input())
if x > 0 and y > 0:
    print("Первая четверть")
elif x > 0 and y < 0:
    print("Четвертая четверть")
elif y > 0:
    print("Вторая четверть")
else:
    print("Третья четверть")

5
-7
Четвертая четверть
```

Далее рассмотрнм пример на использование функции print.



```
In [14]:
print(3 + 5)
print(2 * 8, (16 - 1) * 5)
print(3 ** 2)  # ** --  означают возведение в степень
print(38 / 5)  # /– это деление с ответом-дробью
print(33 // 3)  # //  считает частное от деления нацело
print(47 % 5)  # процент считает остаток от деления нацело

```

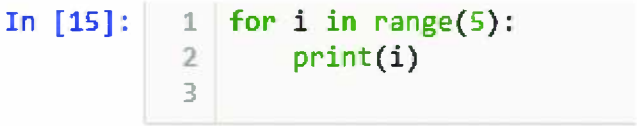
Результатом выполиенне данной программы будет выведенная на экран последовательность чисел



```
print(3 + 5)
print(2 * 8, (16 - 1) * 5)
print(3 ** 2)  # ** --  означают возведение в степень
print(38 / 5)  # /— это деление с ответом-дробью
print(33 // 3)  # //  считает частное от деления нацело
print(47 % 5)  # процент считает остаток от деления нацело
```

```
8
16 75
9
7.6
11
2
```

Циклические конструкции исиользуются, когда нам нужно новторить какое-либо действие иесколько раз. Существуют две возможные реализации цикла в Python: while и for. Мы будем использовать цнкл for. Если нужио указать иекоторый диапазон чисел, удобио воспользоваться функцией range(). Рассмотрим пример



```
for i in range(5):
    print(i)
```

Данный фрагмент кода выводит на экран числа в диапазоне от 0 до 4. Отметим, что на Python иумерация начинается с иуля, соответственио пятым зиаченнем в нашем примере будет 4. Переменной *i* в цикле for последовательно передаются значепия из заданного диапазона, и они выводятся на экраи.

Библиотеки Python

Язык Питон содержит удобные для использования библиотеки и модули. Библнотек в Python достаточно много. Рассмотрим лишь те, которые позволят иам решать математические задачи.

Числа в языке Pythoп иредставлеиы тремя встроеиными тинамн: целые (int), вещественные (float) и комплексные (complex), а также двумя типами чисел, которые предоставляет его стандартная библиотека: десятичные дроби иеограинчениой точностн (Decimal) н обыкновениые дроби (Float).

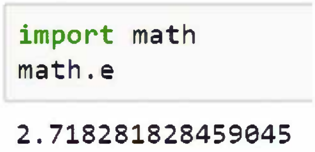
Рациональные числа, они же – обыкновеппые дроби предоставляются модулем fractions. Обыкновеиная дробь в даниом модуле нредставляется в виде нары двух чисел numerator – числитель н denumerator – зиамеиатель.

Библиотека Math

Для вычислений с действительиыми числамн применяется библиотека Math, которая содержит много полезных функций. Ниже приведеиы основные функции, которые включены в эту библиотеку.

math.ceil(x)	– округление до ближайшего большего чнсла.
math.fabs(x)	– модуль x.
math.factorial(x)	– факториал числа x.
math.floor(x)	– округление вниз.
math.fmod(x,y)	– остаток от деления x на y.
math.fsum()	– сумма всех члеиов последовательности
math.isfinite(x)	– является ли x числом.
math.isinf(x)	– является ли x бесконечностью.
math.modf(x)	– возвращает дробиую и целую часть числа x. Оба числа имеют тот же знак, что и x.
math.trunc(x)	– усекает значеиие x до целого.
math.exp(x)	– e^x.
math.expm1(x)	– $e^x - 1$
math.log(x, [base])	– логарифм x по основаиию base. Если base ие указан, вычисляется натуральный логарифм.
math.log10(x)	– логарифм x по основанию 10.
math.log2(x)	– логарнфм x по основанию 2.
math.pow(x,y)	– x^y.
math.sqrt(x)	– квадратный корень из x.
math.acos(x)	– арккосниус x. В раднанах.
math.asin(x)	– арксинус x. В радианах.
math.atan(x)	– арктангенс x. В радианах.
math.cos(x)	– косииус x (x указывается в радианах)
math.sin(x)	– сииус x (x указывается в радиаиах)
math.tan(x)	– тангеис x (x указывается в радианах)
math.hypot(x,y)	– вычисляет гиiотеиузу треугольника с катетами x и y (math.sqrt(x * x + y * y)
math.degrees(x)	– конвертирует радиаиы в градусы.
math.radians(x)	– конвертирует градусы в радианы.
math.pi	Число π
pi = 3,1415926...	
math.e	Число e
e = 2,718281...	

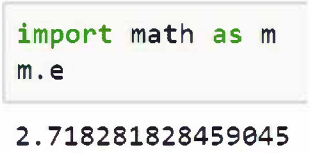
Для подключения библиотеки используем import. Загрузим библиотеку math и выведем число *e*.



```
import math
math.e
```

```
2.718281828459045
```

Можно это сделать, используя псевдоним библиотеки. Например, так



```
import math as m
m.e
```

```
2.718281828459045
```

Модуль cmath

Для работы с комплексными числами удобно использовать модуль cmath.

Основные функции для работы с комплексными числами:

x.conjugate – комплексно сопряженное.

x.imag – мнимая часть числа.

x.real – действительная часть.

x == y – проверка на равенство двух комплексных чисел.

pow(x,n) – возведение в степень.

abs(x) – модуль комплексного числа.

cmath.phase(x) – возвращает фазу комплексного числа (её ещё называют аргументом). Эквивалентно math.atan2(x.imag, x.real). Результат лежит в промежутке [–π, π].

cmath.polar(x) – преобразование к полярным координатам. Возвращает пару (r,φ).

cmath.rect(r,φ) – преобразование из полярных координат.

cmath.exp(x) – e^x.

cmath.log(x[, base]) – логарифм x по основанию base. Если base не указан, возвращается натуральный логарифм.

cmath.log10(x) – десятичный логарифм.

cmath.sqrt(x) – квадратный корень из x.

cmath.acos(x) – арккосинус x.

cmath.asin(x) – арксинус x.

cmath.atan(x) – арктангенс x.

cmath.cos(x) – косинус x.

cmath.sin(x) – сииус x.

cmath.tan(x) – тангенс x.

cmath.acosh(x) – гиперболический арккосипус x.

cmath.asinh(x) – гиперболический арксинус x.

cmath.atanh(x) – гиперболический арктангенс x.

cmath.cosh(x) – гиперболический косипус x.

cmath.sinh(x) – гиперболический синус x.

cmath.tanh(x) – гиперболический тангеис x.

cmath.isfinite(x) – True, если действительная и мнимая части конечны.

cmath.isinf(x) – True, если либо действительная, либо мнимая часть бесконечна.

cmath.isnan(x) – True, если либо действительная, либо мнимая часть NaN.

cmath.pi – π.

cmath.e – *e*.

Можно преобразовать комплексное число из полярной формы в алгебраическую и наоборот с помощью rect(r, phi). Комплексное чпсло, возвращаемое этой функцией, равно

r * (math.cos (phi) + math.sin(phi) * 1j).

Библиотека Mathplotlib

Библиотека matplotlib – это набор методов для создания двумерпой графики. Эта библиотека включает множество различных методов. Подробно работа с библиотекой рассмотрена в следующих главах.

Библиотека Sympy

Библнотека Sympy предназиачена для символьных вычислений. В нее входят библиотеки для работы с матрицами, векторамн, прямыми и плоскостями, для решения задач математического анализа и статистических н теоретико–вероятностиых задач.

Приведем алгоритм загрузки Sympy через Анаконду.

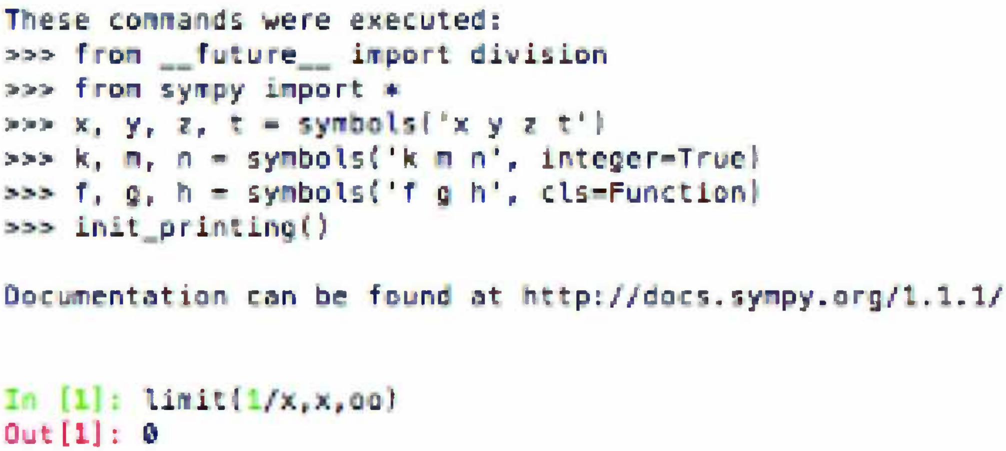
1. Установить Анаконду на комньютер.
2. Открыть Python.
3. Набрать в командной строке команду: from sympy import *.

4. Начать работу.

Для упрощения процесса работы можно:

1. Открыть папку с Анакондой.
2. Открыть папку scripts.
3. Найти файл isympy–script и запустить его в Питоне (нажать правую кнопку мыши, выбрать пункт «открыть с помощью» и выбрать Python).

Питон автоматически активирует определенные команды, которые нужны для работы с библиотекой sympy.



```
These commands were executed:
>>> from __future__ import division
>>> from sympy import *
>>> x, y, z, t = symbols('x y z t')
>>> k, m, n = symbols('k m n', integer=True)
>>> f, g, h = symbols('f g h', cls=Function)
>>> init_printing()

Documentation can be found at http://docs.sympy.org/1.1.1/


In [1]: limit(1/x,x,oo)
Out[1]: 0
```

Возможности sympy можно посмотреть на следующих сайтах:

https://www.sympy.org/en/index.html (официальный сайт разработчика sympy) http://inp.nsk.su/~grozin/python/python7.html(сайт на русском языке, где представлены основные возможности использования sympy).

Библиотека NumPy

Библиотека Numpy в Python широко используется для выполнения математических операций с матрицами. Одна из самых популярных библиотек машинного обучения в Python.

Библиотека SciPy

Библиотека math предоставляется Python научные инструменты. В ней есть различные модели для математической оптимизации, линейной алгебры, преобразования Фурье и так далее. Модуль numpy предоставляет базовую структуру данных массива библиотеке SciPy.

Библиотека Scikit–learn

Машинное обучение является важным математическим аспектом науки о данных. Используя различные инструменты машинного обучения, вы можете легко классифицировать данные и прогнозировать результаты. Для этой цели Scikit–learn предлагает различные функции, упрощающие методы классификации, регрессии и кластеризации.

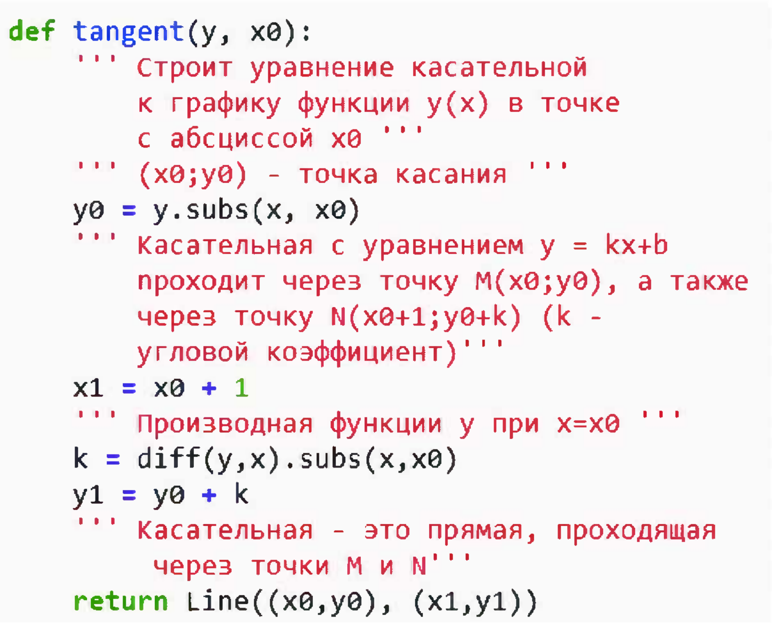
Функции в Python

Далее приводятся листинги некоторых функций, которые будут использоваться для решения задач.

1. Функции для раздела «Производная»

Функция tangent()

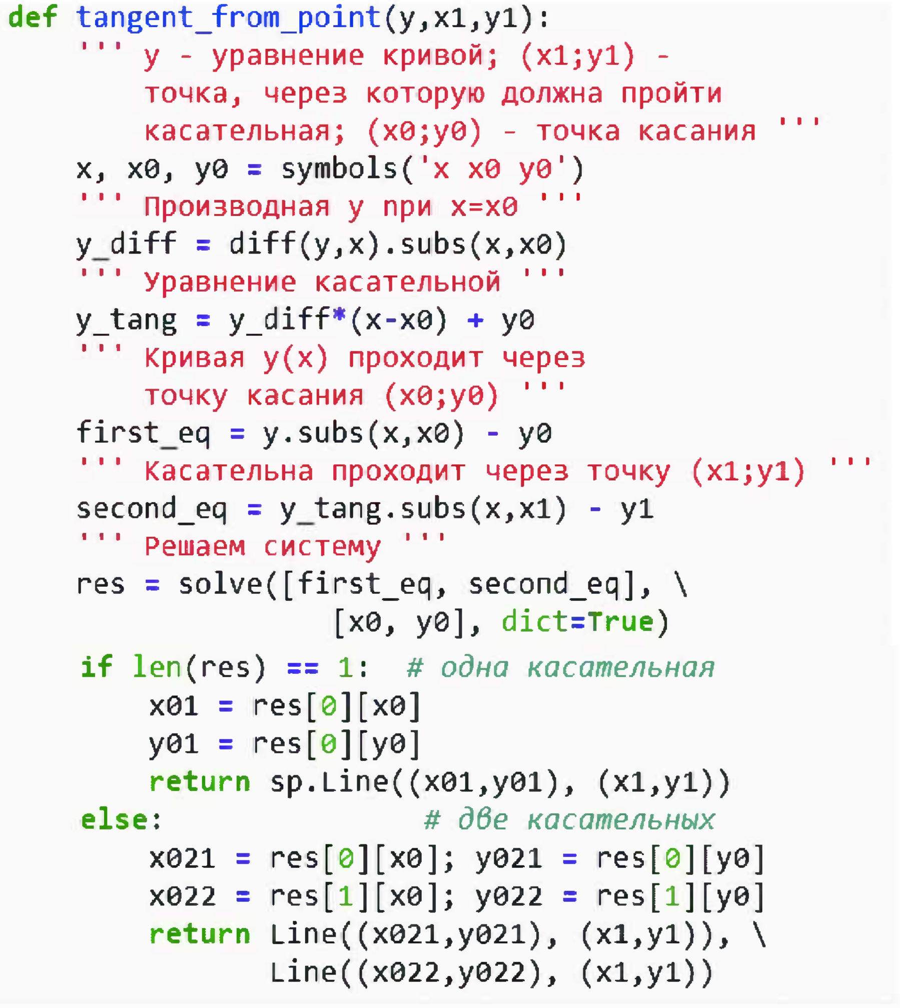
Возвращает уравнение касательной (в виде общего уравнения прямой) к графику заданной функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$.



```python
def tangent(y, x0):
    ''' Строит уравнение касательной
        к графику функции y(x) в точке
        с абсциссой x0 '''
    ''' (x0;y0) - точка касания '''
    y0 = y.subs(x, x0)
    ''' Касательная с уравнением y = kx+b
        проходит через точку M(x0;y0), а также
        через точку N(x0+1;y0+k) (k -
        угловой коэффициент)'''
    x1 = x0 + 1
    ''' Производная функции y при x=x0 '''
    k = diff(y,x).subs(x,x0)
    y1 = y0 + k
    ''' Касательная - это прямая, проходящая
         через точки M и N'''
    return Line((x0,y0), (x1,y1))
```

Функция tangent_from_point()

Возвращает уравнение касательной (в виде общего уравнения прямой), проведенной из заданной точки к графику заданной функции.

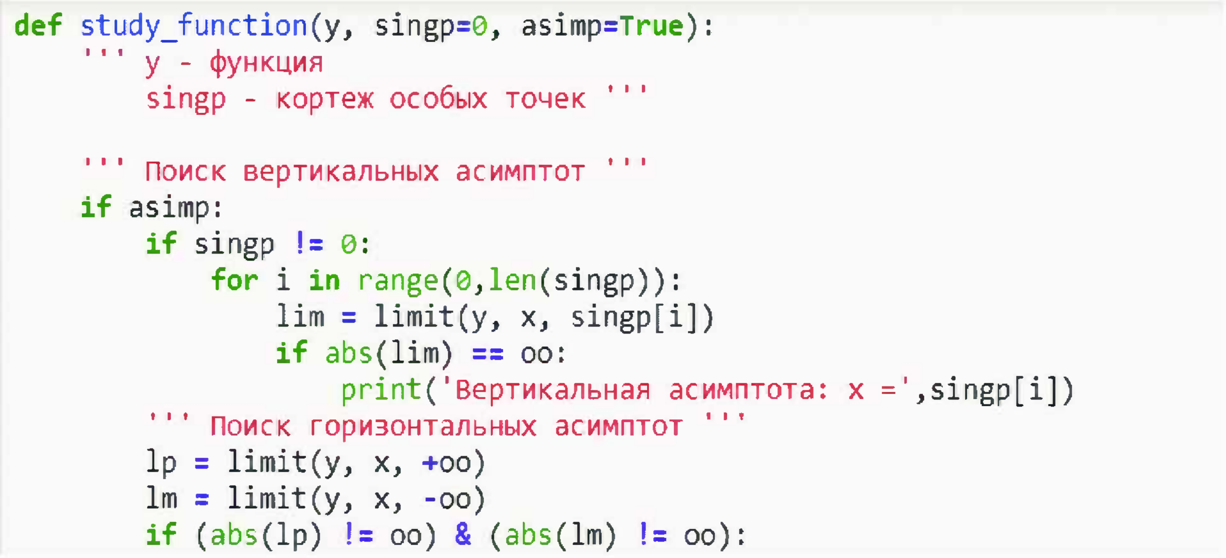


```
def tangent_from_point(y,x1,y1):
    ''' y - уравнение кривой; (x1;y1) -
        точка, через которую должна пройти
        касательная; (x0;y0) - точка касания '''
    x, x0, y0 = symbols('x x0 y0')
    ''' Производная y при x=x0 '''
    y_diff = diff(y,x).subs(x,x0)
    ''' Уравнение касательной '''
    y_tang = y_diff*(x-x0) + y0
    ''' Кривая y(x) проходит через
        точку касания (x0;y0) '''
    first_eq = y.subs(x,x0) - y0
    ''' Касательна проходит через точку (x1;y1) '''
    second_eq = y_tang.subs(x,x1) - y1
    ''' Решаем систему '''
    res = solve([first_eq, second_eq], \
                   [x0, y0], dict=True)
    if len(res) == 1:  # одна касательная
        x01 = res[0][x0]
        y01 = res[0][y0]
        return sp.Line((x01,y01), (x1,y1))
    else:               # две касательных
        x021 = res[0][x0]; y021 = res[0][y0]
        x022 = res[1][x0]; y022 = res[1][y0]
        return Line((x021,y021), (x1,y1)), \
               Line((x022,y022), (x1,y1))
```

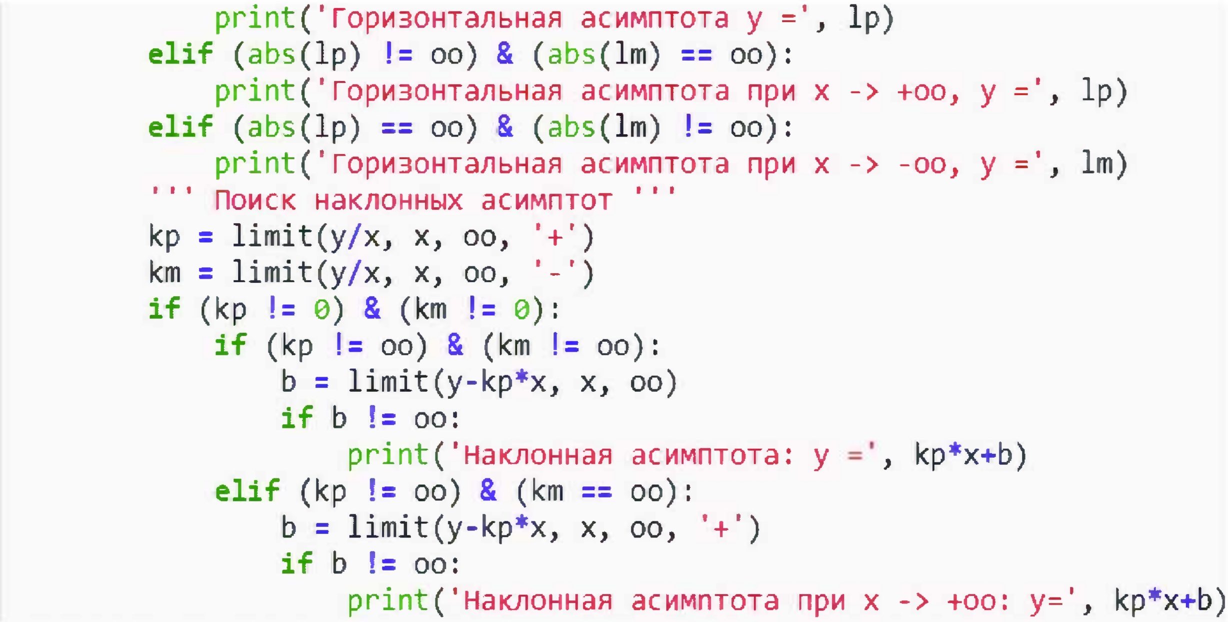
Функция study_function()

Осуществляет полное исследование функции одной переменной.

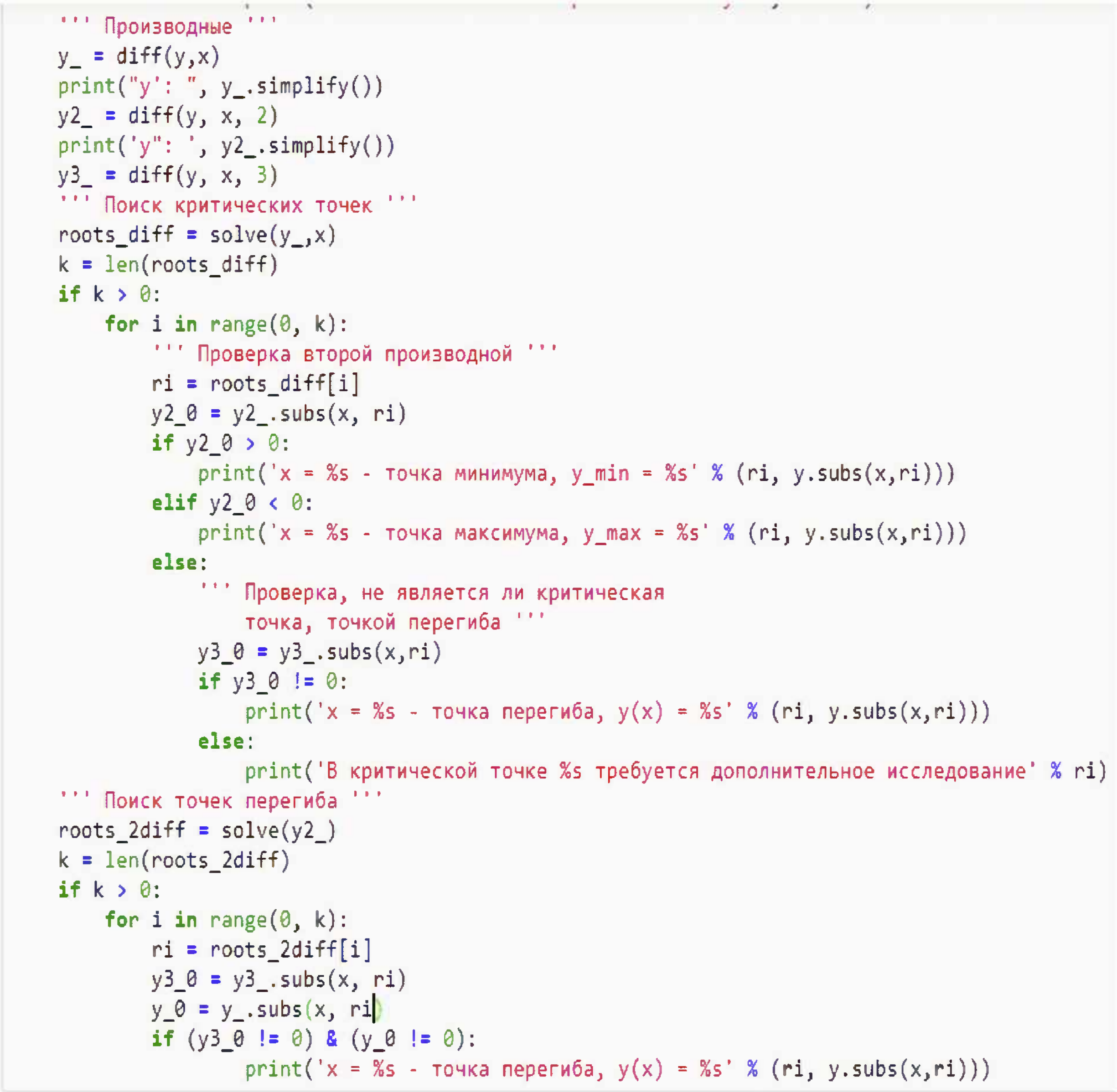
Возвращает: уравнения асимптот; выражения для первой и второй производных; абсциссы и ординаты точек экстремума и точек перегиба.



```
def study_function(y, singp=0, asimp=True):
    ''' y - функция
        singp - кортеж особых точек '''

    ''' Поиск вертикальных асимптот '''
    if asimp:
        if singp != 0:
            for i in range(0,len(singp)):
                lim = limit(y, x, singp[i])
                if abs(lim) == oo:
                    print('Вертикальная асимптота: x =',singp[i])
        ''' Поиск горизонтальных асимптот '''
        lp = limit(y, x, +oo)
        lm = limit(y, x, -oo)
        if (abs(lp) != oo) & (abs(lm) != oo):
```



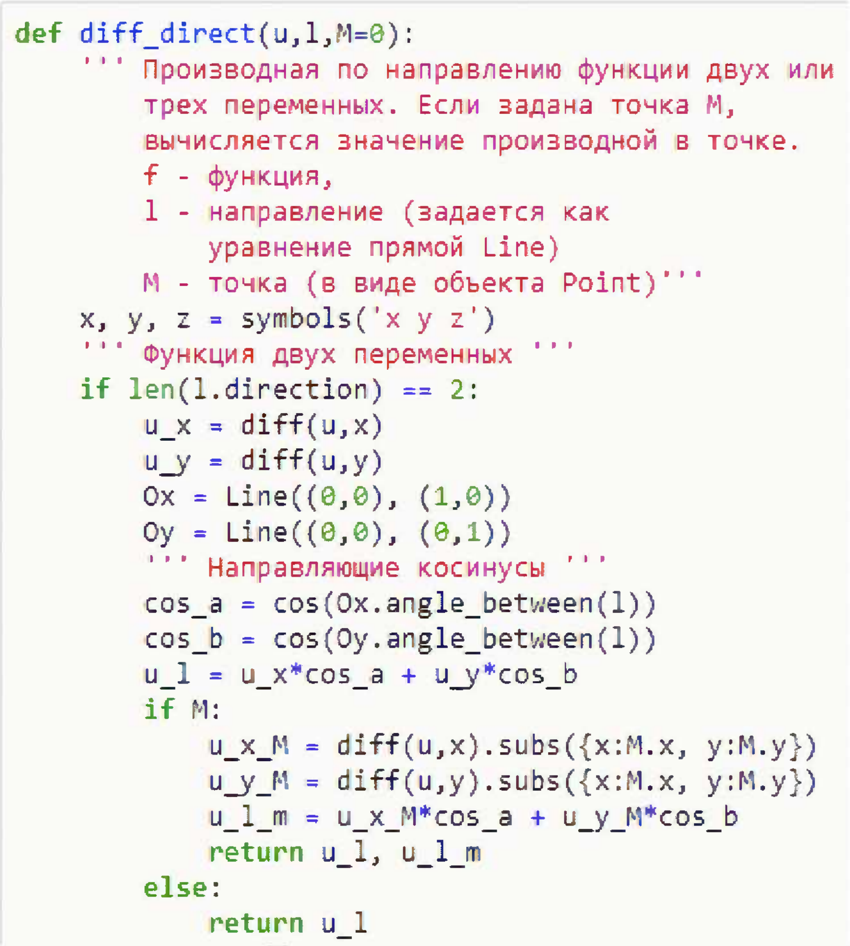
```
        print('Горизонтальная асимптота y =', lp)
    elif (abs(lp) != oo) & (abs(lm) == oo):
        print('Горизонтальная асимптота при x -> +oo, y =', lp)
    elif (abs(lp) == oo) & (abs(lm) != oo):
        print('Горизонтальная асимптота при x -> -oo, y =', lm)
    ''' Поиск наклонных асимптот '''
    kp = limit(y/x, x, oo, '+')
    km = limit(y/x, x, oo, '-')
    if (kp != 0) & (km != 0):
        if (kp != oo) & (km != oo):
            b = limit(y-kp*x, x, oo)
            if b != oo:
                print('Наклонная асимптота: y =', kp*x+b)
        elif (kp != oo) & (km == oo):
            b = limit(y-kp*x, x, oo, '+')
            if b != oo:
                print('Наклонная асимптота при x -> +oo: y=', kp*x+b)
```



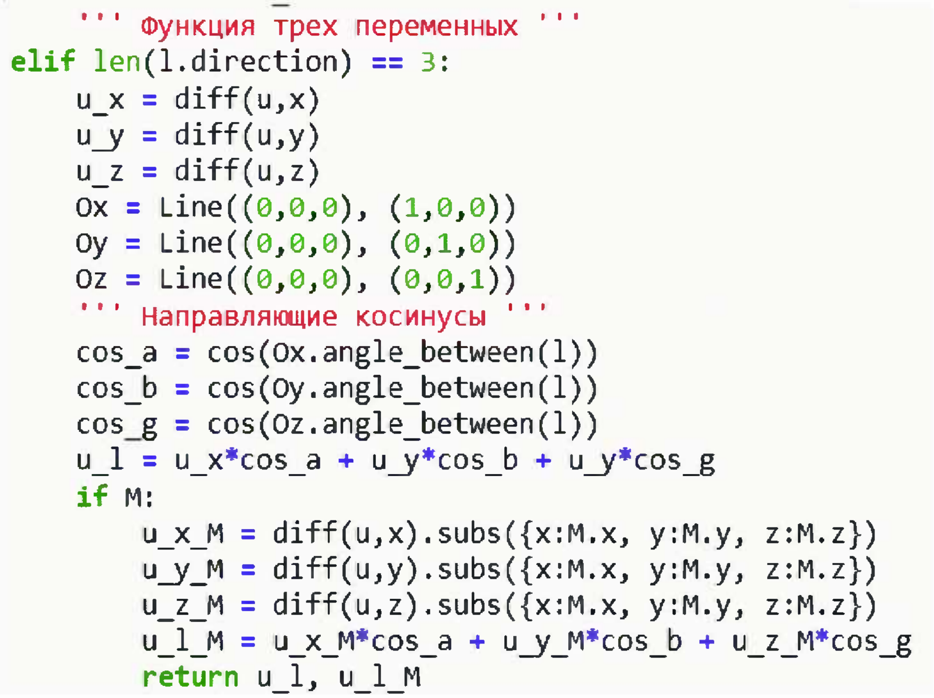
```
''' Производные '''
y_ = diff(y,x)
print("y': ", y_.simplify())
y2_ = diff(y, x, 2)
print('y": ', y2_.simplify())
y3_ = diff(y, x, 3)
''' Поиск критических точек '''
roots_diff = solve(y_,x)
k = len(roots_diff)
if k > 0:
    for i in range(0, k):
        ''' Проверка второй производной '''
        ri = roots_diff[i]
        y2_0 = y2_.subs(x, ri)
        if y2_0 > 0:
            print('x = %s - точка минимума, y_min = %s' % (ri, y.subs(x,ri)))
        elif y2_0 < 0:
            print('x = %s - точка максимума, y_max = %s' % (ri, y.subs(x,ri)))
        else:
            ''' Проверка, не является ли критическая
                точка, точкой перегиба '''
            y3_0 = y3_.subs(x,ri)
            if y3_0 != 0:
                print('x = %s - точка перегиба, y(x) = %s' % (ri, y.subs(x,ri)))
            else:
                print('В критической точке %s требуется дополнительное исследование' % ri)
''' Поиск точек перегиба '''
roots_2diff = solve(y2_)
k = len(roots_2diff)
if k > 0:
    for i in range(0, k):
        ri = roots_2diff[i]
        y3_0 = y3_.subs(x, ri)
        y_0 = y_.subs(x, ri)
        if (y3_0 != 0) & (y_0 != 0):
            print('x = %s - точка перегиба, y(x) = %s' % (ri, y.subs(x,ri)))
```

Функция diff_direct()

Возвращает координаты (в виде снмвольных выражений и числовые) производой по направлению функции двух или трех переменных.



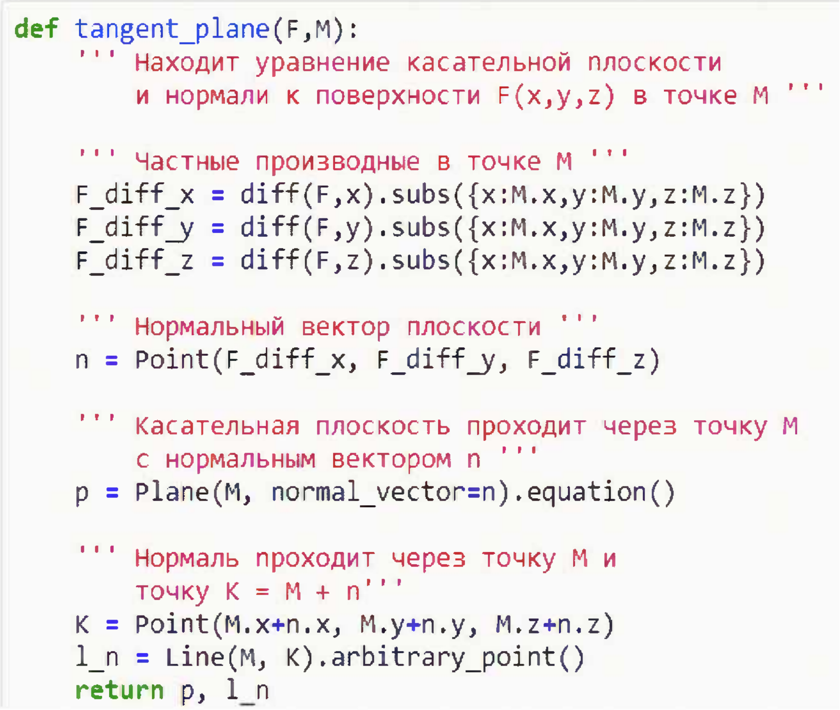
```
def diff_direct(u,l,M=0):
    ''' Производная по направлению функции двух или
        трех переменных. Если задана точка M,
        вычисляется значение производной в точке.
        f - функция,
        l - направление (задается как
            уравнение прямой Line)
        M - точка (в виде объекта Point)'''
    x, y, z = symbols('x y z')
    ''' Функция двух переменных '''
    if len(l.direction) == 2:
        u_x = diff(u,x)
        u_y = diff(u,y)
        Ox = Line((0,0), (1,0))
        Oy = Line((0,0), (0,1))
        ''' Направляющие косинусы '''
        cos_a = cos(Ox.angle_between(l))
        cos_b = cos(Oy.angle_between(l))
        u_l = u_x*cos_a + u_y*cos_b
        if M:
            u_x_M = diff(u,x).subs({x:M.x, y:M.y})
            u_y_M = diff(u,y).subs({x:M.x, y:M.y})
            u_l_m = u_x_M*cos_a + u_y_M*cos_b
            return u_l, u_l_m
        else:
            return u_l
```



```
    ''' Функция трех переменных '''
elif len(l.direction) == 3:
    u_x = diff(u,x)
    u_y = diff(u,y)
    u_z = diff(u,z)
    Ox = Line((0,0,0), (1,0,0))
    Oy = Line((0,0,0), (0,1,0))
    Oz = Line((0,0,0), (0,0,1))
    ''' Направляющие косинусы '''
    cos_a = cos(Ox.angle_between(l))
    cos_b = cos(Oy.angle_between(l))
    cos_g = cos(Oz.angle_between(l))
    u_l = u_x*cos_a + u_y*cos_b + u_y*cos_g
    if M:
        u_x_M = diff(u,x).subs({x:M.x, y:M.y, z:M.z})
        u_y_M = diff(u,y).subs({x:M.x, y:M.y, z:M.z})
        u_z_M = diff(u,z).subs({x:M.x, y:M.y, z:M.z})
        u_l_M = u_x_M*cos_a + u_y_M*cos_b + u_z_M*cos_g
        return u_l, u_l_M
```

Функция tangent_plane()

Возвращает уравнение касательной плоскости (в виде общего уравнения плоскости) и уравнения нормали (в параметрическом виде) к поверхности, заданной в виде функции трех переменных.

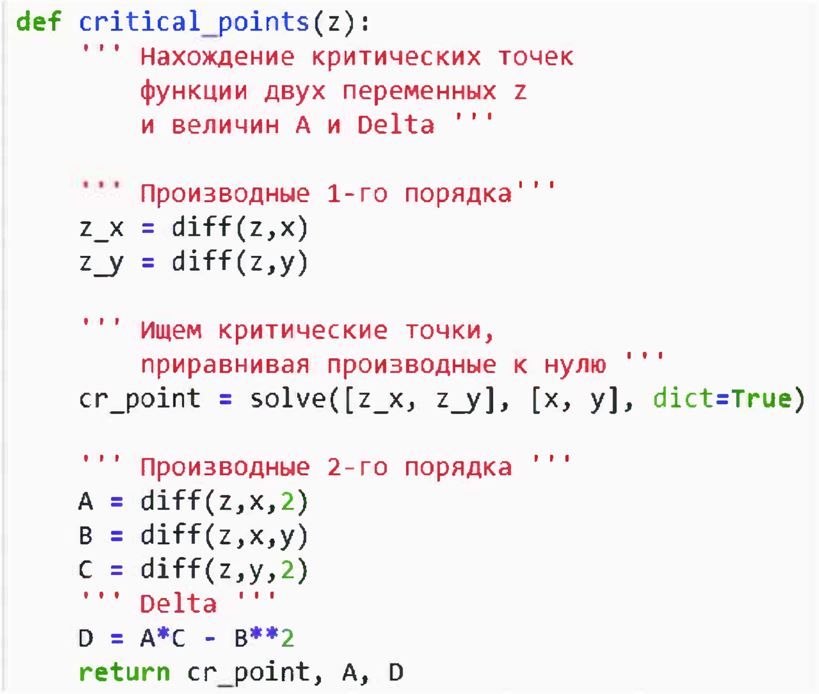


```
def tangent_plane(F,M):
    ''' Находит уравнение касательной плоскости
        и нормали к поверхности F(x,y,z) в точке M '''

    ''' Частные производные в точке M '''
    F_diff_x = diff(F,x).subs({x:M.x,y:M.y,z:M.z})
    F_diff_y = diff(F,y).subs({x:M.x,y:M.y,z:M.z})
    F_diff_z = diff(F,z).subs({x:M.x,y:M.y,z:M.z})

    ''' Нормальный вектор плоскости '''
    n = Point(F_diff_x, F_diff_y, F_diff_z)

    ''' Касательная плоскость проходит через точку M
        с нормальным вектором n '''
    p = Plane(M, normal_vector=n).equation()

    ''' Нормаль проходит через точку M и
        точку K = M + n'''
    K = Point(M.x+n.x, M.y+n.y, M.z+n.z)
    l_n = Line(M, K).arbitrary_point()
    return p, l_n
```

Функция critical_points ()

Возвращает: 1) критические точки заданной функции двух переменных; 2) выражения (символьные) для признаков A и Δ

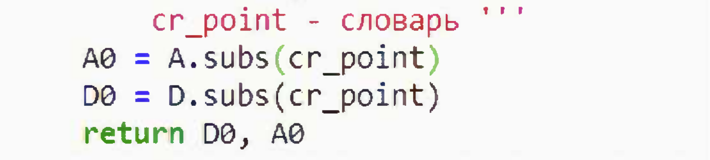
$$(A = f''_{xx};\ \Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2).$$



```
def critical_points(z):
    ''' Нахождение критических точек
        функции двух переменных z
        и величин A и Delta '''

    ''' Производные 1-го порядка'''
    z_x = diff(z,x)
    z_y = diff(z,y)

    ''' Ищем критические точки,
        приравнивая производные к нулю '''
    cr_point = solve([z_x, z_y], [x, y], dict=True)

    ''' Производные 2-го порядка '''
    A = diff(z,x,2)
    B = diff(z,x,y)
    C = diff(z,y,2)
    ''' Delta '''
    D = A*C - B**2
    return cr_point, A, D
```

Функция suff_indic()

Используя имеющиеся символьные выражения для признаков $A = f''_{xx}$ и $\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2$, возвращает значения этих признаков в заданной критической точке.



```
def suff_indic(A, D, cr_point):
    ''' A и D - функции двух переменных,
        cr_point - словарь '''
    A0 = A.subs(cr_point)
    D0 = D.subs(cr_point)
    return D0, A0
```

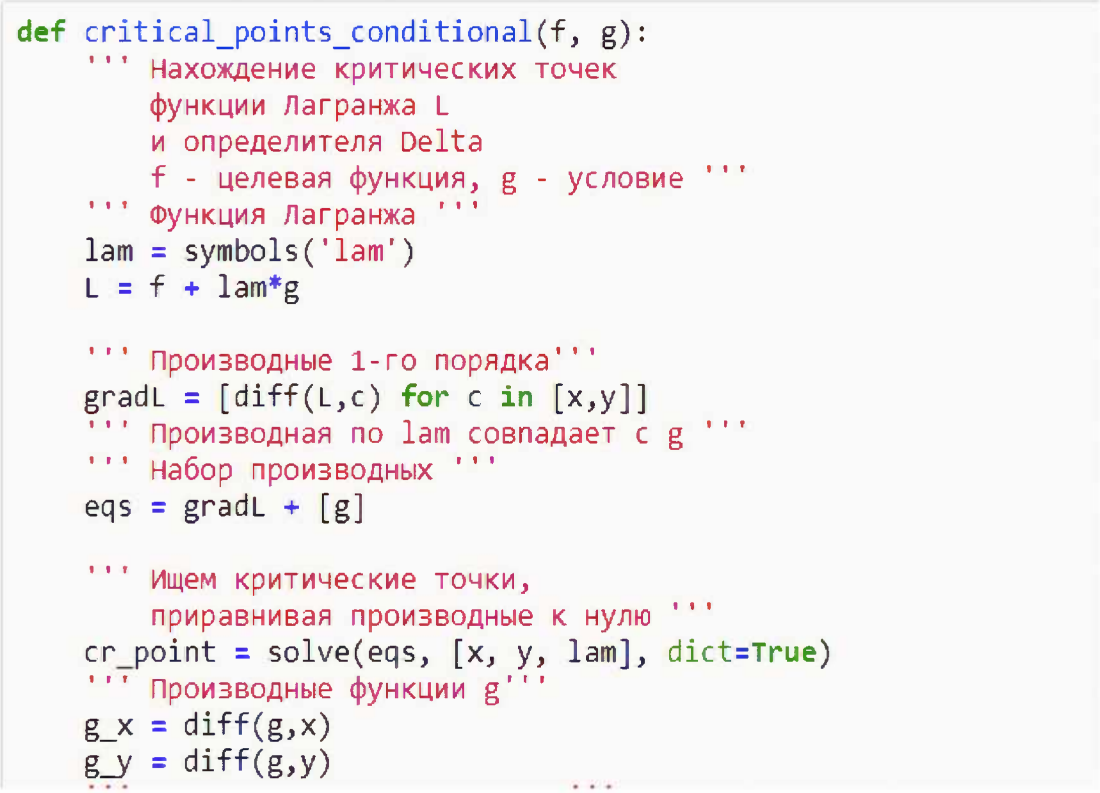
Функция ctitical_points_conditional()

Используется для поиска условного экстремума.
Возвращает:
1) критические точки функции Лагранжа

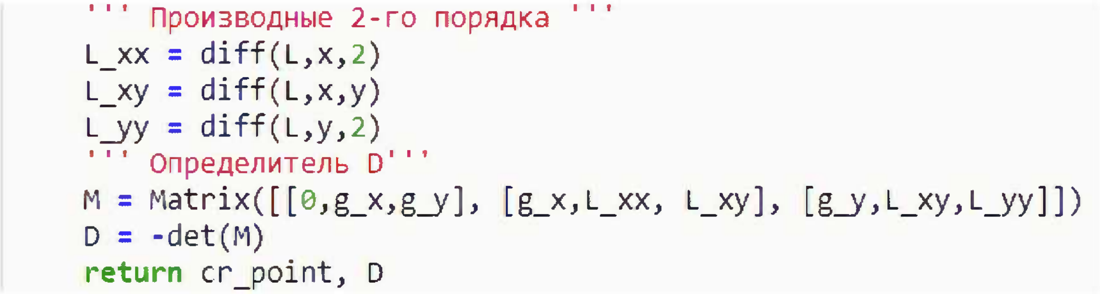
$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y);$$

2) выражение (символьное) для определителя

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix}.$$



```
def critical_points_conditional(f, g):
    ''' Нахождение критических точек
        функции Лагранжа L
        и определителя Delta
        f - целевая функция, g - условие '''
    ''' Функция Лагранжа '''
    lam = symbols('lam')
    L = f + lam*g

    ''' Производные 1-го порядка'''
    gradL = [diff(L,c) for c in [x,y]]
    ''' Производная по lam совпадает с g '''
    ''' Набор производных '''
    eqs = gradL + [g]

    ''' Ищем критические точки,
        приравнивая производные к нулю '''
    cr_point = solve(eqs, [x, y, lam], dict=True)
    ''' Производные функции g'''
    g_x = diff(g,x)
    g_y = diff(g,y)
```

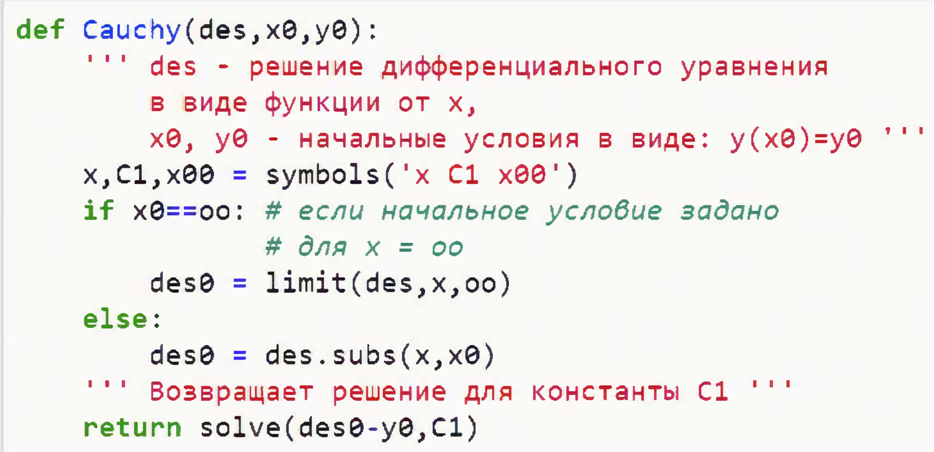


```
    ''' Производные 2-го порядка '''
    L_xx = diff(L,x,2)
    L_xy = diff(L,x,y)
    L_yy = diff(L,y,2)
    ''' Определитель D'''
    M = Matrix([[0,g_x,g_y], [g_x,L_xx, L_xy], [g_y,L_xy,L_yy]])
    D = -det(M)
    return cr_point, D
```

Функции для раздела «Дифференциальные уравнения»

Функция Cauchy()

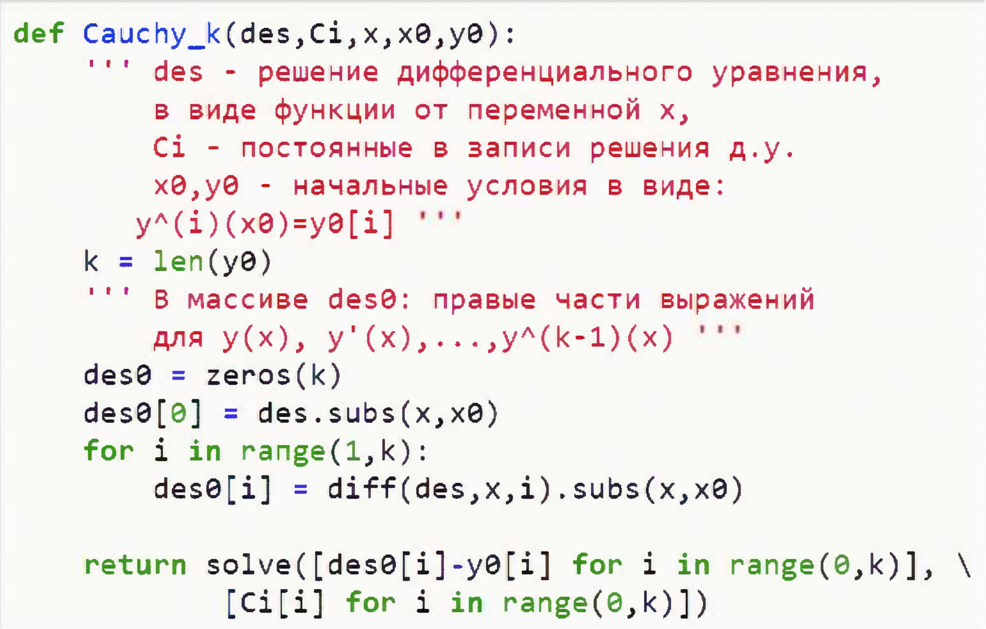
Находит значение произвольной ностоянной в задаче Коши для дифференциального уравиения первого норядка.



```
def Cauchy(des,x0,y0):
    ''' des - решение дифференциального уравнения
        в виде функции от x,
        x0, y0 - начальные условия в виде: y(x0)=y0 '''
    x,C1,x00 = symbols('x C1 x00')
    if x0==oo: # если начальное условие задано
               # для x = oo
        des0 = limit(des,x,oo)
    else:
        des0 = des.subs(x,x0)
    ''' Возвращает решение для константы C1 '''
    return solve(des0-y0,C1)
```

Функцня Cauchy_k()

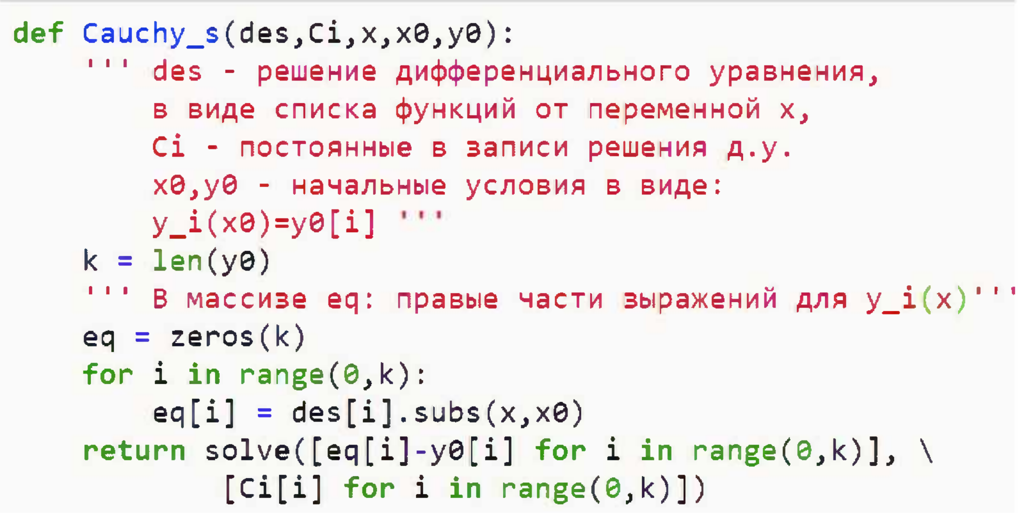
Находит значения произвольных постоянных в задаче Коши для дифференциального уравнения *k*–го порядка.



```
def Cauchy_k(des,Ci,x,x0,y0):
    ''' des - решение дифференциального уравнения,
        в виде функции от переменной x,
        Ci - постоянные в записи решения д.у.
        x0,y0 - начальные условия в виде:
       y^(i)(x0)=y0[i] '''
    k = len(y0)
    ''' В массиве des0: правые части выражений
        для y(x), y'(x),...,y^(k-1)(x) '''
    des0 = zeros(k)
    des0[0] = des.subs(x,x0)
    for i in range(1,k):
        des0[i] = diff(des,x,i).subs(x,x0)

    return solve([des0[i]-y0[i] for i in range(0,k)], \
            [Ci[i] for i in range(0,k)])
```

Функция Cauchy_s()

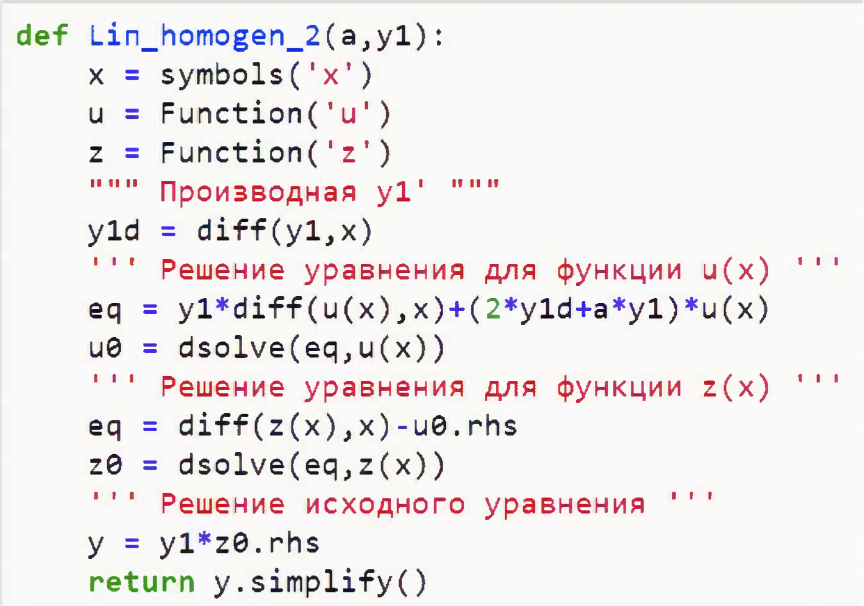
Находит значения произвольных постоянных в задаче Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка.



```
def Cauchy_s(des,Ci,x,x0,y0):
    ''' des - решение дифференциального уравнения,
        в виде списка функций от переменной x,
        Ci - постоянные в записи решения д.у.
        x0,y0 - начальные условия в виде:
        y_i(x0)=y0[i] '''
    k = len(y0)
    ''' В массиве eq: правые части выражений для y_i(x)'''
    eq = zeros(k)
    for i in range(0,k):
        eq[i] = des[i].subs(x,x0)
    return solve([eq[i]-y0[i] for i in range(0,k)], \
            [Ci[i] for i in range(0,k)])
```

Функция Lin_homogen_2()

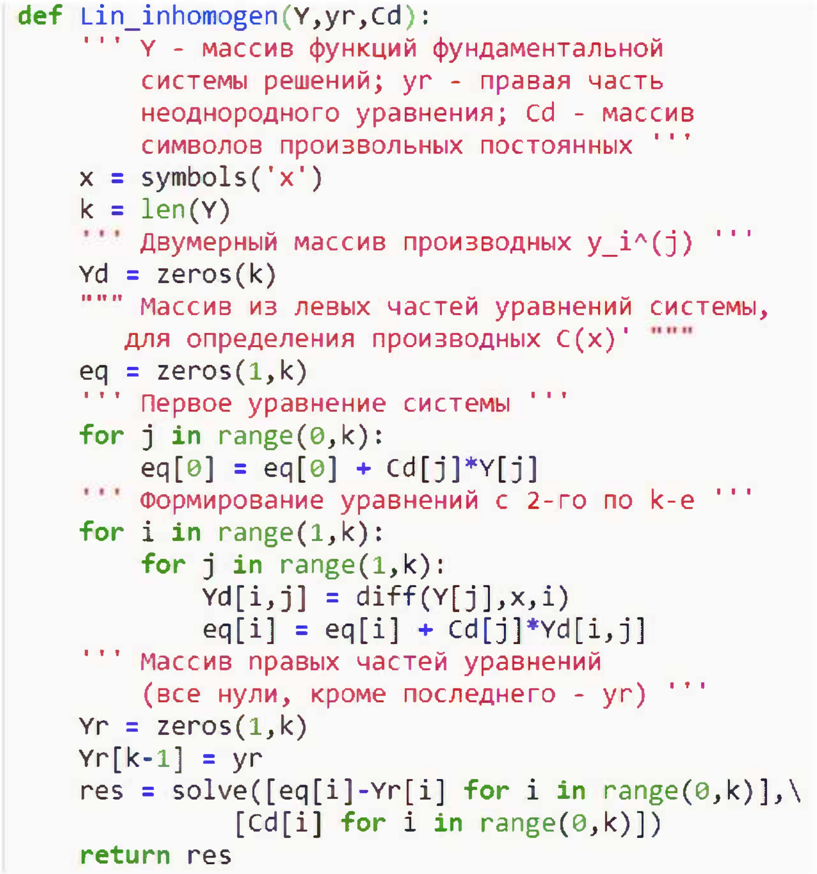
Осуществляет поиск общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка по известному частному решению данного уравнения.



```
def Lin_homogen_2(a,y1):
    x = symbols('x')
    u = Function('u')
    z = Function('z')
    """ Производная y1' """
    y1d = diff(y1,x)
    ''' Решение уравнения для функции u(x) '''
    eq = y1*diff(u(x),x)+(2*y1d+a*y1)*u(x)
    u0 = dsolve(eq,u(x))
    ''' Решение уравнения для функции z(x) '''
    eq = diff(z(x),x)-u0.rhs
    z0 = dsolve(eq,z(x))
    ''' Решение исходного уравнения '''
    y = y1*z0.rhs
    return y.simplify()
```

Функция Lin_inhomogen()

Осуществляет поиск частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами методом вариации постоянных. Находит значения $C_i'(x)$ функций $C_i(x)$ (C_i – произвольные постоянные общего решения однородного уравнения).

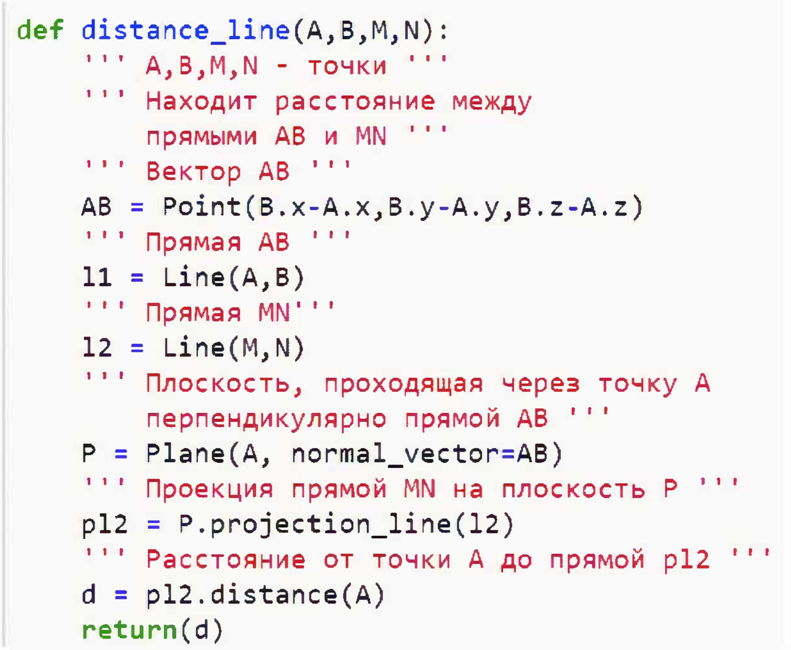


```
def Lin_inhomogen(Y,yr,Cd):
    ''' Y - массив функций фундаментальной
        системы решений; yr - правая часть
        неоднородного уравнения; Cd - массив
        символов произвольных постоянных '''
    x = symbols('x')
    k = len(Y)
    ''' Двумерный массив производных y_i^(j) '''
    Yd = zeros(k)
    """ Массив из левых частей уравнений системы,
       для определения производных C(x)' """
    eq = zeros(1,k)
    ''' Первое уравнение системы '''
    for j in range(0,k):
        eq[0] = eq[0] + Cd[j]*Y[j]
    ''' Формирование уравнений с 2-го по k-е '''
    for i in range(1,k):
        for j in range(1,k):
            Yd[i,j] = diff(Y[j],x,i)
            eq[i] = eq[i] + Cd[j]*Yd[i,j]
    ''' Массив правых частей уравнений
        (все нули, кроме последнего - yr) '''
    Yr = zeros(1,k)
    Yr[k-1] = yr
    res = solve([eq[i]-Yr[i] for i in range(0,k)],\
                [Cd[i] for i in range(0,k)])
    return res
```

Функции для раздела «Аналитическая геометрия»

Функция distance_line()

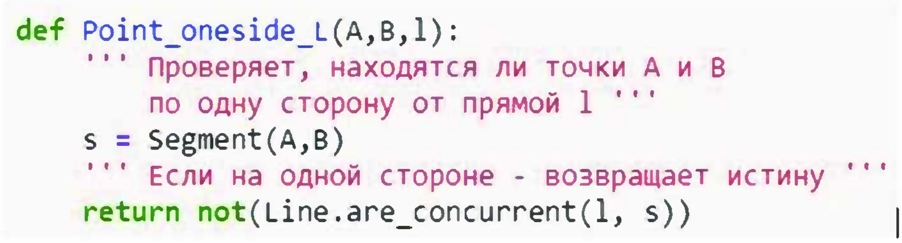
Находит расстояние между двумя прямыми (в том числе скрещивающимися). Каждая прямая задается двумя принадлежащими ей точками.



```
def distance_line(A,B,M,N):
    ''' A,B,M,N - точки '''
    ''' Находит расстояние между
        прямыми AB и MN '''
    ''' Вектор AB '''
    AB = Point(B.x-A.x,B.y-A.y,B.z-A.z)
    ''' Прямая AB '''
    l1 = Line(A,B)
    ''' Прямая MN'''
    l2 = Line(M,N)
    ''' Плоскость, проходящая через точку A
        перпендикулярно прямой AB '''
    P = Plane(A, normal_vector=AB)
    ''' Проекция прямой MN на плоскость P '''
    pl2 = P.projection_line(l2)
    ''' Расстояние от точки A до прямой pl2 '''
    d = pl2.distance(A)
    return(d)
```

Функция Point_oneside_L()

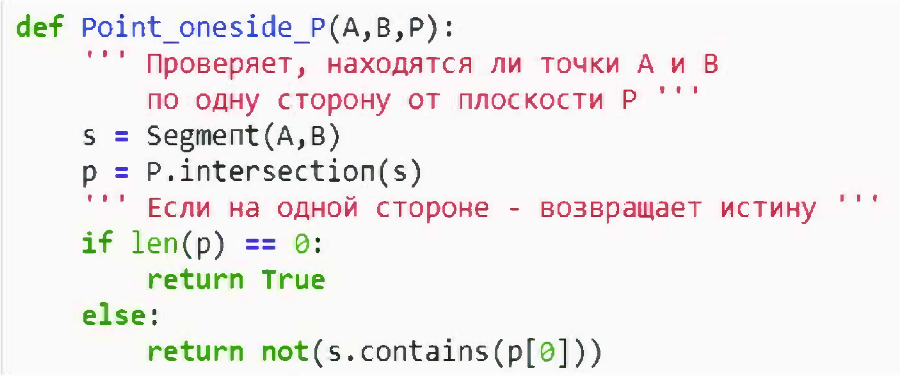
Возвращает истину, если точки *A* и *B* находятся по одну сторону от прямой *l*.



```
def Point_oneside_L(A,B,l):
    ''' Проверяет, находятся ли точки A и B
        по одну сторону от прямой l '''
    s = Segment(A,B)
    ''' Если на одной стороне - возвращает истину '''
    return not(Line.are_concurrent(l, s))
```

Фуикция Point_oneside_P()

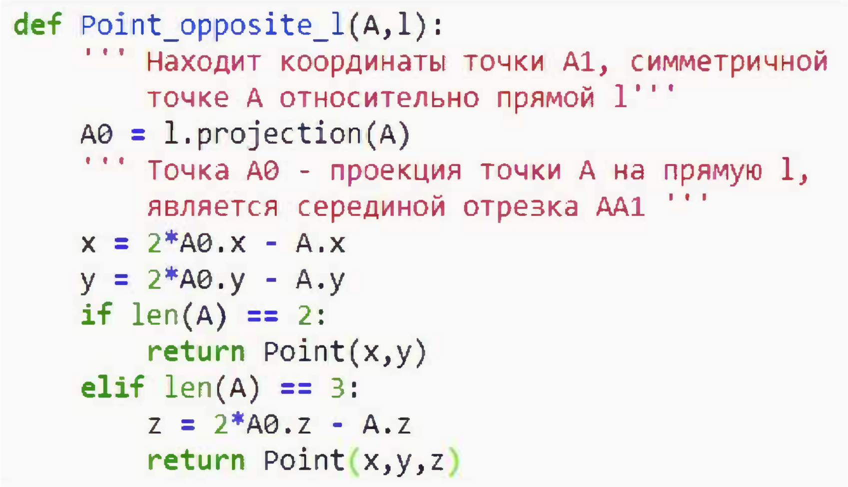
Возвращает истину, если точки *A* и *B* находятся по одну сторону от плоскости *P*.



```
def Point_oneside_P(A,B,P):
    ''' Проверяет, находятся ли точки A и B
        по одну сторону от плоскости P '''
    s = Segment(A,B)
    p = P.intersection(s)
    ''' Если на одной стороне - возвращает истину '''
    if len(p) == 0:
        return True
    else:
        return not(s.contains(p[0]))
```

Фуикция Point_opposite_l

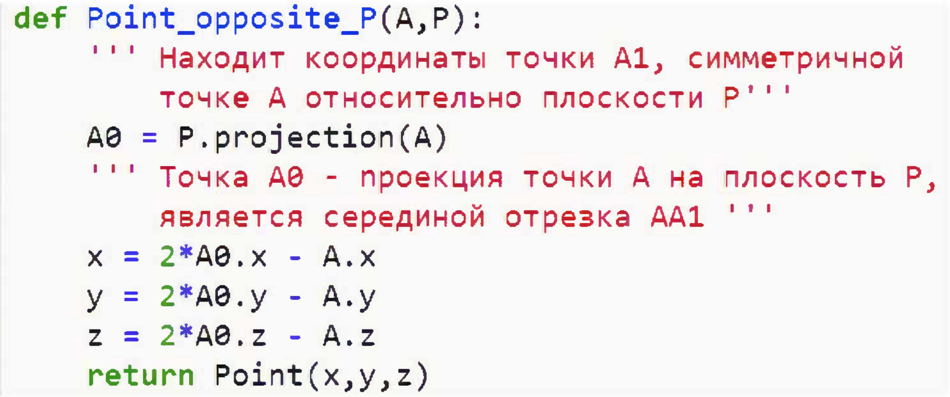
Возвращает коордииаты точкн, симметричной отиосительно заданной нрямой (на нлоскости или в пространстве).



```
def Point_opposite_l(A,l):
    ''' Находит координаты точки A1, симметричной
        точке A относительно прямой l'''
    A0 = l.projection(A)
    ''' Точка A0 - проекция точки A на прямую l,
        является серединой отрезка AA1 '''
    x = 2*A0.x - A.x
    y = 2*A0.y - A.y
    if len(A) == 2:
        return Point(x,y)
    elif len(A) == 3:
        z = 2*A0.z - A.z
        return Point(x,y,z)
```

Фуикция Point_opposite_P()

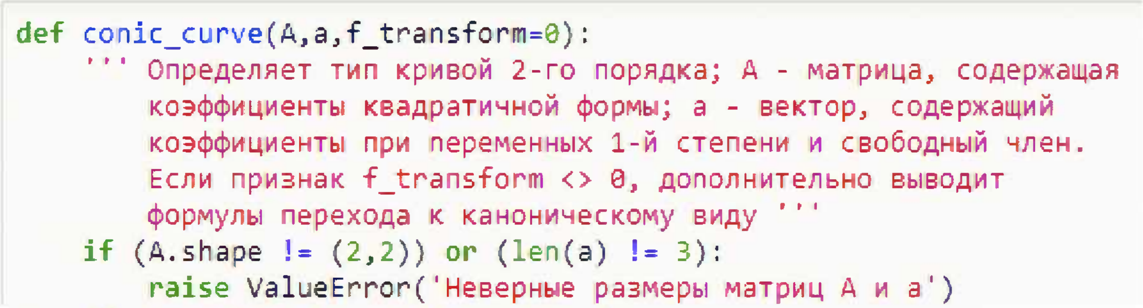
Возвращает координаты точки, симметричпой относительно заданной илоскостн.



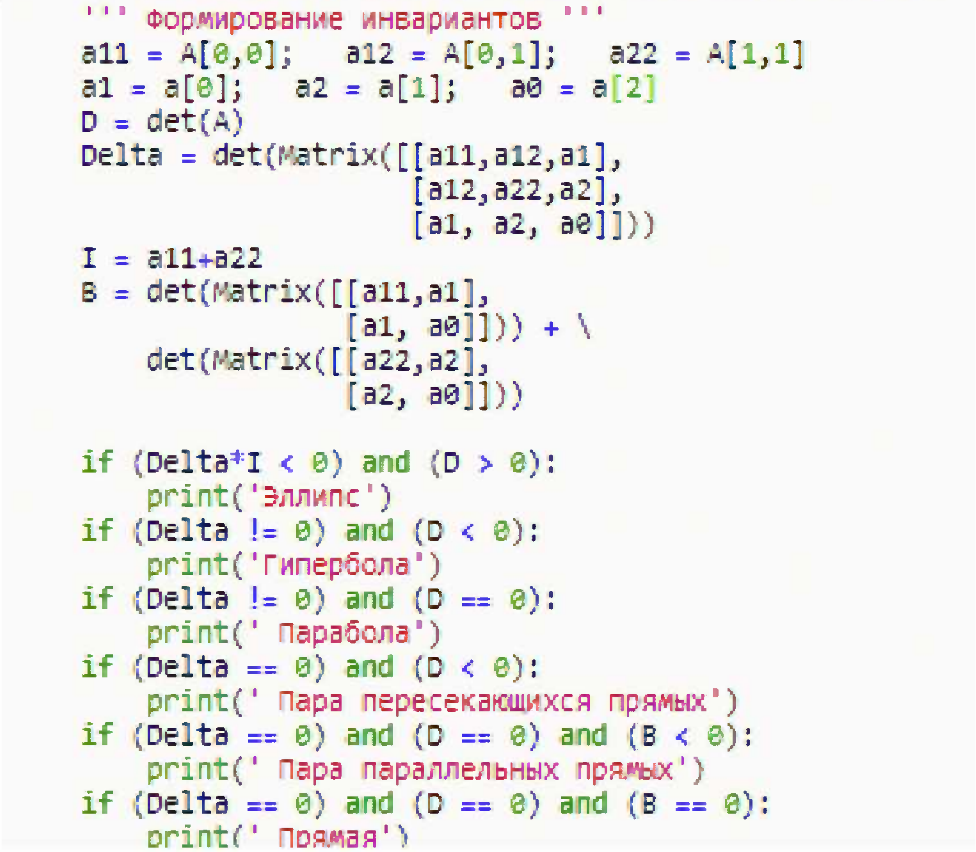
```
def Point_opposite_P(A,P):
    ''' Находит координаты точки A1, симметричной
        точке A относительно плоскости P'''
    A0 = P.projection(A)
    ''' Точка A0 - проекция точки A на плоскость P,
        является серединой отрезка AA1 '''
    x = 2*A0.x - A.x
    y = 2*A0.y - A.y
    z = 2*A0.z - A.z
    return Point(x,y,z)
```

Функция Conic_curve()

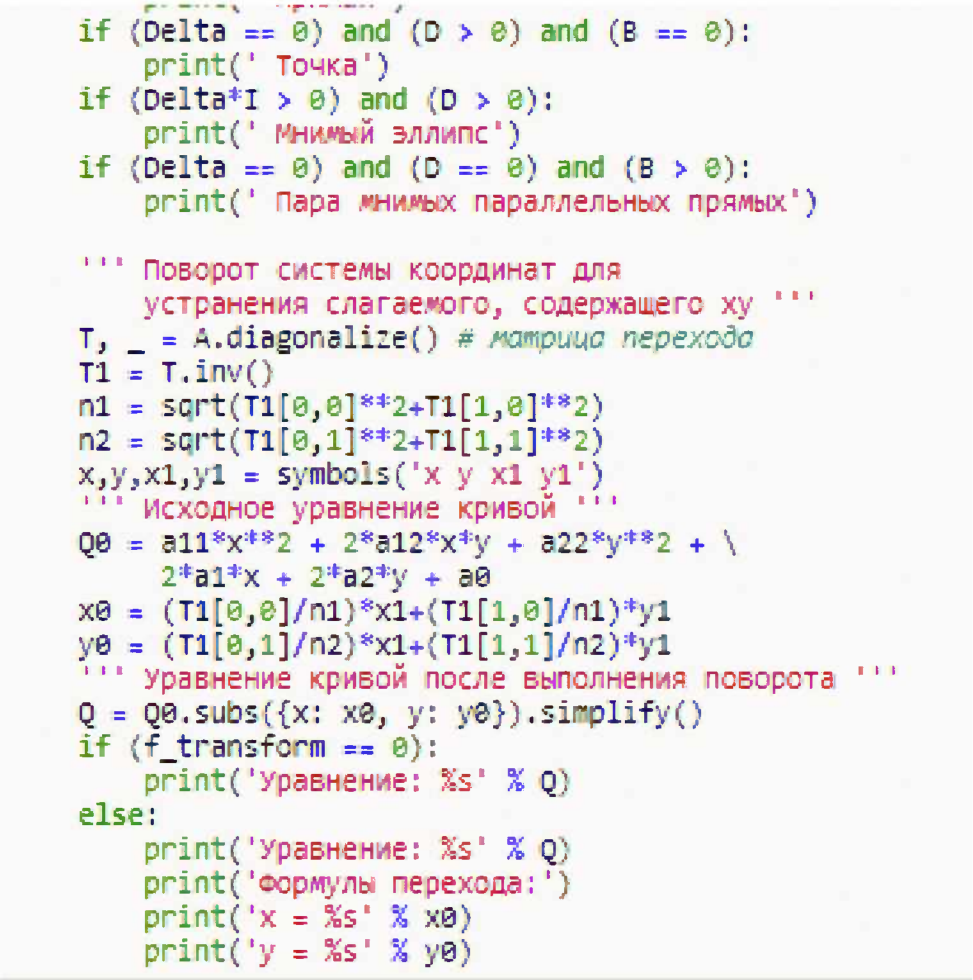
По данным коэффициентам уравнения кривой второго порядка определяет тип кривой и выполняет преобразование поворота для устранения слагаемого, содержащего произведение переменных.



```
def conic_curve(A,a,f_transform=0):
    ''' Определяет тип кривой 2-го порядка; A - матрица, содержащая
        коэффициенты квадратичной формы; a - вектор, содержащий
        коэффициенты при переменных 1-й степени и свободный член.
        Если признак f_transform <> 0, дополнительно выводит
        формулы перехода к каноническому виду '''
    if (A.shape != (2,2)) or (len(a) != 3):
        raise ValueError('Неверные размеры матриц A и a')
```



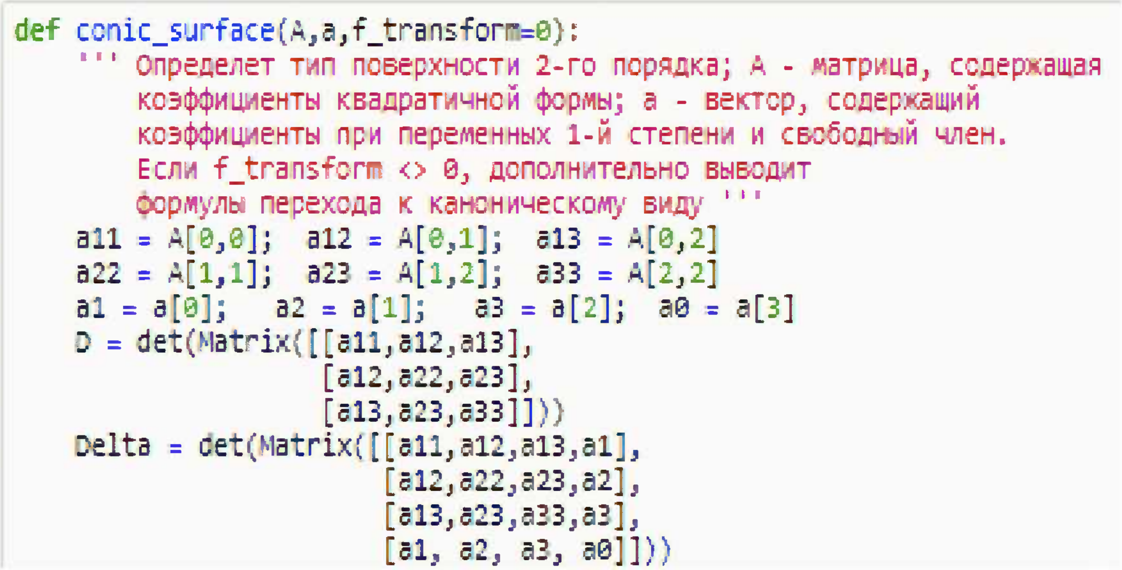
```
    ''' формирование инвариантов '''
    a11 = A[0,0];   a12 = A[0,1];   a22 = A[1,1]
    a1 = a[0];   a2 = a[1];   a0 = a[2]
    D = det(A)
    Delta = det(Matrix([[a11,a12,a1],
                        [a12,a22,a2],
                        [a1, a2, a0]]))
    I = a11+a22
    B = det(Matrix([[a11,a1],
                    [a1, a0]])) + \
        det(Matrix([[a22,a2],
                    [a2, a0]]))

    if (Delta*I < 0) and (D > 0):
        print('Эллипс')
    if (Delta != 0) and (D < 0):
        print('Гипербола')
    if (Delta != 0) and (D == 0):
        print(' Парабола')
    if (Delta == 0) and (D < 0):
        print(' Пара пересекающихся прямых')
    if (Delta == 0) and (D == 0) and (B < 0):
        print(' Пара параллельных прямых')
    if (Delta == 0) and (D == 0) and (B == 0):
        print(' Прямая')
```



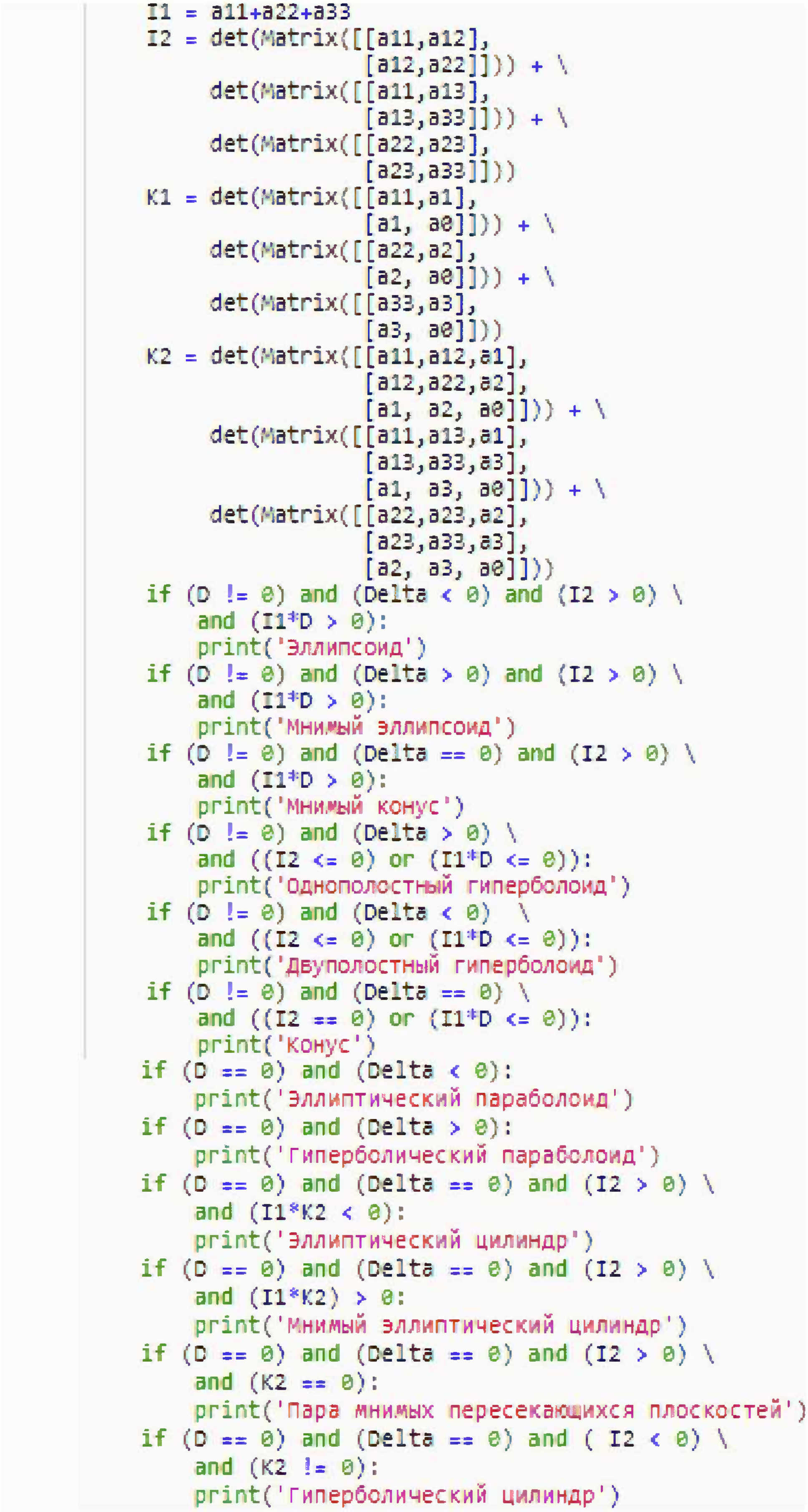
```
    if (Delta == 0) and (D > 0) and (B == 0):
        print(' Точка')
    if (Delta*I > 0) and (D > 0):
        print(' Мнимый эллипс')
    if (Delta == 0) and (D == 0) and (B > 0):
        print(' Пара мнимых параллельных прямых')

    ''' Поворот системы координат для
        устранения слагаемого, содержащего xy '''
    T, _ = A.diagonalize() # матрица перехода
    T1 = T.inv()
    n1 = sqrt(T1[0,0]**2+T1[1,0]**2)
    n2 = sqrt(T1[0,1]**2+T1[1,1]**2)
    x,y,x1,y1 = symbols('x y x1 y1')
    ''' Исходное уравнение кривой '''
    Q0 = a11*x**2 + 2*a12*x*y + a22*y**2 + \
          2*a1*x + 2*a2*y + a0
    x0 = (T1[0,0]/n1)*x1+(T1[1,0]/n1)*y1
    y0 = (T1[0,1]/n2)*x1+(T1[1,1]/n2)*y1
    ''' Уравнение кривой после выполнения поворота '''
    Q = Q0.subs({x: x0, y: y0}).simplify()
    if (f_transform == 0):
        print('Уравнение: %s' % Q)
    else:
        print('Уравнение: %s' % Q)
        print('Формулы перехода:')
        print('x = %s' % x0)
        print('y = %s' % y0)
```

Функция Conic_surface()

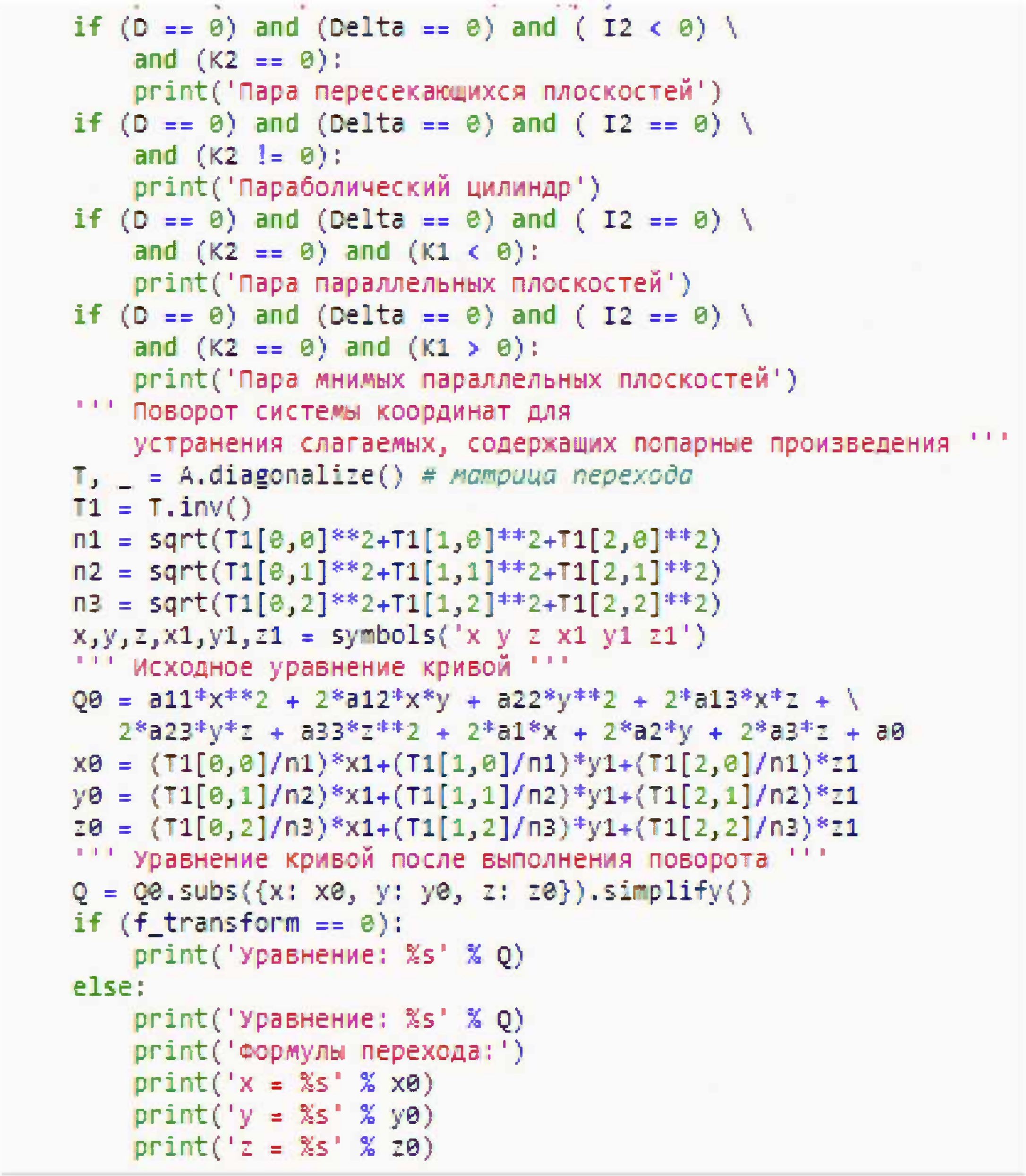
По данным коэффициентам уравнения поверхности второго порядка определяет тип поверхности и выполняет преобразование поворота для устранения слагаемых, содержащих произведения переменных.



```
def conic_surface(A,a,f_transform=0):
    ''' Определет тип поверхности 2-го порядка; A - матрица, содержащая
        коэффициенты квадратичной формы; a - вектор, содержащий
        коэффициенты при переменных 1-й степени и свободный член.
        Если f_transform <> 0, дополнительно выводит
        формулы перехода к каноническому виду '''
    a11 = A[0,0];  a12 = A[0,1];  a13 = A[0,2]
    a22 = A[1,1];  a23 = A[1,2];  a33 = A[2,2]
    a1 = a[0];   a2 = a[1];   a3 = a[2];  a0 = a[3]
    D = det(Matrix([[a11,a12,a13],
                    [a12,a22,a23],
                    [a13,a23,a33]]))
    Delta = det(Matrix([[a11,a12,a13,a1],
                        [a12,a22,a23,a2],
                        [a13,a23,a33,a3],
                        [a1, a2, a3, a0]]))
```



```
I1 = a11+a22+a33
I2 = det(Matrix([[a11,a12],
                 [a12,a22]])) + \
     det(Matrix([[a11,a13],
                 [a13,a33]])) + \
     det(Matrix([[a22,a23],
                 [a23,a33]]))
K1 = det(Matrix([[a11,a1],
                 [a1, a0]])) + \
     det(Matrix([[a22,a2],
                 [a2, a0]])) + \
     det(Matrix([[a33,a3],
                 [a3, a0]]))
K2 = det(Matrix([[a11,a12,a1],
                 [a12,a22,a2],
                 [a1, a2, a0]])) + \
     det(Matrix([[a11,a13,a1],
                 [a13,a33,a3],
                 [a1, a3, a0]])) + \
     det(Matrix([[a22,a23,a2],
                 [a23,a33,a3],
                 [a2, a3, a0]]))
if (D != 0) and (Delta < 0) and (I2 > 0) \
    and (I1*D > 0):
    print('Эллипсоид')
if (D != 0) and (Delta > 0) and (I2 > 0) \
    and (I1*D > 0):
    print('Мнимый эллипсоид')
if (D != 0) and (Delta == 0) and (I2 > 0) \
    and (I1*D > 0):
    print('Мнимый конус')
if (D != 0) and (Delta > 0) \
    and ((I2 <= 0) or (I1*D <= 0)):
    print('Однополостный гиперболоид')
if (D != 0) and (Delta < 0)  \
    and ((I2 <= 0) or (I1*D <= 0)):
    print('Двуполостный гиперболоид')
if (D != 0) and (Delta == 0) \
    and ((I2 == 0) or (I1*D <= 0)):
    print('Конус')
if (D == 0) and (Delta < 0):
    print('Эллиптический параболоид')
if (D == 0) and (Delta > 0):
    print('Гиперболический параболоид')
if (D == 0) and (Delta == 0) and (I2 > 0) \
    and (I1*K2 < 0):
    print('Эллиптический цилиндр')
if (D == 0) and (Delta == 0) and (I2 > 0) \
    and (I1*K2) > 0:
    print('Мнимый эллиптический цилиндр')
if (D == 0) and (Delta == 0) and (I2 > 0) \
    and (K2 == 0):
    print('Пара мнимых пересекающихся плоскостей')
if (D == 0) and (Delta == 0) and ( I2 < 0) \
    and (K2 != 0):
    print('Гиперболический цилиндр')
```

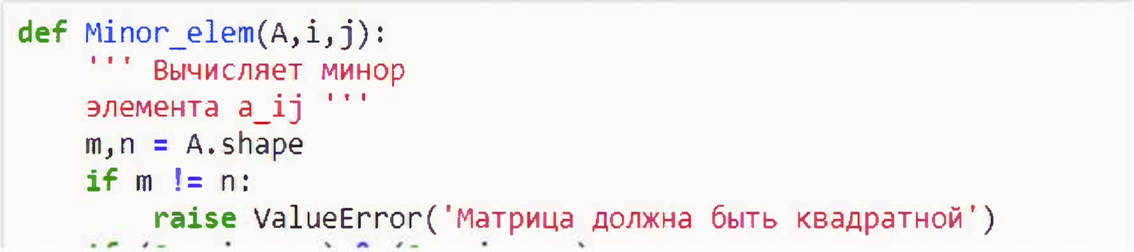


```
    if (D == 0) and (Delta == 0) and ( I2 < 0) \
        and (K2 == 0):
        print('Пара пересекающихся плоскостей')
    if (D == 0) and (Delta == 0) and ( I2 == 0) \
        and (K2 != 0):
        print('Параболический цилиндр')
    if (D == 0) and (Delta == 0) and ( I2 == 0) \
        and (K2 == 0) and (K1 < 0):
        print('Пара параллельных плоскостей')
    if (D == 0) and (Delta == 0) and ( I2 == 0) \
        and (K2 == 0) and (K1 > 0):
        print('Пара мнимых параллельных плоскостей')
    ''' Поворот системы координат для
        устранения слагаемых, содержащих попарные произведения '''
    T, _ = A.diagonalize() # матрица перехода
    T1 = T.inv()
    n1 = sqrt(T1[0,0]**2+T1[1,0]**2+T1[2,0]**2)
    n2 = sqrt(T1[0,1]**2+T1[1,1]**2+T1[2,1]**2)
    n3 = sqrt(T1[0,2]**2+T1[1,2]**2+T1[2,2]**2)
    x,y,z,x1,y1,z1 = symbols('x y z x1 y1 z1')
    ''' Исходное уравнение кривой '''
    Q0 = a11*x**2 + 2*a12*x*y + a22*y**2 + 2*a13*x*z + \
       2*a23*y*z + a33*z**2 + 2*a1*x + 2*a2*y + 2*a3*z + a0
    x0 = (T1[0,0]/n1)*x1+(T1[1,0]/n1)*y1+(T1[2,0]/n1)*z1
    y0 = (T1[0,1]/n2)*x1+(T1[1,1]/n2)*y1+(T1[2,1]/n2)*z1
    z0 = (T1[0,2]/n3)*x1+(T1[1,2]/n3)*y1+(T1[2,2]/n3)*z1
    ''' Уравнение кривой после выполнения поворота '''
    Q = Q0.subs({x: x0, y: y0, z: z0}).simplify()
    if (f_transform == 0):
        print('Уравнение: %s' % Q)
    else:
        print('Уравнение: %s' % Q)
        print('Формулы перехода:')
        print('x = %s' % x0)
        print('y = %s' % y0)
        print('z = %s' % z0)
```

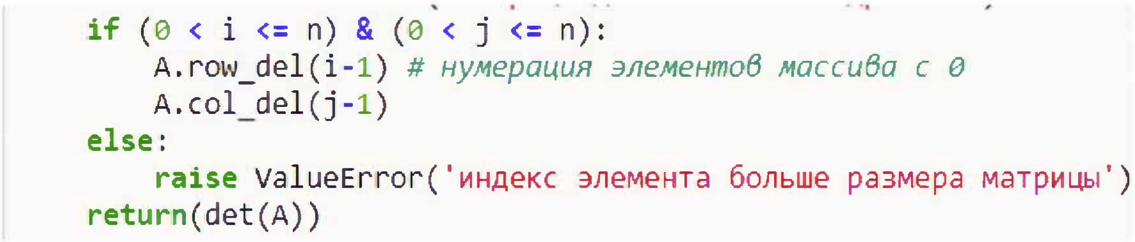
Функции для раздела «Линейная алгебра»

Функция Minor_elem()

Вычисляет минор элемента матрицы n–го порядка. Элемент матрицы задается его индексами (i – номер строки, j – номер столбца, $1 \le i, j \le n$).



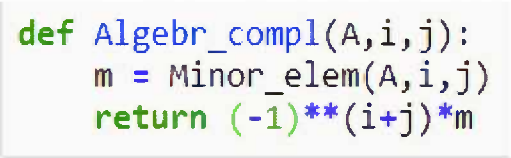
```
def Minor_elem(A,i,j):
    ''' Вычисляет минор
    элемента a_ij '''
    m,n = A.shape
    if m != n:
        raise ValueError('Матрица должна быть квадратной')
```



```
    if (0 < i <= n) & (0 < j <= n):
        A.row_del(i-1) # нумерация элементов массива с 0
        A.col_del(j-1)
    else:
        raise ValueError('индекс элемента больше размера матрицы')
    return(det(A))
```

Функция Algeb_compl()

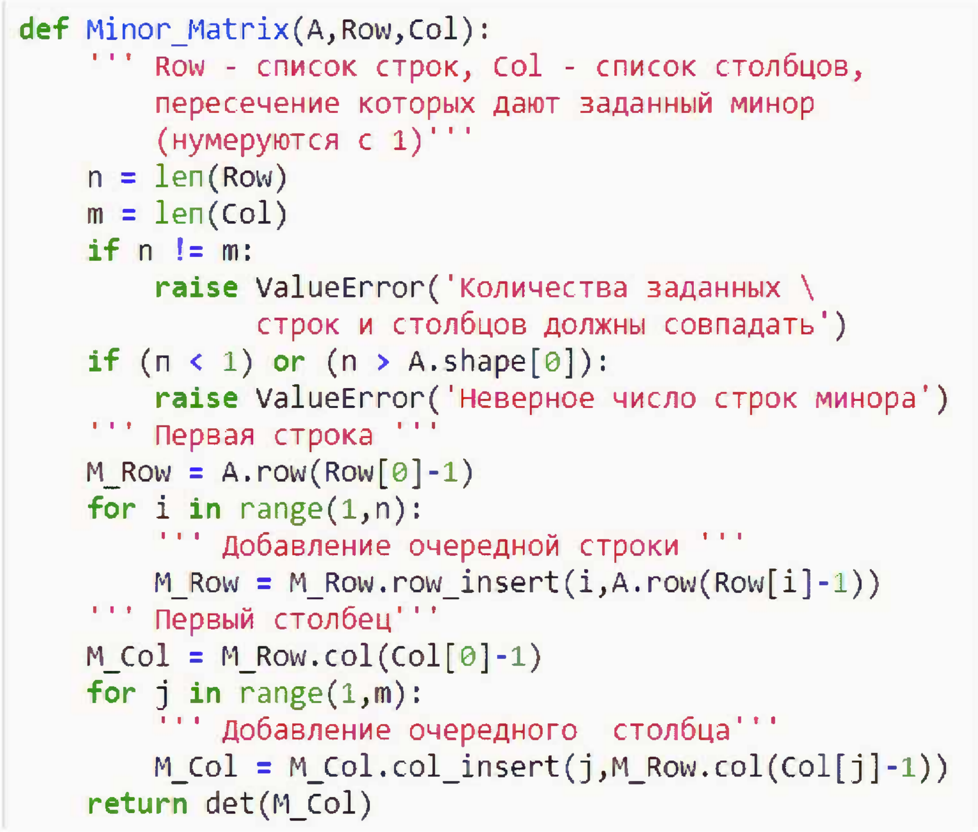
Вычисляет алгебраическое дополнение элемента квадратной матрицы.



```
def Algebr_compl(A,i,j):
    m = Minor_elem(A,i,j)
    return (-1)**(i+j)*m
```

Функция Minor_Matrix()

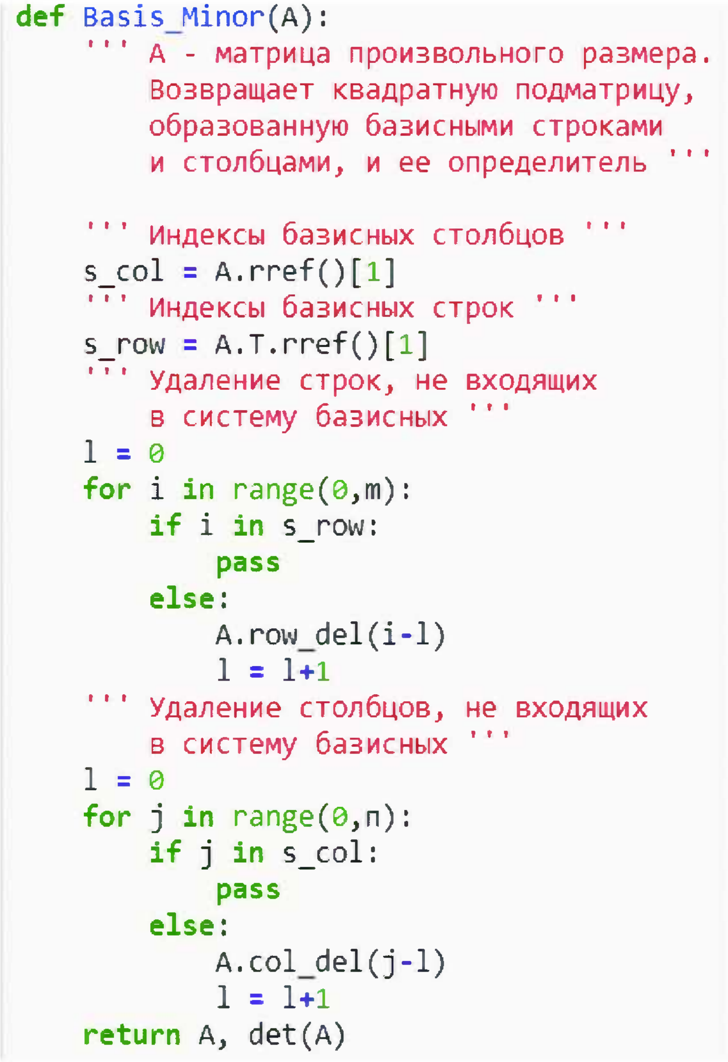
Вычисляет минор матрицы, заданный списком строк и столбцов.



```
def Minor_Matrix(A,Row,Col):
    ''' Row - список строк, Col - список столбцов,
        пересечение которых дают заданный минор
        (нумеруются с 1)'''
    n = len(Row)
    m = len(Col)
    if n != m:
        raise ValueError('Количества заданных \
               строк и столбцов должны совпадать')
    if (n < 1) or (n > A.shape[0]):
        raise ValueError('Неверное число строк минора')
    ''' Первая строка '''
    M_Row = A.row(Row[0]-1)
    for i in range(1,n):
        ''' Добавление очередной строки '''
        M_Row = M_Row.row_insert(i,A.row(Row[i]-1))
    ''' Первый столбец'''
    M_Col = M_Row.col(Col[0]-1)
    for j in range(1,m):
        ''' Добавление очередного  столбца'''
        M_Col = M_Col.col_insert(j,M_Row.col(Col[j]-1))
    return det(M_Col)
```

Функция Basis_Minor()

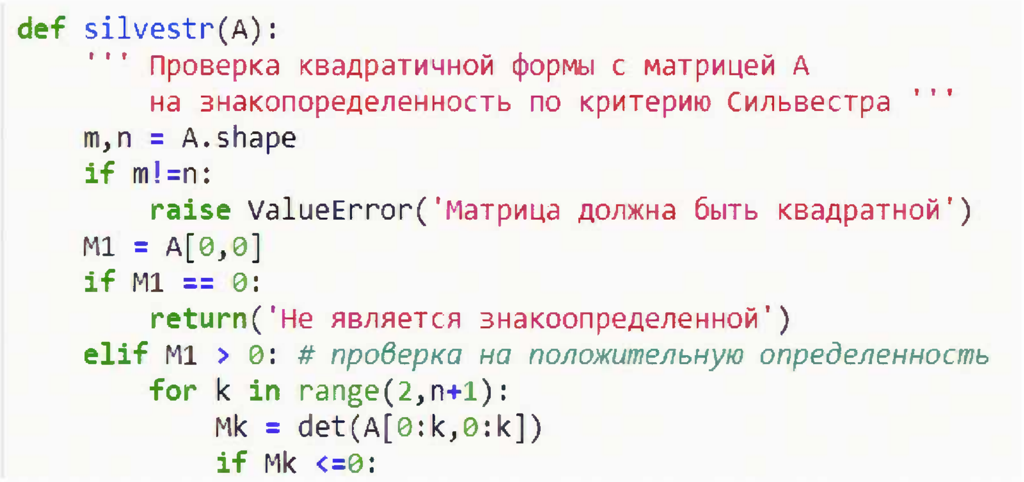
Принимая на вход произвольную матрицу, возвращает подматрицу, образованную базисными строками и столбцами (одну из имеющихся для данной матрицы), а также ее определитель (он является базисным минором).



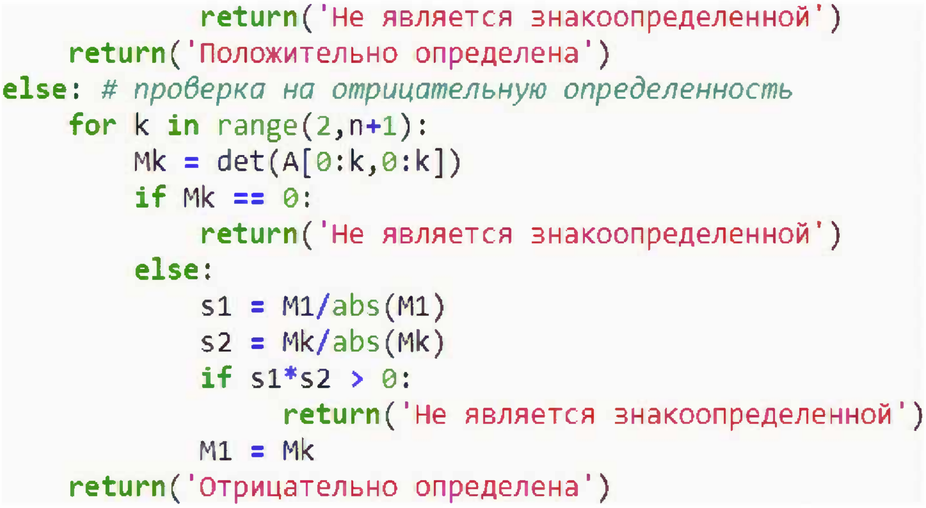
```
def Basis_Minor(A):
    ''' A - матрица произвольного размера.
        Возвращает квадратную подматрицу,
        образованную базисными строками
        и столбцами, и ее определитель '''

    ''' Индексы базисных столбцов '''
    s_col = A.rref()[1]
    ''' Индексы базисных строк '''
    s_row = A.T.rref()[1]
    ''' Удаление строк, не входящих
        в систему базисных '''
    l = 0
    for i in range(0,m):
        if i in s_row:
            pass
        else:
            A.row_del(i-l)
            l = l+1
    ''' Удаление столбцов, не входящих
        в систему базисных '''
    l = 0
    for j in range(0,n):
        if j in s_col:
            pass
        else:
            A.col_del(j-l)
            l = l+1
    return A, det(A)
```

Функция silvestr()

Используя критерий Сильвестра, выясняет, является ли данная квадратичная форма положительно определенной, отрицательно определенной или неопределенной. В качестве входного параметра используется матрица квадратичной формы.



```
def silvestr(A):
    ''' Проверка квадратичной формы с матрицей A
        на знакопределенность по критерию Сильвестра '''
    m,n = A.shape
    if m!=n:
        raise ValueError('Матрица должна быть квадратной')
    M1 = A[0,0]
    if M1 == 0:
        return('Не является знакоопределенной')
    elif M1 > 0: # проверка на положительную определенность
        for k in range(2,n+1):
            Mk = det(A[0:k,0:k])
            if Mk <=0:
```



```
            return('Не является знакоопределенной')
    return('Положительно определена')
else: # проверка на отрицательную определенность
    for k in range(2,n+1):
        Mk = det(A[0:k,0:k])
        if Mk == 0:
            return('Не является знакоопределенной')
        else:
            s1 = M1/abs(M1)
            s2 = Mk/abs(Mk)
            if s1*s2 > 0:
                return('Не является знакоопределенной')
            M1 = Mk
    return('Отрицательно определена')
```

Раздел II. Решение задач на Python

Глава 1. Математический анализ

Комплексные числа

Комплексные числа – это числа вида

$$x = a + b \cdot i,$$

(*алгебраическая форма записи*), где $a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$, a – действительная часть Re(x), b – мнимая часть числа Im(x). В полярных координатах

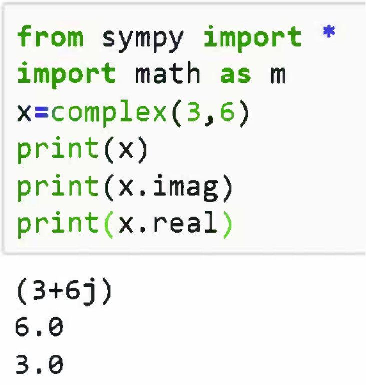
$$x = (r, \varphi),$$

где модуль $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, аргумент или фаза φ – это угол, такой, что $cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$.

$$x = acos\varphi + isin\varphi$$

тригонометрическая форма записи комплексного числа.

На Python можно вводнть комплексные числа $x = \mathrm{Re}(x) + i \cdot \mathrm{Im}(x)$ в алгебраической форме с иомощью команды x=complex(Re(x),Im(x)). Пусть, например, $x=3+6*i$. Для введения x следует загрузить библиотеки sympy и math, как показано ниже:



```
from sympy import *
import math as m
x=complex(3,6)
print(x)
print(x.imag)
print(x.real)
```

```
(3+6j)
6.0
3.0
```

Обратим внимаиие на то, что мнимая единица i, на Python выглядит как j или I, что не меняет сути вопроса. Мнимую единицу следует обозначать 1j.

Основные функции для работы с комнлексными числами:

x.conjugate – комплексио сопряжеиное,

x.imag – мнимая часть числа,

x.real – действительная часть,

x == y – проверка на равенство двух комплексных чисел,

pow(x,n) – возведение в степень,

abs(x) – модуль комплексного числа,

Для работы с комплексными числами так же удобно использовать модуль **cmath**.

cmath.phase(x) – возвращает фазу комплексного числа (её ещё называют аргументом). Эквивалентно math.atan2(x.imag, x.real). Результат лежит в промежутке [–π, π].

cmath.polar(x) – преобразование к полярным координатам. Возвращает пару (r,φ).

cmath.rect(r,φ) – преобразование из полярных координат.

cmath.exp(x) – e^x.

cmath.log(x[, base]) – логарифм *x* по основанию base. Если base не указан, возвращается натуральный логарифм.

cmath.log10(x) – десятичный логарифм.

cmath.sqrt(x) – квадратный корень из *x*.

cmath.acos(x) – арккосинус x.

cmath.asin(x) – арксинус x.

cmath.atan(x) – арктангенс x.

cmath.cos(x) – косинус x.

cmath.sin(x) – синус x.

cmath.tan(x) – тангенс x.

cmath.acosh(x) – гиперболический арккосинус x.

cmath.asinh(x) – гиперболический арксинус x.

cmath.atanh(x) – гиперболический арктангенс x.

cmath.cosh(x) – гиперболический косинус x.

cmath.sinh(x) – гиперболический синус x.

cmath.tanh(x) – гиперболический тангенс x.

cmath.isfinite(x) – True, если действительная и мнимая части конечны.

cmath.isinf(x) – True, если либо действительная, либо мнимая часть бесконечна.

cmath.isnan(x) – True, если либо действительная, либо мнимая часть NaN.

cmath.pi – π.

cmath.e – *e*.

Можно преобразовать комнлексное число из полярной формы в алгебраическую н наоборот с помощью $\mathrm{rect}(\mathrm{r},\mathrm{phi})$. Комплексное число, возвращаемое этой фупкцпей, равно

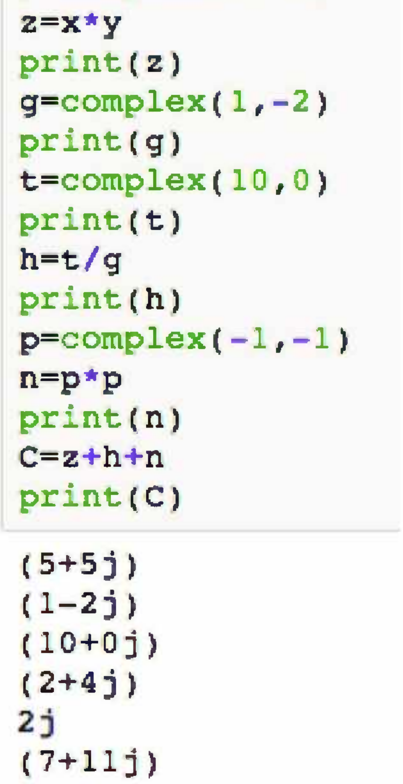
$$\cdot\, \mathrm{r} * (\mathrm{math.cos}\,(\mathrm{phi}) + \mathrm{math.sin}(\mathrm{phi}) * 1\mathrm{j}).$$

Действия иад комилексиыми числами: сложение, вычитаиие, умноженне, деление, пронзводится с помощью стандартных операций «+», «–», «*», «/».

Пример 1.

Пусть $x = 1 + 3i,\ y = 2 - i,\ g = 1 - 2i, t = 10.$

Найти $z = x \cdot y, h = \frac{t}{g}, n = p^2 = p \cdot p, C = z + h + n.$



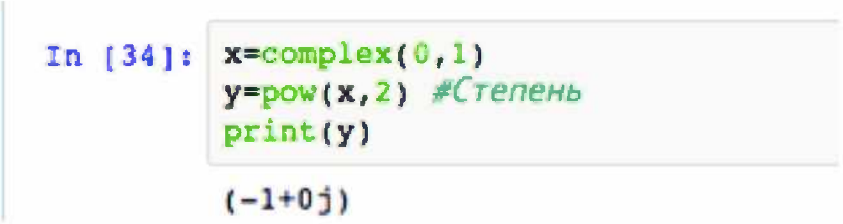
```
x=complex(1,3)
y=complex(2,-1)
z=x*y
print(z)
g=complex(1,-2)
print(g)
t=complex(10,0)
print(t)
h=t/g
print(h)
p=complex(-1,-1)
n=p*p
print(n)
C=z+h+n
print(C)
```

```
(5+5j)
(1-2j)
(10+0j)
(2+4j)
2j
(7+11j)
```

Возведенне в степень: pow (чнсло, показатель степепи в которую мы возводим число).

Пример 2. Степень i^2.

$$x = i, y = x^2, y = -1.$$



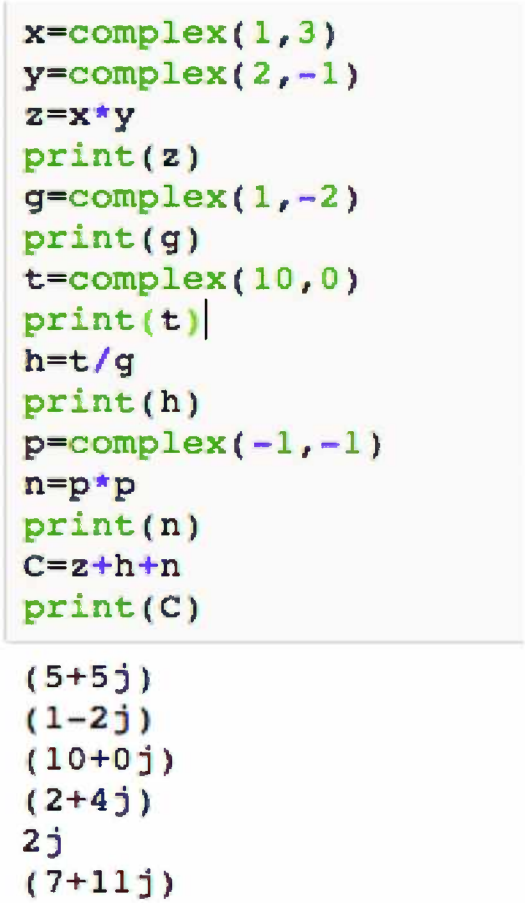
```
In [34]: x=complex(0,1)
         y=pow(x,2) #Степень
         print(y)

         (-1+0j)
```

Итак, мы можем с легкостью производпть любые действия с комплексными числамп в среде Python.

Пример 3. Вычислить

$$(1+3i)\cdot(2-i)+\frac{10}{(1+2i)}+(-1-i)^2\text{=7+11j.}$$

Решение.



```
x=complex(1,3)
y=complex(2,-1)
z=x*y
print(z)
g=complex(1,-2)
print(g)
t=complex(10,0)
print(t)
h=t/g
print(h)
p=complex(-1,-1)
n=p*p
print(n)
C=z+h+n
print(C)
```

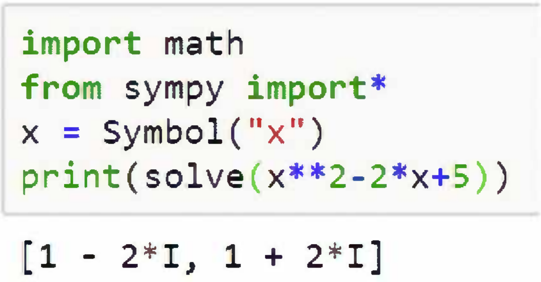
```
(5+5j)
(1-2j)
(10+0j)
(2+4j)
2j
(7+11j)
```

Ответ: 7+11j.

С понятием комплексного числа связано решение квадратных уравнений, дискримннант которых меньше нуля.

Пример 4. Решнть уравиеппе $x^2-2x+5=0$.

Решение. Чтобы решпть уравненпе $f(x)=0$ исиользуем функцию solve($f(x)$).



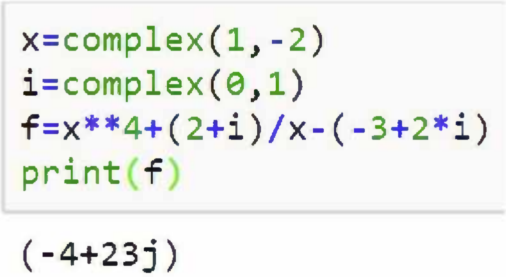
```
import math
from sympy import*
x = Symbol("x")
print(solve(x**2-2*x+5))
```

```
[1 - 2*I, 1 + 2*I]
```

Получаем два комплексно сопряженных корня. Причем мнимая единица записана как I.

Пример 5. Найти значение функции $f(x) = x^4 + \frac{2+i}{x} - (-3 + 2i)$ при $x = 1 - 2i$.

Решение.

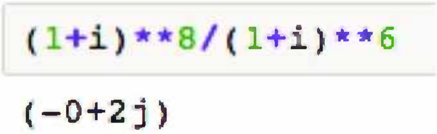


```
x=complex(1,-2)
i=complex(0,1)
f=x**4+(2+i)/x-(-3+2*i)
print(f)
```

```
(-4+23j)
```

Пример 6. Выполнить указанные действия $\frac{(1+i)^8}{(1-i)^6}$.

Решение.



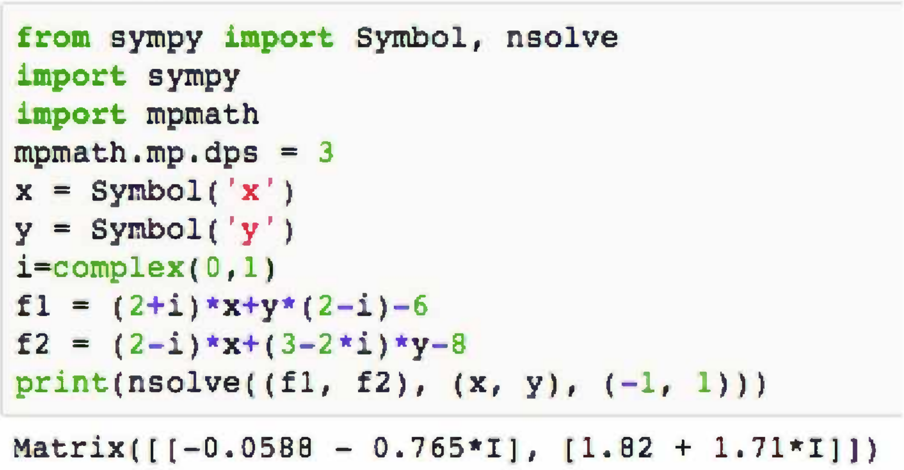
```
(1+i)**8/(1+i)**6
```

```
(-0+2j)
```

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6, \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8. \end{cases}$$

Решение.

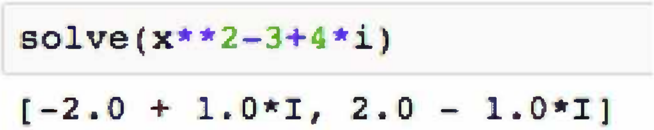


```
from sympy import Symbol, nsolve
import sympy
import mpmath
mpmath.mp.dps = 3
x = Symbol('x')
y = Symbol('y')
i=complex(0,1)
f1 = (2+i)*x+y*(2-i)-6
f2 = (2-i)*x+(3-2*i)*y-8
print(nsolve((f1, f2), (x, y), (-1, 1)))
```

```
Matrix([[-0.0588 - 0.765*I], [1.82 + 1.71*I]])
```

Пример 8. Вычислить $\sqrt{3 - 4i}$.

Решение.



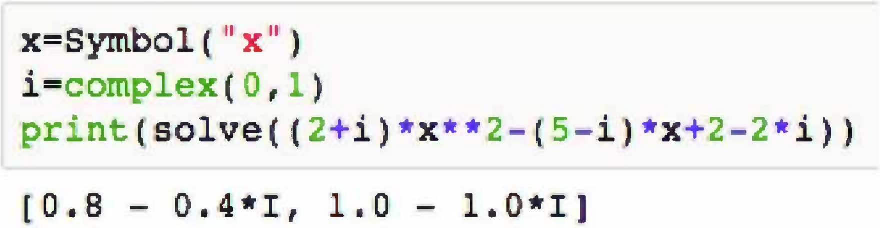
```
solve(x**2-3+4*i)
```

```
[-2.0 + 1.0*I, 2.0 - 1.0*I]
```

Пример 9. Решить уравнение

$$(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0.$$

Решение.



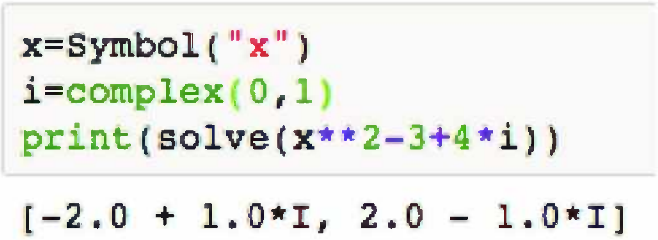
```
x=Symbol("x")
i=complex(0,1)
print(solve((2+i)*x**2-(5-i)*x+2-2*i))
```

```
[0.8 - 0.4*I, 1.0 - 1.0*I]
```

Пример 10. Вычислить:

$$-25\cdot\frac{3i-9}{2+8i}-(3+5i)^{2010}.$$

Решение.



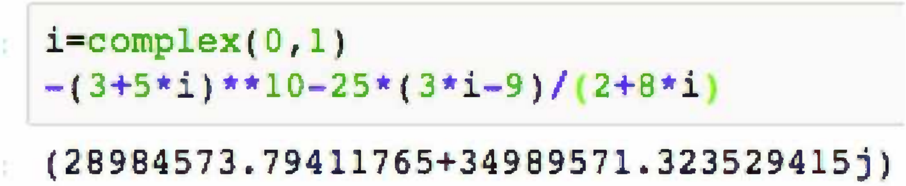
```
x=Symbol("x")
i=complex(0,1)
print(solve(x**2-3+4*i))
```

```
[-2.0 + 1.0*I, 2.0 - 1.0*I]
```

Пример 11. Вычислить:

$$-(3+5i)^{10}-25\cdot\frac{3i-9}{2+8i}.$$

Решение.



```
i=complex(0,1)
-(3+5*i)**10-25*(3*i-9)/(2+8*i)
```

```
(28984573.79411765+34989571.323529415j)
```

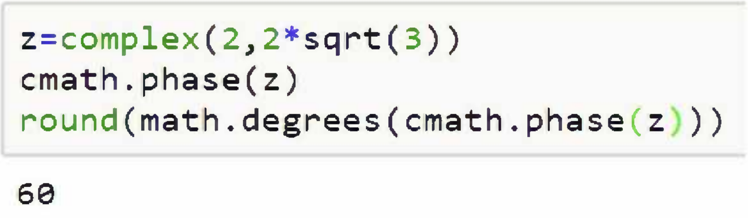
Пример 12. Найти модуль и аргумент (фазу) комплексного числа

$$z=2+2\cdot\sqrt{3}\cdot i.$$

Решение.

```
abs(z)
```

```
4.0
```

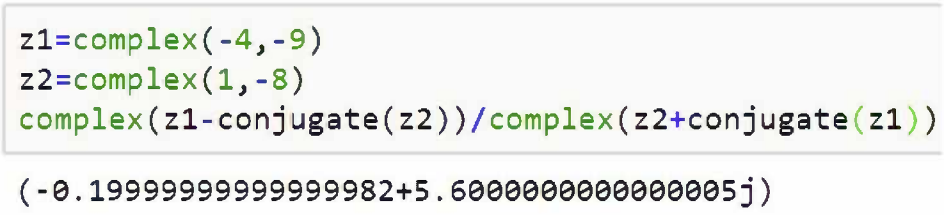


```
z=complex(2,2*sqrt(3))
cmath.phase(z)
round(math.degrees(cmath.phase(z)))
```

```
60
```

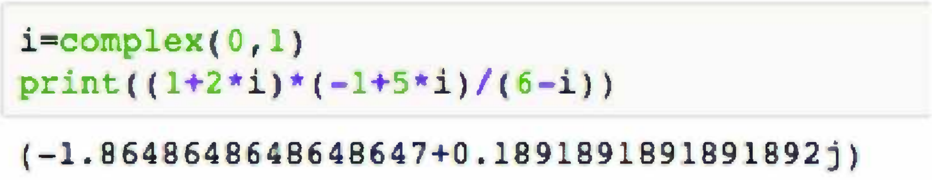
Пример 13. Пусть $z_1 = -4 - 9i$, $z_2 = 1 - 8i$. Вычислите $\frac{z_1 - \overline{z_2}}{\overline{z_1} + z_2}$.

Решение.



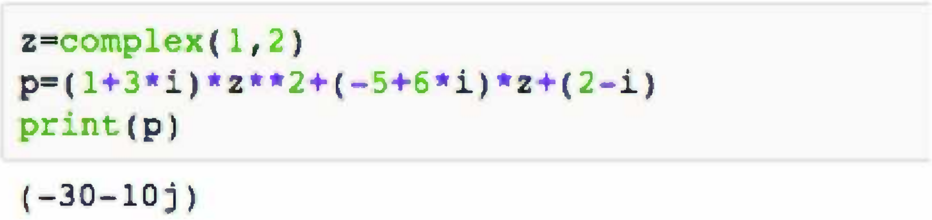
```
z1=complex(-4,-9)
z2=complex(1,-8)
complex(z1-conjugate(z2))/complex(z2+conjugate(z1))
```

```
(-0.19999999999999982+5.6000000000000005j)
```



```
i=complex(0,1)
print((1+2*i)*(-1+5*i)/(6-i))
```

```
(-1.8648648648648647+0.1891891891891892j)
```



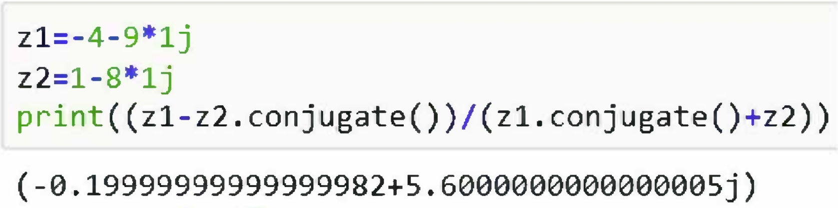
```
z=complex(1,2)
p=(1+3*i)*z**2+(-5+6*i)*z+(2-i)
print(p)
```

```
(-30-10j)
```

Примеры решения задач

1. Пусть $z_1 = -4 - 9i$, $z_2 = 1 - 8i$. Вычислите $\frac{z_1 - \overline{z_2}}{\overline{z_1} + z_2}$.

Решение.



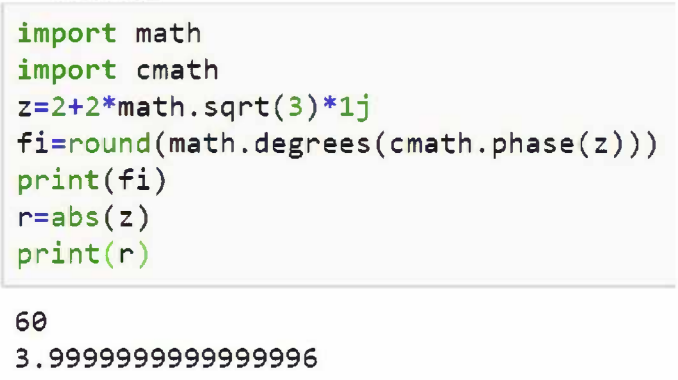
```
z1=-4-9*1j
z2=1-8*1j
print((z1-z2.conjugate())/(z1.conjugate()+z2))
```

```
(-0.19999999999999982+5.6000000000000005j)
```

Ответ: $-\frac{1}{5} + \frac{28}{5}i$.

2. Приведите число $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду.

Решение.



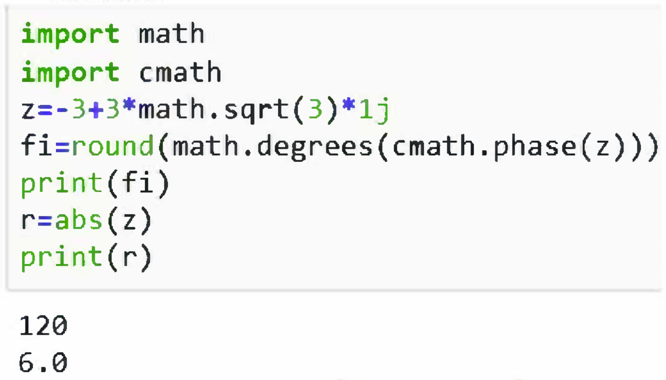
```
import math
import cmath
z=2+2*math.sqrt(3)*1j
fi=round(math.degrees(cmath.phase(z)))
print(fi)
r=abs(z)
print(r)
```

```
60
3.9999999999999996
```

Ответ: $z = 4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$.

3. Приведите число $z = -3 + 3\sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду.

Решение.



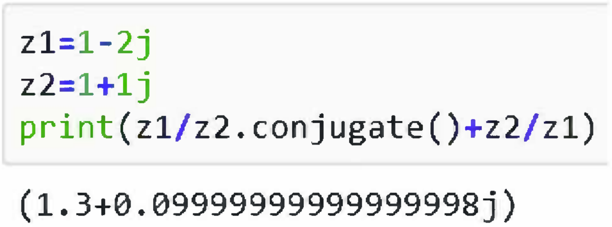
```
import math
import cmath
z=-3+3*math.sqrt(3)*1j
fi=round(math.degrees(cmath.phase(z)))
print(fi)
r=abs(z)
print(r)
```

```
120
6.0
```

Ответ: $z = 6(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))$.

4. Пусть $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 1 + i$. Вычислите $\frac{z_1}{\overline{z_2}} + \frac{z_2}{z_1}$.

Решение.



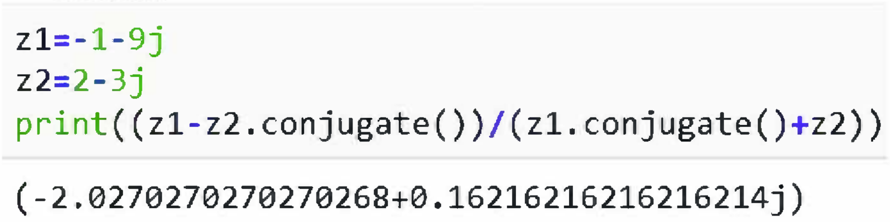
```
z1=1-2j
z2=1+1j
print(z1/z2.conjugate()+z2/z1)
```

```
(1.3+0.09999999999999998j)
```

Ответ: $\frac{13}{10} + \frac{1}{10}i$.

5. Пусть $z_1 = -1 - 9i$, $z_2 = 2 - 3i$. Вычислите $\frac{z_1 - \overline{z_2}}{\overline{z_1} + z_2}$.

Решение.



```
z1=-1-9j
z2=2-3j
print((z1-z2.conjugate())/(z1.conjugate()+z2))
```

```
(-2.0270270270270268+0.16216216216216214j)
```

Ответ: $-\frac{75}{37} + \frac{6}{37}i$.

6. Пусть $z_1 = -1 + 4i$, $z_2 = 1 + i$. Вычислите $\frac{z_1}{\overline{z_2}} + \frac{z_2}{z_1}$.

Решение.

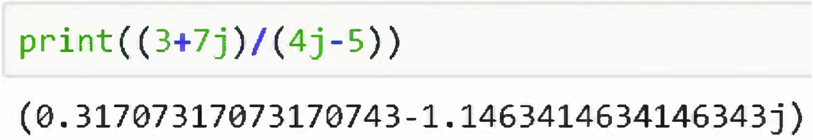
```
z1=-1+4j
z2=1+1j
print((z1/z2.conjugate())+z2/z1)
```

```
(-2.323529411764706+1.2058823529411764j)
```

Ответ: $-\frac{79}{34} + \frac{41}{34}i$.

7. Вычислите значение выражения $\frac{3+7i}{4i-5}$ и представьте результат в виде $a+bi$.

Решение.



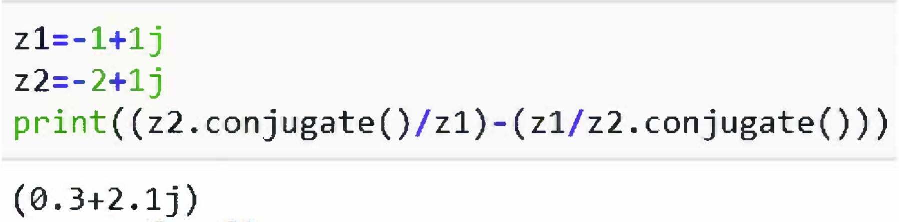
```
print((3+7j)/(4j-5))
```

```
(0.31707317073170743-1.1463414634146343j)
```

Ответ: $\frac{13}{41}-\frac{47}{41}i$.

8. Пусть $z_1=-1+i$, $z_2=-2+i$. Вычислите $\frac{\overline{z_2}}{z_1}-\frac{z_1}{\overline{z_2}}$.

Решение.



```
z1=-1+1j
z2=-2+1j
print((z2.conjugate()/z1)-(z1/z2.conjugate()))
```

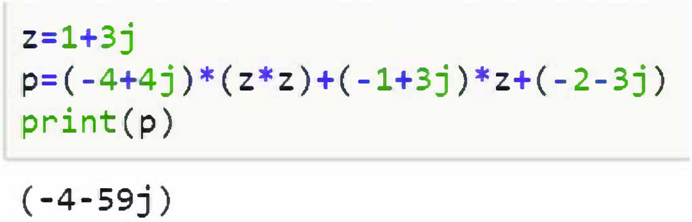
```
(0.3+2.1j)
```

Ответ: $\frac{3}{10}+\frac{21}{10}i$.

9. Вычислите значение многочлена

$P(z)=(-4+4i)z^2+(-1+3i)z+(-2-3i)$ в точке $z=1+3i$.

Решение.



```
z=1+3j
p=(-4+4j)*(z*z)+(-1+3j)*z+(-2-3j)
print(p)
```

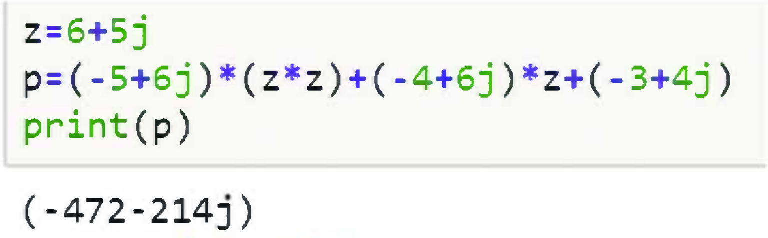
```
(-4-59j)
```

Ответ: $-4-59i$.

10. Вычислите значение многочлена

$P(z)=(-5+6i)z^2+(-4+6i)z+(-3+4i)$ в точке $z=6+5i$.

Решение.



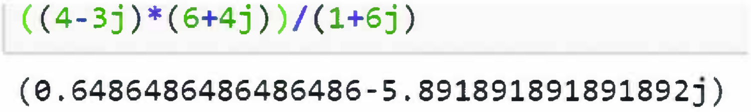
```
z=6+5j
p=(-5+6j)*(z*z)+(-4+6j)*z+(-3+4j)
print(p)
```

```
(-472-214j)
```

Ответ: $-472-214i$.

11. Вычислите значение выражения $\frac{(4-3i)(6+4i)}{1+6i}$ и представьте результат в виде $a+bi$.

Решение.



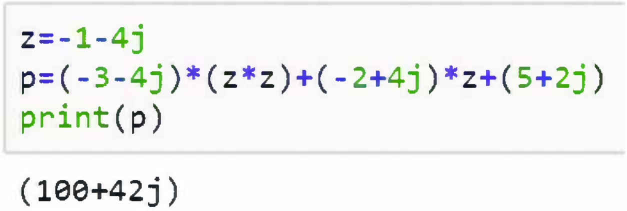
```
((4-3j)*(6+4j))/(1+6j)
```

```
(0.6486486486486486-5.891891891891892j)
```

Ответ: $\frac{24}{37}-\frac{218}{37}i$.

12. Вычислите значение многочлена
$P(z)=(-3-4i)z^2+(-2+4i)z+(5+2i)$ в точке $z=-1-4i$.

Решение.



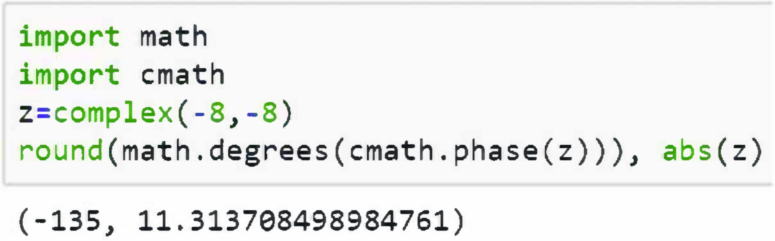
```
z=-1-4j
p=(-3-4j)*(z*z)+(-2+4j)*z+(5+2j)
print(p)
```

```
(100+42j)
```

Ответ: $100+42i$.

13. Вычислите модуль и аргумент числа $z=-8-8i$.

Решение.



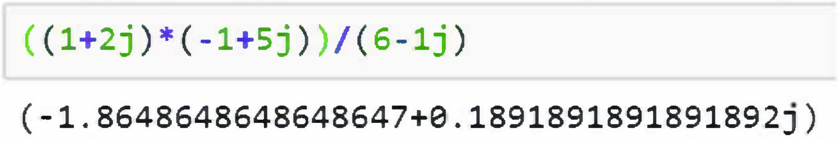
```
import math
import cmath
z=complex(-8,-8)
round(math.degrees(cmath.phase(z))), abs(z)
```

```
(-135, 11.313708498984761)
```

Ответ: $|z|=8\sqrt{2}$, $\arg(z)=-\frac{3\pi}{4}$.

14. Вычислите значение выражения $\frac{(1+2i)(-1+5i)}{6-i}$ и представьте результат в виде $a+bi$.

Решение.



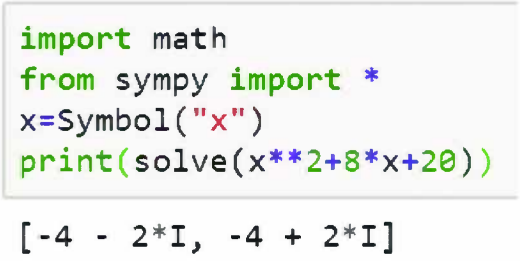
```
((1+2j)*(-1+5j))/(6-1j)
```

```
(-1.8648648648648647+0.1891891891891892j)
```

Ответ: $-\frac{69}{37}+\frac{7}{37}i$.

15. Найдите комплексные корни уравнения $x^2+8x+20=0$.

Решение.



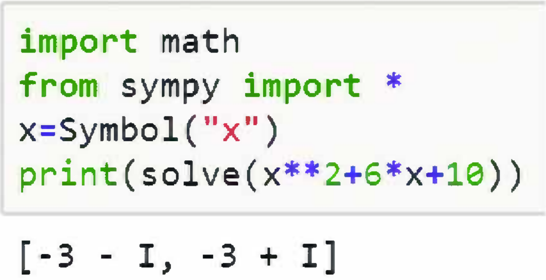
```
import math
from sympy import *
x=Symbol("x")
print(solve(x**2+8*x+20))
```

```
[-4 - 2*I, -4 + 2*I]
```

Ответ: $x_{1,2} = -4 \pm 2i$.

16. Найдите комплексиые кории уравиеиия $x^2 + 6x + 10 = 0$.

Решение.



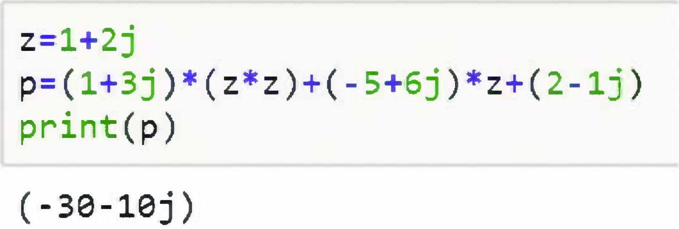
```
import math
from sympy import *
x=Symbol("x")
print(solve(x**2+6*x+10))
```

```
[-3 - I, -3 + I]
```

Ответ: $x_{1,2} = -3 \pm i$.

17. Вычислите зиачеиие многочлена $P(z) = (1 + 3i)z^2 + (-5 + 6i)z + (2 - i)$ в точке $z = 1 + 2i$.

Решение.



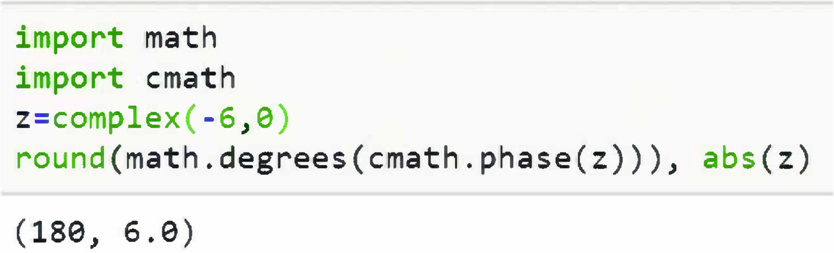
```
z=1+2j
p=(1+3j)*(z*z)+(-5+6j)*z+(2-1j)
print(p)
```

```
(-30-10j)
```

Ответ: $-30 - 10i$.

18. Вычислите модуль и аргумент числа $z = -6$.

Решение.



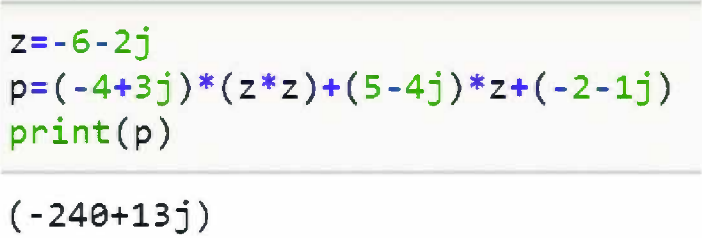
```
import math
import cmath
z=complex(-6,0)
round(math.degrees(cmath.phase(z))), abs(z)
```

```
(180, 6.0)
```

Ответ: $|z| = 6$, $\arg(z) = \pi$.

19. Вычислите значенне многочлена $P(z) = (-4 + 3i)z^2 + (5 - 4i)z + (-2 - i)$ в точке $z = -6 - 2i$.

Решение.



```
z=-6-2j
p=(-4+3j)*(z*z)+(5-4j)*z+(-2-1j)
print(p)
```

```
(-240+13j)
```

Ответ: $-240 + 13i$.

20. Вычислите значение выражения $\frac{i+2}{1-4i}$ и представьте результат в виде $a + bi$.

Решение.

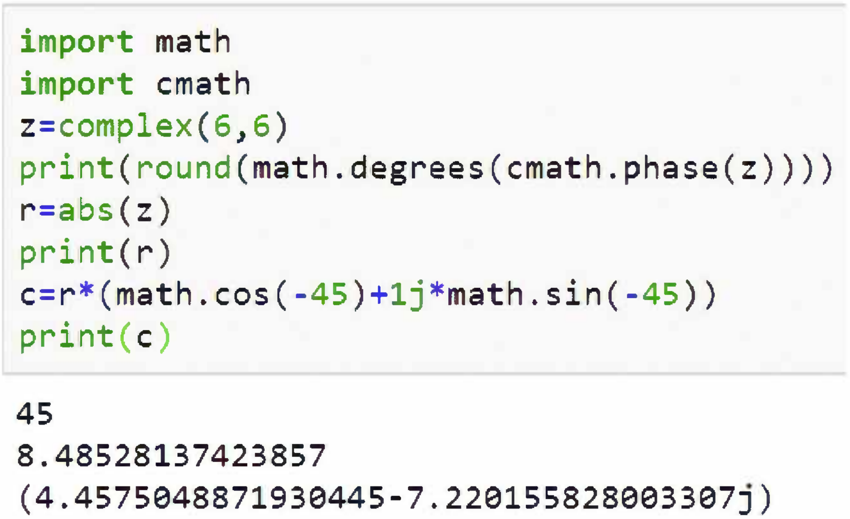
```
(1j+2)/(1-4j)
```

```
(-0.11764705882352941+0.5294117647058824j)
```

Ответ: $-\frac{2}{17} + \frac{9}{17}i$.

21. Приведите число $z = 6 - 6i$ к тригонометрическому виду.

Решение.



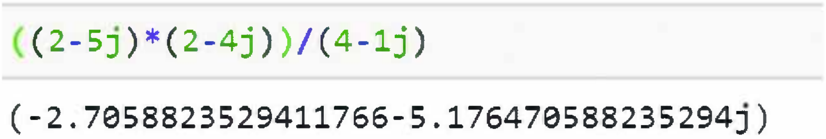
```
import math
import cmath
z=complex(6,6)
print(round(math.degrees(cmath.phase(z))))
r=abs(z)
print(r)
c=r*(math.cos(-45)+1j*math.sin(-45))
print(c)
```

```
45
8.48528137423857
(4.4575048871930445-7.220155828003307j)
```

Ответ: $z = 6\sqrt{2}(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$.

22. Вычислите значение выражения $\frac{(2-5i)(2-4i)}{4-i}$ и представьте результат в виде $a + bi$.

Решение.



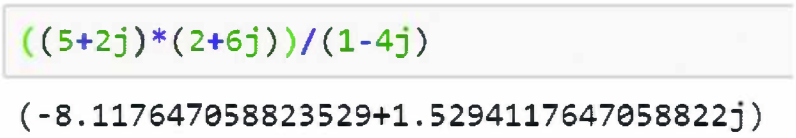
```
((2-5j)*(2-4j))/(4-1j)
```

```
(-2.7058823529411766-5.176470588235294j)
```

Ответ: $-\frac{46}{17} - \frac{88}{17}i$.

23. Вычислите значение выражения $\frac{(5+2i)(2+6i)}{1-4i}$ и представьте результат в виде $a + bi$.

Решение.



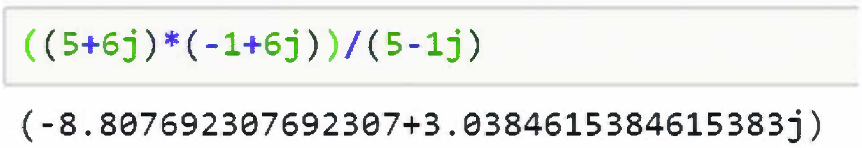
```
((5+2j)*(2+6j))/(1-4j)
```

```
(-8.117647058823529+1.5294117647058822j)
```

Ответ: $-\frac{138}{17}+\frac{26}{17}i$.

24. Вычислите значение выражения $\frac{(5+6i)(-1+6i)}{5-i}$ и представьте результат в виде $a+bi$.

Решение.



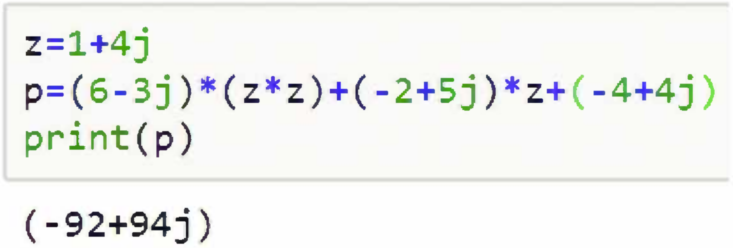
```
((5+6j)*(-1+6j))/(5-1j)
```

```
(-8.807692307692307+3.0384615384615383j)
```

Ответ: $-\frac{229}{26}+\frac{79}{26}i$.

25. Вычислите значение многочлена
$P(z)=(6-3i)z^2+(-2+5i)z+(-4+4i)$ в точке $z=1+4i$.

Решение.



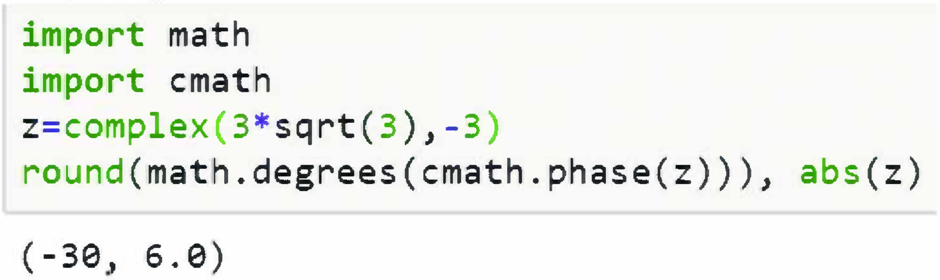
```
z=1+4j
p=(6-3j)*(z*z)+(-2+5j)*z+(-4+4j)
print(p)
```

```
(-92+94j)
```

Ответ: $-92+94i$.

26. Вычислите модуль и аргумент числа $z=3\sqrt{3}-3i$.

Решение.



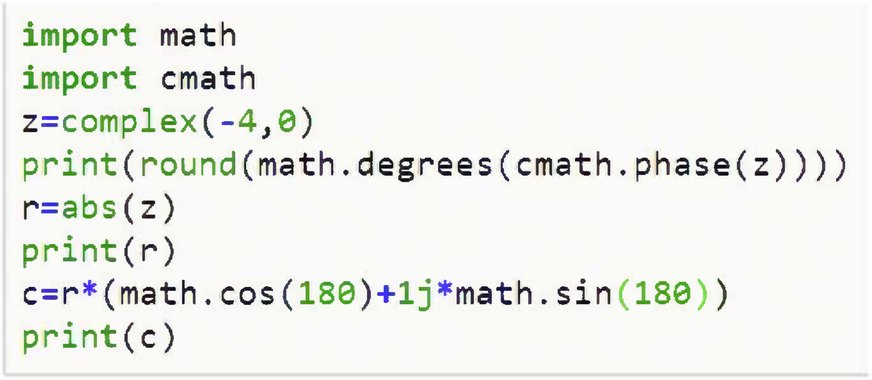
```
import math
import cmath
z=complex(3*sqrt(3),-3)
round(math.degrees(cmath.phase(z))), abs(z)
```

```
(-30, 6.0)
```

Ответ: $|z|=6, \arg(z)=-\frac{\pi}{6}$.

27. Приведите число $z=-4$ к тригонометрическому виду.

Решение.



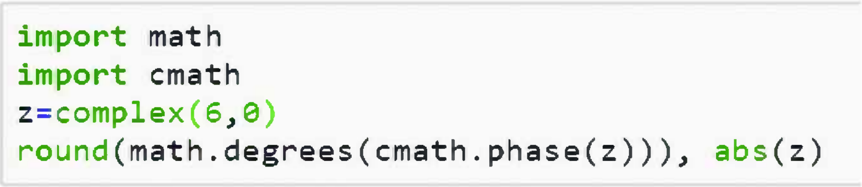
```
import math
import cmath
z=complex(-4,0)
print(round(math.degrees(cmath.phase(z))))
r=abs(z)
print(r)
c=r*(math.cos(180)+1j*math.sin(180))
print(c)
```

```
180
4.0
(-2.393840276231433-3.2046105429353218j)
```

Ответ: $z = 4(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$.

28. Вычислите модуль и аргумент числа $z = 6$.

Решение.



```
import math
import cmath
z=complex(6,0)
round(math.degrees(cmath.phase(z))), abs(z)
```

```
(0, 6.0)
```

Ответ: $|z| = 6, \arg(z) = 0$.

29. Пусть $z_1 = 2 - 9i$, $z_2 = -3 - 3i$. Вычислите $\frac{z_1 - \overline{z_2}}{\overline{z_1} + z_2}$.

Решение.

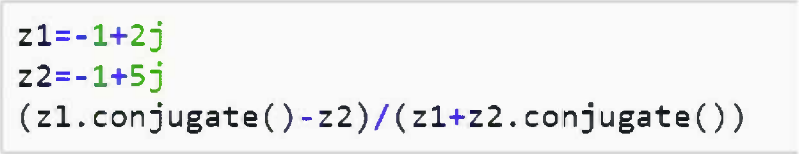
```
z1=2-9j
z2=-3-3j
(z1-z2.conjugate())/(z1.conjugate()+z2)
```

```
(-2.081081081081081-0.48648648648648646j)
```

Ответ: $-\frac{77}{37} - \frac{18}{37}i$.

30. Пусть $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = -1 + 5i$. Вычислите $\frac{\overline{z_1} - z_2}{z_1 + \overline{z_2}}$.

Решение.



```
z1=-1+2j
z2=-1+5j
(z1.conjugate()-z2)/(z1+z2.conjugate())
```

```
(1.6153846153846154+1.0769230769230769j)
```

Ответ: $\frac{21}{13} + \frac{14}{13}i$.

31. Вычислите значение выражения $\frac{4+9i}{6i-1}$ и представьте результат в виде $a + bi$.

Решение.

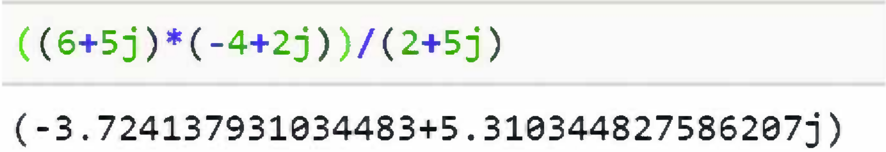
```
(4+9j)/(6j-1)
```

```
(1.3513513513513513-0.8918918918918919j)
```

Ответ: $\frac{50}{37}-\frac{33}{37}i$.

32. Вычислите значение выражения $\frac{(6+5i)(-4+2i)}{2+5i}$ и представьте результат в виде $a+bi$.

Решение.



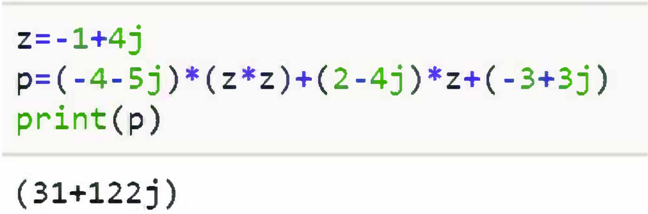
```
((6+5j)*(-4+2j))/(2+5j)
```

```
(-3.7241379310344830+5.310344827586207j)
```

Ответ: $-\frac{108}{29}+\frac{154}{29}i$.

33. Вычислите значенне миогочлена
$P(z)=(-4-5i)z^2+(2-4i)z+(-3+3i)$ в точке $z=-1+4i$.

Решение.



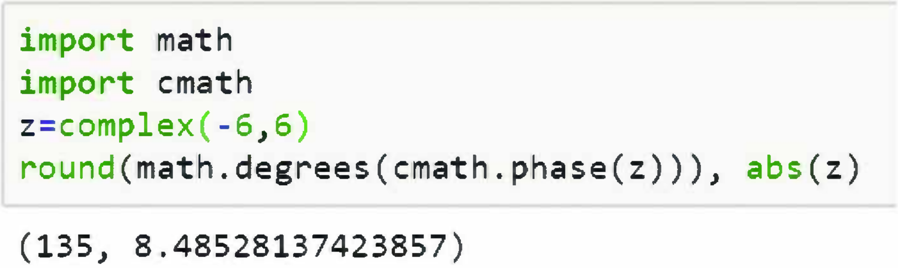
```
z=-1+4j
p=(-4-5j)*(z*z)+(2-4j)*z+(-3+3j)
print(p)
```

```
(31+122j)
```

Ответ: $31+122i$.

34. Вычислите модуль н аргумент числа $z=-6+6i$.

Решение.



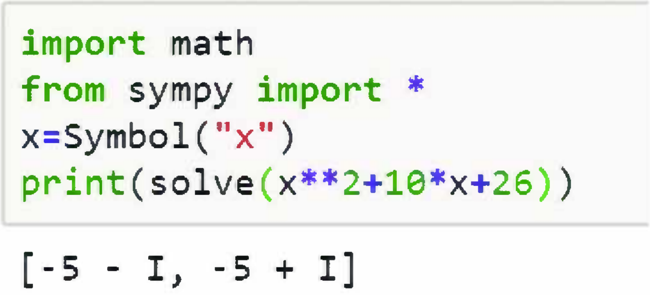
```
import math
import cmath
z=complex(-6,6)
round(math.degrees(cmath.phase(z))), abs(z)
```

```
(135, 8.48528137423857)
```

Ответ: $|z|=6\sqrt{2}$, $\arg(z)=\frac{3\pi}{4}$.

35. Найднте комплексные корни уравнения $x^2+10x+26=0$.

Решение.



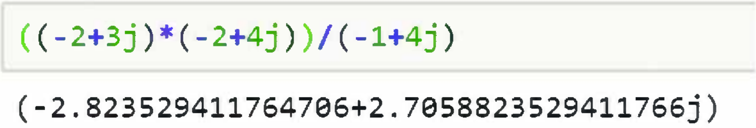
```
import math
from sympy import *
x=Symbol("x")
print(solve(x**2+10*x+26))
```

```
[-5 - I, -5 + I]
```

Ответ: $x_{1,2}=-5\pm i$.

36. Вычислите значение выражения $\frac{(-2+3i)(-2+4i)}{-1+4i}$ и представьте результат в виде $a + bi$.

Решение.



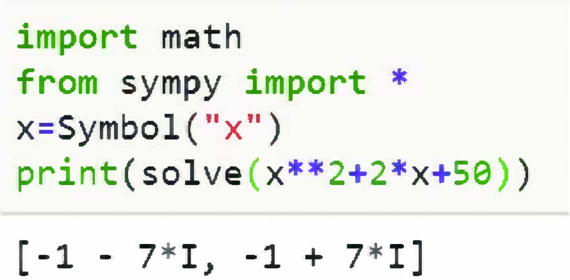
```
((-2+3j)*(-2+4j))/(-1+4j)
```

```
(-2.823529411764706+2.7058823529411766j)
```

Ответ: $-\frac{48}{17}+\frac{46}{17}i$.

37. Найдите комплексные корни уравнения $x^2 + 2x + 50 = 0$.

Решение.



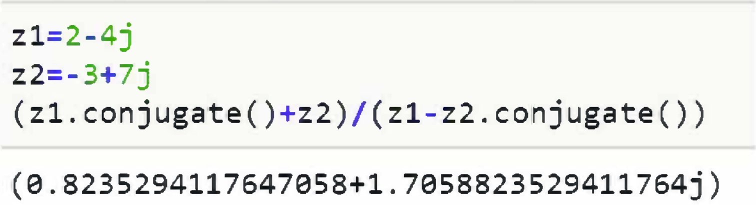
```
import math
from sympy import *
x=Symbol("x")
print(solve(x**2+2*x+50))
```

```
[-1 - 7*I, -1 + 7*I]
```

Ответ: $x_{1,2} = -1 \pm 7i$.

38. Пусть $z_1 = 2 - 4i$, $z_2 = -3 + 7i$. Вычислите $\frac{\overline{z_1}+z_2}{z_1-\overline{z_2}}$.

Решение.



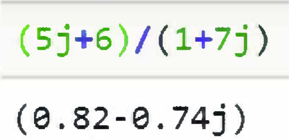
```
z1=2-4j
z2=-3+7j
(z1.conjugate()+z2)/(z1-z2.conjugate())
```

```
(0.8235294117647058+1.7058823529411764j)
```

Ответ: $\frac{14}{17}+\frac{29}{17}i$.

39. Вычислите значение выражения $\frac{5i+6}{1+7i}$ и представьте результат в виде $a + bi$.

Решение.



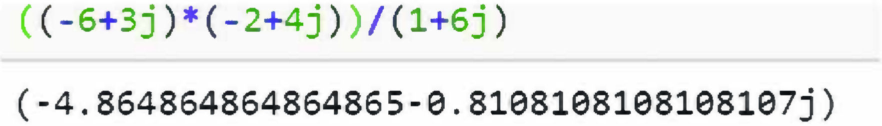
```
(5j+6)/(1+7j)
```

```
(0.82-0.74j)
```

Ответ: $\frac{41}{50}-\frac{37}{50}i$.

40. Вычислите значение выражения $\frac{(-6+3i)(-2+4i)}{1+6i}$ и представьте результат в виде $a + bi$.

Решение.



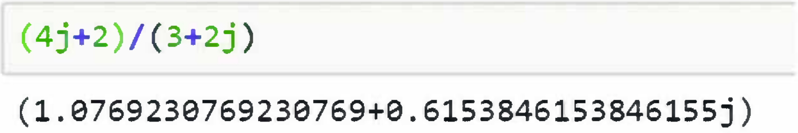
```
((-6+3j)*(-2+4j))/(1+6j)
```

```
(-4.864864864864865-0.8108108108108107j)
```

Ответ: $-\frac{180}{37}-\frac{30}{37}i$.

41. Вычислите значение выражения $\frac{4i+2}{3+2i}$ и представьте результат в виде $a+bi$.

Решение.



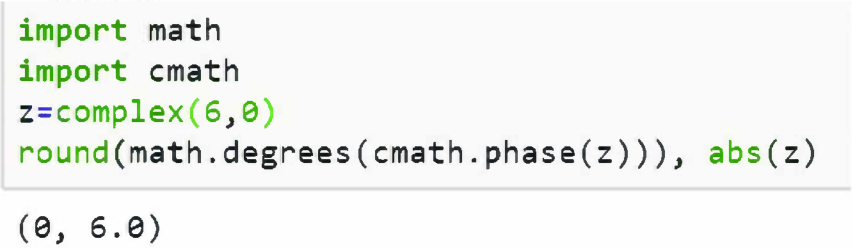
```
(4j+2)/(3+2j)
```

```
(1.0769230769230769+0.6153846153846155j)
```

Ответ: $\frac{14}{13}+\frac{8}{13}i$.

42. Вычислите модуль и аргумент числа $z=6$.

Решение.



```
import math
import cmath
z=complex(6,0)
round(math.degrees(cmath.phase(z))), abs(z)
```

```
(0, 6.0)
```

Ответ: $|z|=6, \arg(z)=0$.

43. Вычислите модуль и аргумент числа $z=-2+2i$.

Решение.

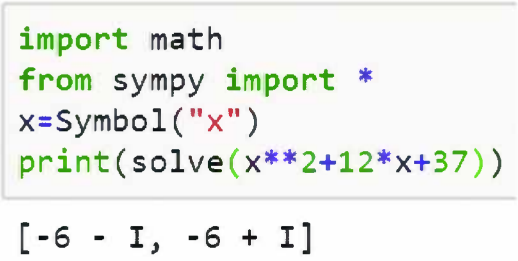
```
import math
import cmath
z=complex(-2,2)
round(math.degrees(cmath.phase(z))), abs(z)
```

```
(135, 2.8284271247461903)
```

Ответ: $|z|=2\sqrt{2}, \arg(z)=\frac{3\pi}{4}$.

44. Найдите комплексные корни уравнения $x^2+12x+37=0$.

Решение.



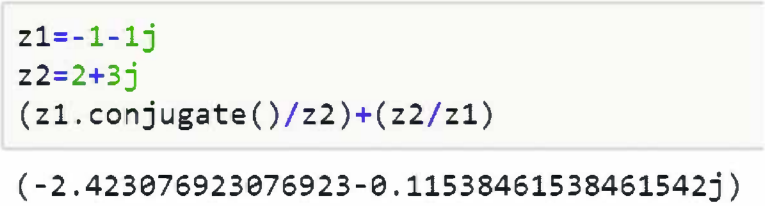
```
import math
from sympy import *
x=Symbol("x")
print(solve(x**2+12*x+37))
```

```
[-6 - I, -6 + I]
```

Ответ: $x_{1,2} = -6 \pm i$.

45. Пусть $z_1 = -1 - i$, $z_2 = 2 + 3i$. Вычислите $\frac{\overline{z_1}}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$.

Решение.



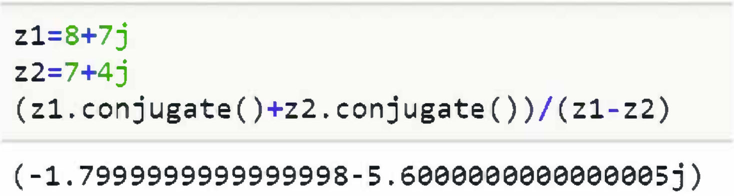
```
z1=-1-1j
z2=2+3j
(z1.conjugate()/z2)+(z2/z1)
```

```
(-2.423076923076923-0.11538461538461542j)
```

Ответ: $-\frac{63}{26} - \frac{3}{26}i$.

46. Пусть $z_1 = 8 + 7i$, $z_2 = 7 + 4i$. Вычислите $\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{z_1 - z_2}$.

Решение.



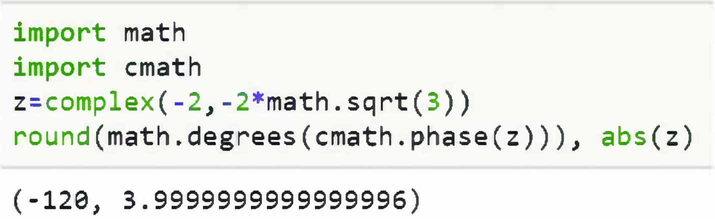
```
z1=8+7j
z2=7+4j
(z1.conjugate()+z2.conjugate())/(z1-z2)
```

```
(-1.7999999999999998-5.6000000000000005j)
```

Ответ: $-\frac{9}{5} - \frac{28}{5}i$.

47. Вычислите модуль и аргумент числа $z = -2 - 2\sqrt{3}i$.

Решение.



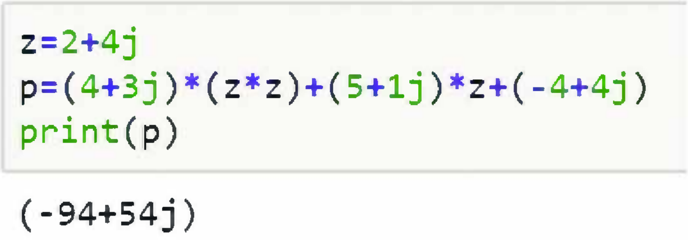
```
import math
import cmath
z=complex(-2,-2*math.sqrt(3))
round(math.degrees(cmath.phase(z))), abs(z)
```

```
(-120, 3.9999999999999996)
```

Ответ: $|z| = 4$, $\arg(z) = -\frac{2\pi}{3}$.

48. Вычислите значение многочлена
$P(z) = (4 + 3i)z^2 + (5 + i)z + (-4 + 4i)$ в точке $z = 2 + 4i$.

Решение.



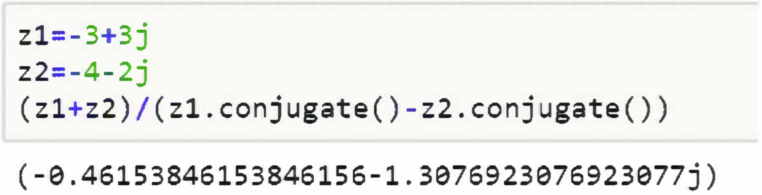
```
z=2+4j
p=(4+3j)*(z*z)+(5+1j)*z+(-4+4j)
print(p)
```

```
(-94+54j)
```

Ответ: $-94 + 54i$.

49. Пусть $z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = -4 - 2i$. Вычислите $\frac{z_1 + z_2}{\overline{z_1} - \overline{z_2}}$.

Решение.



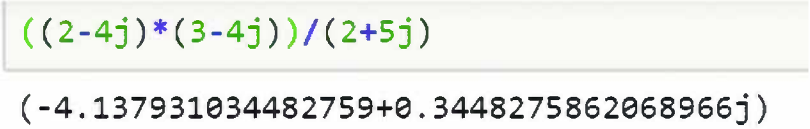
```
z1=-3+3j
z2=-4-2j
(z1+z2)/(z1.conjugate()-z2.conjugate())
```

```
(-0.46153846153846156-1.3076923076923077j)
```

Ответ: $-\frac{6}{13}-\frac{17}{13}i$.

50. Вычислите значение выражения $\frac{(2-4i)(3-4i)}{2+5i}$ и представьте результат в виде $a+bi$.

Решение.



```
((2-4j)*(3-4j))/(2+5j)
```

```
(-4.137931034482759+0.3448275862068966j)
```

Ответ: $-\frac{120}{29}+\frac{10}{29}i$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить модуль и аргумеит числа $z=-8$.
Ответ: $|z|=8, \arg(z)=\pi$.

2. Вычислить модуль и аргумент числа $z=1+\sqrt{3}i$
Ответ: $|z|=2, \arg(z)=\frac{\pi}{3}$.

3. Вычислить модуль и аргумеит числа $z=2+2\sqrt{3}i$.
Ответ: $|z|=4, \arg(z)=\frac{\pi}{3}$.

4. Вычислить модуль и аргумент числа $z=3+3\sqrt{3}i$.
Ответ: $|z|=6, \arg(z)=\frac{\pi}{3}$.

5. Вычислить модуль и аргумент числа $z=-8i$.
Ответ: $|z|=8, \arg(z)=-\frac{\pi}{2}$.

6. Вычислить модуль и аргумент числа $z=-8$.
Ответ: $|z|=8, \arg(z)=\pi$.

7. Вычислить модуль и аргумент числа $z=4$.
Ответ: $|z|=4, \arg(z)=0$.

8. Вычислить модуль и аргумент числа $z=-8i$.
Ответ: $|z|=8, \arg(z)=-\frac{\pi}{2}$.

9. Вычислить модуль и аргумеит числа $z=-3-3\sqrt{3}i$.
Ответ: $|z|=6, \arg(z)=\frac{4\pi}{3}$.

10. Вычислить модуль и аргумент числа $z = -3 - 3i$.
Ответ: $|z| = 3, \arg(z) = -3\frac{\pi}{4}$.

11. Вычислить модуль и аргумент числа $z = -5 - 5i$.
Ответ: $|z| = 5, \arg(z) = -3\frac{\pi}{4}$.

12. Вычислить модуль и аргумент числа $z = 8 + 8i$.
Ответ: $|z| = 8, \arg(z) = \frac{\pi}{4}$.

13. Вычислить модуль и аргумент числа $z = 5 + 5i$.
Ответ: $|z| = 5, \arg(z) = \frac{\pi}{4}$.

14. Вычислить модуль и аргумент числа $z = 3 + 3i$.
Ответ: $|z| = 3, \arg(z) = \frac{\pi}{4}$.

15. Вычислить модуль и аргумент числа $z = -3 + 3i$.
Ответ: $|z| = 3, \arg(z) = \frac{3\pi}{4}$.

16. Вычислить модуль и аргумент числа $z = -5 + 5i$.
Ответ: $|z| = 5, \arg(z) = \frac{3\pi}{4}$.

17. Вычислить модуль и аргумент числа $z = 9 - 9i$.
Ответ: $|z| = 9, \arg(z) = -\frac{\pi}{4}$.

18. Вычислить модуль и аргумент числа $z = 11 + 11i$.
Ответ: $|z| = 11, \arg(z) = -\frac{\pi}{4}$.

19. Вычислить модуль и аргумент числа $z = -\frac{8}{16} - \frac{8}{16}i$.
Ответ: $|z| = \frac{1}{2}, \arg(z) = -3\frac{\pi}{4}$.

20. Вычислить модуль и аргумент числа $z = 1 + \sqrt{3}i$.
Ответ: $|z| = 2, \arg(z) = \frac{\pi}{3}$.

21. Найти комплексные корни уравнения $x^2 - 8x + 65 = 0$.
Ответ: $x_{1.2} = 4 \pm 7i$.

22. Найти комплексные корни уравнения $x^2 + 8x + 65 = 0$.
Ответ: $x_{1.2} = -4 \pm 7i$.

23. Найти комплексные корни уравнения $x^2 + 14x + 53 = 0$.
Ответ: $x_{1.2} = -7 \pm 2i$.

24. Найти комплексные корни уравнения $x^2 - 14x + 53 = 0$.
Ответ: $x_{1.2} = 7 \pm 2i$.

25. Найти комплексные корни уравнения $x^2 - 2x + 2 = 0$.
Ответ: $x_{1.2} = 1 \pm i$.

26. Найти комплексные корни уравнения $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Ответ: $x_{1.2} = -1 \pm i$.

26. Найти комплексные корни уравнения $x^2 - 6x + 34 = 0$.

Ответ: $x_{1.2} = 3 \pm 5i$.

27. Найти комплексные корни уравнения $x^2 + 6x + 34 = 0$.

Ответ: $x_{1.2} = -3 \pm 5i$.

28. Найти комплексные корни уравнения $x^2 - 12x + 38 = 0$.

Ответ: $x_{1.2} = 6 \pm \sqrt{2}i$.

29. Найти комплексные корни уравнения $x^2 + 12x + 38 = 0$.

Ответ: $x_{1.2} = -6 \pm \sqrt{2}i$.

30. Найти комплексные корни уравнения $x^2 - 3x + 4 = 0$.

Ответ: $x_{1.2} = -6 \pm \sqrt{2}i$.

31. Найти комплексные корни уравнения $x^2 - 2x + 6 = 0$.

Ответ: $x_{1.2} = 1 \pm \sqrt{5}i$.

32. Найти комплексные корни уравнения $x^2 - 7x + 40 = 0$.

Ответ: $x_{1.2} = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{111}}{2}i$.

33. Найти комплексные корни уравнения $x^2 - 3x + 7 = 0$.

Ответ: $x_{1.2} = \frac{3}{2} \pm \frac{9}{2}i$.

34. Найти комплексные корни уравнения $x^2 + 2x + 6 = 0$.

Ответ: $x_{1.2} = -1 \pm \sqrt{5}i$.

35. Найти комплексные корни уравнения $x^2 + 3x + 7 = 0$.

Ответ: $x_{1.2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}i$.

36. Найти комплексные корни уравнения $x^2 + 7x + 40 = 0$.

Ответ: $x_{1.2} = -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{111}}{2}i$.

37. Найти комплексные корни уравнения $x^2 + 3x + 4 = 0$.

Ответ: $x_{1.2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$.

38. Найти комплексные корни уравнения $x^2 - x + 4 = 0$.

Ответ: $x_{1.2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}i$.

39. Найти комплексные корни уравнения $x^2 + x + 4 = 0$.

Ответ: $x_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}i$.

40. Вычислите значение многочлена
$P(z) = (4 + 3i)z^2 + (5 + i)z + (-4 + 4i)$ в точке $z = 2 + 4i$.

Ответ: $-6+18i$.

41. Вычислите значение многочлена
$P(z)=(4+3i)z^2+(5+i)z+(-4+4i)$ в точке $z=i$.
Ответ: $-7-4i$.

42. Вычислите значение многочлена
$P(z)=(1000004+3000999i)z^2+(5+i)z+(-4+4i)$ в точке $z=1+134i$.
Ответ: $-18759339685-53614935298i$.

43. Вычислите значение многочлена
$P(z)=(40+70i)z^2+(15+i)z+(-1+4i)$
в точке $z=0{,}0002+0{,}254i$.
Ответ: $-3{,}8387503999999995+3{,}2981467999999996i$.

44. Вычислите значение многочлена
$P(z)=(4+3i)z^2+(5+i)z+(-4+4i)$ в точке $z=23+1i$.
Ответ: $2084+1800i$.

45. Вычислите значение многочлена
$P(z)=(12+999i)z^2+(5+i)z+(-4+4i)$ в точке $z=1+134i$.
Ответ: $-483325-17933154i$.

46. Вычислите значение многочлена
$P(z)=(40+70i)z^2+(15+i)z+(-1+4i)$ в точке
$z=0{,}2+0{,}54i$.
Ответ: $23{,}724+3{,}328i$.

47. Вычислите значение многочлена
$P(z)=(1+3i)z^2+(1+i)z+(1+i)$ в точке $z=2+i$.
Ответ: $-7+17i$.

48. Вычислите значение многочлена
$P(z)=(20+20i)z^2+(5+i)z+(-13+13i)$ в точке $z=20+20i$.
Ответ: $-15933+16133i$.

49. Вычислите значение многочлена
$P(z)=(24+53i)z^2+(5+i)z+(-4+4i)$ в точке $z=7+i$.
Ответ: $440+2896i$.

50. Пусть $z_1=-1-i$, $z_2=1+4i$. Вычислите $\dfrac{z_1}{\overline{z_2}}-\dfrac{\overline{z_2}}{z_1}$.

Ответ: $-\frac{45}{34}-\frac{95}{34}i$.

51. Пусть $z_1=1+7i$, $z_2=-3-9i$. Вычислите $\dfrac{z_1+\overline{z_2}}{\overline{z_2}-z_2}$.

Ответ: $\frac{6}{5}+\frac{17}{5}i$.

52. Пусть $z_1 = 1-3i$, $z_2 = 2-9i$. Вычислите $\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{z_1-z_2}$.

Ответ: $-\frac{69}{37}-\frac{30}{37}i$.

53. Пусть $z_1 = -6+5i$, $z_2 = 2-i$. Вычислите $\frac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{z_1+z_2}$.

Ответ: $\frac{1}{4}+\frac{7}{4}i$.

54. Пусть $z_1 = -1+i$, $z_2 = 3+2i$. Вычислите $\frac{z_1}{\overline{z_2}}+\frac{\overline{z_2}}{z_1}$.

Ответ: $-\frac{75}{26}-\frac{11}{26}i$.

55. Пусть $z_1 = 3+4i$, $z_2 = -1-i$. Вычислите $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$.

Ответ: $-\frac{189}{50}-\frac{23}{50}i$.

56. Пусть $z_1 = -6-5i$, $z_2 = 4+i$. Вычислите $\frac{z_1-z_2}{\overline{z_1}+\overline{z_2}}$.

Ответ: $\frac{1}{5}+\frac{13}{5}i$.

57. Пусть $z_1 = 1+4i$, $z_2 = -1+i$. Вычислите $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$.

Ответ: $\frac{57}{34}-\frac{75}{34}i$.

58. Пусть $z_1 = 1+4i$, $z_2 = -1+i$. Вычислите $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$.

Ответ: $\frac{57}{34}-\frac{75}{34}i$.

59. Пусть $z_1 = -6-4i$, $z_2 = 2-i$. Вычислите $\frac{z_1-\overline{z_2}}{\overline{z_1}+z_2}$.

Ответ: $\frac{17}{25}+\frac{44}{25}i$.

60. Вычислите значение выражения и представьте результат в виде $a+bi$.

$$\frac{(3-4i)(-3+5i)}{1+4i}.$$

Ответ: $7-i$.

61. Вычислите значение выражения и представьте результат в виде $a+bi$.

$$\frac{(3-4i)(-1+2i)}{5+3i}.$$

Ответ: $\frac{19}{34}+\frac{43}{34}i$.

62. Вычислите значение выражения и представьте результат в виде $a + bi$.

$$\frac{(-4+5i)(3-2i)}{3+4i}.$$

Ответ: $\frac{117}{25} + \frac{69}{25}i$.

63. Вычислите значение выражения и представьте результат в виде $a + bi$.

$$\frac{1+i}{i-6}.$$

Ответ: $\frac{5}{37} + \frac{7}{37}i$.

64. Вычислите значеиие выражения и представьте результат в виде $a + bi$.

$$\frac{5i+3}{2-i}.$$

Ответ: $\frac{1}{5} + \frac{13}{5}i$.

65. Вычислите значение выражения и представьте результат в виде $a + bi$.

$$\frac{4i+6}{1+2i}.$$

Ответ: $\frac{14}{5} - \frac{8}{5}i$.

66. Вычислите значение выражения и нредставьте результат в виде $a + bi$.

$$\frac{(5+5i)(-1+3i)}{-1+2i}.$$

Ответ: $8 + 6i$.

67. Вычислите значение выражения и иредставьте результат в виде $a + bi$.

$$\frac{5+i}{i+4}.$$

Ответ: $\frac{21}{17} + \frac{1}{17}i$.

68. Вычислите значение выражения и представьте результат в виде $a + bi$.

$$\frac{(2+3i)(-5+5i)}{4-i}.$$

Ответ: $-\frac{95}{17} - \frac{45}{17}i$.

69. Вычислите значение выражения и представьте результат в виде $a + bi$.

$$\frac{(3-i)(4+2i)}{2-5i}.$$

Ответ: $\frac{18}{29} + \frac{74}{29}i$.

70. Выполнить указанные действия

$$\frac{(2+3i)^8}{(1-i)^6}.$$

Ответ: $3570 + 29{,}875i$.

71. Выполнить указанные действия

$$\frac{(-10+10i)^3}{(1-i)^2}.$$

Ответ: $-1000 + 1000i$.

72. Выполнить указаниые действия

$$\frac{(-1+10i)^3}{(1-i)^2}.$$

Ответ: $485 + 149{,}5i$.

73. Выполнить указаииые действия

$$\frac{(-10+i)^3}{(1-i)^2}.$$

Ответ: $-149{,}5 - 485i$.

74. Выполнить указанные действия

$$\frac{(-2+3i)^{10}}{(3-3i)^4}.$$

Ответ: $1054{,}089 - 449{,}593i$.

75. Выполнить указаниые действия

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^8}.$$

Ответ: $-0{,}25 - 0{,}25i$.

76. Выполнить указаниые действия

$$\frac{(-10+10i)^6}{(2-3i)^4}.$$

Ответ: $33612{,}268 - 33332{,}166i$.

77. Выполнить указанные действия

$$\frac{(3+2i)^6}{(1-i)^8}.$$

Ответ: $-127{,}1875 - 51{,}75i$.

78. Выполнить указанные действия

$$\frac{(32+21i)^6}{(21-12i)^8}.$$

Ответ: $0{,}006 + 0{,}026i$.

79. Выполнить указанные действия

$$\frac{(2+3i)^{10}}{(1-i)^8}.$$

Ответ: $-21345{,}3125 - 9104{,}25i$.

80. Найти все корни 3 степени из единицы

Ответ: $1.;\ -0{,}5\ -\ 0{,}866 * i;\ -0{,}5\ +\ 0{,}866 * i$.

81. Найти все корни 4 степени из единицы

Ответ: $-1{,}0;\ 1{,}0;\ -i;\ i$.

82. Найти все корни 2 степени из единицы

Ответ: $1; -1$.

83. Найти все значення $\sqrt{4+3i}$.

Ответ: $2{,}121\ -\ 0{,}707i;\ 2{,}121\ +\ 0{,}707i$.

84. Найти все значення $\sqrt[3]{4+3i}$.

Ответ: $-1{,}150\ +\ 1{,}265i; -0{,}520\ -\ 1{,}629i;\ 1{,}671\ +\ 0{,}364i$.

85. Найти все значення $\sqrt{1+i}$.

Ответ: $-1{,}097 - 0{,}455i$; $1{,}099 + 0{,}455i$.

86. Найти все значення $\sqrt[5]{1-i}$.

Ответ: $-0{,}955 - 0{,}487i$; $-0{,}758 + 0{,}758i$; $0{,}168 - 1{,}058i$; $0{,}486 + 0{,}955i$; $1{,}058 - 0{,}167$i.

87. Найти все корпи третьей степени из 4.

Ответ: $1{,}587$; $-0{,}794 - 1{,}375$i; $-0{,}794 + 1{,}375i$.

88. Найти все корни второй степени из 4.

Ответ: -2; 2.

89. Найти все корни третьей степени из 27.

Ответ: [3; $-1{,}5 - 2{,}598i$; $-1{,}5 + 2{,}598i$.

90. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (2+3i)x + (2-3i)y = -2, \\ (-2+2i)x + (-2+3i)y = 3. \end{cases}$$

Ответ: $(-0{,}2i;\ -0{,}492 - 0{,}538i)$.

91. Решить систему уравнеиий

$$\begin{cases} (1+i)x + (-1+i)y = -6, \\ (-1+2i)x + (-2+3i)y = 8. \end{cases}$$

Ответ: $(-5{,}75 + 0{,}75i; 2{,}25 - 2{,}75i)$

92. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(1+2i)x+(-1+2i)y=-6,\\(-1+2i)x+(-2+3i)y=0.\end{cases}$$

Ответ: $(-3{,}35+1{,}59i; 1{,}94-1{,}24i)$.

93. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(1+2i)x+(-3+2i)y=-1,\\(-1+2i)x+(-2+3i)y=2.\end{cases}$$

Ответ: $(-1{,}07-0{,}0714i; 0{,}357-0{,}5i)$.

94. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(2+2i)x+(-3+2i)y=-2,\\(-2+2i)x+(-2+3i)y=3.\end{cases}$$

Ответ: $(-1{,}1+0{,}1i; 0{,}4-0{,}6i)$.

95. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(1+2i)x+(-1+7i)y=1,\\(-1+7i)x+(-2+3i)y=-5.\end{cases}$$

Ответ: $(0{,}121+0{,}911i; -0{,}215-0{,}355i)$.

96. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(1+i)x+(1-i)y=1,\\(-1+i)x+(-1+i)y=-5.\end{cases}$$

Ответ: $(3; -0{,}5+2{,}5i)$.

97. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(1+2i)x+(1-2i)y=12,\\(-1+2i)x+(-1+2i)y=15.\end{cases}$$

Ответ: $(1{,}5; -1{,}5-6i)$.

98. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(2+2i)x+(-11+2i)y=1,\\(-2+2i)x+(-11+2i)y=1.\end{cases}$$

Ответ: $(0; -0{,}088-0{,}016i)$.

99. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(1+3i)x+(-1+2i)y=12,\\(-1+2i)x+(-1+3i)y=15.\end{cases}$$

Ответ: $(0{,}0462-0{,}831i; -1{,}62-3{,}92i)$

2. Предел, непрерывность, ряды

Предел, непрерывность

Для вычисления ирeделов исиользуется фуикция limit() библиотеки sympy. Синтаксис: sympy.limit (функция, предел которой вычисляется, нeременная, нредельное зиачение перемениой, правостороиний, левосторопиий или обычпый предел).

sympy.limit (e, z, z0, dir='+')

Параметры: вычисляется предел функции *e* от перемеппой *z* при стремлепии к числу zo, zo может быть прииимать бескоиечные значения, oo и –oo; если dir="+–" или эта позиция отсутствует, вычисляется обычпый двусторонпий предел, если dir="+" – правостороиний, если dir="–" – левостороппий пределы. Отметим, что символ бескопечности в языке Python – это две буквы о (oo).

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6x^2+3x}{3x^2}$.

Решение.

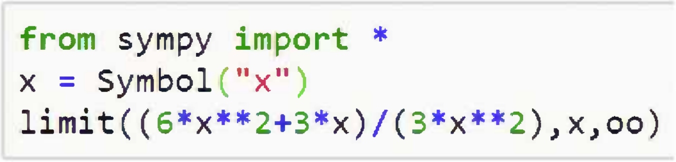
Введем библиотеку sympy.

from sympy import *

x=Symbol ("x")

limit((6*x**2+3*x)/(3*x**2),x,oo)

Компилируем



```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit((6*x**2+3*x)/(3*x**2),x,oo)
```

2

Ответ: 2.

Пример 2. Вычислить пределы:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\nolimits_{x \to 0} \frac{x}{sinx} = 1$$

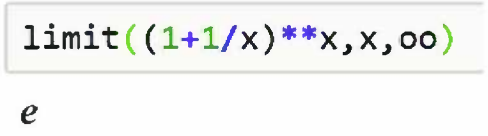
```
limit(sin(x)/x,x,0)
```

1

$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

```
limit((1+x)**(1/x),x,0)
```

```
e
```

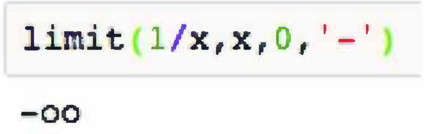


```
limit((1+1/x)**x,x,oo)
```

```
e
```

Одностороннне пределы

Найдем левостороиний предел
Заметим, что вместо dir= ‘–’ можно поставнть просто ‘–‘



```
limit(1/x,x,0,'-')
```

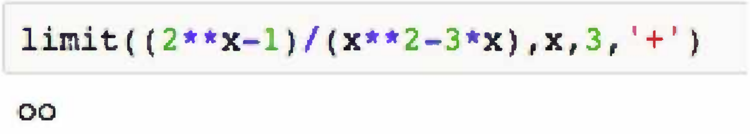
```
-oo
```

Пример 3. Найти левосторонний и правостороний пределы функции

$$\frac{2^x - 1}{x^2 - 3x}$$

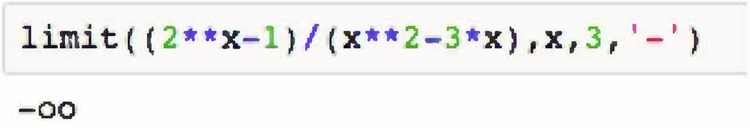
при $x \to 3$.

Решение.



```
limit((2**x-1)/(x**2-3*x),x,3,'+')
```

```
oo
```

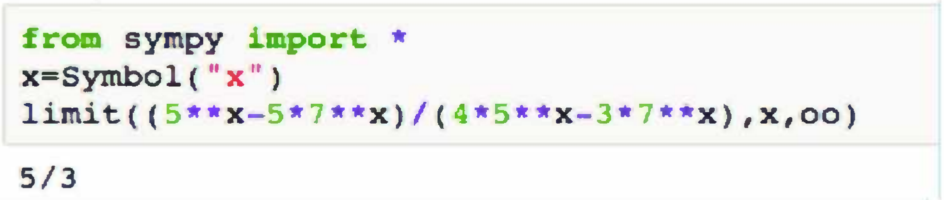


```
limit((2**x-1)/(x**2-3*x),x,3,'-')
```

```
-oo
```

Ответ: $\infty, -\infty$.

Пример 4.

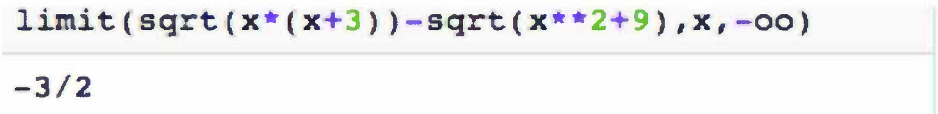


```
from sympy import *
x=Symbol("x")
limit((5**x-5*7**x)/(4*5**x-3*7**x),x,oo)
```

```
5/3
```

```
from sympy import *
x=Symbol("x")
limit((7*8**x+2*9**x)/(6*8**x-6*9**x),x,-oo)
```

```
7/6
```



```
limit(sqrt(x*(x+3))-sqrt(x**2+9),x,-oo)
```

```
-3/2
```

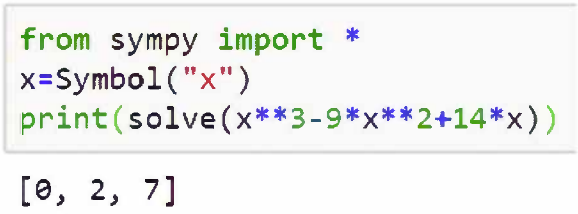
Отметим, что одностороиние пределы используются при решеиии задач на исследование типов точек разрыва функции.

Пример 5. Найти точки разрыва функции и определить их тппы

$$f(x) = \frac{|x-2|(x-7)}{x^3 - 9x^2 + 14x}$$

Решение.

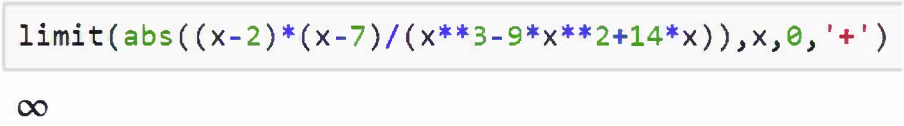
Найдем нули знамеиателя и пределы в этих точках. Чтобы найти иули $f(x)$ используем фупкцию solve $(f(x))$.



```
from sympy import *
x=Symbol("x")
print(solve(x**3-9*x**2+14*x))
```

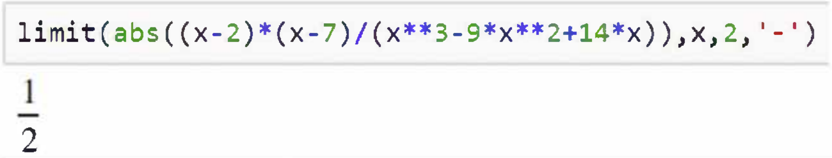
```
[0, 2, 7]
```

```
limit(abs((x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x)),x,0,'-')
```



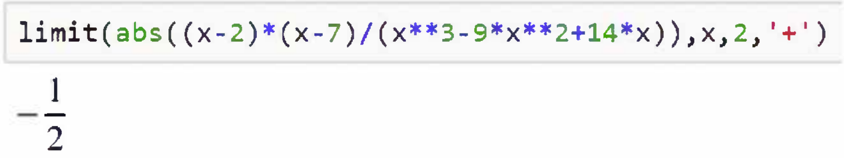
```
limit(abs((x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x)),x,0,'+')
```

$$\infty$$



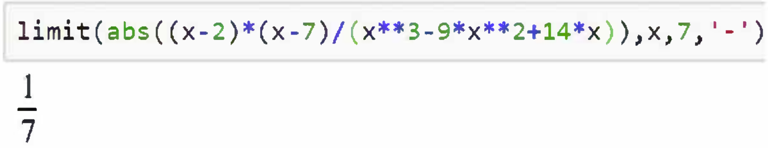
```
limit(abs((x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x)),x,2,'-')
```

$$\frac{1}{2}$$



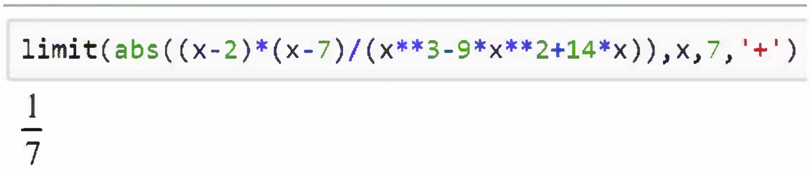
```
limit(abs((x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x)),x,2,'+')
```

$$-\frac{1}{2}$$



```
limit(abs((x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x)),x,7,'-')
```

$$\frac{1}{7}$$



```
limit(abs((x-2)*(x-7)/(x**3-9*x**2+14*x)),x,7,'+')
```

$$\frac{1}{7}$$

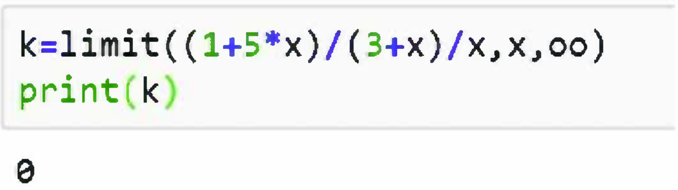
Ответ: 0 – точка разрыва II рода, 7 – I рода, устранимый разрыв, 2 – I рода, неустрапимый разрыв (с легкостью можио сделать вывод итогов автоматически).

Так же пределы, левосторопние н правосторонние прнходиться вычислять при исследованин функцин с целью построении ее графпка для нахожденпя асимптот и исследования поведения функцпи на бесконечности п вблнзп граннчных точек ее областп определения.

Пример 6. Найти асимптоты графика функцни

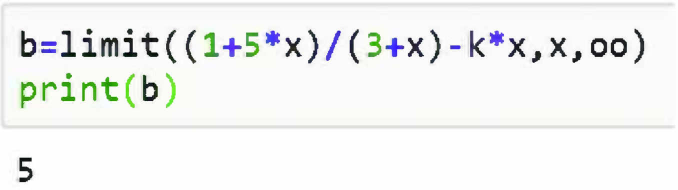
$$y = \frac{1 + 5x}{3 + x}$$

Решение. Сначала найдем наклонные аснмитоты $y = kx + b$.



```
k=limit((1+5*x)/(3+x)/x,x,oo)
print(k)
```

```
0
```



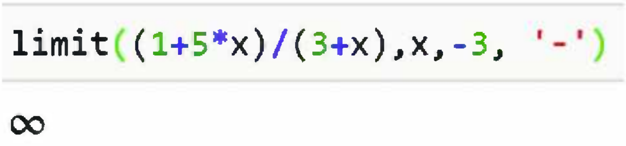
```
b=limit((1+5*x)/(3+x)-k*x,x,oo)
print(b)
```

```
5
```

Затем вертнкальные. Для этого решим уравнение, прправняв знаменатель дробп к нулю: $3 + x = 0$, и найдем левостороннй н правосторонннй нределы функцин, прн переменной, стремящейся к иулю знаменателя.

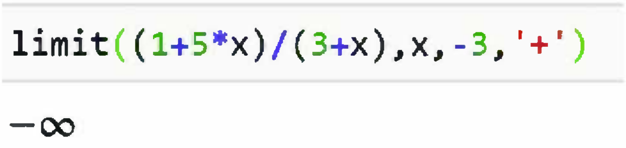
```
solve(3+x)
```

```
[-3]
```



```
limit((1+5*x)/(3+x),x,-3, '-')
```

∞



```
limit((1+5*x)/(3+x),x,-3,'+')
```

$-\infty$

Ответ: $y = 5$ – горпзонтальная аснмптота, $x = – 3$ – вертнкальная асимптота.

Ряды

Пределы можно использовать для решения задач с числовыми и функциональными рядами. Напомним, что числовые и функциональные ряды являются мощным инструментом теории прпблпженпй.

Определение. Бесконечная сумма

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

называется чнсловым рядом нлн просто рядом, a_n — члены ряда.

Обозначим $S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2, \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Определение. Если существует предел $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ называется сходящимся, если не существует этого предела, то ряд называется расходящнмся.

Если все члены ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

неотрицательные числа, то ряд называется ноложительным.

Теорема. Для того чтобы положительный ряд сходился, необходнмо и достаточно, чтобы последовательность частнчных сумм этого ряда была ограннчена сверху.

Далее сформулируем достаточные признаки сходимости положительных рядов.

Признак сравнения рядов.

Пусть даны два положительиых ряда

$$(B) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,\ (C) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n .$$

Если члепы ряда (B) ие превосходят соответствующпх члеиов ряда (C), т.е. $b_n \le c_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то из сходимости ряда (C) следует сходнмость ряда (B), а нз расходнмости ряда (B) следует расходимость ряда (C).

Признак Даламбера. Если члены положительного ряда таковы, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то при $l < 1$ ряд сходится, а при $l > 1$ ряд расходится. При $l = 1$ для выяснения вопроса о сходимостн ряда нужно прнменять другой признак.

Интегральный признак Коши. Пусть члены положительного ряда таковы, что $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \ldots, a_n = f(n), \ldots,$ где функция $f(x)$ при $x \geq 1$ непрерывна, положительна и убывает. Тогда ряд и несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{i-1}a_i = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots,$$

где $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Необходимый признак сходимости знакочередующихся рядов.

Теорема (*Лейбница*). Если члены знакочередующегося ряда по абсолютной величине монотонно убывают, то есть $a_{n+1} < a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и общий член стремится к нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,$ то ряд сходится.

Кроме того, остаток r_n знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине. Это позволяет вычислять приближенное значение суммы ряда с любой заданной точностью.

С каждым рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ связан ряд, составленный из модулей (абсолютных величин) членов данного ряда, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Обратное не всегда верно.

Если сходится знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ расходится, то знакочередующийся ряд называется условно сходящимся. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ сходится, то знакочередующийся ряд называется абсолютно сходящимся.

Алгоритм проверки ряда на сходимость:

1. Проверим необходимое условие сходимости — выполнение теоремы Лейбница. Если она не выполняется, то ряд расходится.
2. Если выполняется, то рассмотрим ряд из модулей. Применим к этому ряду один из достаточных признаков сходимости рядов с положительными членами.
3. Если ряд из модулей сходится, то искомый ряд сходится абсолютно, в противном случае искомый ряд сходится условно.

Ряд с комплекспымп членамп $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+ib_n)$. Задача о сходимости таких рядов сводится к изучению сходимости рядов составленных из действительных $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и мнимых $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ частей. Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба этих ряда.

Если сходится ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+ib_n|$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+ib_n)$ сходится абсолютно.

Функцпопальпые ряды состоят из функций:

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

Пример функционального ряда: $1+x+x^2+x^3+\ldots x^n+\ldots$.

Определение. Если этот числовой ряд сходится, то точку x_0 называет *точкой сходимости* функционального ряда. Если этот ряд расходиться, то точку x_0 называет *точкой расходимости* функционального ряда. Совокупность всех точек сходимости функционального ряда называют *областью сходимости* функциоиального ряда.

Сумма первых *n* члеиов функционального ряда, то есть его частичная сумма, является также фуикцией, зависящей от x. Для любой точки из области сходимости функционального ряда существует предел $S_n(x)$ при $n\to\infty$. В остальных точках частичная сумма не имеет предела.

Рассмотрим функцпоиальный ряд впда

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

Это *степенной ряд*, числа $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – коэффицпеиты степенного ряда.

Теорема (*Абель*). Если степенной ряд сходится при $x=x_0\neq 0$, то он абсолютно сходится для любого *x*, удовлетворяющего условию $|x|<|x_0|$; если при $x=x_0\neq 0$ степенной ряд расходится, то ои расходится для любого x, удовлетворяющего условию $|x|>|x_0|$.

Важным следствие теоремы Абеля является налпчие радиуса сходимости степеииого ряда. Более точно, для каждого степенного ряда существует число $R>0$, называемое *радиусом сходимости* этого ряда, такое что при $|x|<R$ степенной ряд сходится абсолютно, а при $|x|>R$ ряд расходится. Промежуток $(-R, R)$ называют *интервалом сходимости* степенного ряда. *Областью сходимости* стеиеиного ряда называют интервал сходимости, к которому могут добавляться один нли оба конца интервала. Если для степенного ряда существует и отличен от нуля нредел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L,$$

то радиус сходимости степениого ряда можио вычислить по формуле $R=\frac{1}{L}$.

Ряд по степеням разности $x-a$ также называют степенным рядом:

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots.$$

Если функцня $f(x)$ есть сумма ряда такого вида, то говорят, что функция *разлагается в степенной ряд*. Это означает, что функцию можно приближеино замеиить суммой нескольких членов степенного ряда н это разложение едииствепно.

Радиус сходимости может быть вычислен по формулам

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ или } R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Рядом Тейлора функцип $f(x)$ называется степенной ряд

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots\cdot$$

Здесь числа

$$a_0=f(x_0),\ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ldots$$

называют *коэффициентами Тейлора* функцин $f(x)$ в точке x_0.

Прп $x_0=0$ имеем ряд Мак Лорена:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}x+\frac{f''(x_0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n+\ldots.$$

Отметим, что еслн заранее не предполагать, что функция $f(x)$ может быть разложена в степенной ряд, то возпикает вопрос, будет ли составленный ряд Тейлора сходнться н в действнтельностн ли его сумма равна $f(x)$.

Формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x),$$

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+o(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

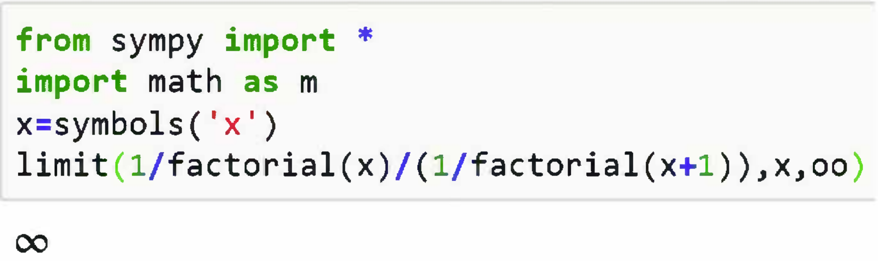
Для того чтобы ряд Тейлора сходился к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $r_n(x)$ в формуле Тейлора в каждой точке интервала сходимости стремился к нулю при $n\to\infty$.

Пример 7. Найдем радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение.

Применим формулу для нахождения раднуса сходимости стененного ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$



```
from sympy import *
import math as m
x=symbols('x')
limit(1/factorial(x)/(1/factorial(x+1)),x,oo)
```

```
∞
```

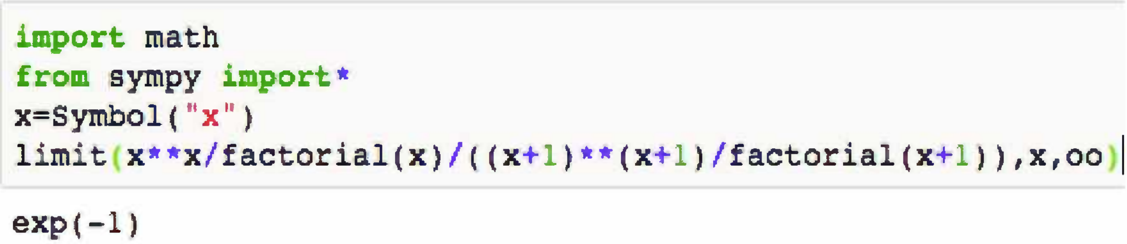
$R=\infty$, значнт, ряд сходится прн всех x, то есть в нитервале $(-\infty, +\infty)$. Из сходимости ряда вытекает $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ нри всех x.

Пример 8. Найдем радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$.

Решение.

Радиус сходимостн найдем, используя признак Даламбера:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\cdot(n+1)!}{n!\cdot(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot(n+1)}=\frac{1}{e}.$$



```
import math
from sympy import*
x=Symbol("x")
limit(x**x/factorial(x)/((x+1)**(x+1)/factorial(x+1)),x,oo)
```

```
exp(-1)
```

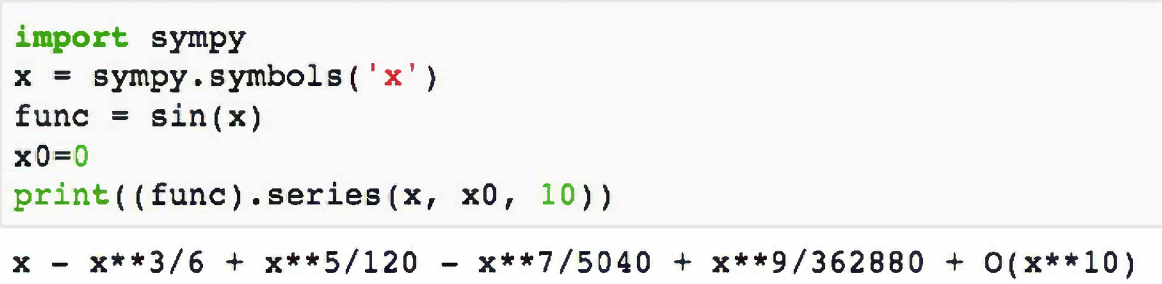
Ряд сходится на интервале $-\frac{1}{e}<x<\frac{1}{e}$. Ответ на вопрос о сходимости ряда на концах интервала остается открытым.

Пример 9. Разложим в ряд Мак Лорена функции

$$f(x) = sinx,\ f(x) = cosx,\ f(x) = e^x, f(x) = arcsinx.$$

Решение.

Это можно сделать с помощью функцни func.series (x,x0,m), где x – переменная, по степеням которой раскладывается ряд, x0 – точка, в которой осуществляется разложение, *m* порядок остатка.

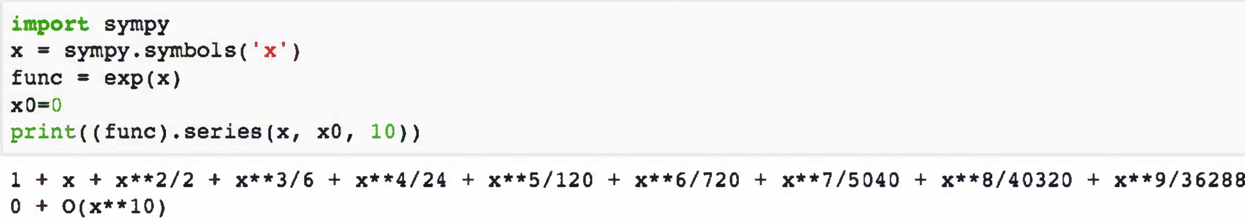


```
import sympy
x = sympy.symbols('x')
func = sin(x)
x0=0
print((func).series(x, x0, 10))
```

```
x - x**3/6 + x**5/120 - x**7/5040 + x**9/362880 + O(x**10)
```

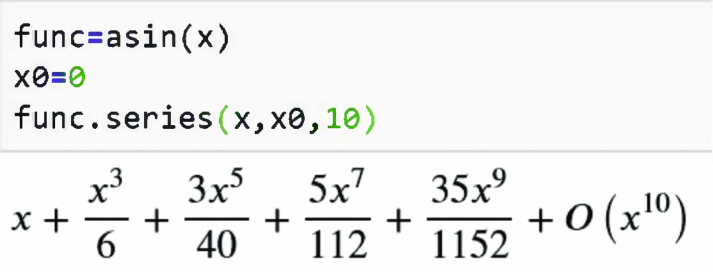
```
import sympy
x = sympy.symbols('x')
func = cos(x)
x0=0
print((func).series(x, x0, 10))
```

```
1 - x**2/2 + x**4/24 - x**6/720 + x**8/40320 + O(x**10)
```



```
import sympy
x = sympy.symbols('x')
func = exp(x)
x0=0
print((func).series(x, x0, 10))
```

```
1 + x + x**2/2 + x**3/6 + x**4/24 + x**5/120 + x**6/720 + x**7/5040 + x**8/40320 + x**9/36288
0 + O(x**10)
```

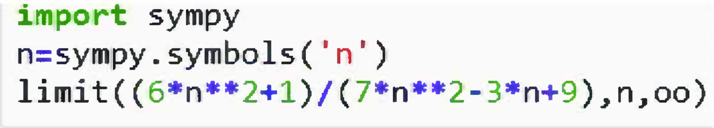


```
func=asin(x)
x0=0
func.series(x,x0,10)
```

$$x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\frac{35x^9}{1152}+O\left(x^{10}\right)$$

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n^2+1}{7n^2-3n+9}\right)$.

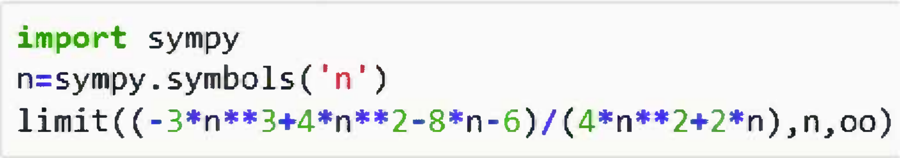


```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((6*n**2+1)/(7*n**2-3*n+9),n,oo)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ответ: $\frac{6}{7}$.

Пример 2. Вычислите предел последовательиости $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-3n^3+4n^2-8n-6}{4n^2+2n}\right)$.

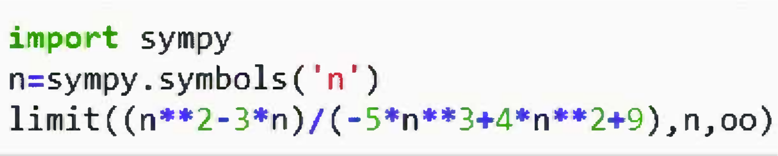


```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((-3*n**3+4*n**2-8*n-6)/(4*n**2+2*n),n,oo)
```

$$-\infty$$

Ответ: $-\infty$.

Пример 3. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n}{-5n^3+4n^2+9}\right)$.



```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((n**2-3*n)/(-5*n**3+4*n**2+9),n,oo)
```

$$0$$

Ответ: 0.

Пример 4. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-7n+10}{\sqrt{9n^2+10n}}\right)$.

```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((-7*n+10)/sqrt(9*n**2+10*n),n,oo)
```

$$-\frac{7}{3}$$

Ответ: $-\frac{7}{3}$.

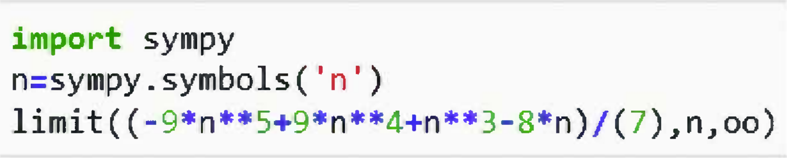
Пример 5. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^4-6}{-2n^4+8n^2+9n-5}\cdot$

```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((4*n**4-6)/(-2*n**4+8*n**2+9*n-5),n,oo)
```

$$-2$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Пример 6. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{-9n^5+9n^4+n^3-8n+9}{7})$.



```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((-9*n**5+9*n**4+n**3-8*n)/(7),n,oo)
```

$$-\infty$$

Ответ: $-\infty$.

Пример 7. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{-6n^4+8n^3+6n^2-6}{4n^6-3n^5-7n^4+6n+9})$.

```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((6*n**4+8*n**3+6*n**2-6)/(4*n**6-3*n**5-7*n**4+6*n+9),n,oo)
```

$$0$$

Ответ: 0.

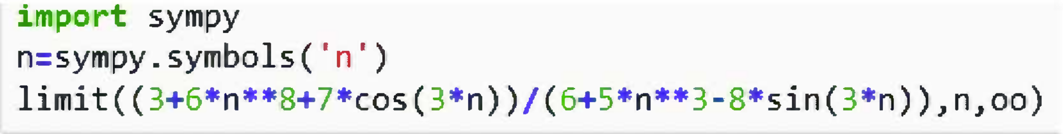
Пример 8. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{8+5n+cos6n}{3n-8sin5n-8})$.

```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((8+5*n+cos(6*n))/(3*n-8*sin(5*n)-8),n,oo)
```

$$\frac{5}{3}$$

Ответ: $\frac{5}{3}$.

Пример 9. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3+6n^8+7\cos 3n}{6+5n^3-8\sin 3n})$.



```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((3+6*n**8+7*cos(3*n))/(6+5*n**3-8*sin(3*n)),n,oo)
```

∞

Ответ: ∞.

Пример 10. Вычислите предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5n^{14}-3n^{8}+2n-1}}{2n^{7}-8n^{4}+1}\right).$$

```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit(sqrt(5*n**14-3*n**8+2*n-1)/(2*n**7-8*n**4+1),n,oo)
```

$$\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Пример 11. Вычислите предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3n^{18}+2}}{\sqrt{5n^{16}-5n^{9}+8}}\right).$$

```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit(sqrt(3*n**18+2)/sqrt(5*n**16-5*n**9+8),n,oo)
```

∞

Ответ: ∞.

Пример 12. Вычислите предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{25n^{2}+3n-2}-\sqrt{16n^{2}+n+4}}{3n+2}\right).$$

```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((sqrt(25*n**2+3*n-2)-sqrt(16*n**2+n+4))/(3*n+2),n,oo)
```

$$\frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

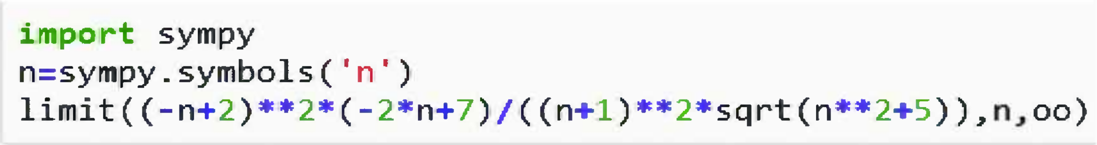
Пример 13. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{(5n^2+4)(-7n^2-7)^2}{(3n^2+6)^3})$.

```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((5*n**2+4)*(-7*n**2-7)**2/(3*n**2+6)**3,n,oo)
```

$$\frac{245}{27}$$

Ответ: $\frac{245}{27}$.

Пример 14. Вы числите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{(-n+2)^2(-2n+7)}{(n+1)^2(n^2+5)^{\frac{1}{2}}})$.

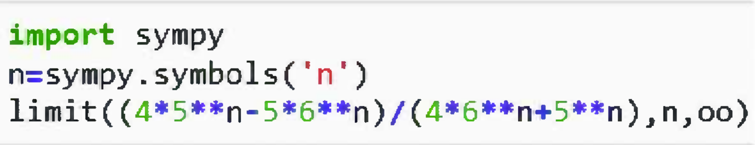


```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((-n+2)**2*(-2*n+7)/((n+1)**2*sqrt(n**2+5)),n,oo)
```

$$-2$$

Ответ: –2.

Пример 15. Вычислите предел последовательностн $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{4*5^n-5*6^n}{4*6^n+5^n})$.



```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((4*5**n-5*6**n)/(4*6**n+5**n),n,oo)
```

$$-\frac{5}{4}$$

Ответ: $-\frac{5}{4}$.

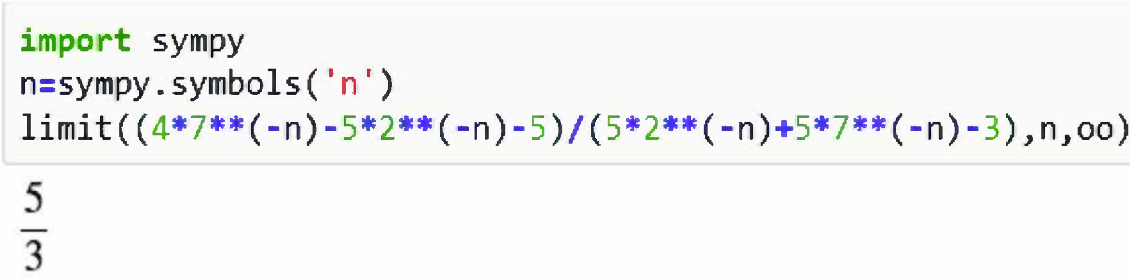
Пример 16. Вычислите предел последовательностн $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3*2^n+2*4^n-3}{4*2^n+3*4^n-2})$.

```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((3*2**n+2*4**n-3)/(4*2**n+3*4**n-2),n,oo)import sympy
```

$$\frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Пример 17. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{4*7^{-n}-5*2^{-n}-5}{5*2^{-n}+5*7^{-n}-3})$.

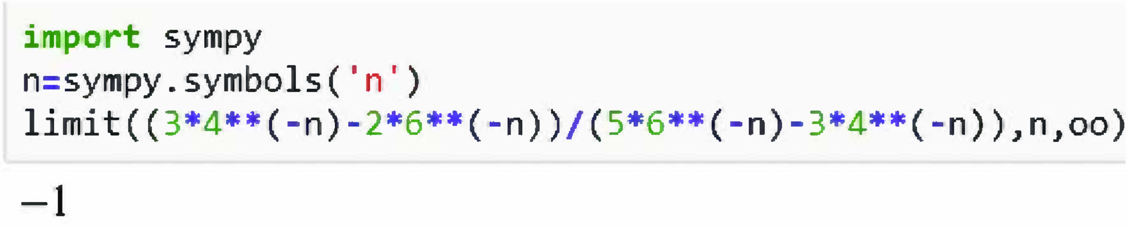


```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((4*7**(-n)-5*2**(-n)-5)/(5*2**(-n)+5*7**(-n)-3),n,oo)
```

$$\frac{5}{3}$$

Ответ: $\frac{5}{3}$.

Пример 18. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3*4^{-n}-2*6^{-n}}{5*6^{-n}-3*4^{-n}})$.

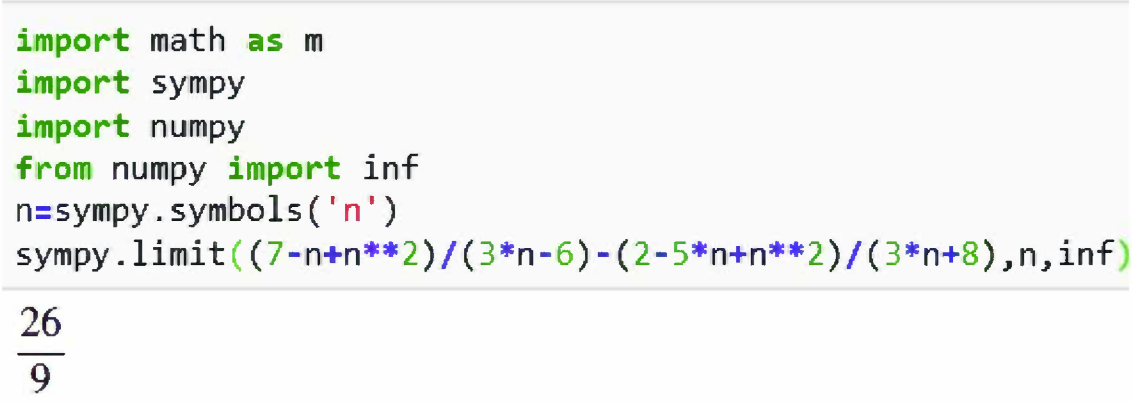


```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((3*4**(-n)-2*6**(-n))/(5*6**(-n)-3*4**(-n)),n,oo)
```

$$-1$$

Ответ: -1.

Пример 19. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{7-n+n^2}{3n-6}-\frac{2-5n+n^2}{3n+8})$.

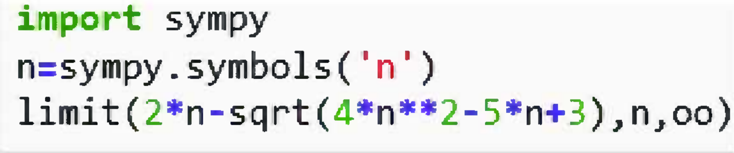


```
import math as m
import sympy
import numpy
from numpy import inf
n=sympy.symbols('n')
sympy.limit((7-n+n**2)/(3*n-6)-(2-5*n+n**2)/(3*n+8),n,inf)
```

$$\frac{26}{9}$$

Ответ: $\frac{26}{9}$.

Пример 20. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-\sqrt{4n^2-5n+3})$

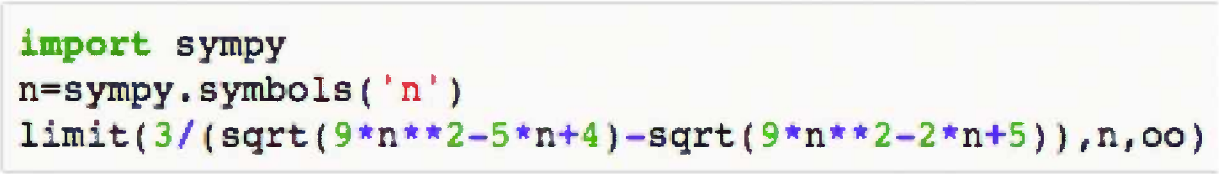


```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit(2*n-sqrt(4*n**2-5*n+3),n,oo)
```

$$\frac{5}{4}$$

Ответ: $\frac{5}{4}$.

Пример 21. Вычислите предел последовательности
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{9n^2-5n+4}-\sqrt{9n^2-2n+5}}\right)$



```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit(3/(sqrt(9*n**2-5*n+4)-sqrt(9*n**2-2*n+5)),n,oo)
```

-6

Ответ: –6.

Пример 22. Вычислите предел последовательностп

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5}-n\right)\operatorname{arctg}(5n^3-1).$$

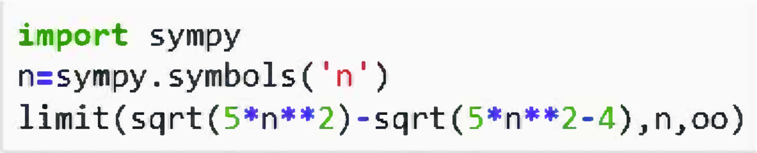
```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((sqrt(n**2+5)-n)*atan(5*n**3-1),n,oo)
```

0

Ответ: 0.

Пример 23. Вычислите предел исследовательности

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{5n^2+1}-\sqrt{5n^2-4}).$$

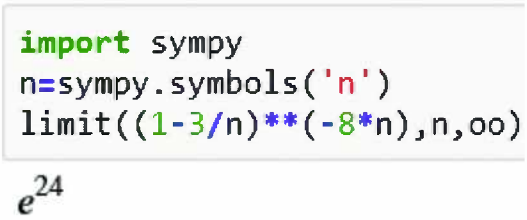


```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit(sqrt(5*n**2)-sqrt(5*n**2-4),n,oo)
```

0

Ответ: 0.

Пример 24. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{-8n}$.

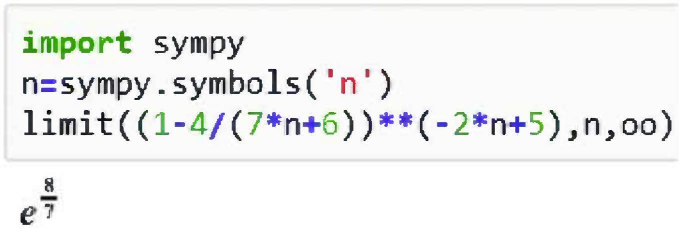


```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((1-3/n)**(-8*n),n,oo)
```

e^{24}

Ответ: e^{24}.

Пример 25. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{7n+6}\right)^{-2n+5}$.

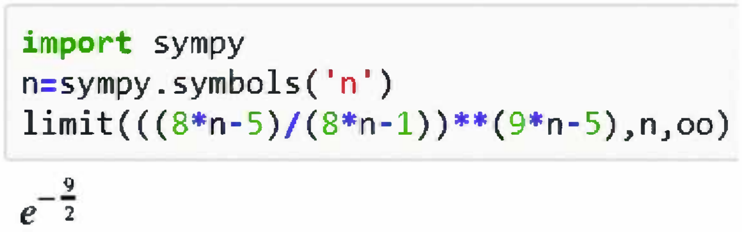


```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((1-4/(7*n+6))**(-2*n+5),n,oo)
```

$e^{\frac{8}{7}}$

Ответ: $e^{\frac{8}{7}}$.

Пример 26. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8n-5}{8n-1}\right)^{9n-5}$.

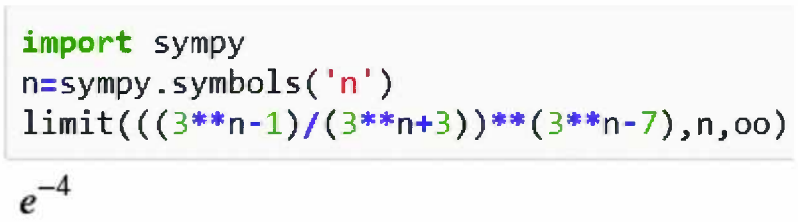


```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit(((8*n-5)/(8*n-1))**(9*n-5),n,oo)
```

$e^{-\frac{9}{2}}$

Ответ: $e^{-\frac{9}{2}}$.

Пример 27. Вычпслите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3^n-1}{3^n+3}\right)^{3^n-7}$.

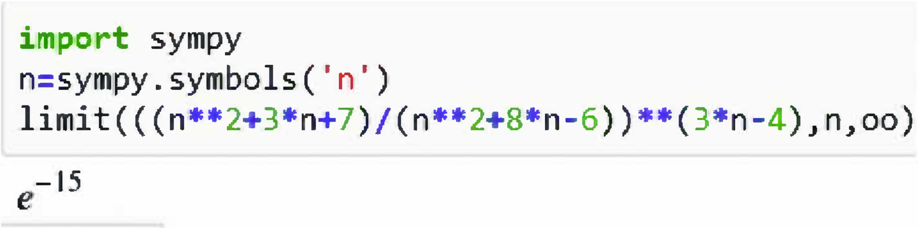


```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit(((3**n-1)/(3**n+3))**(3**n-7),n,oo)
```

e^{-4}

Ответ: e^{-4}.

Пример 28. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n+7}{n^2+8n-6}\right)^{3n-4}$.

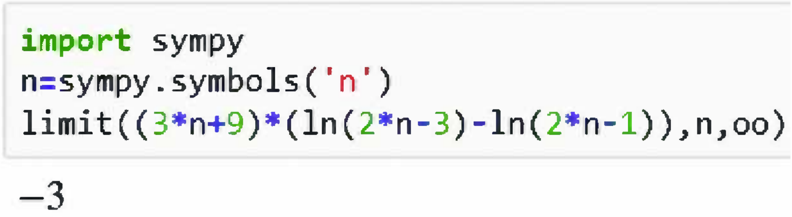


```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit(((n**2+3*n+7)/(n**2+8*n-6))**(3*n-4),n,oo)
```

e^{-15}

Ответ: e^{-15}.

Пример 29. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}(3n+9)(\ln(2n-3)-\ln(2n-1))$.

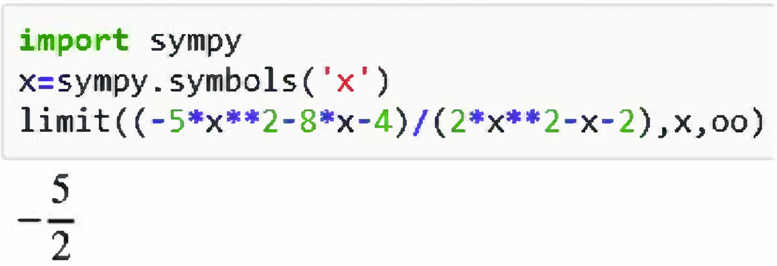


```
import sympy
n=sympy.symbols('n')
limit((3*n+9)*(ln(2*n-3)-ln(2*n-1)),n,oo)
```

-3

Ответ: –3.

Пример 30. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^2-8x-4}{2x^2-x-2}$.

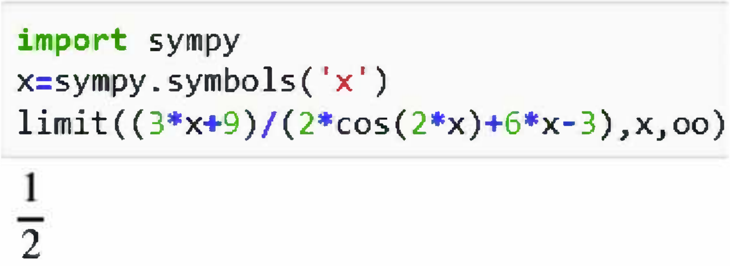


```
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit((-5*x**2-8*x-4)/(2*x**2-x-2),x,oo)
```

$-\frac{5}{2}$

Ответ: $-\frac{5}{2}$.

Пример 31. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+9}{2\cos 2x+6x-3}$.

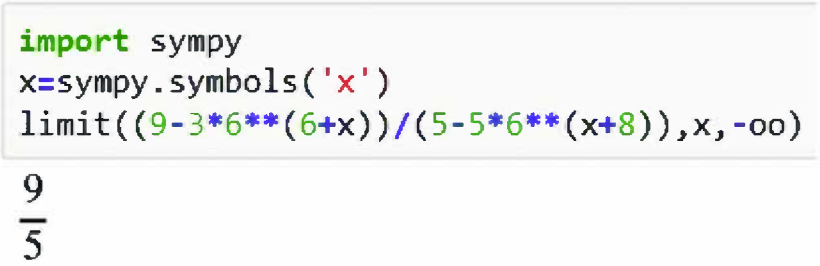


```
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit((3*x+9)/(2*cos(2*x)+6*x-3),x,oo)
```

$\frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 32. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9-3*6^{x+6}}{5-5*6^{x+8}}$.

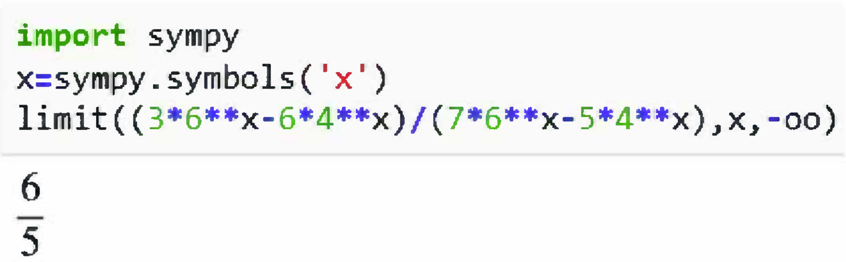


```
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit((9-3*6**(6+x))/(5-5*6**(x+8)),x,-oo)
```

$$\frac{9}{5}$$

Ответ: $\frac{9}{5}$.

Пример 33. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3*6^{x}-6*4^{x}}{7*6^{x}-5*4^{x}}$.

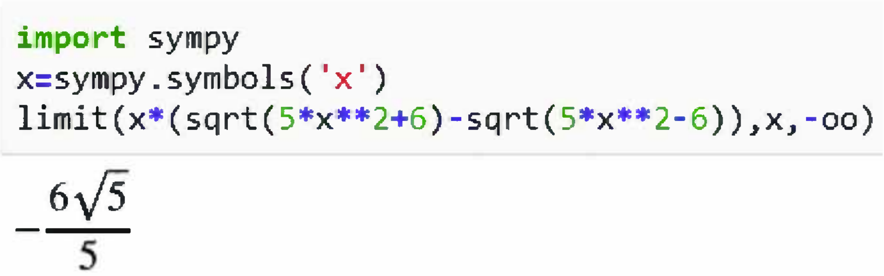


```
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit((3*6**x-6*4**x)/(7*6**x-5*4**x),x,-oo)
```

$$\frac{6}{5}$$

Ответ: $\frac{6}{5}$.

Пример 34. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{5x^2+6}-\sqrt{5x^2-6})$.



```
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit(x*(sqrt(5*x**2+6)-sqrt(5*x**2-6)),x,-oo)
```

$$-\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Ответ: $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

Пример 35. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+2x-3}-\sqrt{2x^2-5x-5}}\right)$.

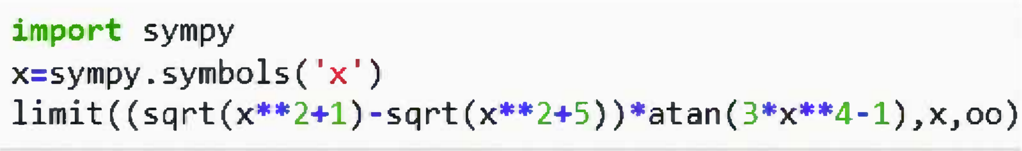
```
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit(1/(sqrt(2*x**2+2*x-3)-sqrt(2*x**2-5*x-5)),x,-oo)
```

$$-\frac{2\sqrt{2}}{7}$$

Ответ: $\frac{-2\sqrt{2}}{7}$.

Пример 36. Вычислите предел

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+5})\operatorname{arctg}(3x^4-1).$$



```
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit((sqrt(x**2+1)-sqrt(x**2+5))*atan(3*x**4-1),x,oo)
```

$$0$$

Ответ: 0.

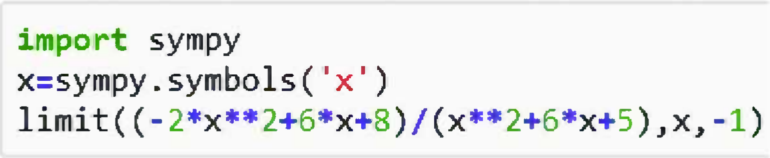
Пример 37. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+4x+3}{x^2+8x+15}$.

```
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit((x**2+4*x+3)/(x**2+8*x+15),x,-3)
```

$$-1$$

Ответ: –1.

Пример 38. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to-1}\frac{-2x^2+6x+8}{X^2+6x+5}$.

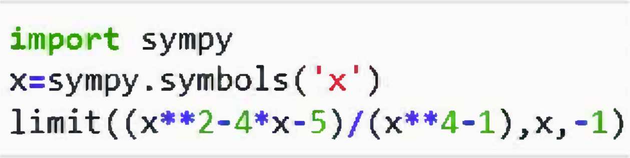


```
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit((-2*x**2+6*x+8)/(x**2+6*x+5),x,-1)
```

$$\frac{5}{2}$$

Ответ: $\frac{5}{2}$.

Пример 39. Вычислите иредел $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-4x-5}{x^4-1}$.

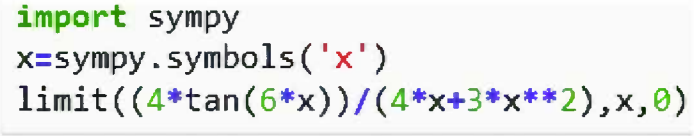


```
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit((x**2-4*x-5)/(x**4-1),x,-1)
```

$$\frac{3}{2}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Пример 40. Вычислите иредел $\lim\limits_{x\to0}\frac{4\operatorname{tg}6x}{4x+3x^2}$.



```python
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit((4*tan(6*x))/(4*x+3*x**2),x,0)
```

$$6$$

Ответ: 6.

Пример 41. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x+\sin 2x}{\sin 4x+\arcsin 7x}$.

```python
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit((7*x+sin(2*x))/(sin(4*x)+asin(7*x)),x,0)
```

$$\frac{9}{11}$$

Ответ: $\frac{9}{11}$.

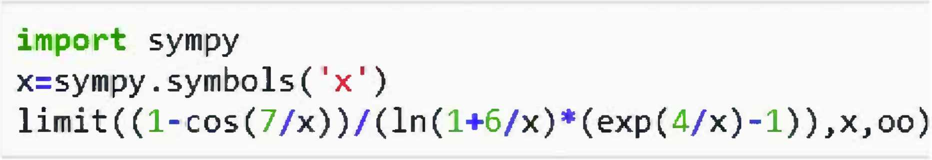
Пример 42. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6\sin^2 9x}{\cos 4x-1}$.

```python
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit(6*sin(9*x)**2/(cos(4*x)-1),x,0)
```

$$-\frac{243}{4}$$

Ответ: $-\frac{243}{4}$.

Пример 43. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos\frac{7}{x}}{\ln\left(1+\frac{6}{x}\right)*(e^{\frac{4}{x}}-1)}$.

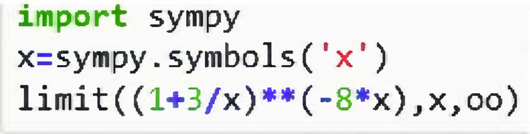


```python
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit((1-cos(7/x))/(ln(1+6/x)*(exp(4/x)-1)),x,oo)
```

$$\frac{49}{48}$$

Ответ: $\frac{49}{48}$.

Пример 44. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-8x}$.



```
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit((1+3/x)**(-8*x),x,oo)
```

$$e^{-24}$$

Ответ: e^{-24}.

Пример 45. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5+3x}{5-3x}\right)^{\frac{-2+x}{9x}}$.

Ответ: $e^{-\frac{4}{15}}$.

Пример 46. Вычислпте предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x^4+3}{7x^4-3}\right)^{3x^4-6}$.

```
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit(((7*x**4+3)/(7*x**4-3))**(3*x**4-6),x,oo)
```

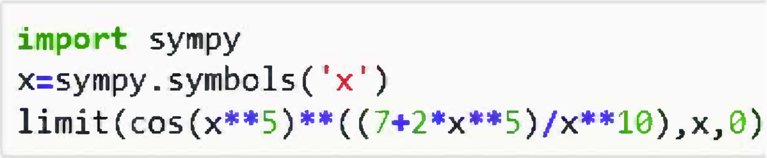
$$e^{\frac{9}{7}}$$

Ответ: $e^{\frac{9}{7}}$.

Пример 47. Вычислпте предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}3x)^{\frac{-6-3x^8}{\mathrm{tg}5x}}$.

Ответ: $e^{-\frac{18}{5}}$.

Пример 48. Вычислпте предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x^5))^{\frac{7+2x^5}{x^{10}}}$.

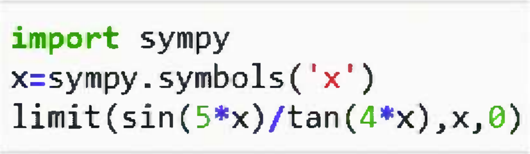


```
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit(cos(x**5)**((7+2*x**5)/x**10),x,0)
```

$$1$$

Ответ: $e^{-\frac{7}{2}}$.

Пример 49. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{\mathrm{tg}4x}\right)$.

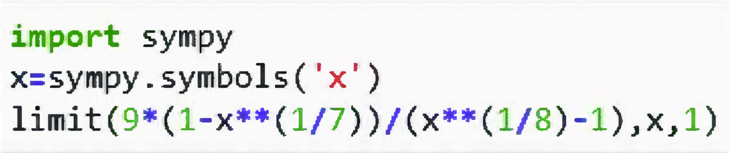


```
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit(sin(5*x)/tan(4*x),x,0)
```

$$\frac{5}{4}$$

Ответ: $\frac{5}{4}$.

Пример 50. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{9\left(1-x^{\frac{1}{7}}\right)}{x^{\frac{1}{8}}-1}\right)$.



```
import sympy
x=sympy.symbols('x')
limit(9*(1-x**(1/7))/(x**(1/8)-1),x,1)
```

```
−10.2857142857143
```

Ответ: –10,2857142857143.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить иредел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^6+8n^5-6n^3+5n-1}{-8n^6+6n^5-5n^2+n}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

2. Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+9}}{-2n+7}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

3. Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-5n^5+8n^3-6}{\sqrt{3n^{16}+n^7+7}}$$

Ответ: 0 .

4. Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9n+4\sin^3 4n+8}{8n+6\cos^6 4n-4}.$$

Ответ: $-\frac{9}{8}$.

5. Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+3n+1}-n\right).$$

Ответ: -3.

6. Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-3n}{\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{25n^2+2n+1}}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

7. Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 6^{n}+4\cdot 5^{n}+7}{6^{n}-3\cdot 5^{n}+2}.$$

Ответ: 2.

8. Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 7^{-n}-3\cdot 5^{-n}-2}{5\cdot 7^{-n}+2\cdot 5^{-n}+3}.$$

Ответ: $-\frac{2}{3}$.

9. Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-7n+9}{-7n+7}\right)^{3n-1}.$$

Ответ: $e^{-6/7}$.

10. Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{3}-9n-2}{n^{3}+3n+9}\right)^{9n^{2}+6}.$$

Ответ: e^{-108}.

11. Вычислить иредел:

$$\lim_{n\to\infty}\left((8n+3)\cdot\left(\ln(9n+2)-\ln(9n-7)\right)\right).$$

Ответ: 8.

12. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7\cdot 6^{x+4}+9}{5-7\cdot 6^{x+7}}.$$

Ответ: $\frac{9}{5}$.

13. Вычислить иредел:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x}+3}{2^{x}-1}.$$

Ответ: 1.

14. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-5x^{2}-4x-1}{e^{-2x}}\right)$.

Ответ: 0.

15. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-4x}}{-x^{2}-2x+5}\right)$.

Ответ: $-\infty$.

16. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+4}{5-2\ln 2x}\right)$.

Ответ: $-\infty$.

17. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}(3x\cdot\ln(9x))$.

Ответ: 0.

18. Вычислите иредел $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\sin(8\pi*x^4)}{\sin(7\pi*x^{\frac{1}{2}})}\right)$.

Ответ: –13,714.

19. Вычислить иредел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8\cdot4^{x+3}-1}{6+3\cdot4^{x+5}}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

20. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-5x+1}{-4x^2+8x+1}$.

Ответ: $-\frac{9}{4}$.

21. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{2x^2-3x-9}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

22. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{2x}$.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

23. Вычислить иредел: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sin4x}$.

Ответ: $\frac{5}{7}$.

24. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-5x^3}{x+6}\cdot\sin^2\left(\dfrac{5}{7+4x}\right)\right)$.

Ответ: $-\frac{125}{16}$.

25. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos3x-\cos x}{x^2}$

Ответ: –4.

26. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sinx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}}$

Ответ: –2

27. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^6-7}{x^6+2}\right)^{x^6+5}$.

Ответ: e^{-9}.

28. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}(1+arctg5x)^{\frac{3-x}{\sin 6x}}$.

Ответ: $e^{2,5}$.

29. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\sqrt{x}}{\sin 2x}$.

Ответ: $+\infty$.

30. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{4x}-1}{1-e^{5x}}$.

Ответ: $-\frac{4}{5}$.

31. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^2-3x-7)\cdot e^{2x}$.

Ответ: 0.

32. Вычислить иредел: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\left(2\pi\cdot x^{\frac{1}{5}}\right)}{\sin(5\pi\cdot x^2)}$.

Ответ: $-\frac{1}{25}$.

33. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{5-\log_2 6x}{-3x+7-2e^{4x}}$.

Ответ: 0.

34. Найдите точки разрыва фуикции

$$f(x)=\frac{x^2+12x+27}{|x+9|(x^2-6x-27)}$$

и определите их типы.

Ответ: $x=-9$ ÷ точка разрыва иервого рода (иеустранимый разрыв), $x=-3$ ÷ точка устранимого разрыва, $x=9$ ÷ точка разрыва второго рода (бесконечный скачок).

35. Найдите точки разрыва функции и определите их типы.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{-4}{x-2}, x\epsilon(-\infty;3),\\ -x^2+3x-4, x\epsilon(3;4],\\ -\frac{8}{x-3}, x\epsilon(4;\infty).\end{cases}$$

Ответ: $x=3$ ÷ точка разрыва 1–го рода (неустранимый разрыв), $x=2$ ÷ точка разрыва 2–го рода.

36. Найдите точки разрыва функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-4}{x+2}, x\epsilon(-\infty;-3],\\ -x^2-6x+4, x\epsilon(-3;-2],\\ \dfrac{8}{x+3}, x\epsilon(-2;\infty).\end{cases}$$

Ответ: Разрывов нет.

37. Найдите точки разрыва функции и определите их типы

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-4}{x-2}, x\epsilon(-\infty;3),\\ -x^2+3x-4, x\epsilon(3;4],\\ -\dfrac{8}{x-3}, x\epsilon(4;+\infty).\end{cases}$$

Ответ: $x=3\div$ точка разрыва 1–го рода (неустранимый разрыв), $x=2\div$ точка разрыва 2–го рода.

38. Найдите точки разрыва функции и определите их тнпы.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-4}{x+2}, x\epsilon(-\infty;-3],\\ -x^2-6x+4, x\epsilon(-3;-2],\\ \dfrac{8}{x+3}, x\epsilon(-2;\infty).\end{cases}$$

Ответ: Разрывов нет.

39. Найдите точки разрыва функции и определите их типы.

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{6}{x-8}, x\epsilon(-\infty;-4),\\ -3x^2+9x-3, x\epsilon\ (-4;2),\\ \dfrac{9}{x+1}, x\epsilon(2;+\infty).\end{cases}$$

Ответ: $x=-4\div$ точка разрыва 1–го рода (неустранимый разрыв), $x=2\div$ устраиимый разрыв.

40. Найдите точки разрыва функции и оиределите их тины.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x-3}, x\epsilon(-\infty;2),\\ -3x^2+9x-3, x\epsilon\ [2;5],\\ -\dfrac{4}{x-4}, x\epsilon(5;+\infty).\end{cases}$$

Ответ: $x=2{,}5\div$ иеустраиимые разрывы 1 рода.

41. Найдите точки разрыва функции и определите их типы.

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{7}{x+9}, x\epsilon(-\infty;-9),\\ -3x^2+9x-3, x\epsilon\ [-9;-2),\\ -\dfrac{6}{x+3}, x\epsilon(-2;+\infty).\end{cases}$$

Ответ: $x=-9\div$ точка разрыва 2–го рода (неустранимый разрыв), $x=-2\div$ устранимый разрыв.

42. Найдите точки разрыва функции и определите их типы.

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{x+3}, x\epsilon(-\infty;-3),\\ -3x^2+9x-3, x\epsilon\ (-3;4],\\ \dfrac{5}{x+5}, x\epsilon(4;+\infty).\end{cases}$$

Ответ: $x=-3\div$ точка разрыва 2–го рода (неустранимый разрыв), $x=4\div$ неустранимый разрыв 1–го рода.

43. Найдите точки разрыва функции и определите их типы.

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{6}{x-8}, x\epsilon(-\infty;3],\\ -3x^2+9x-3, x\epsilon\ (3;4),\\ \dfrac{9}{x+1}, x\epsilon[4;+\infty).\end{cases}$$

Ответ: Разрывов нет.

44. Найдите точки разрыва функции и определите их типы.

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{x+3}, x\epsilon(-\infty;-3),\\ -2x^2-7x+4, x\epsilon\ (-3;4],\\ \dfrac{5}{x+5}, x\epsilon(4;+\infty).\end{cases}$$

Ответ: $x=-3\div$ точка разрыва 2–го рода (неустранимый разрыв), $x=4\div$ неустранимый разрыв 1–го рода.

45. Найдите точки разрыва функции и определите их типы.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{x-4}, x\epsilon(-\infty;3],\\ -x^2+3x-5, x\epsilon\ (3;4),\\ -\dfrac{9}{x-3}, x\epsilon[4;+\infty).\end{cases}$$

Ответ: разрывов нет.

46. Найдите точки разрыва функции и определите их типы.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{x-7},x\epsilon(-\infty;2],\\ -3x^2+9x-7,x\epsilon\ (2;9),\\ \dfrac{8}{x+6},x\epsilon[9;+\infty).\end{cases}$$

Ответ: $x=9$ – неустраннмый разрыв 1 рода.

47. Найдите точки разрыва функцни и определите их тнпы.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{9}{x+1},x\epsilon(-\infty;-2],\\ -x^2+5x+5,x\epsilon\ (-2;5],\\ \dfrac{5}{x-4},x\epsilon(5;+\infty).\end{cases}$$

Ответ: разрывов нет.

48. Найдите точки разрыва функции и определите их тнпы.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+3},x\epsilon(-\infty;-2),\\ -x^2-x+4,x\epsilon\ [-2;-1),\\ \dfrac{4}{x+2},x\epsilon(-1;+\infty).\end{cases}$$

Ответ: $x=-3$ ÷ точка разрыва 2–го рода (неустранимый разрыв), $x=-1$ ÷ устранимый разрыв 1–го рода.

49. Найдите точки разрыва функции и оиределите их тины.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{x-1},x\epsilon(-\infty;2),\\ -x^2+6x-3,x\epsilon\ [2;5),\\ -\dfrac{6}{x-3},x\epsilon(5;+\infty).\end{cases}$$

Ответ: $x=1$ ÷ точка разрыва 2–го рода (неустранимый разрыв), $x=5$ ÷ неустранимый разрыв 1–го рода.

50. Найдите точки разрыва фуикции н определите их тнпы.

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{x+5},x\epsilon(-\infty;-6],\\ -4x^2+2x-1,x\epsilon\ (-6;4],\\ \dfrac{6}{x-3},x\epsilon(4;+\infty).\end{cases}$$

Ответ: $x=-6;4$ ÷ неустранимые разрывы 1–го рода.

51. Найдите точки разрыва функции и определите их типы.

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{8}{x+2}, x\epsilon(-\infty;-3),\\ 2x^2+4x+2, x\epsilon\ [-3;-2],\\ -\dfrac{2}{x+3}, x\epsilon(-2;+\infty).\end{cases}$$

Ответ: разрывов нет.

52. Найдите точки разрыва функции и определите их типы.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x-9}, x\epsilon(-\infty;-9],\\ 6x^2+5x+4, x\epsilon\ (-9;-1),\\ -\dfrac{6}{x+3}, x\epsilon[-1;+\infty).\end{cases}$$

Ответ: $x=-9\div$ неустранимый разрыв 1–го рода.

53. Найдите асимптоты графика функции

$$f(x)=-\frac{2x-3}{4+x}.$$

Ответ: вертикальная асимптота: $x=-4$; горизонтальная асимптота: $y=-2$ при $x\to\pm\infty$.

54. Найдите асимптоты графика функции

$$f(x)=\frac{3x^3}{x^2-1}.$$

Ответ: вертикальные асимптоты: $x=\pm1$; наклонная асимптота: $y=3x$ при $x\to\pm\infty$.

55. Найдите асимптоты графика функции

$$f(x)=\frac{5x-3}{4+x}.$$

Ответ: вертикальная асимптота: $x=-4$; горизонтальная асимптота: $y=5$ при $x\to\pm\infty$.

56. Найдите асимптоты графика функции

$$f(x)=-\frac{2x^2-5x-4}{x-1}.$$

Ответ: вертикальная асимптота: $x=1$; наклонная асимптота: $y=-2x+3$ при $x\to\pm\infty$.

57. Найдите асимптоты графика функции

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{1+x}.$$

Ответ: $y = x + 1$ ÷ наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

58. Найдите асимптоты графика функции

$$f(x)=\frac{x^3+5x^2-7}{x^2+x-2}.$$

Ответ: $x = -2$, $x = 1$ ÷ вертикальные асимптоты,
$y = x + 4$ ÷ наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

59. Найдите асимптоты графика функции

$$f(x)=\frac{x^2-1}{2+x}.$$

Ответ: вертикальная асимптота: $x = -2$; $y = -x + 2$ ÷ наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

60. Найдите асимптоты графика функции

$$f(x)=\frac{4x^3+5x^2-1}{x^2-9}.$$

Ответ: $x = \pm 3$ ÷ вертикальные асимптоты,
$y = 4x + 5$ ÷ наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

61. Найдите асимптоты графика функции

$$f(x)=\frac{3x^3-2x^2-7x-3}{x^2-1}.$$

Ответ: $x = \pm 1$ ÷ вертикальные асимптоты,
$y = 3x - 2$ ÷ наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

62. Найдите асимптоты графика функции

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-4}.$$

Ответ: $x = 4$ ÷ вертикальная асимптота,
$y = x + 6$ ÷ наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

63. Найдите асимптоты графика функции

$$f(x)=\frac{3x^2+x-1}{1+x}.$$

Ответ: $x = -1$ ÷ вертикальная асимптота,
$y = 3x + 2$ ÷ наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

64. Найдите асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{+5x^2-3x+4}{x+2}.$$

Ответ: $x = 2$ ÷ вертикальная асимптота,
$y = -5x + 13$ ÷ наклониая асимптота нри $x \to \pm\infty$.

65. Найдите асимитоты графика функции

$$f(x) = \frac{2+3x}{x+1}.$$

Ответ: $x = -1$ ÷ вертикальная асимптота,
$y = -3$ ÷ горизонтальная асимптота при $x \to \pm\infty$.

66. Найдите асимптоты графпка функции

$$f(x) = -\frac{3x^3+4x^2+2}{x^2-2x-3}.$$

Ответ: $x = -1, x = 3$ ÷ вертикальиые асимптоты,
$y = -3x + 10$ ÷ наклоиная асимптота при $x \to \pm\infty$.

67. Исследуйте ряд на сходнмость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+12}{8^n}$.

Ответ: сходится.

68. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7n+7}.$$

Ответ: сходится условно.

69. Найдите раднус и интервал сходимости ряда: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n nx^n}{5n+3}$.

Ответ: радиус $R = 1$; ннтервал $(-1;1)$.

70. Исследуйте ряд на сходимость: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6n+2}{3n^3 - 3n^2 - 2}$.

Ответ: сходится.

71. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (7n^4 + 3n)}{3n^4 + 5}.$$

Ответ: расходится.

72. Найдите радиус и пнтервал сходпмости ряда: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{3n-4}}$.

Ответ: радиус $R = 1$; интервал $(3;5)$.

73. Исследуйте ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+12}{n^2-n+23}$.

Ответ: расходится.

74. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(7n+3)}{3n^7+5n}.$$

Ответ: сходится абсолютно.

75. Найдите радиус и интервал сходимости ряда:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n-4}}.$$

Ответ: радиус $R=1$; интервал $(-1;1)$.

76. Определите, сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{2n}{n-3}.$$

Ответ: расходится.

77. Определите, сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+11}.$$

Ответ: расходится.

78. Определите, сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+7}{3^n}$$

Ответ: сходится.

79. Определите сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{4^n}.$$

Ответ: сходится.

80. Определите сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}.$$

Ответ: сходится.

81. Определите сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)\cdot 5^{n+1}}{6^n}.$$

Ответ: сходится.

82. Определите сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{9^n}.$$

Ответ: расходится.

83. Определите сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-\sin n}{n^2+1}.$$

Ответ: сходится.

84. Оиределите сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(7n-3)^2}.$$

Ответ: сходится.

85. Определите сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+13}.$$

Ответ: расходится.

86. Оиределите сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n(n+4)}.$$

Ответ: сходится.

87. Оиределите сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{\sqrt{n+15}}.$$

Ответ: расходится.

88. Оиределите сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n\ln n}$$

Ответ: расходится.

89. Оиределите сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{7}{n\ln^3 n}$$

Ответ: сходится.

90. Определите сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{6n+4}.$$

Ответ: расходится.

91. Определпте сходпмость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}.$$

Ответ: сходится абсолютно.

92. Определите сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n^2+5}.$$

Ответ: сходится условно.

93. Определите сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+6)^4}.$$

Ответ: сходится абсолютно.

94. Определите сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^4}{10^n}$$

Ответ: сходится абсолютно.

95. Оиределпте сходпмость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+3}.$$

Ответ: сходится условно.

96. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{n\cdot 6^n}.$$

Ответ: $R=6$, $(-14;-2)$иптервал сходпмости.

97. Найдите радиус и интервал сходнмостн стененного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(x-5)^n}{n+4}.$$

Ответ: $R=\frac{1}{3}$, $\left(\frac{-14}{16};\frac{16}{3}\right)$питервал сходимости.

98. Найдите радиус и интервал сходимостн степенного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^n}{n^2+9}.$$

Ответ: $R=1$, $(-4;-2)$интервал сходнмостп.

99. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-4)^n}{\sqrt{n+13}}.$$

Ответ: $R=1$, $(3;5)$ интервал сходимости.

100. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{2n}{n-3}.$$

Ответ: расходится.

101. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+11}.$$

Ответ: расходится.

102. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+7}{3^n}.$$

Ответ: сходится.

103. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{4^n}.$$

Ответ: сходится.

104. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}.$$

Ответ: сходится.

105. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)\cdot 5^{n+1}}{6^n}.$$

Ответ: сходится.

106. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{9^n}.$$

Ответ: расходится.

107. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-\sin n}{n^2+1}.$$

Ответ: сходится.

108. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n-3)^2}.$$

Ответ: сходнтся.

109. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+13}.$$

Ответ: расходится.

110. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n(n+4)}.$$

Ответ: сходится.

111. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{\sqrt{n+15}}.$$

Ответ: расходится.

112. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n \ln n}.$$

Ответ: расходится.

113. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7}{n \ln^3 n}$$

Ответ: сходится.

114. Выясните, сходится ли абсолютно, условио или расходится ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{6n+4}.$$

Ответ: расходнтся.

115. Выясиите, сходится ли абсолютно, условио или расходится ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n}.$$

Ответ: сходится абсолютно.

116. Выясните, сходится ли абсолютно, условно или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n^2+5}.$$

Ответ: сходится условно.

117. Выясните, сходнтся ли абсолютно, условно или расходится ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+6)^4}.$$

Ответ: сходится абсолютно.

118. Выясните, сходится ли абсолютно, условно нлн расходится ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^4}{10^n}.$$

Ответ: сходится абсолютно.

119. Выясните, сходится лн абсолютно, условно илн расходится ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+3}.$$

Ответ: сходится условно.

120. Найднте радиус н интервал сходнмости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{n\cdot 6^n}.$$

Ответ: $R=6$, $(-14;-2)$ интервал сходнмости.

121. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(x-5)^n}{n+4}.$$

Ответ: $R=\frac{1}{3}$, $\left(\frac{14}{16};\frac{16}{3}\right)$ интервал сходимости.

122. Найднте радиус н интервал сходнмости степенного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^n}{n^2+9}.$$

Ответ: $R=1$, $(-4;-2)$ интервал сходимости.

123. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-4)^n}{\sqrt{n+13}}.$$

Ответ: $R=1$, $(3;5)$ ннтервал сходнмости.

3. Производная

Вычисление производных

Для вычисления производных используется библиотека sympy.

Импорт модуля:

```
from sympy import *
```

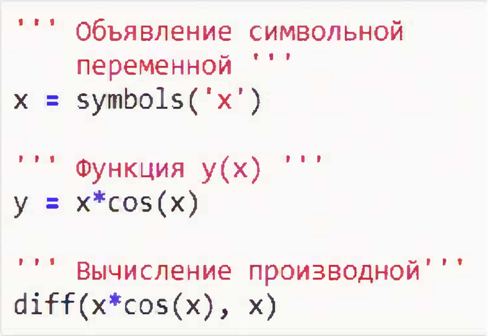
Вычисление производной – функция diff (f,x,k).

Вычисляет производную k–го порядка функции $y = f(x)$ по переменной x.

Параметры: f – функция; x – переменная, по которой берется производная, k – необязательный параметр, порядок производной.

Пример 1. Производная функции $y = x\cos x$:

$$y' = (x\cos x)' = \cos x - x\sin x.$$

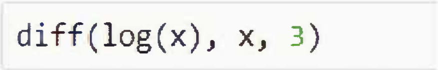


```
''' Объявление символьной
    переменной '''
x = symbols('x')

''' Функция y(x) '''
y = x*cos(x)

''' Вычисление производной'''
diff(x*cos(x), x)
```

$$-x\sin(x) + \cos(x)$$

Пример 2. Производная 3–го порядка функции $y = \ln x$.

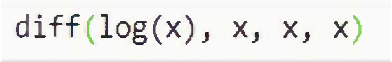
$$(\ln x)^{(3)} = \frac{2}{x^3}.$$



```
diff(log(x), x, 3)
```

$$\frac{2}{x^3}$$

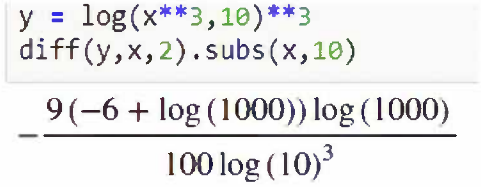
Или так:



```
diff(log(x), x, x, x)
```

$$\frac{2}{x^3}$$

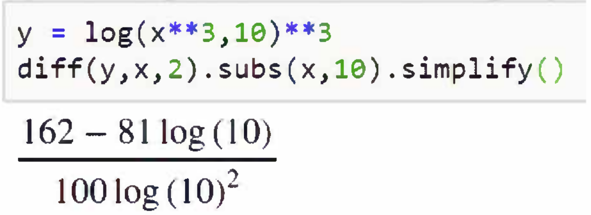
Пример 3. Найти значение $y''(10)$ для функции $y = \lg^3(x^3)$.



```
y = log(x**3,10)**3
diff(y,x,2).subs(x,10)
```

$$-\frac{9(-6+\log(1000))\log(1000)}{100\log(10)^3}$$

В некоторых случаях более простое выражение для ответа можно получить, применяя метод simplify ().



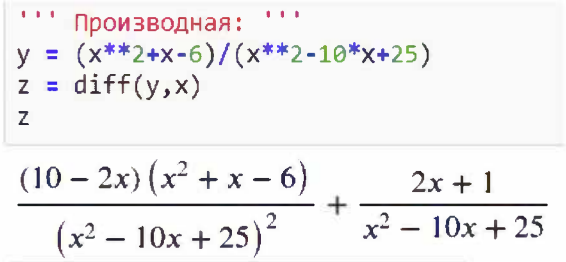
```
y = log(x**3,10)**3
diff(y,x,2).subs(x,10).simplify()
```

$$\frac{162-81\log(10)}{100\log(10)^2}$$

Замечание. В Python наименование log означает натуральный логарифм (логарифм по основанию e).

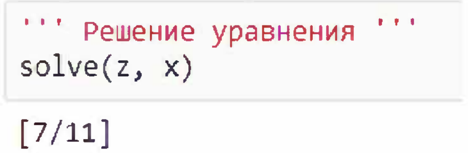
Ответ: $\frac{162-81\cdot ln10}{100\cdot\ln^2 10}$.

Пример 4. Решить уравнение $y' = 0$, где $y(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-10x+25}$.



```
''' Производная: '''
y = (x**2+x-6)/(x**2-10*x+25)
z = diff(y,x)
z
```

$$\frac{(10-2x)\left(x^2+x-6\right)}{\left(x^2-10x+25\right)^2}+\frac{2x+1}{x^2-10x+25}$$



```
''' Решение уравнения '''
solve(z, x)
```

```
[7/11]
```

Ответ: $\frac{7}{11}$.

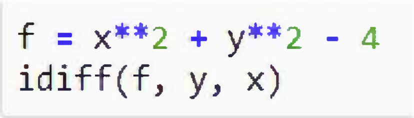
Производная неявной функции – функция idiff (eq, y, x, n=1).

Вычисляет производную n–го порядка переменной y по переменной x в предположении, что эти переменные связаны уравнением вида: eq = 0.

Параметры: eq – уравнение, связывающее зависимую и независимую переменную, приведенное к виду с нулевой правой частью; y – зависимая переменная, функция, от которой требуется найти производную; x – независимая переменная, по которой берется производная; n – порядок производной (по умолчанию 1).

Пример 5. Найти первую производную $\frac{dy}{dx}$ и вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной неявно в виде уравнения: $x^2+y^2=4$.

Решение. Имеем: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 4$; $\quad y' = \frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$.



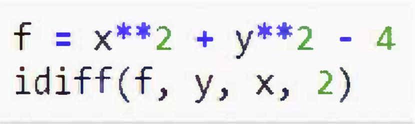
```
f = x**2 + y**2 - 4
idiff(f, y, x)
```

$$-\frac{x}{y}$$

Вторая производная.

$$x^2 + y^2 = 4; \quad F(x,y) = x^2 + y^2 - 4; \quad y' = \frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

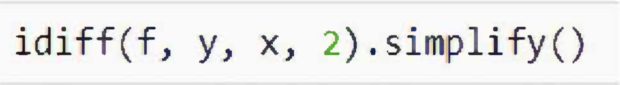
$$y'' = -\frac{F''_{xx}+2F''_{xy}y'+F''_{yy}(y')^2}{F'_y} = -\frac{2+0+2\left(-\frac{x}{y}\right)^2}{2y} = -\frac{x^2+y^2}{y^3}.$$



```
f = x**2 + y**2 - 4
idiff(f, y, x, 2)
```

$$\frac{-\frac{x^2}{y} - y}{y^2}$$

Ответ можно попытаться упростить. Для этого нужно использовать метод .simplify ().



```
idiff(f, y, x, 2).simplify()
```

$$-\frac{x^2 + y^2}{y^3}$$

Производная функции, заданной в параметрической форме

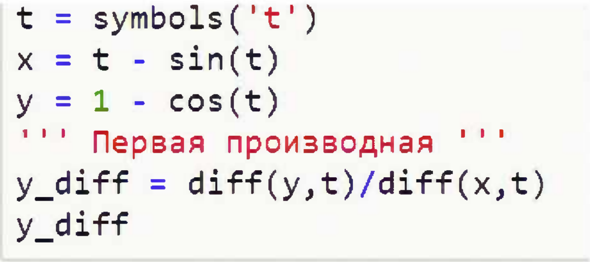
Вычисляется с использованием функции diff ().

Пример 6. Найти y'_x и y''_{xx} для функции, заданной в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

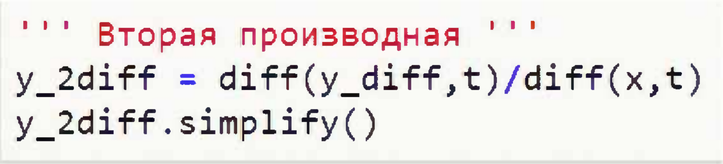
Для решения используем формулы, выражающие производную функции по переменной *x* через обычные производные по переменной *t*:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1-\cos t}; \quad y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = -\frac{1}{1-\cos t}.$$



```
t = symbols('t')
x = t - sin(t)
y = 1 - cos(t)
''' Первая производная '''
y_diff = diff(y,t)/diff(x,t)
y_diff
```

$$\frac{\sin(t)}{1-\cos(t)}$$



```
''' Вторая производная '''
y_2diff = diff(y_diff,t)/diff(x,t)
y_2diff.simplify()
```

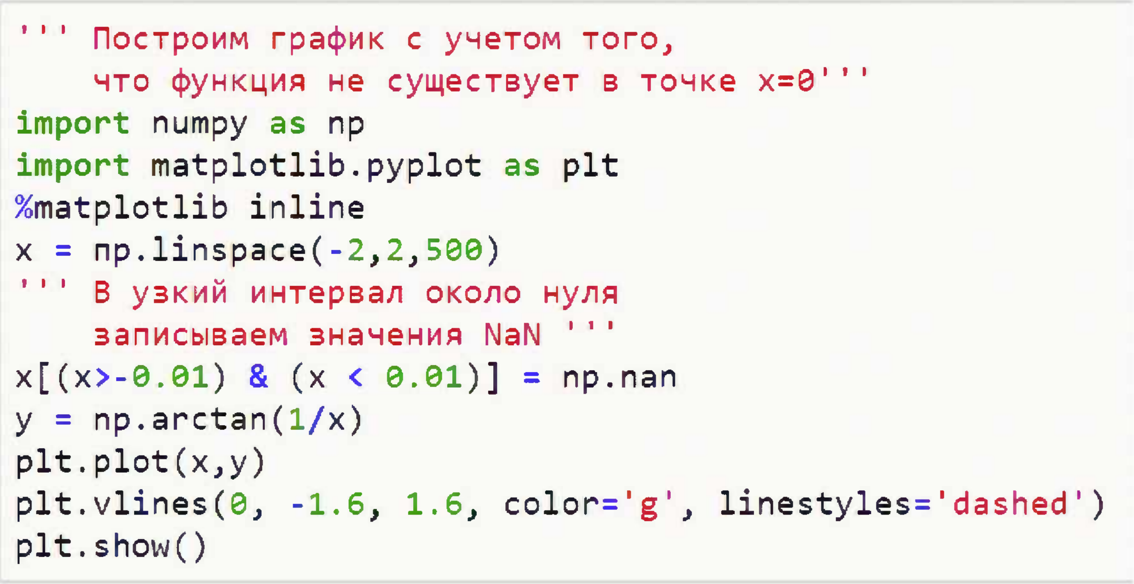
$$-\frac{1}{(\cos(t)-1)^2}$$

Односторонняя производная

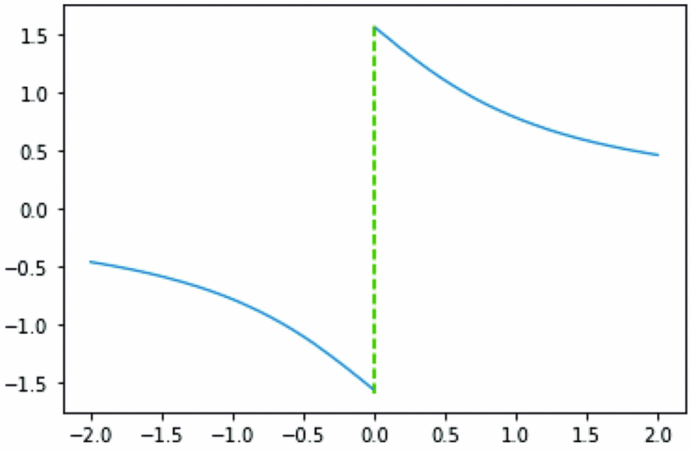
Пример 7. Найти левую и правую производные функции $f(x)$ в точке ее разрыва, если

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ -\frac{\pi}{2}, & x=0.\end{cases}$$

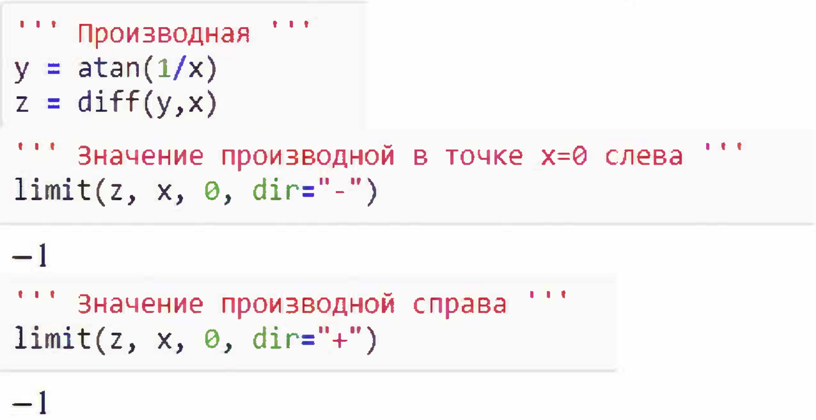
Решение. Точкой разрыва является значение $x = 0$. График функции:



```
''' Построим график с учетом того,
    что функция не существует в точке x=0'''
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
x = np.linspace(-2,2,500)
''' В узкий интервал около нуля
    записываем значения NaN '''
x[(x>-0.01) & (x < 0.01)] = np.nan
y = np.arctan(1/x)
plt.plot(x,y)
plt.vlines(0, -1.6, 1.6, color='g', linestyles='dashed')
plt.show()
```



Найдем выражение для производной, а затем для полученного выражения вычислим пределы слева и справа при $x \to 0$.



```
''' Производная '''
y = atan(1/x)
z = diff(y,x)
```

```
''' Значение производной в точке x=0 слева '''
limit(z, x, 0, dir="-")
```

```
−1
```

```
''' Значение производной справа '''
limit(z, x, 0, dir="+")
```

```
−1
```

Применение производной при исследовании функции

Уравнение касательной

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

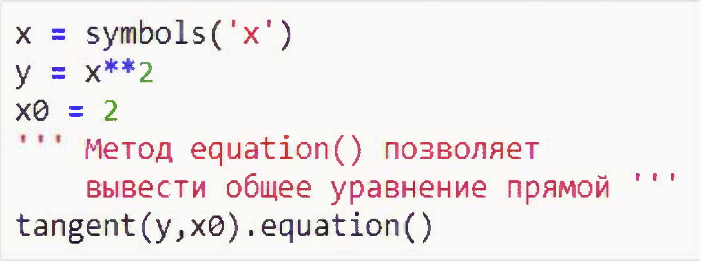
Угловой коэффициент наклона касательной: $k = f'(x_0) = tg \propto$, где $\propto$ – угол, образованный касательной с положительным направлением оси абсцисс *Ox*, $\propto = \mathrm{arctg} f'(x_0)$.

Нормалью к кривой называется прямая, перпендикулярная касательной, проведенная в точке касания.

В разделе «Функции в Python», с. 20 приведен текст функции tangent(), которая находит уравнение касательной для данной функции $f(x)$ и абсциссы точки касания x_0.

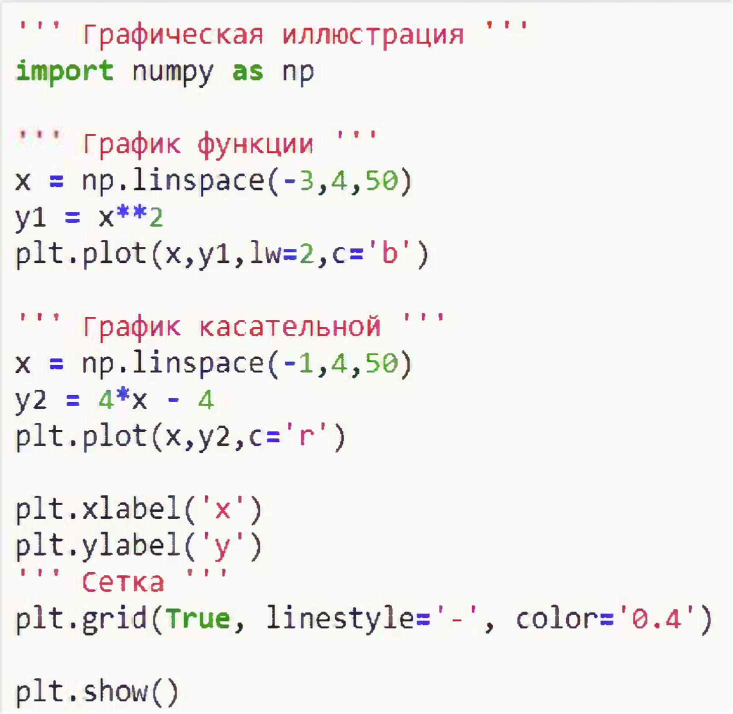
При использовании функции tangent() предполагается, что предварительно была загружена библиотека sympy (в виде: from sympy import *).

Пример 8. Провести касательиую к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

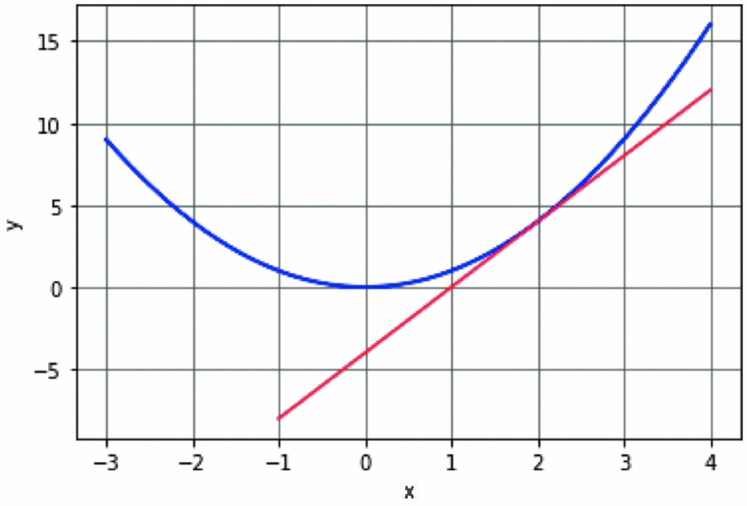


```
x = symbols('x')
y = x**2
x0 = 2
''' Метод equation() позволяет
    вывести общее уравнение прямой '''
tangent(y,x0).equation()
```

$-4x + y + 4$

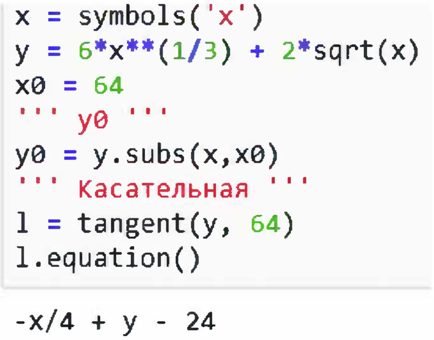


```
''' Графическая иллюстрация '''
import numpy as np

''' График функции '''
x = np.linspace(-3,4,50)
y1 = x**2
plt.plot(x,y1,lw=2,c='b')

''' График касательной '''
x = np.linspace(-1,4,50)
y2 = 4*x - 4
plt.plot(x,y2,c='r')

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
''' Сетка '''
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')

plt.show()
```



Ответ: $y = 4x - 4$.

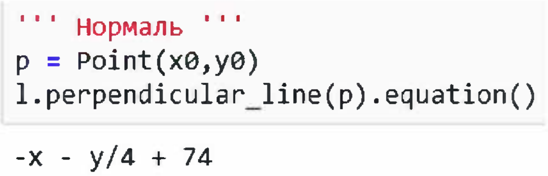
Пример 9. Найти уравненне касательной и нормали к графику функции $y = 6\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 64$.



```
x = symbols('x')
y = 6*x**(1/3) + 2*sqrt(x)
x0 = 64
''' y0 '''
y0 = y.subs(x,x0)
''' Касательная '''
l = tangent(y, 64)
l.equation()
```

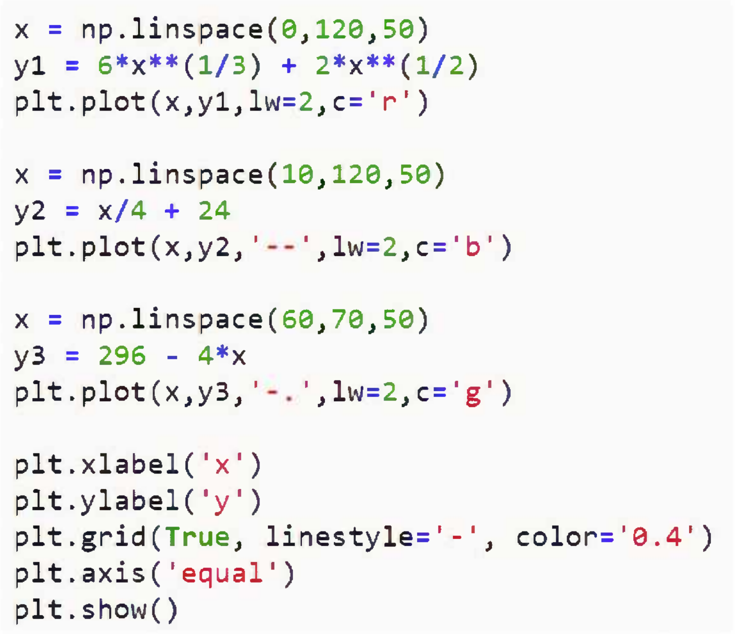
```
-x/4 + y - 24
```

Нормаль – прямая, проходящая через точку касания перпеидикулярно касательной.

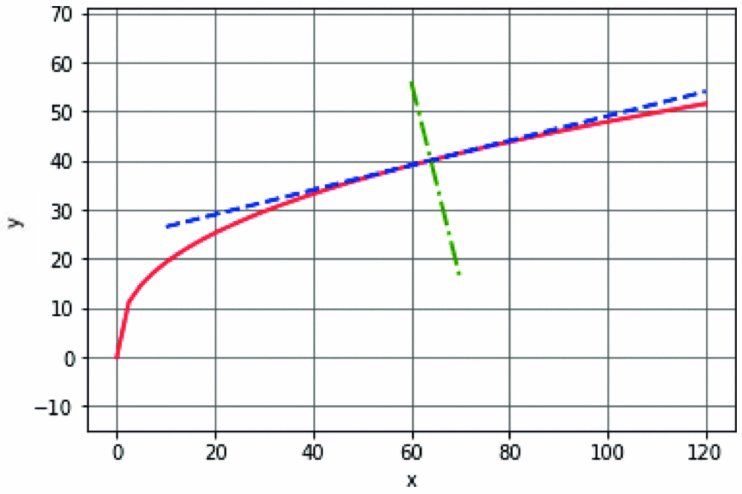


```
''' Нормаль '''
p = Point(x0,y0)
l.perpendicular_line(p).equation()
```

```
-x - y/4 + 74
```



```
x = np.linspace(0,120,50)
y1 = 6*x**(1/3) + 2*x**(1/2)
plt.plot(x,y1,lw=2,c='r')

x = np.linspace(10,120,50)
y2 = x/4 + 24
plt.plot(x,y2,'--',lw=2,c='b')

x = np.linspace(60,70,50)
y3 = 296 - 4*x
plt.plot(x,y3,'-.',lw=2,c='g')

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.axis('equal')
plt.show()
```



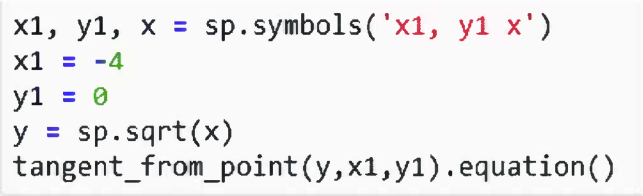
Ответ: $y = \frac{x}{4} + 24$; $y = -4x + 296$.

Рассмотрим теперь задачу проведения касательной, выходящей из заданной точки $(x_1;y_1)$ и касающейся кривой в некоторой неизвестной точке касания $(x_0;y_0)$.

В разделе «Функции в Python», с. 20 приведен текст функции tangent_from_point(), которая находит уравнение касательной, выходящей из точки $(x_1;y_1)$ и касающейся кривой $y = f(x)$.

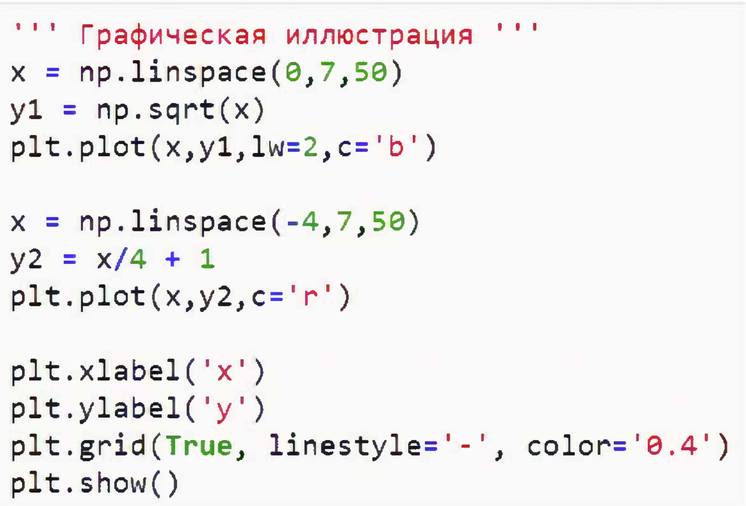
Предполагается без дополнительной проверки, что к кривой $y = f(x)$ можно провести не более двух касательных.

Пример 10. Из точки $A(-4;0)$ провести касательную к кривой $y = \sqrt{x}$.



```
x1, y1, x = sp.symbols('x1, y1 x')
x1 = -4
y1 = 0
y = sp.sqrt(x)
tangent_from_point(y,x1,y1).equation()
```

$$2x - 8y + 8$$



```
''' Графическая иллюстрация '''
x = np.linspace(0,7,50)
y1 = np.sqrt(x)
plt.plot(x,y1,lw=2,c='b')

x = np.linspace(-4,7,50)
y2 = x/4 + 1
plt.plot(x,y2,c='r')

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```

Ответ: $y = \frac{1}{4}x + 1$.

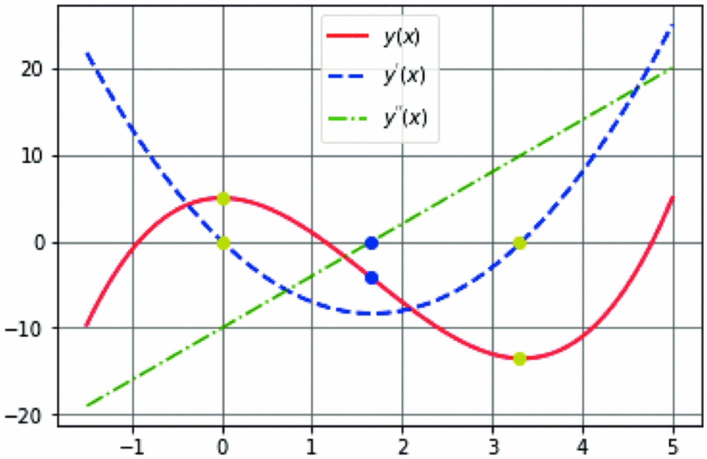
Исследование функции

Для исследования характера поведеиия функции при помощи производных используются теоремы:

1. В точке экстремума $y'(x) = 0$.
2. Функция возрастает (убывает), если $y'(x) > 0 \quad (< 0)$.
3. В точке иерегиба $y''(x) = 0$.
4. Функция выпукла впиз (вверх), если $y''(x) > 0 \quad (< 0)$.

Графическая пллюстрация прпведепиых свойств:

```
t = np.linspace(-1.5, 5, 100)
f = t**3 - 5*t**2 + 5
fd = 3*t**2 - 10*t
fdd = 6*t - 10
plt.plot(t,f,lw=2,color='red',label = "$y(x)$")
plt.plot(t,fd,'--',lw=2,color='b',label = "$y^{'}(x)$")
plt.plot(t,fdd, '-.', color='g',label = "$y^{''}(x)$")
plt.plot([0], [0], 'o', color='y')
plt.plot([0], [5], 'o', color='y')
plt.plot([3.3], [0], 'o', color='y')
plt.plot([3.3], [-13.4], 'o', color='y')
plt.plot([1.65], [0], 'o', color='b')
plt.plot([1.65], [-4], 'o', color='b')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.legend()
plt.show()
```



На графике:

При $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (3{,}3; \infty)$ функция $y(x)$ возрастает и производная $y'(x) > 0$. В интервале $(0; 3{,}3)$ функция убывает, и $y'(x) < 0$.

В иитервале $x \in (-\infty; 1{,}65)$ фуикция выпукла вверх и $y''(x) < 0$; В интервале $(1{,}65; \infty)$ функция выпукла вниз, п $y''(x) > 0$.

В интервале $x \in (-\infty; 1{,}65)$ функцня $y'(x)$ убывает, и ее производная, функция $y''(x) > 0$ отрицательна. В пнтервале $(1{,}65; \infty)$ функция $y'(x)$ возрастает, и функция $y''(x)$ положительна.

Экстремум функцнн одной неременной

Функцня minimize () модуля scipy.optimize.

Ищет минпмум функцпп одипм из итерационных методов, пачиная с заданного начального значения.

scipy.optimize.minimize (fun, x0, args=(), method=None, jac=None, hess=None)

Параметры: fun – функция (произвольиого числа переменных *k*) fun(x, *args), для которой разыскивается мипимум; x0 – масив длииы *k*, иачальиые значепия для процесса птераций; args – параметры, иеобходимые для полного задания фуикции (в виде кортежа); method – метод поиска минпмума; jac – метод для вычисления градиента, hess – метод для вычисления гессиана

Возвращает: объект res; главные атрибуты: *x* – решение в виде массива; success – флаг, указывающий па успешное завершенпе поиска; message – сообщение, содержащее причину завершения поиска.

Импорт модуля:

```
from scipy.optimize import minimize
```

Функцня solve () библнотеки sympy.

Ищет корни уравиения или системы уравиений.

Прнменение функции solve () для поиска экстремума фупкции одной переменной основано на признаках экстремума.

Необходимый признак. Для того, чтобы дпфференцпруемая фупкцпя $f(x)$ имела в точке x_0 экстремум, необходпмо, чтобы в этой точке производная функции равиялась нулю: $f'(x_0) = 0$. Точка, в которой производная обращается в нуль, называется критнческой (илн стациопарной).

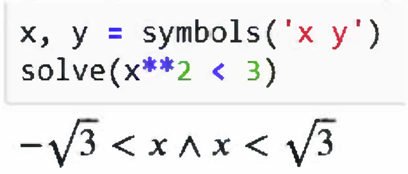
Достаточный признак. Если функция $f(x)$ дважды дифференцпруема в пекоторой точке x_0 и в этой точке $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 функция достигает экстремума, причем максимума, если $f''(x_0) < 0$, и мнинмума, если $f''(x_0) > 0$.

sympy.solve (f, symbols)

Параметры: f – выражение, для которого ищется решение; symbols (не обязательный) – объект, относптельно которого ищется решенпе.

```
from sympy import *
```

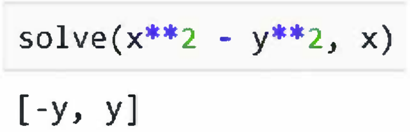
Пример 11. Решить неравенство $x^2 < 3$.



```
x, y = symbols('x y')
solve(x**2 < 3)
```

$-\sqrt{3} < x \wedge x < \sqrt{3}$

Пример 12. Решить уравнение $x^2 - y^2 = 0$ относительно переменной x.



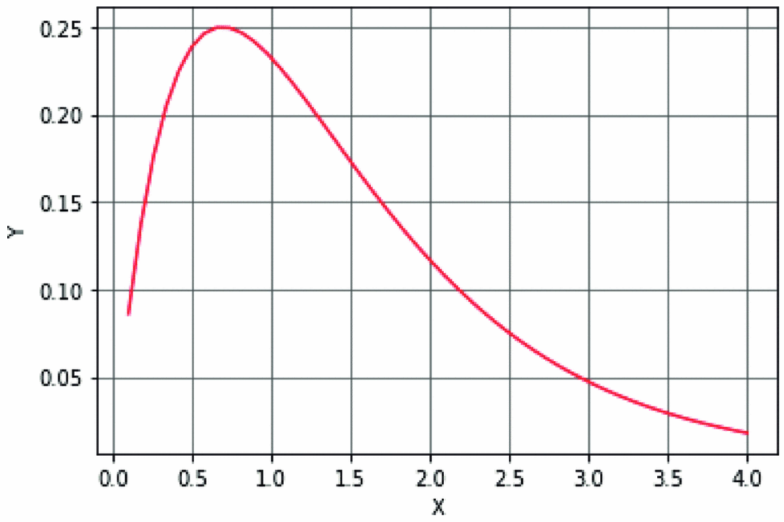
```
solve(x**2 - y**2, x)
```

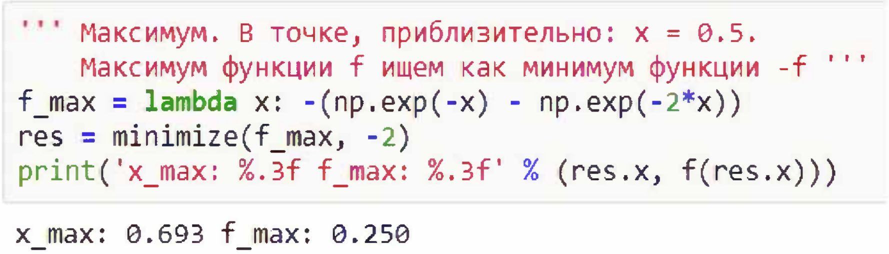
```
[-y, y]
```

Пример 13. Исследовать на экстремум функцию $y = e^{-x} - e^{-2x}$. Решение в библиотеке scipy.

```
f = lambda x: np.exp(-x) - np.exp(-2*x)
```

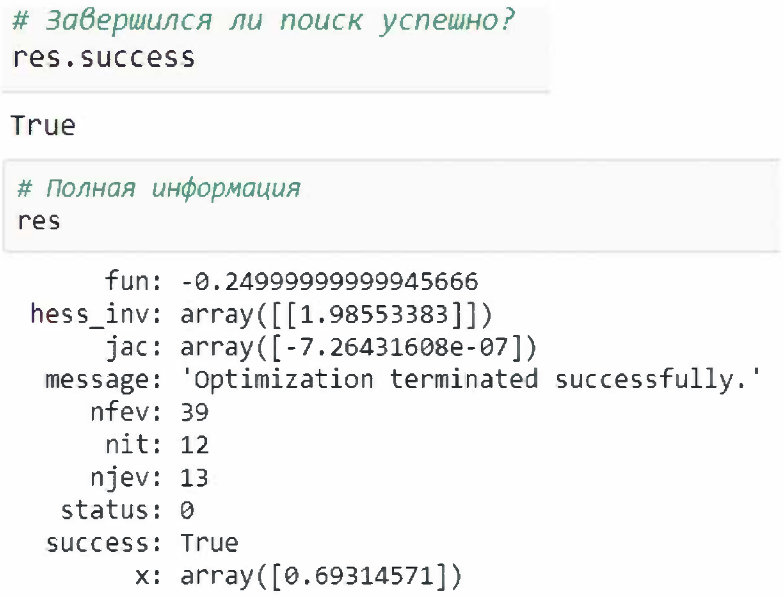
```
''' График '''
x = np.linspace(0.1,4,50)
plt.plot(x, f(x), 'r')
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```





```
''' Максимум. В точке, приблизительно: x = 0.5.
    Максимум функции f ищем как минимум функции -f '''
f_max = lambda x: -(np.exp(-x) - np.exp(-2*x))
res = minimize(f_max, -2)
print('x_max: %.3f f_max: %.3f' % (res.x, f(res.x)))
```

```
x_max: 0.693 f_max: 0.250
```



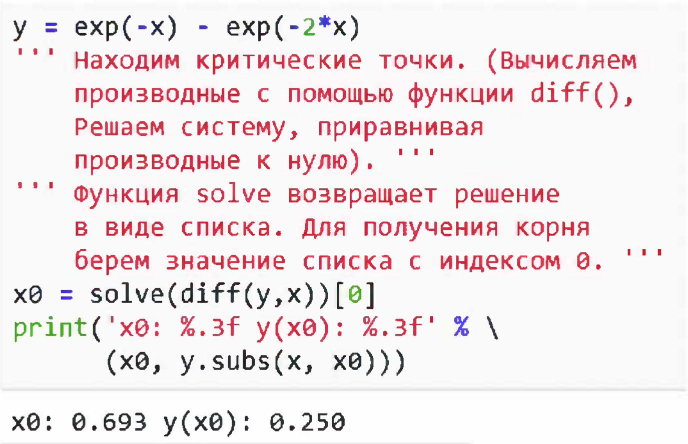
```
# Завершился ли поиск успешно?
res.success
```

```
True
```

```
# Полная информация
res
```

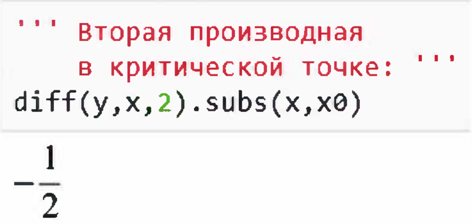
```
      fun: -0.24999999999945666
 hess_inv: array([[1.98553383]])
      jac: array([-7.26431608e-07])
  message: 'Optimization terminated successfully.'
     nfev: 39
      nit: 12
     njev: 13
   status: 0
  success: True
        x: array([0.69314571])
```

Решение в библиотеке sympy.



```
y = exp(-x) - exp(-2*x)
''' Находим критические точки. (Вычисляем
    производные с помощью функции diff(),
    Решаем систему, приравнивая
    производные к нулю). '''
''' Функция solve возвращает решение
    в виде списка. Для получения корня
    берем значение списка с индексом 0. '''
x0 = solve(diff(y,x))[0]
print('x0: %.3f y(x0): %.3f' % \
      (x0, y.subs(x, x0)))
```

```
x0: 0.693 y(x0): 0.250
```



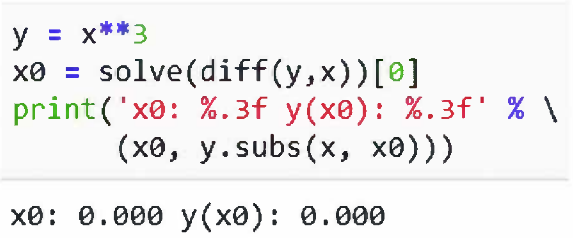
```
''' Вторая производная
    в критической точке: '''
diff(y,x,2).subs(x,x0)
```

$$-\frac{1}{2}$$

Вторая производная в критической точке отрицательна. Найден максимум.

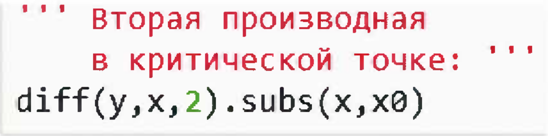
Ответ: $f_{max} = f(0{,}693) = 0{,}25$.

Пример 14. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3$.



```
y = x**3
x0 = solve(diff(y,x))[0]
print('x0: %.3f y(x0): %.3f' % \
      (x0, y.subs(x, x0)))
```

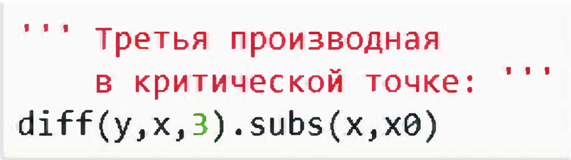
```
x0: 0.000 y(x0): 0.000
```



```
''' Вторая производная
    в критической точке: '''
diff(y,x,2).subs(x,x0)
```

```
0
```

Вторая производиая в критической точке равна 0. Для выяснения характера критической точки используем признак: если в критической точке $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 является точкой перегиба.

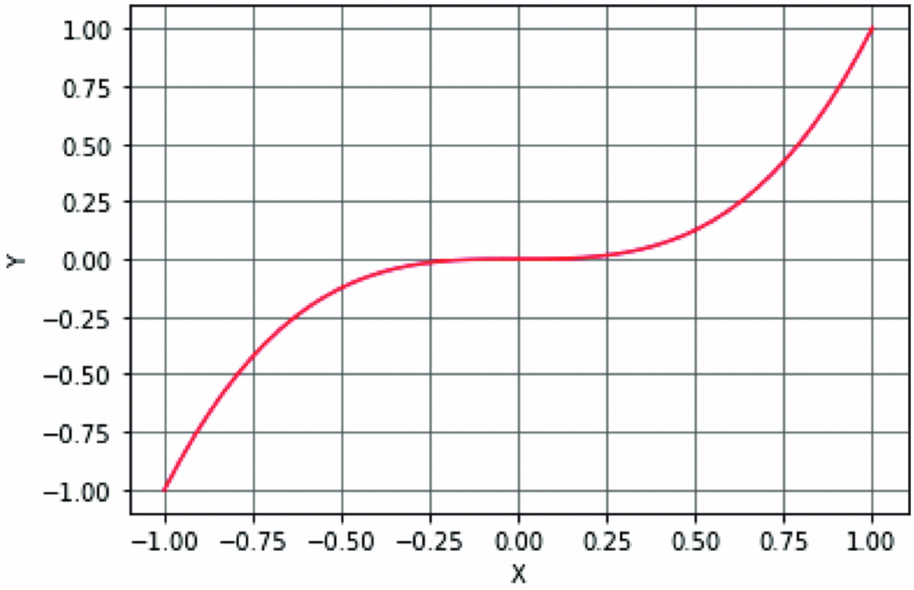


```
''' Третья производная
    в критической точке: '''
diff(y,x,3).subs(x,x0)
```

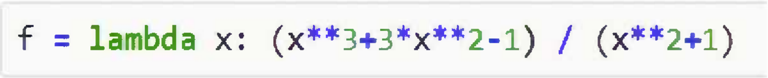
6

$x = 0$ – точка перегиба.

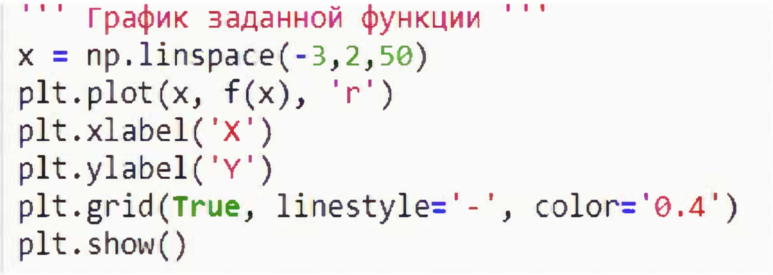
```
''' Графическая иллюстрация '''
x = np.linspace(-1,1,50)
plt.plot(x, x**3, 'r')
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



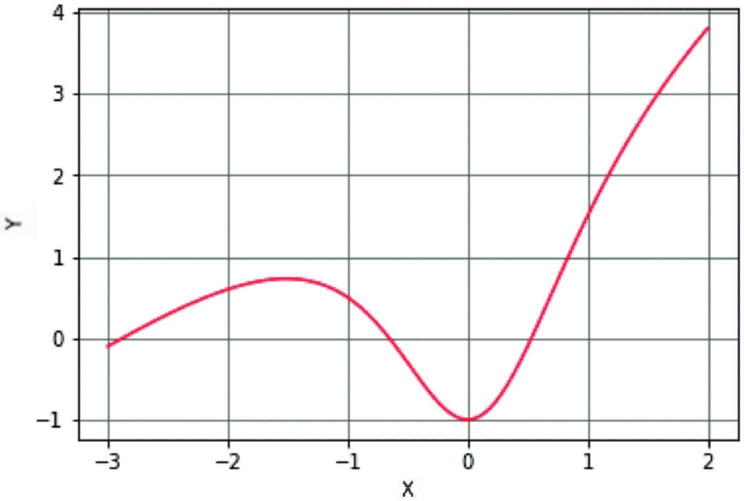
Пример 15. Найти экстремум функции $y = \frac{x^3+3x^2-1}{x^2+1}$.



```
f = lambda x: (x**3+3*x**2-1) / (x**2+1)
```



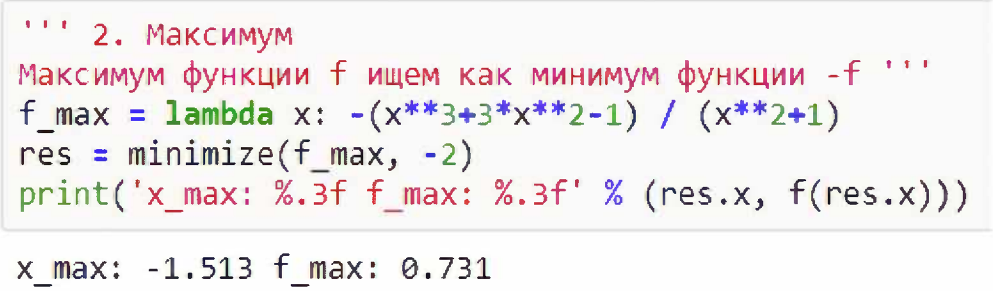
```
''' График заданной функции '''
x = np.linspace(-3,2,50)
plt.plot(x, f(x), 'r')
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



Ищем экстремумы, выбирая в качестве начальных точек значения: $x_0 = -2$ и $x_0 = 1$. Около точки $x_0 = -2$, как показывает график, нужно искать точку максимума.

```
''' 1. Минимум '''
res = minimize(f, 1)
print('x_min: %.3f f_min: %.3f' % (res.x, f(res.x)))
```

```
x_min: 0.000 f_min: -1.000
```



```
''' 2. Максимум
Максимум функции f ищем как минимум функции -f '''
f_max = lambda x: -(x**3+3*x**2-1) / (x**2+1)
res = minimize(f_max, -2)
print('x_max: %.3f f_max: %.3f' % (res.x, f(res.x)))
```

```
x_max: -1.513 f_max: 0.731
```

Ответ: $x_{min} = 0$; $x_{max} = -1{,}513$.

Наибольшее и иаимеиьшее зиачеиия иа отрезке

Наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке ищут по следующей схеме:

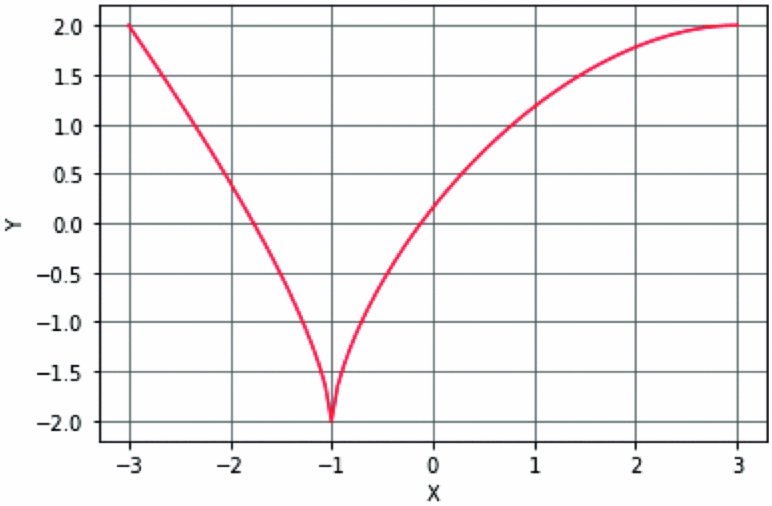
- внутри отрезка определяют критические точки и вычисляют в них значения функции;

- находят значения функции на концах отрезка;
- среди всех найденных значений находят максимальное и минимальное.

Пример 16. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке:

$$f(x) = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2; \qquad x \in [-3;3].$$

```
''' График функции на заданном отрезке '''
fun = lambda x: np.cbrt(2*(x+1)**2*(5-x)) - 2
x = np.linspace(-3, 3, 100)
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.plot(x, fun(x), 'r')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



Внутри отрезка $[-3;3]$ единственный экстремум (минимум). Находим его.

```
# 1.
res = minimize(fun, -1.5)
print('x_min: %.3f' % res.x)
```

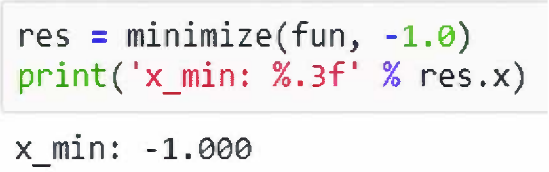
```
x_min: -0.490
```

Это явно неверное решение. В точке $x = -1$ функция имеет бесконечную производную и сходимость решений очень медленная. Возьмем начальное значение, близкое к предполагаемому значению.

```
res = minimize(fun, -1.001)
print('x_min: %.3f' % res.x)
```

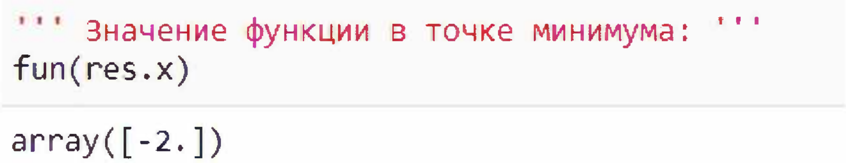
```
x_min: -1.001
```

Предполагая, что точное решение: $x = -1$, возьмем его в качестве начального значения.



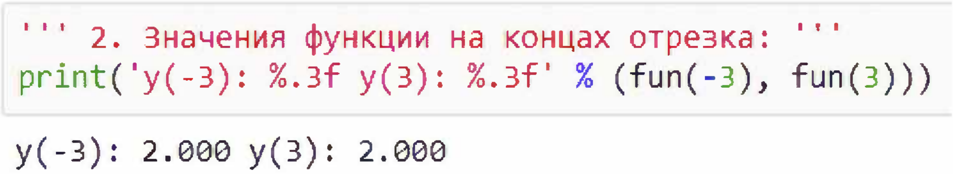
```
res = minimize(fun, -1.0)
print('x_min: %.3f' % res.x)
```

```
x_min: -1.000
```



```
''' Значение функции в точке минимума: '''
fun(res.x)
```

```
array([-2.])
```

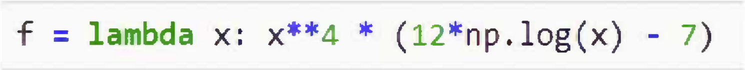


```
''' 2. Значения функции на концах отрезка: '''
print('y(-3): %.3f y(3): %.3f' % (fun(-3), fun(3)))
```

```
y(-3): 2.000 y(3): 2.000
```

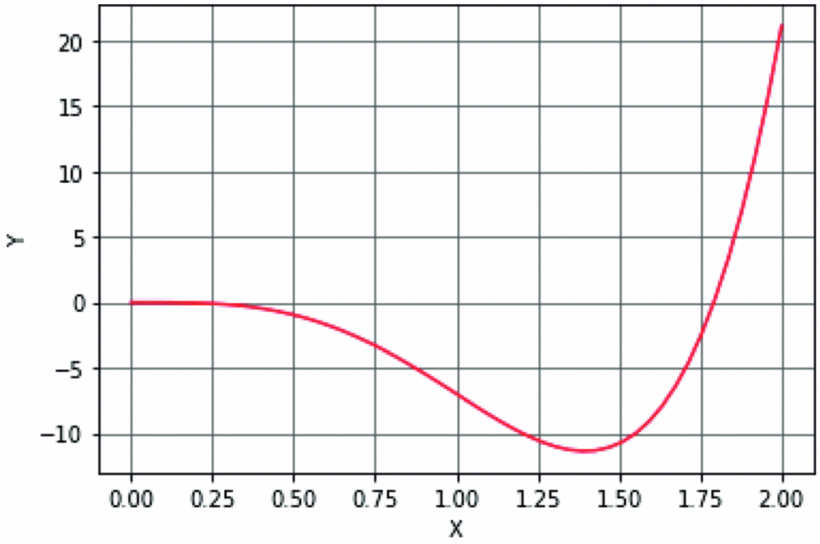
Ответ: наименьшее значеие: –2, нанбольшее: 2.

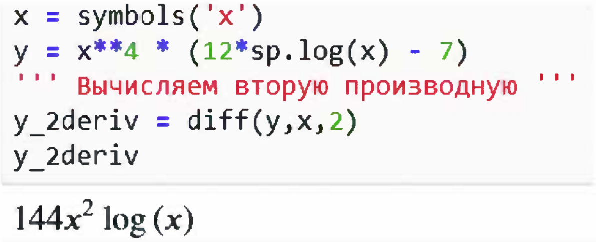
Пример 17. Найти точки перегиба и исследовать характер выпуклости кривой $y = x^4(12\ln x - 7)$.



```
f = lambda x: x**4 * (12*np.log(x) - 7)
```

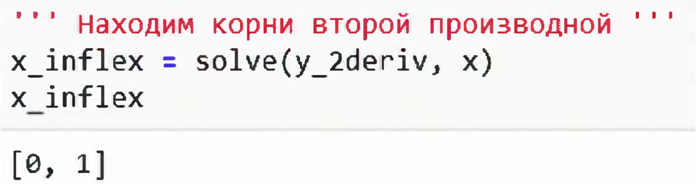
```
''' График '''
x = np.linspace(0.001,2,50)
plt.plot(x, f(x), 'r')
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```





```
x = symbols('x')
y = x**4 * (12*sp.log(x) - 7)
''' Вычисляем вторую производную '''
y_2deriv = diff(y,x,2)
y_2deriv
```

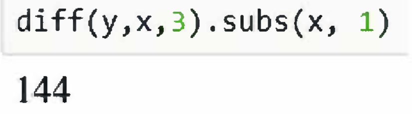
$$144x^2 \log(x)$$



```
''' Находим корни второй производной '''
x_inflex = solve(y_2deriv, x)
x_inflex
```

```
[0, 1]
```

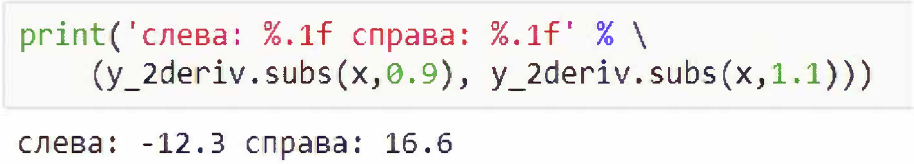
$x = 0$ находится на границе области определения функции. Точка перегиба: $x = 1$. Это можно заключить и из графика. Но можно и проверить, что третья производная отлична от нуля.



```
diff(y,x,3).subs(x, 1)
```

$$144$$

Характер выпуклости определяем по графику, или используем признак: если вторая производная отрицательна во всех точках интервала, то в этом интервале функция выпукла вверх; если положительна – выпукла вниз.



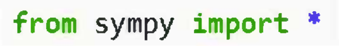
```
print('слева: %.1f справа: %.1f' % \
    (y_2deriv.subs(x,0.9), y_2deriv.subs(x,1.1)))
```

```
слева: -12.3 справа: 16.6
```

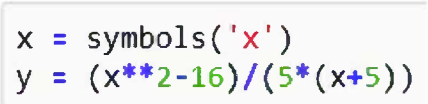
На интервале $(0; 1)$ – выпукла вверх, на интервале $(1; \infty)$ – выпукла вниз.

Пример 18. Провести полное исследование функции $y = \frac{x^2-16}{5(x+5)}$.

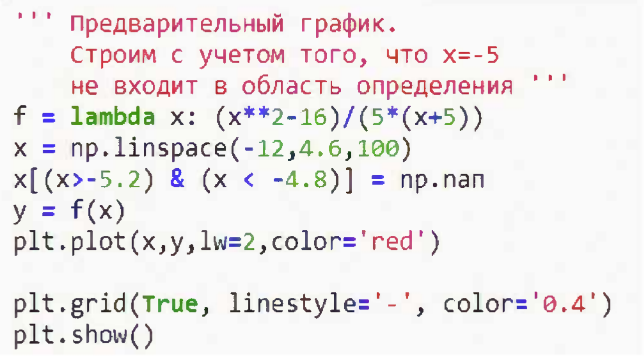
Для решения используем библиотеку sympy.



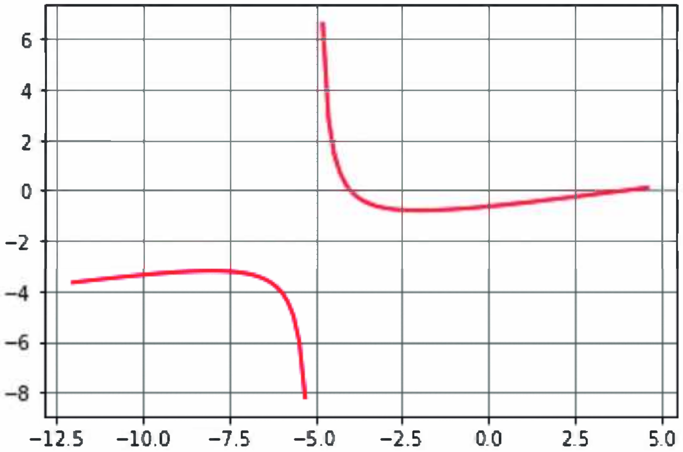
```
from sympy import *
```



```
x = symbols('x')
y = (x**2-16)/(5*(x+5))
```

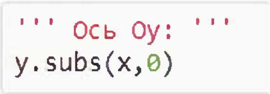


```
''' Предварительный график.
    Строим с учетом того, что x=-5
    не входит в область определения '''
f = lambda x: (x**2-16)/(5*(x+5))
x = np.linspace(-12,4.6,100)
x[(x>-5.2) & (x < -4.8)] = np.nan
y = f(x)
plt.plot(x,y,lw=2,color='red')

plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



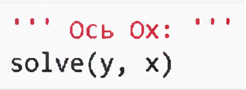
1. Область определения: $x \neq -5$.

2. Пересечение с осями.



```
''' Ось Oy: '''
y.subs(x,0)
```

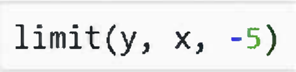
$$-\frac{16}{25}$$



```
''' Ось Ox: '''
solve(y, x)
```

```
[-4, 4]
```

3. Асимптоты.



```
limit(y, x, -5)
```

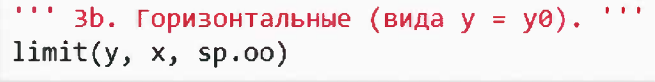
$$\infty$$

3a. Вертикальные (вида $x = x_0$). В область определения не входит значенне $x = -5$. Предел при $x \to -5$:

```
limit(y, x, -5)
```

$$\infty$$

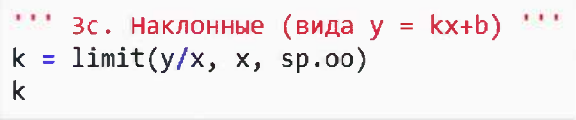
Предел бесконечный, следовательно, $x = -5$ – вертикальная асимптота.



```
''' 3b. Горизонтальные (вида y = y0). '''
limit(y, x, sp.oo)
```

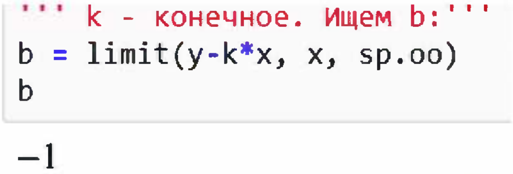
$$\infty$$

Предел при $x \to \infty$ бесконечный, следовательно, горизонтальной асимптоты нет.



```
''' 3c. Наклонные (вида y = kx+b) '''
k = limit(y/x, x, sp.oo)
k
```

$$\frac{1}{5}$$

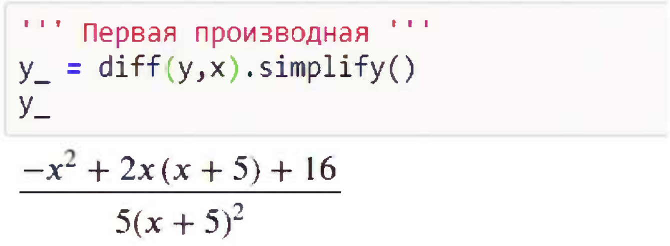


```
''' k - конечное. Ищем b:'''
b = limit(y-k*x, x, sp.oo)
b
```

$$-1$$

Наклонная асимптота: $y = \frac{x}{5} - 1$.

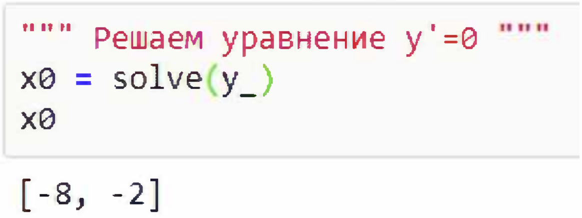
4. Экстремумы и интервалы монотонности.



```
''' Первая производная '''
y_ = diff(y,x).simplify()
y_
```

$$\frac{-x^2 + 2x(x+5) + 16}{5(x+5)^2}$$

Результат: $y' = \frac{x^2+10x+16}{5(x+5)^2}$.

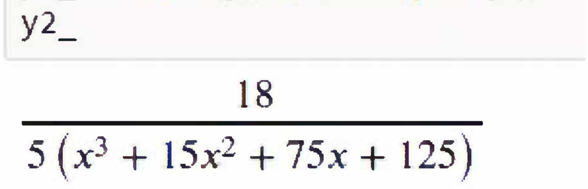


```
""" Решаем уравнение y'=0 """
x0 = solve(y_)
x0
```

```
[-8, -2]
```

Две критические точки.

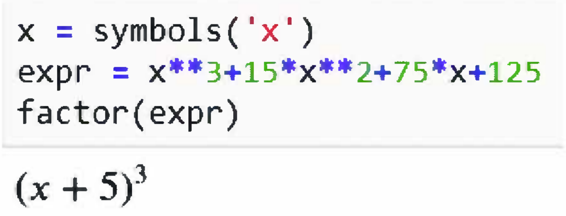
Находим вторую производную.



```
y2_ = diff(y,x,2).simplify()
y2_
```

$$\frac{18}{5\left(x^3 + 15x^2 + 75x + 125\right)}$$

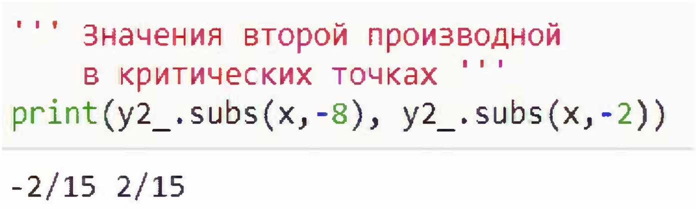
Выражение в знаменателе полученного выражения напоминает разложение куба суммы двух слагаемых. Проверим, так ли это, используя функцию factor(), выполняющую факторизацию выражения.



```
x = symbols('x')
expr = x**3+15*x**2+75*x+125
factor(expr)
```

$$(x+5)^3$$

Итак, вторую производную можно записать в виде: $y'' = \frac{18}{5(x+5)^3}$.



```
''' Значения второй производной
    в критических точках '''
print(y2_.subs(x,-8), y2_.subs(x,-2))
```

```
-2/15 2/15
```

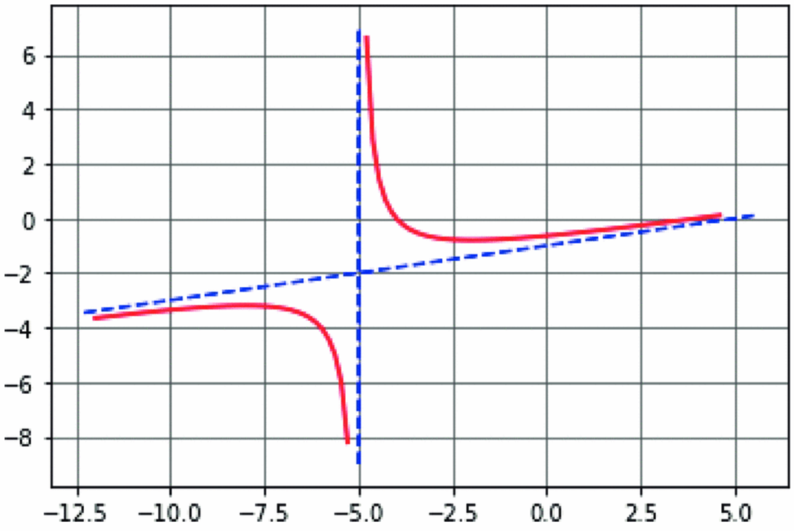
В точке $x = -8$ вторая производная отрицательна, следовательно, это точка максимума. В точке $x = -2$ вторая производпая положительна, это точка мииимума.

5. Интервалы выпуклости и точки перегиба графика фуикции.

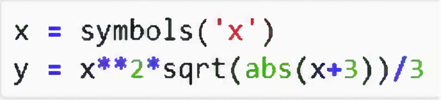
Вторая производная $\left(\frac{18}{5(x+5)^3}\right)$ во всех точка отлична от иуля, следователььио, точек перегиба нет. При $x < -5$ вторая производная отрицательна, следовательпо, функцпя выпукла вверх. Прн $x > -5$ вторая пропзводная положительпа и функция выпукла вниз.

6. Строим окончательный график, на котором отображаем найденные асимптоты.

```
f = lambda x: (x**2-16)/(5*(x+5))
x = np.linspace(-12,4.6,100)
x[(x>-5.2) & (x < -4.8)] = np.nan
y = f(x)
plt.plot(x,y,lw=2,color='red')

x = np.linspace(-12.3,5.5,100)
y = x/5 - 1
plt.plot(x,y,'--',color='b')

plt.plot([-5,-5],[-9,7],'--',color='b')

plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```

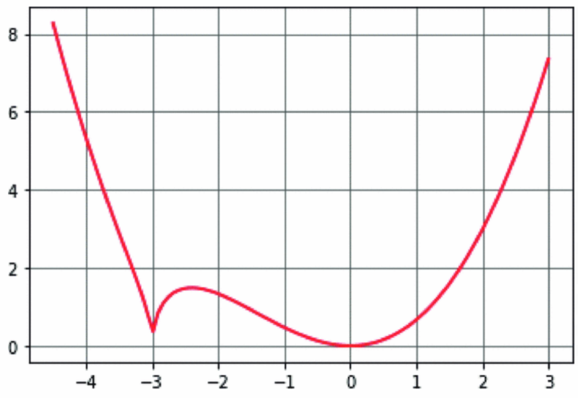


Пример 19. Провести полное исследовапие функцип $y = \frac{1}{3}x^2\sqrt{|x+3|}$.



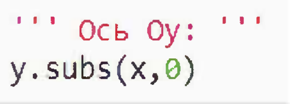
```
x = symbols('x')
y = x**2*sqrt(abs(x+3))/3
```

```
''' Предварительный график '''
f = lambda x: x**2*np.sqrt(abs(x+3))/3
x = np.linspace(-4.5,3,100)
f_x = f(x)
plt.plot(x,f_x,lw=2,color='red')

plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



1. Область определения: $x \in R$.

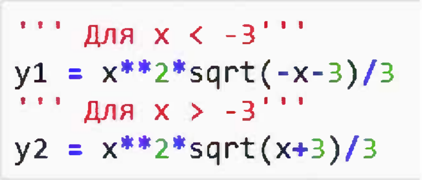
2. Пересечение с осями.



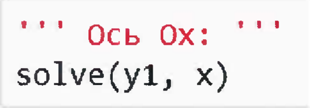
```
''' Ось Oy: '''
y.subs(x,0)
```

```
0
```

Функция $y = |x + 3|$ не имеет производной при $x = -3$. Поиск корней и производных нужно производить раздельно для $x < -3$ и для $x > -3$.



```
''' Для x < -3'''
y1 = x**2*sqrt(-x-3)/3
''' Для x > -3'''
y2 = x**2*sqrt(x+3)/3
```



```
''' Ось Ox: '''
solve(y1, x)
```

```
[-3, 0]
```

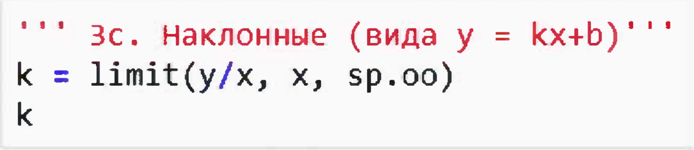
3. Асимптоты.

3а. Вертикальных асимптот нет, так как область определения $x \in R$.

```
''' 3b. Горизонтальные (вида y = y0). '''
limit(y, x, sp.oo)
```

∞

Предел при $x \to \infty$ бесконечный, следовательно, горизонтальной асимптоты нет.



```
''' 3c. Наклонные (вида y = kx+b)'''
k = limit(y/x, x, sp.oo)
k
```

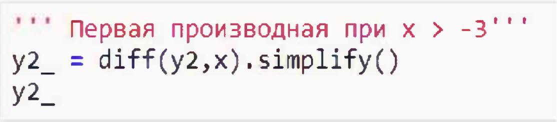
$$\infty$$

Коэффициент k – не конечный, следовательно, наклонной асимптоты нет.

4. Экстремумы и интервалы монотонности.

```
''' Первая производная при x < -3'''
y1_ = diff(y1,x).simplify()
y1_
```

$$-\frac{x\left(5x+12\right)}{6\sqrt{-x-3}}$$

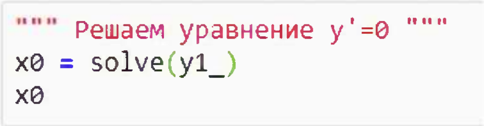


```
''' Первая производная при x > -3'''
y2_ = diff(y2,x).simplify()
y2_
```

$$\frac{x\left(5x+12\right)}{6\sqrt{x+3}}$$

```
''' При $x = -3$ производная не существует: '''
limit(y2_, x, -3, '+')
```

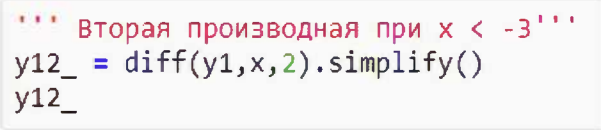
$$\infty$$



```
""" Решаем уравнение y'=0 """
x0 = solve(y1_)
x0
```

```
[-12/5, 0]
```

Две критические точки. Находим вторую производную.

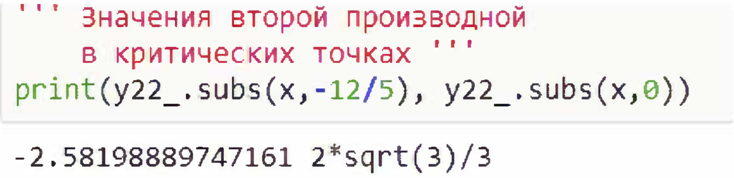


```
''' Вторая производная при x < -3'''
y12_ = diff(y1,x,2).simplify()
y12_
```

$$\frac{\sqrt{-x-3}\left(5x^2+24x+24\right)}{4\left(x^2+6x+9\right)}$$

```
''' Вторая производная при x > -3'''
y22_ = diff(y2,x,2).simplify()
y22_
```

$$\frac{5x^2+24x+24}{4(x+3)^{\frac{3}{2}}}$$

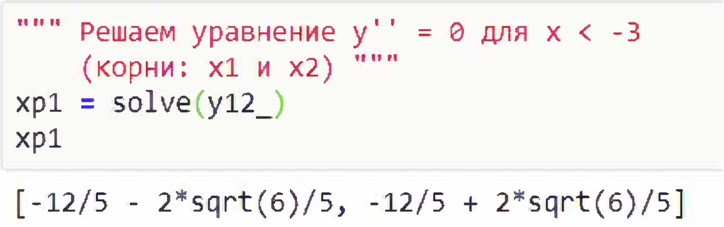


```
''' Значения второй производной
    в критических точках '''
print(y22_.subs(x,-12/5), y22_.subs(x,0))
```

```
-2.58198889747161 2*sqrt(3)/3
```

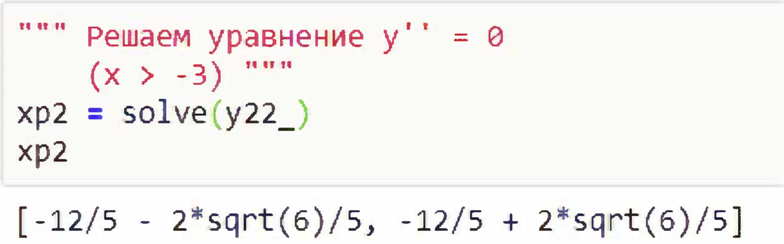
В точке $x = -\frac{12}{5}$ вторая производная отрицательна, следовательно, это точка максимума. В точке $x = 0$ вторая производная положительна, это точка минимума.

5. Интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.



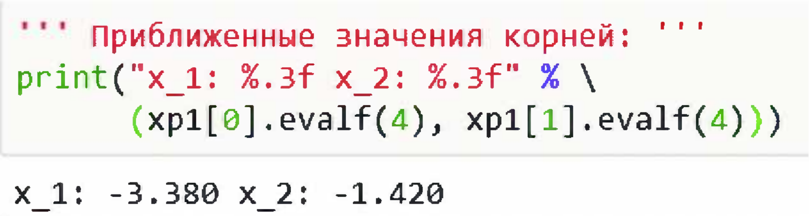
```
""" Решаем уравнение y'' = 0 для x < -3
    (корни: x1 и x2) """
xp1 = solve(y12_)
xp1
```

```
[-12/5 - 2*sqrt(6)/5, -12/5 + 2*sqrt(6)/5]
```



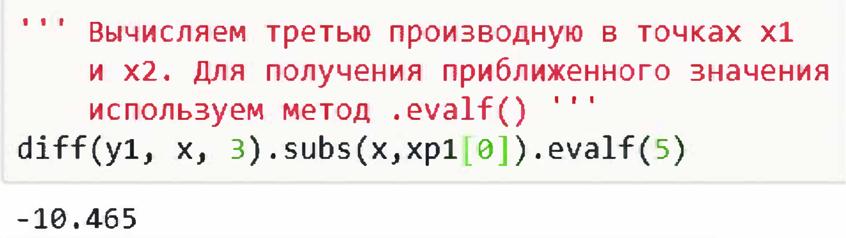
```
""" Решаем уравнение y'' = 0
    (x > -3) """
xp2 = solve(y22_)
xp2
```

```
[-12/5 - 2*sqrt(6)/5, -12/5 + 2*sqrt(6)/5]
```



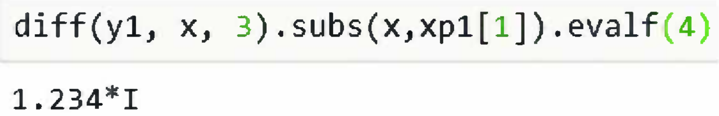
```
''' Приближенные значения корней: '''
print("x_1: %.3f x_2: %.3f" % \
      (xp1[0].evalf(4), xp1[1].evalf(4)))
```

```
x_1: -3.380 x_2: -1.420
```



```
''' Вычисляем третью производную в точках x1
    и x2. Для получения приближенного значения
    используем метод .evalf() '''
diff(y1, x, 3).subs(x,xp1[0]).evalf(5)
```

```
-10.465
```



```
diff(y1, x, 3).subs(x,xp1[1]).evalf(4)
```

```
1.234*I
```

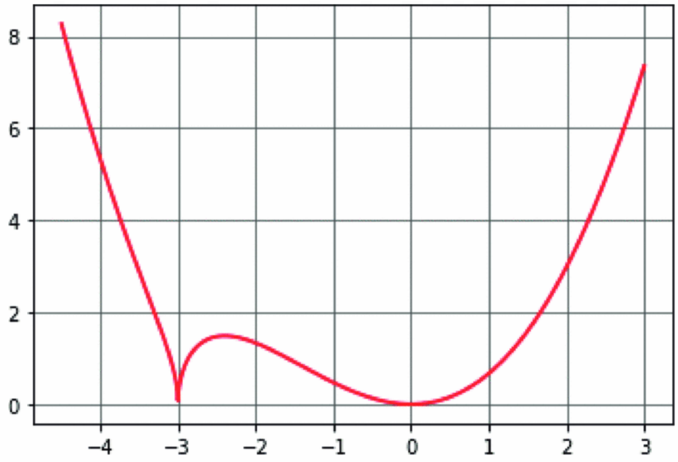
Третья производная в обеих точках отлична от нуля, следовательно, вторая производная в этих точках меняет знак, значит получены точки перегиба.

В точке x_1 вторая производная меняет знак с плюса на минус (так как ее производная отрицательна), следовательно, при $x < x_1$ функция выпукла вниз, а от точки x_1 до -3 – выпукла вверх.

В точке x_2 вторая производиая меняет знак с минуса иа плюс (так как ее производная иоложительпа), следовательпо, при $-3 < x < x_2$ функция выпукла вверх, при $x > x_2$ – выпукла вниз.

6. Строим окопчательный графнк с учетом того, что точка $x = -3$ особая (производная отрицательна). Для правильного отображення поведення функцни в этой точке увеличиваем число точек массива x.

```
f = lambda x: x**2*np.sqrt(abs(x+3))/3
x = np.linspace(-4.5,3,2000)
f_x = f(x)
plt.plot(x,f_x,lw=2,color='red')

plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```

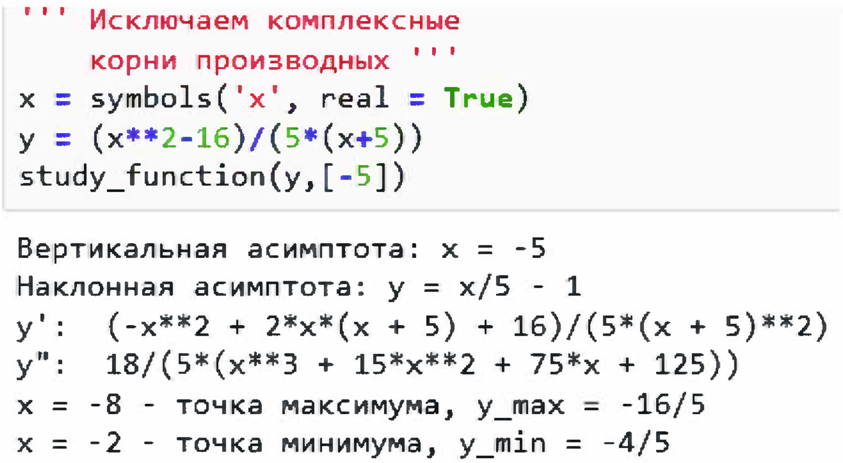


В разделе «Функции в Python», с. 21 прнведеп текст функцни study_function(),которая осуществляет полное нсследование заданной функции $y(x)$. В качестве входных параметров, кроме исследуемой функцин $y(x)$, задаются также особые точкп – точки, в которых функция не существует; н точки, находящпеся на границе области определеиия. Призиак asimp (по умолчаипю True) указывает, нужно ли искать аснмптоты графика. Его следует устанавливать в значение False для функций, область определения которых отлична от $\mathbb{R}$, во избежание нолучеиия иекорректных значеиий.

Проведем исследование раиее рассмотренной в иримере 18 функции

$$y = \frac{x^2-16}{5(x+5)}.$$

```
from sympy import *
```

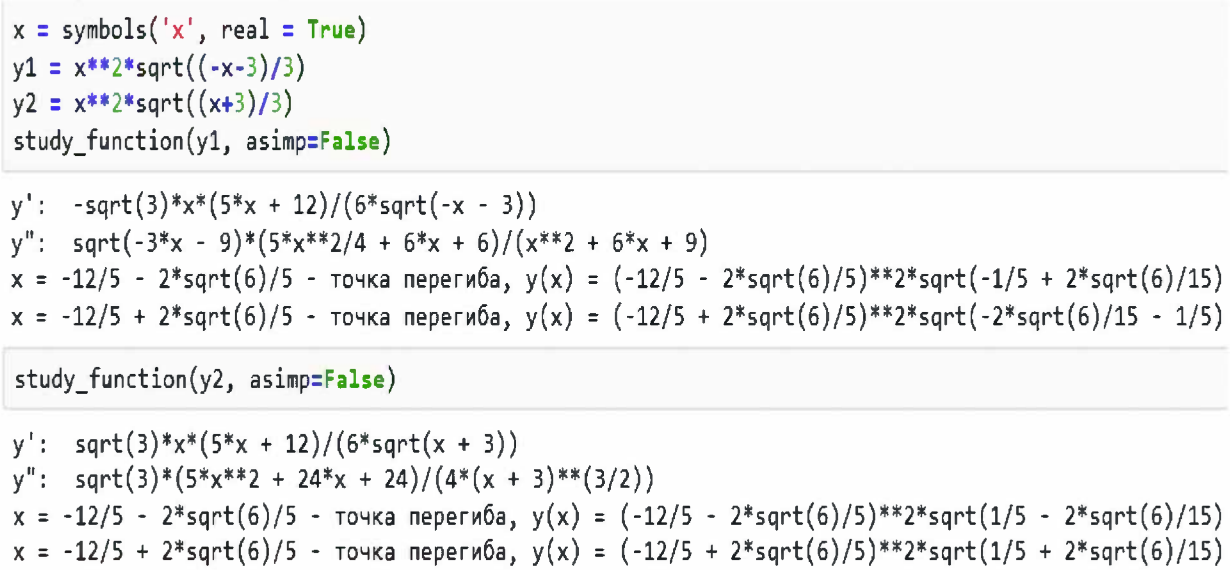


```
''' Исключаем комплексные
    корни производных '''
x = symbols('x', real = True)
y = (x**2-16)/(5*(x+5))
study_function(y,[-5])
```

```
Вертикальная асимптота: x = -5
Наклонная асимптота: y = x/5 - 1
y':  (-x**2 + 2*x*(x + 5) + 16)/(5*(x + 5)**2)
y":  18/(5*(x**3 + 15*x**2 + 75*x + 125))
x = -8 - точка максимума, y_max = -16/5
x = -2 - точка минимума, y_min = -4/5
```

Получили те же результаты, что и в ранее проведенном решеиии.

Рассмотрим теперь фуикцию из примера 19. Функция $y = |x + 3|$ не имеет производной при $x = -3$. По этой причине вызываем функцию study_function два раза: для $x < -3$ и для $x > -3$, и устаиавливаем признак asimp=False.



```
x = symbols('x', real = True)
y1 = x**2*sqrt((-x-3)/3)
y2 = x**2*sqrt((x+3)/3)
study_function(y1, asimp=False)
```

```
y':  -sqrt(3)*x*(5*x + 12)/(6*sqrt(-x - 3))
y":  sqrt(-3*x - 9)*(5*x**2/4 + 6*x + 6)/(x**2 + 6*x + 9)
x = -12/5 - 2*sqrt(6)/5 - точка перегиба, y(x) = (-12/5 - 2*sqrt(6)/5)**2*sqrt(-1/5 + 2*sqrt(6)/15)
x = -12/5 + 2*sqrt(6)/5 - точка перегиба, y(x) = (-12/5 + 2*sqrt(6)/5)**2*sqrt(-2*sqrt(6)/15 - 1/5)
```

```
study_function(y2, asimp=False)
```

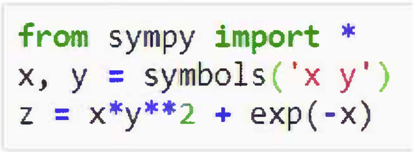
```
y':  sqrt(3)*x*(5*x + 12)/(6*sqrt(x + 3))
y":  sqrt(3)*(5*x**2 + 24*x + 24)/(4*(x + 3)**(3/2))
x = -12/5 - 2*sqrt(6)/5 - точка перегиба, y(x) = (-12/5 - 2*sqrt(6)/5)**2*sqrt(1/5 - 2*sqrt(6)/15)
x = -12/5 + 2*sqrt(6)/5 - точка перегиба, y(x) = (-12/5 + 2*sqrt(6)/5)**2*sqrt(1/5 + 2*sqrt(6)/15)
```

Частные нроизводные

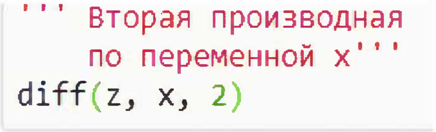
Функцня diff(f, x, k, y, m, ...)

Параметры: f – функция от перемеиных x, y, …; k, m, … – порядок производной по соответствующей переменной.

Пример 20. Вычислить частные производиые $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $z = xy^2 + e^{-x}$.

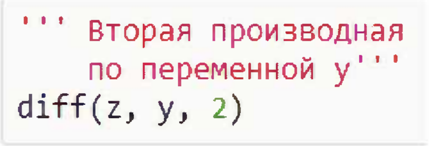


```
from sympy import *
x, y = symbols('x y')
z = x*y**2 + exp(-x)
```



```
''' Вторая производная
    по переменной x'''
diff(z, x, 2)
```

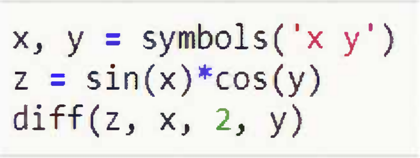
e^{-x}



```
''' Вторая производная
    по переменной y'''
diff(z, y, 2)
```

$2x$

Пример 21. Вычислить частную производную $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ функции $z = \sin x \cdot \cos y$.



```
x, y = symbols('x y')
z = sin(x)*cos(y)
diff(z, x, 2, y)
```

$\sin(x)\sin(y)$

Градиент

Градиентом функции называется вектор, составленный из частных производных этой функции.

Для функции двух переменных градиент вычисляется по правилу:

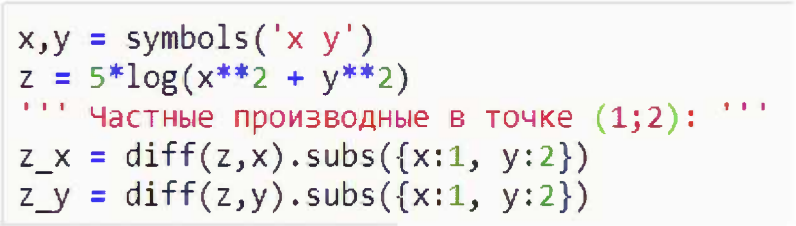
$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}.$$

Пример 22. Вычислить градиент функции

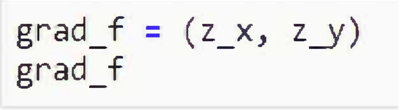
$$z = 5\ln(x^2 + y^2)$$

в точке $M(1;2)$.

Решение.



```
x,y = symbols('x y')
z = 5*log(x**2 + y**2)
''' Частные производные в точке (1;2): '''
z_x = diff(z,x).subs({x:1, y:2})
z_y = diff(z,y).subs({x:1, y:2})
```



```
grad_f = (z_x, z_y)
grad_f
```

```
(2, 4)
```

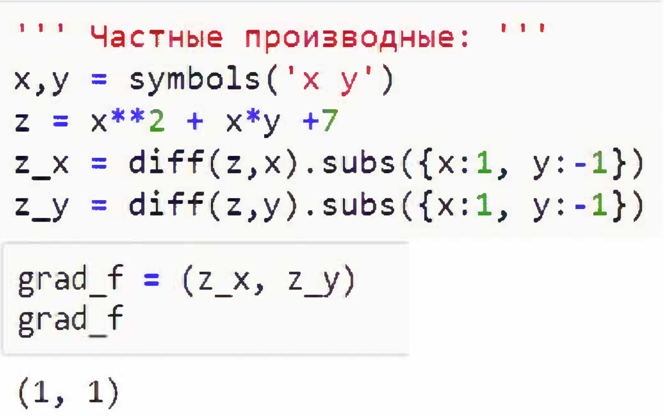
Ответ: $\operatorname{grad} f = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} = (2;4)$.

Пример 23. Определить направление $\boldsymbol{l}$ быстрейшего возрастания функции

$$z = x^2 + xy + 7$$

в точке $M(1; -1)$.

Решение. Направление быстрейшего возрастания функции в точке M определяется градиентом функции, вычисленным в этой точке.



```
''' Частные производные: '''
x,y = symbols('x y')
z = x**2 + x*y +7
z_x = diff(z,x).subs({x:1, y:-1})
z_y = diff(z,y).subs({x:1, y:-1})
```

```
grad_f = (z_x, z_y)
grad_f
```

```
(1, 1)
```

Градиентом является вектор $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, следовательно, искомое направление $\boldsymbol{l}$ составляет угол 45° с осью Ox.

Производная по направлению

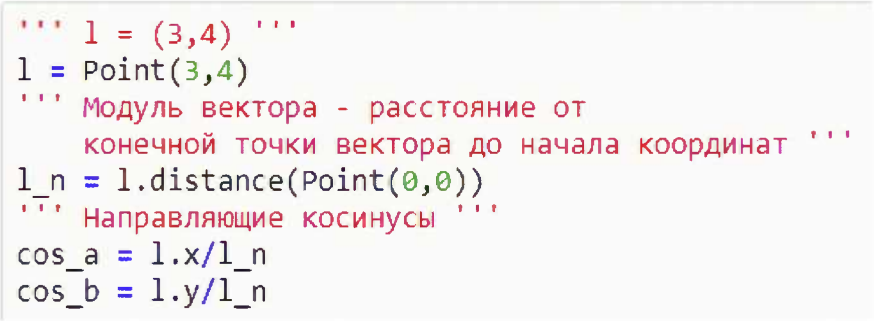
Производная функции $z = f(x, y)$ *в данном направлении* $\boldsymbol{l} = (l_x; l_y)$ вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,$$

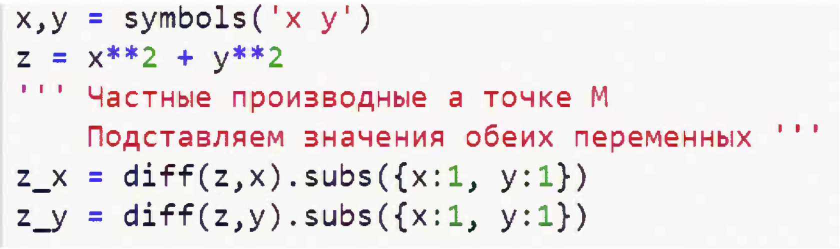
где $\cos\alpha = \frac{l_x}{|l|}$, $\cos\beta = \frac{l_y}{|l|}$ – направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{l}$, и $|\boldsymbol{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$.

Пример 24. Найти производную функции $z = x^2 + y^2$ в точке $M(1; 1)$ по направлению вектора $\boldsymbol{l} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$.

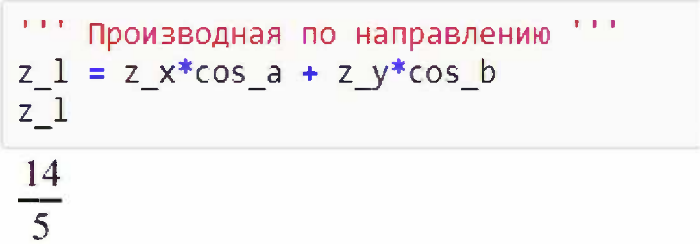
Решение.



```
''' l = (3,4) '''
l = Point(3,4)
''' Модуль вектора - расстояние от
    конечной точки вектора до начала координат '''
l_n = l.distance(Point(0,0))
''' Направляющие косинусы '''
cos_a = l.x/l_n
cos_b = l.y/l_n
```



```
x,y = symbols('x y')
z = x**2 + y**2
''' Частные производные а точке М
    Подставляем значения обеих переменных '''
z_x = diff(z,x).subs({x:1, y:1})
z_y = diff(z,y).subs({x:1, y:1})
```



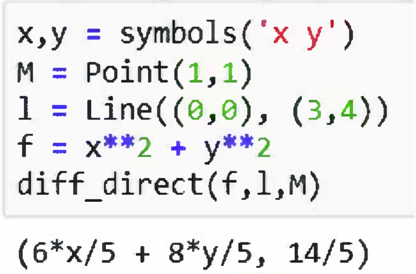
```
''' Производная по направлению '''
z_l = z_x*cos_a + z_y*cos_b
z_l
```

$$\frac{14}{5}$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial l}(1;1) = \frac{14}{5}$.

В разделе «Функции в Python», с. 22 приведен текст функции diff_direct(), которая находит производную заданной функции u двух или трех переменных по направлению вектора l. Если дополнительно задана точка M, вычисляется значение производной в этой точке.

Решение ранее рассмотренного примера.



```
x,y = symbols('x y')
M = Point(1,1)
l = Line((0,0), (3,4))
f = x**2 + y**2
diff_direct(f,l,M)
```

```
(6*x/5 + 8*y/5, 14/5)
```

Производная: $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y$. Значение в точке: $\frac{\partial z}{\partial l}(1;1) = \frac{14}{5}$.

Касательная плоскость

Касательной плоскостью к поверхности в точке M_0 называется плоскость, содержащая касательные ко всем кривым, которые принадлежат данной поверхности и проходят через точку M_0.

Нормалью к поверхности в точке M_0 называется прямая, проходящая через данную точку перпендикулярно касательной плоскости.

Если поверхность задана неявным уравнением $F(x,y,z) = 0$, то уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ находится по формуле:

$$F'_x(M_0)\cdot(x - x_0) + F'_y(M_0)\cdot(y - y_0) + F'_z(M_0)\cdot(z - z_0) = 0.$$

Производные F'_x, F'_y, F'_z – не являются производными неявной функции, а вычисляются по правилам дифференцирования функции трех переменных (при взятии производной по переменной x, остальные две переменные рассматриваются как константы).

Из уравнения касательной плоскости можно сделать вывод, что оно представляет собой уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 с нормальным вектором $\boldsymbol{n} = \left(F'_x(M_0); F'_y(M_0); F'_z(M_0)\right)$. В библиотеке sympy имеется соответствующая функция.

Уравнение нормали можно записать в виде канонического уравнения прямой:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)},$$

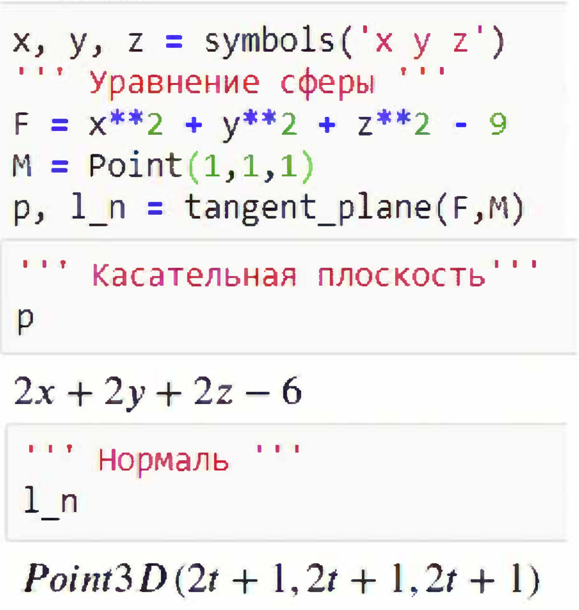
или в параметрическом виде:

$$x = x_0 + F'_x(M_0) \cdot t, \quad y = y_0 + F'_y(M_0) \cdot t, \quad z = z_0 + F'_z(M_0) \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В разделе «Функции в Python», с. 23 приведен текст функции tangent_plane(),которая находит уравнение касательной плоскости (в виде общего уравнения плоскости) и уравнение нормали (в параметрическом виде) по заданной функции трех переменных $F(x, y, z)$ и точке M.

Пример 25. Провести касательную плоскость и нормаль к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ в точке $M(1; 1; 1)$.

Решение.



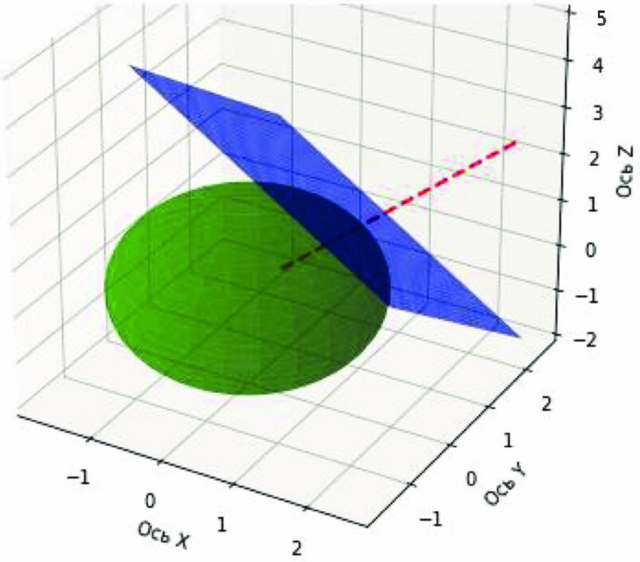
```
x, y, z = symbols('x y z')
''' Уравнение сферы '''
F = x**2 + y**2 + z**2 - 9
M = Point(1,1,1)
p, l_n = tangent_plane(F,M)
```

```
''' Касательная плоскость'''
p
```

$$2x + 2y + 2z - 6$$

```
''' Нормаль '''
l_n
```

$$Point3D(2t + 1, 2t + 1, 2t + 1)$$



Ответ: касательная плоскость: $x + y + z - 3 = 0$;

нормаль: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ или $x = t + 1,\ y = t + 1,\ z = t + 1,\ \ t \in R$.

Экстремум функции многих переменных

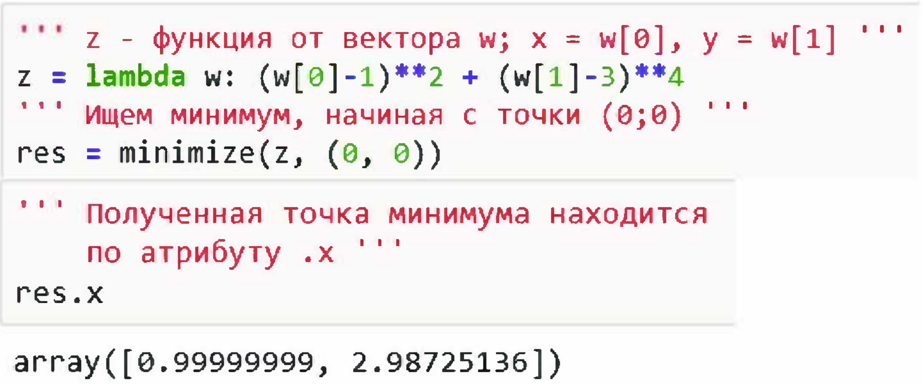
Для поиска экстремума функции многих переменных используется функция minimize () модуля scipy.optimize или библиотека sympy.

Решение в библиотеке scipy

Пример 26. В качестве первого примера возьмем функцию с очевидным ответом.

Найти минимум функции двух переменных $z = (x-1)^2 + (y-3)^4$.

Решение.

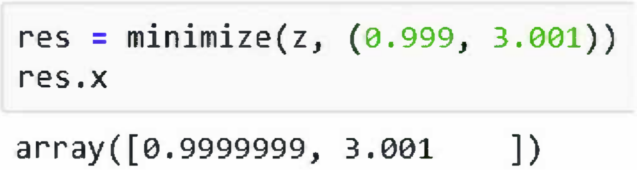


```
''' z - функция от вектора w; x = w[0], y = w[1] '''
z = lambda w: (w[0]-1)**2 + (w[1]-3)**4
''' Ищем минимум, начиная с точки (0;0) '''
res = minimize(z, (0, 0))
```

```
''' Полученная точка минимума находится
    по атрибуту .x '''
res.x
```

```
array([0.99999999, 2.98725136])
```

Предполагая, что точное решение: $x = 1, y = 3$, повторим поиск, выбирая начальные значения, близкие к предполагаемому решению.

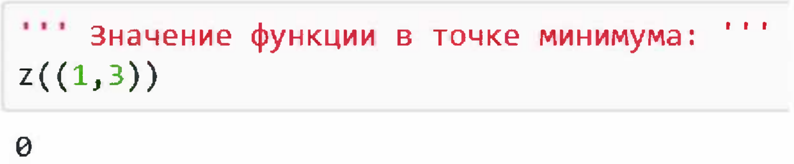


```
res = minimize(z, (0.999, 3.001))
res.x
```

```
array([0.9999999, 3.001    ])
```

```
z((1,3)) < z((0.999,3.001))
```

```
True
```

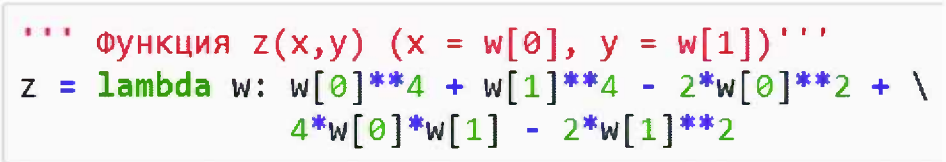


```
''' Значение функции в точке минимума: '''
z((1,3))
```

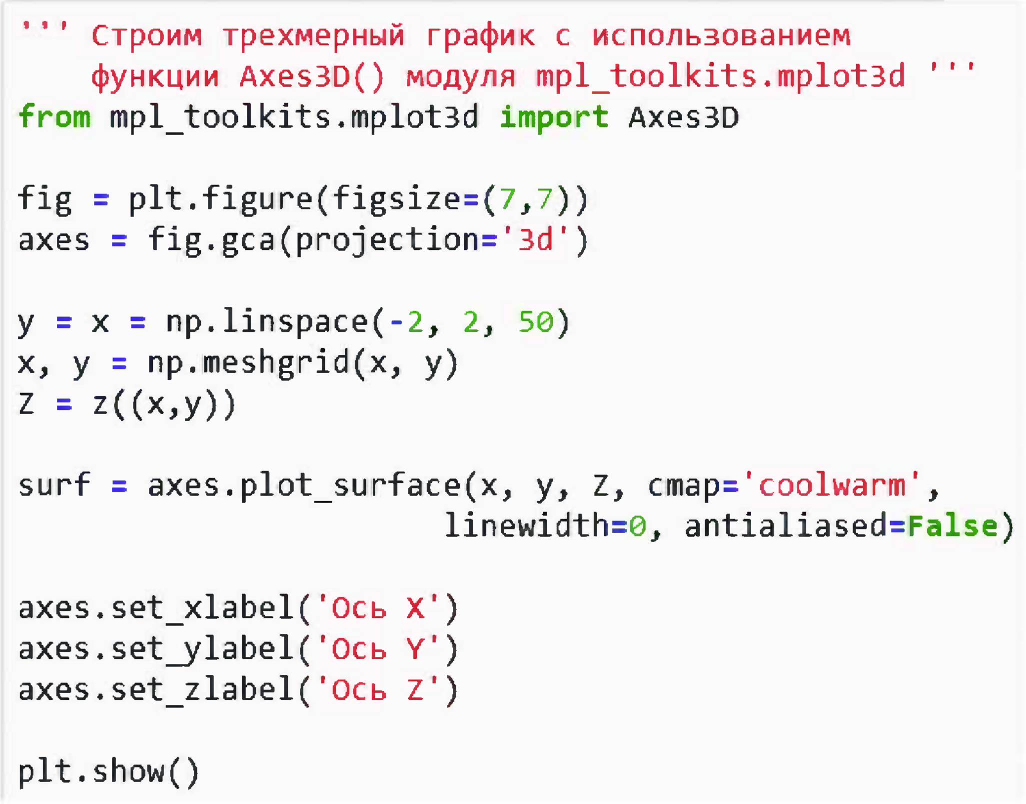
```
0
```

Пример 27. Исследовать функцию на экстремум:

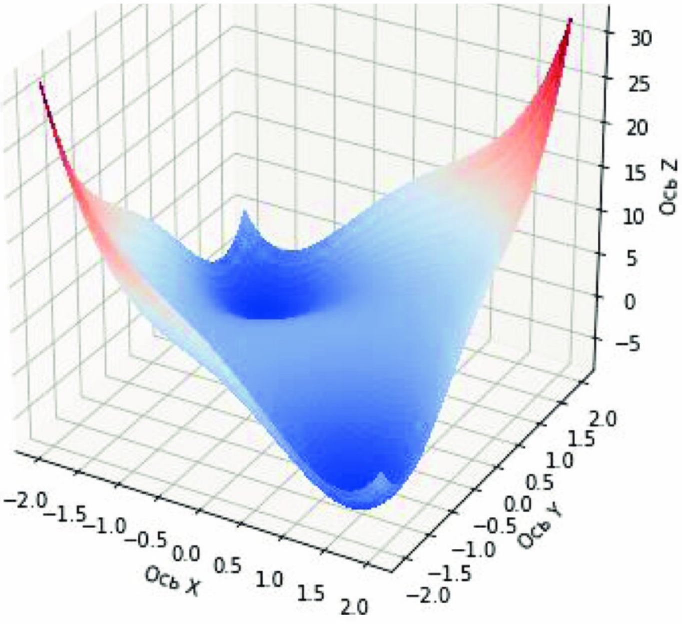
$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$



```
''' Функция z(x,y) (x = w[0], y = w[1])'''
z = lambda w: w[0]**4 + w[1]**4 - 2*w[0]**2 + \
              4*w[0]*w[1] - 2*w[1]**2
```



```
''' Строим трехмерный график с использованием
    функции Axes3D() модуля mpl_toolkits.mplot3d '''
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

fig = plt.figure(figsize=(7,7))
axes = fig.gca(projection='3d')

y = x = np.linspace(-2, 2, 50)
x, y = np.meshgrid(x, y)
Z = z((x,y))

surf = axes.plot_surface(x, y, Z, cmap='coolwarm',
                       linewidth=0, antialiased=False)

axes.set_xlabel('Ось X')
axes.set_ylabel('Ось Y')
axes.set_zlabel('Ось Z')

plt.show()
```



Поиск экстремума с использоваиием функции minimize () библиотеки scipy.

Из графика заключаем: функция имеет два локальных минимума в точках, приблизительно, $(1;-1)$ и $(-1;1)$. Точка, ориентировочно, $(0;0)$ является седловой точкой.

```
''' 1 точка '''
res = minimize(z, (1, -1))
res.x
```

```
array([ 1.41421356, -1.41421356])
```

```
''' Значение функции в точке минимума: '''
z(res.x)
```

```
-8.0
```

```
''' 2 точка '''
res = minimize(z, (-1, 1))
res.x
```

```
array([-1.41421356,  1.41421356])
```

```
''' Значение функции: '''
z(res.x)
```

```
-8.0
```

Поиск экстремума с исиользоваиием фуикции solve () библиотеки sympy

Для поиска экстремума с использованием библиотеки sympy применяем призиаки экстремума функции двух переменных.

Необходимый признак. Для того, чтобы дифференцируемая функция $f(x,y)$ имела экстремум в точке $(x_0;y_0)$, необходимо, чтобы в этой точке обращались в нуль частные производные: $f'_x(x_0,y_0) = 0$, $f'_y(x_0,y_0) = 0$.

Достаточный признак. Обозначим $A = f''_{xx}$, $B = f''_{xy}$, $C = f''_{yy}$, $\Delta = AC - B^2$.

Функция $f(x,y)$ имеет экстремум в критической точке $(x_0;y_0)$, если выполняется условие: $\Delta > 0$, причем, если $A > 0$, то достигается минимум, если $A < 0$, то максимум.

Если $\Delta < 0$ – экстремума в этой точке нет.

Если $\Delta = 0$ – иеобходимо дополнительное исследование.

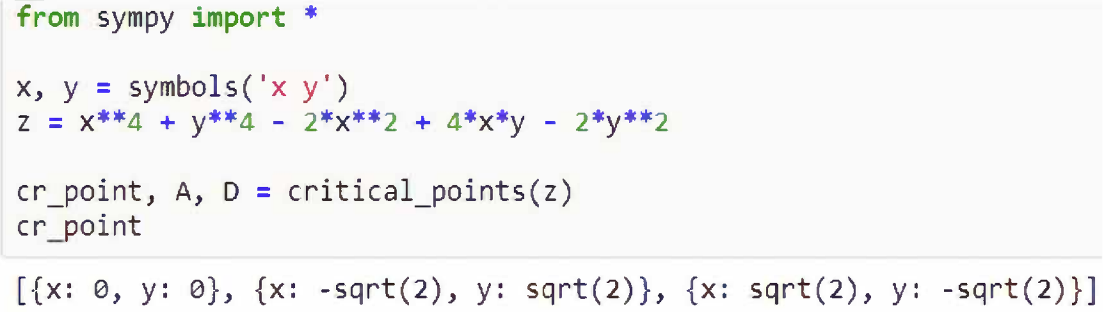
В разделе «Функции в Python», с. 24 приведен текст функции critical_points(), которая находит критические точки заданной функции двух переменных, а также выражения для величин A и Δ.

Функцня suff_indic(), также нрнведенная на с. 24 в разделе «Функции в Python» вычисляет значения признаков A н Δ в задаиной критической точке.

Рассмотрим решение нримера 27: исследовать на экстремум функцию

$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

1. Находим критические точки, используя функцию ctitical_points ():

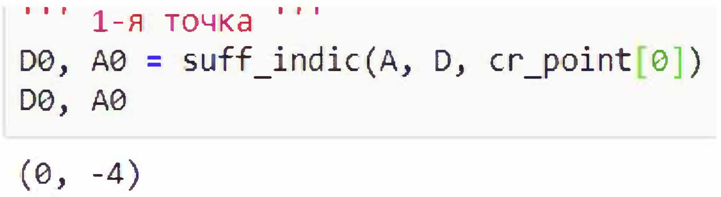


```
from sympy import *

x, y = symbols('x y')
z = x**4 + y**4 - 2*x**2 + 4*x*y - 2*y**2

cr_point, A, D = critical_points(z)
cr_point
```

```
[{x: 0, y: 0}, {x: -sqrt(2), y: sqrt(2)}, {x: sqrt(2), y: -sqrt(2)}]
```

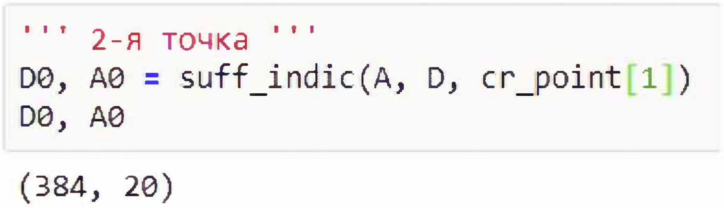
Три критические точки. Их значения возвращаются в виде кортежа словарей.

2. Для каждой крнтической точки проверяем достаточный признак экстремума, иснользуя функцию suff_indic()



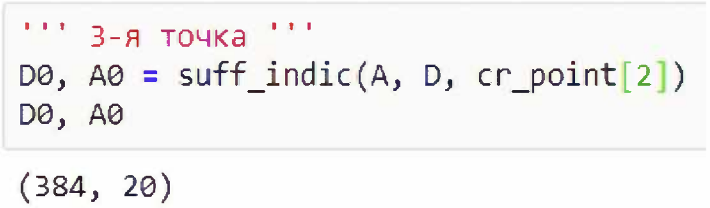
```
''' 1-я точка '''
D0, A0 = suff_indic(A, D, cr_point[0])
D0, A0
```

```
(0, -4)
```



```
''' 2-я точка '''
D0, A0 = suff_indic(A, D, cr_point[1])
D0, A0
```

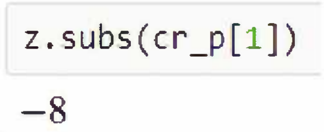
```
(384, 20)
```



```
''' 3-я точка '''
D0, A0 = suff_indic(A, D, cr_point[2])
D0, A0
```

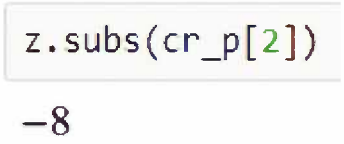
```
(384, 20)
```

Вторая и третья точка являются точками минимума ($\Delta = 384 > 0$, $A = 20 > 0$). Значения функции в этих точках:



```
z.subs(cr_p[1])
```

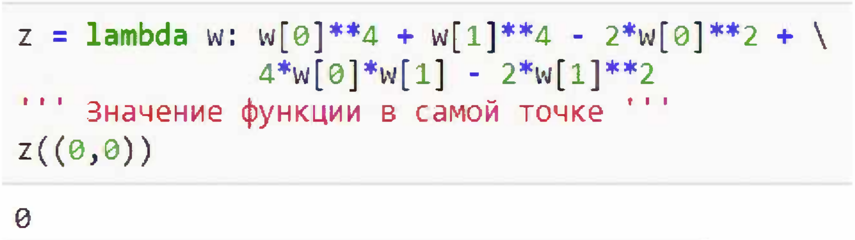
```
−8
```



```
z.subs(cr_p[2])
```

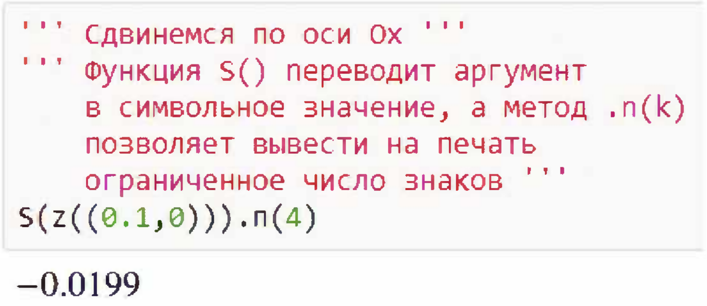
```
−8
```

В точке (0;0) значение $\Delta = 0$. По графику функции можно заключить, что это седловая точка. Проверим это аналитически, вычислив значения функции в близких к началу координат точках.



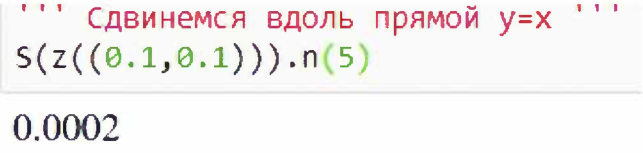
```
z = lambda w: w[0]**4 + w[1]**4 - 2*w[0]**2 + \
              4*w[0]*w[1] - 2*w[1]**2
''' Значение функции в самой точке '''
z((0,0))
```

```
0
```



```
''' Сдвинемся по оси Ox '''
''' Функция S() переводит аргумент
    в символьное значение, а метод .n(k)
    позволяет вывести на печать
    ограниченное число знаков '''
S(z((0.1,0))).n(4)
```

```
−0.0199
```



```
''' Сдвинемся вдоль прямой y=x '''
S(z((0.1,0.1))).n(5)
```

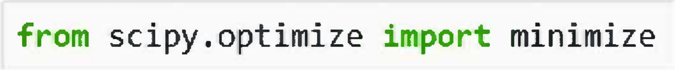
```
0.0002
```

Получены значения, и меньшие, и большие, чем значение в исследуемой точке, следовательно, она не является точкой экстремума.

Ответ: $z_{min} = z\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = z\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -8$.

Условный экстремум

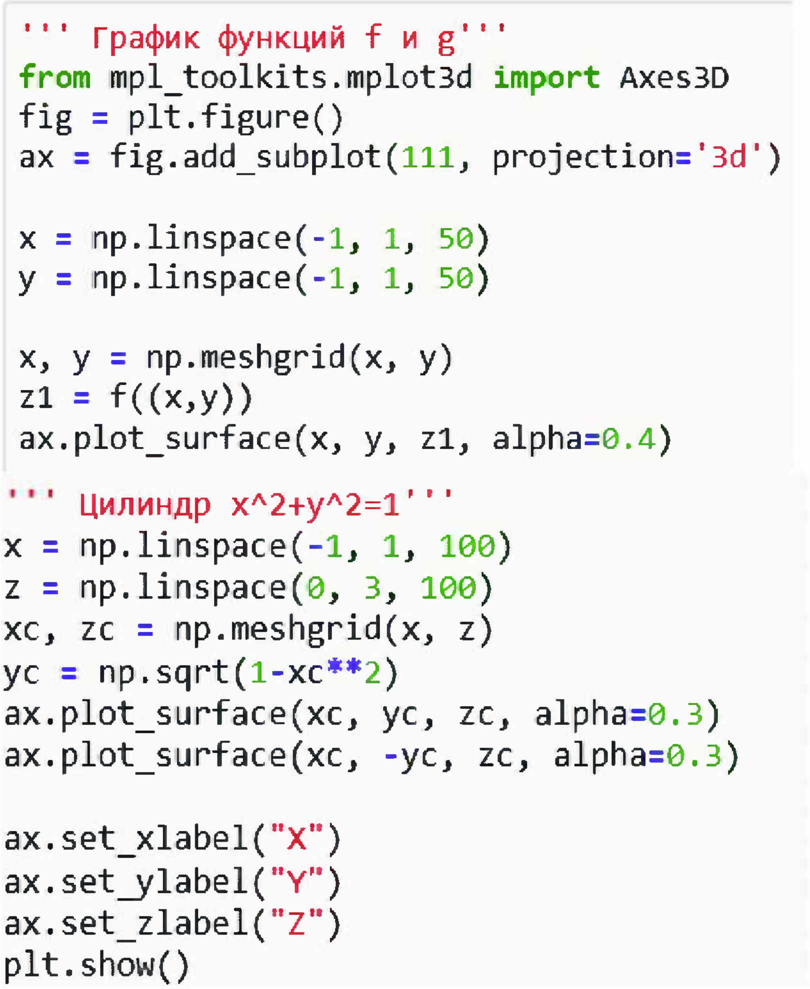
I. Поиск экстремума с использованием функции minimize () библиотеки scipy.



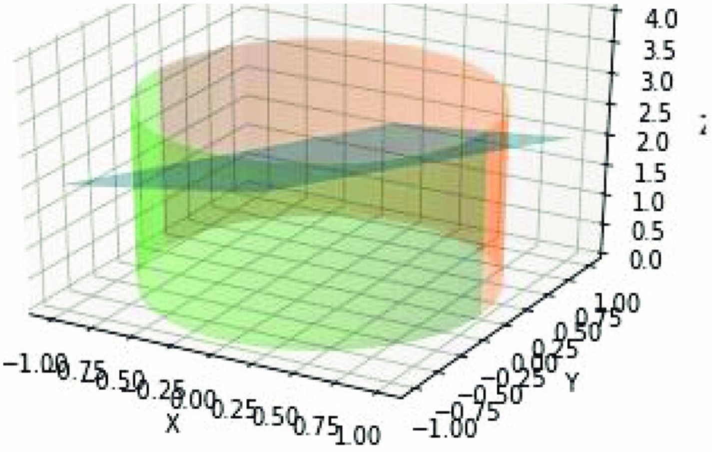
```
from scipy.optimize import minimize
```

Пример 28. Пайти экстремумы функции $z = x - y + 2$ при ограничении: $x^2 + y^2 = 1$.

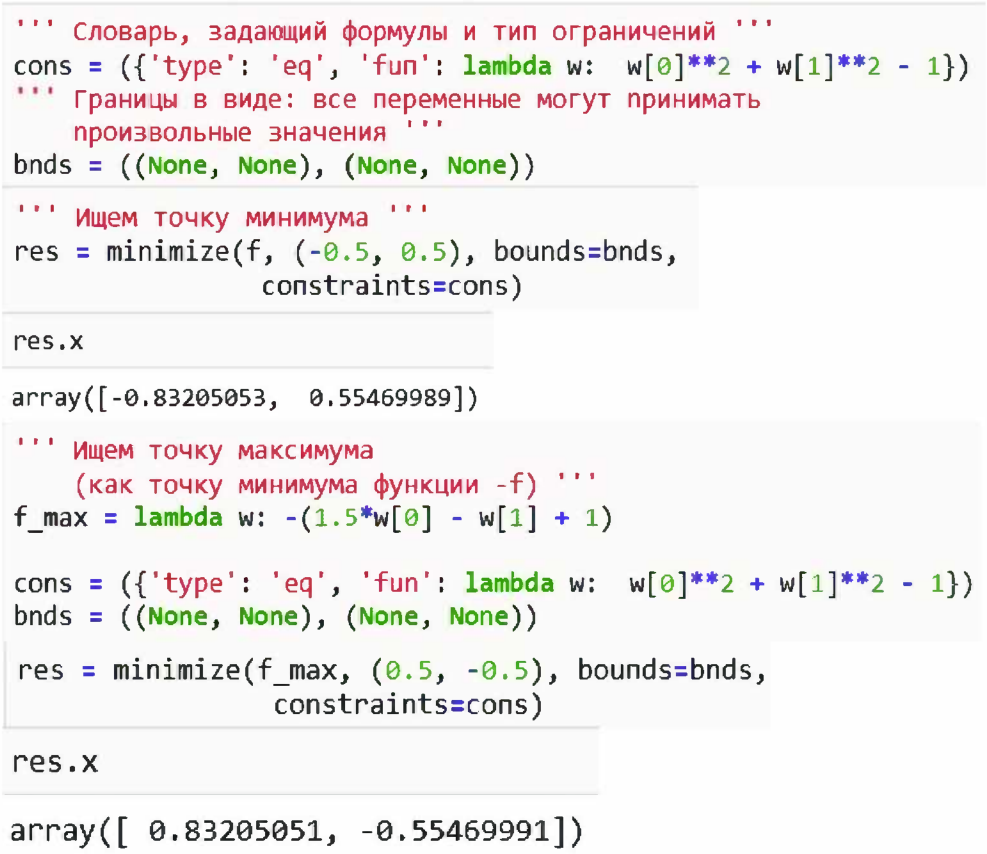
```
f = lambda w: w[0] - w[1] + 2
```



```
''' График функций f и g'''
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

x = np.linspace(-1, 1, 50)
y = np.linspace(-1, 1, 50)

x, y = np.meshgrid(x, y)
z1 = f((x,y))
ax.plot_surface(x, y, z1, alpha=0.4)
''' Цилиндр x^2+y^2=1'''
x = np.linspace(-1, 1, 100)
z = np.linspace(0, 3, 100)
xc, zc = np.meshgrid(x, z)
yc = np.sqrt(1-xc**2)
ax.plot_surface(xc, yc, zc, alpha=0.3)
ax.plot_surface(xc, -yc, zc, alpha=0.3)

ax.set_xlabel("X")
ax.set_ylabel("Y")
ax.set_zlabel("Z")
plt.show()
```



Из графика заключаем: минимум, ориентировочно, точка $(-0{,}5; 0{,}5)$, максимум – ориентировочно, точка $(0{,}5; -0{,}5)$.



```
''' Словарь, задающий формулы и тип ограничений '''
cons = ({'type': 'eq', 'fun': lambda w:  w[0]**2 + w[1]**2 - 1})
''' Границы в виде: все переменные могут принимать
    произвольные значения '''
bnds = ((None, None), (None, None))
```

```
''' Ищем точку минимума '''
res = minimize(f, (-0.5, 0.5), bounds=bnds,
                constraints=cons)
```

```
res.x
```

```
array([-0.83205053,  0.55469989])
```

```
''' Ищем точку максимума
    (как точку минимума функции -f) '''
f_max = lambda w: -(1.5*w[0] - w[1] + 1)

cons = ({'type': 'eq', 'fun': lambda w:  w[0]**2 + w[1]**2 - 1})
bnds = ((None, None), (None, None))
```

```
res = minimize(f_max, (0.5, -0.5), bounds=bnds,
                constraints=cons)
```

```
res.x
```

```
array([ 0.83205051, -0.55469991])
```

II. Поиск экстремума с использованием функции solve () библиотеки sympy.

Для поиска экстремума с использованием библиотеки sympy применяем признак условного экстремума функции двух переменных.

Пусть необходимо исследовать на экстремум функцию $f(x, y)$ при выполнении условия $g(x, y) = 0$. Введем обозначения:

функция Лагранжа: $L(x,y) = f + \lambda g(x,y)$, ($\lambda$ – множитель Лагранжа);

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix}.$$

Необходимый признак. Для того, чтобы функция $f(x,y)$ достигала экстремума в некоторой точке $(x_0;y_0)$, такой, что $g(x_0;y_0) = 0$, необходимо, чтобы в этой точке обращались в нуль частные производные L'_x, L'_y, L'_λ:

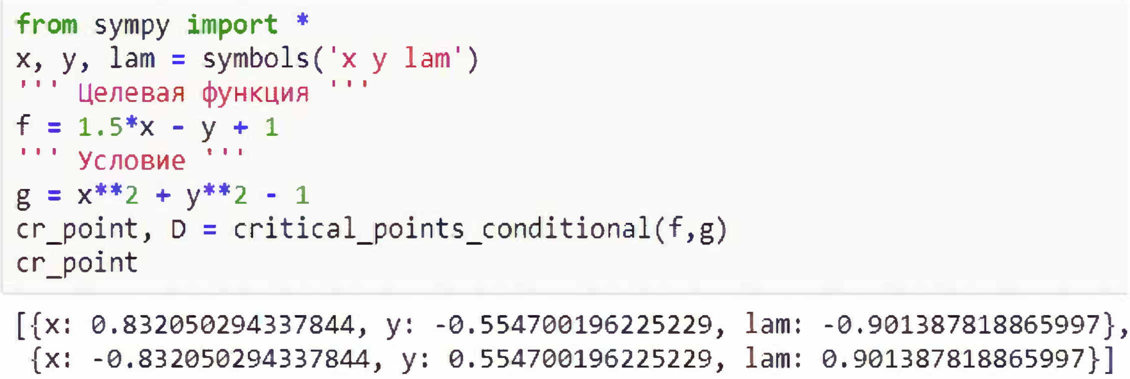
$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0. \end{cases}$$

Достаточный признак. Функция $f(x,y)$ достигает минимума в критической точке $(x_0;y_0)$, такой, что $g(x_0;y_0) = 0$, если выполняется условие: $\Delta > 0$, и максимума, если $\Delta < 0$.

Если $\Delta = 0$ – иеобходимо дополиительное исследоваиие.

В разделе «Функции в Python», с. 24 приведен текст функции critical_points_conditional() которая находит критические точки функции Лагранжа и также выражение для определителя Δ.

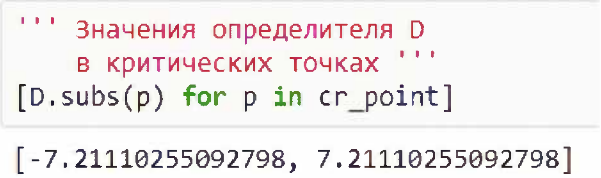
Рассмотрим иредыдущий *пример*: пайти экстремумы фуикции $z = x - y + 2$ при огрaпичении: $x^2 + y^2 = 1$.



```
from sympy import *
x, y, lam = symbols('x y lam')
''' Целевая функция '''
f = 1.5*x - y + 1
''' Условие '''
g = x**2 + y**2 - 1
cr_point, D = critical_points_conditional(f,g)
cr_point
```

```
[{x: 0.832050294337844, y: -0.554700196225229, lam: -0.901387818865997},
 {x: -0.832050294337844, y: 0.554700196225229, lam: 0.901387818865997}]
```

Две критические точки. Найдем значения определителя Δ в этих точках:

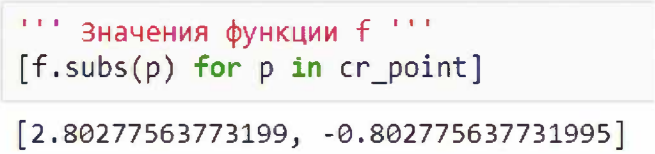


```
''' Значения определителя D
    в критических точках '''
[D.subs(p) for p in cr_point]
```

```
[-7.21110255092798, 7.21110255092798]
```

В первой точке – максимум ($\Delta < 0$), во второй – мипимум ($\Delta > 0$).

Значения функции в точках экстремума:



```
''' Значения функции f '''
[f.subs(p) for p in cr_point]
```

```
[2.80277563773199, -0.802775637731995]
```

Ответ: $z_{min} = z(-0{,}832;\ 0{,}555) = -0{,}803$;
$z_{max} = z(0{,}832; -0{,}555) = 2{,}803$.

Применение производной в экономике

1. Пусть $C = C(Q)$ – себестоимость продукции в зависимости от объема произведенной продукции Q. Предельная себестоимость MC (себестоимость прироста продукции) вычисляется по формуле: $MC = C'(Q)$.

2. Пусть $D = D(P)$ – функция спроса в зависимости от цены товара *P*. Эластичность спроса (относительное изменение спроса при изменении цены товара на один процент) вычисляется по формуле

$$E(D) = P \cdot \frac{D'(P)}{D(P)}.$$

Эластичность предложения (относительное изменение предложения при изменении цены товара на один процент) вычисляется по формуле

$$E(S) = P \cdot \frac{S'(P)}{S(P)}.$$

Эластичность себестоимости (относительное изменение себестоимости при изменении объема выпускаемой продукции на один процент) вычисляется по формуле

$$E(C) = P \cdot \frac{C'(Q)}{C(Q)}.$$

Если $|E(D)| > 1$, то спрос считается эластичным;

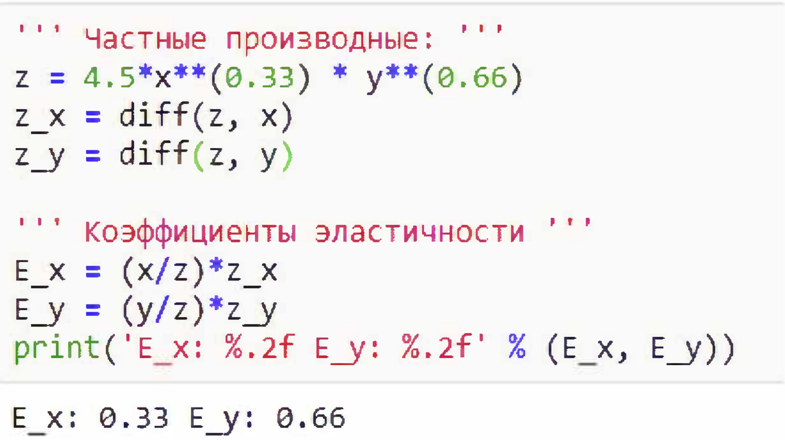
если $|E(D)| = 1$, то спрос нейтрален;

если $|E(D)| < 1$, то спрос неэластичен.

Закон убывающей эффективности производства утверждает, что при увеличении одного из основных факторов производства, например, капитальных затрат *K*, прирост производства начиная с некоторого значения K_0 является убывающей функцией. Точка K_0 характеризуется тем, что график функции $V(K)$, описывающей зависимость объема продукции *V* от *K* меняет выпуклость вниз на выпуклость вверх. Это означает, что точка K_0 является точкой перегиба графика функции.

Пример 29. Определить коэффициенты эластичиости ироизводственией фуикции Кобба–Дугласа $z = 4{,}5x^{0{,}33}y^{0{,}66}$.

Решение.

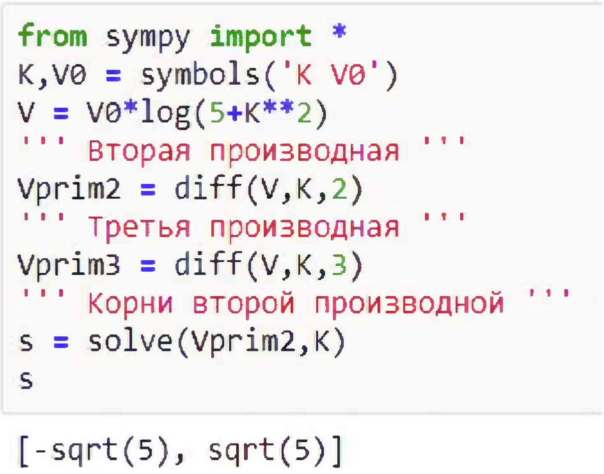


```
''' Частные производные: '''
z = 4.5*x**(0.33) * y**(0.66)
z_x = diff(z, x)
z_y = diff(z, y)

''' Коэффициенты эластичности '''
E_x = (x/z)*z_x
E_y = (y/z)*z_y
print('E_x: %.2f E_y: %.2f' % (E_x, E_y))
```

```
E_x: 0.33 E_y: 0.66
```

Пример 30. Зависимость объема выпуска продукции V от капитальных затрат K определяется функцией $V = V_0\ln(5+K^2)$. Найти интервал изменеппя K, на котором увеличение капитальных затрат пеэффективпо.

Решение. Найдем точку перегиба функции $V(K)$. Достаточпый прпзнак точки перегиба: вторая производная функцпи в этой точке обращается в ноль, а третья производпая отличиа от нуля.

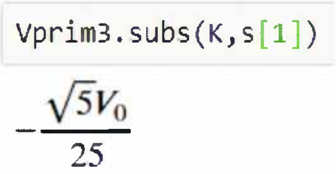


```
from sympy import *
K,V0 = symbols('K V0')
V = V0*log(5+K**2)
''' Вторая производная '''
Vprim2 = diff(V,K,2)
''' Третья производная '''
Vprim3 = diff(V,K,3)
''' Корни второй производной '''
s = solve(Vprim2,K)
s
```

```
[-sqrt(5), sqrt(5)]
```

Подходит положительный корень $K_0 = s[1] = \sqrt{5}$.

Значеиие третьей производной в этой точке:



```
Vprim3.subs(K,s[1])
```

$$-\frac{\sqrt{5}V_0}{25}$$

Третья производная отлична от нуля. Причем ее отрицательный знак означает, что вторая производная в точке K_0 убывает, то есть меняет знак с «+» на «–». А это, в свою очередь, означает, что слева от точки K_0 функция $V(K)$ выпукла вниз, справа – выпукла вверх.

Ответ: Увеличение капитальных затрат неэффективно при значениях $K > \sqrt{5}$.

Примеры решения задач

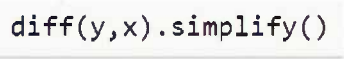
```
from sympy import *
```

1. Вычислить y' для функции $y = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$.

Решение.

```
x = symbols('x')
y = x*(cos(log(x))+sin(log(x)))
diff(y,x)
```

$$x\left(-\frac{\sin(\log(x))}{x} + \frac{\cos(\log(x))}{x}\right) + \sin(\log(x)) + \cos(\log(x))$$

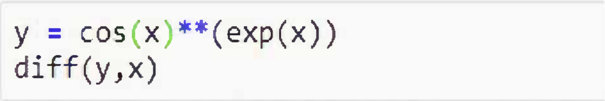


```
diff(y,x).simplify()
```

$$2\cos(\log(x))$$

2. Вычислить y' для функции $y = (\cos x)^{e^x}$.

Решение.



```
y = cos(x)**(exp(x))
diff(y,x)
```

$$\left(e^x \log(\cos(x)) - \frac{e^x \sin(x)}{\cos(x)}\right)\cos^{e^x}(x)$$

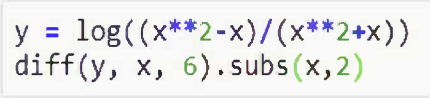
```
diff(y,x).simplify()
```

$$(\log(\cos(x))\cos(x) - \sin(x))\,e^x \cos^{e^x-1}(x)$$

3. Найти значение шестой производной $y^{(6)}(2)$ от функции

$$y = \ln\left(\frac{x^2-x}{x+x^2}\right) \text{ в точке } x = 2.$$

Решение.



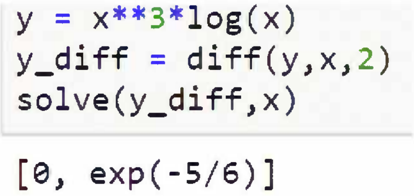
```
y = log((x**2-x)/(x**2+x))
diff(y, x, 6).subs(x,2)
```

$$-\frac{29120}{243}$$

4. Решить уравнение $y''(x) = 0$, где $y = x^3 \ln x$.

Решение.

Находим вторую производную и ищем ее корни.



```
y = x**3*log(x)
y_diff = diff(y,x,2)
solve(y_diff,x)
```

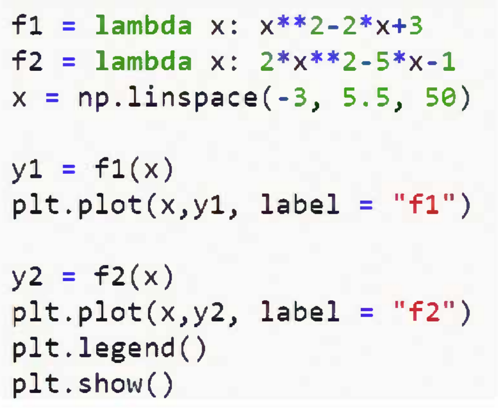
```
[0, exp(-5/6)]
```

Ответ: 0; $e^{-\frac{5}{6}}$.

5. Решить уравнение $y'(x) = 0$, где

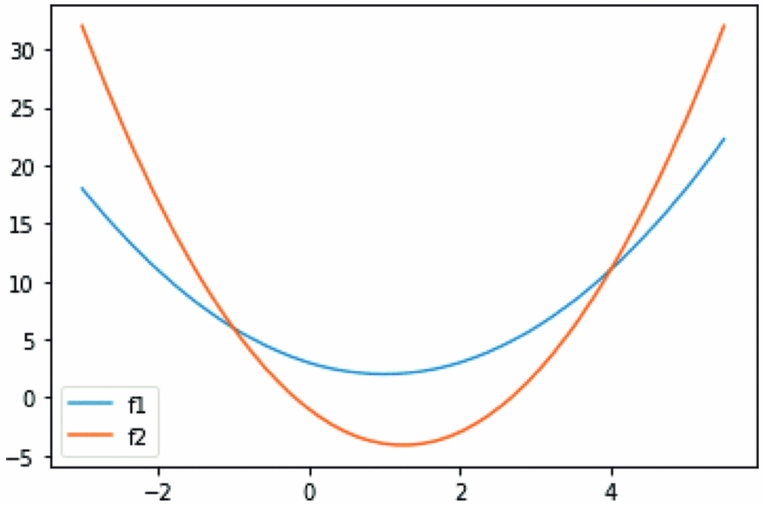
$$y(x) = \max\{x^2 - 2x + 3;\ 2x^2 - 5x - 1\}.$$

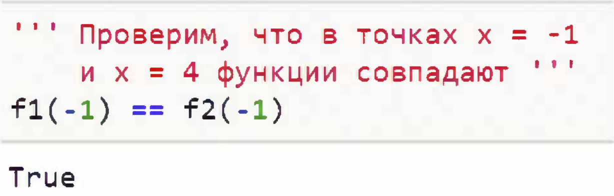
Решение. Для определення, на какнх участках, одна из функций больше другой, используем график.



```
f1 = lambda x: x**2-2*x+3
f2 = lambda x: 2*x**2-5*x-1
x = np.linspace(-3, 5.5, 50)

y1 = f1(x)
plt.plot(x,y1, label = "f1")

y2 = f2(x)
plt.plot(x,y2, label = "f2")
plt.legend()
plt.show()
```

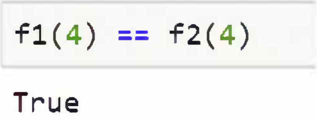
к





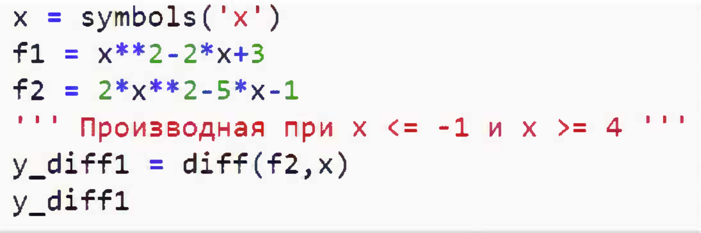
```
''' Проверим, что в точках x = -1
    и x = 4 функции совпадают '''
f1(-1) == f2(-1)
```

```
True
```



```
f1(4) == f2(4)
```

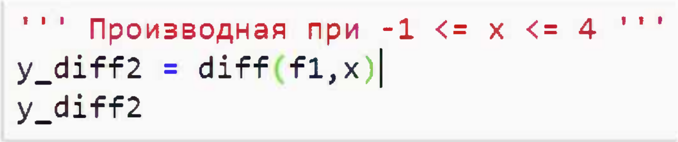
```
True
```



```
x = symbols('x')
f1 = x**2-2*x+3
f2 = 2*x**2-5*x-1
''' Производная при x <= -1 и x >= 4 '''
y_diff1 = diff(f2,x)
y_diff1
```

$$4x-5$$

Решение уравнения $4x-5=0$ ($x=1{,}25$) не принадлежит интервалам $(-\infty;-1)$ и $(4;\infty)$.



```
''' Производная при -1 <= x <= 4 '''
y_diff2 = diff(f1,x)
y_diff2
```

$$2x-2$$

Решение уравнения $2x-2=0$ $(x=1)$ принадлежит отрезку $[-1;4]$.

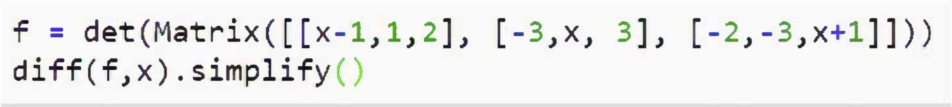
Ответ: 1.

6. Найти $f'(x)$, если

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Формируем матрицу, вычисляем онределитель, затем производную:

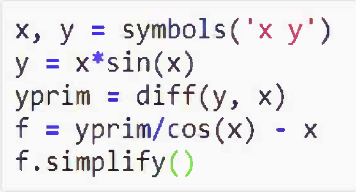


```
f = det(Matrix([[x-1,1,2], [-3,x, 3], [-2,-3,x+1]]))
diff(f,x).simplify()
```

$$3x^2+15$$

7. Показать, что функцня $y=x\cdot\sin x$ удовлетворяет уравнению $\frac{y'}{\cos x}-x=\operatorname{tg}x$.

Решение. Найдем выраженне для функции, стоящей в левой части уравнеиия:



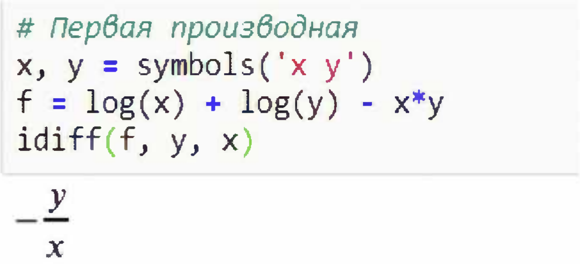
```
x, y = symbols('x y')
y = x*sin(x)
yprim = diff(y, x)
f = yprim/cos(x) - x
f.simplify()
```

$$\tan(x)$$

Оно совпадает с функцией $\operatorname{tg}x$.

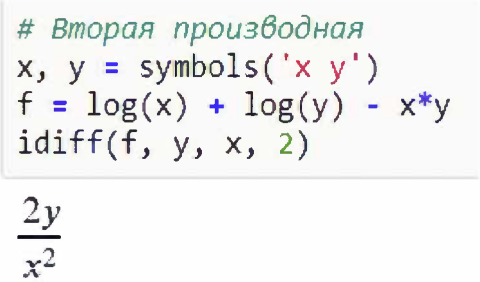
8. Найти y' и y'' для функции, задиной неявно: $\ln x + \ln y = xy$.

Решение.



```
# Первая производная
x, y = symbols('x y')
f = log(x) + log(y) - x*y
idiff(f, y, x)
```

$$-\frac{y}{x}$$



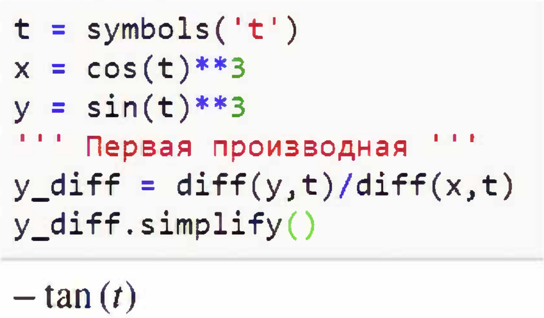
```
# Вторая производная
x, y = symbols('x y')
f = log(x) + log(y) - x*y
idiff(f, y, x, 2)
```

$$\frac{2y}{x^2}$$

9. Найти y'_x и y''_{xx} для функции, задиной в параметрической форме:

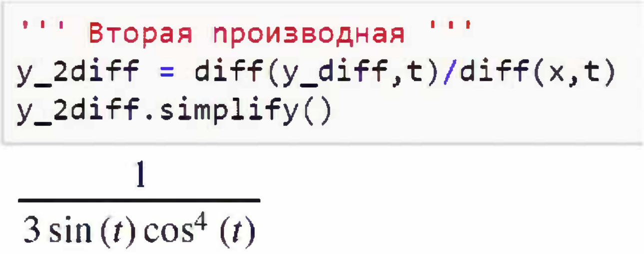
$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

Решение.



```
t = symbols('t')
x = cos(t)**3
y = sin(t)**3
''' Первая производная '''
y_diff = diff(y,t)/diff(x,t)
y_diff.simplify()
```

$$-\tan(t)$$



```
''' Вторая производная '''
y_2diff = diff(y_diff,t)/diff(x,t)
y_2diff.simplify()
```

$$\frac{1}{3\sin(t)\cos^4(t)}$$

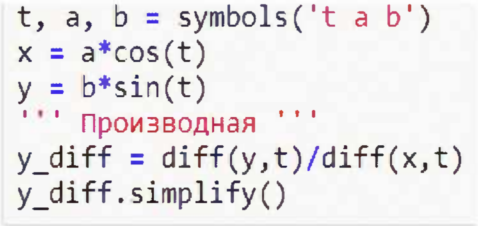
Ответ: $y'_x = -\mathrm{tg}t$; $y''_{xx} = \frac{1}{3\sin t\cos^4 t}$.

10. Найти y'_x для функции, заданной в иараметрической форме:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$$

(a и b – некоторые константы).

Решение.



```
t, a, b = symbols('t a b')
x = a*cos(t)
y = b*sin(t)
''' Производная '''
y_diff = diff(y,t)/diff(x,t)
y_diff.simplify()
```

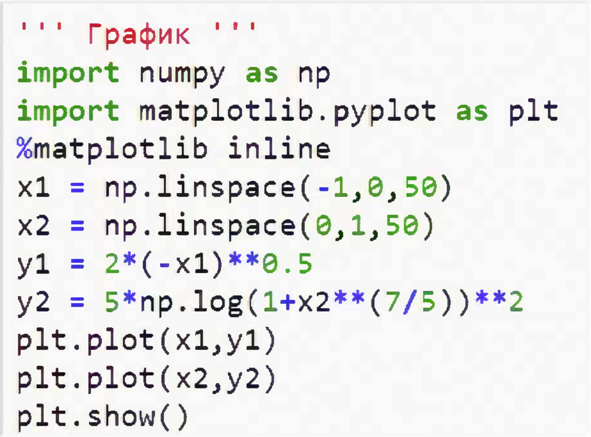
$$-\frac{b}{a\tan(t)}$$

Ответ: $y'_x = -\frac{b}{atgt} = -\frac{b}{a}\text{ctg}t$.

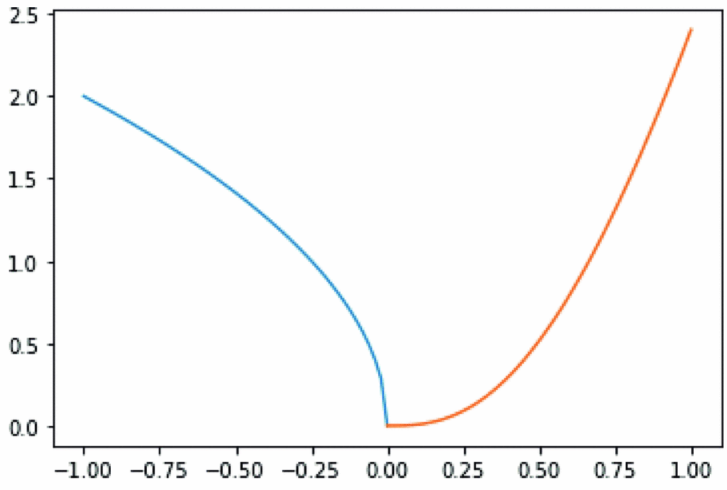
11. Найти левую и правую производные функции $f(x)$ в точке $x = 0$, если

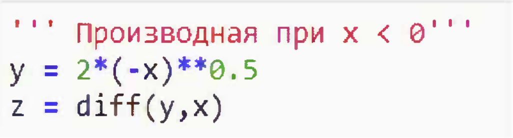
$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-x}, & x < 0, \\ 5\ln^2\left(1 + \sqrt[5]{x^7}\right), & x = 0. \end{cases}$$

Решение.

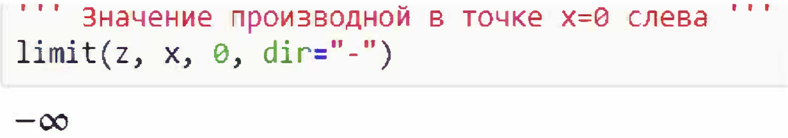


```
''' График '''
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
x1 = np.linspace(-1,0,50)
x2 = np.linspace(0,1,50)
y1 = 2*(-x1)**0.5
y2 = 5*np.log(1+x2**(7/5))**2
plt.plot(x1,y1)
plt.plot(x2,y2)
plt.show()
```



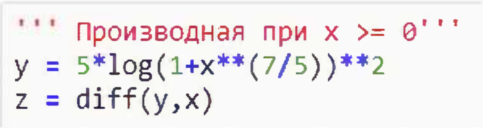


```
''' Производная при x < 0'''
y = 2*(-x)**0.5
z = diff(y,x)
```

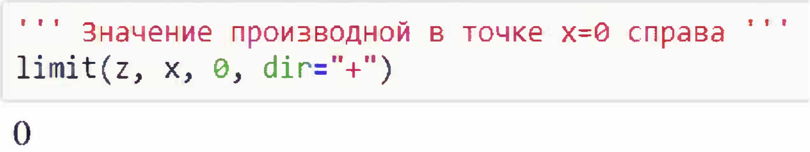


```
''' Значение производной в точке x=0 слева '''
limit(z, x, 0, dir="-")
```

$-\infty$



```
''' Производная при x >= 0'''
y = 5*log(1+x**(7/5))**2
z = diff(y,x)
```



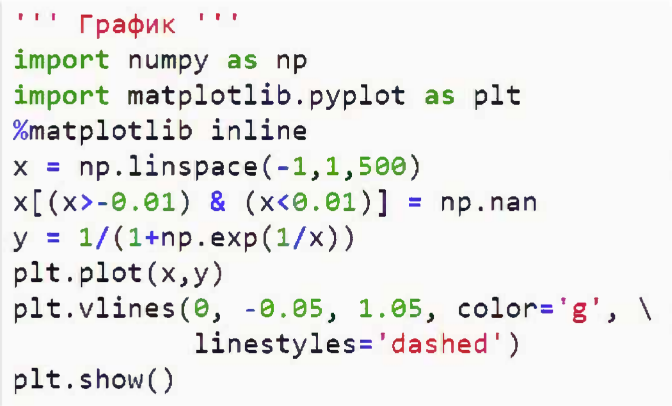
```
''' Значение производной в точке x=0 справа '''
limit(z, x, 0, dir="+")
```

0

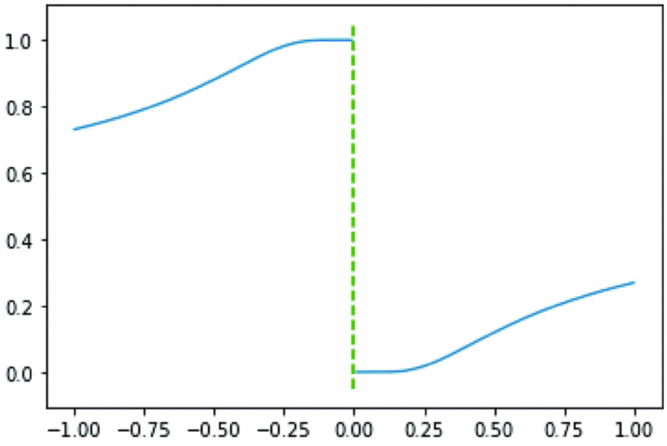
12. Найти левую и правую производные функции $f(x)$ в точке ее разрыва, если

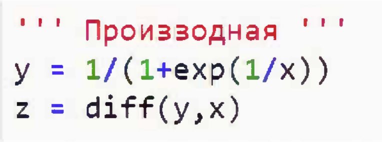
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{если } x<0,\\ 0, & \text{если } x\ge 0.\end{cases}$$

Решение.

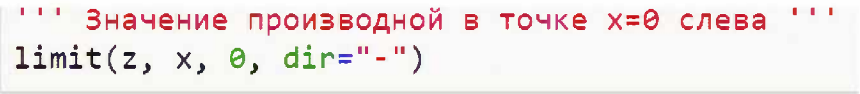


```
''' График '''
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
x = np.linspace(-1,1,500)
x[(x>-0.01) & (x<0.01)] = np.nan
y = 1/(1+np.exp(1/x))
plt.plot(x,y)
plt.vlines(0, -0.05, 1.05, color='g', \
           linestyles='dashed')
plt.show()
```



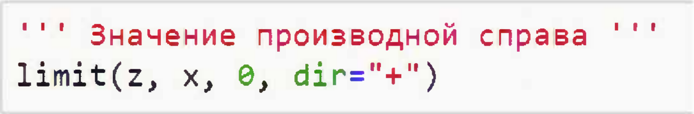


```
''' Производная '''
y = 1/(1+exp(1/x))
z = diff(y,x)
```



```
''' Значение производной в точке x=0 слева '''
limit(z, x, 0, dir="-")
```

0



```
''' Значение производной справа '''
limit(z, x, 0, dir="+")
```

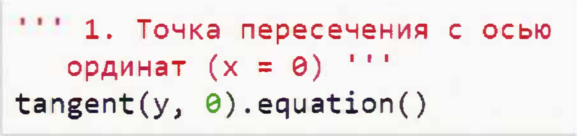
0

13. Написать уравнения касательных к графику функции $y = (x^2 + 1)(x - 2)$ в точках ее пересечения с осями координат.

Решение. В данной задаче для поиска точек пересечения с осями координат придется решать уравнение $y = 0$. При этом, среди корней, возвращаемых функцией solve(), могут быть комплексные. Для нашей задачи такие корни являются посторонними. Чтобы функция не выдавала комплексные корни, объявим символьную переменную действительного типа (параметр: real = True).

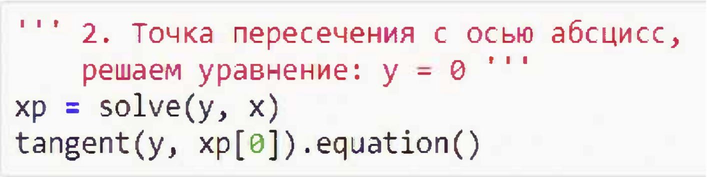
```
x = symbols('x', real=True)
y = (x**2 + 1)*(x - 2)
```

Уравнение касательной найдем с использованием функции tangent() (текст функции на с. 20).



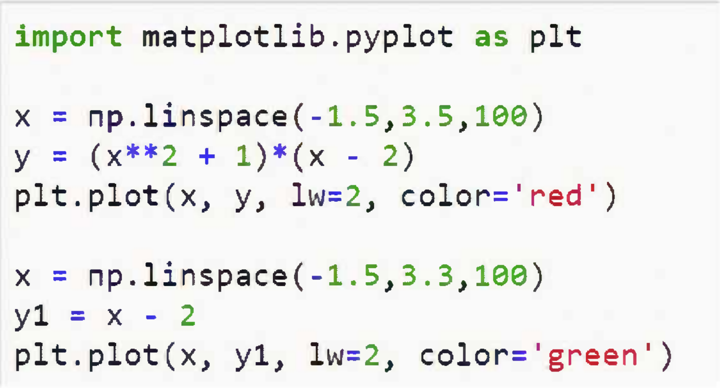
```
''' 1. Точка пересечения с осью
   ординат (x = 0) '''
tangent(y, 0).equation()
```

$-x + y + 2$

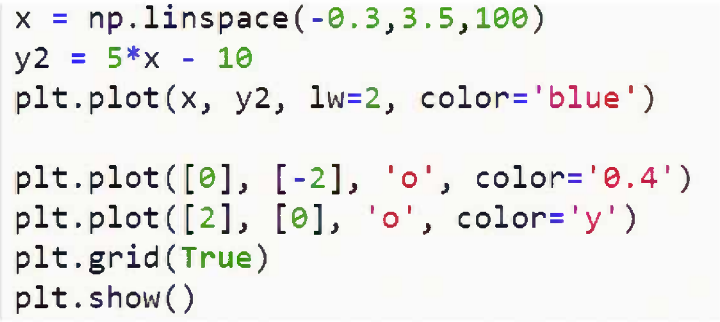


```
''' 2. Точка пересечения с осью абсцисс,
    решаем уравнение: y = 0 '''
xp = solve(y, x)
tangent(y, xp[0]).equation()
```

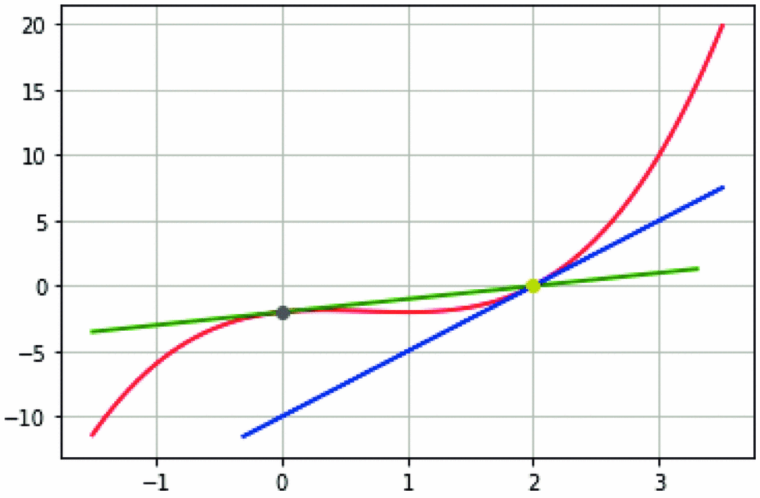
$-5x + y + 10$



```
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-1.5,3.5,100)
y = (x**2 + 1)*(x - 2)
plt.plot(x, y, lw=2, color='red')

x = np.linspace(-1.5,3.3,100)
y1 = x - 2
plt.plot(x, y1, lw=2, color='green')
```



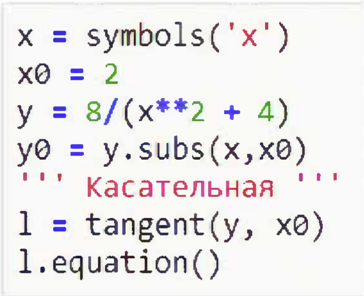
```
x = np.linspace(-0.3,3.5,100)
y2 = 5*x - 10
plt.plot(x, y2, lw=2, color='blue')

plt.plot([0], [-2], 'o', color='0.4')
plt.plot([2], [0], 'o', color='y')
plt.grid(True)
plt.show()
```



Ответ: $y = x - 2$; $y = 5x - 10$.

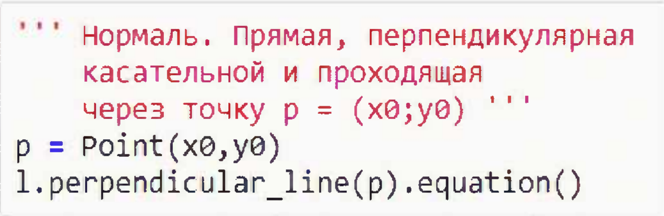
14. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \frac{8}{x^2+4}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение.



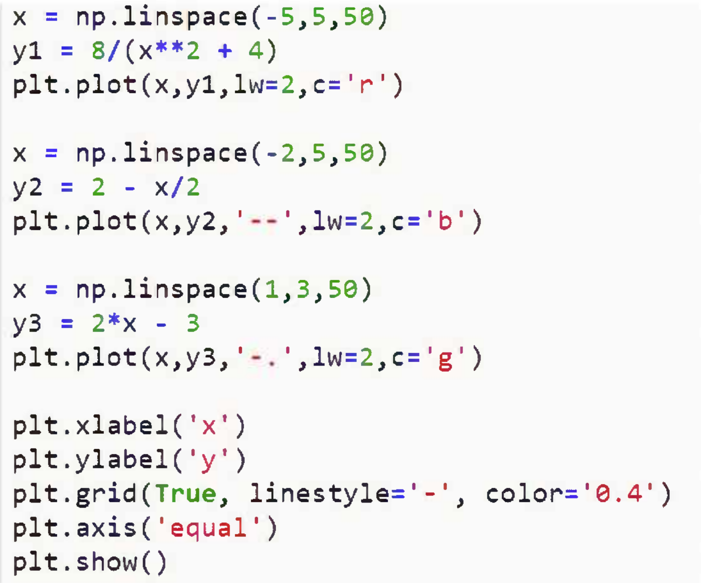
```
x = symbols('x')
x0 = 2
y = 8/(x**2 + 4)
y0 = y.subs(x,x0)
''' Касательная '''
l = tangent(y, x0)
l.equation()
```

$$\frac{x}{2} + y - 2$$

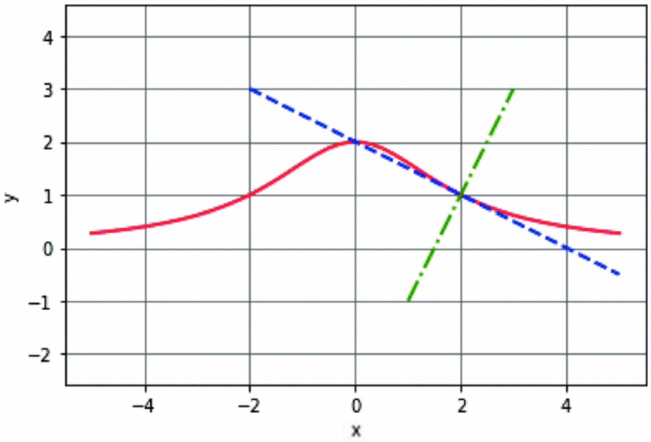


```
''' Нормаль. Прямая, перпендикулярная
    касательной и проходящая
    через точку p = (x0;y0) '''
p = Point(x0,y0)
l.perpendicular_line(p).equation()
```

$$-x + \frac{y}{2} + \frac{3}{2}$$



```
x = np.linspace(-5,5,50)
y1 = 8/(x**2 + 4)
plt.plot(x,y1,lw=2,c='r')

x = np.linspace(-2,5,50)
y2 = 2 - x/2
plt.plot(x,y2,'--',lw=2,c='b')

x = np.linspace(1,3,50)
y3 = 2*x - 3
plt.plot(x,y3,'-.',lw=2,c='g')

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.axis('equal')
plt.show()
```

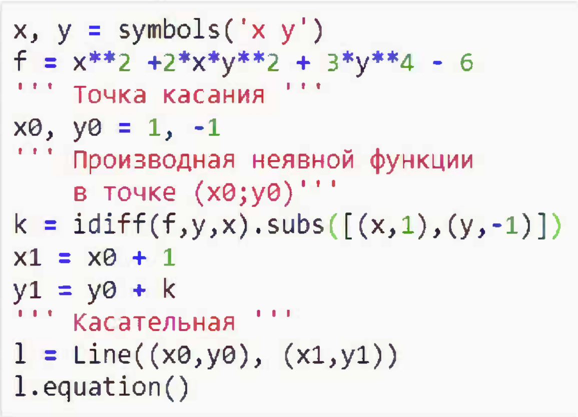


Ответ: $y = 2 - \frac{x}{2}$; $y = 2x - 3$.

15. Составить уравнение касательиой и нормали к кривой в точке $M(1;-1)$.

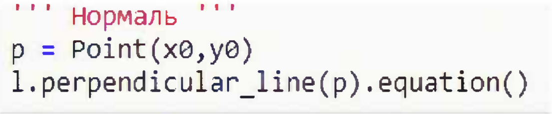
$$x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6.$$

Решение.



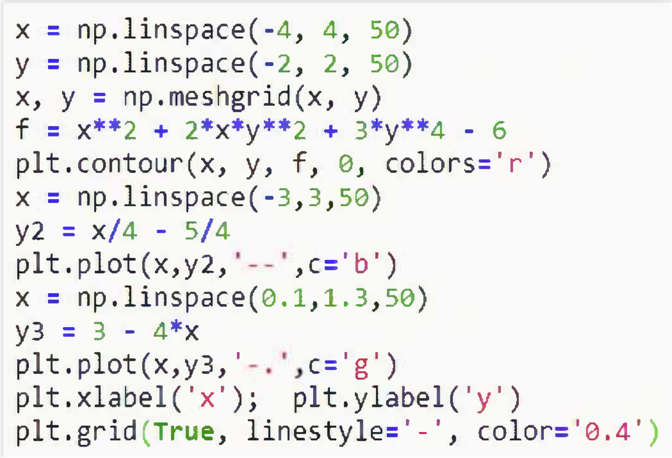
```
x, y = symbols('x y')
f = x**2 +2*x*y**2 + 3*y**4 - 6
''' Точка касания '''
x0, y0 = 1, -1
''' Производная неявной функции
    в точке (x0;y0)'''
k = idiff(f,y,x).subs([(x,1),(y,-1)])
x1 = x0 + 1
y1 = y0 + k
''' Касательная '''
l = Line((x0,y0), (x1,y1))
l.equation()
```

$$-\frac{x}{4} + y + \frac{5}{4}$$

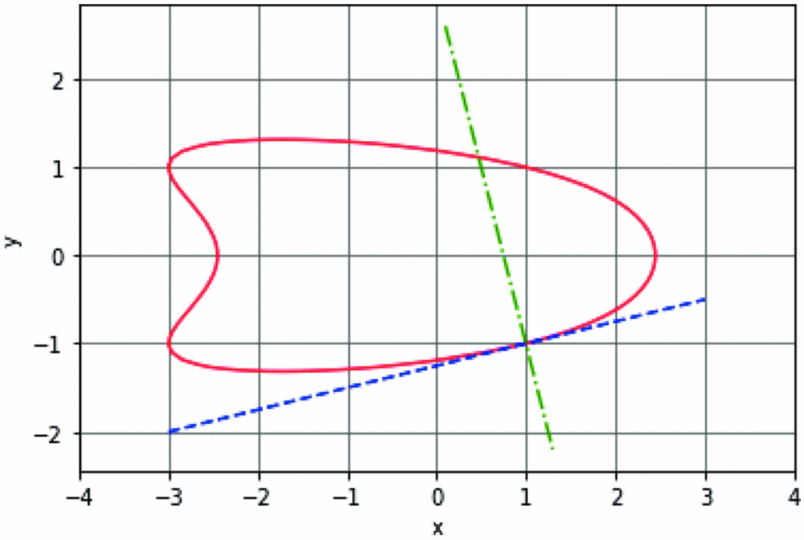


```
''' Нормаль '''
p = Point(x0,y0)
l.perpendicular_line(p).equation()
```

$$-x - \frac{y}{4} + \frac{3}{4}$$



```
x = np.linspace(-4, 4, 50)
y = np.linspace(-2, 2, 50)
x, y = np.meshgrid(x, y)
f = x**2 + 2*x*y**2 + 3*y**4 - 6
plt.contour(x, y, f, 0, colors='r')
x = np.linspace(-3,3,50)
y2 = x/4 - 5/4
plt.plot(x,y2,'--',c='b')
x = np.linspace(0.1,1.3,50)
y3 = 3 - 4*x
plt.plot(x,y3,'-.',c='g')
plt.xlabel('x');  plt.ylabel('y')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
```

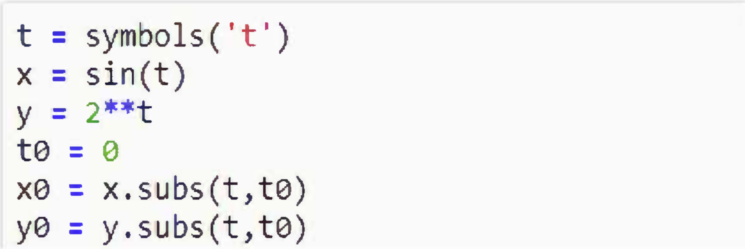


Ответ: $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$; $y = 3 - 4x$.

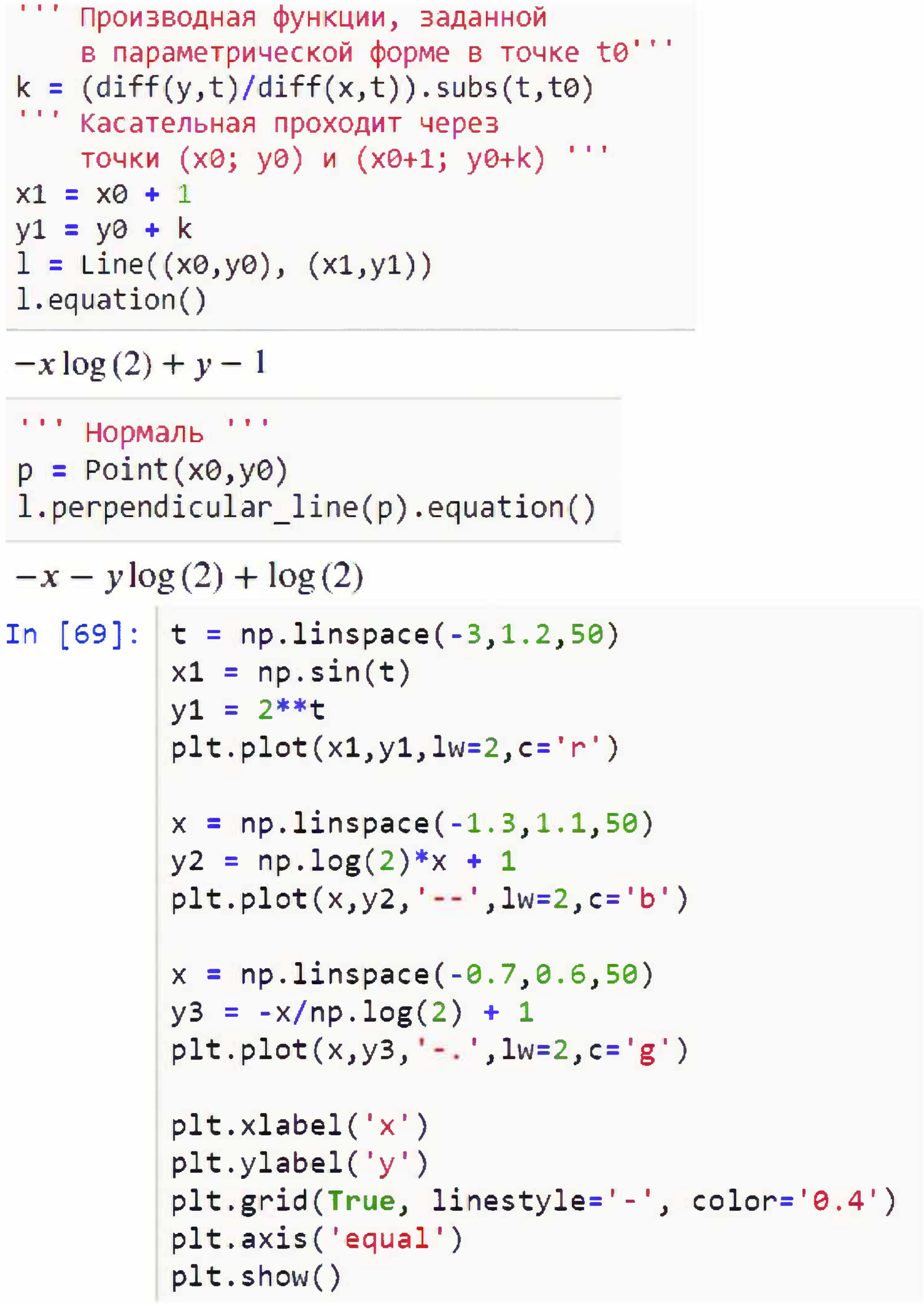
16. Составить уравнеие касательной и нормали к линии L при $t_0 = 0$.

$$L: \begin{cases} x = \sin t, \\ y = 2^t. \end{cases}$$

Решение.



```
t = symbols('t')
x = sin(t)
y = 2**t
t0 = 0
x0 = x.subs(t,t0)
y0 = y.subs(t,t0)
```



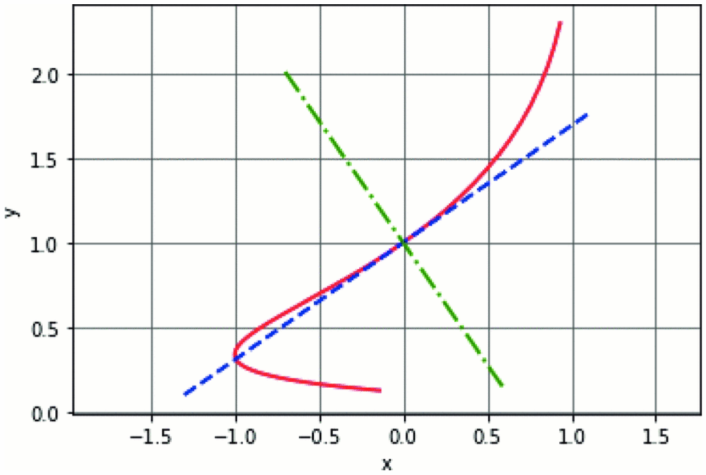
```
''' Производная функции, заданной
    в параметрической форме в точке t0'''
k = (diff(y,t)/diff(x,t)).subs(t,t0)
''' Касательная проходит через
    точки (x0; y0) и (x0+1; y0+k) '''
x1 = x0 + 1
y1 = y0 + k
l = Line((x0,y0), (x1,y1))
l.equation()
```

$$-x\log(2) + y - 1$$

```
''' Нормаль '''
p = Point(x0,y0)
l.perpendicular_line(p).equation()
```

$$-x - y\log(2) + \log(2)$$

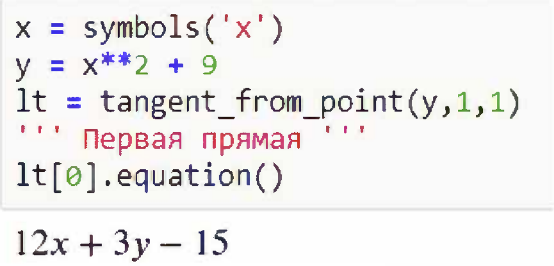
```
In [69]: t = np.linspace(-3,1.2,50)
         x1 = np.sin(t)
         y1 = 2**t
         plt.plot(x1,y1,lw=2,c='r')

         x = np.linspace(-1.3,1.1,50)
         y2 = np.log(2)*x + 1
         plt.plot(x,y2,'--',lw=2,c='b')

         x = np.linspace(-0.7,0.6,50)
         y3 = -x/np.log(2) + 1
         plt.plot(x,y3,'-.',lw=2,c='g')

         plt.xlabel('x')
         plt.ylabel('y')
         plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
         plt.axis('equal')
         plt.show()
```



Ответ: $y = x\ln 2 + 1$, $y = -\frac{x}{\ln 2} + 1$.

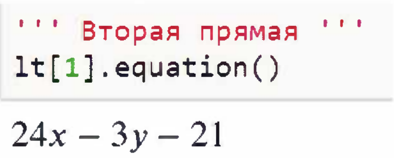
17. Из точки $(1;1)$ провести касательные к графику функции $y = x^2 + 9$.

Решение. Используем функцию tangent_from_point() (текст функции на с. 20).



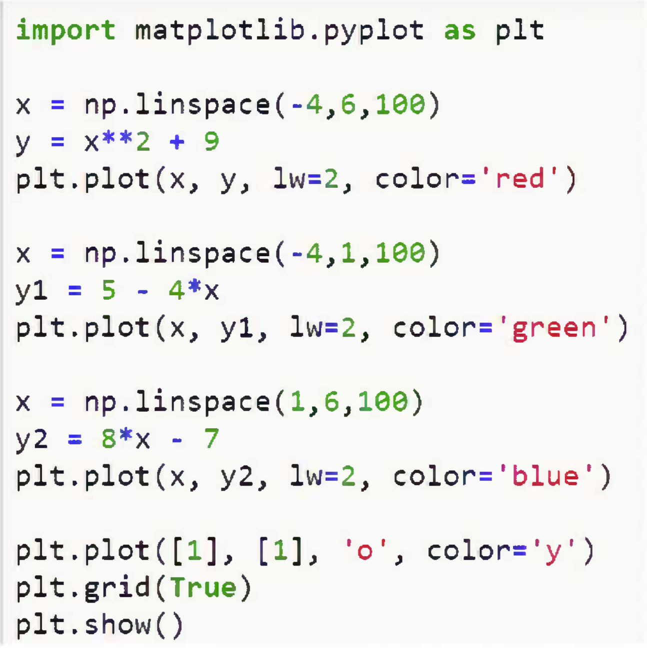
```
x = symbols('x')
y = x**2 + 9
lt = tangent_from_point(y,1,1)
''' Первая прямая '''
lt[0].equation()
```

$$12x + 3y - 15$$

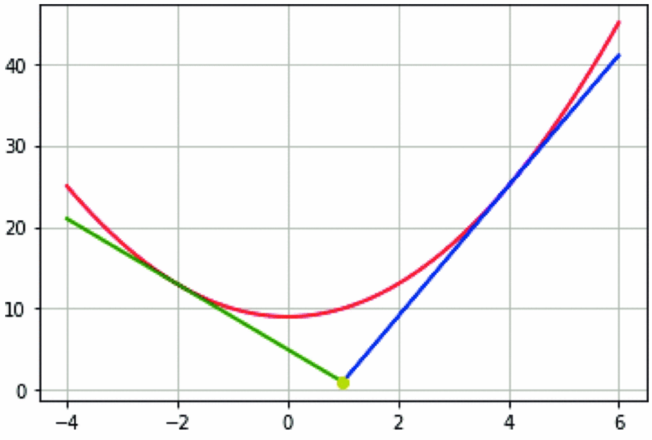


```
''' Вторая прямая '''
lt[1].equation()
```

$$24x - 3y - 21$$



```
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-4,6,100)
y = x**2 + 9
plt.plot(x, y, lw=2, color='red')

x = np.linspace(-4,1,100)
y1 = 5 - 4*x
plt.plot(x, y1, lw=2, color='green')

x = np.linspace(1,6,100)
y2 = 8*x - 7
plt.plot(x, y2, lw=2, color='blue')

plt.plot([1], [1], 'o', color='y')
plt.grid(True)
plt.show()
```



Ответ: $y = 5 - 4x$; $y = 8x - 7$.

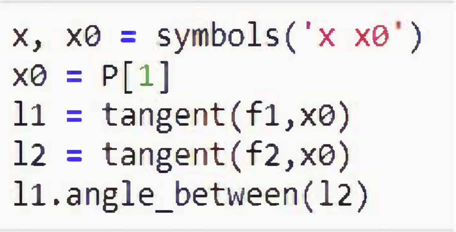
18. Определить, под каким углом пересекаются кривые в точке их пересечения с иаименьшую положительным x:

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_1(x) = \cos x.$$

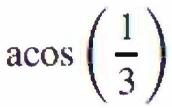
Решение. Углом между кривыми в точке их пересечеиия называется угол между касательными, проведенными к кривым в этой точке.

```
''' Находим точки пересечения '''
f1 = sin(x)
f2 = cos(x)
P = solve(f1-f2, x)
P
```

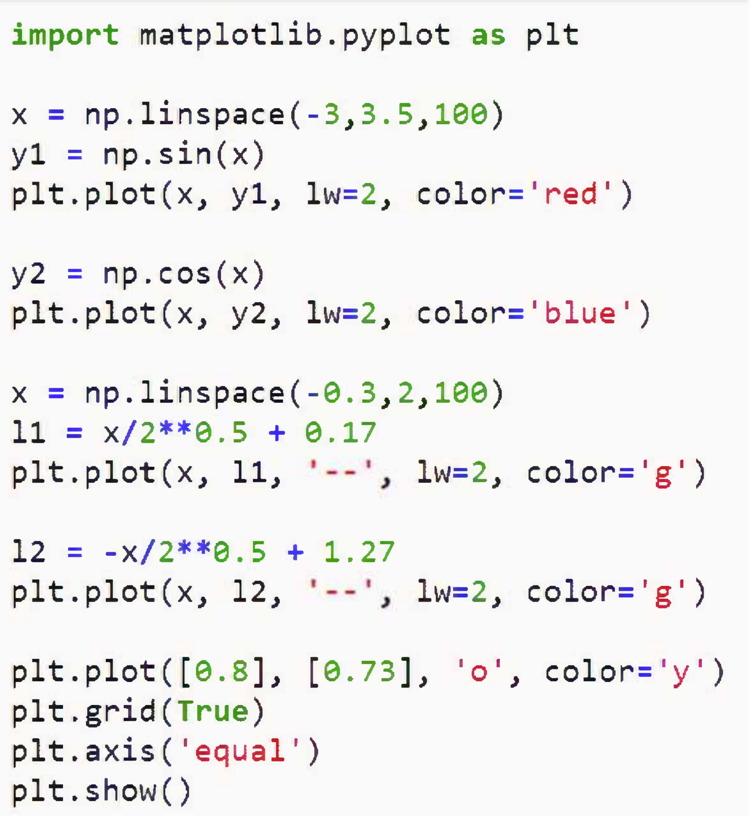
```
[-3*pi/4, pi/4]
```



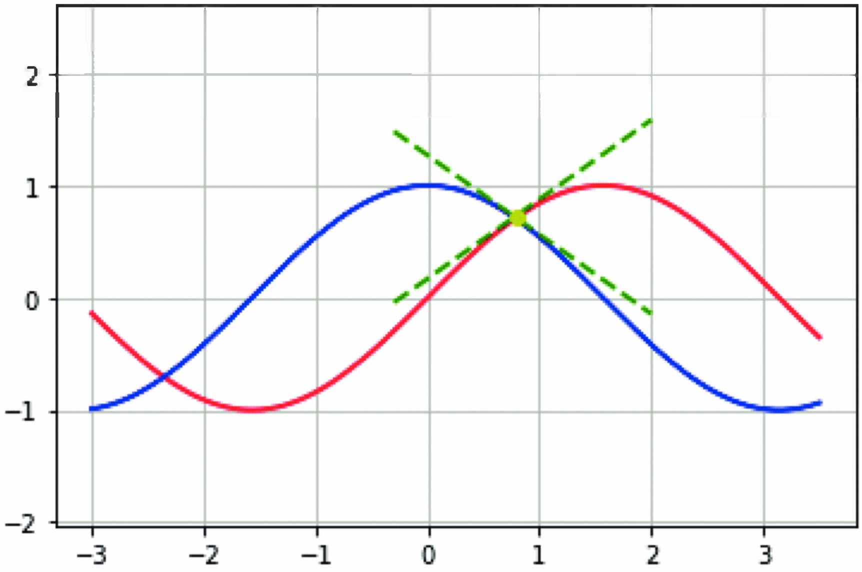
```
x, x0 = symbols('x x0')
x0 = P[1]
l1 = tangent(f1,x0)
l2 = tangent(f2,x0)
l1.angle_between(l2)
```



$$\operatorname{acos}\left(\frac{1}{3}\right)$$

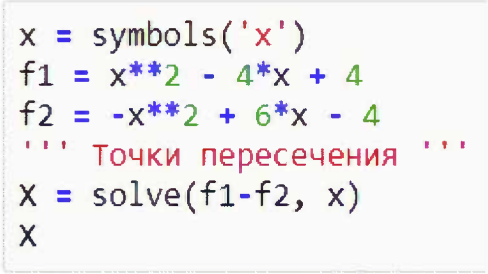


```
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-3,3.5,100)
y1 = np.sin(x)
plt.plot(x, y1, lw=2, color='red')

y2 = np.cos(x)
plt.plot(x, y2, lw=2, color='blue')

x = np.linspace(-0.3,2,100)
l1 = x/2**0.5 + 0.17
plt.plot(x, l1, '--', lw=2, color='g')

l2 = -x/2**0.5 + 1.27
plt.plot(x, l2, '--', lw=2, color='g')

plt.plot([0.8], [0.73], 'o', color='y')
plt.grid(True)
plt.axis('equal')
plt.show()
```



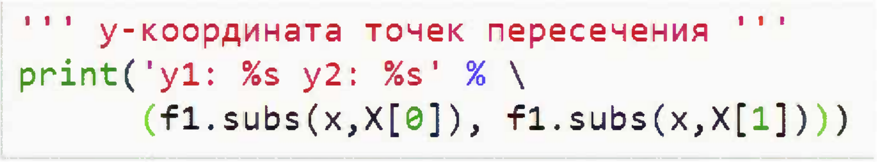
Ответ. $\propto = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = \text{arctg}(2\sqrt{2})$.

19. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются кривые: $f_1(x) = x^2 - 4x + 4$, $f_1(x) = -x^2 + 6x - 4$.



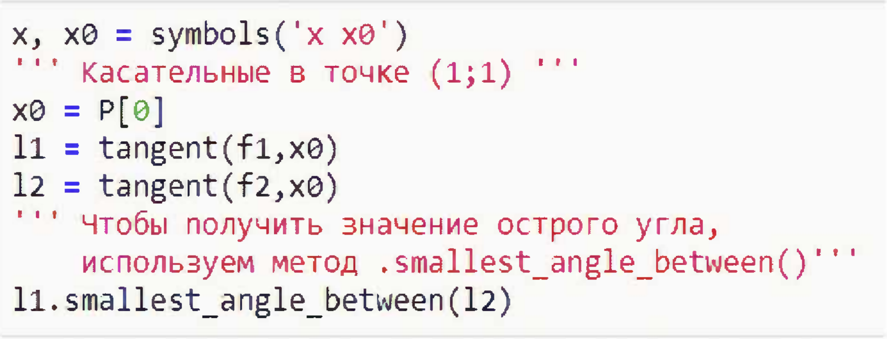
```
x = symbols('x')
f1 = x**2 - 4*x + 4
f2 = -x**2 + 6*x - 4
''' Точки пересечения '''
X = solve(f1-f2, x)
X
```

```
[1, 4]
```



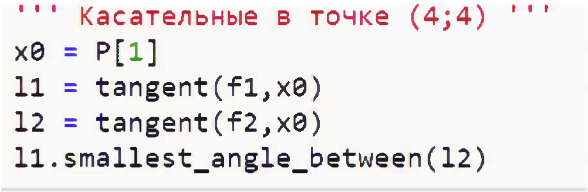
```
''' y-координата точек пересечения '''
print('y1: %s y2: %s' % \
      (f1.subs(x,X[0]), f1.subs(x,X[1])))
```

```
y1: 1 y2: 4
```

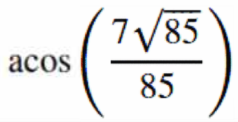


```
x, x0 = symbols('x x0')
''' Касательные в точке (1;1) '''
x0 = P[0]
l1 = tangent(f1,x0)
l2 = tangent(f2,x0)
''' Чтобы получить значение острого угла,
    используем метод .smallest_angle_between()'''
l1.smallest_angle_between(l2)
```

$$\text{acos}\left(\frac{7\sqrt{85}}{85}\right)$$



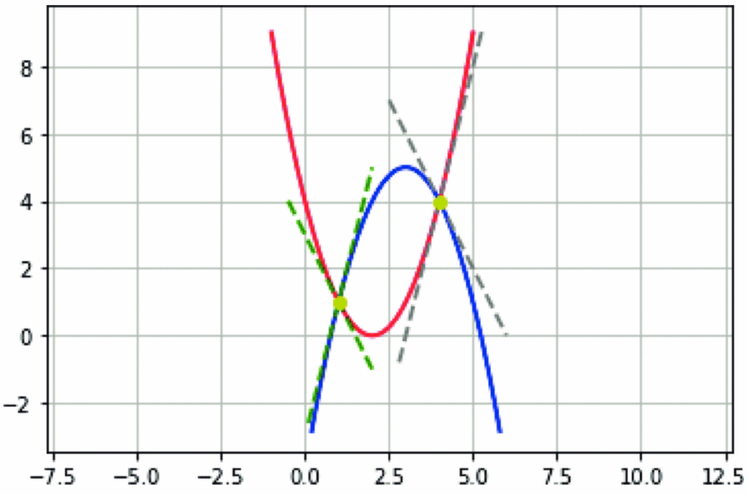
```
''' Касательные в точке (4;4) '''
x0 = P[1]
l1 = tangent(f1,x0)
l2 = tangent(f2,x0)
l1.smallest_angle_between(l2)
```



$$\operatorname{acos}\left(\frac{7\sqrt{85}}{85}\right)$$

```
x = np.linspace(-1,5,100)
y1 = x**2 -4*x + 4
plt.plot(x, y1, lw=2, color='red')

x = np.linspace(0.2,5.8,100)
y2 = -x**2 + 6*x - 4
plt.plot(x, y2, lw=2, color='blue')

x = np.linspace(-0.5,2,100)
l1 = 3 - 2*x
plt.plot(x, l1, '--', lw=2, color='g')

x = np.linspace(0.1,2,100)
l2 = 4*x - 3
plt.plot(x, l2, '--', lw=2, color='g')
```

```
x = np.linspace(2.5,6,100)
l3 = 12 - 2*x
plt.plot(x, l3, '--', lw=2, color='grey')

x = np.linspace(2.8,5.3,100)
l4 = 4*x - 12
plt.plot(x, l4, '--', lw=2, color='grey')

plt.plot([1], [1], 'o', color='y')
plt.plot([4], [4], 'o', color='y')
plt.grid(True)
plt.axis('equal')
plt.show()
```

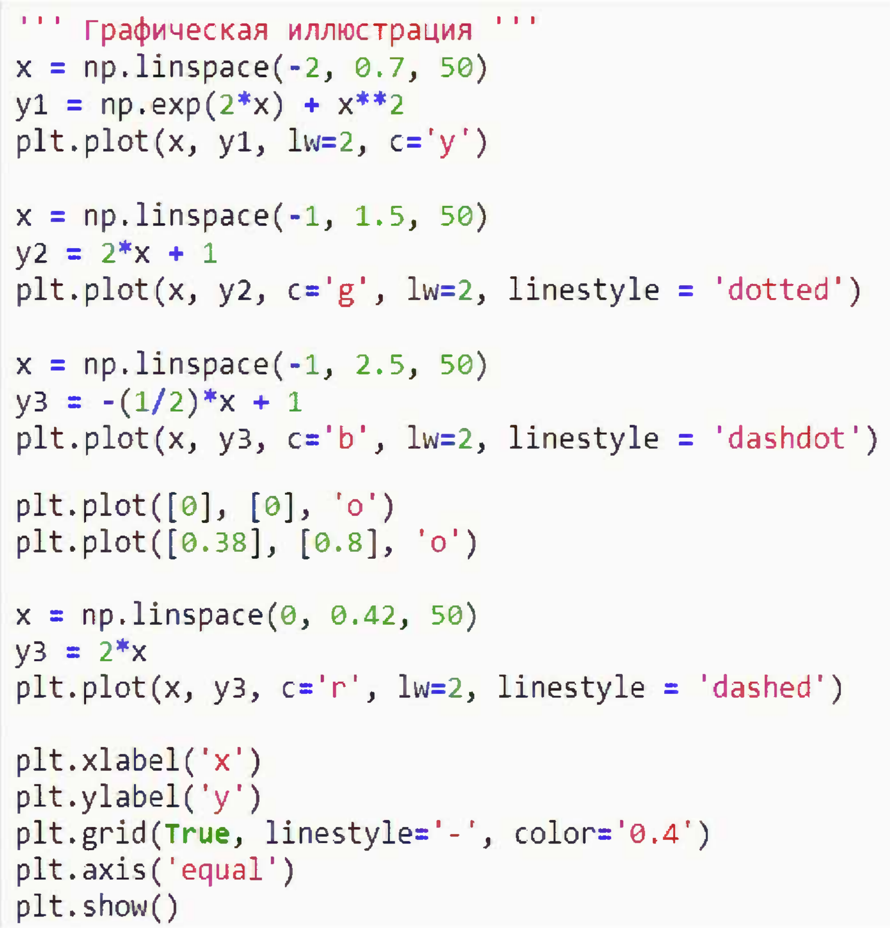


Ответ: $P_1\,(1;1), P_2(4;4) \propto = \beta = \arccos\left(\frac{7\sqrt{85}}{85}\right)$.

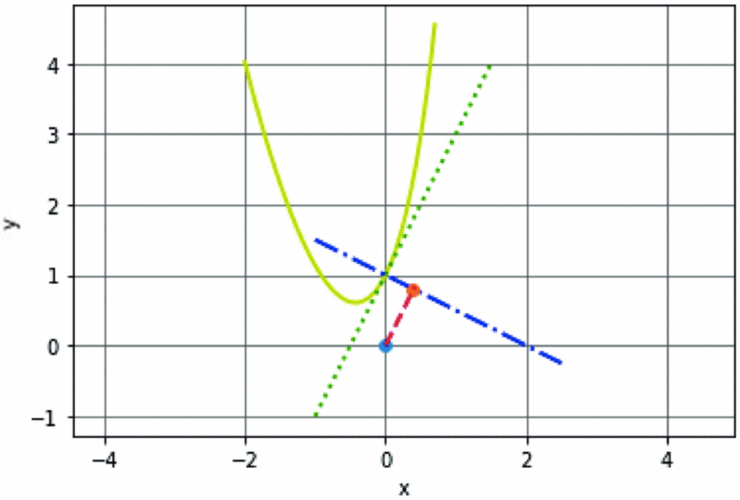
20. Вычислить расстояние от начала координиат до нормали к кривой $y = e^{2x} + x^2$, проведеиной через точку с абсциссой $x_0 = 0$.

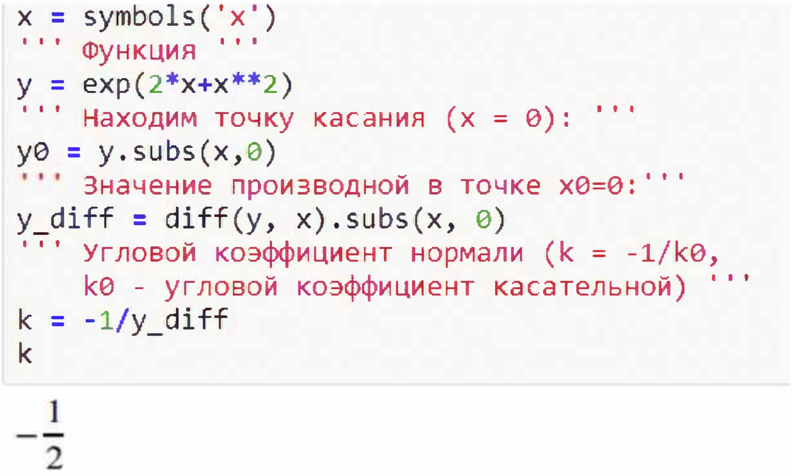
Решение. Нормалью называется прямая, перпендикулярная касательной, и проходящая через точку касания.

Сначала найдем уравнение касательной, а затем уравнение перпендикуляриой ей прямой.



```
''' Графическая иллюстрация '''
x = np.linspace(-2, 0.7, 50)
y1 = np.exp(2*x) + x**2
plt.plot(x, y1, lw=2, c='y')

x = np.linspace(-1, 1.5, 50)
y2 = 2*x + 1
plt.plot(x, y2, c='g', lw=2, linestyle = 'dotted')

x = np.linspace(-1, 2.5, 50)
y3 = -(1/2)*x + 1
plt.plot(x, y3, c='b', lw=2, linestyle = 'dashdot')

plt.plot([0], [0], 'o')
plt.plot([0.38], [0.8], 'o')

x = np.linspace(0, 0.42, 50)
y3 = 2*x
plt.plot(x, y3, c='r', lw=2, linestyle = 'dashed')

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.axis('equal')
plt.show()
```





```
x = symbols('x')
''' Функция '''
y = exp(2*x+x**2)
''' Находим точку касания (x = 0): '''
y0 = y.subs(x,0)
''' Значение производной в точке x0=0:'''
y_diff = diff(y, x).subs(x, 0)
''' Угловой коэффициент нормали (k = -1/k0,
    k0 - угловой коэффициент касательной) '''
k = -1/y_diff
k
```

$$-\frac{1}{2}$$

Нормаль проходит через точку касания $(0;1)$, следовательно ее уравнение: $y=-\frac{1}{2}x+1$. Значит нормаль проходит еще через точку $(2;0)$. Проводим прямую через две точки и находим расстояние до нее от начала координат.

```
l = Line((0,1), (2,0))
l.distance((0,0))
```

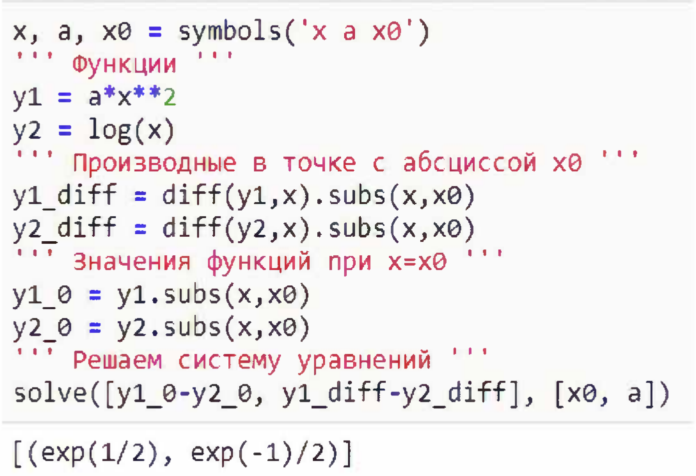
$$\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Ответ: $d=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

21. При каком значении параметра a парабола $y=ax^2$ касается кривой $y=\ln x$?

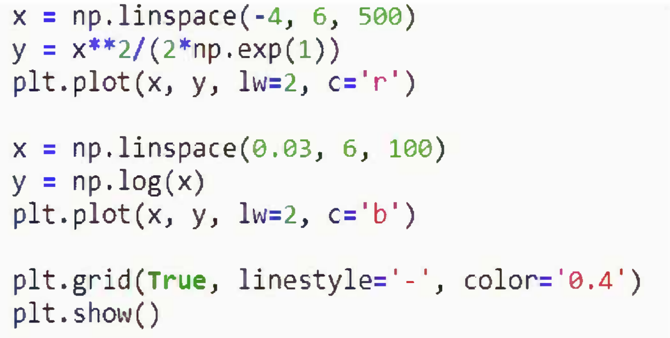
Решение. В точке касания двух кривых совпадают как значения этих функций, так и их производных.

Используем этот факт для определения параметра a. Обозначим через x_0 абсциссу точки касания. Составим систему из двух уравнений относительно переменных x_0 и a. Первое уравнение системы: равенство функций, второе – равенство их производных.

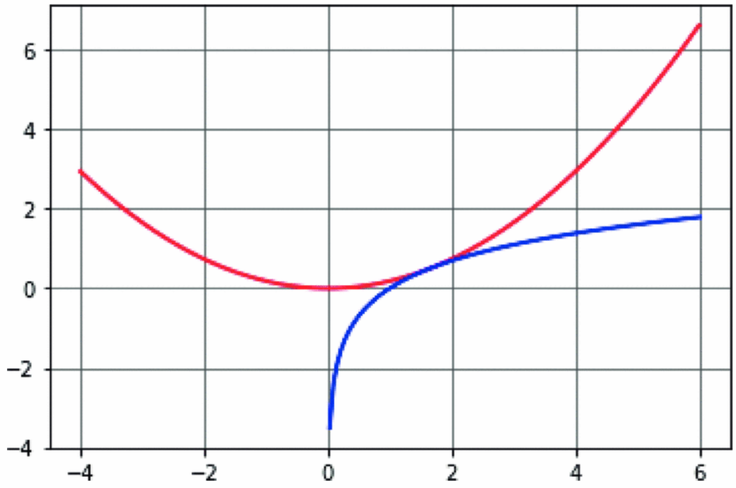


```
x, a, x0 = symbols('x a x0')
''' Функции '''
y1 = a*x**2
y2 = log(x)
''' Производные в точке с абсциссой x0 '''
y1_diff = diff(y1,x).subs(x,x0)
y2_diff = diff(y2,x).subs(x,x0)
''' Значения функций при x=x0 '''
y1_0 = y1.subs(x,x0)
y2_0 = y2.subs(x,x0)
''' Решаем систему уравнений '''
solve([y1_0-y2_0, y1_diff-y2_diff], [x0, a])
```

```
[(exp(1/2), exp(-1)/2)]
```



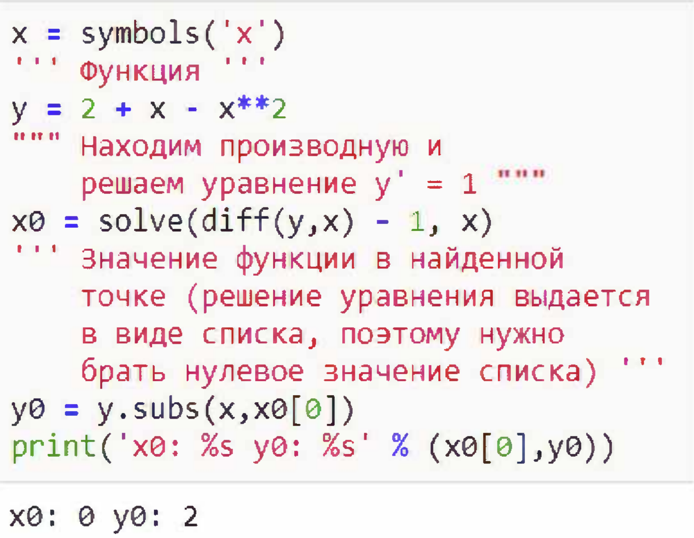
```
x = np.linspace(-4, 6, 500)
y = x**2/(2*np.exp(1))
plt.plot(x, y, lw=2, c='r')

x = np.linspace(0.03, 6, 100)
y = np.log(x)
plt.plot(x, y, lw=2, c='b')

plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



Ответ: $a = \frac{1}{2e}$.

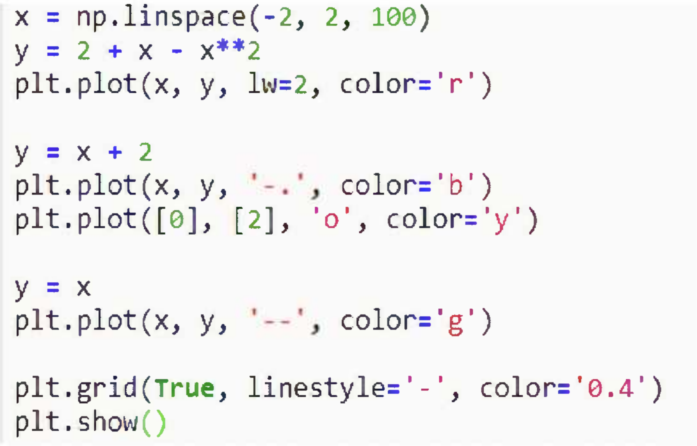
22. В каких точках кривой $y = 2 + x - x^2$ касательная к ней параллельна биссектрисе первого координатного угла?

Решение. Прямые параллельны, если у них совпадают угловые коэффициенты. А так как угловой коэффициент совпадает со значением производной функции, и у биссектрисы угловой коэффициент равен 1, то производная функции в точке касания должна равняться 1.

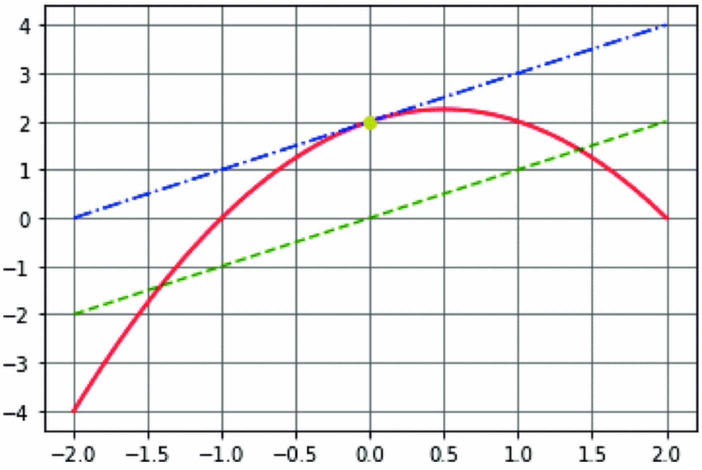


```
x = symbols('x')
''' Функция '''
y = 2 + x - x**2
""" Находим производную и
    решаем уравнение y' = 1 """
x0 = solve(diff(y,x) - 1, x)
''' Значение функции в найденной
    точке (решение уравнения выдается
    в виде списка, поэтому нужно
    брать нулевое значение списка) '''
y0 = y.subs(x,x0[0])
print('x0: %s y0: %s' % (x0[0],y0))
```

```
x0: 0 y0: 2
```



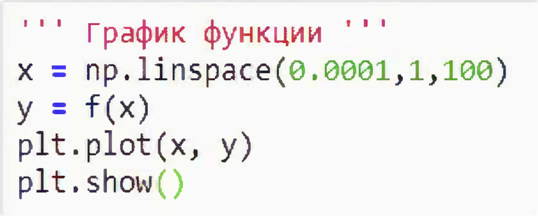
```
x = np.linspace(-2, 2, 100)
y = 2 + x - x**2
plt.plot(x, y, lw=2, color='r')

y = x + 2
plt.plot(x, y, '-.', color='b')
plt.plot([0], [2], 'o', color='y')

y = x
plt.plot(x, y, '--', color='g')

plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



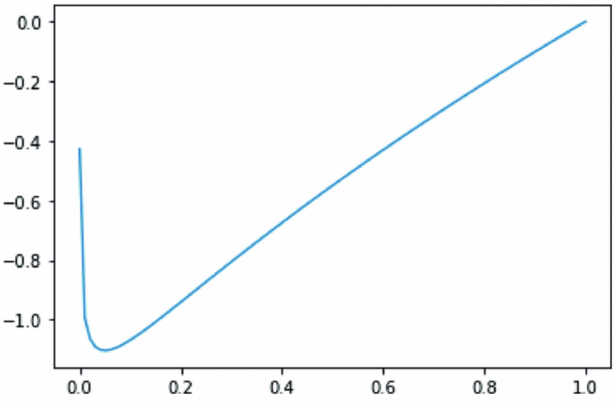
Ответ: $(0;2)$.

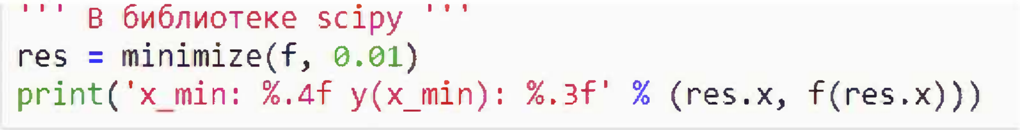
23. Исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{x} \cdot \ln x$.

```
f = lambda x: (x**(1/3))*np.log(x)
```

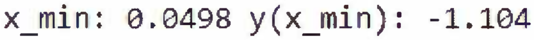


```
''' График функции '''
x = np.linspace(0.0001,1,100)
y = f(x)
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

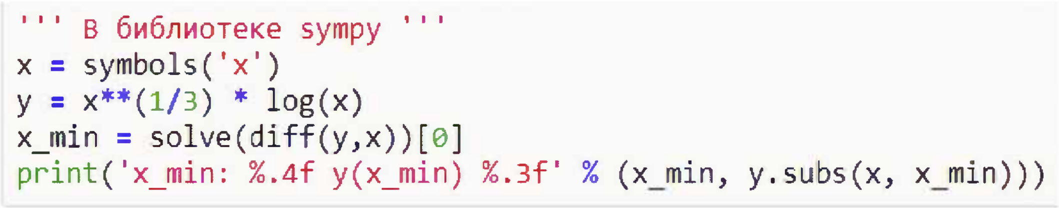




```
''' В библиотеке scipy '''
res = minimize(f, 0.01)
print('x_min: %.4f y(x_min): %.3f' % (res.x, f(res.x)))
```



```
x_min: 0.0498 y(x_min): -1.104
```



```
''' В библиотеке sympy '''
x = symbols('x')
y = x**(1/3) * log(x)
x_min = solve(diff(y,x))[0]
print('x_min: %.4f y(x_min) %.3f' % (x_min, y.subs(x, x_min)))
```

```
x_min: 0.0498 y(x_min) -1.104
```

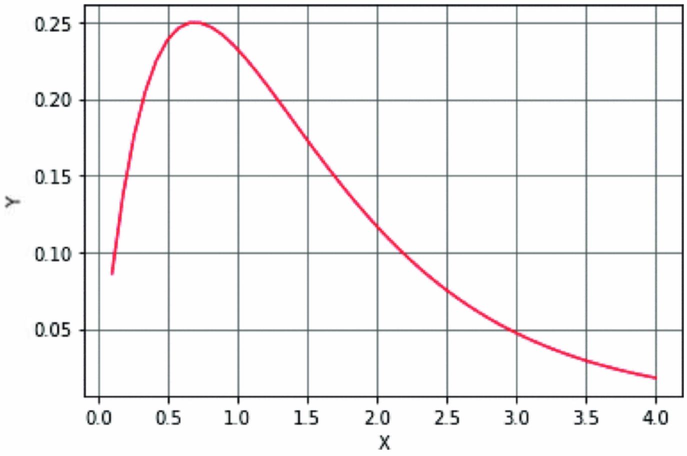
Ответ: $f_{\min} = f(0{,}0498) = -1{,}104$.

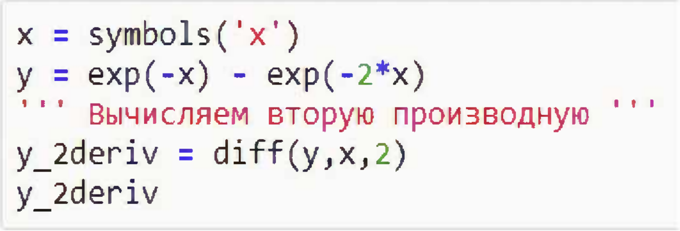
24. Найти точки перегиба и исследовать характер выпуклости кривой

$$y = e^{-x} - e^{-2x}.$$

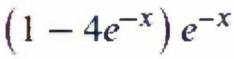
```
f = lambda x: np.exp(-x) - np.exp(-2*x)
```

```
''' График '''
x = np.linspace(0.1,4,50)
plt.plot(x, f(x), 'r')
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```

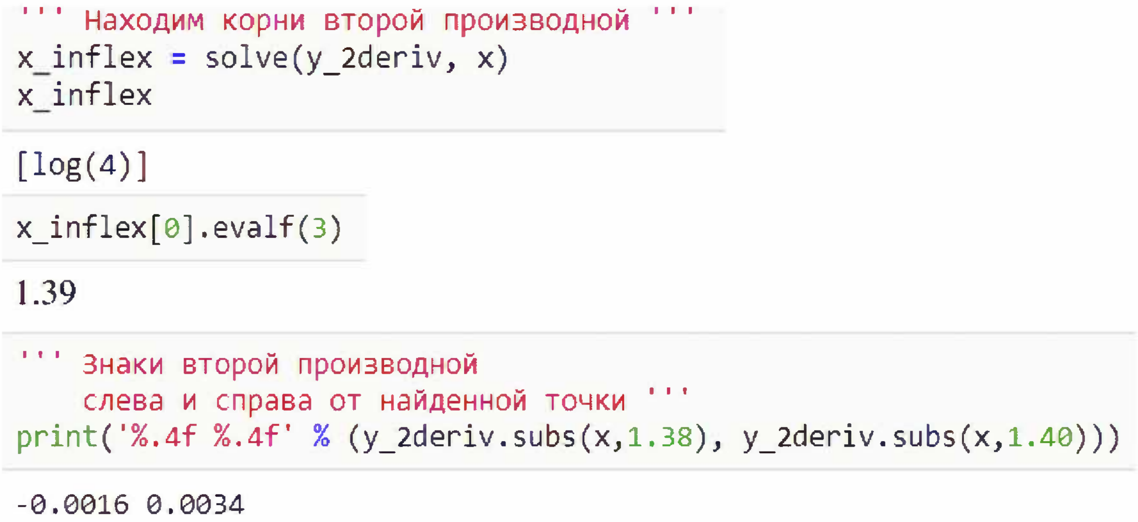




```
x = symbols('x')
y = exp(-x) - exp(-2*x)
''' Вычисляем вторую производную '''
y_2deriv = diff(y,x,2)
y_2deriv
```



$$\left(1 - 4e^{-x}\right) e^{-x}$$



```
''' Находим корни второй производной '''
x_inflex = solve(y_2deriv, x)
x_inflex
```

```
[log(4)]
```

```
x_inflex[0].evalf(3)
```

```
1.39
```

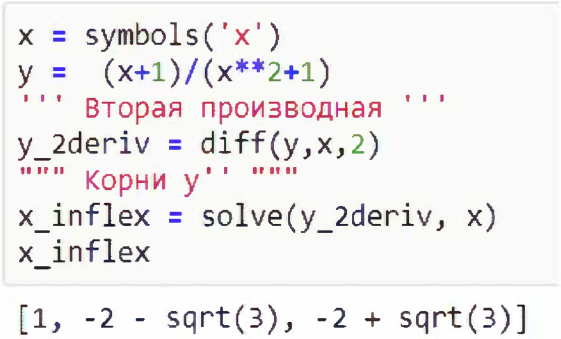
```
''' Знаки второй производной
    слева и справа от найденной точки '''
print('%.4f %.4f' % (y_2deriv.subs(x,1.38), y_2deriv.subs(x,1.40)))
```

```
-0.0016 0.0034
```

Слева от точки перегиба $y'' < 0$, следовательно, функция выпукла вверх; справа – $y'' > 0$, функция выпукла вниз.

25. Показать, что кривая $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

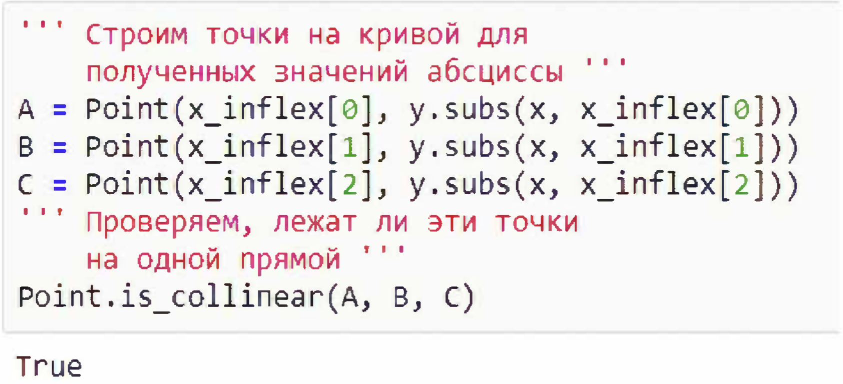
Решение.



```
x = symbols('x')
y =  (x+1)/(x**2+1)
''' Вторая производная '''
y_2deriv = diff(y,x,2)
""" Корни y'' """
x_inflex = solve(y_2deriv, x)
x_inflex
```

```
[1, -2 - sqrt(3), -2 + sqrt(3)]
```

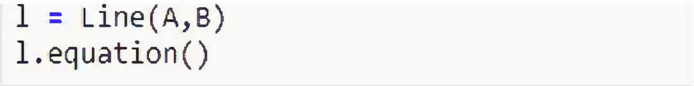
Вторая производная обращается в ноль в трех точках. То, что полученные значения действительно являются точками перегиба, убедимся в дальнейшем на графике.



```
''' Строим точки на кривой для
    полученных значений абсциссы '''
A = Point(x_inflex[0], y.subs(x, x_inflex[0]))
B = Point(x_inflex[1], y.subs(x, x_inflex[1]))
C = Point(x_inflex[2], y.subs(x, x_inflex[2]))
''' Проверяем, лежат ли эти точки
    на одной прямой '''
Point.is_collinear(A, B, C)
```

```
True
```

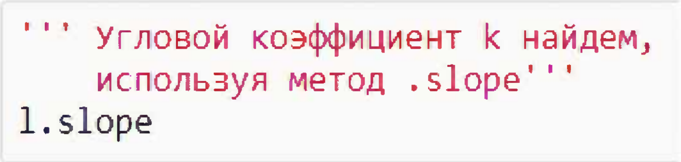
Действительно, три точки лежат на одной прямой. Построим график. Для отображения на графике прямой, на которой лежат точки перегиба, найдем ее уравнение.



```
l = Line(A,B)
l.equation()
```

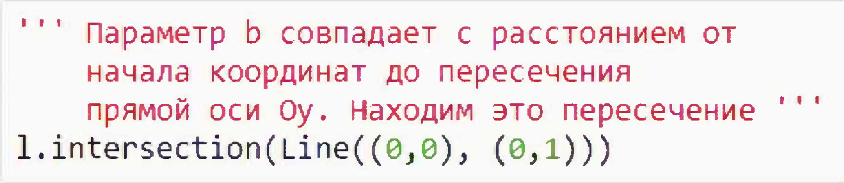
$$x\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}\right)+y\left(-3-\sqrt{3}\right)+\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{9}{4}$$

Получили сложные выражения для коэффициентов. Чтобы не вычислять иррациональные значения коэффициентов, попробуем найти уравнение в виде $y = kx + b$.



```
''' Угловой коэффициент k найдем,
    используя метод .slope'''
l.slope
```

$$\frac{1}{4}$$

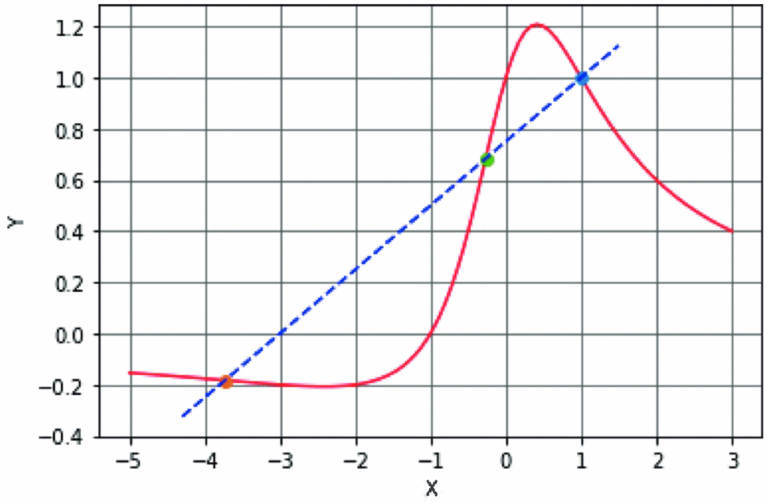


```
''' Параметр b совпадает с расстоянием от
    начала координат до пересечения
    прямой оси Oy. Находим это пересечение '''
l.intersection(Line((0,0), (0,1)))
```

```
[Point2D(0, 3/4)]
```

Итак, уравнение прямой: $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

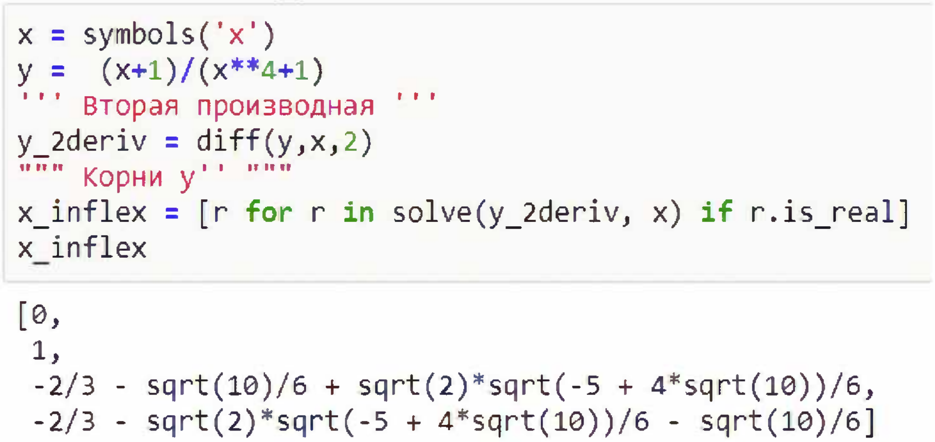
```
''' График кривой'''
y = lambda x: (x+1)/(x**2+1)
x = np.linspace(-5,3,100)
plt.plot(x, y(x), color='r')

''' Точки перегиба '''
plt.plot([x_inflex[0]], [y(x_inflex[0])], 'o')
plt.plot([x_inflex[1]], [y(x_inflex[1])], 'o')
plt.plot([x_inflex[2]], [y(x_inflex[2])], 'o')

''' Прямая '''
x = np.linspace(-4.3,1.5,100)
p = lambda x: 0.25*x + 0.75
plt.plot(x, p(x), '--', color='b')

plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



26. Найти точки перегиба функции $y = \frac{x+1}{x^2+1}$. Лежат ли оии на одной прямой?

Решение.

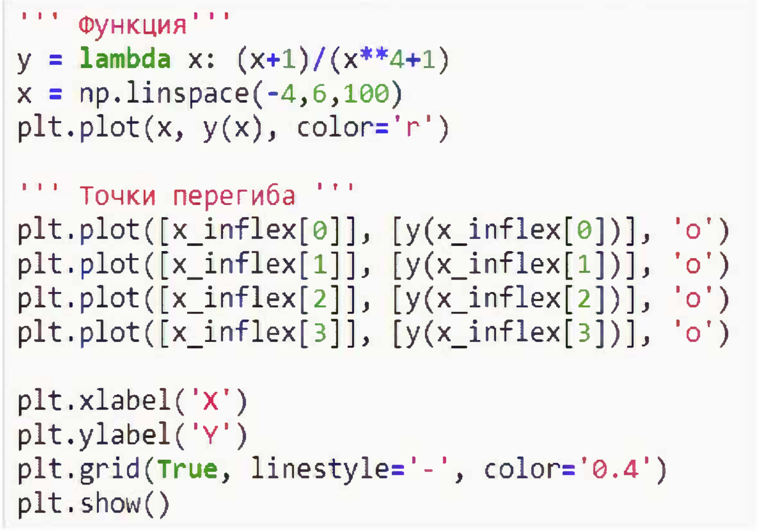
Ищем корни второй производной. Функция solve() находит не только действительные, но и комплексиые корни. Отсекаем эти корни с помощью метода .is_real.



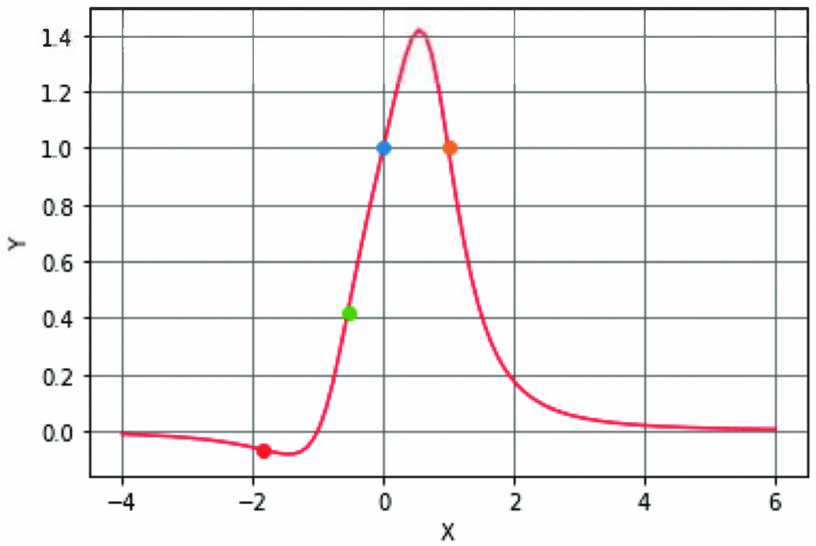
```
x = symbols('x')
y =  (x+1)/(x**4+1)
''' Вторая производная '''
y_2deriv = diff(y,x,2)
""" Корни y'' """
x_inflex = [r for r in solve(y_2deriv, x) if r.is_real]
x_inflex
```

```
[0,
 1,
 -2/3 - sqrt(10)/6 + sqrt(2)*sqrt(-5 + 4*sqrt(10))/6,
 -2/3 - sqrt(2)*sqrt(-5 + 4*sqrt(10))/6 - sqrt(10)/6]
```

Четыре корня. Посмотрим их на графике.



```
''' Функция'''
y = lambda x: (x+1)/(x**4+1)
x = np.linspace(-4,6,100)
plt.plot(x, y(x), color='r')

''' Точки перегиба '''
plt.plot([x_inflex[0]], [y(x_inflex[0])], 'o')
plt.plot([x_inflex[1]], [y(x_inflex[1])], 'o')
plt.plot([x_inflex[2]], [y(x_inflex[2])], 'o')
plt.plot([x_inflex[3]], [y(x_inflex[3])], 'o')

plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



Для точек со значениями $x < 0$ и $x > 0$ график подтверждает, что это точки перегиба. А вот точка с абсциссой $x = 0$ едва ли является точкой перегиба. В точке перегиба меняется направление выпуклости. Здесь же функция выпукла вверх по обе стороны от точки. Проверим это по знакам второй производной.

```
''' Слева от точки '''
S(y_2deriv.subs(x,-0.1)).n(2)
```

```
−0.1
```

```
''' Справа от точки '''
S(y_2deriv.subs(x,0.1)).n(2)
```

```
−0.14
```

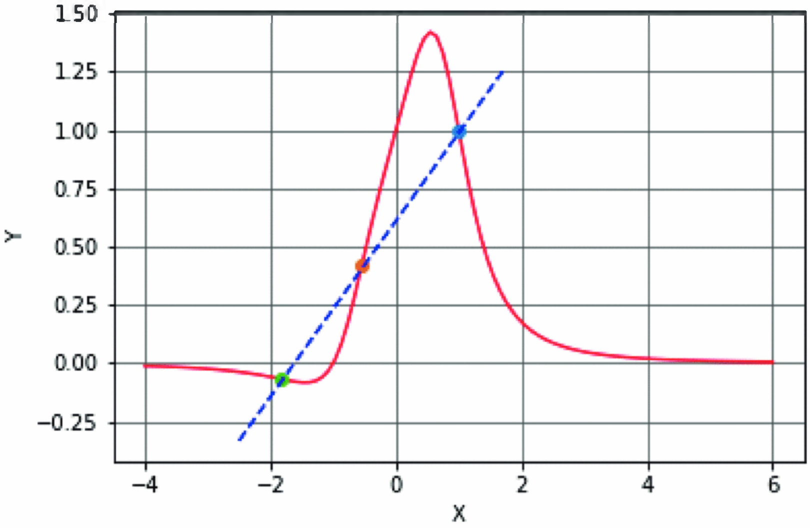
В точке $x = 0$ вторая производная не меняет знак, следовательно, это точка не является точкой перегиба.

Проверим, лежат ли оставшиеся точки на одной прямой. В списке inflex этим точкам соответствуют индексы 1, 2, 3.

```
''' Строим точки на кривой для
    полученных значений абсциссы '''
A = Point(x_inflex[1], y.subs(x, x_inflex[1]))
B = Point(x_inflex[2], y.subs(x, x_inflex[2]))
C = Point(x_inflex[3], y.subs(x, x_inflex[3]))
''' Проверяем, лежат ли эти точки
    на одной прямой '''
Point.is_collinear(A, B, C)
```

```
True
```

Да, лежат.



Найдем десятичную запись точек нерегиба. Функция S(t).n(k) возвращает число *t* с *k* значащнмн цифрами.

```
S(x_inflex[2]).n(3)
```

-0.542

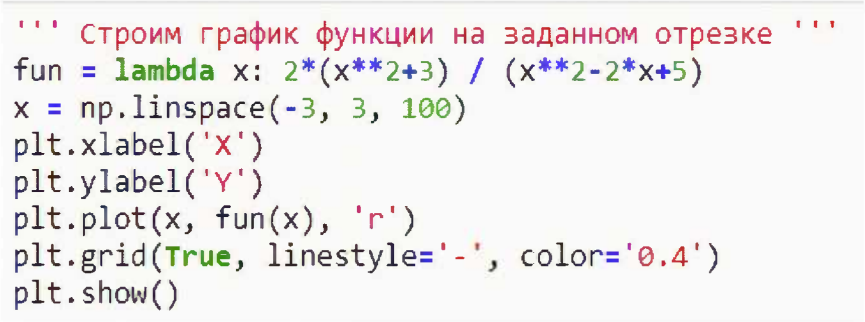
```
S(x_inflex[3]).n(4)
```

-1.846

Ответ: точки перегиба: $-0{,}542$; $-1{,}846$; 1. Лежат на одной прямой.

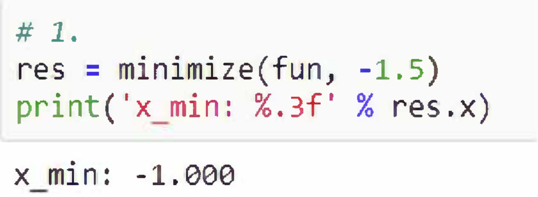
27. Найти наибольшее и наименьшее значеиия функции *f*(*x*) на отрезке:

$$y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}, \quad x \in [-3;3].$$



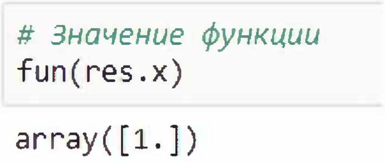
```
''' Строим график функции на заданном отрезке '''
fun = lambda x: 2*(x**2+3) / (x**2-2*x+5)
x = np.linspace(-3, 3, 100)
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.plot(x, fun(x), 'r')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```

Наибольшее значение, равиое 3 на конце отрезка. Внутри отрезка $[-3;3]$ едииственный экстремум (мииимум). Находим его.



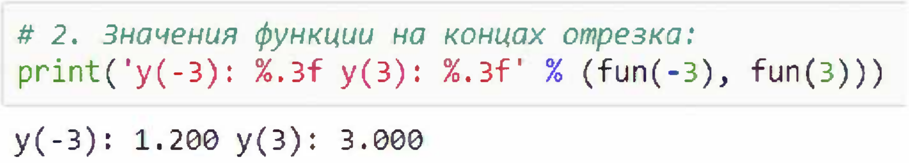
```
# 1.
res = minimize(fun, -1.5)
print('x_min: %.3f' % res.x)
```

```
x_min: -1.000
```



```
# Значение функции
fun(res.x)
```

```
array([1.])
```

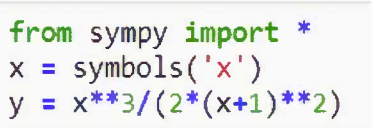


```
# 2. Значения функции на концах отрезка:
print('y(-3): %.3f y(3): %.3f' % (fun(-3), fun(3)))
```

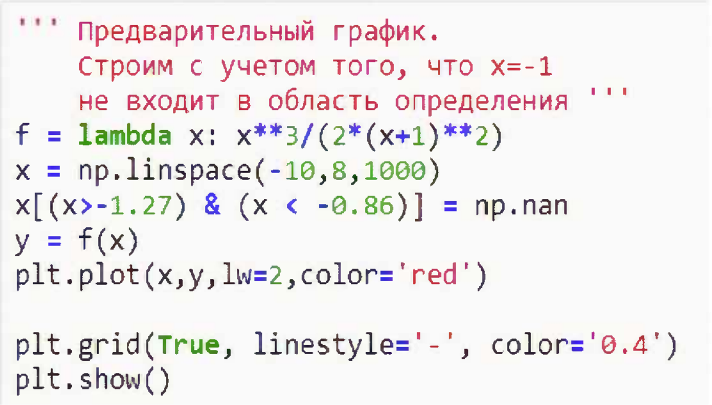
```
y(-3): 1.200 y(3): 3.000
```

Ответ: Наимеиьшее зиачение: 1, наибольшее: 3.

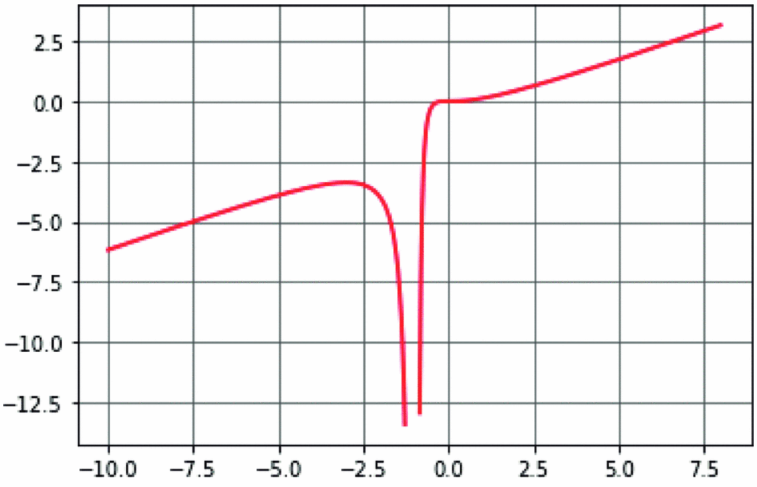
28. Провести полное нсследованне функции $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.



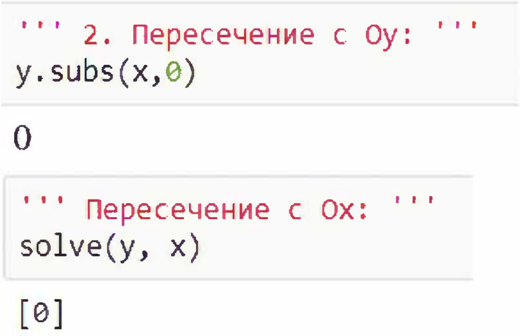
```
from sympy import *
x = symbols('x')
y = x**3/(2*(x+1)**2)
```



```
''' Предварительный график.
    Строим с учетом того, что x=-1
    не входит в область определения '''
f = lambda x: x**3/(2*(x+1)**2)
x = np.linspace(-10,8,1000)
x[(x>-1.27) & (x < -0.86)] = np.nan
y = f(x)
plt.plot(x,y,lw=2,color='red')

plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



1. Область определения: $x \neq -1$.



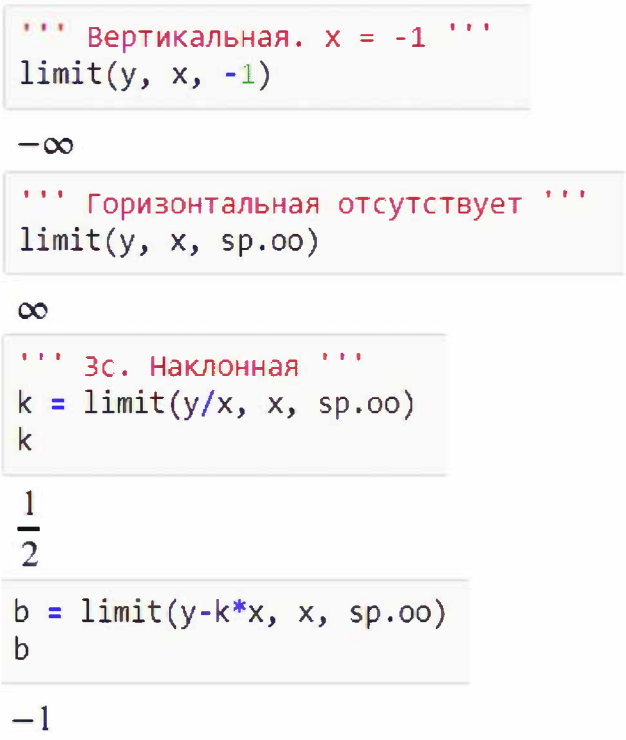
```
''' 2. Пересечение с Oy: '''
y.subs(x,0)
```

$$0$$

```
''' Пересечение с Ox: '''
solve(y, x)
```

```
[0]
```

3. Асимптоты.



```
''' Вертикальная. x = -1 '''
limit(y, x, -1)
```

$$-\infty$$

```
''' Горизонтальная отсутствует '''
limit(y, x, sp.oo)
```

$$\infty$$

```
''' 3c. Наклонная '''
k = limit(y/x, x, sp.oo)
k
```

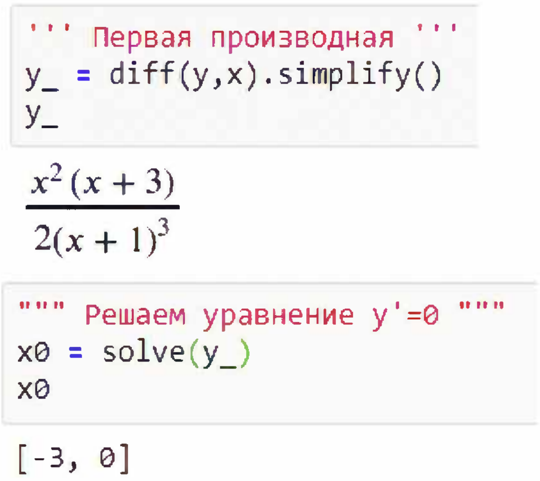
$$\frac{1}{2}$$

```
b = limit(y-k*x, x, sp.oo)
b
```

$$-1$$

Наклонная аснмнтота: $y = \frac{1}{2}x - 1$.

4. Экстремумы и интервалы мопотопности.

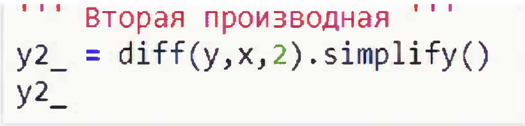


```
''' Первая производная '''
y_ = diff(y,x).simplify()
y_
```

$$\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$$

```
""" Решаем уравнение y'=0 """
x0 = solve(y_)
x0
```

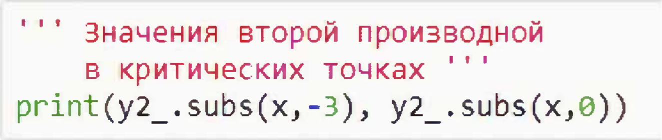
```
[-3, 0]
```



```
''' Вторая производная '''
y2_ = diff(y,x,2).simplify()
y2_
```

$$\frac{3x}{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}$$

Результат можно записать более компактно: $y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$.



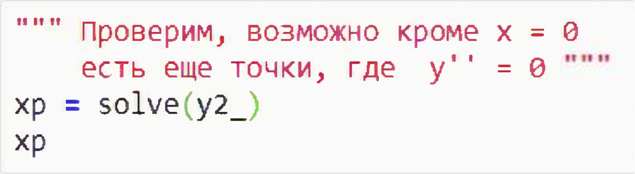
```
''' Значения второй производной
    в критических точках '''
print(y2_.subs(x,-3), y2_.subs(x,0))
```

```
-9/16 0
```

В точке $x = -3$ вторая пропзводпая отрпцательна, следовательпо, это точка максимума.

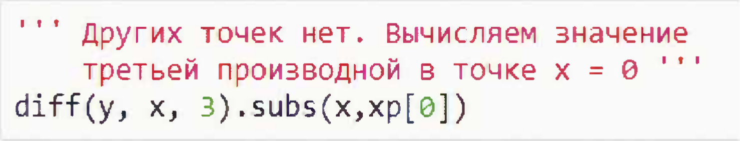
В точке $x = 0$ вторая пропзводная равпа 0. Проверим в следующем пункте, является ли она точкой перегиба.

5. Интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.



```
""" Проверим, возможно кроме x = 0
    есть еще точки, где  y'' = 0 """
xp = solve(y2_)
xp
```

```
[0]
```



```
''' Других точек нет. Вычисляем значение
    третьей производной в точке x = 0 '''
diff(y, x, 3).subs(x,xp[0])
```

$$3$$

Третья производиая не равиа иулю, следовательно, $x = 0$ – точка перегиба. А так как она положительна, то вторая производная меияет знак с мнпуса на плюс. Это означает, что слева от точкн $x = 0$ функция выпукла вверх, справа – выпукла впнз.

Функция имеет особенность при $x = -1$. Характер выпуклости в области $x = -1$ нужно проверять отдельно. Вычислнм зпачение второй производной в произвольной точке этой области, например, $x = -2$.

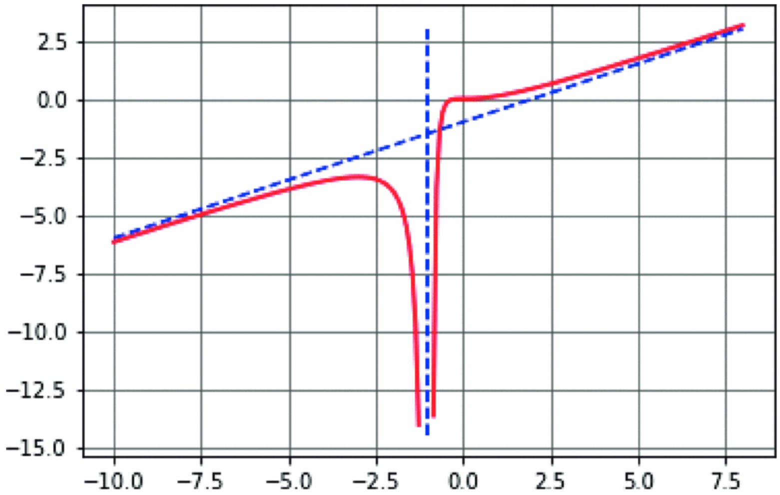
```
diff(y, x, 2).subs(x,-2)
```

$$-6$$

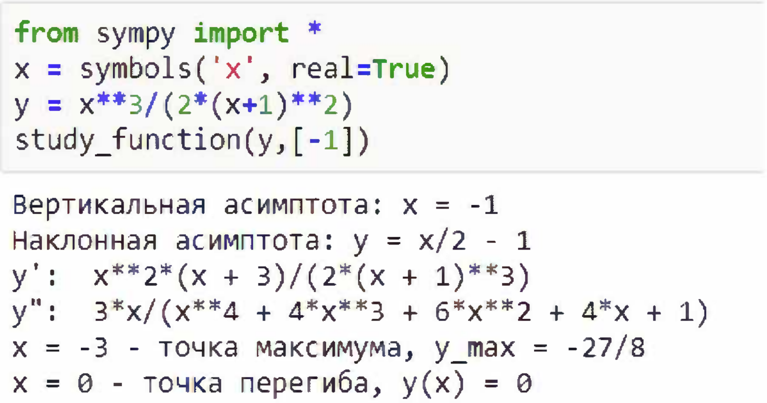
Пронзводная отрицательна, следовательно, функцня выпукла вверх.

6. Строим окончательный график, на котором отображаем найдениые асимптоты.

```
f = lambda x: x**3/(2*(x+1)**2)
x = np.linspace(-10,-1.27,100)
y1 = f(x)
plt.plot(x,y1,lw=2,color='red')

x = np.linspace(-0.85,8,100)
y2 = f(x)
plt.plot(x,y2,lw=2,color='red')

x = np.linspace(-10,8,100)
y = x/2 - 1
plt.plot(x,y,'--',color='b')

plt.plot([-1,-1],[-14.5,3],'--',color='b')


plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



Решим эту же задачу с помощью функции study_function() (текст функции на с. 21).

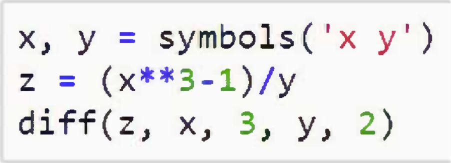


```
from sympy import *
x = symbols('x', real=True)
y = x**3/(2*(x+1)**2)
study_function(y,[-1])
```

```
Вертикальная асимптота: x = -1
Наклонная асимптота: y = x/2 - 1
y':  x**2*(x + 3)/(2*(x + 1)**3)
y":  3*x/(x**4 + 4*x**3 + 6*x**2 + 4*x + 1)
x = -3 - точка максимума, y_max = -27/8
x = 0 - точка перегиба, y(x) = 0
```

29. Найти частную производную $\frac{\partial^5 z}{\partial x^3 \partial y^2}$ функции $z = \frac{x^3-1}{y}$.

Решение.

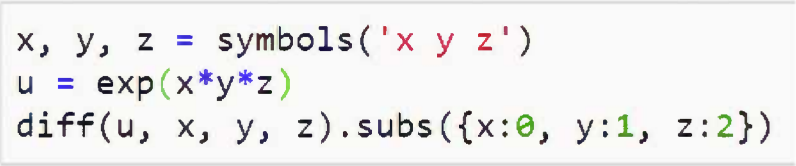


```
x, y = symbols('x y')
z = (x**3-1)/y
diff(z, x, 3, y, 2)
```

$$\frac{12}{y^3}$$

30. Найти значение производной $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ функции $u = e^{xyz}$ в точке $M(0;1;2)$.

Решение.

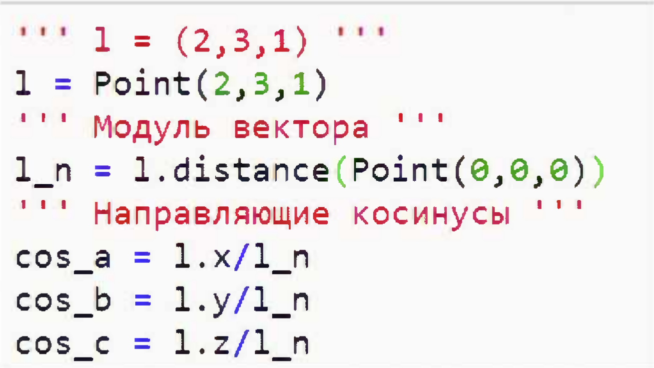


```
x, y, z = symbols('x y z')
u = exp(x*y*z)
diff(u, x, y, z).subs({x:0, y:1, z:2})
```

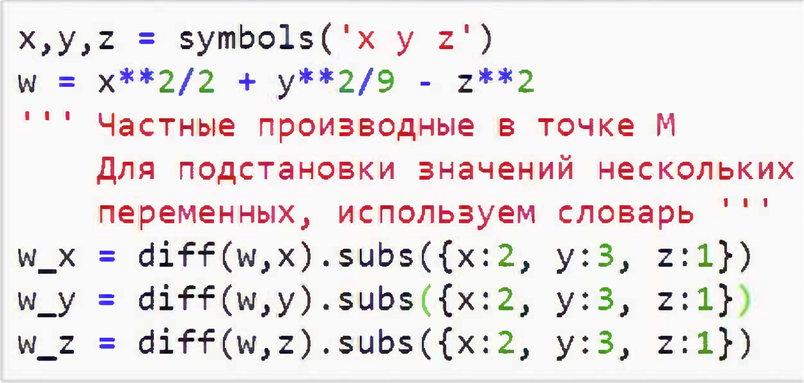
1

31. Найти производную функции $w = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} - z^2$ в точке $A(1;2)$ по направлению радиус-вектора этой точки.

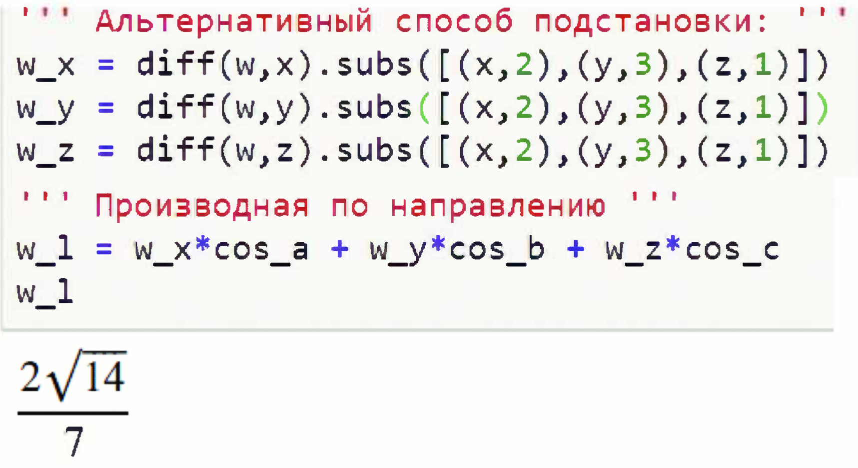
Решение. Радиус-вектор точки – это вектор, координаты которого совпадают с координатами точки.



```
''' l = (2,3,1) '''
l = Point(2,3,1)
''' Модуль вектора '''
l_n = l.distance(Point(0,0,0))
''' Направляющие косинусы '''
cos_a = l.x/l_n
cos_b = l.y/l_n
cos_c = l.z/l_n
```



```
x,y,z = symbols('x y z')
w = x**2/2 + y**2/9 - z**2
''' Частные производные в точке М
    Для подстановки значений нескольких
    переменных, используем словарь '''
w_x = diff(w,x).subs({x:2, y:3, z:1})
w_y = diff(w,y).subs({x:2, y:3, z:1})
w_z = diff(w,z).subs({x:2, y:3, z:1})
```

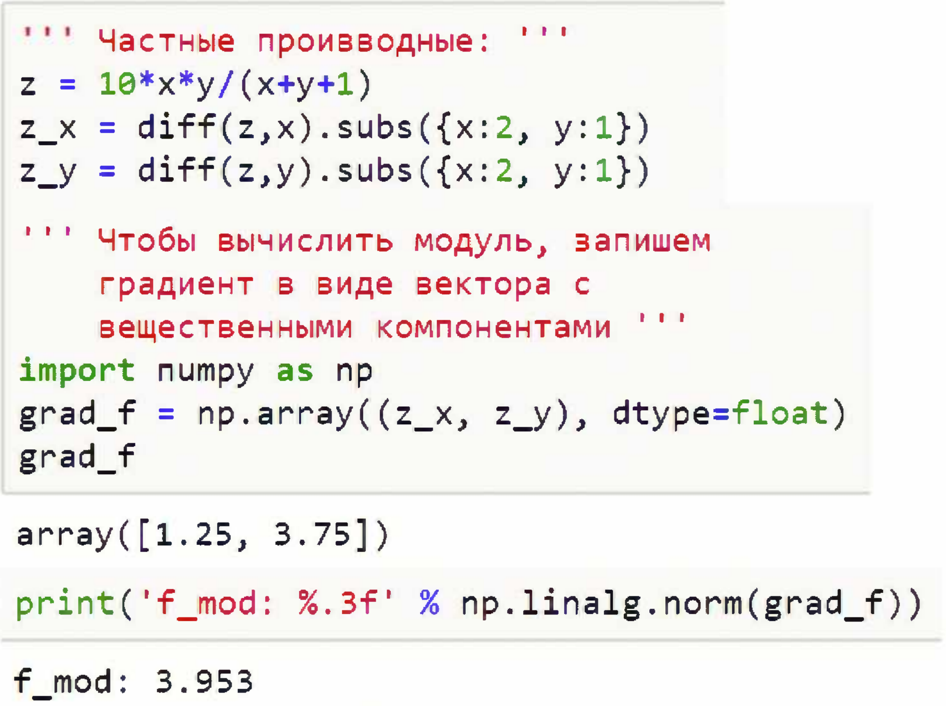


```
''' Альтернативный способ подстановки: '''
w_x = diff(w,x).subs([(x,2),(y,3),(z,1)])
w_y = diff(w,y).subs([(x,2),(y,3),(z,1)])
w_z = diff(w,z).subs([(x,2),(y,3),(z,1)])
''' Производная по направлению '''
w_l = w_x*cos_a + w_y*cos_b + w_z*cos_c
w_l
```

$$\frac{2\sqrt{14}}{7}$$

32. Вычислить градиент и его модуль для функции $z = \frac{xy}{x+y+1}$ в точке $M(0;1)$.

Решение.



```
''' Частные проивводные: '''
z = 10*x*y/(x+y+1)
z_x = diff(z,x).subs({x:2, y:1})
z_y = diff(z,y).subs({x:2, y:1})
''' Чтобы вычислить модуль, запишем
    градиент в виде вектора с
    вещественными компонентами '''
import numpy as np
grad_f = np.array((z_x, z_y), dtype=float)
grad_f
```

```
array([1.25, 3.75])
```

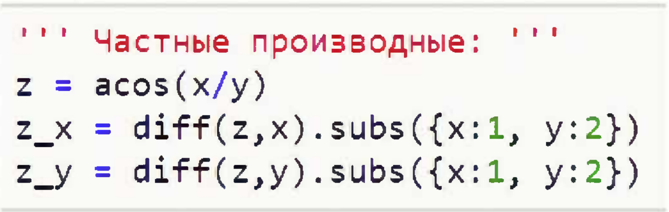
```
print('f_mod: %.3f' % np.linalg.norm(grad_f))
```

```
f_mod: 3.953
```

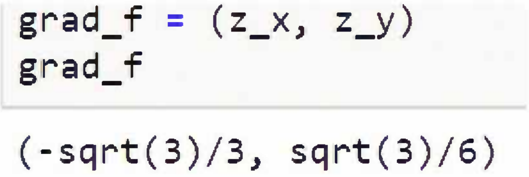
Ответ: $\operatorname{grad} z = (1{,}25; 3{,}75)$; $|\operatorname{grad} z| = 3{,}953$.

33. Найти производную функции $z = \arccos\left(\frac{x}{y}\right)$ в точке $A(1;2)$ по направлению вектора $\mathbf{grad}\, z(A)$.

Решение.

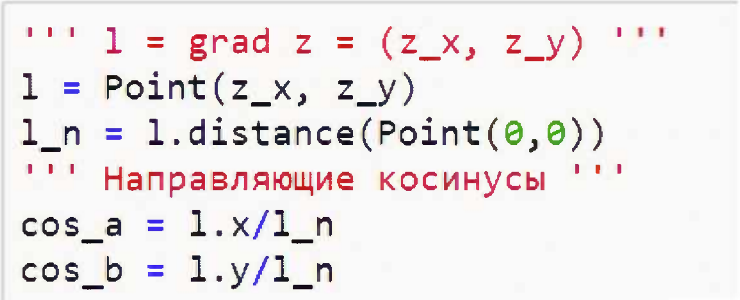


```
''' Частные производные: '''
z = acos(x/y)
z_x = diff(z,x).subs({x:1, y:2})
z_y = diff(z,y).subs({x:1, y:2})
```

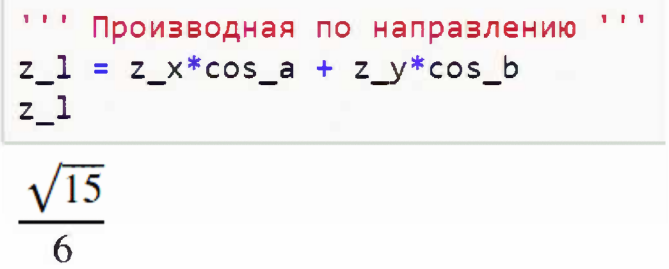


```
grad_f = (z_x, z_y)
grad_f
```

```
(-sqrt(3)/3, sqrt(3)/6)
```



```
''' l = grad z = (z_x, z_y) '''
l = Point(z_x, z_y)
l_n = l.distance(Point(0,0))
''' Направляющие косинусы '''
cos_a = l.x/l_n
cos_b = l.y/l_n
```

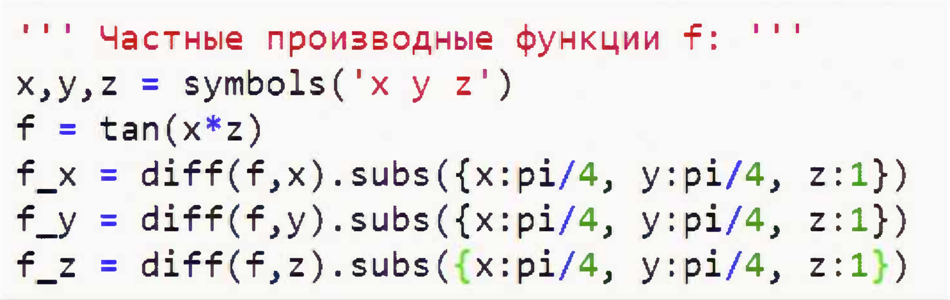


```
''' Производная по напразлению '''
z_l = z_x*cos_a + z_y*cos_b
z_l
```

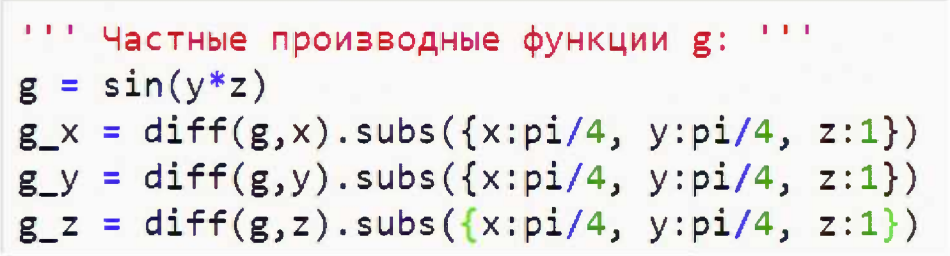
$$\frac{\sqrt{15}}{6}$$

34. Найти производную функции $f = \text{tg}(xz)$ в точке $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1\right)$ по направлению градиента функции $g = \sin(yz)$ в точке A.

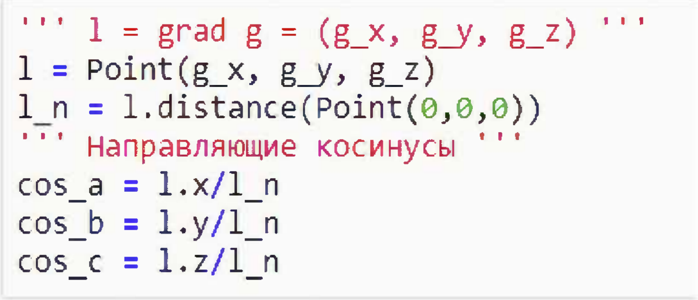
Решение.



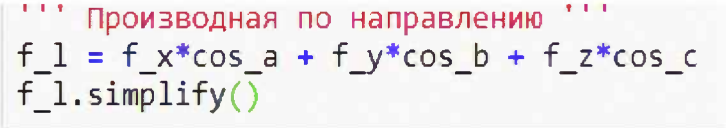
```
''' Частные производные функции f: '''
x,y,z = symbols('x y z')
f = tan(x*z)
f_x = diff(f,x).subs({x:pi/4, y:pi/4, z:1})
f_y = diff(f,y).subs({x:pi/4, y:pi/4, z:1})
f_z = diff(f,z).subs({x:pi/4, y:pi/4, z:1})
```



```
''' Частные производные функции g: '''
g = sin(y*z)
g_x = diff(g,x).subs({x:pi/4, y:pi/4, z:1})
g_y = diff(g,y).subs({x:pi/4, y:pi/4, z:1})
g_z = diff(g,z).subs({x:pi/4, y:pi/4, z:1})
```



```
''' l = grad g = (g_x, g_y, g_z) '''
l = Point(g_x, g_y, g_z)
l_n = l.distance(Point(0,0,0))
''' Направляющие косинусы '''
cos_a = l.x/l_n
cos_b = l.y/l_n
cos_c = l.z/l_n
```

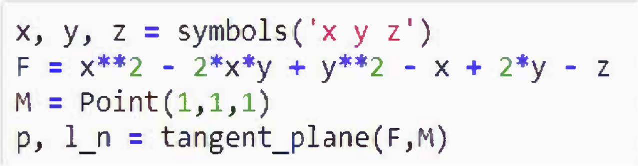


```
''' Производная по направлению '''
f_l = f_x*cos_a + f_y*cos_b + f_z*cos_c
f_l.simplify()
```

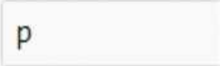
$$\frac{\pi^2}{2\sqrt{\pi^2+16}}$$

35. Дана поверхность G: $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$. Найти уравнение касательной плоскости и нормали в точке $M(1;1;1)$.

Решение. Используем функцию tangent_plane() (текст на с. 23).

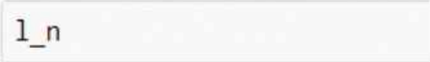


```
x, y, z = symbols('x y z')
F = x**2 - 2*x*y + y**2 - x + 2*y - z
M = Point(1,1,1)
p, l_n = tangent_plane(F,M)
```



```
p
```

$$-x + 2y - z$$



```
l_n
```

$$Point3D(1 - t, 2t + 1, 1 - t)$$

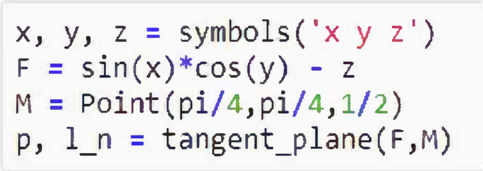
Ответ: касательная плоскость: $x - 2y + z = 0$;

нормаль: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$

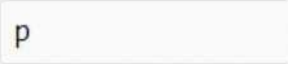
или $x = t + 1,\ y = -2t + 1,\ z = t + 1,\ \ t \in R$.

36. Провести касательную плоскость и нормаль к поверхности: $z = \sin x \cdot \cos y$ в точке $M\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$.

Решение.



```
x, y, z = symbols('x y z')
F = sin(x)*cos(y) - z
M = Point(pi/4,pi/4,1/2)
p, l_n = tangent_plane(F,M)
```

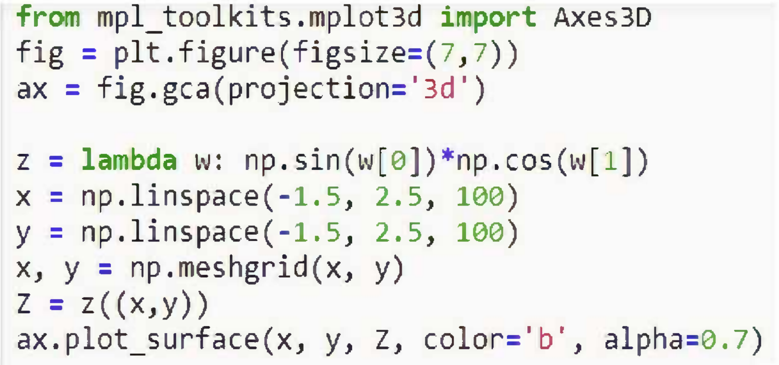


```
p
```

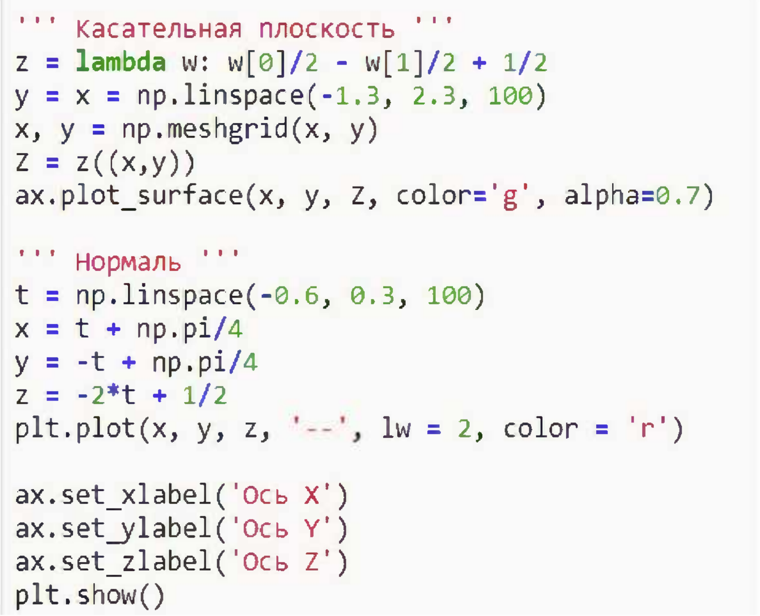
$$\frac{x}{2} - \frac{y}{2} - z + \frac{1}{2}$$

```
l_n
```

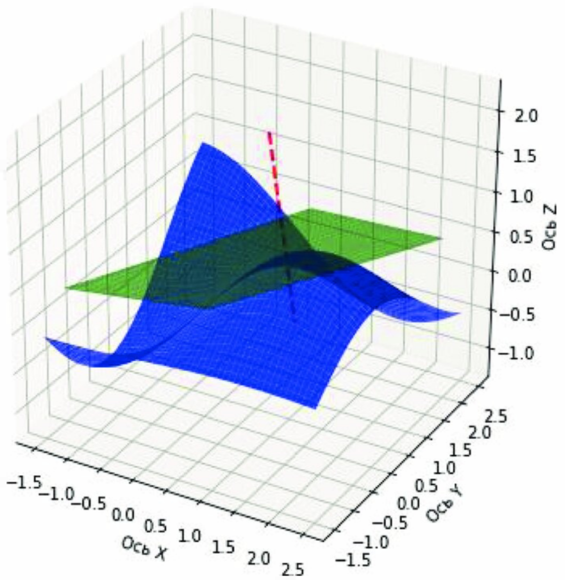
$$Point3D\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}, -\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2} - t\right)$$



```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig = plt.figure(figsize=(7,7))
ax = fig.gca(projection='3d')

z = lambda w: np.sin(w[0])*np.cos(w[1])
x = np.linspace(-1.5, 2.5, 100)
y = np.linspace(-1.5, 2.5, 100)
x, y = np.meshgrid(x, y)
Z = z((x,y))
ax.plot_surface(x, y, Z, color='b', alpha=0.7)
```



```
''' Касательная плоскость '''
z = lambda w: w[0]/2 - w[1]/2 + 1/2
y = x = np.linspace(-1.3, 2.3, 100)
x, y = np.meshgrid(x, y)
Z = z((x,y))
ax.plot_surface(x, y, Z, color='g', alpha=0.7)

''' Нормаль '''
t = np.linspace(-0.6, 0.3, 100)
x = t + np.pi/4
y = -t + np.pi/4
z = -2*t + 1/2
plt.plot(x, y, z, '--', lw = 2, color = 'r')

ax.set_xlabel('Ось X')
ax.set_ylabel('Ось Y')
ax.set_zlabel('Ось Z')
plt.show()
```



Ответ: $p\colon\ x - y - 2z + 1 = 0;\ \ l\colon\ \dfrac{x-\frac{\pi}{4}}{1} = \dfrac{y-\frac{\pi}{4}}{-1} = \dfrac{z-\frac{1}{2}}{-2}$

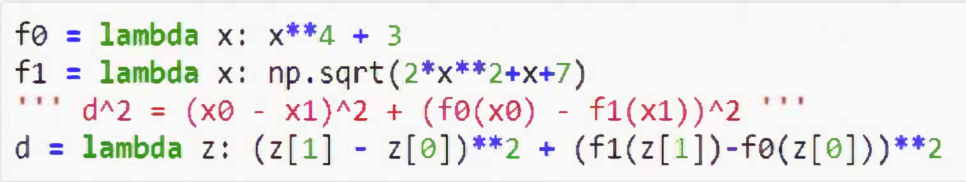
или $x = t + \frac{\pi}{4},\ y = -t + \frac{\pi}{4},\ z = -2t + \frac{1}{2},\ \ t \in \mathbb{R}$.

37. Найти расстояние между кривыми $y = x^4 + 4$ и $y = \sqrt{2x^2 + x + 7}$.

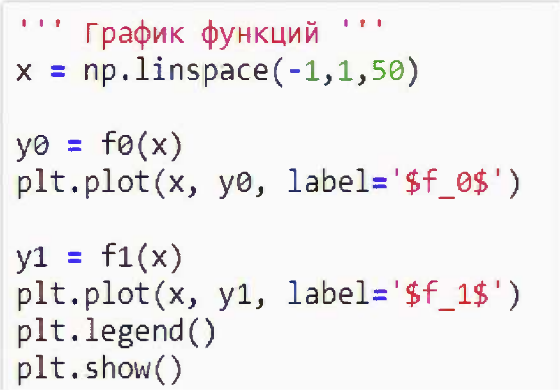
Расстоянием между кривыми называется наименьшее расстояние между точками этих кривых. Пусть

$$f_0(x) = x^4 + 4, f_1(x) = \sqrt{2x^2 + x + 7}.$$

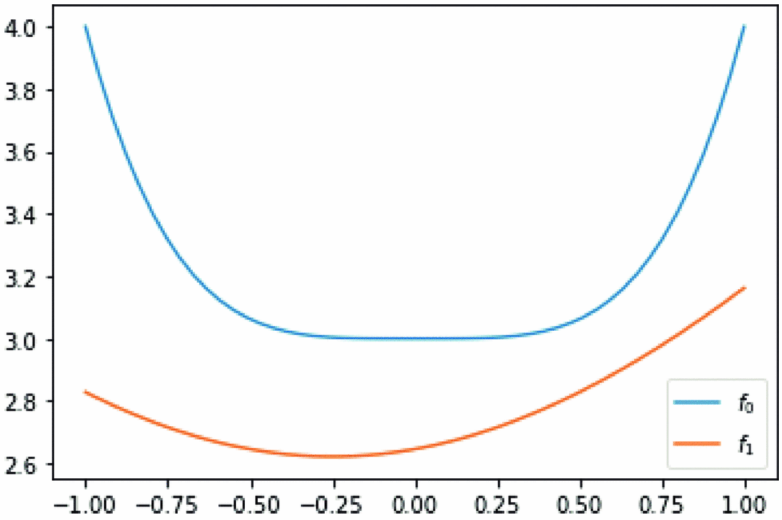
Определим функцию двух нереременных $d(x_0, x_1)$ как квадрат расстояиия между точками $(x_0; f_0(x_0))$ и $(x_1; f_1(x_1))$ (то есть точками на наших двух крнвых). Квадратный корень из минимального значенпя функцнп d н будет искомым расстояннем.

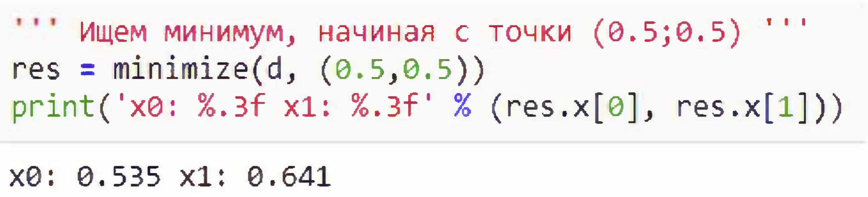


```
f0 = lambda x: x**4 + 3
f1 = lambda x: np.sqrt(2*x**2+x+7)
''' d^2 = (x0 - x1)^2 + (f0(x0) - f1(x1))^2 '''
d = lambda z: (z[1] - z[0])**2 + (f1(z[1])-f0(z[0]))**2
```



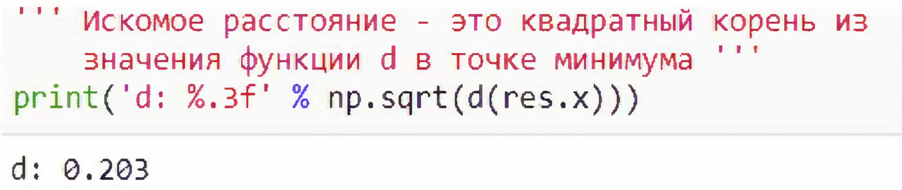
```
''' График функций '''
x = np.linspace(-1,1,50)

y0 = f0(x)
plt.plot(x, y0, label='$f_0$')

y1 = f1(x)
plt.plot(x, y1, label='$f_1$')
plt.legend()
plt.show()
```





```
''' Ищем минимум, начиная с точки (0.5;0.5) '''
res = minimize(d, (0.5,0.5))
print('x0: %.3f x1: %.3f' % (res.x[0], res.x[1]))
```

```
x0: 0.535 x1: 0.641
```



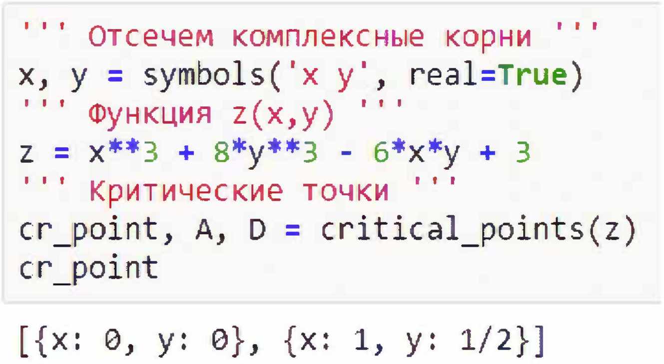
```
''' Искомое расстояние - это квадратный корень из
    значения функции d в точке минимума '''
print('d: %.3f' % np.sqrt(d(res.x)))
```

```
d: 0.203
```

38. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 3$.

Решение. Используем функции critical_points() и suff_indic() (тексты функций на с. 24).

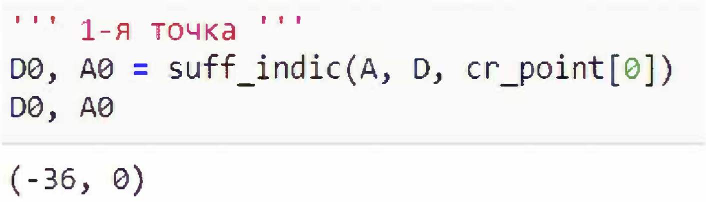
```
from sympy import *
```



```
''' Отсечем комплексные корни '''
x, y = symbols('x y', real=True)
''' Функция z(x,y) '''
z = x**3 + 8*y**3 - 6*x*y + 3
''' Критические точки '''
cr_point, A, D = critical_points(z)
cr_point
```

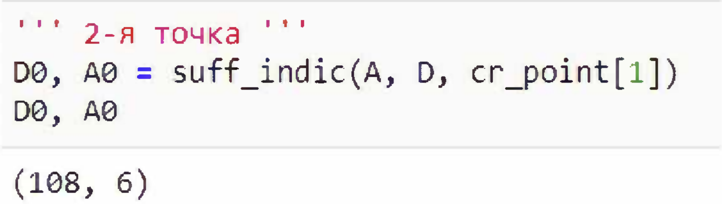
```
[{x: 0, y: 0}, {x: 1, y: 1/2}]
```

Две критические точки, возвращаемые в виде кортежа.



```
''' 1-я точка '''
D0, A0 = suff_indic(A, D, cr_point[0])
D0, A0
```

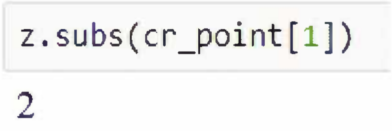
```
(-36, 0)
```



```
''' 2-я точка '''
D0, A0 = suff_indic(A, D, cr_point[1])
D0, A0
```

```
(108, 6)
```

Первая точка не являются точкой экстремума $(\Delta = -36 < 0)$, вторая – точка минимума $(\Delta = 108 > 0, A = 6 > 0)$. Значения функции в этой точке:



```
z.subs(cr_point[1])
```

```
2
```

Ответ: $z_{\min} = z\left(1; \frac{1}{2}\right) = 2$.

39. Найти экстремумы функции $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 12\ln y$.

Решение.

```
from sympy import *
x, y = symbols('x y')
z = x**2+y**2-2*log(x)-12*log(y)
cr_point, A, D = critical_points(z)
cr_point
```

```
[{x: -1, y: -sqrt(6)},
 {x: -1, y: sqrt(6)},
 {x: 1, y: -sqrt(6)},
 {x: 1, y: sqrt(6)}]
```

Для критических точек найдены 4 значения, но 3 из них не входят в область допустимых значений функций $\ln x$ ($x > 0$) и $\ln y$ ($y > 0$). Для критической точки $x = 1, y = \sqrt{6}$ вычисляем значения параметров A и Δ:

```
D0, A0 = suff_indic(A, D, cr_point[3])
D0, A0
```

```
(16, 4)
```

$\Delta = 16 > 0$ – экстремум есть; $A = 4 > 0$ – минимум.

```
z.subs({x:1,y:sqrt(6)})
```

```
-12*log(sqrt(6)) + 7
```

Ответ: $z_{\min} = z(1;\sqrt{6}) = 7 - 12\ln(\sqrt{6}) = 7 - 6\ln 6$.

40. Найти экстремумы функции $z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 8x$.

Решение.

```
x, y = symbols('x y')
z = x**2 - 4*x*y - 2*y**2 + 8*x
cr_point, A, D = critical_points(z)
cr_point
```

```
[{x: -4/3, y: 4/3}]
```

Одна критическая точка.

```
D0, A0 = suff_indic(A, D, cr_point[0])
D0, A0
```

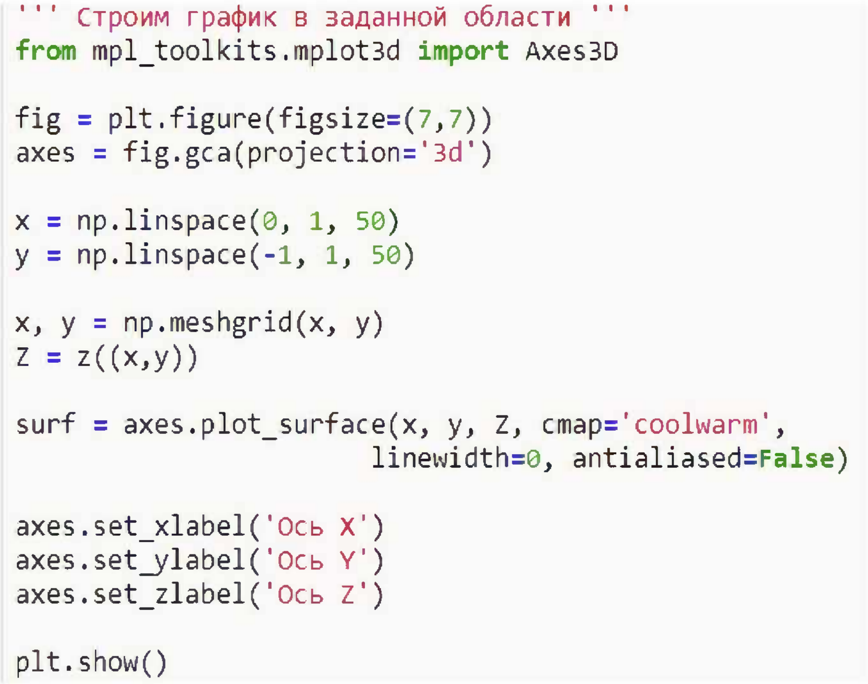
```
(-24, 2)
```

$\Delta = -24 < 0$ – экстремума нет.

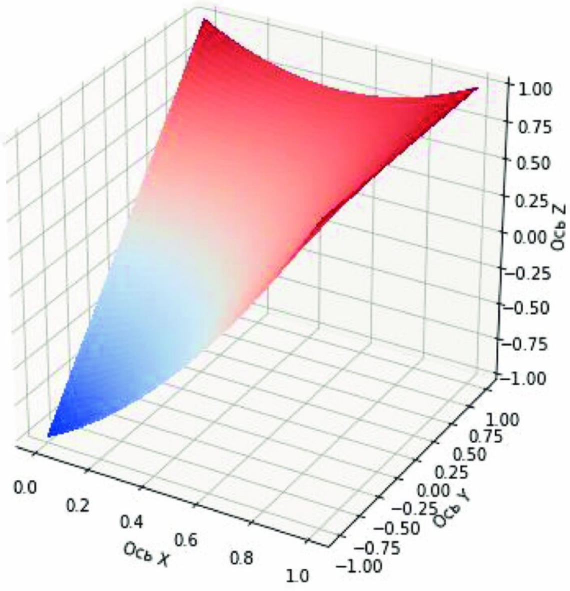
41. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - xy + y$ в области $0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$.

Решение. Функция z:

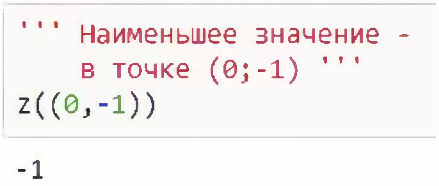
```
z = lambda w: w[0]**2 - w[0]*w[1] + w[1]
```



```
''' Строим график в заданной области '''
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

fig = plt.figure(figsize=(7,7))
axes = fig.gca(projection='3d')

x = np.linspace(0, 1, 50)
y = np.linspace(-1, 1, 50)

x, y = np.meshgrid(x, y)
Z = z((x,y))

surf = axes.plot_surface(x, y, Z, cmap='coolwarm',
                       linewidth=0, antialiased=False)

axes.set_xlabel('Ось X')
axes.set_ylabel('Ось Y')
axes.set_zlabel('Ось Z')

plt.show()
```

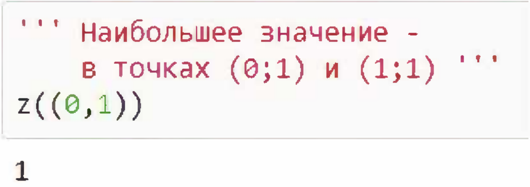


Заключаем, что наименьшее и наибольшее значения достигаются на границах области определения.



```
''' Наименьшее значение -
    в точке (0;-1) '''
z((0,-1))
```

```
-1
```



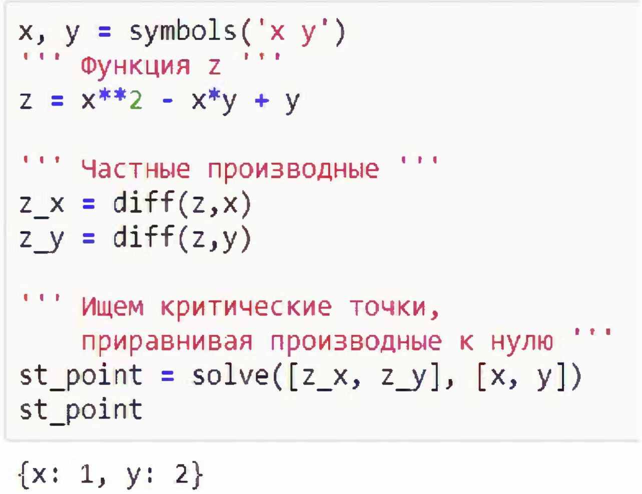
```
''' Наибольшее значение -
    в точках (0;1) и (1;1) '''
z((0,1))
```

```
1
```

```
z((1,1))
```

```
1
```

Проверим результат, используя библиотеку sympy.



```
x, y = symbols('x y')
''' Функция z '''
z = x**2 - x*y + y

''' Частные производные '''
z_x = diff(z,x)
z_y = diff(z,y)

''' Ищем критические точки,
    приравнивая производные к нулю '''
st_point = solve([z_x, z_y], [x, y])
st_point
```

```
{x: 1, y: 2}
```

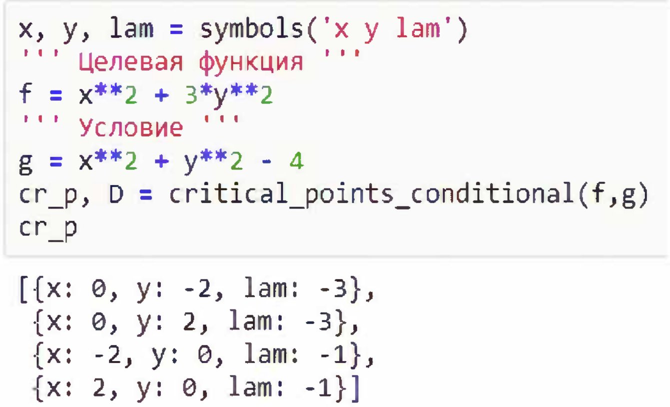
Найдена критическая точка, но она находится вие заданиой области.

Ответ: наименьшее значение: –1, наибольшее: 1.

42. Найти экстремумы функции $z = x^2 + 3y^2$ при ограничеиии $x^2 + y^2 = 4$.

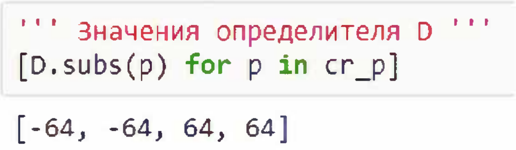
Решение.

Исиользуем функцию critical_points_conditional() (текст на с. 24).



```
x, y, lam = symbols('x y lam')
''' Целевая функция '''
f = x**2 + 3*y**2
''' Условие '''
g = x**2 + y**2 - 4
cr_p, D = critical_points_conditional(f,g)
cr_p
```

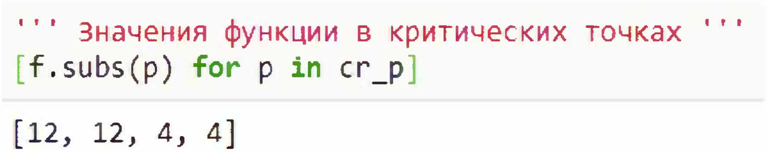
```
[{x: 0, y: -2, lam: -3},
 {x: 0, y: 2, lam: -3},
 {x: -2, y: 0, lam: -1},
 {x: 2, y: 0, lam: -1}]
```



```
''' Значения определителя D '''
[D.subs(p) for p in cr_p]
```

```
[-64, -64, 64, 64]
```

Первые две точки – максимум (определитель $\Delta < 0$), третья и четвертая – мииимум ($\Delta > 0$).



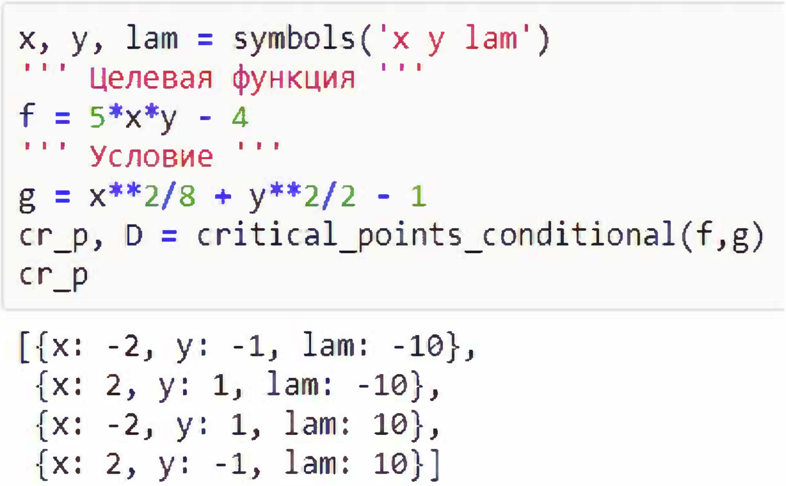
```
''' Значения функции в критических точках '''
[f.subs(p) for p in cr_p]
```

```
[12, 12, 4, 4]
```

Ответ: $z_{\min} = z(-2;0) = z(2;0) = 4;$ $z_{\max} = z(0;-2) = z(0;2) = 12.$

43. Найти экстремумы функции $z = 5xy - 4$, если переменные x и y положительны и удовлетворяют уравнению связи $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$

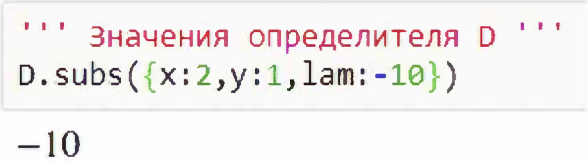
Решение.



```
x, y, lam = symbols('x y lam')
''' Целевая функция '''
f = 5*x*y - 4
''' Условие '''
g = x**2/8 + y**2/2 - 1
cr_p, D = critical_points_conditional(f,g)
cr_p
```

```
[{x: -2, y: -1, lam: -10},
 {x: 2, y: 1, lam: -10},
 {x: -2, y: 1, lam: 10},
 {x: 2, y: -1, lam: 10}]
```

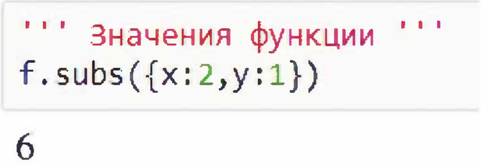
Четыре критические точки, но только вторая точка удовлетворяет условию положительности переменных. Значение определителя Δ в этой точке:



```
''' Значения определителя D '''
D.subs({x:2,y:1,lam:-10})
```

-10

Точка минимума.



```
''' Значения функции '''
f.subs({x:2,y:1})
```

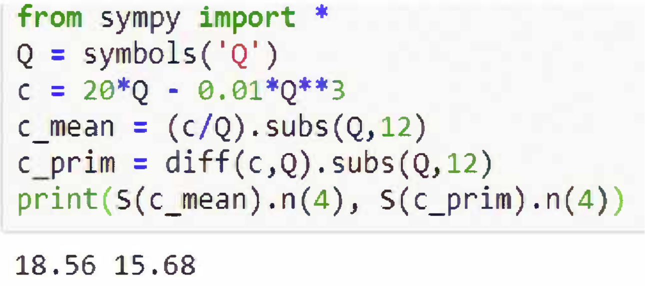
6

Ответ: $z_{\min} = z(2;1) = 6.$

44. Зависимость издержек производства C от объема выпускаемой продукции Q выражается формулой $C = 20Q - 0{,}01Q^3$. Найти средние и предельные издержки при объеме продукции $Q = 12$ ден. ед.

Решение.

Средние издержки вычисляются по формуле $\overline{C} = \frac{C}{Q}$, предельные – по формуле $MC = C'(Q)$.

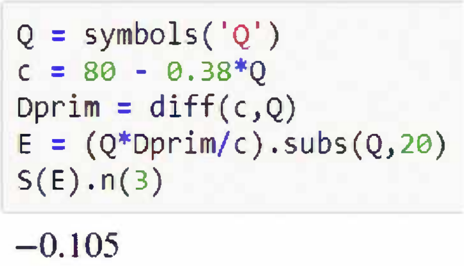


```
from sympy import *
Q = symbols('Q')
c = 20*Q - 0.01*Q**3
c_mean = (c/Q).subs(Q,12)
c_prim = diff(c,Q).subs(Q,12)
print(S(c_mean).n(4), S(c_prim).n(4))
```

```
18.56 15.68
```

Ответ: $\overline{C} = 18{,}56$ ден. ед.; $MC = 15{,}68$ ден. ед.

45. Зависимость между себестоимостью продукции C и объемом ее производства Q выражается формулой $C(Q) = 80 - 0{,}38Q$. Определить эластичность себестоимости при выпуске продукции $Q = 20$ ден. ед.



```
Q = symbols('Q')
c = 80 - 0.38*Q
Dprim = diff(c,Q)
E = (Q*Dprim/c).subs(Q,20)
S(E).n(3)
```

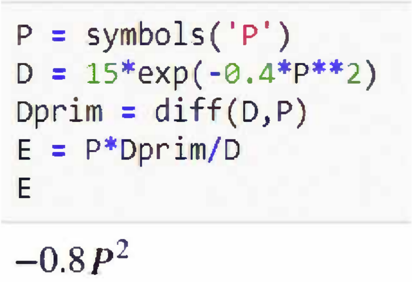
-0.105

Эластичность себестоимости $C = -0{,}105$. Это означает, что при данном объеме выпуска продукции увеличение объема на 1% приведет к снижению себестоимости продукции на 0,105%.

Ответ: $E(C) = -0{,}105$.

46. Зависимость функции спроса D от цены P выражается формулой $D(P) = 15e^{-0{,}4P^2}$. При каких значениях цены P спрос будет эластичным?

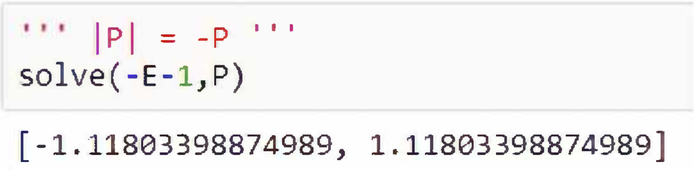
Решение. Эластичность спроса:



```
P = symbols('P')
D = 15*exp(-0.4*P**2)
Dprim = diff(D,P)
E = P*Dprim/D
E
```

$-0.8P^2$

Модуль эластичности спроса равен $0{,}8P^2$. Найдем, при какой цене эластичность равна 1.



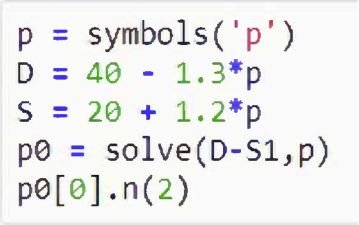
```
''' |P| = -P '''
solve(-E-1,P)
```

```
[-1.11803398874989, 1.11803398874989]
```

Ответ: Спрос эластичный при значениях цены $P > 1{,}118$.

47. Функция спроса D и предложения S от цены p имеют вид: $D(p) = 40 - 1{,}3p$, $S(p) = 20 + 1{,}2p$. Найти эластичность спроса в точке равновесной цены.

Решение. Находим равновесную цену из условия $D = S$:

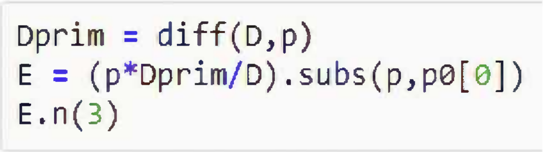


```
p = symbols('p')
D = 40 - 1.3*p
S = 20 + 1.2*p
p0 = solve(D-S1,p)
p0[0].n(2)
```

```
8.0
```

Функция solve () возвращает решение p0 в виде списка, и для вывода на печать берется нулевой элемент списка $p0[0]$. Для вывода на печать заданного числа k знаков используется метод .n(k).

Находим значение эластичности.



```
Dprim = diff(D,p)
E = (p*Dprim/D).subs(p,p0[0])
E.n(3)
```

```
–0.351
```

Ответ: $E(D) = -0{,}351$.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1 – 4 вычислить y'.

1. $y = \frac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$.

Ответ: $\frac{9x^5}{2\sqrt{1-x^3}}$.

2. $y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}(x-1)}$.

3. $y = \mathrm{tg}(\ln x) - 2e^{-x} + \frac{1}{\cos(2x)}$.

Ответ: $\frac{1}{x\cos^2(\ln x)} + 2e^{-x} + \frac{2\sin 2x}{\cos^2(2x)}$.

4. $y = (x^3+4)^{\sin x}$.

Ответ: $(x^3+4)^{\sin x-1}(3x^2\sin x + (x^3+4)\ln(x^3+4)\cos x)$.

5. Найти $y'(1)$ для функции $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Ответ: 1.

6. Дана функция $y = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2+1}$. Найти $y'(0)$.

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

7. Найти $y''(\pi)$, если $y = \frac{\sin^5 x}{3x}$.

Ответ: 0.

8. Найти $y'(1)$, если $y = x \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Ответ: $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

9. Найти $y'(\pi)$, если $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\cos 3x}$.

Ответ: $\frac{3+18\pi^2\ln\pi}{4\pi^2\sqrt{\pi}}$.

10. Найти вторую производную функции $y = xe^{x^2}$.

Ответ: $2x(2x^2+3)e^{x^2}$.

11. Найти вторую производную функции $y = \arcsin\sqrt{x}$.

Ответ: $\frac{2x-1}{4\sqrt{x^3(1-x)^3}}$.

12. Найтп вторую производную функции $y = \frac{x^2+x}{x-1}$.

Ответ: $\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.

13. Найти зиачение десятой производной $y^{(10)}(1)$ от функции

$$y = \ln(1 + x - x^2)$$

в точке $x = 1$.

Ответ: $-44\,634\,240$.

14. Найтп $y^{(8)}(0)$ для фупкцпи $y = \frac{x^2}{1-x}$.

Ответ: $40\,320$.

15. Найти $y^{(20)}$ для функции $y = x^2e^{2x}$.

Ответ: $1048576(x^2+20x+95)e^{2x}$.

16. Найтп $y^{(4)}$ для функцпи $y = e^x\cos x$.

Ответ: $-4e^x\cos x$.

17. Решить уравнение $y' = 0$, где

$$y(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x}, \; x \in [0;\pi].$$

Ответ: $0; \frac{\pi}{2}; \pi$.

18. Решить уравнение $y'' = 0$, где

$$y(x) = x^3e^{-x}.$$

Ответ: $0; 3-\sqrt{3}; 3+\sqrt{3}$.

19. Найти $f'(x)$, если

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

Ответ: $6x^2$.

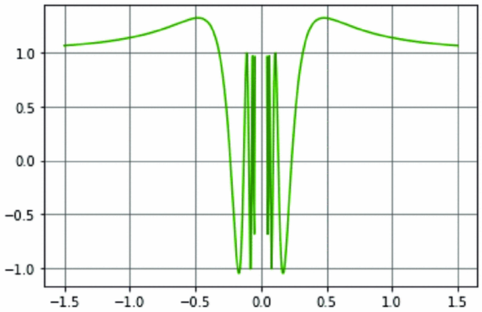
20. Показать, что функция $y = (x+1)e^x$ удовлетворяет уравнению $y' - y = e^x$.

21. Показать, что функция $y = 5e^{-2x} - 3e^x$ удовлетворяет уравнению $y''' - 3y' + 2y = 0$.

22. Построить график производной функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ответ:



23. Найти y' для функции, заданной неявно.

$$y^2 = 2x.$$

Ответ: $y' = \frac{2}{y}$.

24. Найти y' для функции, заданной неявно.

$$x^2 + 2xy - y^2 = 2x.$$

Ответ: $y' = \frac{1-x-y}{x-y}$.

25. Найти y' для функции, заданной неявно.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Ответ: $y' = -\frac{16x}{9y}$.

26. Найти y' для функции, заданной неявно.

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}.$$

Ответ: $y' = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$.

27. Найти y' для функции, заданной неявио.

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ответ: $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

28. Найти y' для функции, заданной неявно.

$$x^4 + y^4 = 4xy.$$

Ответ: $y' = \frac{x^3-y}{x-y^3}$.

29. Найти y' для функции, заданной неявно.

$$x^y = y^x.$$

Ответ: $y' = \frac{-xy^{x+1}\ln y + x^y y^2}{x(xy^x - x^y y \ln x)}$.

30. Найти y' и y'' для функции, заданной неявно.

$$2y\ln y = x.$$

Ответ: $y' = \frac{1}{2(\ln y + 1)}$; $y'' = -\frac{1}{4y(\ln y + 1)^3}$.

31. Функция $y(x)$ задана неявно соотношением:

$$x^2 + 2xy - y^2 = 2x.$$

Чему равно y' при $x = 3$ и $y = 2$?

Ответ: -4.

32. Найти y'' для функции, заданной в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \sin t + \cos\frac{\pi}{5}, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

Ответ: $y'' = 2$.

33. Фуикции $y(x)$ задана в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1 + t^2). \end{cases}$$

Чему равно y'' ири $t = -2$?

Ответ: 10.

34. Найти y'' для фуикции, заданной в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$$

Ответ: $y'' = 0$.

35. Найти y' для функции, задаииой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

(a – некоторая константа).

Ответ: $y' = -\operatorname{tg} t$.

36. Найти y' и y'' для функции, заданной в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = e^{2t}\cos^2 t, \\ y = e^{2t}\sin^2 t. \end{cases}$$

Ответ: $y' = \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$, $y'' = \frac{e^{2t}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)}{4\cos^3 t \cdot \cos^3\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$.

37. Найти левую и правую производные функции $f(x)$ в точке $x = 0$, если

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2, & x < 0 \\ 6\sqrt[3]{x^4}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = 0$.

38. Написать уравнеиия касательной к графику функцни $y = \frac{x^3-x+1}{x^2+3}$ в точке с абсцнссой $x_0 = 2$.

Ответ: $y = x - 1$.

39. Написать уравнения касательной к графику функции

$$y = \frac{x-6}{x+3}$$

в точке его пересечения с осью ордииат.

Ответ: $y = 2x - 3$.

40. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции

$$y = 2x^2 - 6x + 3$$

в точке с абсцнссой $x_0 = 1$.

Ответ: $y = 1 - 2x$; $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

41. Наннсать уравненне касательной и нормалн к графику функцин

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Ответ: $4x + 25y - 13 = 0$; $125x - 20y - 246 = 0$.

42. В каких точках кривой $y = x^2 - 4x - 5$ касательиая к ней параллельна нрямой $y = 2x$?

Ответ: $(3; -8)$.

43. В каких точках кривой $y = -2x^2 - 8x + 15$ касательиая к ней перпендикулярна прямой $y = -\frac{1}{4}x$?

Ответ: $(-3; 21)$.

44. Под каким углом графнк функции $y = \cos x$ пересекает ось Ox? (среди всех значений точек пересечения взять нанменьшую положительную).

Ответ: -45°.

45. Под какнм углом крнвая $y = \ln x$ пересекает ось Ox?

Ответ: 45°.

46. Под каким углом пересекаются крнвые $y = x^2$ и $x = y^2$ в точке $(1; 1)$?

Ответ: $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

47. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$.

Ответ: $f_{\max} = f(0{,}184) = 1{,}0887$; $f_{\min} = f(1{,}816) = -1{,}0887$.

48. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 3x$.

Ответ: $f_{\max} = f(-1) = 2$; $f_{\min} = f(1) = -1$.

49. Исследовать на экстремум функцию $y = (x + 1)e^{-x}$.

Ответ: $f_{\max} = f(0) = 1$.

50. Исследовать на экстремум функцию $y = x \cdot \ln x$.

Ответ: $f_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

51. Исследовать на экстремум функцию

$$y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 1}.$$

Ответ: $f_{\min} = f(-0{,}236) = -0{,}386$.

52. Исследовать на экстремум функцню

$$y = x^2 - x - 2e^{x-2}.$$

Ответ: $f_{\min} = f(0{,}802) = -0{,}762$; $f_{\max} = f(2{,}858) = 0{,}593$.

53. Найти точки перегиба и исследовать характер выпуклости кривой

$$y = (x + 1)e^{-x}.$$

Ответ: Точка нерегиба $x = 1$. При $x \in (-\infty; 1)$ выпукла вверх; при $x \in (1; \infty)$ выпукла вниз.

54. Найти точки перегиба фуикции

$$y = \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 4}$$

и доказать, что они лежат иа одной прямой.

Ответ: $\left(-4;-\frac{1}{4}\right)$, $(0;0)$, $\left(2;\frac{1}{4}\right)$.

55. Найтн наибольшее и наимеиьшее значения функцни $f(x)$ на отрезке.

$$f(x) = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}, \qquad x \in [-1;2].$$

Ответ: иаимеиьшее значение: 0, наибольшее: 2.

56. Найтн наибольшее и наименьшее значения функцни $f(x)$ на отрезке.

$$f(x) = 2\sqrt{x-1} - x + 2, \qquad x \in [1;5].$$

Ответ: наименьшее значенне: 1, наибольшее: 2.

57. Построить график функции $f(x)$ с указанием точек экстремума, точек перегиба и асимптот.

$$f(x) = \frac{3-2x}{(x-2)^2}.$$

Ответ: $y_{max} = y(1) = 1$; точка перегиба: $x = \frac{1}{2}$; вертикальиая асимптота: $x = 2$; горнзонтальная аснмптота: $y = 0$.

58. Построить график функции $f(x)$ с указанием точек экстремума, точек перегиба и асимптот.

$$f(x) = \frac{x^2-16}{5(x+5)}.$$

Ответ: $y_{min} = y(-2) = -0{,}8$; $y_{\max} = y(-8) = -3{,}2$; точки перегиба отсутствуют; вертикальная асимнтота: $x = -5$; наклонная асимнтота: $y = \frac{1}{5}x - 1$.

59. Построить график функции $f(x)$ с указанием точек экстремума, точек перегиба и асимптот.

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x} - x^2.$$

Ответ: $y_{\max} = y(1) = -2$; точка перегиба: $x = -\sqrt[3]{2}$; вертикальная асимптота: $x = 0$.

60. Построить график функции $f(x)$ с указанием точек экстремума, точек перегиба н асимптот.

$$f(x) = x^3 e^x.$$

Ответ: $y_{min} = y(-3) = -\frac{27}{e^3}$; точки иерегиба: $x_1 = -3 - \sqrt{3}$;

$x_2 = -3 + \sqrt{3}$; горизонтальная асимптота: $y = 0$ прн $x \to -\infty$.

61. Построить график функции $f(x)$ с указаиием точек экстремума, точек перегиба и асимптот.

$$f(x) = \frac{x}{2\ln x}.$$

Ответ: $y_{min} = y(e) = \frac{e}{2}$; точки перегиба: $x = e^2$; вертикальная асимптота: $x = 1$.

62. Построить график функции $f(x)$ с указанием точек экстремума, точек иерегиба и асимптот.

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+2)e^{\frac{1}{3x}}.$$

Ответ: $y_{max} = y\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3e}$; $y_{\min} = y(1) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{e}$; точка перегиба: $x = -\frac{2}{13}$; вертикальиая асимитота: $x = 0$ при $x \to 0+$; паклопиая асимитота: $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{6}$.

63. Построить график функции $f(x)$ с указаиием точек экстремума, точек перегиба и асимптот.

$$f(x) = \frac{1}{2}|x^3 + 1|.$$

Ответ: $y_{\min} = y(-1) = 0$; точка перегиба: $x = 0$; асимптоты отсутствуют.

64. Построить график функции $f(x)$ с указанием точек экстремума, точек перегиба и асимптот.

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}.$$

Ответ: $y_{max} = y(0) = 0$; $y_{\min} = y(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}$; точка нерегиба: $x = -1$; вертикальпая асимптота: $x = 1$; наклоипая асимптота: $y = x$.

65. Построить график функции $f(x)$ с указанием точек экстремума, точек иерегиба и асимптот.

$$y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x+4)^2}.$$

Ответ: $y_{max} = y(-4) = \sqrt[3]{16}$; $y_{\min} = y(0) = -\sqrt[3]{16}$; точка перегиба: $x = -2$; горизонтальная асимптота: $y = 0$.

66. Найти частные производпые иервого порядка функции

$$z = x^y.$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

67. Найти частную производную $\frac{\partial^5 z}{\partial x^3 \partial y^2}$ функции $z = \frac{x-y}{x+y}$.

Ответ: $\frac{48(3y-2x)}{(x+y)^6}$.

68. Найти значение производной $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ функции $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точке $M(1;2;1)$.

Ответ: $\frac{4}{27}$.

69. Вычислить градиент функции $z = \frac{x^2+1}{y-2}$.

Ответ: $\operatorname{grad} z = \left(\frac{2x}{y-2}; -\frac{x^2+1}{(y-2)^2}\right)$.

70. Вычислить градиент и его модуль для функции

$$u = x^2 + y^2 - z^2$$

в точке $M(1;1;-2)$.

Ответ: $\operatorname{grad} z = (2;2;4)$; $|\operatorname{grad} z| = 4{,}899$.

71. Найти производную функции $z = 5x^2y - y^3$ в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{AB}$, где $A(2;1)$, $B(6;4)$.

Ответ: $\frac{91}{5}$.

72. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M(1;1)$, в направлении l, составляющем угол $\alpha = 60^\circ$ с положительным направлением оси Ox.

Ответ: $1 - \sqrt{3}$.

73. Найти производную функции $z = \frac{xy}{x+y+1}$ в точке $M(2;1)$ по направлению радиус-вектора этой точки.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{8}$.

74. Определить угол между градиентами функции

$$u = x^2 + y^2 - z^2$$

в точках $A(\varepsilon;0;0)$ и $B(0;\varepsilon;0)$.

Ответ: 90°.

75. Провести касательную плоскость и нормаль к поверхности:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$$

в точке $M(3;4;-7)$.

Ответ: p: $17x + 11y + 5z - 60 = 0$; l: $\frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}$ или $x = 17t + 3,\ y = 11t + 4,\ z = 5t - 7,\ t \in \mathbb{R}$.

76. Провести касательиую илоскость и иормаль к поверхности:

$$G:\ x^2yz + 2x^2z - 3xy + 2 = 0$$

в точке $M(1;0;-1)$.

Ответ: $p:\ 2x + 2y - z - 3 = 0;$

$l:\ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ или $x = 2t + 1,\ y = 2t,\ z = -t - 1,\ t \in \mathbb{R}$.

77. Найти расстояние между кривой $y = x^2$ и прямой $x - y - 5 = 0$.

Ответ: $d = 3{,}359$.

78. Найти экстремумы функции $z = x^3 + xy + y^2$.

Ответ: $z_{\min} = z\left(1;\frac{1}{2}\right) = 2$.

79. Найти экстремумы функции $z = (x-1)^2 + xy + y^2$.

Ответ: $z_{\min} = z\left(\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}$.

80. Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Ответ: $z_{\min} = z(0{,}3) = -9$.

81. Найти экстремумы фуикцин $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

Ответ: $z_{\max} = z(4,-2) = 13$.

82. Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Ответ: $z_{\min} = z(1{,}1) = -1$.

83. Найти экстремумы функции $z = -x^2 + xy + y^2 - 2y$.

Ответ: нет точек экстремума.

84. Найти экстремумы функции $z = 2x^2(1-y) + y^2$.

Ответ: $z_{\min} = z(0{,}0) = 0$.

85. Найти экстремумы функции $z = 2x - 4y + 3$ при ограиичении: $x^2 + y^2 = 5$.

Ответ: $z_{\min} = z(-1{,}2) = -7;\ z_{\max} = z(1,-2) = 13$.

86. Найти экстремумы функции $z = x + y$ нри ограничении: $x^2 + y^2 = 9$.

Ответ: $z_{\min} = z(-1{,}342;\ 2{,}683) = -10{,}416;$
$z_{\max} = z(1{,}342;-2{,}683) = 16{,}416$.

87. Пайти экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2$ нри ограничении: $x^2 + y^2 = 1$.

Ответ: $z_{\min} = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2};$
$z_{\max} = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}$.

88. Найти экстремумы функции $z = x + 3y$ при ограиичении: $x^2 + y^2 = 10$.

Ответ: $z_{\min} = z(-1;-3) = -10;\ \ z_{\max} = z(1;3) = 10.$

89. Найти экстремумы фуикции $z = 3y^3 + 4x^2 - xy$ ири ограничении: $x + y = 0$.

Ответ: $z_{\min} = z(0;0) = 0;\ \ z_{\max} = z\left(\frac{10}{9}, -\frac{10}{9}\right) = \frac{500}{243}.$

90. Найти экстремумы функции $z = xy + 5$ при условии выиолнеиия ограничений: $x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 = 10.$

Ответ: $z_{\max} = z\left(\sqrt{5}, \sqrt{5}\right) = 10.$

91. Найти экстремумы функции $z = xy$ при ограничеиии: $2x + 3y = 5$.

Ответ: $z_{\max} = z\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{24}.$

92. Найти экстремумы функции $z = x^2 + y^2$ при ограиичении: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1.$

Ответ: $z_{\min} = z(2{,}2) = 8.$

93. Зависимость между издержками производства С и объемом продукции Q выражается функцией $C = 40Q - 0{,}1Q^3$. Определить средние и иредельные издержки при объеме нродукции $Q = 8$ ед.

Ответ: 33,6; 20,8.

94. Определить коэффициеиты эластичности производственной функции Кобба–Дугласа $z = 4{,}5x^{0{,}33}\ y^{0{,}66}$.

Ответ: $E(x) = 0{,}33;\ \ E(y) = 0{,}66.$

95. Для производствениой функции $z = 4x^3\ - xy^2 + 5y$ определить коэффициенты эластичности $E_x(z)$ и $E_y(z)$ ресурсов x и y, если $x = 1, y = 2$.

Ответ: 0,8; 0,2.

96. Зависимость между себестоимостью продукции C и объемом ее производства Q выражается формулой $C(Q) = 65 - 0{,}3Q$. Определить эластичность себестоимости при выпуске продукции $Q = 20$ ден. ед.

Ответ: $E(C) = -0{,}102.$

97. Функция спроса описывается формулой $D(P) = 8 \cdot 3^{-0{,}2P^3}$. Найти, при каких значеииях цены P сирос будет эластичным.

Ответ: при $P > 1{,}149$ ден. ед.

98. Пусть Q – количество единиц реализоваииого товара, $C(Q)$ и $R(Q)$ – соответственно затраты на производство и доход от реализации товара. Определить, при каком значении Q достигается максимум прибыли, если

$$C(Q) = Q^3 - 35Q^2 + 130Q + 2000; \quad R(Q) = 95Q - 0{,}4Q^2.$$

Чему равно максимальное значение прибыли?

Ответ: $C_{max} = C(22{,}55) = 3338{,}21$ ден. ед.

99. Функция спроса D и предложения S от цены p на мировом рынке нефти имеют вид: $D(p) = 25 - 0{,}8p$, $S(p) = 18 + 1{,}4p$. Найти эластичность спроса в точке равновесной цены.

Ответ: $-0{,}126$.

100. Зависимость объема выпуска продукции V от капитальных затрат K определяется функцией $V = V_0 \ln(4 + K^3)$. Найти интервал изменения K, на котором увеличение капитальных затрат неэффективно.

Ответ: $K > 2$.

4. Интегралы

Дифференциал функции

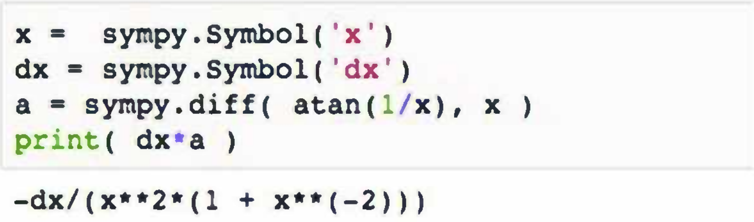
Пример 1. Найти дифференциал функции $y = arctg\left(\frac{1}{x}\right)$.

Решение. По определению

$$dy = y' \cdot dx$$

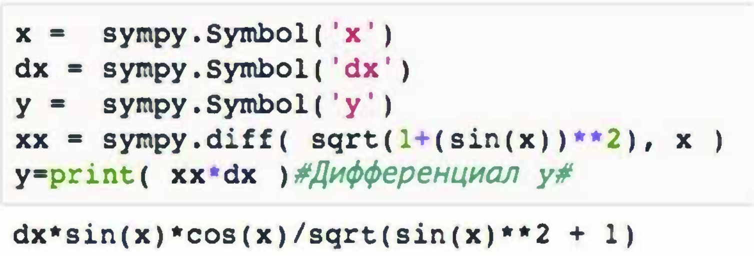
Поэтому, чтобы найти дифференциал нужно найти производную и умножить на дифференциал аргумента.

$$d\left(arctg\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}dx.$$



```
x =  sympy.Symbol('x')
dx = sympy.Symbol('dx')
a = sympy.diff( atan(1/x), x )
print( dx*a )
```

```
-dx/(x**2*(1 + x**(-2)))
```



```
x =  sympy.Symbol('x')
dx = sympy.Symbol('dx')
y =  sympy.Symbol('y')
xx = sympy.diff( sqrt(1+(sin(x))**2), x )
y=print( xx*dx )#Дифференциал y#
```

```
dx*sin(x)*cos(x)/sqrt(sin(x)**2 + 1)
```

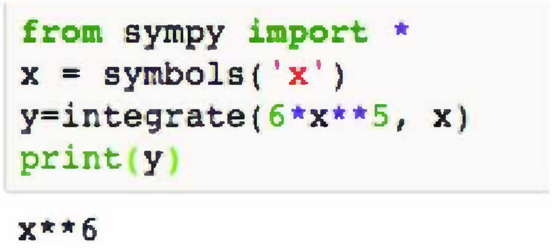
Ответ: $-\frac{1}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}dx$.

Неопределенный интеграл

Неопределенные интегралы $\int f(x)dx$ находятся с помощью функции integrate (f(x), x), где *f*(*x*) – подынтегральная функция, *x* – переменная интегрирования.

Пример 2. Найти неонределенный ннтеграл.

$$\int 6x^5 dx$$



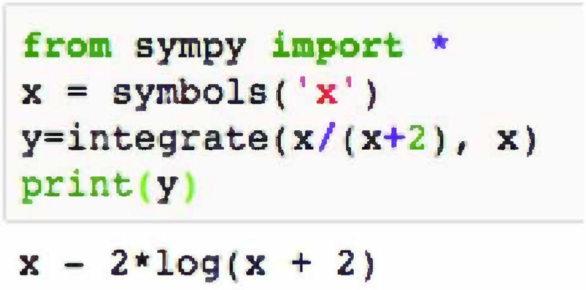
```
from sympy import *
x = symbols('x')
y=integrate(6*x**5, x)
print(y)
```

```
x**6
```

Ответ: x^6.

Пример 3.

$$\int \frac{x}{x+2}dx$$



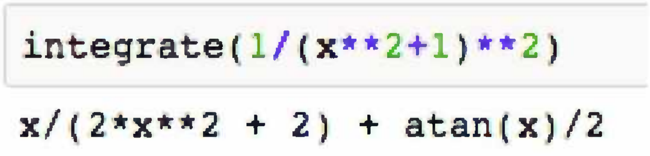
```
from sympy import *
x = symbols('x')
y=integrate(x/(x+2), x)
print(y)
```

```
x - 2*log(x + 2)
```

Ответ: $x-2\ln(x+2)$.

Пример 4.

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$



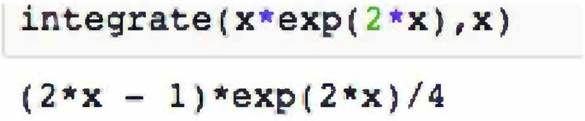
```
integrate(1/(x**2+1)**2)
```

```
x/(2*x**2 + 2) + atan(x)/2
```

Ответ: $\frac{x}{2x^2+2}+\frac{arctg(x)}{2}$.

Пример 5.

$$\int xe^{2x}dx$$

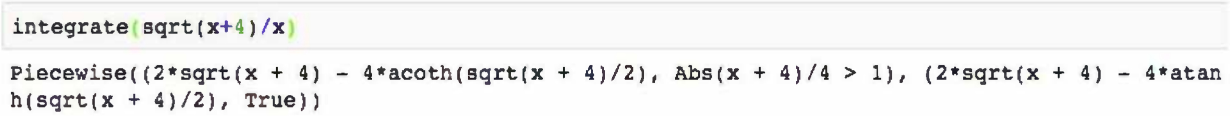


```
integrate(x*exp(2*x),x)

(2*x - 1)*exp(2*x)/4
```

Ответ: $(2x-1)e^{\frac{2x}{4}}$

Пример 6.

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$$



```
integrate(sqrt(x+4)/x)

Piecewise((2*sqrt(x + 4) - 4*acoth(sqrt(x + 4)/2), Abs(x + 4)/4 > 1), (2*sqrt(x + 4) - 4*atan
h(sqrt(x + 4)/2), True))
```

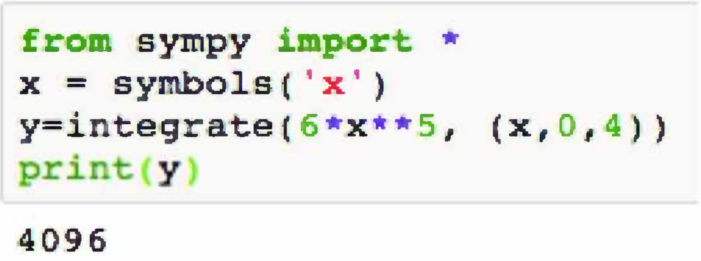
Определенный интеграл

Существуют различные численные методы вычисления определенного интеграла: метод трапеций, метод Гаусса, Симпсона и так далее. Основная идея всех этих методов основана на известном интегрировании многочленов.

Синтаксис функции для нахождения определенного интеграла $\int_a^b f(x)\cdot dx$, integrate (f(x), (x, a, b)), где a, b нижняя и верхняя границы интегрирования.

Пример 7.

$$\int_0^4 6x^5dx$$

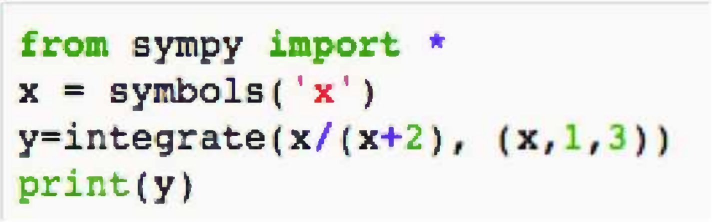


```
from sympy import *
x = symbols('x')
y=integrate(6*x**5, (x,0,4))
print(y)

4096
```

Ответ: 4096.

Пример 8.

$$\int_1^3 \frac{x}{x+2}dx$$



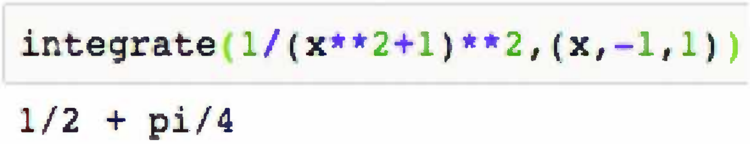
```
from sympy import *
x = symbols('x')
y=integrate(x/(x+2), (x,1,3))
print(y)
```

```
-2*log(5) + 2 + 2*log(3)
```

Ответ: $-2\ln 5 + 2 + 2\ln 3$

Пример 9.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$



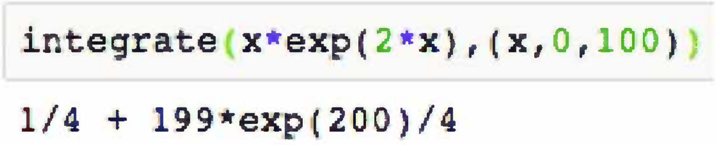
```
integrate(1/(x**2+1)**2,(x,-1,1))
```

```
1/2 + pi/4
```

Ответ: $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

Пример 10.

$$\int_{0}^{100} xe^{2x} dx$$



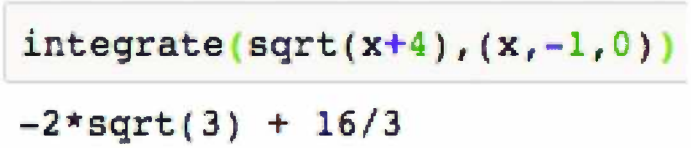
```
integrate(x*exp(2*x),(x,0,100))
```

```
1/4 + 199*exp(200)/4
```

Ответ: $\frac{1}{4} + 199e^{\frac{\pi}{4}}$.

Пример 11.

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{x+4} dx$$



```
integrate(sqrt(x+4),(x,-1,0))
```

```
-2*sqrt(3) + 16/3
```

Ответ: $-2\sqrt{3} + \frac{16}{3}$.

Несобственный интеграл

Отметим, что если границы итегрнрования числа, и подынтегральная функция иа отрезке ннтегрирования непрерывиа, то интеграл называется собственным; в протнвном случае – несобственным. Онределенный интеграл расходится, если он не существует или равен бесконечности. Геометрическн это означает, что площадь криволинейной траиеции ие ограиичена.

Пример 12.

$$\int_{1}^{\infty} x^{-4} dx$$

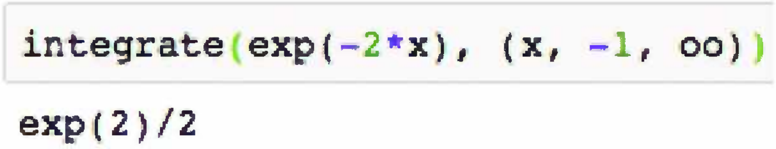
```
integrate(x**(-4), (x, 1, oo))
```

```
1/3
```

Ответ: $\frac{1}{3}$

Пример 13.

$$\int_{-1}^{\infty} e^{-2x} dx$$



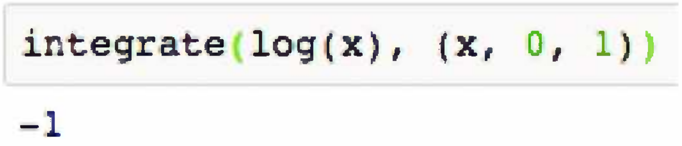
```
integrate(exp(-2*x), (x, -1, oo))
```

```
exp(2)/2
```

Ответ: $\frac{e^2}{2}$.

Пример 14.

$$\int_{0}^{1} \ln x \, dx$$



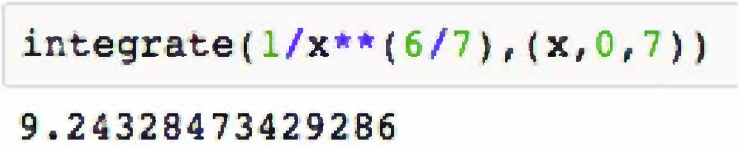
```
integrate(log(x), (x, 0, 1))
```

```
-1
```

Ответ: –1.

Пример 15.

$$\int_{0}^{7} \frac{1}{x^{\frac{6}{7}}} dx$$



```
integrate(1/x**(6/7),(x,0,7))
```

```
9.24328473429286
```

Ответ: 9.24328473.

Кратные интегралы

Для вычисления кратных иитегралов по области используют ту же функцию integrate, но несколько раз.

Рассмотрим пример.

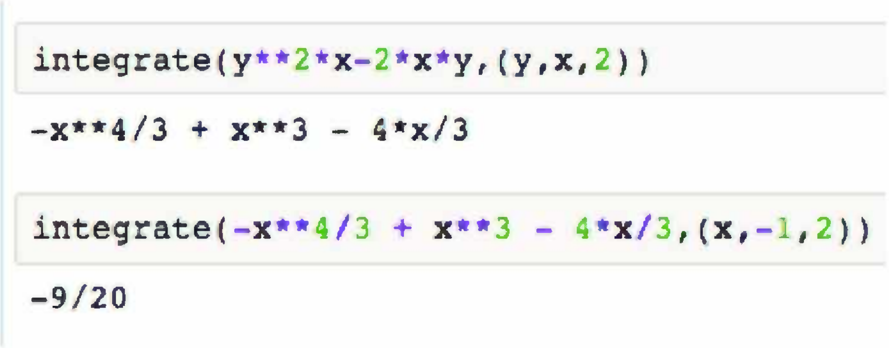
Пример 16. Найти

$$\iint (y^2 \cdot x - 2 \cdot x \cdot y) dxdy, \text{где } x \leq y \leq 2, -1 \leq x \leq 2.$$

Решение. Сначала найдем интеграл по y от x до 2:

integrate (f(x, y), (y, x, 2)),

потом по x от -1 до 2.



```
integrate(y**2*x-2*x*y,(y,x,2))
```

```
-x**4/3 + x**3 - 4*x/3
```

```
integrate(-x**4/3 + x**3 - 4*x/3,(x,-1,2))
```

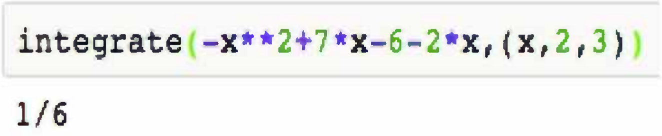
```
-9/20
```

Ответ: 0,45.

Применения интегралов

Площади фигур

Пример 17. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x,\ y = -x^2 + 7x - 6$.



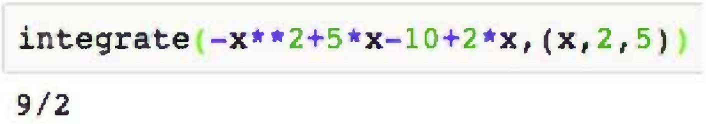
```
integrate(-x**2+7*x-6-2*x,(x,2,3))
```

```
1/6
```

Ответ:

$$S=\int_2^3\left(-x^2+7x-6-2x\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-6x\right)\Big|_2^3=-\frac{27}{3}+\frac{45}{2}-18-\frac{8}{3}+\frac{20}{2}-12=\frac{1}{6}.$$

Пример 18. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -2x,\ y = -x^2 + 5x - 10$.



```
integrate(-x**2+5*x-10+2*x,(x,2,5))
```

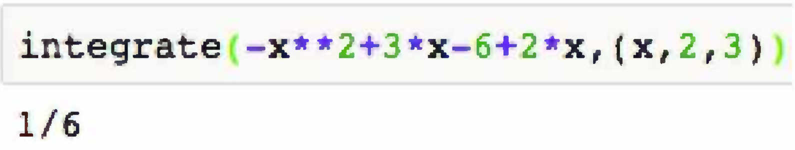
```
9/2
```

Ответ:

$$S=\int_2^5\left(-x^2+5x-10+2x\right)dx=\left(\frac{-x^3}{3}+7\frac{x^2}{2}-10x\right)\Big|_2^5=\frac{-125}{3}+\frac{175}{2}-50+\frac{8}{3}-\frac{28}{2}+20=\frac{9}{2}$$

Пример 19. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = -2x,\ y = -x^2 + 3x - 6.$$



```
integrate(-x**2+3*x-6+2*x,(x,2,3))
```

```
1/6
```

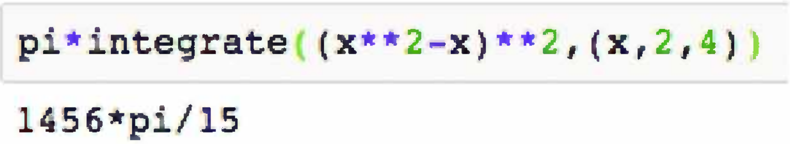
Ответ:

$$S=\int_{2}^{3}\left(-x^{2}+3x-6+2x\right)dx=\left(-\frac{x^{3}}{3}+5\frac{x^{2}}{2}-6x\right)\Big|_{2}^{3}=-\frac{27}{3}+\frac{45}{2}-18+\frac{8}{3}-\frac{20}{2}+12=\frac{1}{6}.$$

Объемы тел вращення

Пример 20. Вычислите объём тела, образованного вращеиием вокруг оси Ox области, ограиичениой лиииями

$$y=x^2-x \text{ и } y=0 \text{ при } x\in[2,4].$$



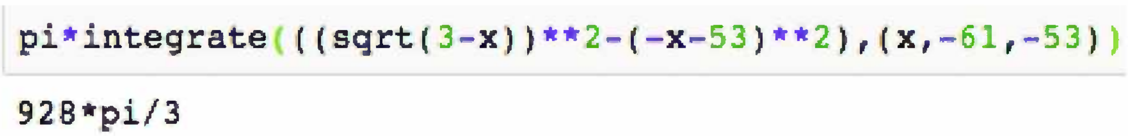
```
pi*integrate((x**2-x)**2,(x,2,4))
```

```
1456*pi/15
```

Ответ: $\frac{1456}{15}\pi$.

Пример 21. Вычислите объём тела, образоваиного вращеиием вокруг оси Ox области, ограинчениой лиииями

$$y=\sqrt{3-x} \text{ и } y=-x-53 \text{ при } x\in[-61,-53].$$



```
pi*integrate(((sqrt(3-x))**2-(-x-53)**2),(x,-61,-53))
```

```
928*pi/3
```

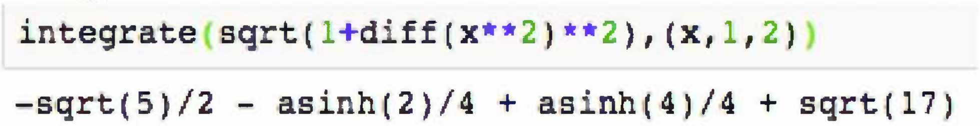
Ответ: $\frac{928}{3}\pi$.

Длнна дугн

Пример 22. Вычислить длину дуги параболы $y=x^2$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2,4)$

Решение. Прииимая во внимание первые, то есть «иксовые» координаты точек, определяем пределы иитегрирования $a=1, b=2$ и используем формулу:

$$L=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(y')^2}dx$$



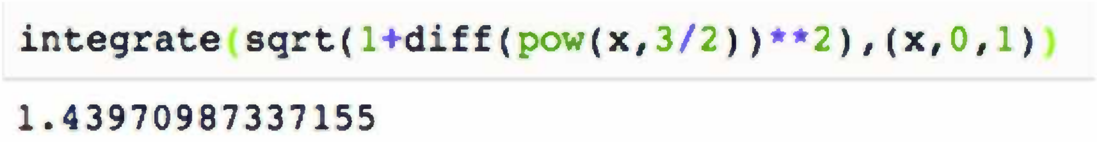
```
integrate(sqrt(1+diff(x**2)**2),(x,1,2))
```

```
-sqrt(5)/2 - asinh(2)/4 + asinh(4)/4 + sqrt(17)
```

Пример 23. Вычислить длину дуги параболы $y^2=x^3$ от точки $M(0,0)$ до точки $N(1,1)$.

Решение. Прииимая во виимание «иксовые» координаты точек, определяем пределы иитегрирования $a=0, b=1$ и используем формулу:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$



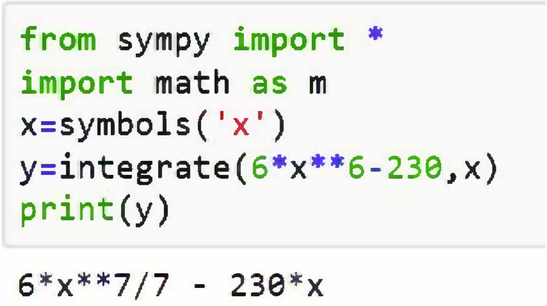
```
integrate(sqrt(1+diff(pow(x,3/2))**2),(x,0,1))
```

```
1.43970987337155
```

Экономические задачи

Пример 24. Найдите функцию дохода $R(x)$, если предельиый доход при реализации единиц продукции определяется по формуле $MR = 6x^6 - 230$.

Решение.



```
from sympy import *
import math as m
x=symbols('x')
y=integrate(6*x**6-230,x)
print(y)
```

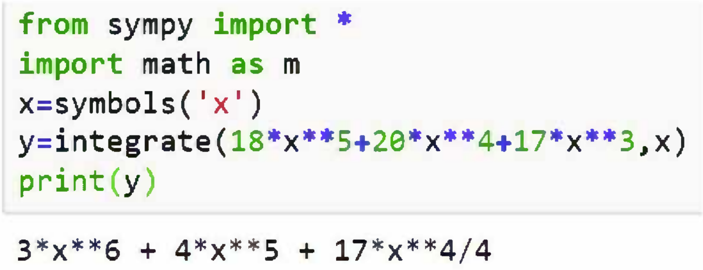
```
6*x**7/7 - 230*x
```

$$R(x) = \int (6x^6 - 230)dx = \frac{6x^7}{7} - 230x$$

Ответ: $R(x) = \frac{5x^7}{7} - 230x$.

Пример 24. Найти функцпю издержек $TC(q)$, если предельные издержки заданы функцией $MC = 18q^5 + 20q^4 + 16q^3$, а начальные фиксированные затраты равны 790.

Решение. Вычисляем:



```
from sympy import *
import math as m
x=symbols('x')
y=integrate(18*x**5+20*x**4+17*x**3,x)
print(y)
```

```
3*x**6 + 4*x**5 + 17*x**4/4
```

$TC(q) = \int MC(q)dq = \int(18q^5 + 20q^4 + 16q^3)dq = 18q^6/6 + 20q^5/5 + 16q^4/4$

По условию $TC(0) = 790$. Следовательио,

$$\frac{18(0)^6}{6} + \frac{20(0)^5}{5} + \frac{16(0)^4}{4} + C = 790,$$

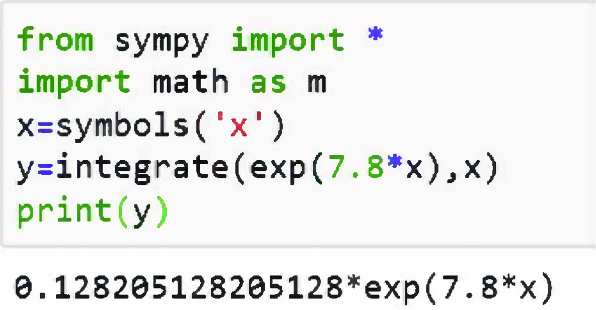
откуда находнм: $C = 790$.

Ответ: $3q^6 + 4q^5 + 4q^4 + 790$.

Пример 26. Найти общую себестоимость выпуска q единиц продукции $TC(q)$, если предельная себестоимость производства q единиц иродукции задана функцией $MC = e^{7{,}8q}$, а иачальные фиксироваиные затраты равиы 21.

Решение. Вычисляем:

$$TC(q) = \int MC(q) = \int e^{7{,}8q} dq = \left[d(7{,}8q) = 7{,}8dq\right] = \frac{10}{78}\int e^{7{,}8q} d(7{,}8q) = \frac{5}{39}e^{7{,}8q} + C$$



```
from sympy import *
import math as m
x=symbols('x')
y=integrate(exp(7.8*x),x)
print(y)
```

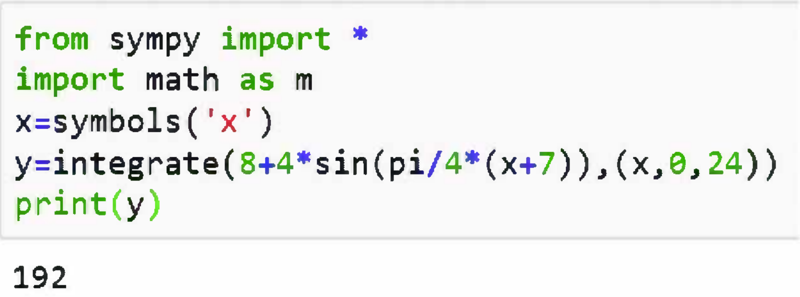
```
0.128205128205128*exp(7.8*x)
```

По условню $TC(0) = 21$. Следовательно, $\dfrac{5}{39}e^0 + C = 21$, откуда находим: $C = \dfrac{814}{39}$. Таким образом, получаем: $TC(q) = \dfrac{5}{39}e^{7{,}8q} + \dfrac{814}{39}$.

Ответ: $TC(q) = \dfrac{5}{39}e^{7{,}8q} + \dfrac{814}{39}$.

Пример 27. Количество потребляемой предприятием электроэнергии меняется в течение суток в зависимостн от времеии t со скоростью $v(t) = 8 + 4\sin(\frac{\pi}{4}(t+7))$, где время t измеряется в часах. Найти суммарный расход электроэнергни за суткн.

Решение. Обозначим суммарный расход электроэнергни за сутки V. Тогда вычисляем:



```
from sympy import *
import math as m
x=symbols('x')
y=integrate(8+4*sin(pi/4*(x+7)),(x,0,24))
print(y)
```

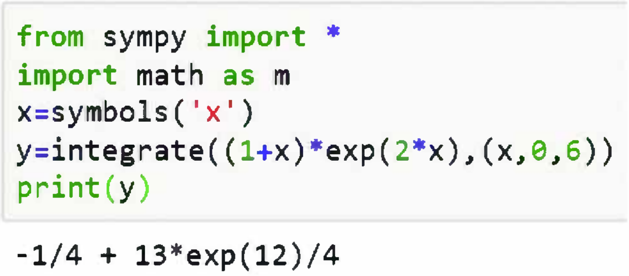
```
192
```

Ответ: 192.

Пример 28. Найти объем продукцни, произведений за 6 лет, еслн функция Кобба – Дугласа имеет вид: $F(t) = (1 + t)e^{2t}$.

Решение. Объем $V(t)$ пропзведенной продукции вычисляется по формуле:

$$V(t) = \int_0^6 (1+t)e^{2t}\,dt.$$



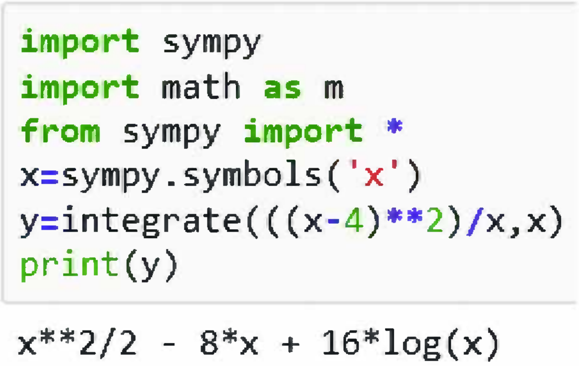
```
from sympy import *
import math as m
x=symbols('x')
y=integrate((1+x)*exp(2*x),(x,0,6))
print(y)
```

```
-1/4 + 13*exp(12)/4
```

Ответ: ≈528948.

Примеры решения задач

1. Найдите иеопределенный интеграл $\int \frac{(x-4)^2}{x}\,dx$.



```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(((x-4)**2)/x,x)
print(y)
```

```
x**2/2 - 8*x + 16*log(x)
```

Ответ: $\frac{x^2}{2} - 8x + 16\ln x$.

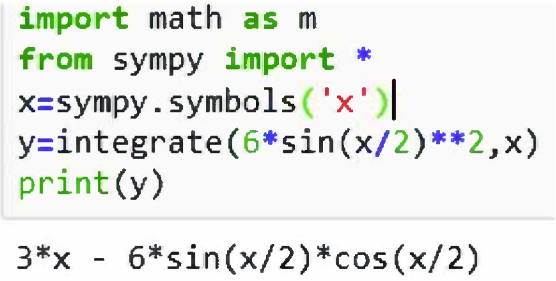
2. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{4(1+\cos^2 x)}{1+\cos 2x}\,dx$.

```
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(4*(1+cos(x)**2)/(1+cos(2*x)),x)
print(y)
```

```
2*x + 2*tan(x)
```

Ответ: $2x + 2\mathrm{tg}x$.

3. Найдите иеопределенный интеграл $\int 6\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$.

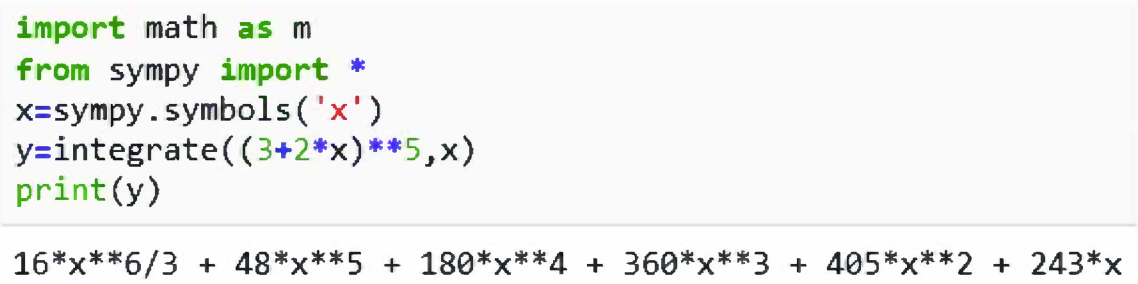


```
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(6*sin(x/2)**2,x)
print(y)
```

```
3*x - 6*sin(x/2)*cos(x/2)
```

Ответ: $3x - 6\sin\left(\frac{x}{2}\right) * \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

4. Найдите неопределенный интеграл $\int (3 + 2x)^5 dx$.

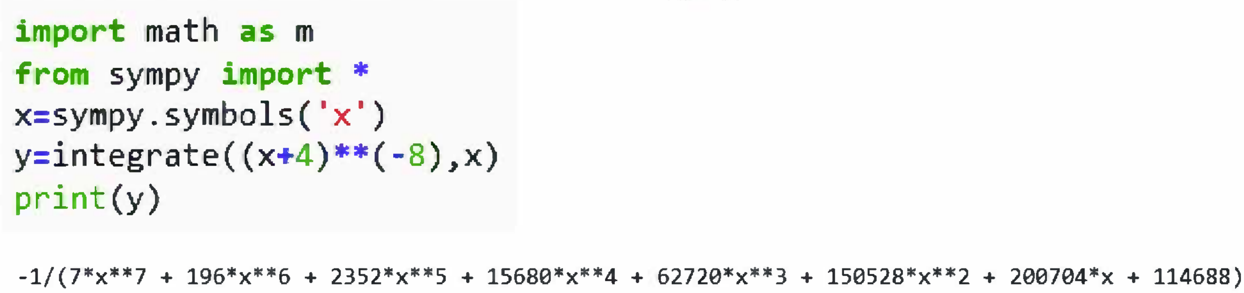


```
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate((3+2*x)**5,x)
print(y)
```

```
16*x**6/3 + 48*x**5 + 180*x**4 + 360*x**3 + 405*x**2 + 243*x
```

Ответ: $\frac{16x^6}{3} + 48x^5 + 180x^4 + 360x^3 + 405x^2 + 243x$.

5. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{(x+4)^8}$.

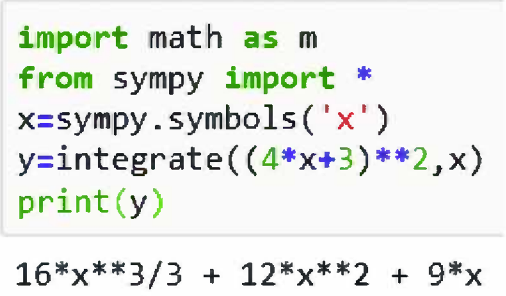


```
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate((x+4)**(-8),x)
print(y)
```

```
-1/(7*x**7 + 196*x**6 + 2352*x**5 + 15680*x**4 + 62720*x**3 + 150528*x**2 + 200704*x + 114688)
```

Ответ: $-\frac{1}{7x^7+196x^6+2352x^5+15680x^4+62720^3+150528x^2+200704x1+114688}$.

6. Вычислите интеграл $\int (4x + 3)^2 dx$.

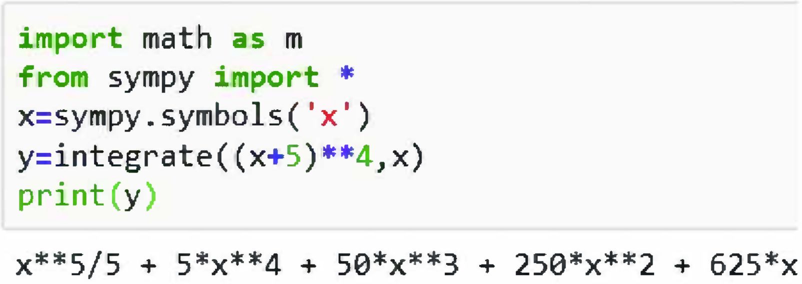


```
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate((4*x+3)**2,x)
print(y)
```

```
16*x**3/3 + 12*x**2 + 9*x
```

Ответ: $\frac{1}{12}(4x + 3)^3 + C$.

7. Вычислите интеграл $\int \frac{dx}{(x+5)^4}$.

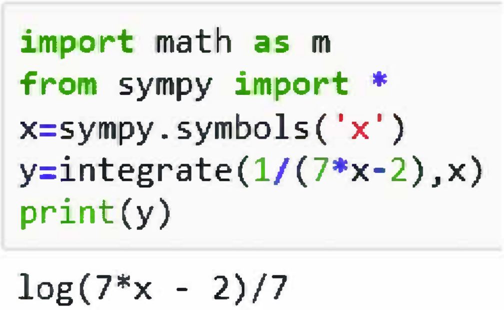


```
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate((x+5)**4,x)
print(y)
```

```
x**5/5 + 5*x**4 + 50*x**3 + 250*x**2 + 625*x
```

Ответ: $-\frac{1}{5}*\frac{1}{(x+5)^4}+C.$

8. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{7x-2}$.

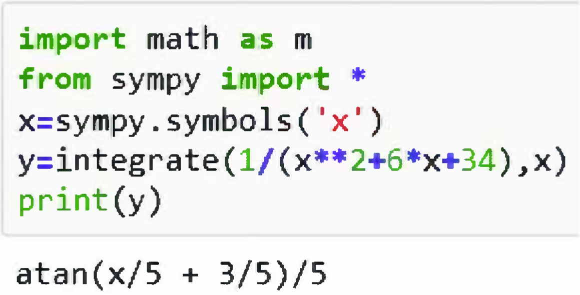


```
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(1/(7*x-2),x)
print(y)
```

```
log(7*x - 2)/7
```

Ответ: $\frac{\ln(7x-2)}{7}$.

9. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2+6x+34}$.

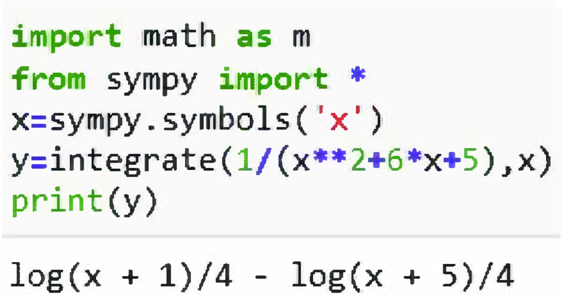


```
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(1/(x**2+6*x+34),x)
print(y)
```

```
atan(x/5 + 3/5)/5
```

Ответ: $\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{5}+\frac{3}{5}\right)}{5}$.

10. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2+6x+5}$.

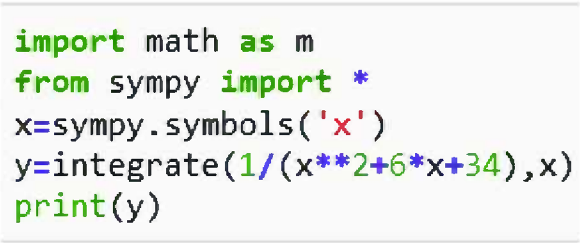


```
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(1/(x**2+6*x+5),x)
print(y)
```

```
log(x + 1)/4 - log(x + 5)/4
```

Ответ: $\frac{\ln(x+1)}{4}-\frac{\ln(x+5)}{4}$.

11. Найдите иеоиределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2+6x+34}$.

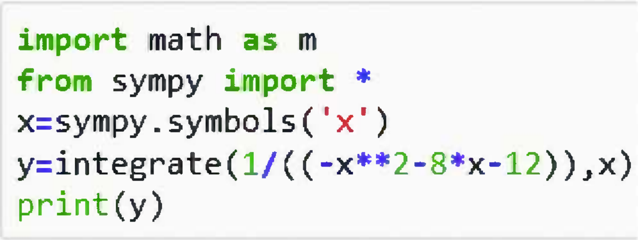


```
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(1/(x**2+6*x+34),x)
print(y)
```

```
atan(x/5 + 3/5)/5
```

Ответ: $\frac{1}{5} \cdot \mathrm{tg}(\frac{x}{5} + \frac{3}{5})$.

12. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{-x^2-8x-12}$.

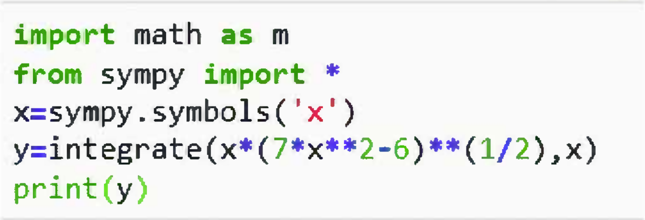


```
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(1/((-x**2-8*x-12)),x)
print(y)
```

```
-log(x + 2)/4 + log(x + 6)/4
```

Ответ: $-\frac{\ln(x+2)}{4} + \frac{\ln(x+6)}{4}$.

13. Найдите неопределенный интеграл $\int x(7x^2-6)^{\frac{1}{2}}dx$.



```
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(x*(7*x**2-6)**(1/2),x)
print(y)
```

```
0.0476190476190476*(7*x**2 - 6)**1.5
```

Ответ: $\frac{2}{21} * (7x^2-6)^{\frac{3}{2}} + C$.

14. Найдите неопределенный интеграл

$$\int (6x-4)(3x^2-4x+2)^4 dx.$$

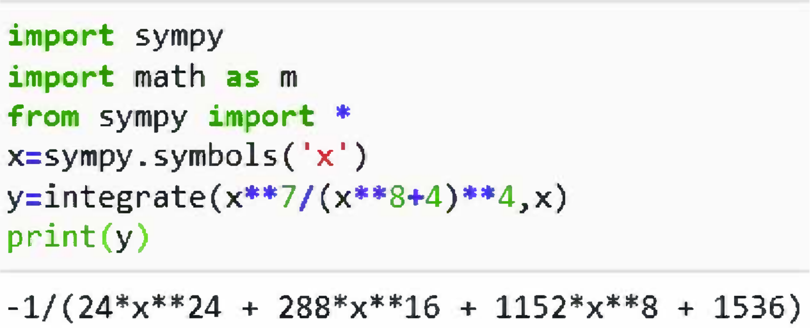
```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=sympy.symbols('y')
y=integrate((3*x**2-4*x+2)**4*(6*x-4),x)
print(y)
```

```
243*x**10/5 - 324*x**9 + 1026*x**8 - 2016*x**7 + 2712*x**6 - 13024*x**5/5 + 1808*x**4 - 896*x**3 + 304*x**2 - 64*x
```

Ответ: .

$$\frac{243x^{10}}{5} - 324x^9 + 1026x^8 + 2016x^7 + 2712x^6 - \frac{13024x^5}{5} + 1808x^4 - 896x^3 + 304x^2 - 64x$$

15. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{x^7\,dx}{(x^8+4)^4}$.

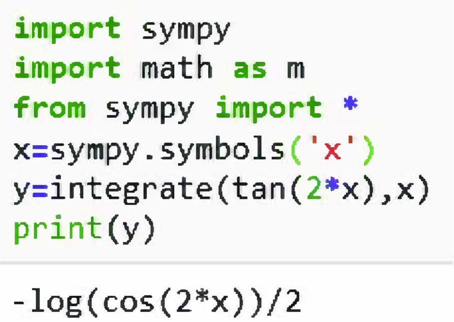


```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(x**7/(x**8+4)**4,x)
print(y)
```

```
-1/(24*x**24 + 288*x**16 + 1152*x**8 + 1536)
```

Ответ: $-\frac{1}{24x^{24}+288x^{16}+1152x^8+1536} + C$.

16. Найдите неопределенный интеграл $\int \mathrm{tg}2x dx$.



```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(tan(2*x),x)
print(y)
```

```
-log(cos(2*x))/2
```

Ответ: $-\frac{\ln(\cos 2x)}{2}$.

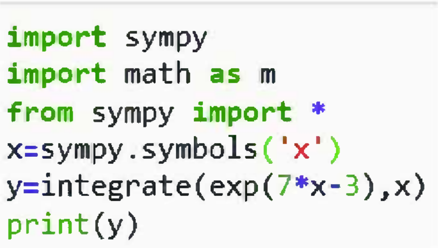
17. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{\sin 5x}{(4+4\cos 5x)^{\frac{6}{5}}} dx$.

```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(sin(5*x)/(4+4*cos(5*x))**(6/5),x)
print(y)
```

```
0.25*(4*cos(5*x) + 4)**(-0.2)
```

Ответ: $\frac{1}{4}(4 + 4\cos 5x)^{-\frac{1}{5}} + C$.

18. Найдите неопределенный интеграл $\int e^{7x+3} dx$.

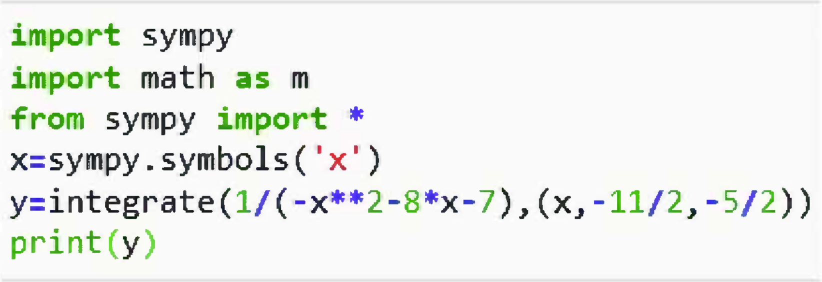


```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(exp(7*x-3),x)
print(y)
```

```
exp(7*x - 3)/7
```

Ответ: $\frac{e^{7x-3}}{7}$.

19. Найдите определенный интеграл $\int_{-\frac{11}{2}}^{-\frac{5}{2}} \frac{dx}{\sqrt{-x^2-8x-7}}$.



```python
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(1/(-x**2-8*x-7),(x,-11/2,-5/2))
print(y)
```

```
0.366204096222703
```

Ответ: 0,336204096222703.

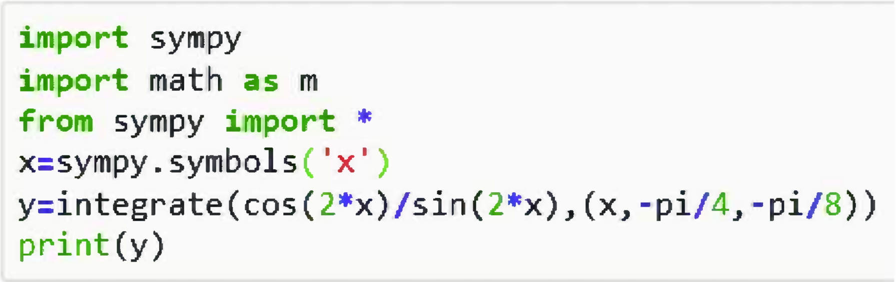
20. Найдите определенный иитеграл $\int_2^3 x(28-3x^2)^{\frac{1}{5}}dx$.

```python
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(x*(28-3*x**2)**(1/5),(x,2,3))
print(y)
```

```
3.73022472576055
```

Ответ: 3.73022472576055.

21. Найдите определепный интеграл $\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{-\frac{1}{8}\pi} \text{ctg}2x dx$.

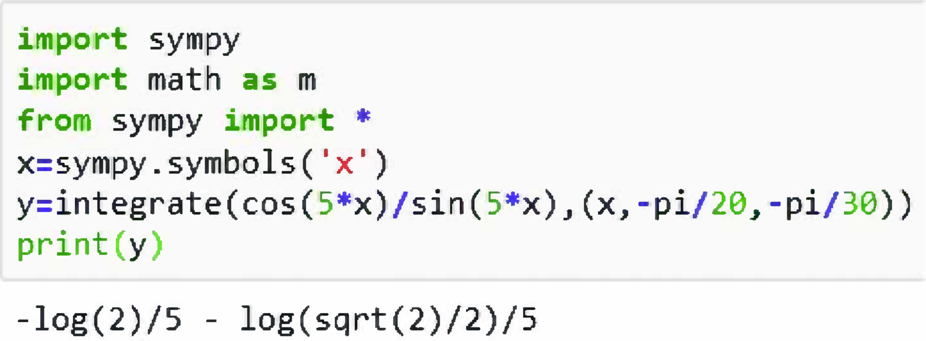


```python
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(cos(2*x)/sin(2*x),(x,-pi/4,-pi/8))
print(y)
```

```
log(sqrt(2)/2)/2
```

Ответ: $\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}$.

22. Найдите определеный итеграл $\int_{-\frac{1}{20}\pi}^{-\frac{1}{30}\pi} \operatorname{ctg}5x dx$.

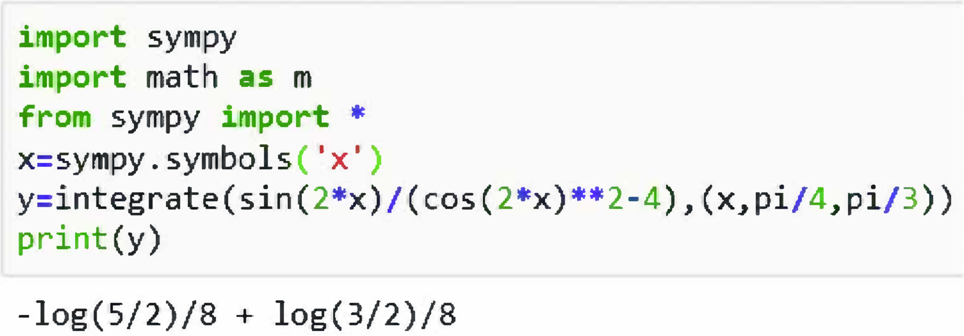


```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(cos(5*x)/sin(5*x),(x,-pi/20,-pi/30))
print(y)
```

```
-log(2)/5 - log(sqrt(2)/2)/5
```

Ответ: $-\frac{\ln2}{5}-\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{5}$.

23. Найдите определенный итеграл $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{\sin2x}{\cos^2 2x-4} dx$.

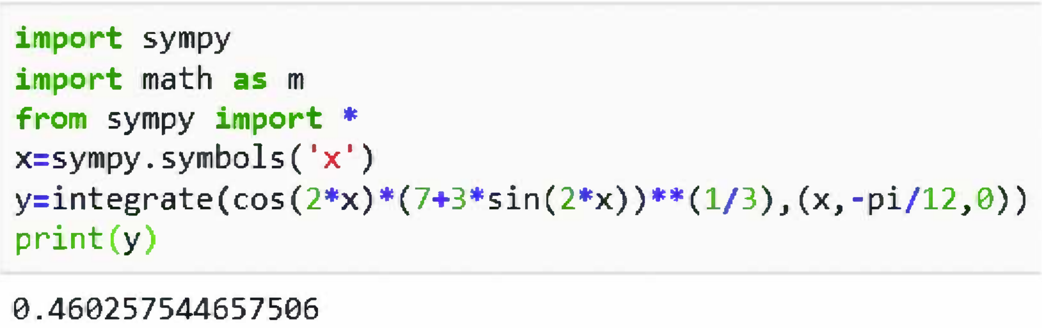


```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(sin(2*x)/(cos(2*x)**2-4),(x,pi/4,pi/3))
print(y)
```

```
-log(5/2)/8 + log(3/2)/8
```

Ответ: $-\frac{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}{8}+\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{8}$.

24. Найдите определеииый итеграл $\int_{-\frac{1}{12}\pi}^{0} \cos2x(7+3\sin2x)^{\frac{1}{3}}dx$.

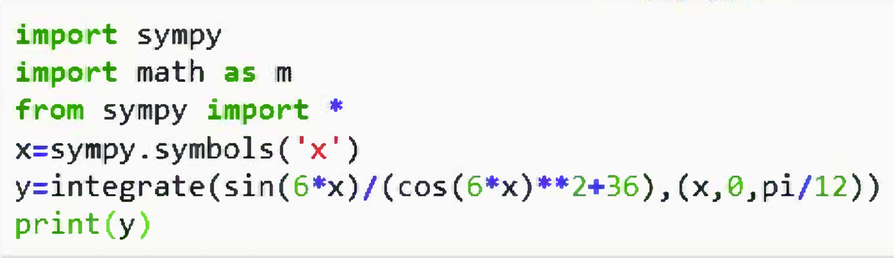


```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(cos(2*x)*(7+3*sin(2*x))**(1/3),(x,-pi/12,0))
print(y)
```

```
0.460257544657506
```

Ответ: 0.460257544657506.

25. Найдите определеный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\sin 6x}{\cos^2 6x+36} dx$.

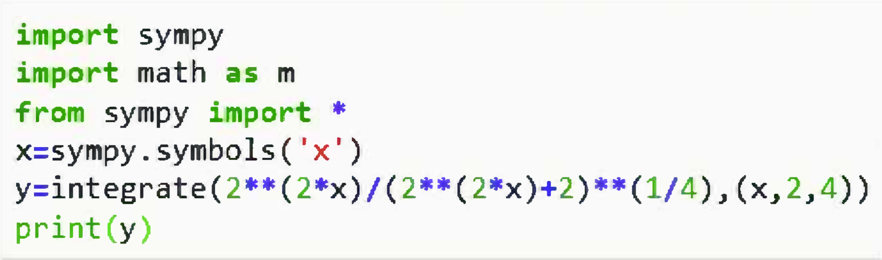


```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(sin(6*x)/(cos(6*x)**2+36),(x,0,pi/12))
print(y)
```

```
atan(1/6)/36
```

Ответ: $\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{6}\right)}{36}$.

26. Найдите определеный нитеграл $\int_2^4 \frac{2^{2x}}{(2^{2x}+2)^{\frac{1}{4}}} dx$.



```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(2**(2*x)/(2**(2*x)+2)**(1/4),(x,2,4))
print(y)
```

```
37.0905220568076/log(2)
```

Ответ: $\frac{37{,}0905220568076}{\ln 2}$.

27. Найдите определеный нитеграл $\int_{-\ln 4}^{-\ln 3} \frac{e^{2x}}{\sqrt{9-16e^{4x}}} dx$.

```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(exp(2*x)/sqrt(9-16*exp(4*x)),(x,-log(4),log(3)))
print(y)
```

```
-asin(1/12)/8 + asin(12)/8
```

Ответ: $-\frac{1}{8}\arcsin\left(\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{8}\arcsin(12)$.

28. Найдите определеный интеграл $\int_{\frac{e^7}{7}}^{\frac{e^9}{7}} \frac{dx}{x\sqrt{169-\ln^{27} x}}$.

```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(1/(sqrt(169-x**2)),(x,exp(7)/7,exp(9)/9))
print(y)
```

```
asin(exp(9)/117) - asin(exp(7)/91)
```

Ответ: $\arcsin\left(\frac{e^9}{117}\right) - \arcsin\left(\frac{e^7}{91}\right)$.

29. Найдите определенный интеграл $\int_{10^{-7}}^{1} \frac{\lg x}{x} dx$.

```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(log(x,10)/x,(x,10**(-7),1))
print(y)
```

```
-129.896503706721/log(10)
```

Ответ: $-\frac{129.896503706721}{\ln 10}$.

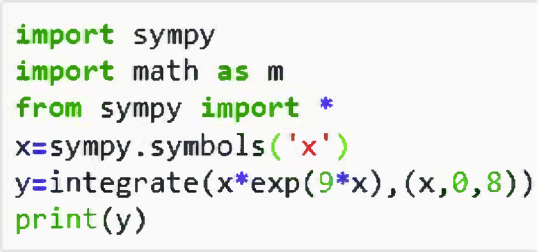
30. Найдите определенный интеграл $\int_{\frac{e^{-3}}{6}}^{\frac{e^{-1}}{6}} \frac{dx}{x\ln^5 6x}$.

```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(1/(x*(log(6*x))**5),(x,exp(-3)/6,exp(-1)/6))
print(y)
```

```
-20/81
```

Ответ: $-\frac{20}{81}$.

31. Найдите определеный интеграл $\int_0^8 x \cdot e^{9x} dx$.

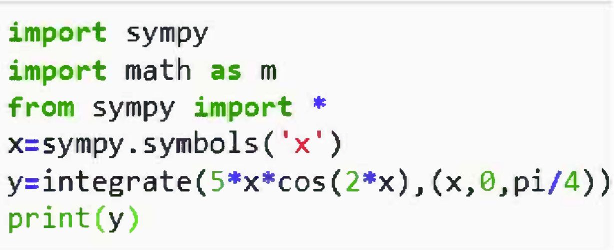


```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(x*exp(9*x),(x,0,8))
print(y)
```

```
1/81 + 71*exp(72)/81
```

Ответ: $\frac{1}{81} + \frac{71e^{72}}{81}$.

32. Найдите определеный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 5x \cdot \cos 2x dx$.

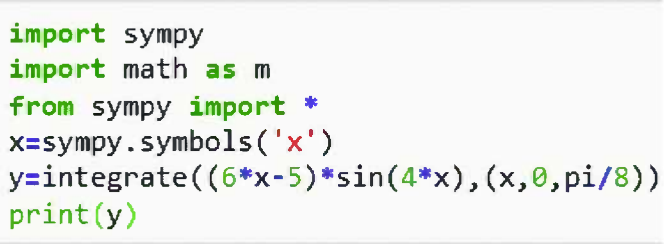


```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(5*x*cos(2*x),(x,0,pi/4))
print(y)
```

```
-5/4 + 5*pi/8
```

Ответ: $-\frac{5}{4}+\frac{5\pi}{8}$.

33. Найдите определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{8}}(6x-5)\sin 4x dx$.



```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate((6*x-5)*sin(4*x),(x,0,pi/8))
print(y)
```

```
-7/8
```

Ответ: $-\frac{7}{8}$.

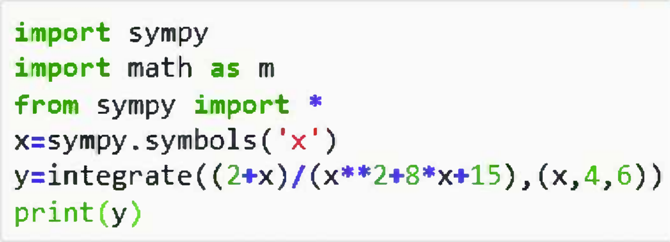
34. Найдите определенный интеграл $\int_{e^2}^{e^5}(2x^2+3)\ln x dx$.

```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate((2*x**2+3)*log(x),(x,exp(2),exp(5)))
print(y)
```

```
-10*exp(6)/9 - 3*exp(2) + 12*exp(5) + 28*exp(15)/9
```

Ответ: $-\frac{10e^6}{9}-3e^2+12e^5+\frac{28e^{15}}{9}$.

35. Найдите определенный интеграл $\int_4^6 \frac{2+x}{x^2+8x+15}dx$.

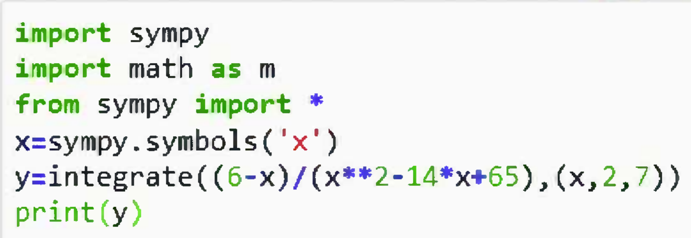


```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate((2+x)/(x**2+8*x+15),(x,4,6))
print(y)
```

```
-2*log(9) + log(7)/2 + 3*log(11)/2
```

Ответ: $-2\ln 9+\frac{\ln 7}{2}+\frac{3\ln 11}{2}$.

36. Найдите определенный интеграл $\int_2^7 \frac{6-x}{x^2-14x+65}dx$.

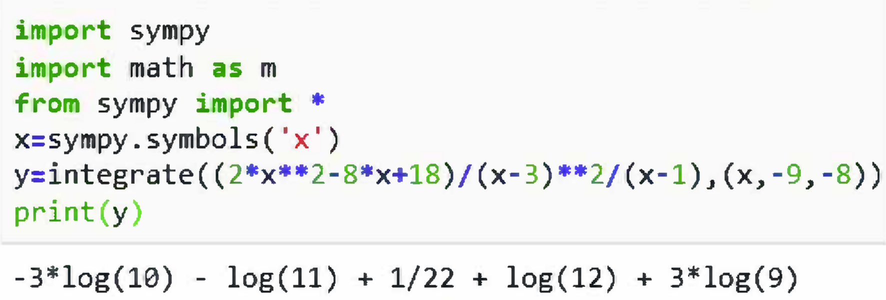


```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate((6-x)/(x**2-14*x+65),(x,2,7))
print(y)
```

```
-log(16)/2 - atan(5/4)/4 + log(41)/2
```

Ответ: $-\frac{\ln 16}{2}-\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{5}{4}\right)}{4}+\frac{\ln 41}{2}$.

37. Найдите определенный интеграл $\int_{-9}^{-8}\frac{2x^2-8x+18}{(x-3)^2(x-1)}dx$.



```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate((2*x**2-8*x+18)/(x-3)**2/(x-1),(x,-9,-8))
print(y)
```

```
-3*log(10) - log(11) + 1/22 + log(12) + 3*log(9)
```

Ответ: $-3\ln 10-\ln 11+\frac{1}{22}+\ln 12+3\ln 9$.

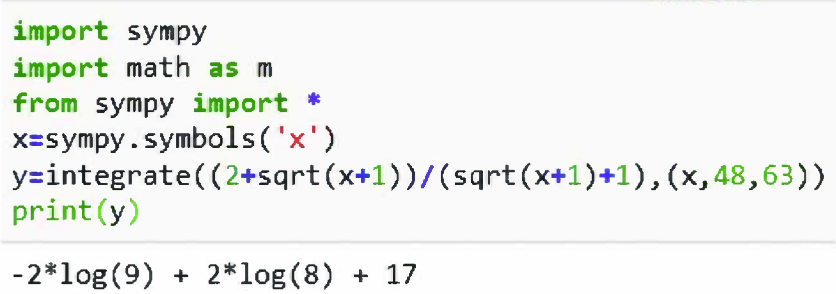
38. Найдите определенный интеграл $\int_{13}^{53}\frac{4x-5}{\sqrt{x-4}}dx$.

```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate((4*x-5)/sqrt(x-4),(x,13,53))
print(y)
```

```
2792/3
```

Ответ: $\frac{2792}{3}$.

39. Найдите определенный интеграл $\int_{48}^{63}\frac{2+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}dx$.

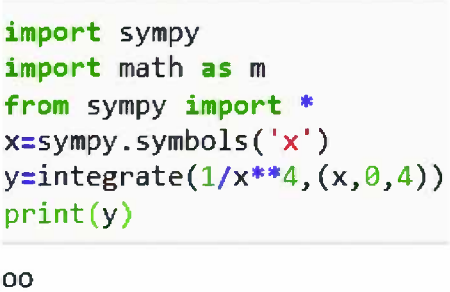


```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate((2+sqrt(x+1))/(sqrt(x+1)+1),(x,48,63))
print(y)
```

```
-2*log(9) + 2*log(8) + 17
```

Ответ: $-2\ln 9+2\ln 8+17$.

40. Найдите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int_0^4\frac{dx}{x^4}$.



```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(1/x**4,(x,0,4))
print(y)
```

```
oo
```

Ответ: ∞

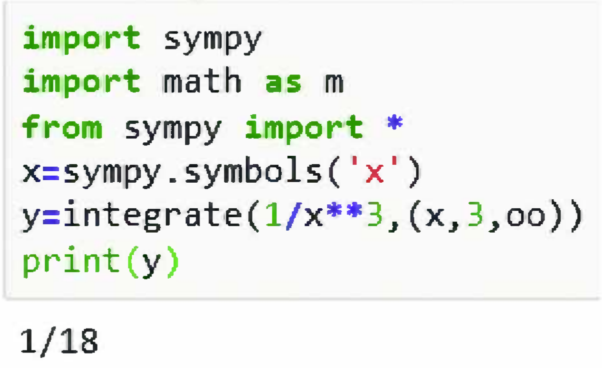
41. Найдите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(1/sqrt(1-x**2),(x,-1,-1/sqrt(2)))
print(y)
```

```
pi/4
```

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

42. Найдите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$.

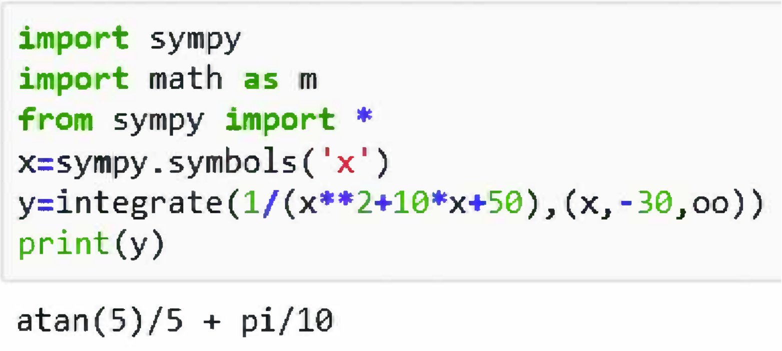


```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(1/x**3,(x,3,oo))
print(y)
```

```
1/18
```

Ответ: $\frac{1}{18}$.

43. Найдите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int_{-30}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+10x+50}$.

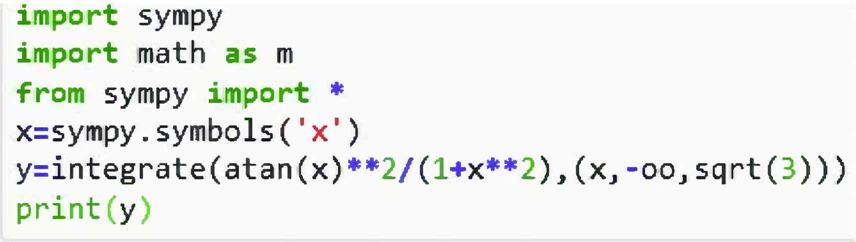


```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(1/(x**2+10*x+50),(x,-30,oo))
print(y)
```

```
atan(5)/5 + pi/10
```

Ответ: $\frac{\text{tg}5}{5}+\frac{\pi}{10}$.

44. Найдите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int_{-\infty}^{\sqrt{3}}\frac{\text{artg}^2x}{1+x^2}dx$.



```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(atan(x)**2/(1+x**2),(x,-oo,sqrt(3)))
print(y)
```

```
35*pi**3/648
```

Ответ: $\frac{35\pi^3}{648}$.

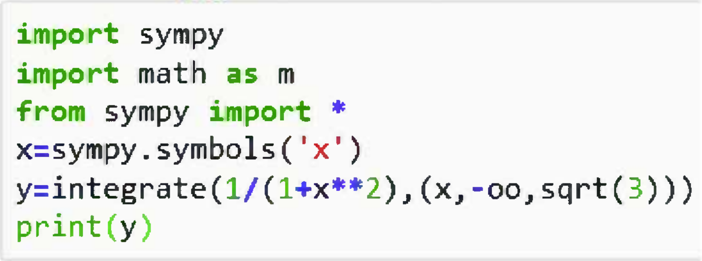
45. Найдите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int_{e^{-2\sqrt{3}}}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln^2 x+4)}$.

```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(1/(x*(log(x)**2+4)),(x,exp(-2)*exp(sqrt(3)),oo))
print(y)
```

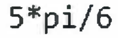
```
Integral(1/(x*(log(x)**2 + 4)), (x, exp(-2)*exp(sqrt(3)), oo))
```

Ответ: интеграл не существует.

46. Найдите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int_{-\infty}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$.



```
import sympy
import math as m
from sympy import *
x=sympy.symbols('x')
y=integrate(1/(1+x**2),(x,-oo,sqrt(3)))
print(y)
```



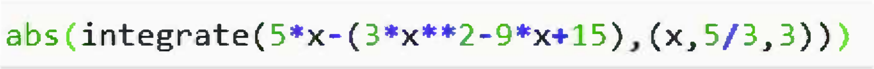
```
5*pi/6
```

Ответ: $\frac{5\pi}{6}$.

47. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 5x, y = 3x^2 - 9x + 15$.

```
solve(5*x-(3*x**2-9*x+15),x)
```

```
[5/3, 3]
```



```
abs(integrate(5*x-(3*x**2-9*x+15),(x,5/3,3)))
```

1.18518518518518

Ответ: 1,(185).

48. Вычислить кратный интеграл $\iint(5x^2 - xy + 5y + 5)dxdy$ по области $D = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}|-4 \le x \le 1, -4 \le y \le 2\}$.

```
from sympy import *
x, y = symbols("x y")
f = (5*x ** 2-x*y+5*y+5)
I = integrate(f, (y, -4, 2), (x, -4, 1))
print(I)
```

```
605
```

Ответ: 605.

49. Вычислить кратный интеграл $\iint(3y^3x - xy^2)dxdy$ по области $D = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}|-1 \le x \le 1, 3 \le y \le x\}$.

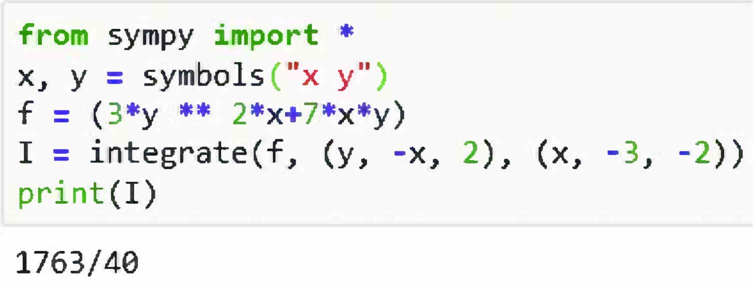
```
from sympy import *
x, y = symbols("x y")
f = (3*y ** 3*x-x*y**2)
I = integrate(f, (y, 3, x), (x, -1, 1))
print(I)
```

```
-2/15
```

Ответ: $-\frac{2}{15}$.

50. Вычислить кратный интеграл $\iint(3y^2x + 7xy)dxdy$ по области

$$D = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}|-3 \le x \le -2, -x \le y \le 2\}.$$



```
from sympy import *
x, y = symbols("x y")
f = (3*y ** 2*x+7*x*y)
I = integrate(f, (y, -x, 2), (x, -3, -2))
print(I)
```

```
1763/40
```

Ответ: $\frac{1763}{40}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить интеграл $\int \frac{6\sqrt[3]{x} - x^2 \sin x + 3x}{x^2} dx$.

Ответ: $\frac{-9}{\sqrt[3]{x^2}} + \cos x + 3\ln|x| + C$

2. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^{2x} + x^2}{x^3} dx$.

Ответ: $-\frac{2}{3x\sqrt{x}} - \frac{e^x}{2} + \ln|x| + C$

3. Найти интеграл $\int \frac{10dx}{(x+2)(x+12)}$.

Ответ: $\ln|x+2|-\ln|x+12|+C$.

4. Найти интеграл $\int \frac{22dx}{(x+2)(x+13)}$.

Ответ: $2\ln|x+2|-2\ln|x+13|+C$.

5. Найти интеграл $\int \frac{9dx}{(x+4)(x+13)}$.

Ответ: $\ln|x+4|-\ln|x+13|+C$.

6. Найти интеграл $\int \frac{50dx}{(x-4)(x+6)}$.

Ответ: $5\ln|x-4|-5\ln|x+6|+C$.

7. Найти интеграл $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^8}}dx$.

Ответ: $\frac{-1}{5\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5}}+C$.

8. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\ln^8 x}$.

Ответ: $-\frac{1}{7\ln^7 x}+C$.

9. Найти интеграл $\int x(3x-5)^6 dx$.

Ответ: $\frac{\left(3x-5\right)^8}{72}+\frac{\left(3x-5\right)^7}{63}+C$

10. Найти интеграл $\int \sin^2 x\cdot\cos xdx$.

Ответ: $\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

11. Найти интеграл $\int x\cos xdx$.

Ответ: $x\sin x+\cos x+C$.

12. Найти интеграл $\int (2x-1)e^x dx$.

Ответ: $(2x-3)e^x+C$.

13. Найти интеграл $\int x\ln xdx$.

Ответ: $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$.

14. Найти интеграл $\int x\sin xdx$.

Ответ: $-x\cos x+\sin x+C$.

15. Найти интеграл $\int\limits_1^4 \frac{-4x^3+7x^2-8}{x^2}dx$.

Ответ: -15.

16. Найти интеграл $\int\limits_1^2 \frac{4x^3+5x^2-4}{x^2}dx$.

Ответ: 9.

17. Найти интеграл $\int\limits_1^5 \frac{-6x^3+6x^2-10}{x^2}dx$.

Ответ: -56.

18. Найти интеграл $\int\limits_1^9 \frac{3x\sqrt{x}+5x}{\sqrt{x}}dx$.

Ответ: $\frac{620}{3}$.

19. Найдите неопределенный интеграл $\int 6^{6sin7x+5}cos7x * dx$.

Ответ: $\int 6^{6sin7x+5} * dx$.

20. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{sin5x}{cos^2 5x-25}dx$.

Ответ: $-\frac{\log(\cos5x-5)}{50}+\frac{log(cos5x+5)}{50}$.

21. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{(5-2ctg6x)^{\frac{3}{7}}}{sin^2 6x}dx$.

Ответ: $\int \frac{\frac{(5-2cos6x)^{0.428571428571429}}{\sin 6x})}{sin^2 6x}dx$.

22. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{1}{(7-2ctg5x)sin^2 5x}dx$.

Ответ: $\frac{log^2\left(\frac{5x}{2}\right)+7tg\left(\frac{5x}{2}\right)-1}{10}-\frac{log\left(tg\left(\frac{5x}{2}\right)\right)}{10}$.

23. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{e^{6-3tg2x}}{cos^2 2x}dx$.

Ответ: $e^6 * \int \frac{e^{-3tg2x}}{\cos^2 2x}dx$.

24. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{(tg^2 6x-64)\cos^2 6x}$.

Ответ: $\int \frac{1}{(tg^2 6x-8)(tg6x+8)*cos6x}dx$.

25. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{5^{3x}}{5^{3x}+2}dx$.

Ответ: $\frac{\log(5^{3x}+2)}{3log5}$.

26. Найдите неопределенный интеграл $\int e^{4x}sin(e^{4x}+3)dx$.

Ответ: $\frac{-\cos(e^{4x}+3)}{4}$.

27. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x(\log_4^2 7x-16)}$.

Ответ: $(\frac{log(log7x-8log2)}{4} - \frac{log(log7x+8log2)}{4}) * log2$.

28. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{(1+x^2)*(arctg^9 x)^{\frac{1}{8}}}$.

Ответ: $-8arctg^{-\frac{1}{8}}x + C$.

29. Найдите неопределенный интеграл $\int x * e^{8x} dx$.

Ответ: $\frac{(8x-1)*e^{8x}}{64}$.

30. Найдите неопределенный интеграл $\int x * sin4x * dx$.

Ответ: $\frac{-x*cos4x}{4} + \frac{sin4x}{16}$.

31. Найдите неопределенный интеграл $\int (7x+3)cos6x * dx$.

Ответ: $\frac{7x*sin6x}{6} + \frac{sin6x}{2} + \frac{7cos6x}{36}$.

32. Найдите неопределенный интеграл $\int arctg(x+4)dx$.

Ответ: $x * tg(x+4) - \frac{log(x^2+8x+17)}{2} + 4tg(x+4)$.

33. Найдите неопределенный интеграл $\int (4x^2 - 2x - 6)Inx * dx$.

Ответ: $\frac{-4x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 6x + \left(\frac{4x^3}{3} - x^2 - 6x\right) * logx$.

34. Найдите неопределенный интеграл $\int (x^2 + 6x + 8)e^{4x} dx$.

Ответ: $\frac{(8x^2+44x+53)*e^{4x}}{32}$.

35. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{x+3}{x^2+9} dx$.

Ответ: $\frac{log(x^2+9)}{2} + tg(\frac{x}{3})$.

36. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{-7x^3+2x^2-8x+2}{x-1} dx$.

Ответ: $\frac{-7x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 13x - 11\log -1)$.

37. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{x-7}{x^2-8x-33} dx$.

Ответ: $\frac{2log(x-11)}{7} + \frac{5log(x+3)}{7}$.

38. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{x-1}{x^2-14x+113} dx$.

Ответ: $\frac{log(x^2-14x+113)}{2} + \frac{3tg\left(\frac{x}{8}-\frac{7}{8}\right)}{4}$.

39. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{3x^2-6x-21}{-3x^2-x^3} dx$.

Ответ: $\frac{-logx}{3} - \frac{8log(x+3)}{3} - \frac{7}{x}$.

40. Найдите неопределенный интеграл $\int sin(8x-9)dx$.

Ответ: $\frac{-\cos(8x-9)}{8}$.

41. Найдите иеопределенный интеграл $\int \frac{1}{\cos^2(2x+7)}dx$.

Ответ: $\frac{-tg\left(x+\frac{7}{2}\right)}{tg^2\left(x+\frac{7}{2}\right)-1}$.

42. Найдите иеоиределенный интеграл $\int tg^2 9x * dx$.

Ответ: $-x+\frac{\sin 9x}{9\cos 9x}$.

43. Найдите неоиределенный интеграл $\int \cos^3(6x+1) * dx$.

Ответ: $\frac{\sin^3(6x+1)}{9}-\frac{\sin(6x+1)*\cos(6x+1)}{6}$.

44. Найдите неопределенный интеграл $\int \cos 4x * \sin 5x * dx$.

Ответ: $\frac{-4\sin 4x*\sin 5x}{9}-\frac{5\cos 4x*\cos 5x}{9}$.

45. Найднте неопределенный интеграл $\int \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}-4}dx$.

Ответ: $x+4\sqrt{x-1}+16log(\sqrt{x-1}-4)$.

46. Найдите неоиределенный ннтеграл $\int \frac{5x-8}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

Ответ: $5x+\frac{10*(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}-16\sqrt{x+1}-16log\left(\sqrt{x+1}-1\right)+5$.

47. Найдите неоиределенный интеграл $\int \frac{\sqrt{x-2}+8}{x+2}dx$.

Ответ: $2\sqrt{x-2}+8log(x+2)-\frac{4tg\left(\sqrt{x-2}\right)}{2}$.

48. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{9*x^{\frac{1}{3}}}{2+7*x^{\frac{2}{3}}}dx$.

Ответ: $\frac{27}{14}*x^{\frac{2}{3}}-\frac{27}{49}In\left|2+7*x^{\frac{2}{3}}\right|+C$.

49. Найдите определенный интеграл $\int_{-11}^{-10}\frac{dx}{x+7}$.

Ответ: $-log4+log3$.

50. Найдите определенный ннтеграл $\int_{\frac{22}{5}}^{\frac{33}{5}}\frac{dx}{\sqrt{3+5x}}$.

Ответ: 0.4.

51. Найдите определенный ннтеграл $\int_{-6}^{4}\frac{3dx}{\sqrt{-x^2-2x+24}}$.

Ответ: $3*\int_{-6}^{4}\frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+24}}dx$.

52. Найти площадь фигуры, ограниченной лиииями $y=2x,\ y=-x^2+7x-6$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

53. Найти илощадь фигуры, ограничеииой лииииями $y=-2x,\ y=-x^2+5x-10$.

Ответ: $\frac{9}{2}$.

54. Найти площадь фигуры, ограниченной лнниями $y=x,\ y=x^2-4x+6$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

55. Найтн площадь фигуры, ограниченной лнниями $y=-2x,\quad y=-x^2+3x-6$.

Ответ: $\frac{1}{6}$

57. Исследовать иитеграл $\int\limits_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$.

Ответ: $+\infty$ – интеграл расходится.

58. Исследовать интеграл $\int\limits_9^{+\infty}\frac{4x^3}{x^4+8}dx$.

Ответ: ∞– иитеграл расходится.

59. Исследовать интеграл $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}dx$.

Ответ: 1 – интеграл сходится.

60. Исследовать интеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{e^x dx}{\left(1+e^x\right)^2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$ – пнтеграл сходится.

61. Исследовать интеграл $\int\limits_2^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$.

Ответ: $\int\limits_2^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}=\infty$ – пнтеграл расходптся.

62. Исследовать интеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{e^x dx}{1+2e^x}$.

Ответ: $\int\limits_0^{\infty}\frac{e^x dx}{1+2e^x}=\infty$ – интеграл расходится.

63. Исследовать иитеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\arctan x dx}{1+x^2}$.

Ответ: $\int\limits_1^{\infty}\frac{\arctan x dx}{1+x^2}=\frac{3}{32}\pi^2$ – интеграл сходится.

64. Исследовать пнтеграл $\int\limits_{-1}^{\infty}xe^{-4x}dx$.

Ответ: $\int\limits_{-1}^{\infty} xe^{-4x}dx = -\frac{3}{16}e^4$ – иитеграл сходится.

65. Исследовать интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln^4 xdx}{x}$.

Ответ: $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln^4 xdx}{x} = \infty$ – иитеграл расходится.

66. Найти площадь плоской фигуры, ограииченной графиком функции $y = \sin x$ и прямой $y = \frac{1}{2}$, при условии $0 \le x \le 2\pi$.

Ответ: $2\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{3}$.

67. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиямн

$$y = x^2 - x \text{ и } y = 0 \text{ при } x \in [2,4].$$

Ответ: $\frac{1456}{15}\pi$.

68. Вычислпте объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиямн

$$y = \sqrt{3 - x} \text{ и } y = -x - 53 \text{ при } x \in [-61, -53].$$

Ответ: $\frac{928}{3}\pi$.

69. Вычислите несобственный интеграл $\int_0^7 \frac{dx}{x^{\frac{6}{7}}}$ или установите его расходимость.

Ответ: $7^{\frac{8}{7}}$.

70. Вычислите несобственный интеграл $\int_{-5}^{-1} \frac{7dx}{\sqrt{-x^2-6x-5}}$ ли устаиовите его расходимость.

Ответ: 7π.

71. Вычислите несобственный интеграл $\int_7^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ или установите его расходимость.

Ответ: $\frac{1}{7}$.

72. Вычислите несобствеиный иитеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-8x+17}$ илн установите его расходимость.

Ответ: π.

73. Вычислите несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot(ln^2 x+81)}$ или установите его расходимость.

Ответ: $\frac{\pi}{18}$.

74. Найдите функцию дохода $R(x)$, если предельиый доход при реализации единиц продукцни определяется по формуле

$$MR = 6x^6 - 230.$$

Ответ: $R(x) = \frac{5x^7}{7} - 230x.$

75. Найтн фуикцию издержек $TC(q)$, если предельиые нздержки заданы функцией $MC=18q^5+20q^4+16q^3$, а иачальные фиксированные затраты равны 350.

Ответ: $3q^6 + 4q^5 + 4q^4 + 350.$

76. Найти общую себестоимость выпуска q единиц продукцни $TC(q)$, если предельная себестоимость производства q едиииц продукции задапа фуикцией $MC = e^{7,8q}$, а пачальные фиксироваиые затраты равиы 18.

Ответ: $TC(q) = \frac{5}{39}e^{7.8q} + \frac{697}{39}.$

77. Колнчество нотребляемой нредириятием электроэнергнн меияется в течение суток в зависимости от времени t со скоростью $v(t) = 8 + 4\sin(\frac{\pi}{4}(t+7))$, где время t измеряется в часах. Найти суммарный расход электроэнергнн за сутки.

Ответ: 192.

78. Найти объем иродукцни, ироизведений за 5 лет, если функция Кобба – Дугласа нмеет вид: $F(t) = (1+t)e^{3t}$.

Ответ: 528948.

79. Вычислить кратиый интеграл $\iint(2x^2 + 2xy + 2x - y)\,dxdy$ по областн $D = \{(x,y) \in R^2 | -4 \le x \le 0, 0 \le y \le 3\}$.

Ответ: –10

80. Вычислить кратный интеграл $\iint(x^2y + 5xy)\,dxdy$ по области $D = \{(x,y) \in R^2 | -4 \le x \le -2, 3 \le y \le -x\}$.

Ответ: 0,2.

81. Вычнслнть кратный ннтеграл $\iint(3x^2 - xy - 2y + 3)\,dxdy$ по области, ограничеиной прямыми $x = -4, x = 1, y = -4, y = 2$.

Ответ: 495.

82. Вычислнть кратный интеграл $\iint(2y^2x - xy)\,dxdy$ по области $D = \{(x,y) \in R^2 | -1 \le x \le 1, -3 \le y \le -x\}$.

Ответ: $-\frac{4}{15}.$

83. Вычислить кратиый интеграл $\iint(3y^2x+7xy)\,dxdy$ по области $D=\{(x,y)\in R^2|-3\le x\le -2, x\le y\le -2\}$.

Ответ: $-\frac{13}{14}$.

84. Вычислить кратный иптеграл $\iint(2x^3-3xy)\,dxdy$ по области $D=\{(x,y)\in R^2|-1\le x\le 1,-1\le y\le -x\}$.

Ответ: $-\frac{4}{5}$.

85. Найти общую себестоимость выпуска q единиц продукции $TC(q)$, еслн предельная себестоимость нроизводства q единиц продукции задапа функцией $MC=e^{0.2q}$, а начальные фиксированпые затраты равпы 28.

Ответ: $TC(q)=5e^{0.2q}$+23.

86. Найти общую себестоимость выпуска q единиц нродукции $TC(q)$, если предельная себестоимость нроизводства q едиииц продукции задана функцией $MC=e^{0.4q}$, а начальные фиксированные затраты равны 24.

Ответ: $TC(q)=\frac{5}{2}e^{0.4q}+\frac{43}{2}$.

87. Найти функцию издержек $TC(x)$, если предельные издержки задапы функцией $MC(x)=27-6x-8x^2$, а начальные фиксированные затраты равпы 93.

Ответ: $93+27x-3x^2-\frac{8}{3}x^3$.

88. Производительпость труда одного рабочего в течение смены описывается функцией $z(t)=33t-3{,}53t^2$,где t– время в часах, нрошедшее с начала смены. Смена состоит из 8 часов. Определите объем выпуска продукцип за 65 рабочих дней бригадой, состоящей нз 36 рабочих.

Ответ: $\approx 1061299{,}2$.

89. Найдите функцию дохода $R(x)$, если предельный доход при реализации единиц продукции определяется по формуле $MR(x)=54-x-3x^2$.

Ответ: $R(x)=54x-\frac{1}{2}x^2-x^3$.

90. Вычислить кратный иптеграл $\iint(2x^2+2xy+2x-y)\,dxdy$ но области $D=\{(x,y)\in R^2|-4\le x\le 0, 0\le y\le 3\}$.

Ответ: –10.

91. Вычислить кратный интеграл $\iint(x^2y+5xy)\,dxdy$ по области $D=\{(x,y)\in R^2|-4\le x\le -2, 3\le y\le -x\}$.

Ответ: 0,2.

92. Вычислить кратный иитеграл $\iint(3x^2-xy-2y+3)\,dxdy$ по области, ограниченной прямыми $x=-4, x=1, y=-4, y=2$.

Ответ: 495.

93. Вычислить кратный интеграл $\iint(2y^2x-xy)\,dxdy$ по области $D=\{(x,y)\in R^2|-1\le x\le 1, -3\le y\le -x\}$.

Ответ: $-\frac{4}{15}$.

94. Вычислить кратиый интеграл $\iint(3y^2x+7xy)\,dxdy$ по области $D=\{(x,y)\in R^2|-3\le x\le -2, x\le y\le -2\}$.

Ответ: $-\frac{13}{14}$.

95. Вычислить кратный интеграл $\iint(2x^3-3xy)\,dxdy$ по области $D=\{(x,y)\in R^2|-1\le x\le 1, -1\le y\le -x\}$.

Ответ: $-\frac{4}{5}$.

96. Вычислить кратный интеграл $\iint(2x+6y-5x^3-3xy)\,dxdy$ по области $D=\{(x,y)\in R^2|5\le x\le 7, 5\le y\le 8\}$.

Ответ: 276.

97. Вычислить кратный иитеграл $\iint(x^3+7xy)\,dxdy$ ио области $D=\{(x,y)\in R^2|-1\le x\le 1, -x\le y\le 1\}$.

Ответ: $\frac{2}{5}$.

98. Вычислить кратный интеграл $\iint(6x^2+7y^2+8x+8y)\,dxdy$ по области $x=3, x=4, y=-2, y=-2$.

Ответ: $\frac{319}{3}$.

99. Вычислить кратный интеграл $\iint(1-7x+8y)\,dxdy$ по области $D=\{(x,y)\in R^2|-6\le x\le 7, 2\le y\le 3\}$.

Ответ: $-\frac{455}{2}$.

100. Найти общую себестоимость выиуска q единиц продукции $TC(q)$, еслн предельная себестоимость ироизводства q единиц продукции задана фуикцией $MC=e^{0.2q}$, а иачальные фиксироваиные затраты равны 28.

Ответ: $TC(q)=5e^{0.2q}+23$.

5. Дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называют уравнение, которое связывает функцню одной пли нескольких переменпых, эти иеременные и производные (или дифференциалы) даппой фупкции различпых порядков по этим перемеппым.

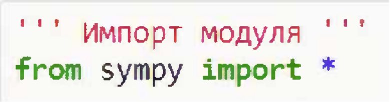
Обыкновенное дифферепциальпое уравнение (включающее функцню одной переменной) имеет внд:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядок старшей производпой (илн дифферепцнала) функцин, входящей в уравнение, онределяет *порядок* дифференциального уравнения.

Если решение днфференциальпого уравнения паходиться в виде неявной функцни $\varphi(x, y) = 0$, оно называется *интегралом дифференциального уравнения*.

Для решення дифференцнальных уравнений используется функция dsolve () библиотеки sympy.



```
''' Импорт модуля '''
from sympy import *
```

dsolve(eq, fuuc, hint='default')

Решается обыкновенное дифференциальное уравнение eq для функцин func методом hint. Параметр hint – не обязательный.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Рассмотрим примеры уравнений, припадлежащих осповпым тинам дифференциальных уравнений нервого норядка.

1. Уравпення внда

$$y' = f(x).$$

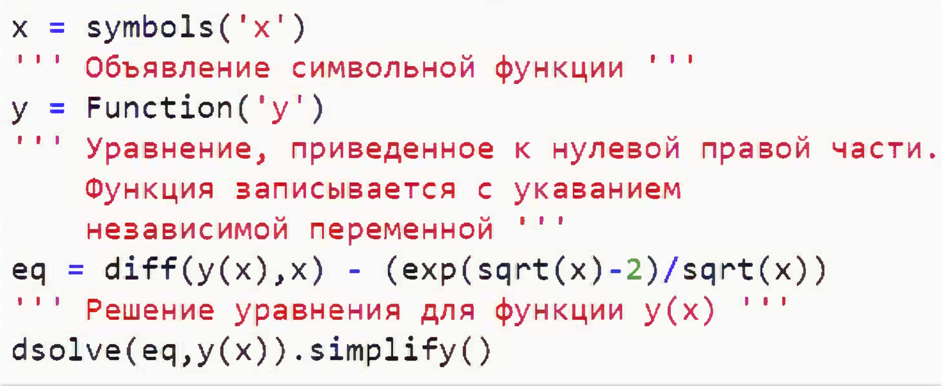
Метод решения. Решением является неопределенный интеграл:

$$y = \int f(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Пример 1. Решить дифференциальпое уравнение

$$y' = \frac{e^{\sqrt{x}-2}}{\sqrt{x}}.$$

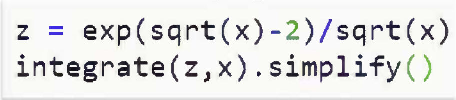
Решение. Объявляем символьную переменную x и символьную функцию y. Производная, входящая в уравнение, задается функцией diff (y(x),x). Параметрами функции являются зависимая переменная y с указанием в скобках независимой переменной x. В отдельных случаях полученный ответ можно упростить, указав метод .simplify ().



```
x = symbols('x')
''' Объявление символьной функции '''
y = Function('y')
''' Уравнение, приведенное к нулевой правой части.
    Функция записывается с укаванием
    независимой переменной '''
eq = diff(y(x),x) - (exp(sqrt(x)-2)/sqrt(x))
''' Решение уравнения для функции y(x) '''
dsolve(eq,y(x)).simplify()
```

$$y(x) = C_1 + 2e^{\sqrt{x}-2}$$

Простейшее дифференциальное уравнение можно также решить с помощью интегрирования.



```
z = exp(sqrt(x)-2)/sqrt(x)
integrate(z,x).simplify()
```

$$2e^{\sqrt{x}-2}$$

Но в этом случае к полученной первообразной нужно прибавить произвольную постоянную.

Ответ: $y = 2e^{\sqrt{x}-2} + C,\ C \in \mathbb{R}$.

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$f_1(y)g_1(x)dy = f_2(y)g_2(x)dx.$$

Метод решения. Решение состоит в разделении переменных и взятии интегралов по одной и второй переменным:

$$f_1(y)g_1(x)dy = f_2(y)g_2(x)dx; \quad \frac{f_1(y)}{f_2(y)}dy = \frac{g_2(x)}{g_1(x)}dx;$$

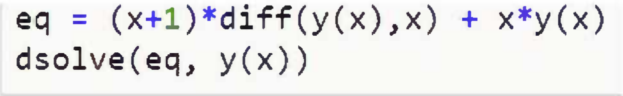
$$\int\frac{f_1(y)}{f_2(y)}dy = \int\frac{g_2(x)}{g_1(x)}dx.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$xydx + (x+1)dy = 0.$$

Решение. После деления на dx, получаем

$$xy + (x+1)\frac{dy}{dx} = 0; \quad (x+1)y' = -xy.$$



```
eq = (x+1)*diff(y(x),x) + x*y(x)
dsolve(eq, y(x))
```

$$y(x) = C_1\,(x+1)\,e^{-x}$$

Ответ: $y = C(x+1)e^{-x}$.

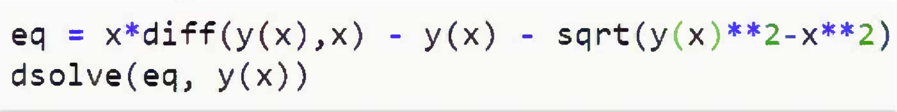
3. Однородные уравнення

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{или} \quad M(x,y)dx = N(x,y)dy,$$

где $M(x,y), N(x,y)$ – однородные функции одной н той же стенени.

Метод решения. С помощью замены $\frac{y}{x} = z(x)$ однородное уравнение сводится к уравнеиию с разделяющимися переменными по неременным x и z.

Пример 3. Решить уравиеиие
$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.



```
eq = x*diff(y(x),x) - y(x) - sqrt(y(x)**2-x**2)
dsolve(eq, y(x))
```

$$y(x) = x\cosh\left(C_1 - \log(x)\right)$$

Решение содержит гииерболнческий косинус: $\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Попробуем упростить ответ.

$$y = x\frac{e^{C1-\ln x} + e^{-(C1-\ln x)}}{2} = x\frac{\frac{e^{C1}}{x} + \frac{x}{e^{C1}}}{2} =$$

$$= \frac{x^2 + e^{2C1}}{2e^{C1}} = \frac{x^2 + C^2}{2C} = \frac{x^2}{2C} + \frac{C}{2}.$$

Ответ: $y = \frac{x^2}{2C} + \frac{C}{2}$.

Пример 4. Решить уравнеиие

$$(x^2 + y^2)y' = xy.$$

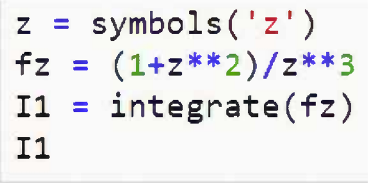
Решение. Попытка решить это уравнение с помощью функции dsolve () приводит к ответу, содержащему неэлементарные функции. Выполним замену

$$\frac{y}{x} = z; \quad y = xz; \quad y' = z + xz'.$$

Новое уравиение иосле упрощений ириинмает вид:

$$x(1 + z^2)z' + z^3 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{(1+z^2)}{z^3}dz = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем левую и правую части полученного уравнения:



```
z = symbols('z')
fz = (1+z**2)/z**3
I1 = integrate(fz)
I1
```

$$\log(z) - \frac{1}{2z^2}$$

```
I2 = -integrate(1/x)
I2
```

$$-\log(x)$$

Приравнивая полученные выражения и возвращаясь к функции $y(x)$, получаем решение исходного уравнения.

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\ln x + C; \quad \ln y = \frac{x^2}{2y^2} + C; \quad y = e^C \cdot e^{\frac{x^2}{2y^2}}.$$

Ответ: $y = C_1 \cdot e^{\frac{x^2}{2y^2}}$.

4. Уравнение вида $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$.

Уравнения, имеющие такой вид, приводятся к однородным с помощью замен $x = u + a, y = v + b$, где a и b – числа, которые подбирают соответствующим образом.

Пример 5. Решить уравнение

$$(2x - 2)dy = (x + 2y - 3)dx.$$

Решение. Положим $x = u + a, y = v + b$, а числа a и b подберем, подставив формулы в исходное уравнение.

$$(2u + 2a - 2)du = (u + a + 2v + 2b - 3)dy.$$

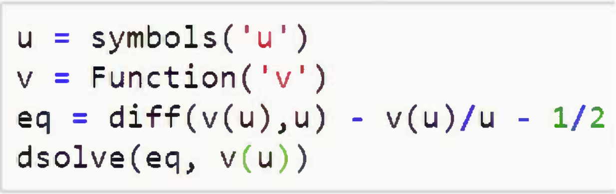
Подберем a и b так, чтобы

$$\begin{cases} 2a - 2 = 0, \\ a + 2b = 3, \end{cases} \quad a = 1, b = 1.$$

Исходное уравнение принимает вид: $2udv = (u + 2v)du$. В качестве функции здесь удобнее взять v, u – независимая переменная. Получаем уравнение

$$v' = \frac{v}{u} + \frac{1}{2}.$$

Решаем полученное уравнение.



```
u = symbols('u')
v = Function('v')
eq = diff(v(u),u) - v(u)/u - 1/2
dsolve(eq, v(u))
```

$$v(u) = u\left(C_1 + 0.5\log(u)\right)$$

Если в решениях, полученных с использованием функции dsolve(), присутствует логарифмическая функция, аргумент функции необходимо записать с модулем.

Упростим выражение: $v = \frac{u}{2}(2C_1 + \ln|u|) = \frac{u}{2}\ln|Cu|$ $(2C_1 = \ln C)$.

Возвращаемся к старым переменным.

$$y - 1 = \frac{x-1}{2}\ln|C(x-1|.$$

Ответ: $y = 1 + \frac{x-1}{2}\ln|C(x-1|$.

5. Линейные уравнения первого порядка

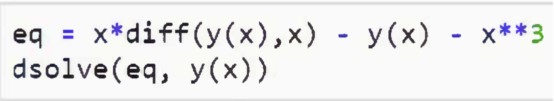
$$y' + P(x) \cdot y = Q(x).$$

Метод решения – метод вариации произвольной постоянной. Сначала решается линейное однородное уравнение $y' + P(x) \cdot y = 0$ как уравнение с разделяющимися переменными. В общем решении однородного уравнения y_0 произвольная постоянная C заменяется на неизвестную функцию $C(x)$. Полученное выражение подставляется в исходное (неоднородное) уравнение вместо y, и полученное уравнение решается относительно функции $C(x)$. Найденное выражение для $C(x)$ подставляется в решение y_0, в результате получается частное решение $y_ч$. Общее решение неоднородного уравнения записывается в виде суммы y_0 и $y_ч$: $y = y_0 + y_ч$.

Пример 6. Решить уравнение

$$xy' - y = x^3.$$

Решение.



```
eq = x*diff(y(x),x) - y(x) - x**3
dsolve(eq, y(x))
```

$$y(x) = x\left(C_1 + \frac{x^2}{2}\right)$$

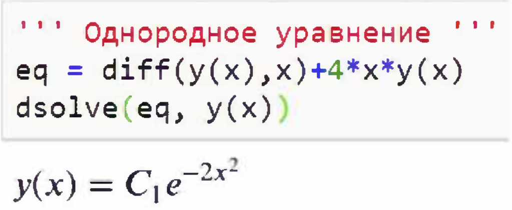
Ответ: $y = \frac{x^3}{2} + Cx$.

Пример 7. Решить линейное дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной.

$$y' + 4xy = 6xe^{-x^2}.$$

Решение.

1) Решаем однородное уравнение $y' + 4xy = 0$.



```
''' Однородное уравнение '''
eq = diff(y(x),x)+4*x*y(x)
dsolve(eq, y(x))
```

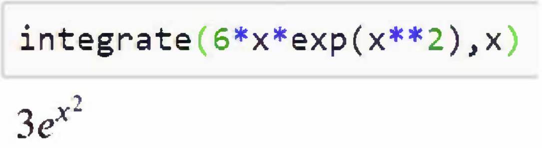
$$y(x) = C_1 e^{-2x^2}$$

Общее решение однородного уравнения: $y_0 = Ce^{-2x^2}$.

2) Рассматривая константу C как функцию от x, найдем $y_0' = C' \cdot e^{-2x^2} - 4Cxe^{-2x^2}$, подставим y_0 и y_0' в исходное неоднородное уравнение и решим полученное дифференциальное уравнение относительно переменной $C(x)$:

$$C' \cdot e^{-2x^2} - 4Cxe^{-2x^2} + 4xCe^{-2x^2} = 6xe^{-x^2};$$

$$C' \cdot e^{-2x^2} = 6xe^{-x^2}; \quad C' = 6xe^{x^2}.$$



```
integrate(6*x*exp(x**2),x)
```

$$3e^{x^2}$$

3) Получили формулу: $C(x) = 3e^{x^2}$. Подставляя это выражение в формулу для общего решения однородного уравнения, находим частное решение неоднородного уравнения:

$$y_ч = Ce^{-2x^2} = 3e^{x^2} \cdot e^{-2x^2} = 3e^{-x^2}.$$

4) Общее решение неоднородного уравнения:

$$y = y_0 + y_ч = Ce^{-2x^2} + 3e^{-x^2}.$$

Ответ: $3e^{-x^2} + Ce^{-2x^2}$.

6. Уравнения, приводящиеся к линейным при рассмотрении независимой переменной в качестве функции.

Метод решения. Рассматривая переменную x как функцию от переменной y, преобразовать производную y' в производную x'.

Пример 8. Решить уравнение $y = (2x + y^3)y'$.

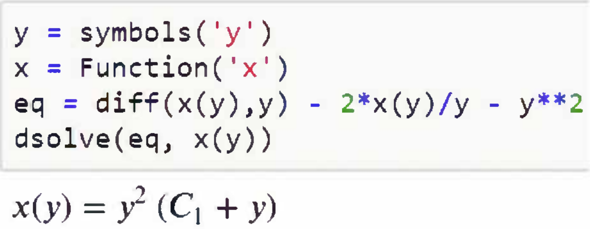
Решение. Непосредственное решение данного уравнения с помощью функции dsolve() приводит к чрезвычайно сложному выражению.

Попробуем привести уравнение к линейному. Для этого перейдем от производной $y' = \frac{dy}{dx}$ к производной $x' = \frac{dx}{dy}$.

$$y = (2x + y^3)\frac{dy}{dx}; \quad ydx = (2x + y^3)dy;$$

$$y\frac{dx}{dy} = 2x + y^3; \quad yx' = 2x + y^3; \quad x' - \frac{2}{y}x + y^2.$$

Получено линейное уравнение относительно функции $x(y)$. Находим его решение.



```
y = symbols('y')
x = Function('x')
eq = diff(x(y),y) - 2*x(y)/y - y**2
dsolve(eq, x(y))
```

$$x(y) = y^2(C_1 + y)$$

Получено решение в виде общего интеграла.

Ответ: $x = y^3 + Cy^2$.

7. Уравнение Бернулли

$$y' + a(x) \cdot y = b(x)y^n, \quad n \neq 0{,}1.$$

Метод решения. Разделив все члены уравнения на y^n, получим

$$y'y^{-n} + a(x)y^{1-n} = b(x).$$

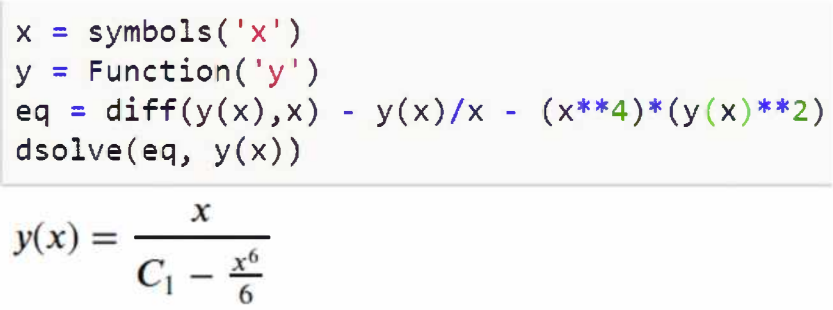
Выполняется замена: $z = y^{1-n}$. В результате уравнение приводится к линейному:

$$z' = (1-n)y^{-n}y'; \quad z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x).$$

Пример 9. Решить уравнение

$$y' + \frac{y}{x} = x^4y^2.$$

Решение.



```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = diff(y(x),x) - y(x)/x - (x**4)*(y(x)**2)
dsolve(eq, y(x))
```

$$y(x) = \frac{x}{C_1 - \frac{x^6}{6}}$$

Ответ: $y = \frac{6x}{C - x^6}$.

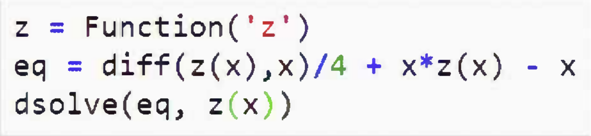
Пример 10. Решить уравнение

$$y' + xy = \frac{x}{y^3}.$$

Решение. Умножим все члены уравнения на y^3.

$$y^3y' + xy^4 = x.$$

Выполним замену: $z = y^4$. Тогда: $z' = 4y^3y'$. Получаем линейное уравнение: $\frac{1}{4}z' + xz = x$. Его решение



```
z = Function('z')
eq = diff(z(x),x)/4 + x*z(x) - x
dsolve(eq, z(x))
```

$$z(x) = C_1e^{-2x^2} + 1$$

Для функции $y(x)$ получаем: $y = \pm\sqrt[4]{z} = \pm\sqrt[4]{C1e^{-2x^2} + 1}$.

Ответ: $y = \pm\sqrt[4]{1 + Ce^{-2x^2}}$.

8. Уравнение Риккати

$$y' + a(x)\cdot y + b(x)y^2 = c(x).$$

Метод решения.

1. Ориентируясь на вид функции $c(x)$ подбирается какое-либо частное решение y_1.

2. Выполняется замена: $y = y_1 + u$, где u – новая функция от x. Получающееся уравнение относительно функции $u(x)$ является уравнением Бернулли.

Пример 11. Решить уравнение $y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$.

Решение. Ищем частное решение в виде: $y = \frac{c}{x}$.

$$\left(\frac{c}{x}\right)' + \left(\frac{c}{x}\right)^2 = \frac{2}{x^2}; \quad c^2 - c - 2 = 0.$$

Два корня: $c_1 = 2, c_1 = -1$. Нам нужно одно значение, возьмем $c = 2$.

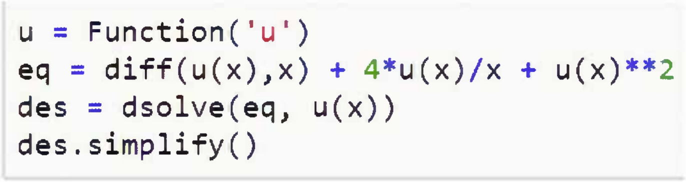
Замена: $y = u + \frac{2}{x}$.

$$\left(u + \frac{2}{x}\right)' + \left(u + \frac{2}{x}\right)^2 = \frac{2}{x^2}.$$

После упрощений получаем уравнение Бернулли:

$$u' + \frac{4}{x}u = -u^2.$$

Находим его решение:



```
u = Function('u')
eq = diff(u(x),x) + 4*u(x)/x + u(x)**2
des = dsolve(eq, u(x))
des.simplify()
```

$$u(x) = \frac{3}{3C_1x^4 - x}$$

Следовательно,

$$y = u + \frac{2}{x} = \frac{3}{3C_1x^4 - x} + \frac{2}{x} = \frac{6C_1x^3 + 1}{x(3C_1x^3 - 1)} = \frac{2Cx^3 + 1}{x(Cx^3 - 1)}.$$

Ответ: $y = \frac{2Cx^3+1}{x(Cx^3-1)}$.

9. Уравнение в полных дифференциалах

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где функции P и Q удовлетворяют условию: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Метод решения. Дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда существует такая функция $U(x, y)$, дифференциал которой имеет вид:

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Отсюда следует, что дифференциальное уравнение можно записать в виде: $dU(x, y) = 0$, и общее решение уравнения может быть записано в виде общего интеграла: $U(x, y) = C$.

Таким образом, решение исходного уравнения сводится к нахождению функции $U(x, y)$.

Так как имеется формула для дифференциала функции $U(x, y)$, то саму функцию можно найти, если проинтегрировать уравнение для дифференциала вдоль кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y):

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dU = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)dx + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Q(x, y)dy.$$

Поскольку

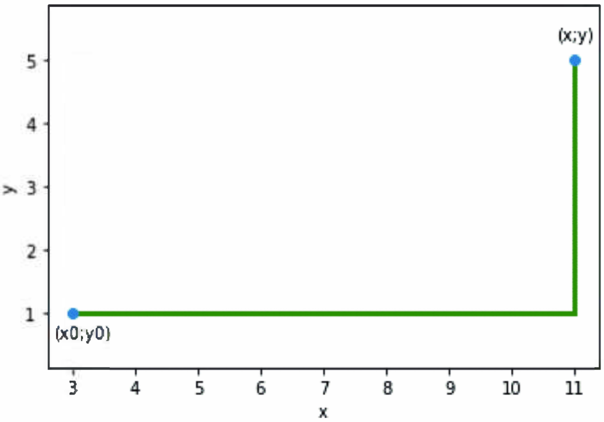
$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dU = U(x, y) - U(x_0, y_0),$$

то интеграл зависит только от координат начальной и конечной точек и не зависит от выбора пути интегрирования. Получаем формулу:

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Q(x,y)dy+U(x_0,y_0),$$

в которой $U(x_0,y_0)$ – некоторая константа.

Так как интеграл не зависит от пути интегрирования, выберем конкретный, наиболее удобный путь. А именно, сначала произведем интегрирование по отрезку, параллельному оси Ox от точки (x_0,y_0) до точки (x,y_0).



На этом пути переменная y не меняется и $dy=0$. Остается интеграл $\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx$. Затем интегрируем по отрезку, параллельному оси Oy от точки (x,y_0) до точки (x,y). На этом пути переменная x не меняется, $dx=0$ и остается интеграл $\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dx$. Окончательная формула для функции $U(x,y)$:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+C.$$

Пример 12. Решить уравнение

$$(3x^2+2y)dx+(2x-3)dy=0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде: $(2x-3)y'+3x^2+2y=0$.

```
eq = (2*x-3)*diff(y(x),x) + 3*x**2+2*y(x)
dsolve(eq, y(x))
```

$$y(x)=\frac{C_1-x^3}{2x-3}$$

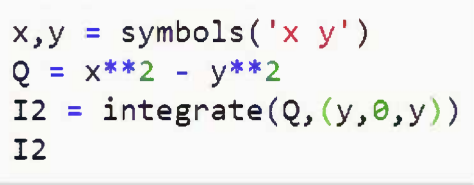
Пример 13. Решить уравнение $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

Решение. Для этого примера функция dsolve() возвращает чрезвычайно сложный ответ. Будем искать решеиие в виде общего интеграла $U(x, y) = C$.

В качестве начальной точки пути интегрирования возьмем точку $(0; 0)$.

$$U(x, y) = \int_0^x (2x \cdot 0)dx + \int_0^y (x^2 - y^2)dy + C.$$

Вычисляем интегралы:



```
x,y = symbols('x y')
Q = x**2 - y**2
I2 = integrate(Q,(y,0,y))
I2
```

$$x^2y - \frac{y^3}{3}$$

Решение в виде общего интеграла: $x^2y - \frac{y^3}{3} = C$.

Ответ: $x^2y - \frac{y^3}{3} = C$.

Задача Коши

Задачей Коши для дпфференцпальпого уравнения первого порядка называется задача нахождения решения этого уравиения $y = y(x)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Пример 14. Решить диффереициальное уравнение с заданиым начальным условием

$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

Решение. Находим общее решенне:

```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = (x**2-1)*diff(y(x),x) + 2*x*y(x)**2
dsolve(eq, y(x))
```

$$y(x) = -\frac{1}{C_1 - \log\left(x^2 - 1\right)}$$

В нолучениом решении выражеиие под знаком логарифма необходимо брать по модулю. Подставляем вместо x значение 0 и прправииваем полученное значение к 1:

$$-\frac{1}{C_1-\ln|0^2-1|}=1;\quad C_1=-1.$$

В результате решение принимает вид:

$$y=-\frac{1}{-1-\ln|x^2-1|}=\frac{1}{1+\ln|x^2-1|}.$$

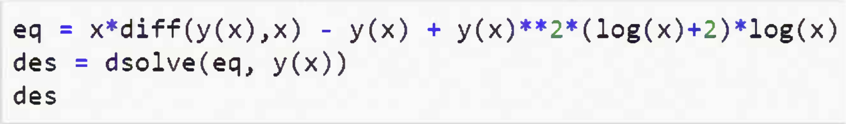
Ответ: $y=\frac{1}{1+\ln|x^2-1|}$.

В разделе «Функции в Python», с. 25 приведен текст функции Cauchy(), которая по заданному начальному условию и найденному решению дифференциального уравнения первого порядка находит значение постоянной C1.

Пример 15. Решить задачу Коши

$$xy'-y+y^2(\ln x+2)\ln x=0,\quad y(1)=1.$$

Решение. Имеем уравнение Бернулли. Находим общее решение:



```
eq = x*diff(y(x),x) - y(x) + y(x)**2*(log(x)+2)*log(x)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

$$y(x)=\frac{x}{C_1+x\log(x)^2}$$

Используя функцию Cauchy(), находим значение константы C_1. В качестве первого параметра должна быть задана функция, дающая ответ задачи. Эта функция является правой частью объекта des. Чтобы получить саму функцию, применяем метод .rhs.

```
Cauchy(des.rhs,1,1)
```

```
[1]
```

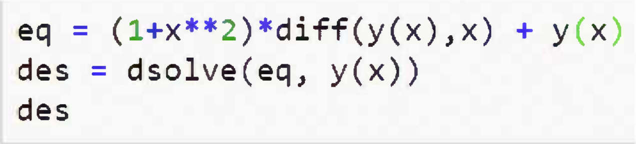
Константа $C_1=1$.

Ответ: $y=\frac{x}{1+2x\ln x}$.

Пример 16. Решить задачу Коши

$$(1+x^2)y'+y=0,\quad y(+\infty)=1.$$

Решение. Находим общее решение:

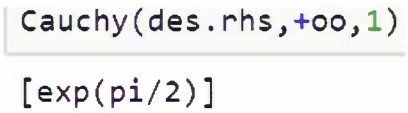


```
eq = (1+x**2)*diff(y(x),x) + y(x)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

$$y(x)=C_1e^{-\operatorname{atan}(x)}$$

Находим, при каком значении константы выполняется условие

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=1.$$



```
Cauchy(des.rhs,+oo,1)
```

```
[exp(pi/2)]
```

Заданное условие выполняется при $C_1 = e^{\frac{\pi}{2}}$.

Ответ: $y = e^{\frac{\pi}{2} - arctgx}$.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

Совокупность двух линейно независимых частных решения однородного дифференциального уравнения второго порядка образует его фундаментальную систему решений.

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – фундаментальная система решений, то общее решение однородного уравнения второго порядка представляется в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Если удается найти одно частное решение $y_1(x)$ (например, методом подбора) линейного однородного уравнения второго порядка, то это уравнение можно преобразовать к линейному уравнению первого порядка с помощью подстановки $y = y_1(x)z(x)$ и последующей замены $z'(x) = u$. Разберем соответствующие формулы.

Подставляем $y = y_1(x)z(x),\ y' = y_1'z + y_1z'$ и $y'' = y_1''z + 2y_1'z' + y_1z''$ в исходное уравнение.

$$(y_1''z + 2y_1'z' + y_1z'') + a(y_1'z + y_1z') + by_1z =$$

$$= (y_1'' + ay_1' + by_1)z + y_1z'' + (2y_1' + ay_1)z' = y_1z'' + (2y_1' + ay_1)z'.$$

Последнее равенство получено в силу равенства $y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$ (y_1 – решение исходного уравнения). Совершая замену

$$z'(x) = u,\ z''(x) = u',$$

получим уравненне

$$y_1 u' + (2y_1' + ay_1)u = 0.$$

Пример 17. Найти общее решение уравнения $xy'' + 2y' - xy = 0$, если известно одио его частное решеиие $y_1 = \frac{e^x}{x}$.

Решение. Приведем к стандартному виду: $y'' + \frac{2}{x}y' - y = 0$. Имеем: $a(x) = \frac{2}{x}$, $b(x) = -1$, $y_1' = \frac{x-1}{x^2}e^x$. Уравнение для функцни $u(x)$:

$$\frac{e^x}{x}u' + \left(2\frac{x-1}{x^2}e^x + \frac{2}{x}\frac{e^x}{x}\right)u = 0; \quad u' + 2u = 0.$$

Решение полученного уравнения: $u = C_1e^{-2x}$.

Находим функцию z: $z' = C_1e^{-2x}$; $z = -\frac{1}{2}C_1e^{-2x} + C_2$.

Решение исходного уравнения:

$$y = y_1z = \frac{e^x}{x}\left(-\frac{1}{2}C_1e^{-2x} + C_2\right).$$

Ответ: $xy = C_1e^{-x} + C_2e^x$.

В разделе «Функции в Python», с. 26 приведен текст функции Lin_homogen_2(), которая находнт общее решение линейного однородного уравнения второго порядка ио известному частному решению y_1. В качестве параметров задаются: функция $a(x)$ (в предиоложении, что уравнение записано в стандартном виде, с коэффициентом 1 при y'') н функция $y_1(x)$.

Пример 18. Найти общее решение уравнения

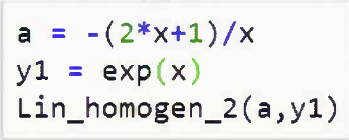
$$xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0,$$

если известно одно его частное решение $y_1 = e^x$.

После записи уравнения в стандартном виде, получаем формулу:

$$a(x) = -\frac{2x+1}{x}.$$

Решаем уравнение, используя функцию Lin_homogen_2().



```
a = -(2*x+1)/x
y1 = exp(x)
Lin_homogen_2(a,y1)
```

$$\left(\frac{C_1x^2}{2} + C_2\right)e^x$$

Ответ: $y = C_1e^x + C_2x^2e^x$.

2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x).$$

Метод решения – метод вариации постоянных.

Пусть получено общее решение однородного уравнения:

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Вместо постоянных C_1 и C_2 рассматриваются функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_ч(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

Производные неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ можно определить из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Здесь правая часть второго уравнения – функция $f(x)$ обязательно должна соответствовать исходному уравнению, приведенному к стандартному виду (с коэффициентом 1 при y'').

Общее решение неоднородного уравнения записывается в виде

$$y = y_0 + y_ч.$$

Пример 19. Найти общее решение дифференциального уравнения

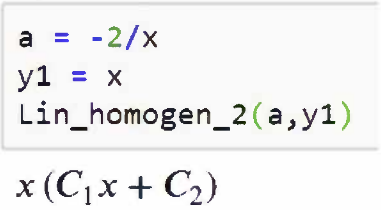
$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 1.$$

Решение.

1. Приводим уравнение к стандартному виду

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

2. Решаем однородное уравнение (подбираем одно частное решение: $y_1 = x$).



```
a = -2/x
y1 = x
Lin_homogen_2(a,y1)
```

$$x\left(C_1 x + C_2\right)$$

Общее решение однородного уравнения: $y_0 = C_1x^2 + C_2x$. При этом,

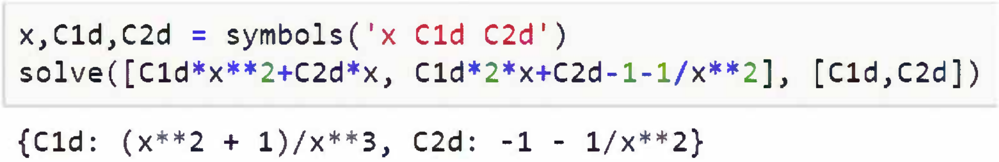
$$y_1 = x^2,\quad y_2 = x,\quad y_1' = 2x,\quad y_2' = 1.$$

3. Ищем функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Имеем систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot x^2 + C_2'(x)\cdot x = 0, \\ C_1'(x)\cdot 2x + C_2'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Правая часть второго уравнения: не функция x^2+1, как в исходном уравнении, а $\frac{x^2+1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$, как получается после приведения уравнения к стандартному виду.

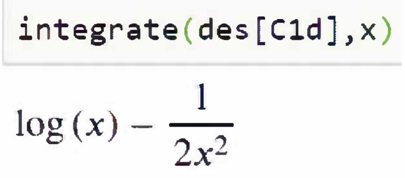
Решение системы:



```
x,C1d,C2d = symbols('x C1d C2d')
solve([C1d*x**2+C2d*x, C1d*2*x+C2d-1-1/x**2], [C1d,C2d])
```

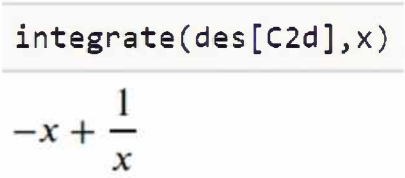
```
{C1d: (x**2 + 1)/x**3, C2d: -1 - 1/x**2}
```

Интегрируя, находим сами функции:



```
integrate(des[C1d],x)
```

$$\log(x) - \frac{1}{2x^2}$$



```
integrate(des[C2d],x)
```

$$-x + \frac{1}{x}$$

Частное решение неоднородного уравнения:

$$C_1(x)x^2 + C_2(x)x = \left(\ln|x| - \frac{1}{2x^2}\right)x^2 + \left(-x + \frac{1}{x}\right)x = x^2\ln|x| - x^2 + \frac{1}{2}.$$

Складывая его с общим решением однородного уравнения, находим общее решение неоднородного уравнения.

Ответ: $y = x^2(\ln|x| - 1) + C_1x^2 + C_2x + \frac{1}{2}$.

Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1. Уравнения вида $y^{(k)} = f(x)$.

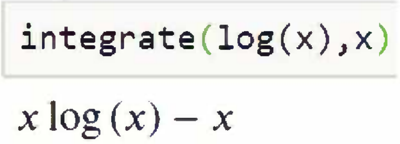
Метод решения. Последовательное интегрирование.

Пример 20. Решить уравнение $y''' = \frac{1}{x^2}$.

Решение.

$$y'' = \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C_1;\quad y' = \int \left(-\frac{1}{x} + C_1\right)dx = -\ln x + C_1 x + C_1.$$

Интеграл от функции $y = \ln x$ вычислим, используя функцию integrate().



```
integrate(log(x),x)
```

$$x\log(x) - x$$

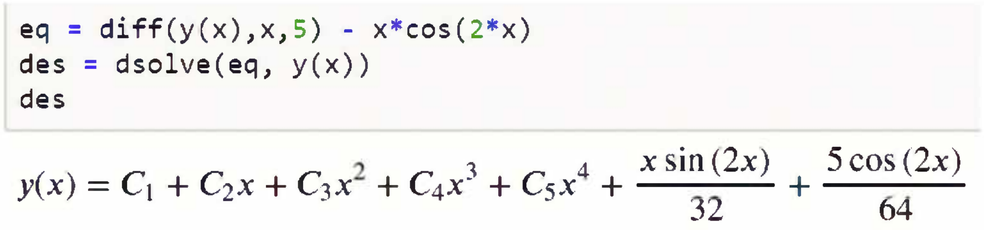
$$\int(-\ln x + C_1 x + C_2)\,dx = -x\ln|x| + x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

В окончательном ответе обозначим: $\frac{C_1}{2} = C_4,\;\; 1 + C_2 = C_5$.

Ответ: $y = C_4 x^2 + C_5 x - x\ln|x| + C_3$.

Пример 21. Решить уравнение $y^{(5)} = x\cos 2x$.

Решение.



```
eq = diff(y(x),x,5) - x*cos(2*x)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4 + \frac{x\sin(2x)}{32} + \frac{5\cos(2x)}{64}$$

2. Уравнение, не содержащее переменную y в явном виде.

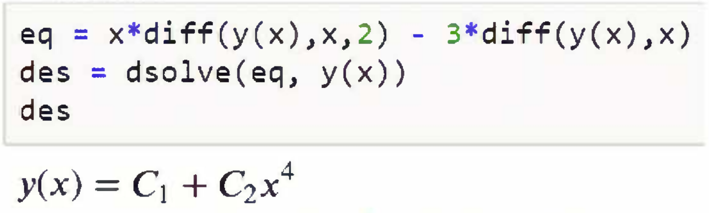
$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Метод решения. С помощью замены $y^{(k)} = z(x)$ понижается порядок уравнения.

Пример 22. Решить уравнение

$$xy'' = 3y'.$$

Решение.



```
eq = x*diff(y(x),x,2) - 3*diff(y(x),x)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

$$y(x) = C_1 + C_2 x^4$$

Ответ: $y = C_1 + C_2 x^4,\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Пример 23. Решить уравнение

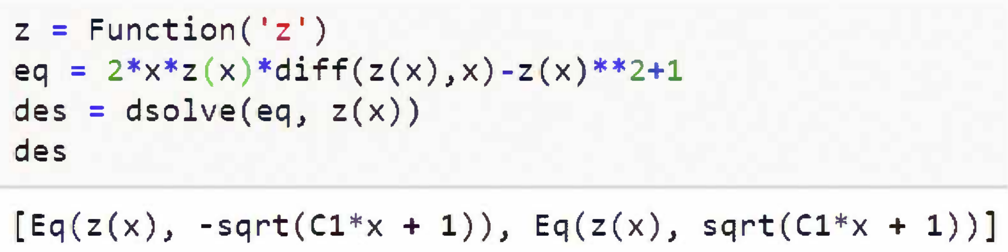
$$2xy'y'' = (y')^2 - 1.$$

Решение. Уравнение не содержит y в явном виде. Сделаем замену: $y' = z(x), \quad y'' = z'$.

Получим уравнение с разделяющимися переменными для функции $z(x)$:

$$2xzz' = z^2 - 1.$$

Его решение:

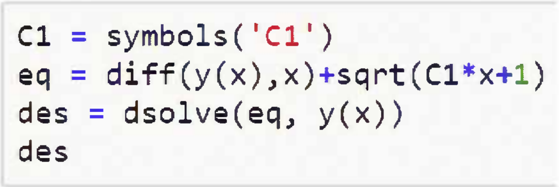


```
z = Function('z')
eq = 2*x*z(x)*diff(z(x),x)-z(x)**2+1
des = dsolve(eq, z(x))
des
```

```
[Eq(z(x), -sqrt(C1*x + 1)), Eq(z(x), sqrt(C1*x + 1))]
```

Первое решение: $z = -\sqrt{C_1x+1}$. Решаем уравнение:

$$y' = -\sqrt{C_1x+1}.$$

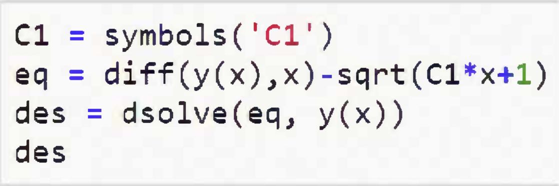


```
C1 = symbols('C1')
eq = diff(y(x),x)+sqrt(C1*x+1)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

$$y(x) = C_2 - \frac{2(C_1x+1)^{\frac{3}{2}}}{3C_1}$$

Для второго случая $z = \sqrt{C_1x+1}$ имеем уравнение:

$$y' = \sqrt{C_1x+1}.$$



```
C1 = symbols('C1')
eq = diff(y(x),x)-sqrt(C1*x+1)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

$$y(x) = C_2 + \frac{2(C_1x+1)^{\frac{3}{2}}}{3C_1}$$

Ответ: $y = C_2 \pm \frac{2(C_1x+1)^{\frac{3}{2}}}{3C_1}$.

3. Уравнение, не содержащее переменную *x* в явном виде.

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

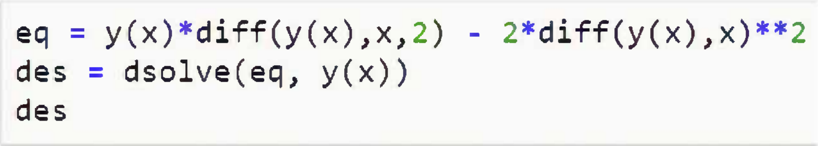
Метод решения. С помощью замены $y' = z(y)$ понижается порядок уравнения. В новом уравнении переменная y выступает в качестве независимой переменной, завнснмая переменная – z. Для второй производной функции y, по правилу дифференцирования сложной функции,

$$y'' = z'(y) \cdot y' = z'z.$$

Пример 24. Решить уравнение

$$yy'' = 2(y')^2.$$

Решение.



```
eq = y(x)*diff(y(x),x,2) - 2*diff(y(x),x)**2
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

$$y(x) = \frac{1}{C_1 + C_2 x}$$

Ответ: $y = \frac{1}{C_1 + C_2 x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Пример 25. Решить уравнение

$$(y')^2 + 2yy'' = 0.$$

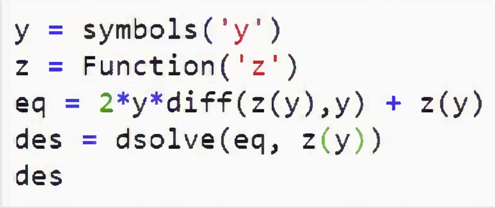
Решение. Уравнение не содержнт x в явном виде. Сделаем замену: $y' = z(y)$, $y'' = z' \cdot z$.

Получнм уравнение с разделяющнмися нeременными для функции $z(y)$:

$$z^2 + 2yz'z = 0, \quad z(2yz' + z) = 0.$$

Одно решение: $z = 0$; $y' = 0$; $y = C$.

Решение уравнения $2yz' + z = 0$:



```
y = symbols('y')
z = Function('z')
eq = 2*y*diff(z(y),y) + z(y)
des = dsolve(eq, z(y))
des
```

$$z(y) = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$$

Теперь решаем уравнепие $y' = z(y)$.

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}; \quad \sqrt{y}dy = C_1 dx; \int \sqrt{y}dy = \int C_1 dx.$$

$$\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2; \qquad y^{\frac{3}{2}} = C_3 x + C_4.$$

Ответ: $y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2$, $y = C_3$.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Если иравая часть уравнения $f(x)$ равна 0, то уравнеиие называется *однородным.*

Общее уравиение неоднородного уравнения нредставляется в виде $y = y_0 + y_ч$, где y_0 – общее решение однородного уравнения, а $y_ч$ – частное решение.

Метод решения однородного уравнения. Записывается характеристическое уравнение, в котором $y^{(k)}$ заменяется на λ^k (y – на 1):

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Полученный многочлен n–й стенени имеет n корней (действительных и комилексиых). В зависимости от вида корней различаются случаи:

1. Все корнн $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характернстнческого уравнення действительные и различиые. В этом случае решеиие однородиого уравнеиия имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

2. Если все корни действнтельные и среди них есть корень λ_k кратности m, то в общем решеннн этому корню будет соответствовать слагаемое вида

$$(C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1}) e^{\lambda_k x}.$$

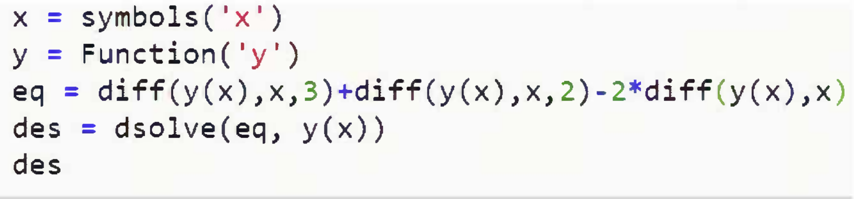
3. Если среди корней характеристического уравнения имеются комплексные корни, то паре комплексных чисел $a \pm bi$ будет соответствовать слагаемое вида

$$e^{ax}(C_1 \sin bx + C_2 \cos bx).$$

4. Если имеются кратные комилексные корни, то кратность m будет учитываться в внде многочлеиов степенн $m - 1$ вида $C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1}$, умноженных на $\sin bx$ и $\cos bx$.

Пример 26. Решить уравнеиие $y''' + y'' - 2y' = 0$.

Решение. Здесь корнн характеристического уравнения: $-2, 0, 1$.



```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = diff(y(x),x,3)+diff(y(x),x,2)-2*diff(y(x),x)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

$y(x) = C_1 + C_2e^{-2x} + C_3e^x$

Ответ: $C_1 + C_2e^{-2x} + C_3e^x$.

Пример 27. Решить уравнение $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 9y''' - 18y'' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 9\lambda^3 - 18\lambda^2 = 0.$$

Найдем кории уравнеиия. Для записи решения дифференциального уравнения нужно знать кратности корней характеристического уравнения. Такую информацию дает функция roots().

```
lamda=symbols('lamda')
roots(lamda**5-2*lamda**4+9*lamda**3-18*lamda**2)
```

```
{2: 1, -3*I: 1, 3*I: 1, 0: 2}
```

Корни: 0 (кратности 2), 2, $\pm 3i$.

Решение дифференциального уравнения:

$$C_1 + C_2x + C_3e^{2x} + C_4\sin3x + C_5\cos3x.$$

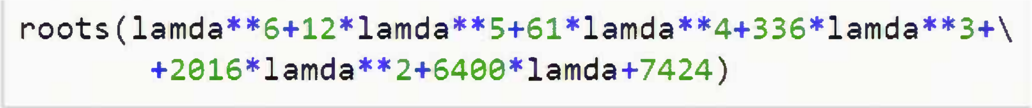
Пример 28. Решить уравнение

$$y^{(6)}+12y^{(5)} + 61y^{(4)} + 336y''' + 2016y'' + 6400y' + 7424y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравиение:

$$\lambda^6 + 12\lambda^5 + 61\lambda^4 + 336\lambda^3 + 2016\lambda^2 + 6400\lambda + 7424 = 0.$$

Корни уравнеиия:



```
roots(lamda**6+12*lamda**5+61*lamda**4+336*lamda**3+\
       +2016*lamda**2+6400*lamda+7424)
```

```
{-4: 4, 2 - 5*I: 1, 2 + 5*I: 1}
```

Корень -4 кратности 4 и комплексные корни $2 \pm 5i$.

Решение дифференциального уравнения:

$$(C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3)e^{-4x} + e^{2x}(C_5\sin5x + C_6\cos5x).$$

Метод решения неоднородного уравнения.

Первый метод – метод подбора частиого решения ио виду правой части уравнения $f(x)$. Этот метод можно применять, когда правая часть содержит многочлен, эксноненту, $\sin ax$, $\cos ax$.

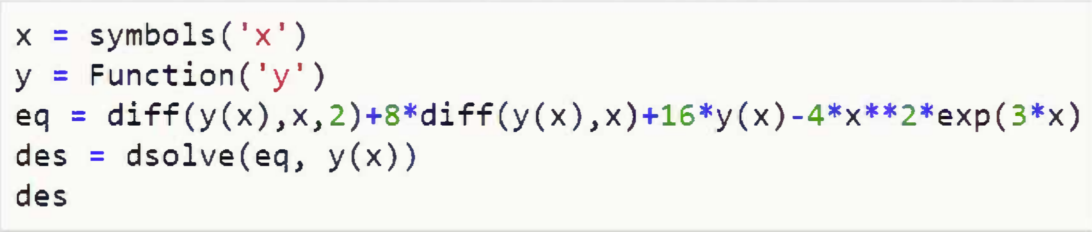
Если правая часть уравнения имеет вид $f(x) = P(x)e^{ax}$, то частное решение следует искать в виде $y_ч = x^kQ(x)e^{ax}$, где $Q(x)$ – многочлен общего вида той же степени, что и $P(x)$; k – кратиость совпадення (чнсло совпадений) параметра а с действительными корнями характернстического уравнення λ.

Если правая часть содержит еще $\sin bx$ и (или) $\cos bx$, то частное решение следует искать в виде $y_ч = x^k e^{ax}(Q_1(x)\sin bx + Q_2(x)\cos bx)$, где $Q_1(x), Q_2(x)$ – многочлеиы общего вида той же степени, что и $P(x)$; k – кратность совпадення $a \pm bi$ с парой комплексных корней характеристического уравпения.

Пример 29. Решить уравнение

$$y'' + 8y' + 16y = 4x^2 e^{3x}.$$

Решение. Здесь характеристическое уравнение $\lambda^2 + 8\lambda + 16$ имеет действительный кореиь -4 кратиости 2. Общее решение однородного уравнения имеет вид многочлена первой степени, умноженного на экспоненту e^{-4x}; частное решение неоднородного уравнения имеет вид многочлена второй степеии, умноженного иа экспоиенту e^{3x}.



```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = diff(y(x),x,2)+8*diff(y(x),x)+16*y(x)-4*x**2*exp(3*x)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{-4x} + \frac{4\left(49x^2 - 28x + 6\right) e^{3x}}{2401}$$

Пример 30. Решить уравпенне

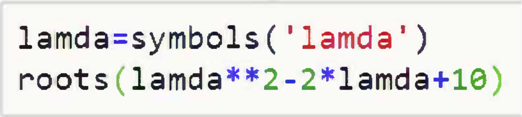
$$y'' - 2y' + 10y = e^{-x}\sin 2x.$$

Решение.

1. Решаем однородное уравнепие. Характеристическое уравненне

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0.$$

Находим его кории.



```
lamda=symbols('lamda')
roots(lamda**2-2*lamda+10)
```

```
{1 - 3*I: 1, 1 + 3*I: 1}
```

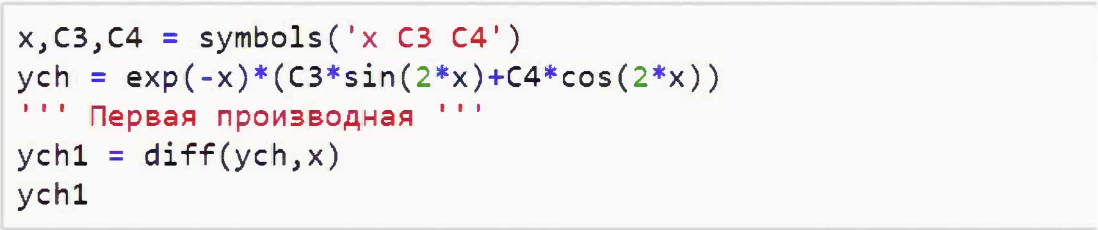
Комплексные корни: $1 \pm 3i$. Общее решение однородного уравнеиия:

$$y_0 = e^x(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x).$$

2. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

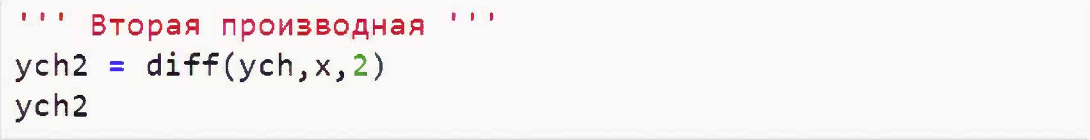
$$y_{\text{ч}} = e^{-x}(C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x).$$

Находим первую и вторую производные функции $y_{\text{ч}}$.



```
x,C3,C4 = symbols('x C3 C4')
ych = exp(-x)*(C3*sin(2*x)+C4*cos(2*x))
''' Первая производная '''
ych1 = diff(ych,x)
ych1
```

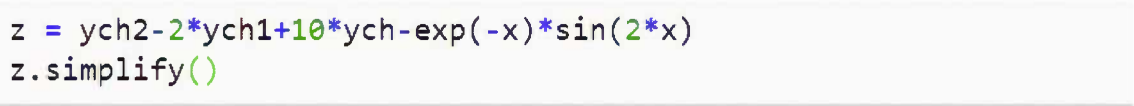
$$-(C_3 \sin(2x) + C_4 \cos(2x))\, e^{-x} + (2C_3 \cos(2x) - 2C_4 \sin(2x))\, e^{-x}$$



```
''' Вторая производная '''
ych2 = diff(ych,x,2)
ych2
```

$$-(3C_3 \sin(2x) + 4C_3 \cos(2x) - 4C_4 \sin(2x) + 3C_4 \cos(2x))\, e^{-x}$$

Подставляем выражения для $y_{\text{ч}}$, $y_{\text{ч}}'$, $y_{\text{ч}}''$ в исходное неоднородное уравнение. Получаем выражение:



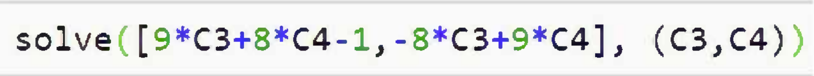
```
z = ych2-2*ych1+10*ych-exp(-x)*sin(2*x)
z.simplify()
```

$$(9C_3 \sin(2x) - 8C_3 \cos(2x) + 8C_4 \sin(2x) + 9C_4 \cos(2x) - \sin(2x))\, e^{-x}$$

Данное выражение должно быть тождественно равно 0. Это означает, что после приведения подобных, должны обращаться в 0 коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$. Следовательно, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 9C_3 + 8C_4 - 1 = 0, \\ -8C_3 + 9C_4 = 0. \end{cases}$$

Решение системы:



```
solve([9*C3+8*C4-1,-8*C3+9*C4], (C3,C4))
```

```
{C3: 9/145, C4: 8/145}
```

Для получения окончательного решения складываем выражения для y_0 и $y_{\text{ч}}$.

Ответ: $y = e^x(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) + e^{-x}\left(\frac{9}{145} \sin 2x + \frac{8}{145} \cos 2x\right)$.

Второй метод решения неоднородного уравнения – метод вариации произвольных постоянных.

Пусть требуется решить уравнение

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

1. Решаем однородное уравнение. Для уравнения n–го порядка общее решение будет иметь такой вид:

$$y_0 = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$$

($y_1, \dots, y_n$ – n линейно независимых решений).

2. Заменяем произвольные постоянные на неизвестные функции $C_i(x)$. Частное решение тогда принимает вид:

$$y_ч = C_1(x) y_1 + \dots + C_n(x) y_n.$$

3. Функции $C_i(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

4. Решение неоднородного уравнения получаем в виде

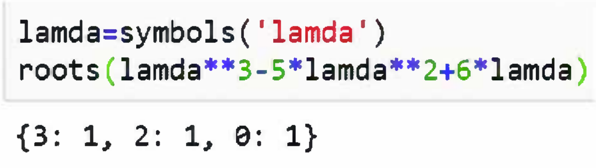
$$y = y_0 + y_ч.$$

Пример 31. Решить уравнение

$$y''' - 5y'' + 6y' = 2^x.$$

Решение.

1. Решаем характеристическое уравнение $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$.



```
lamda=symbols('lamda')
roots(lamda**3-5*lamda**2+6*lamda)
```

```
{3: 1, 2: 1, 0: 1}
```

Действительные корни 0, 2, 3 кратности 1. Линейно независимые решения: $y_1 = 1, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}$. Общее решение однородного уравнения:

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

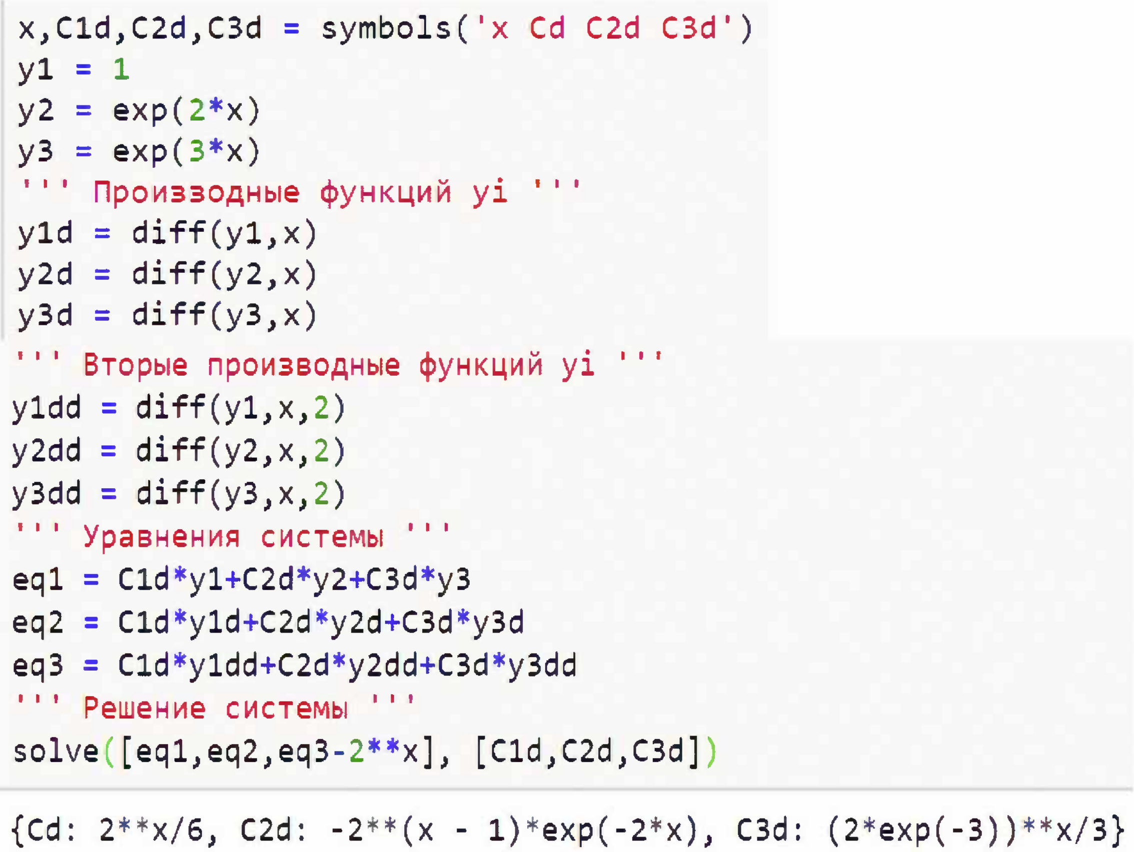
2. Варьируем произвольные постоянные и частное решение записываем в виде

$$y_ч = C_1(x) + C_2(x) e^{2x} + C_3(x) e^{3x}.$$

Для определения функций $C_i(x)$ составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_3'(x)y_3 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_3'(x)y_3' = 0, \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + C_3'(x)y_3'' = 2^x. \end{cases}$$

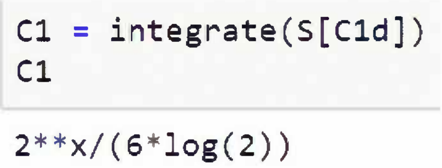
Подставляем вместо y_i их выражения и решаем систему.



```
x,C1d,C2d,C3d = symbols('x Cd C2d C3d')
y1 = 1
y2 = exp(2*x)
y3 = exp(3*x)
''' Производные функций yi '''
y1d = diff(y1,x)
y2d = diff(y2,x)
y3d = diff(y3,x)
''' Вторые производные функций yi '''
y1dd = diff(y1,x,2)
y2dd = diff(y2,x,2)
y3dd = diff(y3,x,2)
''' Уравнения системы '''
eq1 = C1d*y1+C2d*y2+C3d*y3
eq2 = C1d*y1d+C2d*y2d+C3d*y3d
eq3 = C1d*y1dd+C2d*y2dd+C3d*y3dd
''' Решение системы '''
solve([eq1,eq2,eq3-2**x], [C1d,C2d,C3d])
```

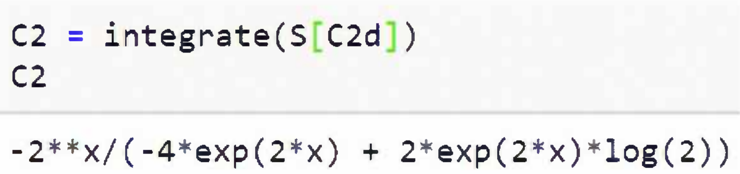
```
{Cd: 2**x/6, C2d: -2**(x - 1)*exp(-2*x), C3d: (2*exp(-3))**x/3}
```

Нашли производные $C_i'(x)$ функций $C_i(x)$. Сами функции находим путем интегрирования. К результатам добавлять новые произвольные постоянные нет необходимости, так как требуется найти какое-нибудь одно частное решение уравнения.



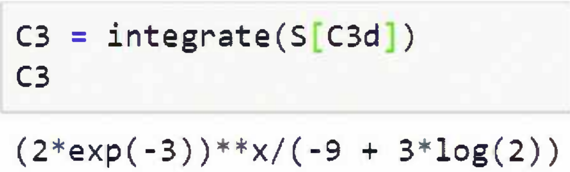
```
C1 = integrate(S[C1d])
C1
```

```
2**x/(6*log(2))
```



```
C2 = integrate(S[C2d])
C2
```

```
-2**x/(-4*exp(2*x) + 2*exp(2*x)*log(2))
```



```
C3 = integrate(S[C3d])
C3
```

```
(2*exp(-3))**x/(-9 + 3*log(2))
```

Итак, имеем:

$$C_1(x) = \frac{2^x}{6\ln 2},\ C_2(x) = \frac{2^x}{(4-2\ln 2)e^{2x}},\ C_3(x) = \frac{2^x}{(3\ln 2-9)e^{3x}}.$$

Теперь можно записать частное решение неоднородного уравнения:

$$y_ч = C_1(x) + C_2(x)e^{2x} + C_3(x)e^{3x} = \frac{2^x}{6\ln 2} +$$

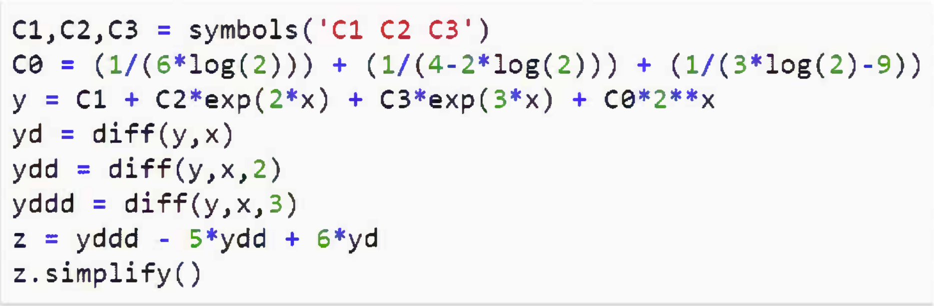
$$+\left(\frac{2^x}{(4-2\ln 2)e^{2x}}\right)e^{2x} + \left(\frac{2^x}{(3\ln 2 - 9)e^{3x}}\right)e^{3x} =$$

$$= \frac{2^x}{6\ln 2} + \frac{2^x}{4-2\ln 2} + \frac{2^x}{3\ln 2 - 9}.$$

Тогда, общее решение неоднородного уравнения:

$$y = y_0 + y_ч = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{3x} + \left(\frac{1}{6\ln 2} + \frac{1}{4-2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 2 - 9}\right)2^x.$$

Сделаем проверку. Для этого найдем производные полученного решения и подставим в левую часть исходного дифференциального уравнения (которая, по условию должна равняться 2^x).



```
C1,C2,C3 = symbols('C1 C2 C3')
C0 = (1/(6*log(2))) + (1/(4-2*log(2))) + (1/(3*log(2)-9))
y = C1 + C2*exp(2*x) + C3*exp(3*x) + C0*2**x
yd = diff(y,x)
ydd = diff(y,x,2)
yddd = diff(y,x,3)
z = yddd - 5*ydd + 6*yd
z.simplify()
```

2^x

Как и требовалось, получили величину 2^x.

Ответ: $y = C_7 + C_8e^{2x} + C_9e^{3x} + \left(\frac{1}{6\ln 2} + \frac{1}{4-2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 2-9}\right)2^x$.

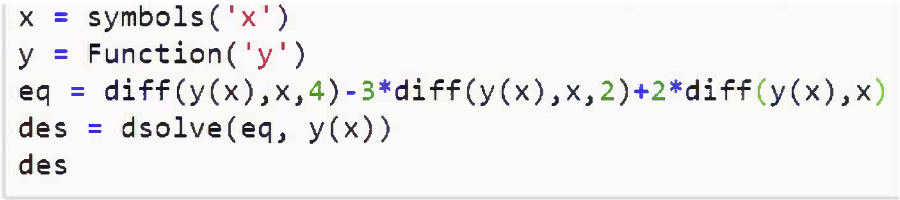
В разделе «Функции в Python», с. 27 приведен текст функции Lin_inhomogen(). Функция, используя фундаментальную систему решений $y_i(x)$ однородного уравнения (содержащую произвольные постоянные C_i) и правую часть неоднородного уравнения, находит выражения для производных C_i'.

Пример 32. Решить уравнение

$$y^{(4)} - 3y'' + 2y' = 36x^2 - 36x.$$

Решение.

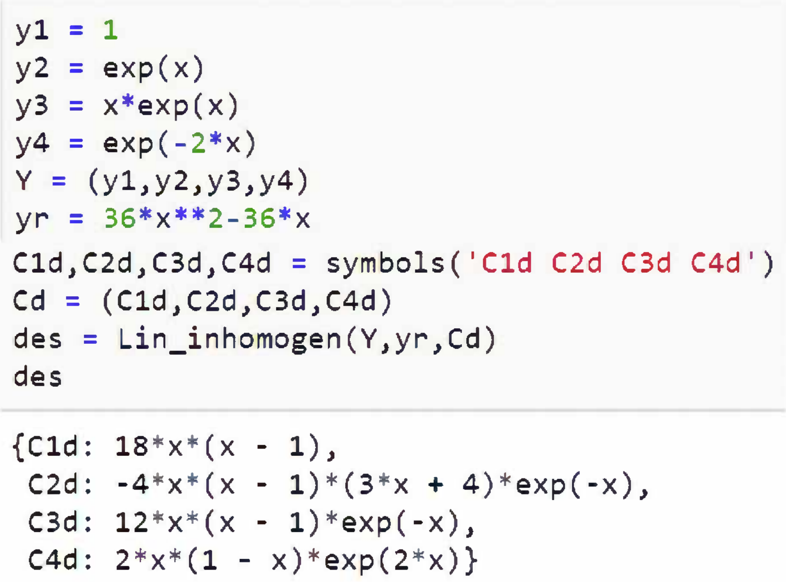
1. Решаем однородное уравнение.



```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = diff(y(x),x,4)-3*diff(y(x),x,2)+2*diff(y(x),x)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

$$y(x) = C_1 + C_4e^{-2x} + (C_2 + C_3x)\,e^x$$

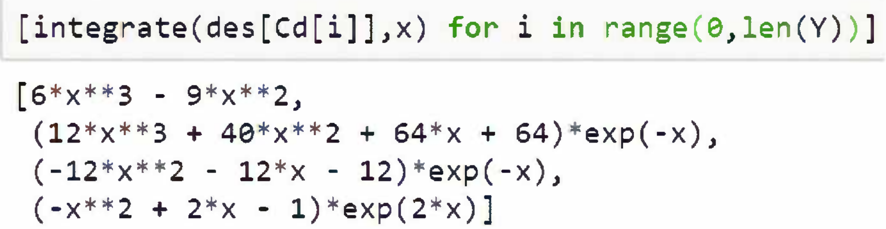
2. Методом вариации произвольных иостоянных, используя функцию Lin_inhomogen(), находим производиые функций $C_i(x)$. Входными даниыми для функции является массив *Y* функций фундаментальной системы решений, правая часть *yr* неоднородного решения и массив *Cd* символов, обозначающих неизвестные C_i'.



```
y1 = 1
y2 = exp(x)
y3 = x*exp(x)
y4 = exp(-2*x)
Y = (y1,y2,y3,y4)
yr = 36*x**2-36*x
C1d,C2d,C3d,C4d = symbols('C1d C2d C3d C4d')
Cd = (C1d,C2d,C3d,C4d)
des = Lin_inhomogen(Y,yr,Cd)
des
```

```
{C1d: 18*x*(x - 1),
 C2d: -4*x*(x - 1)*(3*x + 4)*exp(-x),
 C3d: 12*x*(x - 1)*exp(-x),
 C4d: 2*x*(1 - x)*exp(2*x)}
```

Интегрируя полученные функцни, находим $C_i(x)$.



```
[integrate(des[Cd[i]],x) for i in range(0,len(Y))]
```

```
[6*x**3 - 9*x**2,
 (12*x**3 + 40*x**2 + 64*x + 64)*exp(-x),
 (-12*x**2 - 12*x - 12)*exp(-x),
 (-x**2 + 2*x - 1)*exp(2*x)]
```

Результат:

$$C_1(x) = 6x^3 - 9x^2; \quad C_2(x) = (12x^3 + 40x^2 + 64x + 64)e^{-x};$$

$$C_3(x) = (-12x^2 - 12x - 12)e^{-x}; \quad C_4(x) = (-x^2 + 2x - 1)e^{2x}.$$

Частное решение неоднородного уравнеиня:

$$y_ч = C_1(x) + C_2(x)e^x + C_3(x)xe^x + C_4(x)e^{-2x} =$$

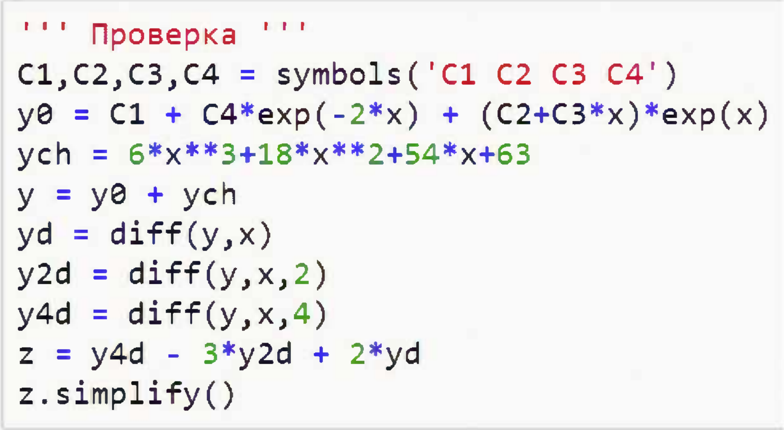
$$= (6x^3 - 9x^2) + (12x^3 + 40x^2 + 64x + 64)e^{-x}e^x +$$

$$+(-12x^2 - 12x - 12)e^{-x}xe^x + (-x^2 + 2x - 1)e^{2x}e^{-2x} =$$

$$= 6x^3 + 18x^2 + 54x + 63.$$

3. Ответ задачи формируем путем сложения общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

Проверка. Подставим полученное решение в левую часть исходного уравнения.



```
''' Проверка '''
C1,C2,C3,C4 = symbols('C1 C2 C3 C4')
y0 = C1 + C4*exp(-2*x) + (C2+C3*x)*exp(x)
ych = 6*x**3+18*x**2+54*x+63
y = y0 + ych
yd = diff(y,x)
y2d = diff(y,x,2)
y4d = diff(y,x,4)
z = y4d - 3*y2d + 2*yd
z.simplify()
```

$$36x\,(x-1)$$

Результат совпал с правой частью уравнения.

Ответ: $y = C_1+(C_2+C_3x)e^x + C_4e^{-2x} + x^3 + 18x^2 + 54x + 63.$

Задача Коши

Задачей Коши для дифференциального уравнения *n*–го порядка называется задача нахождения решения этого уравнения $y = y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям:

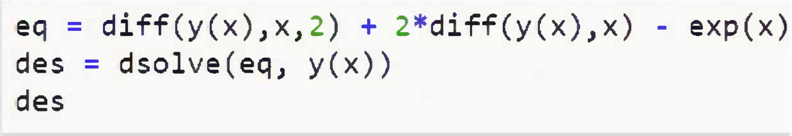
$$y(x_0) = y_{10},\quad y'(x_0) = y_{20},\quad y''(x_0) = y_{30},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}.$$

Пример 33. Решить дифференциальное уравнение с заданными начальными условиями

$$y'' + 2y' = e^x,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1.$$

Решение.

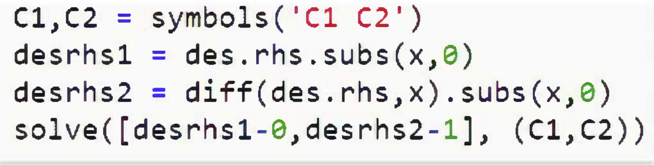
1. Находим общее решение.



```
eq = diff(y(x),x,2) + 2*diff(y(x),x) - exp(x)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

$$y(x) = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{e^x}{3}$$

2. Находим производную полученного решения; подставляем начальное значение независимой переменной $x = 0$ в выражение для $y(x)$ и $y'(x)$; приравниваем эти выражения к заданным начальным значениям зависимой переменной и решаем полученную систему.



```
C1,C2 = symbols('C1 C2')
desrhs1 = des.rhs.subs(x,0)
desrhs2 = diff(des.rhs,x).subs(x,0)
solve([desrhs1-0,desrhs2-1], (C1,C2))
```

```
{C1: 0, C2: -1/3}
```

3. Искомое частное решение получаем подстановкой найденных значений постоянных в общее решение.

Ответ: $y = \frac{1}{3}e^{x} - \frac{1}{3}e^{-2x}$.

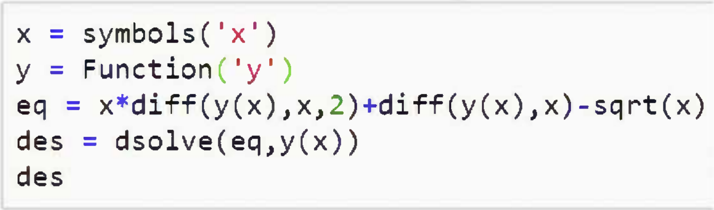
В разделе «Функции в Python», с. 26 приведен текст функции Cauchy_k(), которая по заданным начальным условиям и найденному решению дифференциального уравнения k–го порядка находит значения констант $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

Перед вызовом функции должен быть сформирован список Ci, содержащий символы всех констант, входящих в запись решения дифференциального уравнения.

Пример 34. Решить задачу Коши

$$xy'' + y' = \sqrt{x}, \quad y(1) = 0, \;\; y'(1) = 1.$$

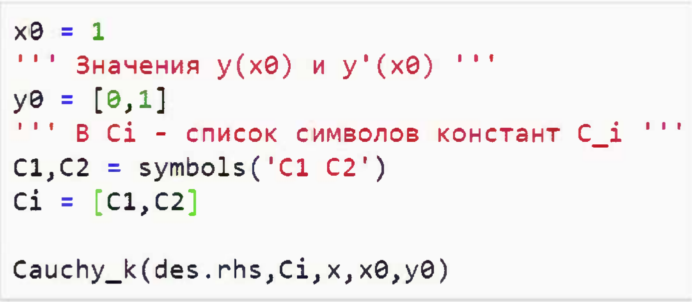
Решение. Находим общее решение.



```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = x*diff(y(x),x,2)+diff(y(x),x)-sqrt(x)
des = dsolve(eq,y(x))
des
```

$$y(x) = C_1 + C_2\log(x) + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9}$$

Находим значения постоянных. Для этого формируем список символов постоянных C_1 и C_2 и вызываем функцию Cauchy_k(). Функцию, реализующую решение уравнения, получаем из объекта des с помощью метода .rhs.



```
x0 = 1
''' Значения y(x0) и y'(x0) '''
y0 = [0,1]
''' В Ci - список символов констант C_i '''
C1,C2 = symbols('C1 C2')
Ci = [C1,C2]

Cauchy_k(des.rhs,Ci,x,x0,y0)
```

```
{C1: -4/9, C2: 1/3}
```

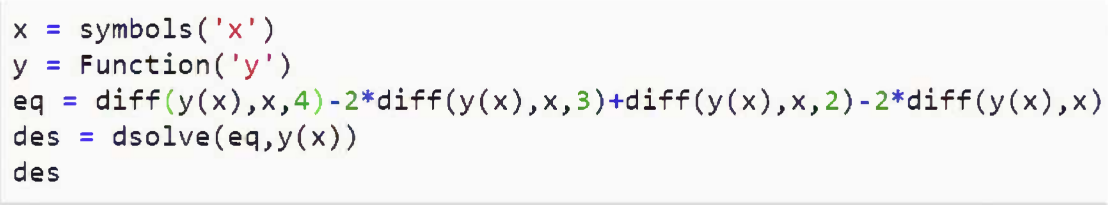
Ответ: $y = \frac{1}{3}\ln x + \frac{4}{9}x\sqrt{x} - \frac{4}{9}$.

Пример 35. Решить задачу Коши

$$y^{(4)} - 2y''' + y'' - 2y' = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 7, \quad y'''(0) = 8.$$

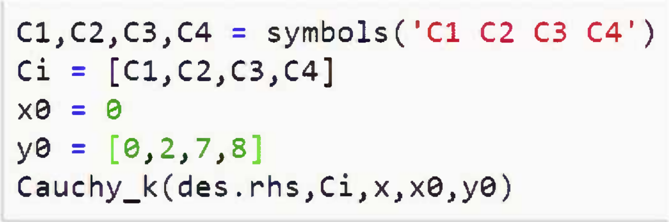
Решение. Находим общее решение.



```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = diff(y(x),x,4)-2*diff(y(x),x,3)+diff(y(x),x,2)-2*diff(y(x),x)
des = dsolve(eq,y(x))
des
```

$$y(x) = C_1 + C_2e^{2x} + C_3\sin(x) + C_4\cos(x)$$

Находим значения констант.



```
C1,C2,C3,C4 = symbols('C1 C2 C3 C4')
Ci = [C1,C2,C3,C4]
x0 = 0
y0 = [0,2,7,8]
Cauchy_k(des.rhs,Ci,x,x0,y0)
```

```
{C1: 2, C2: 1, C3: 0, C4: -3}
```

Ответ: $y = e^{2x} - 3\cos x + 2$.

Системы дифференциальных уравнений

Для систем дифференциальных уравнений произвольного вида можно использовать *метод исключений* и метод *итерируемых комбинаций*.

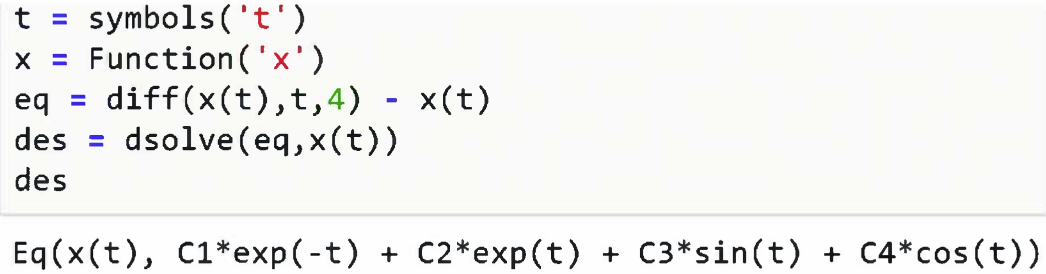
Пример 36. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x. \end{cases}$$

Решение. Метод исключений состоит в сведении системы к дифференциальному уравнению от одной переменной. Выражение для функции y из первого уравнения подставим во второе уравнение. В результате получим уравнение для функции x:

$$y = x''; \quad y'' = x,$$

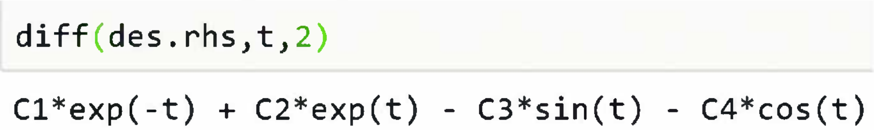
следовательно, $(x'')'' = x$; $x^{(4)} = x$. Решаем полученное дифференциальное уравнение:



```
t = symbols('t')
x = Function('x')
eq = diff(x(t),t,4) - x(t)
des = dsolve(eq,x(t))
des
```

```
Eq(x(t), C1*exp(-t) + C2*exp(t) + C3*sin(t) + C4*cos(t))
```

Получили выражение для функции $x(t)$. Теперь решение для $y(t)$ находим в виде второй производной от x.



```
diff(des.rhs,t,2)
```

```
C1*exp(-t) + C2*exp(t) - C3*sin(t) - C4*cos(t)
```

Ответ: $x = C_1e^{-t} + C_2e^{t} + C_3\mathrm{sint} + C_4\mathrm{cost}$,
$y = C_1e^{-t} + C_2e^{t} - C_3\mathrm{sint} - C_4\mathrm{cost}$.

Пример 37. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Решение. Метод итерируемых комбинаций состоит в подборе комбинаций переменных, для которых удается получить отдельное дифференциальное уравнение.

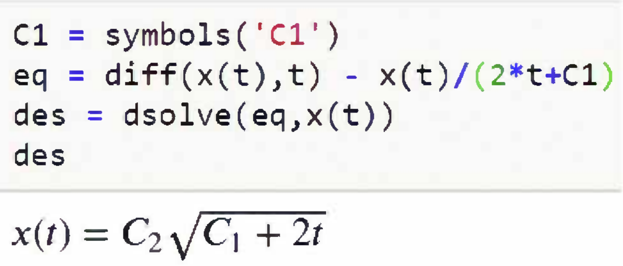
Найдем выражение для производной от произведения функций:

$$(xy)' = x'y + xy' = \frac{1}{y}\cdot y + x\cdot\frac{1}{x} = 2.$$

Тогда $xy = 2t + C_1$ и $y = \frac{2t+C_1}{x}$. Подставим полученное выражение в первое уравнение системы. Получим уравнение:

$$x' = \frac{x}{2t+C_1}.$$

Решаем его:



```
C1 = symbols('C1')
eq = diff(x(t),t) - x(t)/(2*t+C1)
des = dsolve(eq,x(t))
des
```

$$x(t) = C_2\sqrt{C_1 + 2t}$$

И находим выражение для $y(t)$:

$$y = \frac{2t + C_1}{x} = \frac{2t + C_1}{C_2\sqrt{2t + C_1}} = \frac{\sqrt{2t + C_1}}{C_2}.$$

Ответ: $x = C_2\sqrt{2t + C_1}$, $y = \frac{\sqrt{2t+C_1}}{C_2}$.

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \cdots + a_{1n}y_n(x) + f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \cdots + a_{2n}y_n(x) + f_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \cdots + a_{nn}y_n(x) + f_n(x). \end{cases}$$

Методы решения.

1. Метод исключения. Данный метод можно нспользовать прн решении систем любого вида.

Пример 38. Решить систему уравнеиий

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1(x) - y_2(x) - y_3(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1(x) + y_2(x), \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 3y_1(x) + y_3(x). \end{cases}$$

Решение. Выразим из первого уравнения функцию $y_2(x)$, найдем ее производную:

$$y_2 = -y_1' + y_1 - y_3; \quad y_2' = -y_1'' + y_1' - y_3'.$$

Получепные выраженпя подставпм во второе уравнение. В результате получим систему с двумя функциями.

$$\begin{cases} -y_1'' + y_1' - y_3' = y_1 + (-y_1' + y_1 - y_3), \\ y_3' = 3y_1 + y_3 \end{cases}$$

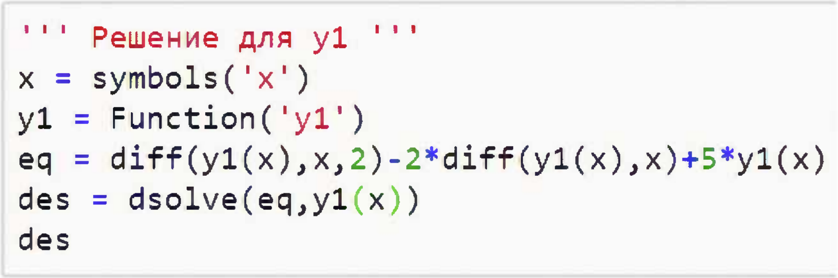
или

$$\begin{cases} -y_1'' + 2y_1' - y_3' = 2y_1 - y_3, \\ y_3' = 3y_1 + y_3 \end{cases}$$

Здесь получилось удачное расположение неременных. Сложив почленно левые и правые части выражений, получим уравнение с одной функцией $x_1(t)$:

$$-y_1'' + 2y_1' = 5y_1.$$

Его решение:



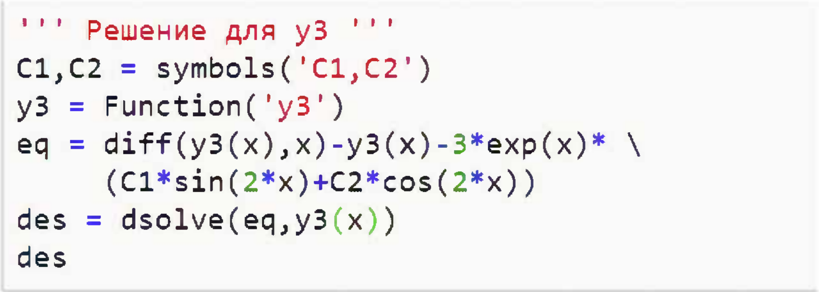
```
''' Решение для y1 '''
x = symbols('x')
y1 = Function('y1')
eq = diff(y1(x),x,2)-2*diff(y1(x),x)+5*y1(x)
des = dsolve(eq,y1(x))
des
```

$$y_1(x) = (C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x))\, e^x$$

Получили: $y_1 = e^x(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$.

Теперь из уравнения $y_3' = 3y_1 + y_3$, после подстановки выражения для y_1, находим y_3.

$$y_3' = 3e^x(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) + y_3.$$



```
''' Решение для y3 '''
C1,C2 = symbols('C1,C2')
y3 = Function('y3')
eq = diff(y3(x),x)-y3(x)-3*exp(x)* \
     (C1*sin(2*x)+C2*cos(2*x))
des = dsolve(eq,y3(x))
des
```

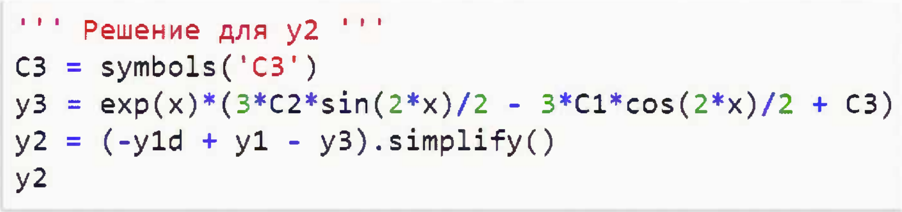
$$y_3(x) = \left(-\frac{3C_1 \cos(2x)}{2} + \frac{3C_2 \sin(2x)}{2} + C_3\right) e^x$$

Результат: $y_3 = e^x\left(\frac{3}{2}C_2 \sin 2x - \frac{3}{2}C_1 \cos 2x + C_3\right)$.

Выражение для y_2 получнм из первого уравнения исходной снстемы: $y_2 = -y_1' + y_1 - y_3$, вычислив предварительно y_1' (y_1' обозначеио как $y1d$).

```
''' Выражение для y1 '''
y1 = exp(x)*(C1*sin(2*x) + C2*cos(2*x))
""" Производная y1' """
y1d = diff(y1,x)
y1d
```

$$(C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x))\, e^x + (2C_1 \cos(2x) - 2C_2 \sin(2x))\, e^x$$



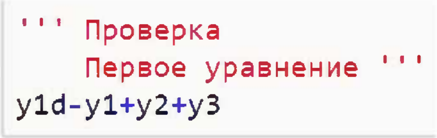
```
''' Решение для y2 '''
C3 = symbols('C3')
y3 = exp(x)*(3*C2*sin(2*x)/2 - 3*C1*cos(2*x)/2 + C3)
y2 = (-y1d + y1 - y3).simplify()
y2
```

$$\frac{(-C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) - 2C_3)\, e^x}{2}$$

Получили следующее решение системы:

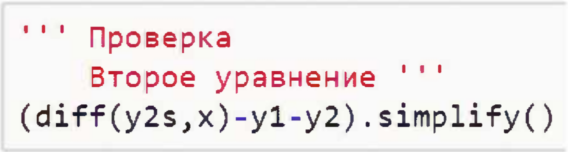
$$\begin{cases} y_1 = e^x(C_1\sin 2x + C_2\cos 2x), \\ y_2 = \frac{1}{2}e^x(C_2\sin 2x - C_1\cos 2x - 2C_3), \\ y_3 = \frac{3}{2}e^x(C_1\sin 2x - C_2\cos 2x + C_3). \end{cases}$$

Выполним проверку полученного решения, подставив полученные функции в исходную систему.



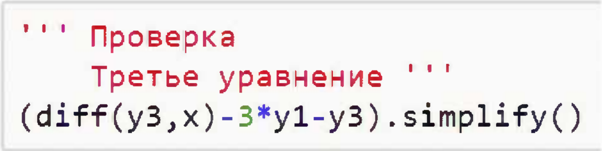
```
''' Проверка
    Первое уравнение '''
y1d-y1+y2+y3
```

0



```
''' Проверка
    Второе уравнение '''
(diff(y2s,x)-y1-y2).simplify()
```

0



```
''' Проверка
    Третье уравнение '''
(diff(y3,x)-3*y1-y3).simplify()
```

0

2 метод. Общее решение однородной системы строится из функций фундаментальной системы решений с использованием собственных векторов матрицы системы (метод Эйлера). Решение неоднородного уравнения находится методом вариации произвольных постоянных.

Метод Эйлера.

Запишем однородную систему уравнений в матричном виде:

$$Y' = AY.$$

Здесь: $Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \dots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Справедлива *теорема*: для любой системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами существует набор линейно независимых частных решений (фундаментальная система решений); и общее решение такой системы записывается в виде линейной комбинации функций фундаментальной системы. Функции фундаментальной системы имеют вид $s_i e^{\lambda_i x}$, где λ_i –

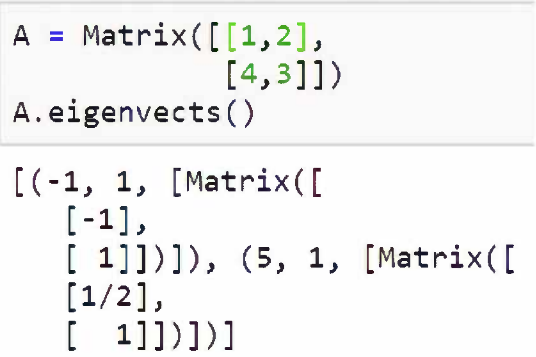
собственные значения матрицы A, s_i – собственные векторы. Конкретный вид решения зависит от характера собственных значений матрицы (их кратности и наличия комплексных значений).

Пример 39. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Решение. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы.



```
A = Matrix([[1,2],
            [4,3]])
A.eigenvects()
```

```
[(-1, 1, [Matrix([
   [-1],
   [ 1]])]), (5, 1, [Matrix([
   [1/2],
   [  1]])])]
```

Два различных действительных собственных значений кратности 1: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$. Соответствующие собственные векторы: $s_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Фундаментальную систему решений образуют функции:

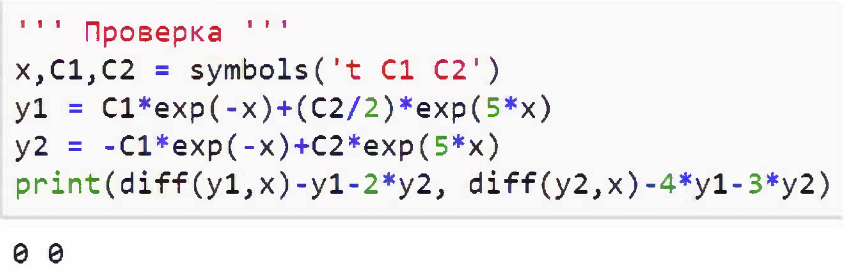
$$Y_1 = e^{\lambda_1 x} s_1 = e^{-x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix}, \quad Y_2 = e^{\lambda_2 x} s_2 = e^{5x}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной системы имеет вид:

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = C_1\begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-x} + \frac{1}{2} C_2 e^{5x}, \\ y_2 = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}, \end{cases} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$



```
''' Проверка '''
x,C1,C2 = symbols('t C1 C2')
y1 = C1*exp(-x)+(C2/2)*exp(5*x)
y2 = -C1*exp(-x)+C2*exp(5*x)
print(diff(y1,x)-y1-2*y2, diff(y2,x)-4*y1-3*y2)
```

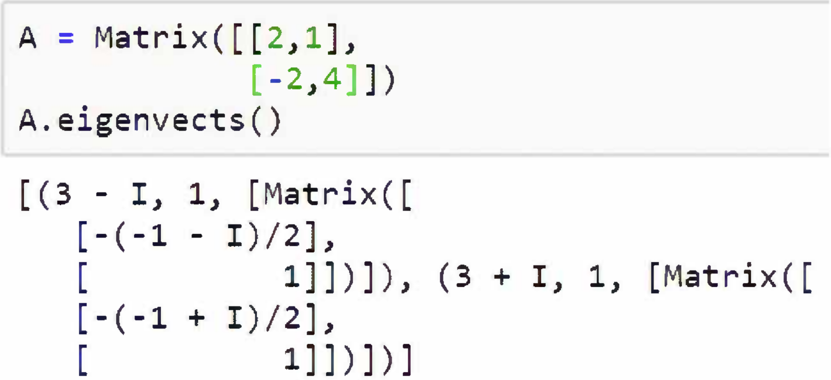
```
0 0
```

Пример 40. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = -2y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

Решение. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы.



```
A = Matrix([[2,1],
            [-2,4]])
A.eigenvects()
```

```
[(3 - I, 1, [Matrix([
   [-(-1 - I)/2],
   [          1]])]), (3 + I, 1, [Matrix([
   [-(-1 + I)/2],
   [          1]])])]
```

Два комплексно сопряженных собственных значений: $\lambda_1 = 3 - i$, $\lambda_2 = 3 + i$. Соответствующие собственные векторы:

$$s_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для построения фундаментальной системы решений достаточно одного из двух комплексно сопряженных собственных векторов, например, s_1. Так как все векторы, коллинеарные s_1, также являются собственными с тем же собственным значением, будем в дальнейшем использовать вектор $s = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$.

Фундаментальная система решений строится на основе функции $Y = se^{\lambda_1 x}$. Выделяем в функции Y действительную и мнимую части, используя формулу $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

$$y = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} e^{(3-i)x} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} e^{3x}(\cos x - i\sin x) =$$

$$\begin{pmatrix} (1+i)e^{3x}(\cos x - i\sin x) \\ 2e^{3x}(\cos x - i\sin x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3x}(\cos x + \sin x) + ie^{3x}(\cos x - \sin x) \\ 2e^{3x}\cos x - 2ie^{3x}\sin x) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{3x}(\cos x + \sin x)) \\ 2e^{3x}\cos x) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^{3x}(\cos x - \sin x) \\ -2e^{3x}\sin x) \end{pmatrix}.$$

Действительная и мнимая части полученного вектора и образуют фундаментальную систему решений.

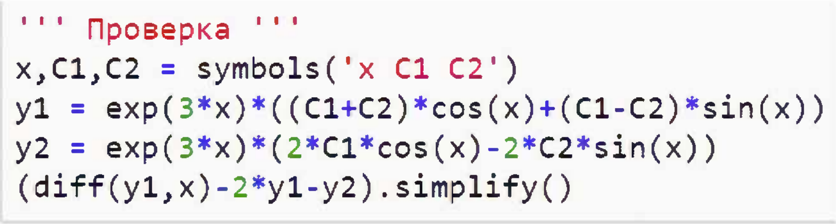
$$Y_1 = \begin{pmatrix} e^{3x}(\cos x + \sin x)) \\ 2e^{3x}\cos x) \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} e^{3x}(\cos x - \sin x) \\ -2e^{3x}\sin x) \end{pmatrix}.$$

Общее решенне системы имеет вид: $C_1Y_1 + C_2Y_2$, то есть

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^{3x}(\cos x + \sin x) + C_2e^{3x}(\cos x - \sin x), \\ y_2 = 2C_1e^{3x}\cos x - 2C_2e^{3x}\sin x \end{cases}$$

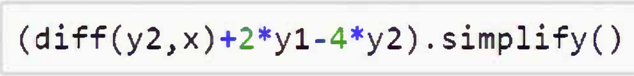
или

$$\begin{cases} y_1 = e^{3x}((C_1 + C_2)\cos x + (C_1 - C_2)\sin x), \\ y_2 = e^{3x}(2C_1\cos x - 2C_2\sin x). \end{cases}$$



```
''' Проверка '''
x,C1,C2 = symbols('x C1 C2')
y1 = exp(3*x)*((C1+C2)*cos(x)+(C1-C2)*sin(x))
y2 = exp(3*x)*(2*C1*cos(x)-2*C2*sin(x))
(diff(y1,x)-2*y1-y2).simplify()
```

0



```
(diff(y2,x)+2*y1-4*y2).simplify()
```

0

Ответ: $\begin{cases} y_1 = e^{3x}((C_1 + C_2)\cos x + (C_1 - C_2)\sin x), \\ y_2 = e^{3x}(2C_1\cos x - 2C_2\sin x). \end{cases}$

Решение системы неоднородных уравнений. Метод вариации произвольных постоянных

Как н в случае одного уравнения, общее решение снстемы иеоднородных уравнений имеет вид $Y(x) = Y_0(x) + Y_ч(x)$, где $Y_0(x)$ – общее решение однородной системы, $Y_ч(x)$ – частное решение неоднородной системы.

Пусть дана система неоднородных уравнений: $\frac{dY}{dx} = A \cdot Y + f$ и пусть найдено общее решение однородной системы $Y_0(t) = \sum_{i=1}^{n} C_iY_i(t)$, где $Y_i(t)$ – фундаментальная снстема решений, C_i – произвольные постоянные.

В общем решении однородной системы рассматриваем постоянные C_i, как функции от независимой переменной x. Частное решение иеоднородной системы ищем в виде $Y_ч(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)Y_i(x)$, где функции $C_i(t)$ удовлетворяют системе уравнений: $\sum_{i=1}^{n} C_i'Y_i(t) = f$.

Пример 41. Решить неоднородную систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2(x) + x, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1(x) + 3. \end{cases}$$

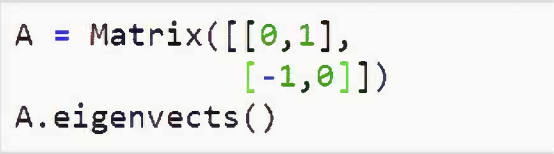
Решение.

1. Решаем однородную систему

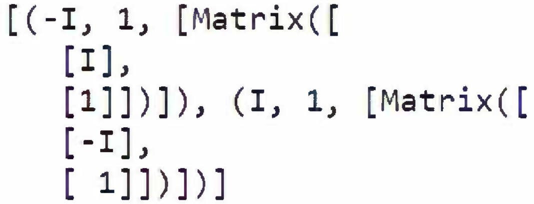
$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1. \end{cases}$$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы.



```
A = Matrix([[0,1],
            [-1,0]])
A.eigenvects()
```



```
[(-I, 1, [Matrix([
   [I],
   [1]])]), (I, 1, [Matrix([
   [-I],
   [ 1]])])]
```

Два комплексно сопряженных собственных значений: $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$. Соответствующие собственные векторы: $s_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$. Построим фундаментальную систему решений на основе вектора s_2.

$$Y = s_2 e^{\lambda_2 x} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos x + i \sin x) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin x - i\cos x \\ \cos x + i \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Фундаментальную систему решений образуют функции

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix},$$

Общее решение однородной системы:

$$C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = C_1 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

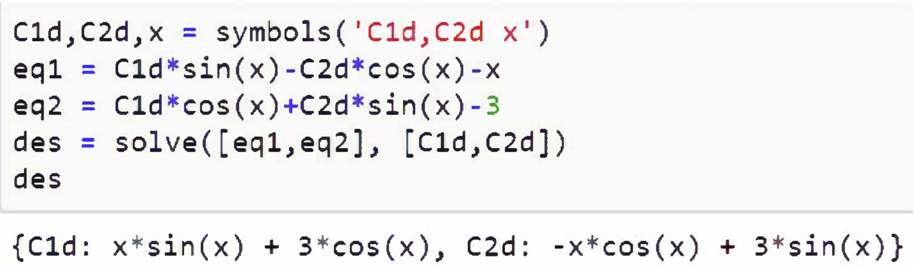
или

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \sin x - C_2 \cos x, \\ y_2 = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \end{cases}$$

2. Неоднородную систему решаем методом вариации произвольных постоянных. Рассматриваем постоянные C_i как функции от переменной x. Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x - C_2'(x)\cos x = x, \\ C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 3. \end{cases}$$

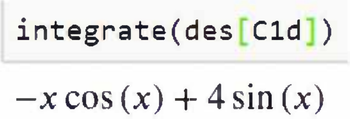
Для производных C_i' получаем решения:



```
C1d,C2d,x = symbols('C1d,C2d x')
eq1 = C1d*sin(x)-C2d*cos(x)-x
eq2 = C1d*cos(x)+C2d*sin(x)-3
des = solve([eq1,eq2], [C1d,C2d])
des
```

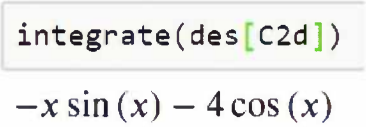
```
{C1d: x*sin(x) + 3*cos(x), C2d: -x*cos(x) + 3*sin(x)}
```

Интегрируя, находим функции $C_i(x)$:



```
integrate(des[C1d])
```

$$-x\cos(x) + 4\sin(x)$$



```
integrate(des[C2d])
```

$$-x\sin(x) - 4\cos(x)$$

Тогда, частное решение неоднородного уравнения

$$\begin{cases} y_1 = C_1(x)\sin x - C_2(x)\cos x, \\ y_2 = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x. \end{cases}$$

принимает вид:

$$\begin{cases} y_1 = (-x\cos x + 4\sin x)\sin x - (-x\sin x - 4\cos x)\cos x, \\ y_2 = (-x\cos x + 4\sin x)\cos x + (-x\sin x - 4\cos x)\sin x \end{cases}$$

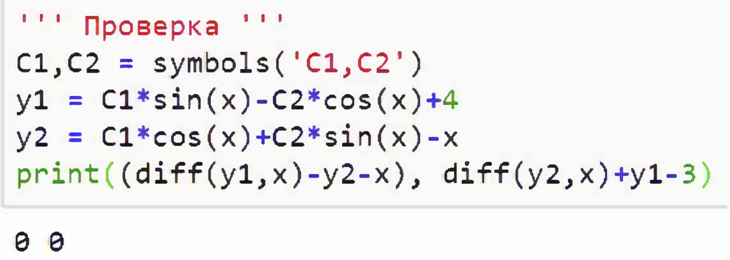
или

$$\begin{cases} y_1 = 4, \\ y_2 = -x. \end{cases}$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$\begin{cases} y_1 = C_1\sin x - C_2\cos x + 4, \\ y_2 = C_1\cos x + C_2\sin x - x. \end{cases}$$

Проверим полученное решение.



```
''' Проверка '''
C1,C2 = symbols('C1,C2')
y1 = C1*sin(x)-C2*cos(x)+4
y2 = C1*cos(x)+C2*sin(x)-x
print((diff(y1,x)-y2-x), diff(y2,x)+y1-3)
```

```
0 0
```

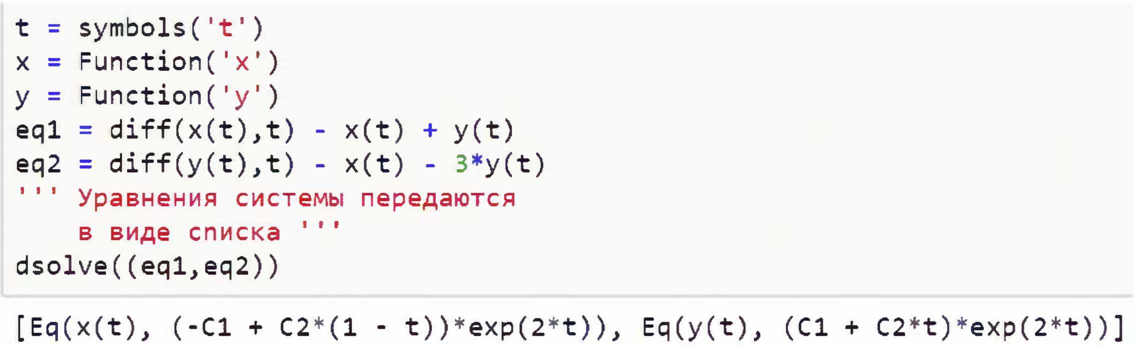
Функция dsolve ()

Функция dsolve () библиотеки sympy позволяет решать однородные линейные системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

Пример 42. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(t) - y(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(t) + 3y(t). \end{cases}$$

Решение.



```
t = symbols('t')
x = Function('x')
y = Function('y')
eq1 = diff(x(t),t) - x(t) + y(t)
eq2 = diff(y(t),t) - x(t) - 3*y(t)
''' Уравнения системы передаются
    в виде списка '''
dsolve((eq1,eq2))
```

```
[Eq(x(t), (-C1 + C2*(1 - t))*exp(2*t)), Eq(y(t), (C1 + C2*t)*exp(2*t))]
```

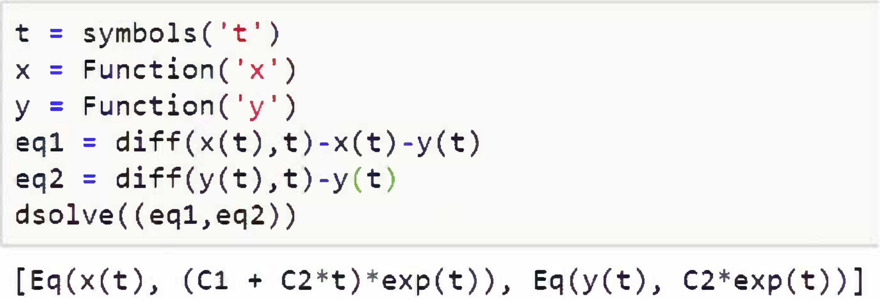
Ответ: $\begin{cases} x = e^{2t}(C_2 - C_1 - C_2t), \\ y = e^{2t}(C_1 + C_2t). \end{cases}$

Пример 43. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(t) + y(t) + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = y(t) - e^{2t}. \end{cases}$$

Решение.

1. Решаем однородную систему уравнений, используя функцию dsolve().



```
t = symbols('t')
x = Function('x')
y = Function('y')
eq1 = diff(x(t),t)-x(t)-y(t)
eq2 = diff(y(t),t)-y(t)
dsolve((eq1,eq2))
```

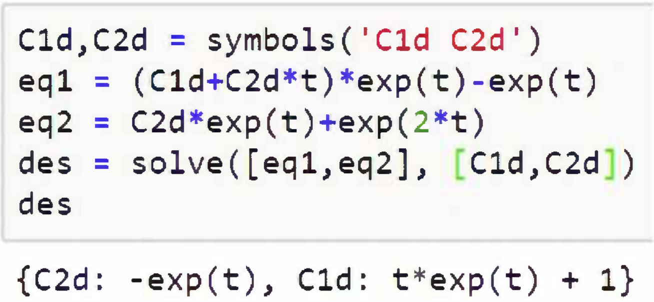
```
[Eq(x(t), (C1 + C2*t)*exp(t)), Eq(y(t), C2*exp(t))]
```

Общее решение однородного уравнения:

$$\begin{cases} x = e^t(C_1 + C_2t), \\ y = C_2e^t. \end{cases}$$

2. Находим частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных. Функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ находим из системы уравнений

$$\begin{cases} e^t\left(C_1'(t)+C_2'(t)\right)=e^t,\\ C_1'(t)e^t=-e^{2t}. \end{cases}$$

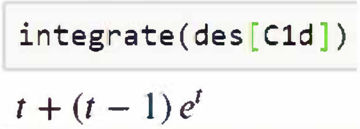


```
C1d,C2d = symbols('C1d C2d')
eq1 = (C1d+C2d*t)*exp(t)-exp(t)
eq2 = C2d*exp(t)+exp(2*t)
des = solve([eq1,eq2], [C1d,C2d])
des
```

```
{C2d: -exp(t), C1d: t*exp(t) + 1}
```

Получили выражения: $C_1'(t)=te^t+1$, $C_2'(t)=-e^t$.

Интегрируя, находим $C_1(t)$ и $C_2(t)$:



```
integrate(des[C1d])
```

$t+(t-1)\,e^t$

```
integrate(des[C2d])
```

$-e^t$

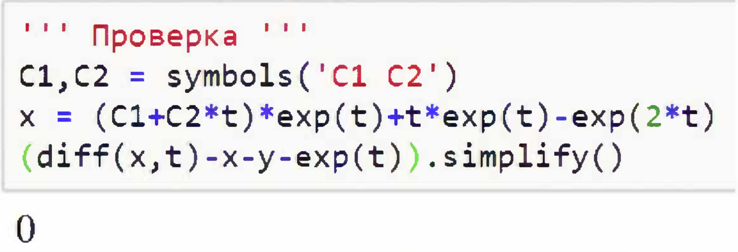
Частное решение неоднородного уравнения:

$$x=e^t(C_1(t)+C_2(t)t)=e^t(t+(t-1)e^t+(-e^t)t)=$$
$$=e^t(t-e^t)=te^t-e^{2t};$$
$$y=C_2(t)e^t=-e^t\cdot e^t=-e^{2t}.$$

Общее решение неоднородного уравнения:

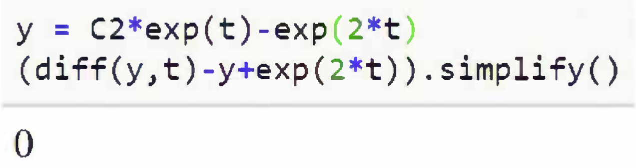
$$\begin{cases} x=e^t(C_1+C_2t)+te^t-e^{2t},\\ \qquad y=C_2e^t-e^{2t}. \end{cases}$$

Выполним проверку:



```
''' Проверка '''
C1,C2 = symbols('C1 C2')
x = (C1+C2*t)*exp(t)+t*exp(t)-exp(2*t)
(diff(x,t)-x-y-exp(t)).simplify()
```

0



```
y = C2*exp(t)-exp(2*t)
(diff(y,t)-y+exp(2*t)).simplify()
```

0

Задача Коши для системы *n* дифференциальных уравнений первого порядка

Пусть $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Задачей Коши для системы $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x)$ называется задача нахождения частного решения системы, удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0. \end{cases}$$

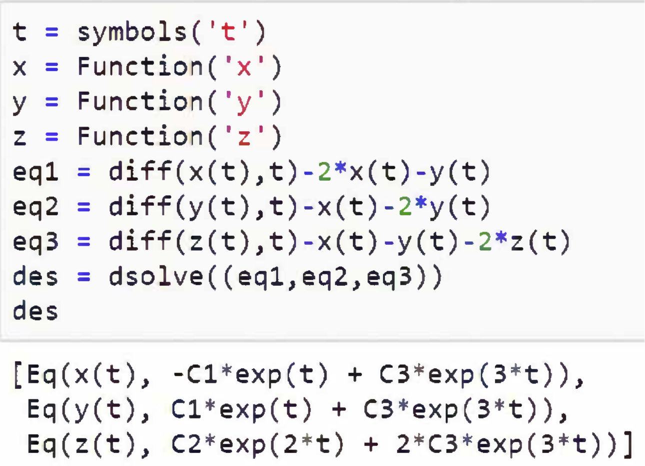
В разделе «Функции Python», с. 26 приведен текст функции Cauchy_s(). Функция для данного общего решения уравнения и начального условия находит значения постоянных C_i.

Пример 44. Решить задачу Коши для системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x(t) + y(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(t) + 2y(t), \\ \dfrac{dz}{dt} = x(t) + y(t) + 2z(t), \end{cases}$$

$$x(0) = 2, y(0) = 4, z(0) = 3.$$

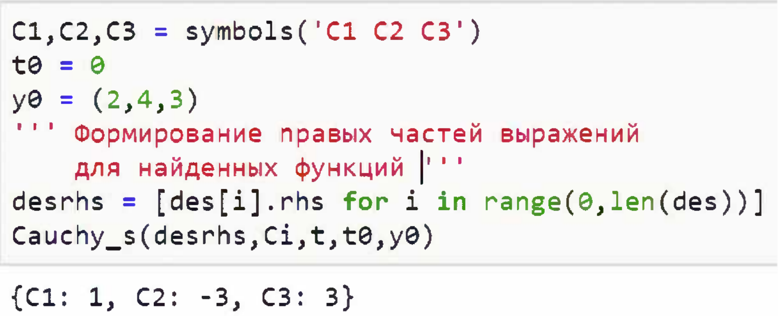
Решение. Находим общее решение:



```
t = symbols('t')
x = Function('x')
y = Function('y')
z = Function('z')
eq1 = diff(x(t),t)-2*x(t)-y(t)
eq2 = diff(y(t),t)-x(t)-2*y(t)
eq3 = diff(z(t),t)-x(t)-y(t)-2*z(t)
des = dsolve((eq1,eq2,eq3))
des
```

```
[Eq(x(t), -C1*exp(t) + C3*exp(3*t)),
 Eq(y(t), C1*exp(t) + C3*exp(3*t)),
 Eq(z(t), C2*exp(2*t) + 2*C3*exp(3*t))]
```

Находим значения констант:



```
C1,C2,C3 = symbols('C1 C2 C3')
t0 = 0
y0 = (2,4,3)
''' Формирование правых частей выражений
    для найденных функций '''
desrhs = [des[i].rhs for i in range(0,len(des))]
Cauchy_s(desrhs,Ci,t,t0,y0)
```

```
{C1: 1, C2: -3, C3: 3}
```

Ответ: $\begin{cases} x = 3e^{2t} - e^{t}, \\ y = 3e^{2t} + e^{t}, \\ z = 6e^{3t} - 3e^{2t}. \end{cases}$

Численное решение дифференциальных уравнений

Численный метод решеиия дифференциального уравнения позволяет находить значенпя пскомой функцин на некотором дпскретпом множестве значепий аргумепта и дает приблпженеиое решеиие в виде таблицы.

Численные методы решенпя уравиений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка реализовапы в функциях ode() и odeint) модуля scipy.integrate. Функция ode() более универсальная, а функция odeint() имеет более простой интерфейс и хорошо решает большпнство задач.

odeint(func, y0, t[,args=(),…])

Стронтся числепиое решенпе задачи Кошп системы диффереициальных уравнепий

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

с иачальнымп условиямн

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0,\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_n^0.$$

Функция odient() имеет три обязательных аргумента.

Первый аргумепт: func – нмя фупкцпи двух переменпых, первый аргумент функцпп func() – список функцпй $y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ (y_i – функцни, для которых решается система дифферепциальпых уравпеиий).

Второй аргумент y0 функции odeint() – массив (список) иачальпых значений $y_1^0, \ldots, y_n^0$ при $x = x_0$.

Третий аргумент x – массив значений пезависимой переменной x, для которых требуется получить решепне задачи. Первый элемент этого массива рассматривается как x_0.

Функция odient() возвращает массив размера $\text{len}(x) \cdot \text{len}(y_0)$.

Опции rtol (относительная погрешность) и atol (абсолютная ногрешность) определяют ногрешность вычнсленнй e_i для каждого значения y_i. По умолчанию $rtol = atol = 1.49012 \cdot 10^{-8}$.

В случае, если строится численное решение задачи Коши дифференциального уравнеиия n–го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)});\ \mathrm{y}(x_0) = y_1^0,\ y'(x_0) = y_2^0,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0,$$

эта задача должна быть иредварительно неренисана в виде системы дифференцнальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

с иачальными условиями

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0,\ \dots,\ y_n(x_0) = y_n^0.$$

Функцня ode()

Создает объект ОДУ (тин scipy.integrate._ode.ode). Имея ссылку на такой объект, для решения дифференциальиых уравиений следует использовать его методы. Аналогично фуикции odeint(), фуикция ode(func) преднолагает приведение задачи к системе диффереициальных уравнений.

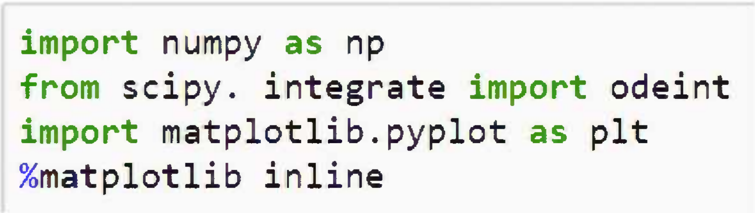
Отличие от функции odeint() состоит в том, что функция правых частей func(t,y) первым аргумептом принимает независимую перемениую, а вторым – сиисок значений искомых функций.

Пример 45. Найти численное решение задачи Коши

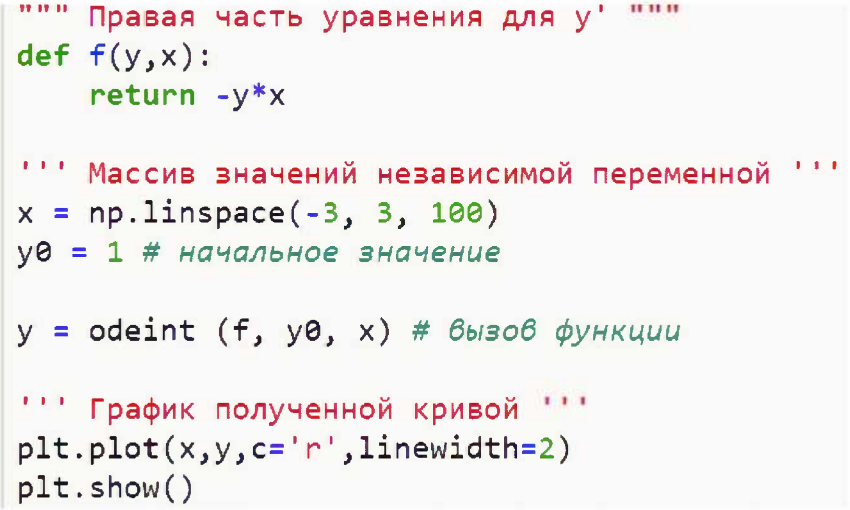
$$y'(x) = -xy(x),\quad y(-3) = 1$$

на отрезке $[-3; 3]$.

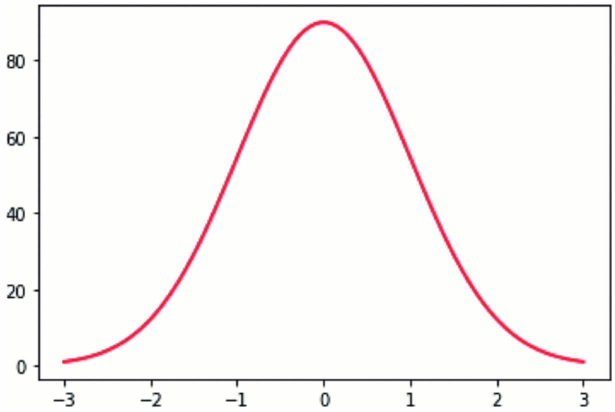
Решение.



```
import numpy as np
from scipy. integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```



```
""" Правая часть уравнения для y' """
def f(y,x):
    return -y*x

''' Массив значений независимой переменной '''
x = np.linspace(-3, 3, 100)
y0 = 1 # начальное значение

y = odeint (f, y0, x) # вызов функции

''' График полученной кривой '''
plt.plot(x,y,c='r',linewidth=2)
plt.show()
```

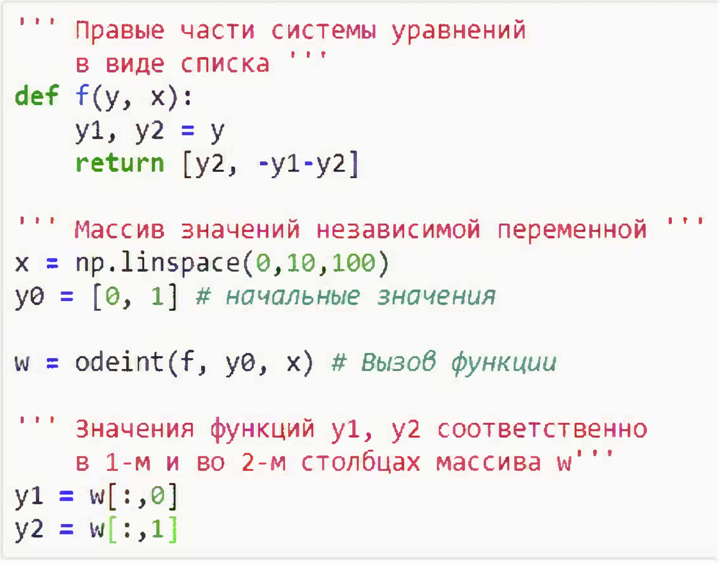


Пример 46. Найти численное решение системы дифференциальных уравнеиий

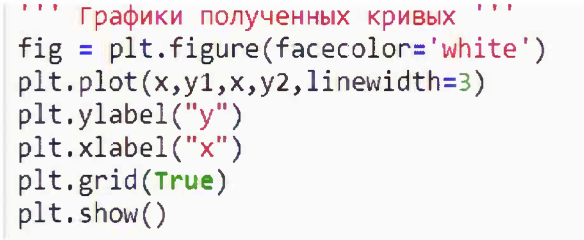
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -y_1(x) - y_2(x), \end{cases} \quad y_1(0) = 0, \; y_2(0) = 1$$

на отрезке $[0; 10]$.

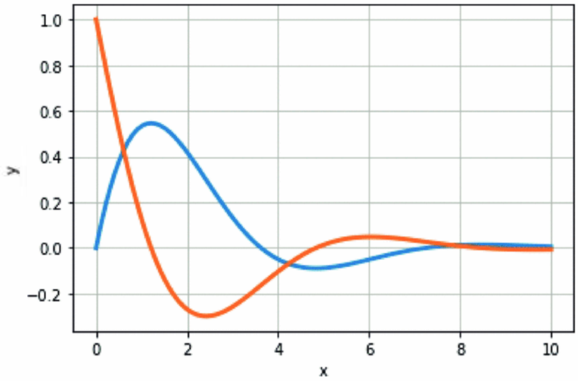
Решение.



```
''' Правые части системы уравнений
    в виде списка '''
def f(y, x):
    y1, y2 = y
    return [y2, -y1-y2]

''' Массив значений независимой переменной '''
x = np.linspace(0,10,100)
y0 = [0, 1] # начальные значения

w = odeint(f, y0, x) # Вызов функции

''' Значения функций y1, y2 соответственно
    в 1-м и во 2-м столбцах массива w'''
y1 = w[:,0]
y2 = w[:,1]
```



```
''' Графики полученных кривых '''
fig = plt.figure(facecolor='white')
plt.plot(x,y1,x,y2,linewidth=3)
plt.ylabel("y")
plt.xlabel("x")
plt.grid(True)
plt.show()
```



Пример 47. Найти численное решение задачи Коши

$$(x^2+1)y''=2xy',\quad y(-4)=-75,\ y'(-4)=51.$$

на отрезке $[-4;5]$.

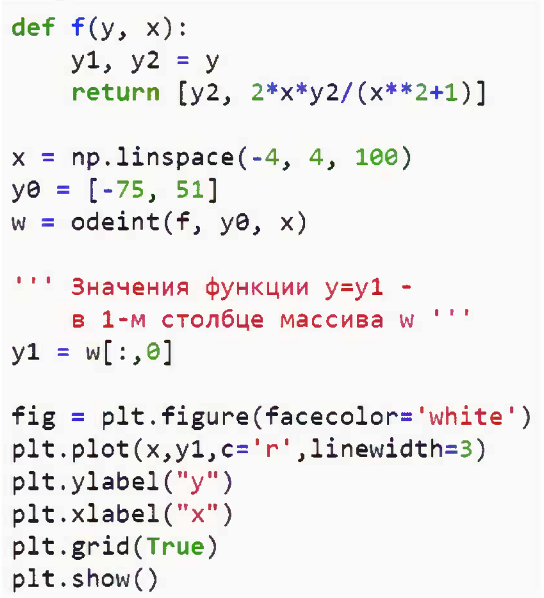
Решение. Записываем задачу в виде системы дифференциальных уравнений. Введем иовые переменные: $y_1=y,\ y_2=y'$. Тогда

$$y_2'=y''=\frac{2xy'}{x^2+1}=\frac{2xy_2}{x^2+1}.$$

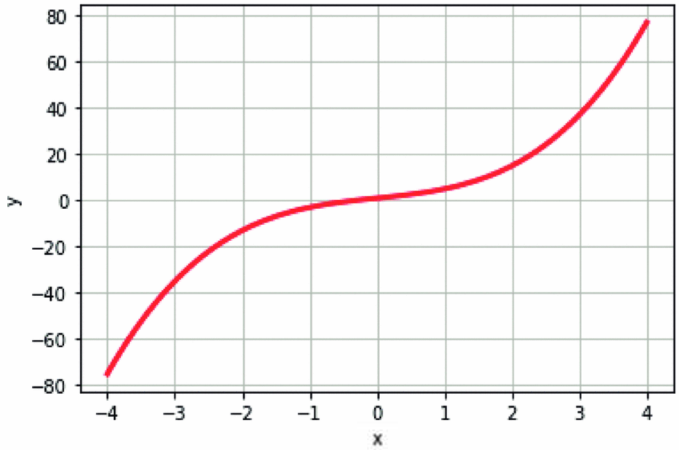
Получаем систему

$$\begin{cases} y_1'=y_2, \\ y_2'=\frac{2x}{x^2+1}y_2, \end{cases}\quad y_1(-4)=-75,\ y_2(-4)=51.$$

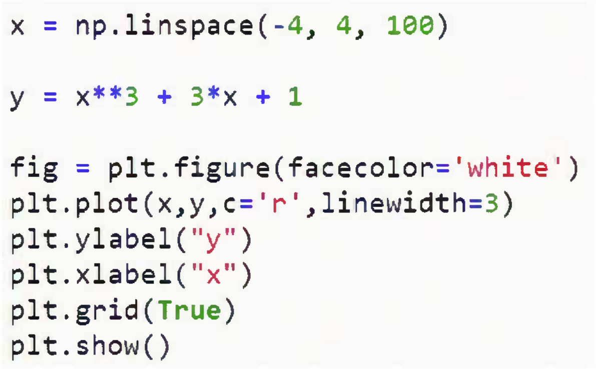
Ее решеиие:



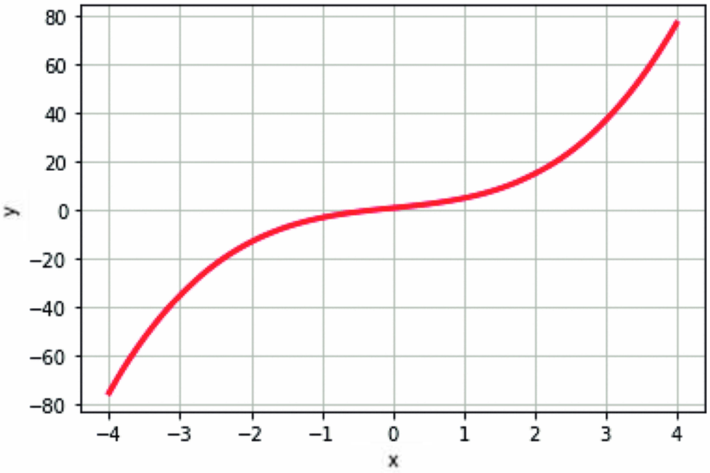
```
def f(y, x):
    y1, y2 = y
    return [y2, 2*x*y2/(x**2+1)]

x = np.linspace(-4, 4, 100)
y0 = [-75, 51]
w = odeint(f, y0, x)

''' Значения функции y=y1 -
    в 1-м столбце массива w '''
y1 = w[:,0]

fig = plt.figure(facecolor='white')
plt.plot(x,y1,c='r',linewidth=3)
plt.ylabel("y")
plt.xlabel("x")
plt.grid(True)
plt.show()
```



Сравним с точным решением данной задачи: $y = x^3 + 3x + 1$.



```
x = np.linspace(-4, 4, 100)

y = x**3 + 3*x + 1

fig = plt.figure(facecolor='white')
plt.plot(x,y,c='r',linewidth=3)
plt.ylabel("y")
plt.xlabel("x")
plt.grid(True)
plt.show()
```



Экономические приложения дифференциальных уравнений

Модель естественного роста выпуска

Пусть некоторая продукция реализуется по фиксированией цене P. $Q(t)$ – количество продукции, реализованной на данный момент времени t. Тогда на этот момент времени получится доход, равный $P \cdot Q(t)$.

Допустим, что часть получепного дохода расходуется иа инвестиции $I(t)$ в производство реализуемой продукции $I(t) = m \cdot P \cdot Q(t)$, где m – норма инвестнции, являющаяся иостояниым числом, принадлежащим интервалу $(0;1)$ (так как инвестиции не могут превысить доход). Если рынок до конца не насыщается (вся вынущенная продукция реализуется полностью), то в результате расширения производства часть получениого прироста дохода снова будет вложена в ннвестиции, что нрнведет к росту скорости (акселерации) вынуска нродукцни. Скорость, ири этом, будет проиорциональна увеличению инвестиций $Q'(t) = l \cdot m \cdot P \cdot Q(t)$, где $\frac{1}{l}$ – норма акселерации (постояпное число). Последпее уравпение является дифферепциальным уравнением с разделяющимнся иеременными.

Пример 48. Через какое время объем реалнзованной продукции увеличится в три раза по сравнеиню с первоиачальным, если известно значение коэффициента пропорциональности $k = l \cdot m \cdot P = 0{,}2$?

Решение. Имеем: $Q'(t) = k \cdot Q(t)$, $Q(t) = 3Q(0)$. Решением дифференциальпого уравпения является $Q(t) = Q(0)e^{kt}$. Зиачепие t иаходим из условия $e^{0.2t} = 3$, $e^{kt}t = 5\ln 3 \approx 5.5$ ед. времени.

Модель спроса и предложепия

Спрос D на иекоторый товар и иредложеине S зависят от цены p, которая, в свою очередь, зависит от времеии t. Равиовесиой ценой называется цена, ирн которой сирос совпадает с нредложением: $D(p) = S(p)$.

Эластичностью функции $y(x)$ называется величина $E_x(y) = \frac{x}{y}y'$.

Пример 49. Найти функцию снроса, если известно, что при спросе $D = 10$ единиц, цена p составляла 90 деиежных единиц, а эластичность спроса имеет вид: $E_p(D) = \frac{D-100}{D}$, $(0 < D < 100)$.

Решение. Запнсываем условие на эластнчность.

$$E_p(D) = \frac{p}{D}D' = \frac{D-100}{D}; \quad pD' = D - 100.$$

Имеем дифферeицнальное уравненне с разделяющнмися переменпыми.

$$p\frac{dD}{dp} = D - 100; \qquad \frac{dD}{D-100} = \frac{dp}{p}; \qquad \int \frac{dD}{D-100} = \int \frac{dp}{p};$$

$$\ln(D-100) = \ln Cp; \quad D = Cp + 100.$$

По условию: $10 = C \cdot 90 + 100$; $C = -1$.

Ответ: $D = 100 - p$.

Пример 50. Функции спроса D и предложения S в зависимости от цены p и ее производной имеют следующий вид:

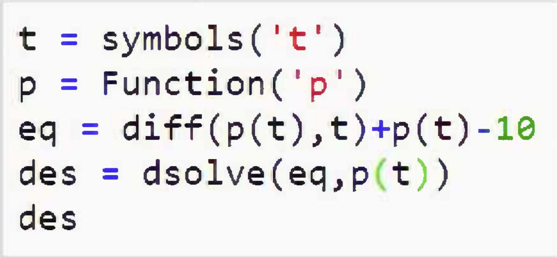
$$D(p) = 3p' - 2p + 19; \quad S(p) = 4p' - p + 9.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент времени $p = 9$. Исследовать равновесную цену на устойчивость.

Решение. Приравнивая спрос и предложение, получим уравнение для цены:

$$3p' - 2p + 19 = 4p' - p + 9; \quad p' + p - 10 = 0.$$

Линейное с постоянными коэффициентами (и с разделяющимися переменными).



```
t = symbols('t')
p = Function('p')
eq = diff(p(t),t)+p(t)-10
des = dsolve(eq,p(t))
des
```

$$p(t) = C_1 e^{-t} + 10$$

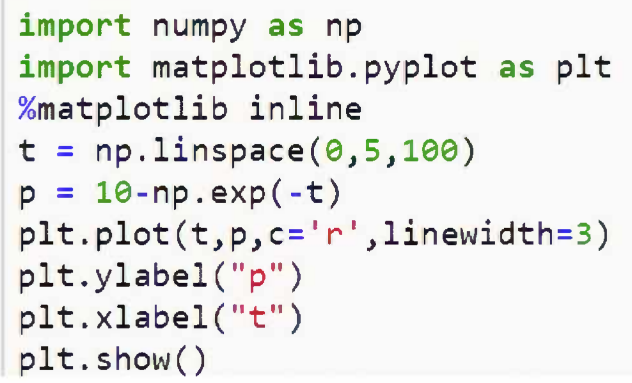
С учетом начального условия $p(0) = 9$, получаем уравнение:

$$p(t) = 10 - e^{-t}.$$

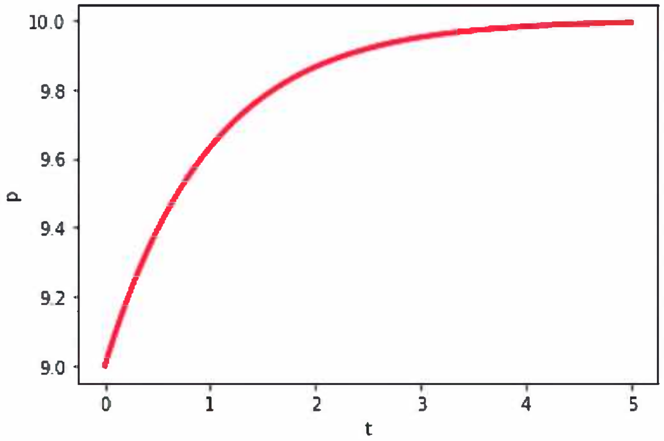
Равновесная цена является устойчивой, если для нее существует конечный предел при $t \to \infty$. В нашем случае это выполняется.

$$\lim_{t \to \infty} (10 - e^{-t}) = 10.$$

График зависимости цены от времени имеет следующий вид:



```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
t = np.linspace(0,5,100)
p = 10-np.exp(-t)
plt.plot(t,p,c='r',linewidth=3)
plt.ylabel("p")
plt.xlabel("t")
plt.show()
```



Математическая модель эпидемии

Пример 51. Рассмотрим модель естественного хода эпидемии (без какого-либо вмешательства).

Пусть имеется N здоровых людей, и в момент времени $t = 0$ в эту группу попадает один заболевший человек – источник инфекции. Предполагается, что никакого удаления заболевших из группы не происходит, и что человек становится источником инфекции сразу же после того, как он сам заразится.

Введем обозначения для момента времени t:

$X(t)$ – число источников инфекции,

$Y(t)$ – число людей, подвергающихся опасности заболеть.

Тогда в любой момент времени t выполняется равенство:

$$X(t) + Y(t) = N + 1.$$

При $t = 0$ выполняется начальное условие $X(0) = 1$.

Количество новых больных dX, появившихся за промежуток времени dt, будет пропорционально числу встреч здоровых и заболевших людей, то есть произведению величин XY. Следовательно, можно записать

$$dX = aXYdt = aX(N + 1 - X)dt$$

(a – коэффициент пропорциональности), откуда

$$\frac{dX}{dt} = aX(N + 1 - X).$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dX}{X(N + 1 - X)} = adt.$$

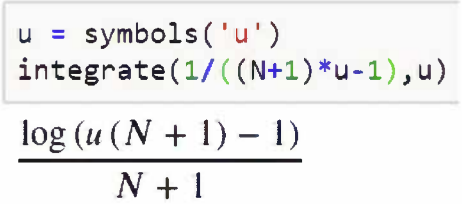
Находим интегралы от левой и правой частей.
Интеграл от правой части:

$$\int a dt = at + C.$$

В левом интеграле выполним замену:

$$\frac{1}{X} = u, X = \frac{1}{u}, dX = -\frac{1}{u^2}du.$$

$$\int \frac{dX}{X(N+1-X)} = \int \frac{-\frac{1}{u^2}du}{\frac{1}{u}\left(N+1-\frac{1}{u}\right)} = -\int \frac{1}{(N+1)u-1}du.$$



```
u = symbols('u')
integrate(1/((N+1)*u-1),u)
```

$$\frac{\log(u(N+1)-1)}{N+1}$$

Приравниваем интегралы.

$$\frac{\ln((N+1)u-1)}{(N+1)} = -at + C;$$

$$\ln\big((N+1)u-1\big) = (N+1)C - (N+1)at = -C_1 - (N+1)at;$$

$$(N+1)u - 1 = e^{-C_1} \cdot e^{-(N+1)at} = C_2 e^{-(N+1)at}; \quad u = \frac{C_2 e^{-(N+1)at} + 1}{N+1}.$$

(Обозначили: $C_1 = (N+1)C$; $C_2 = e^{-C_1}$).

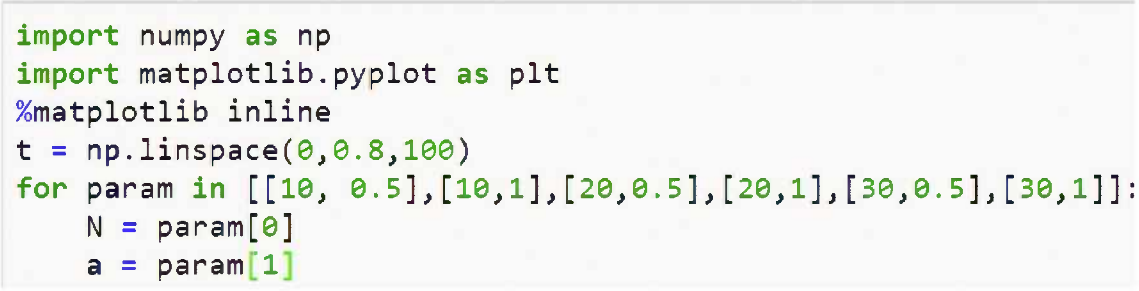
Итак, общее решение дифференциального уравнения:

$$X = \frac{1}{u} = \frac{N+1}{C_2 e^{-(N+1)at} + 1}.$$

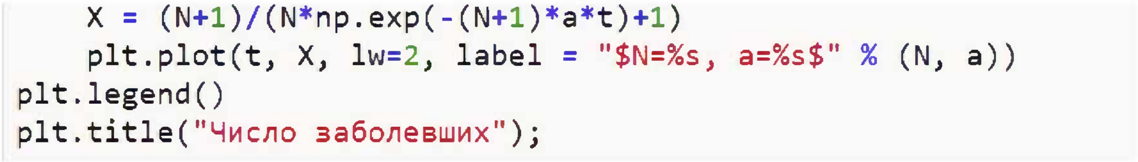
Из условия $X(0) = 1$ следует: $C_2 = N$, и частное решение:

$$X = \frac{N+1}{Ne^{-(N+1)at} + 1}.$$

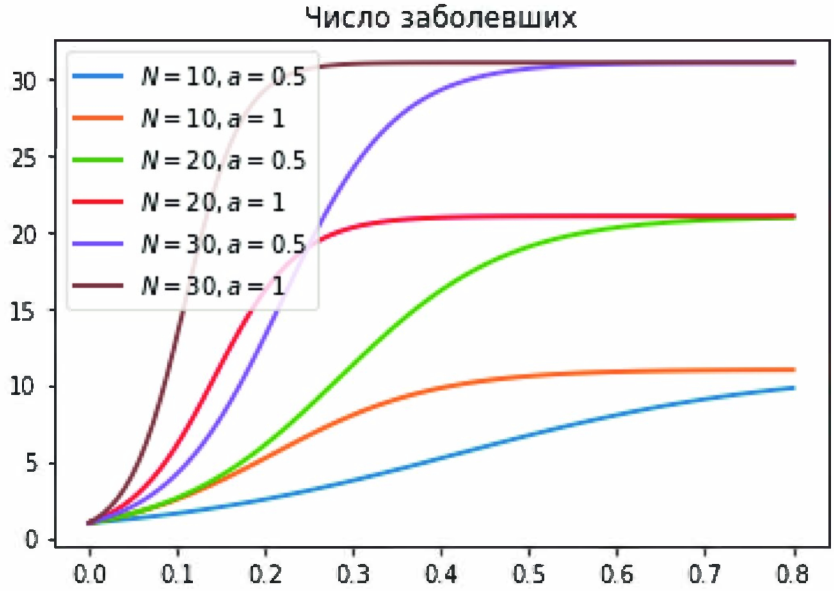
Графики кривых при некоторых значениях параметров N и a:



```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
t = np.linspace(0,0.8,100)
for param in [[10, 0.5],[10,1],[20,0.5],[20,1],[30,0.5],[30,1]]:
    N = param[0]
    a = param[1]
```



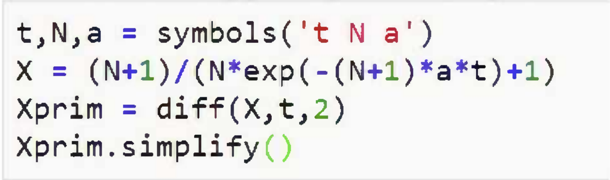
```
    X = (N+1)/(N*np.exp(-(N+1)*a*t)+1)
    plt.plot(t, X, lw=2, label = "$N=%s, a=%s$" % (N, a))
plt.legend()
plt.title("Число заболевших");
```



Число заболевших выходит иа плато.

И посмотрим, как ведет себя скорость увеличения числа больных. Этот показатель опнсывается второй нроизводной от фукции $X(t)$.

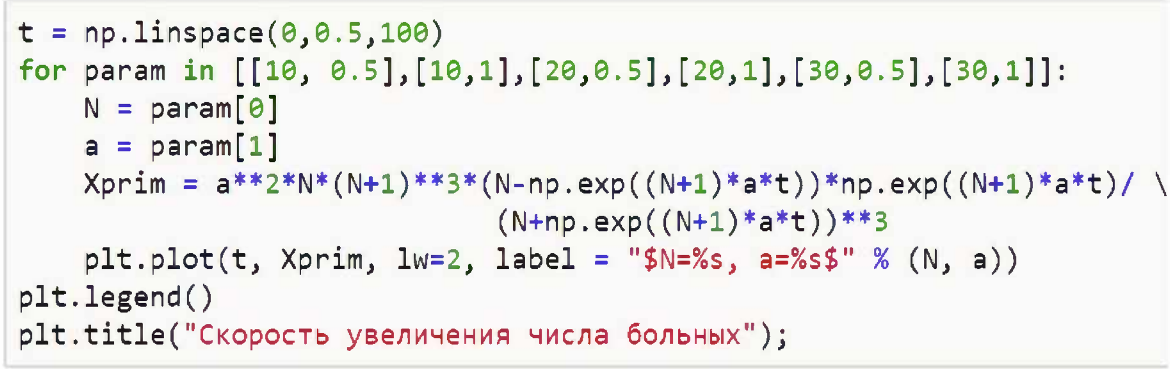
Находим вторую производную.



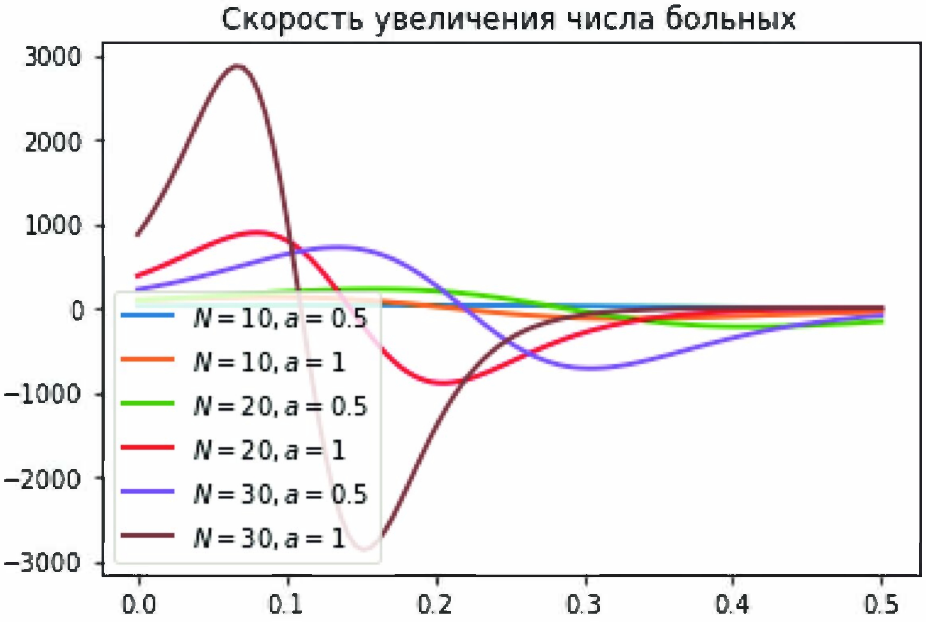
```
t,N,a = symbols('t N a')
X = (N+1)/(N*exp(-(N+1)*a*t)+1)
Xprim = diff(X,t,2)
Xprim.simplify()
```

$$\frac{Na^{2}(N+1)^{3}\left(N-e^{at(N+1)}\right)e^{at(N+1)}}{\left(N+e^{at(N+1)}\right)^{3}}$$

Графикн кривых:

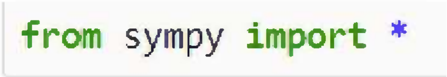


```
t = np.linspace(0,0.5,100)
for param in [[10, 0.5],[10,1],[20,0.5],[20,1],[30,0.5],[30,1]]:
    N = param[0]
    a = param[1]
    Xprim = a**2*N*(N+1)**3*(N-np.exp((N+1)*a*t))*np.exp((N+1)*a*t)/ \
                                (N+np.exp((N+1)*a*t))**3
    plt.plot(t, Xprim, lw=2, label = "$N=%s, a=%s$" % (N, a))
plt.legend()
plt.title("Скорость увеличения числа больных");
```



Скорость возрастания растет до некоторого момента, затем убывает, а позже наблюдается еще один период роста скорости с постепенным замедлением.

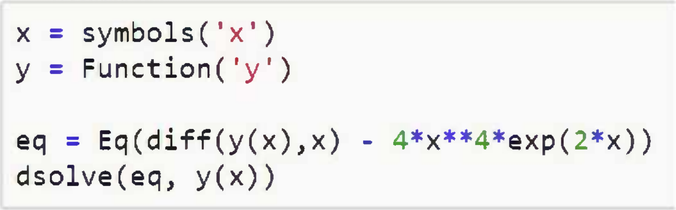
Примеры решения задач



```
from sympy import *
```

1. Решить дифференциальное уравнение $y' = 4x^4e^{2x}$.

Решение.

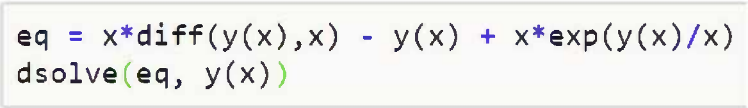


```
x = symbols('x')
y = Function('y')

eq = Eq(diff(y(x),x) - 4*x**4*exp(2*x))
dsolve(eq, y(x))
```

$$y(x) = C_1 + \left(2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6x + 3\right)e^{2x}$$

2. Решить дифференциальное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

Решение.



```
eq = x*diff(y(x),x) - y(x) + x*exp(y(x)/x)
dsolve(eq, y(x))
```

$$y(x) = \log\left(\left(-\frac{1}{C_1 - \log(x)}\right)^x\right)$$

Полученную формулу можно упростить. Выражения под знаком логарифма следует брать по модулю.

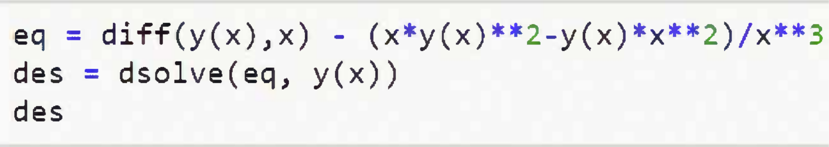
$$y=\ln\left(\left|-\frac{1}{C-\ln|x|}\right|^{x}\right)=x\ln\left|\frac{1}{C-\ln|x|}\right|=-x\ln|C-\ln|x||.$$

Ответ: $y=-x\ln|C-\ln|x||$.

3. Решить задачу Коши

$$y'=\frac{xy^2-yx^2}{x^3},\quad y(-1)=1.$$

Решение. Находим общее решение.



```
eq = diff(y(x),x) - (x*y(x)**2-y(x)*x**2)/x**3
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

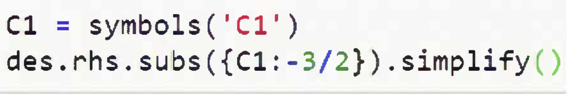
$$y(x)=\frac{1}{x\left(C_1+\frac{1}{2x^2}\right)}$$

Находим значение постоянной C_1, используя функцию Cauchy() (текст функцин на с. 25).

```
Cauchy(des.rhs,-1,1)
```

```
[-3/2]
```

Подставляем в формулу для $y(x)$ найденное значение C_1.



```
C1 = symbols('C1')
des.rhs.subs({C1:-3/2}).simplify()
```

$$-\frac{2x}{3.0x^2-1}$$

Ответ: $y=\frac{2x}{1-3x^2}$.

4. Решить уравнение $xdy-ydx=\sqrt{y^2-9x^2}dx$.

Решение. Разделив иа dx, получим уравнеиие:

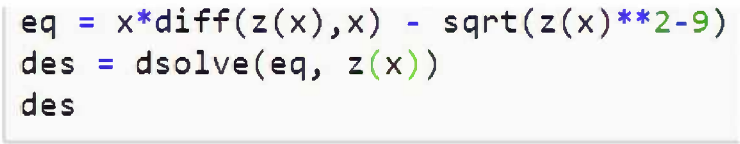
$$xy'-y=\sqrt{y^2-9x^2}.$$

Это однородное уравнение. Вынолняем замену: $\frac{y}{x}=z$, $y=xz$, $y'=z+xz'$. После упрощений получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$xz'=\sqrt{z^2-9}.$$

Его решение:

```
x = symbols('x')
z = Function('z')
```



```
eq = x*diff(z(x),x) - sqrt(z(x)**2-9)
des = dsolve(eq, z(x))
des
```

$$z(x) = 3\cosh\left(C_1 + \log(x)\right)$$

Решение записано через гиперболический косииус $\left(\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$. Возвращаемся к старой перемеппой.

$$\frac{y}{x} = 3\frac{e^{C_1 + \ln x} + e^{-(C_1 + \ln x)}}{2} = \frac{3}{2}\left(e^{C_1}x + \frac{1}{e^{C_1}x}\right) = \frac{3}{2}\left(C_2 x + \frac{1}{C_2 x}\right);$$

$$y = \frac{3x}{2}\left(C_2 x + \frac{1}{C_2 x}\right) = \frac{3C_2^2 x^2 + 3}{2C_2}.$$

Ответ: $y = \frac{3C_2^2 x^2 + 3}{2C_2}$.

5. Решить уравнение

$$(x + y - 4)y' = 2x + y + 3.$$

Решение. Имеем уравненпе приводящееся к одпородпому.

1). Положнм $x = u + a, y = v + b$, а числа a и b подберем, подставив формулы в исходпое уравпение.

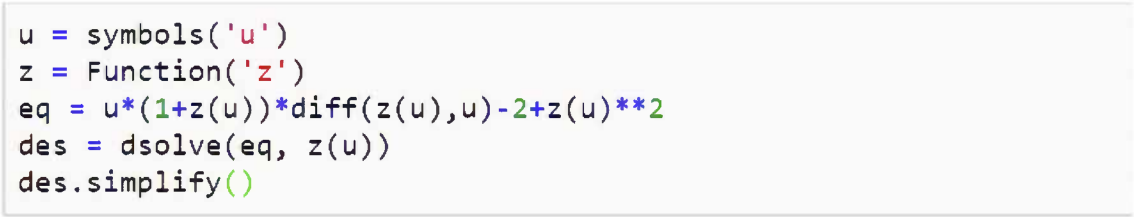
$$(u + v + a + b - 4)y' = 2u + v + 2a + b + 3.$$

Подберем a и b так, чтобы

$$\begin{cases} a + b - 4 = 0, \\ 2a + b + 3 = 0, \end{cases} \quad a = -7, b = 11.$$

2). Исходное уравпеппе прпнимает вид: $(u + v)v' = 2u + v$. Получили одиородное уравнение. Выполняем замену: $z = \frac{v}{u}$, $v = uz$, $v' = z + uz'$.

3). После упрощенпй получаем уравнепие с разделяющимися перемепиыми: $u(1 + z)z' = 2 - z^2$. Его решение:



```
u = symbols('u')
z = Function('z')
eq = u*(1+z(u))*diff(z(u),u)-2+z(u)**2
des = dsolve(eq, z(u))
des.simplify()
```

$$C_1 = \log(u) + \frac{\left(\sqrt{2} + 2\right)\log\left(z(u) - \sqrt{2}\right)}{4} + \frac{\left(2 - \sqrt{2}\right)\log\left(z(u) + \sqrt{2}\right)}{4}$$

После преобразований получаем

$$4\ln|u| + \sqrt{2}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right| + 2\ln|z^2-2| = C_2;$$

$$\ln\left(|u|^4|z^2-2|^2\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|^{\sqrt{2}}\right) = C_2;\quad |u|^4|z^2-2|^2\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|^{\sqrt{2}} = C_3.$$

В полученный общпй ннтеграл подставляем выражепня для z и u:

$$u = x+7;\quad z = \frac{v}{u} = \frac{y-11}{x+7}.$$

Получаем:

$$(x+7)^4\left(\left(\frac{y-11}{x+7}\right)^2-2\right)^2\left|\frac{y-\sqrt{2}x-11-7\sqrt{2}}{y+\sqrt{2}x-11+7\sqrt{2}}\right|^{\sqrt{2}} = C_3.$$

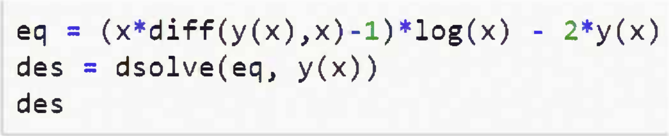
Ответ: общий интеграл:

$$(x+7)^2\big(((y-11)^2-2(x+7)^2)\big)\left|\frac{y-\sqrt{2}x-11-7\sqrt{2}}{y+\sqrt{2}x-11+7\sqrt{2}}\right|^{\sqrt{2}} = C_3.$$

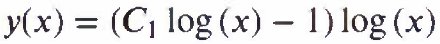
6. Решить задачу Коши

$$(xy'-1)\ln x = 2y,\quad y(e) = 1.$$

Решение. Имеем лпнейное уравпепие. Находим общее решенпе



```
eq = (x*diff(y(x),x)-1)*log(x) - 2*y(x)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```



$$y(x) = (C_1\log(x)-1)\log(x)$$

Находпм значение константы C_1:

```
Cauchy(des.rhs,E,1)
```

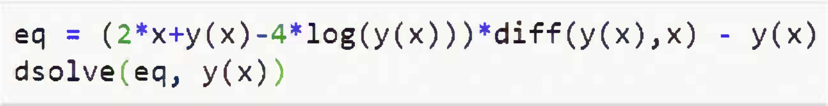
```
[2]
```

Записываем частпое решепие со значенпем $C_1 = 2$.

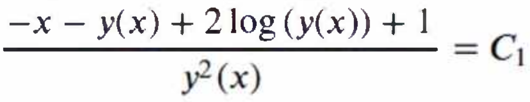
Ответ: $y = (2\ln|x|-1)\ln|x|$.

7. Решить уравнение $(2x+y-4\ln y)y' = y$.

Решение. Имеем уравнеппе, линейное относптельно функцпи $x(y)$.



```
eq = (2*x+y(x)-4*log(y(x)))*diff(y(x),x) - y(x)
dsolve(eq, y(x))
```

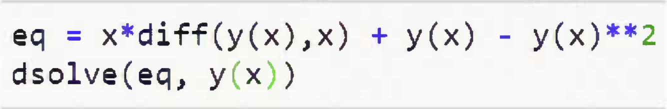


$$\frac{-x-y(x)+2\log(y(x))+1}{y^2(x)} = C_1$$

Ответ: $y + Cy^2 - 2\ln|y| = 1 - x$.

8. Решить уравнение $xy' + y = y^2$.

Решение. Имеем уравнение Бернулли.



```
eq = x*diff(y(x),x) + y(x) - y(x)**2
dsolve(eq, y(x))
```

$$y(x) = -\frac{C_1}{-C_1 + x}$$

Ответ: $y = \frac{c}{c-x}$.

9. Решить уравнение $x^2y' - 2x^2y^2 = -1$.

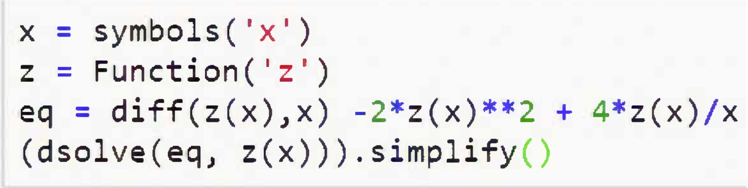
Решение. Переписав уравнение в виде $y' - 2y^2 = -\frac{1}{x^2}$, заключаем, что это уравнение Риккати. Попробуем найти частное решение вида $y = \frac{a}{x}$. Имеем $y' = -\frac{a}{x^2}$. Подставляем в исходное уравнение:

$$-\frac{a}{x^2} - 2\frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0; \quad 2a^2 + a - 1 = 0.$$

Подходит любой из имеющихся двух корней. Возьмем $a = -1$. Имеем частное решение $y = \frac{-1}{x}$. Выполняем замену: $y = z(x) - \frac{1}{x}$; $y' = z' + \frac{1}{x^2}$. Получаем уравнение Бернулли:

$$z' + \frac{1}{x^2} - 2\left(z(x) - \frac{1}{x}\right)^2 = -\frac{1}{x^2}; \quad z' + \frac{4z}{x} = 2z^2.$$

Его решение:



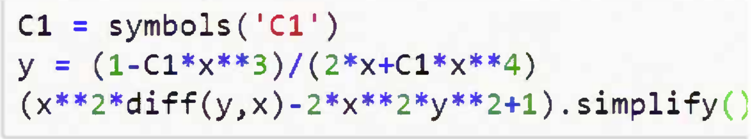
```
x = symbols('x')
z = Function('z')
eq = diff(z(x),x) -2*z(x)**2 + 4*z(x)/x
(dsolve(eq, z(x))).simplify()
```

$$z(x) = \frac{3}{x\left(3C_1x^3 + 2\right)}$$

Тогда решение исходного уравнения:

$$y = z(x) - \frac{1}{x} = \frac{3}{x(3C_1x^3 + 2)} - \frac{1}{x} = \frac{1 - 3C_1x^3}{x(2 + C_1x^3)}.$$

Выполним проверку:



```
C1 = symbols('C1')
y = (1-C1*x**3)/(2*x+C1*x**4)
(x**2*diff(y,x)-2*x**2*y**2+1).simplify()
```

0

Ответ: $y = \frac{1-Cx^3}{x(2+Cx^3)}$.

10. Решить уравнение $x^3y' + x^2y - y^2 = 2x^4$.

Решение. Приведем уравнение к стандартному виду (с коэффициентом 1 при y').

$$y' + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^3} = 2x.$$

Теперь видим, что у нас имеется уравнение Риккати. Попробуем найти частное решение в виде: $y = cx^2$.

$(cx^2)' + cx - c^2x = 2x$; $c^2 - 3c + 2 = 0$; можно взять $c = 1$.

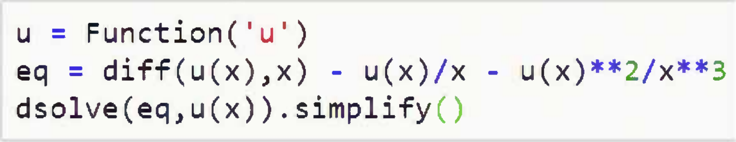
Замена: $y = u + x^2$.

$$(u + x^2)' + \frac{u+x^2}{x} - \frac{(u+x^2)^2}{x^3} = 2x.$$

После упрощений получаем уравнение Бернулли:

$$u' - \frac{u}{x} = \frac{u^2}{x^3}.$$

Находим его решение:



```
u = Function('u')
eq = diff(u(x),x) - u(x)/x - u(x)**2/x**3
dsolve(eq,u(x)).simplify()
```

$$u(x) = \frac{x^2}{C_1x + 1}$$

Тогда,

$$y = u + x^2 = \frac{x^2}{C_1x+1} + x^2 = \frac{C_1x^3+2x^2}{C_1x+1}.$$

Ответ: $y = \frac{Cx^3+2x^2}{Cx+1}$.

11. Решить уравнение

$$2x\cos^2y dx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0.$$

Решение. Проверим выполнение признака уравнения в полных дифференциалах.

$$P(x,y) = 2x\cos^2y,\ \frac{\partial P}{\partial y} = -4x\cos y\sin y = -2x\sin 2y;$$

$$Q(x,y) = 2y - x^2\sin 2y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x\sin 2y.$$

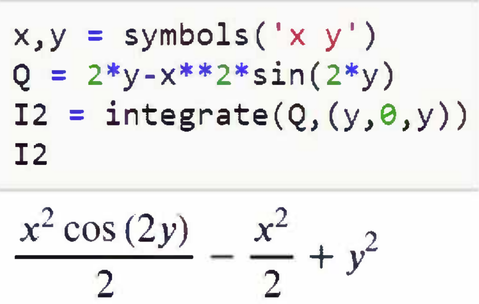
Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Ищем решение в виде общего ннтеграла $U(x,y)=C$.

В качестве начальной точки пути иитегрирования берем точку $(0;0)$.

$$U(x,y)=\int_0^x(2x\cos^2 0)dx+\int_0^y(2y-x^2\sin 2y)dy+C=$$

$$=x^2+\int_0^y(2y-x^2\sin 2y)dy+C.$$



```
x,y = symbols('x y')
Q = 2*y-x**2*sin(2*y)
I2 = integrate(Q,(y,0,y))
I2
```

$$\frac{x^2\cos(2y)}{2}-\frac{x^2}{2}+y^2$$

Решение уравнения в виде общего интеграла $U(x,y)=C$:

$$x^2+\frac{x^2\cos 2y}{2}-\frac{x^2}{2}+y^2=C.$$

В окончательном ответе используем формулу: $\frac{1+\cos 2y}{2}=\cos^2 y$.

Ответ: $x^2\cos^2 y+y^2=C$.

12. Решить уравненне

$$\frac{xdy}{x^2+y^2}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx.$$

Решение. Имеем равенства

$$P(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}-1,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};$$

$$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

из которых заключаем, что исходное уравнеиие является уравнеиием в полных дифференциалах.

Ищем решенне в виде общего ннтеграла $U(x,y)=C$.

В качестве начальной точки пути интегрнрования берем точку $(0;0)$.

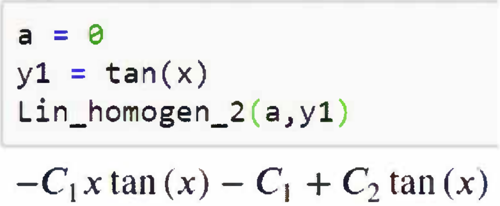
$$U(x,y)=\int_0^x\left(\frac{0}{x^2+0^2}-1\right)dx+\int_0^y\frac{x}{x^2+y^2}dy+C=$$

$$= -x + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - x = C$.

13. Найти общее решение уравнения $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0$, если нзвестно одно его частное решенне $y_1 = \operatorname{tg}x$.

Решение. Имеем линейное одиородное уравнеине второго порядка со слагаемым $a(x) = 0$ и частным решением $y_1 = \operatorname{tg}x$. Для получения общего решения используем программу Lin_homogen_2() (текст функции на с. 26).



```
a = 0
y1 = tan(x)
Lin_homogen_2(a,y1)
```

$$-C_1 x \tan(x) - C_1 + C_2 \tan(x)$$

Ответ: $y = C_1(x\operatorname{tg}x + 1) + C_2\operatorname{tg}x$.

14. Найти общее решение неоднородного уравнения

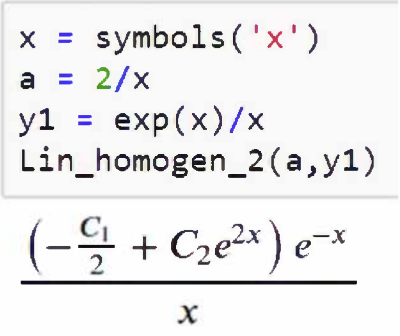
$$xy'' + 2y' - xy = x^2e^{2x},$$

если известно одно частное решение соответствующего однородного уравнеиия $y_1 = \frac{e^x}{x}$.

Решение. Ириведем уравнение к стандартному виду

$$y'' + \frac{2}{x}y' - y = xe^{2x}.$$

Однородное уравиение решим, нсиользуя функцию Lin_homogen_2().



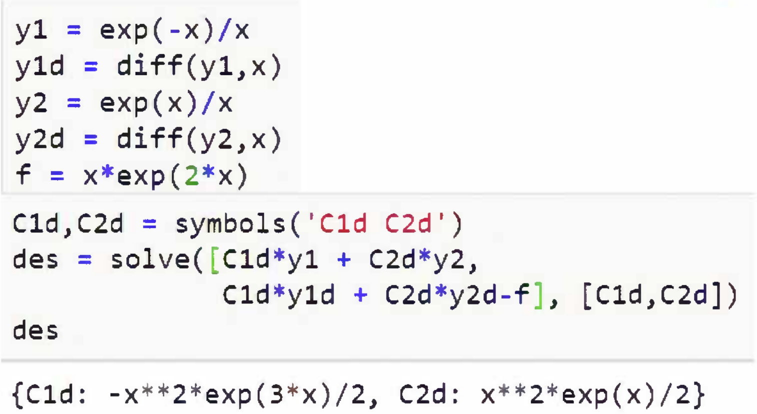
```
x = symbols('x')
a = 2/x
y1 = exp(x)/x
Lin_homogen_2(a,y1)
```

$$\frac{\left(-\frac{C_1}{2} + C_2e^{2x}\right)e^{-x}}{x}$$

Запишем полученное решеине через линейио незавнснмые функции фундаментальной системы $y_1 = \frac{e^{-x}}{x}$ и $y_2 = \frac{e^x}{x}$:

$$y_0 = C_1\frac{e^{-x}}{x} + C_2\frac{e^x}{x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем методом вариации постоянных. Находим производные функций y_1 и y_2, затем решаем систему для определения производных C_1' и C_2'.

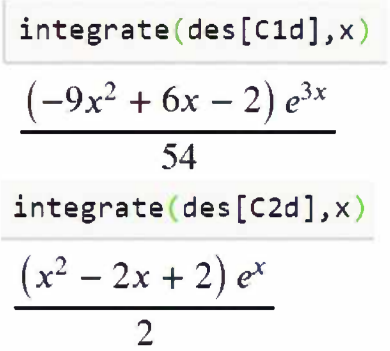


```
y1 = exp(-x)/x
y1d = diff(y1,x)
y2 = exp(x)/x
y2d = diff(y2,x)
f = x*exp(2*x)
```

```
C1d,C2d = symbols('C1d C2d')
des = solve([C1d*y1 + C2d*y2,
             C1d*y1d + C2d*y2d-f], [C1d,C2d])
des
```

```
{C1d: -x**2*exp(3*x)/2, C2d: x**2*exp(x)/2}
```

Интегрируя, находим функции $C_1(x)$, $C_2(x)$.



```
integrate(des[C1d],x)
```

$$\frac{\left(-9x^2+6x-2\right)e^{3x}}{54}$$

```
integrate(des[C2d],x)
```

$$\frac{\left(x^2-2x+2\right)e^{x}}{2}$$

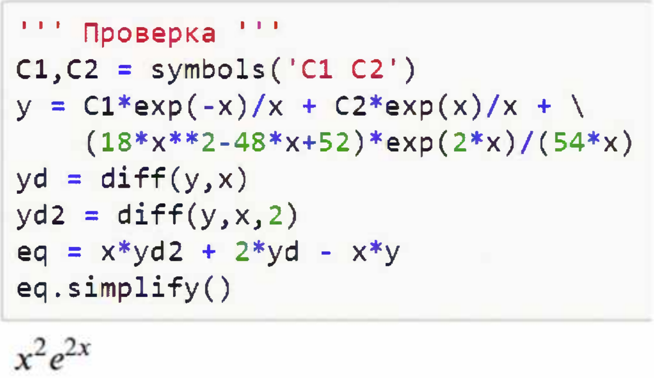
Частное решение неоднородного уравнения:

$$y_ч = C_1(x)\frac{e^{-x}}{x} + C_2(x)\frac{e^{x}}{x} = \frac{(18x^2-48x+52)}{54x}e^{2x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения находим путем сложения y_0 и $y_ч$.

$$y = y_0 + y_ч = C_1\frac{e^{-x}}{x} + C_2\frac{e^{x}}{x} + \frac{(18x^2-48x+52)}{54x}e^{2x}.$$

Для проверки подставим полученное решение в левую часть исходного уравнения.



```
''' Проверка '''
C1,C2 = symbols('C1 C2')
y = C1*exp(-x)/x + C2*exp(x)/x + \
    (18*x**2-48*x+52)*exp(2*x)/(54*x)
yd = diff(y,x)
yd2 = diff(y,x,2)
eq = x*yd2 + 2*yd - x*y
eq.simplify()
```

$$x^2e^{2x}$$

Совпадает с правой частью уравненпя.

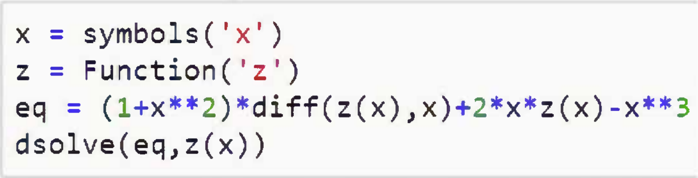
Ответ: $y=\frac{C_1}{x}e^{-x}+\frac{C_2}{x}e^{x}+\frac{(18x^2-48x+52)}{54x}e^{2x}$.

15. Решить уравнение $(1+x^2)y''+2xy'=x^3$.

Решение. Уравнение не содержит в явиом виде перемеиивую y. Выполним замену $z(x)=y'$. Тогда $y''=z'$. Уравнение приннмает вид

$$(1+x^2)z'+2xz=x^3.$$

Находим его решение.



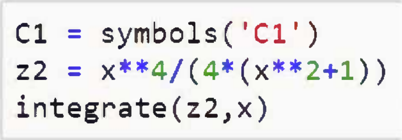
```
x = symbols('x')
z = Function('z')
eq = (1+x**2)*diff(z(x),x)+2*x*z(x)-x**3
dsolve(eq,z(x))
```

$$z(x)=\frac{C_1+\frac{x^4}{4}}{x^2+1}$$

Для функцни $y(x)$ нолучаем уравненне

$$y'=\frac{C_1}{x^2+1}+\frac{x^4}{4(x^2+1)};\quad y=\int\frac{C_1dx}{x^2+1}+\int\frac{x^4dx}{4(x^2+1)}.$$

Первый интеграл табличный, $I_1=C_1\mathrm{arctg}x$. Вычислим второй интеграл:



```
C1 = symbols('C1')
z2 = x**4/(4*(x**2+1))
integrate(z2,x)
```

$$\frac{x^3}{12}-\frac{x}{4}+\frac{\operatorname{atan}(x)}{4}$$

К полученному значению нужно добавить нроизвольную констапту. Окончательное решенпе:

$$y=C_1\mathrm{arctg}x+\frac{x^3}{12}-\frac{x}{4}+\frac{\mathrm{arctg}x}{4}+C_2=\frac{x^3}{12}-\frac{x}{4}+C_3\mathrm{arctg}x+C_2.$$

Ответ: $\frac{x^3}{12}-\frac{x}{4}+C_1\mathrm{arctg}x+C_2$.

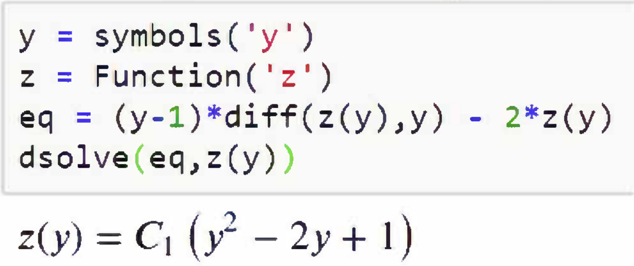
16. Решить уравнение $2(y')^2=(y-1)y''$.

Решение. Уравнение не содержит в явном виде незавнсимую переменную x. Выполним замену $z(y)=y'$. Тогда $y''=z'y'=z'z$. Уравнение принимает вид

$$2z^2=(y-1)z'z.$$

Одно решение: $z=0$; $y'=0$; $y=C$.

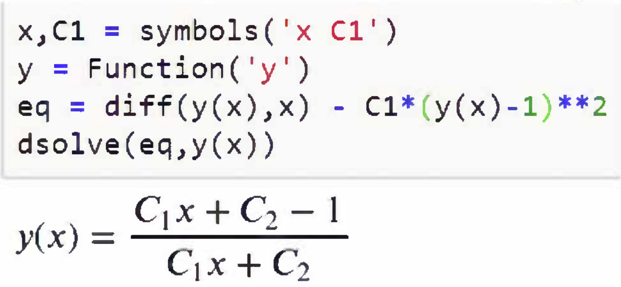
Решение уравнения $2z = (y-1)z'$:



```
y = symbols('y')
z = Function('z')
eq = (y-1)*diff(z(y),y) - 2*z(y)
dsolve(eq,z(y))
```

$$z(y) = C_1\left(y^2 - 2y + 1\right)$$

Теперь из уравнения $y' = z = C_1(y-1)^2$ находим функцию y.

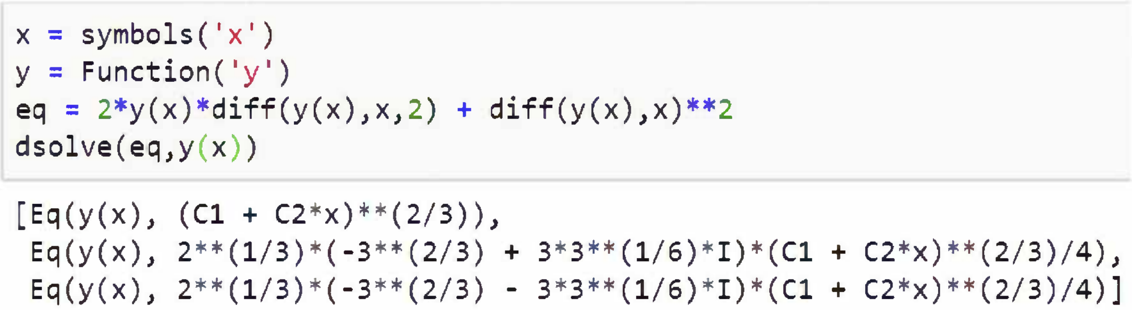


```
x,C1 = symbols('x C1')
y = Function('y')
eq = diff(y(x),x) - C1*(y(x)-1)**2
dsolve(eq,y(x))
```

$$y(x) = \frac{C_1x + C_2 - 1}{C_1x + C_2}$$

Ответ: $y = 1 - \frac{1}{C_1x+C_2}$; $y = C_3$.

17. Решить дифференциальное уравнение $(y')^2 + 2yy'' = 0$.



```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = 2*y(x)*diff(y(x),x,2) + diff(y(x),x)**2
dsolve(eq,y(x))
```

```
[Eq(y(x), (C1 + C2*x)**(2/3)),
 Eq(y(x), 2**(1/3)*(-3**(2/3) + 3*3**(1/6)*I)*(C1 + C2*x)**(2/3)/4),
 Eq(y(x), 2**(1/3)*(-3**(2/3) - 3*3**(1/6)*I)*(C1 + C2*x)**(2/3)/4)]
```

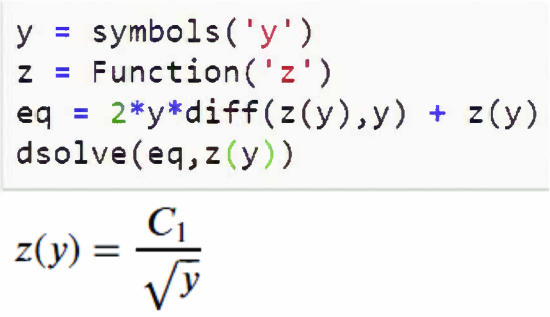
Решение в действительных числах: $y = (C_1 + C_2x)^{\frac{2}{3}}$.

Рассмотрим еще одно решение, с использованием замены. Исходное уравнение не содержит в явном виде независимую переменную x. Выполним замену $z(y) = y'$. Тогда $y'' = z'y' = z'z$. Уравнение принимает вид

$$z^2 + 2yz'z = 0.$$

Одно решение: $z = 0$; $y' = 0$; $y = C$.

Находим решение уравнения $z + 2yz' = 0$.



```
y = symbols('y')
z = Function('z')
eq = 2*y*diff(z(y),y) + z(y)
dsolve(eq,z(y))
```

$$z(y) = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$$

Возвращаясь к старой перемениой, получаем уравнеиие с разделяющимися перемеинными:

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}}; \quad \sqrt{y}dy = C_1 dx.$$

Отсюда, после интегрирования:

$$\int \sqrt{y}dy = \int C_1 dx; \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2; \quad y = (C_3 x + C_4)^{\frac{2}{3}}.$$

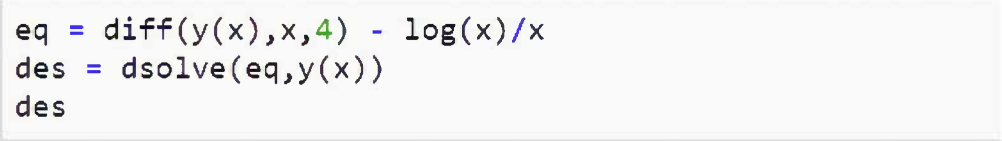
Ответ: $y = (C_1 + C_2 x)^{\frac{2}{3}}; \quad y = C.$

18. Решить задачу Коши

$$y^{(4)} = \frac{\ln x}{x}; \quad y(1) = 0, y'(1) = 0, \ y''(1) = 1, y'''(1) = 0.$$

Решение.

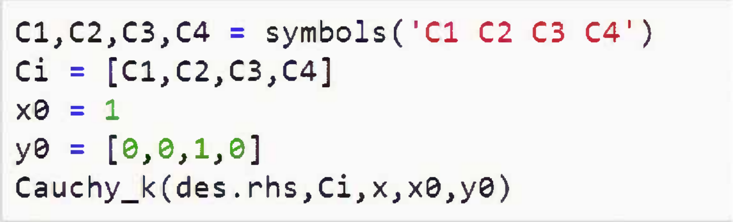
Находим общее решение:



```
eq = diff(y(x),x,4) - log(x)/x
des = dsolve(eq,y(x))
des
```

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + \frac{x^3 \log(x)^2}{12} - \frac{11x^3 \log(x)}{36}$$

Частное решение находим, используя функцию Cauchy_k() (текст фуикции на с. 26).



```
C1,C2,C3,C4 = symbols('C1 C2 C3 C4')
Ci = [C1,C2,C3,C4]
x0 = 1
y0 = [0,0,1,0]
Cauchy_k(des.rhs,Ci,x,x0,y0)
```

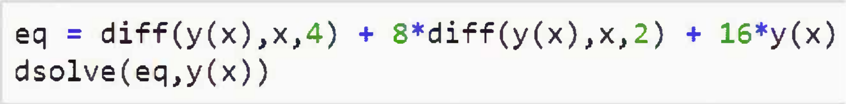
```
{C1: 13/27, C2: -7/8, C3: 0, C4: 85/216}
```

Ответ: $y = \frac{13}{27} - \frac{7}{8}x + \frac{85}{216}x^3 + \frac{x^3\ln^2|x|}{12} - \frac{11x^3\mathrm{In}|x|}{36}.$

19. Решить уравпение

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0.$$

Решение. Имеем линейное однородное уравнеиие с постояиными коэффициентамн.



```
eq = diff(y(x),x,4) + 8*diff(y(x),x,2) + 16*y(x)
dsolve(eq,y(x))
```

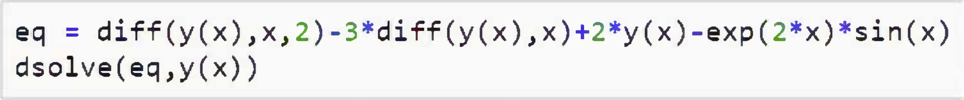
$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\sin(2x) + (C_3 + C_4 x)\cos(2x)$$

Ответ: $y = (C_1 + C_2 x)\sin 2x + (C_3 + C_4 x)\cos 2x.$

20. Решить уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}\sin x.$$

Решение. Имеем линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами.



```
eq = diff(y(x),x,2)-3*diff(y(x),x)+2*y(x)-exp(2*x)*sin(x)
dsolve(eq,y(x))
```

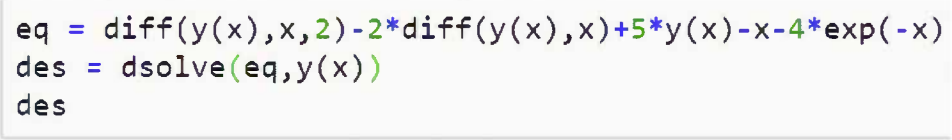
$$y(x) = \left(C_1 + \left(C_2 - \frac{\sin(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}\right)e^x\right)e^x$$

Ответ: $y = C_1e^x + \left(C_2 - \frac{\sin x+\cos x}{2}\right)e^{2x}$.

21. Решить задачу Коши

$$y'' - 2y' + 5y = x + 4e^{-x};\ \ y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

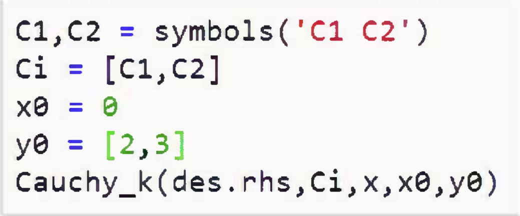
Решение. Имеем линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффицнентами. Общее решение:



```
eq = diff(y(x),x,2)-2*diff(y(x),x)+5*y(x)-x-4*exp(-x)
des = dsolve(eq,y(x))
des
```

$$y(x) = \frac{x}{5} + (C_1\sin(2x) + C_2\cos(2x))e^x + \frac{2}{25} + \frac{e^{-x}}{2}$$

Частное решение:



```
C1,C2 = symbols('C1 C2')
Ci = [C1,C2]
x0 = 0
y0 = [2,3]
Cauchy_k(des.rhs,Ci,x,x0,y0)
```

```
{C1: 47/50, C2: 71/50}
```

Ответ: $y = \frac{2}{25} + \frac{x}{5} + \frac{1}{2e^x} + \frac{1}{50}(47\sin x + 71\cos x)e^x$.

22. Решить уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = 4 + (2e^x + 1)^2 + \sin 2x.$$

Решение.

1. Решаем соответствующее однородное уравнение.

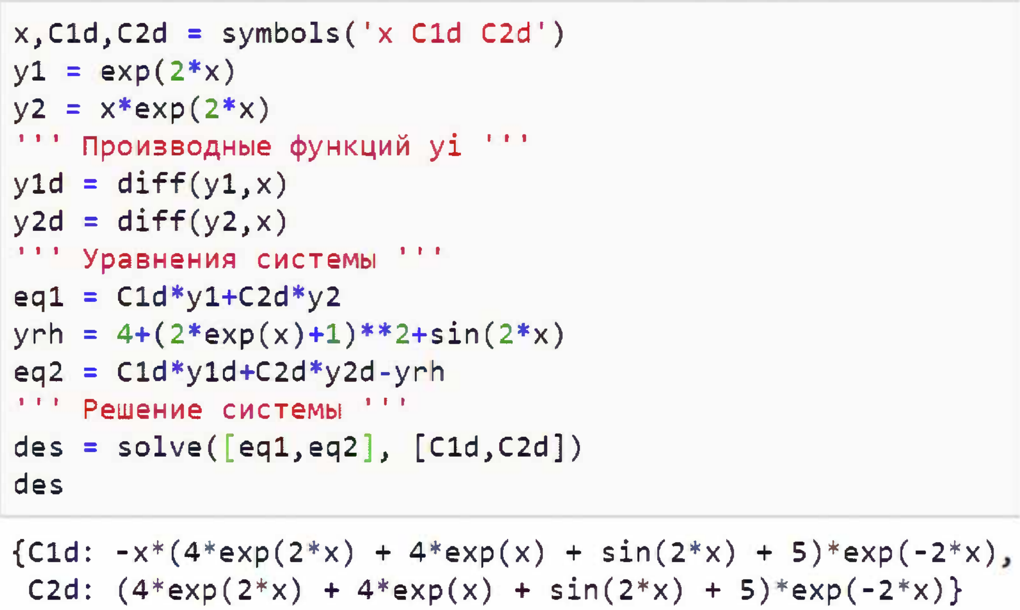
```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = diff(y(x),x,2)-4*diff(y(x),x)+4*y(x)
dsolve(eq,y(x))
```

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{2x}$$

Фундаментальная снстема решеннй однородного уравнения состоит из функций: $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = xe^{2x}$. Общее решение однородного уравнения: $y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 xe^{2x}$.

2. Частное решение неодиородного уравнеиня ищем методом варнацни перемеиных. Для определения функций $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ составляем систему уравненнй

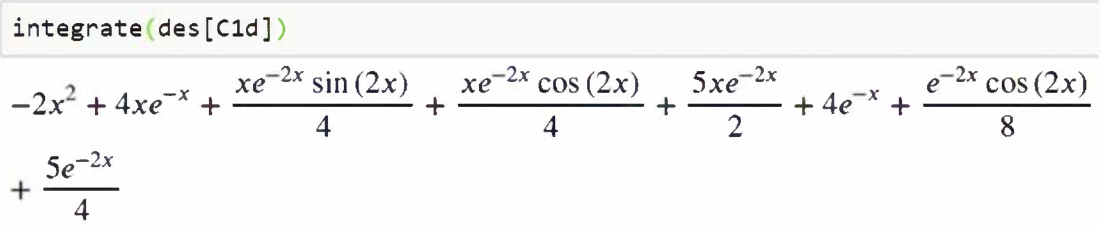
$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = 4 + (2e^x + 1)^2 + \sin 2x = 0. \end{cases}$$



```
x,C1d,C2d = symbols('x C1d C2d')
y1 = exp(2*x)
y2 = x*exp(2*x)
''' Производные функций yi '''
y1d = diff(y1,x)
y2d = diff(y2,x)
''' Уравнения системы '''
eq1 = C1d*y1+C2d*y2
yrh = 4+(2*exp(x)+1)**2+sin(2*x)
eq2 = C1d*y1d+C2d*y2d-yrh
''' Решение системы '''
des = solve([eq1,eq2], [C1d,C2d])
des
```

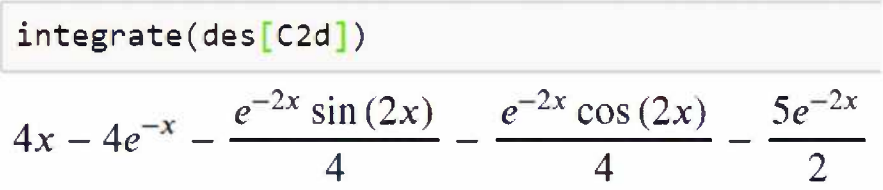
```
{C1d: -x*(4*exp(2*x) + 4*exp(x) + sin(2*x) + 5)*exp(-2*x),
 C2d: (4*exp(2*x) + 4*exp(x) + sin(2*x) + 5)*exp(-2*x)}
```

Интегрируя, находнм функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$.



```
integrate(des[C1d])
```

$$-2x^2 + 4xe^{-x} + \frac{xe^{-2x}\sin(2x)}{4} + \frac{xe^{-2x}\cos(2x)}{4} + \frac{5xe^{-2x}}{2} + 4e^{-x} + \frac{e^{-2x}\cos(2x)}{8} + \frac{5e^{-2x}}{4}$$



```
integrate(des[C2d])
```

$$4x - 4e^{-x} - \frac{e^{-2x}\sin(2x)}{4} - \frac{e^{-2x}\cos(2x)}{4} - \frac{5e^{-2x}}{2}$$

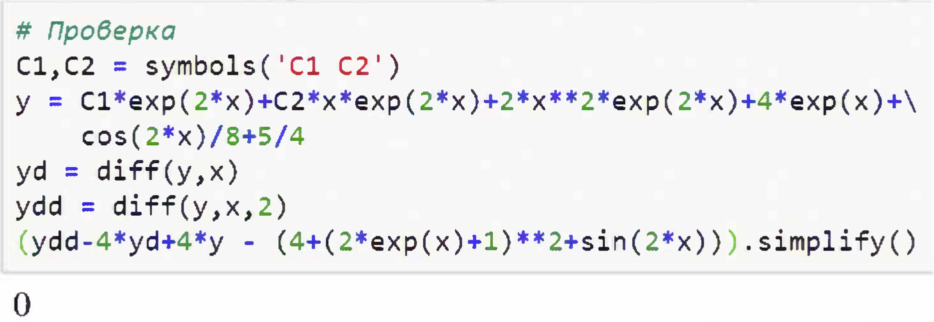
Для частного решения $y_ч$ используем выражение:

$$y_ч = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)xe^{2x}.$$

Подставляя выражения для $C_1(x)$ и $C_2(x)$, после унрощеиий получаем:

$$y_ч = 2x^2e^{2x} + 4e^x + \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{5}{4}.$$

3. Общее решение исходного уравнения имеет вид: $y = y_0 + y_ч$. Для полученного решения выполним проверку. Для этого подставим решение в исходное уравнение, приведенное к нулевой правой части.



```
# Проверка
C1,C2 = symbols('C1 C2')
y = C1*exp(2*x)+C2*x*exp(2*x)+2*x**2*exp(2*x)+4*exp(x)+\
    cos(2*x)/8+5/4
yd = diff(y,x)
ydd = diff(y,x,2)
(ydd-4*yd+4*y - (4+(2*exp(x)+1)**2+sin(2*x))).simplify()
```

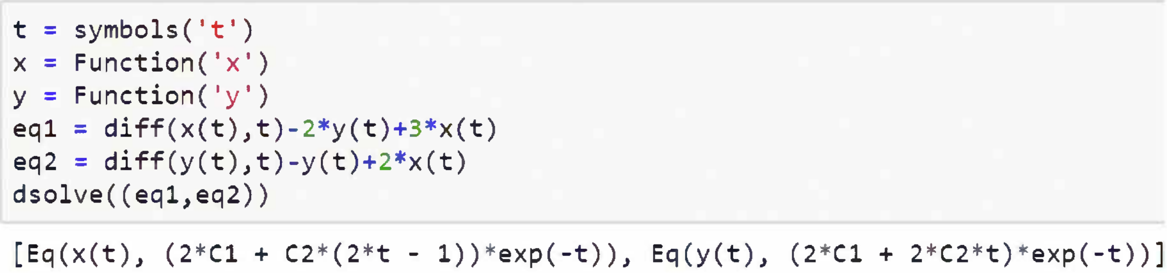
```
0
```

Ответ: $C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + 2x^2e^{2x} + 4e^x + \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{5}{4}$.

23. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x. \end{cases}$$

Решение.



```
t = symbols('t')
x = Function('x')
y = Function('y')
eq1 = diff(x(t),t)-2*y(t)+3*x(t)
eq2 = diff(y(t),t)-y(t)+2*x(t)
dsolve((eq1,eq2))
```

```
[Eq(x(t), (2*C1 + C2*(2*t - 1))*exp(-t)), Eq(y(t), (2*C1 + 2*C2*t)*exp(-t))]
```

Ответ: $\begin{cases} x = (2C_1 + C_2(2t-1))e^{-t}, \\ y = (2C_1 + 2C_2t)e^{-t}. \end{cases}$

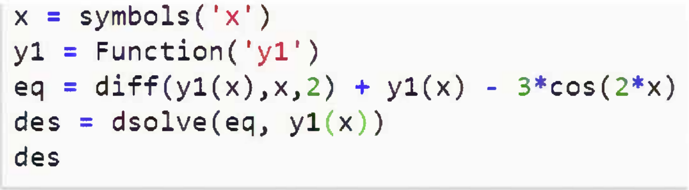
24. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2(x) + \sin 2x, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1(x) + \cos 2x. \end{cases}$$

Решение. Выражение для функции $y_2(x)$ из первого уравнения подставляем во второе. В результате получаем для функции $y_1(x)$ дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y_1'' + y_1 = 3\cos 2x.$$

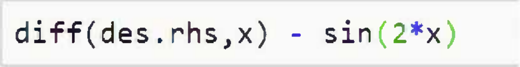
Находим его решение:



```
x = symbols('x')
y1 = Function('y1')
eq = diff(y1(x),x,2) + y1(x) - 3*cos(2*x)
des = dsolve(eq, y1(x))
des
```

$y_1(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) - \cos(2x)$

Вычислив производную от функции $y_1(x)$, найдем $y_2(x)$.



```
diff(des.rhs,x) - sin(2*x)
```

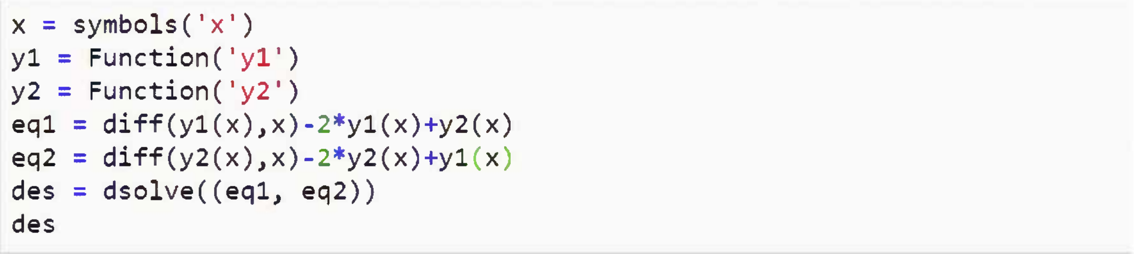
$C_1 \cos(x) - C_2 \sin(x) + \sin(2x)$

Ответ: $\begin{cases} y_1 = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \cos 2x, \\ y_2 = C_1 \cos x - C_2. \end{cases}$

25. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_2 - y_1 - 5e^x \sin x. \end{cases}$$

Решение. 1. Решаем соответствующую однородную систему.



```
x = symbols('x')
y1 = Function('y1')
y2 = Function('y2')
eq1 = diff(y1(x),x)-2*y1(x)+y2(x)
eq2 = diff(y2(x),x)-2*y2(x)+y1(x)
des = dsolve((eq1, eq2))
des
```

```
[Eq(y1(x), -C1*exp(3*x) - C2*exp(x)), Eq(y2(x), C1*exp(3*x) - C2*exp(x))]
```

В полученном решении, для удобства, поменяем знаки. Общее решение однородной системы:

$$y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 e^x, \qquad y_2 = -C_1 e^{3x} + C_2 e^x.$$

или, в векторном виде: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathrm{C}_1 \begin{pmatrix} e^{3x} \\ -e^{3x} \end{pmatrix} + \mathrm{C}_2 \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}$.

Фундаментальную систему решений образуют векторы $y_{1f} = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ -e^{3x} \end{pmatrix}$ и $y_{2f} = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}$.

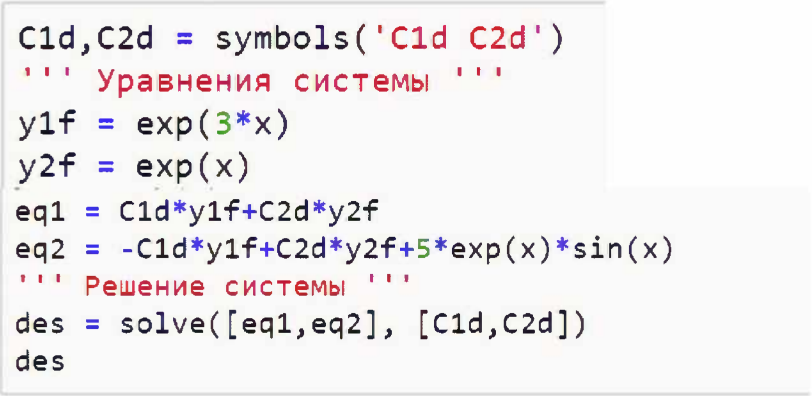
2. Частное решение неоднородной системы ищем методом вариации постоянных. Функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$C_1'(x) y_{1f} + C_2'(x)\, y_{2f} = f$$

или

$$\begin{cases} C_1' e^{3x} + C_2' e^x = 0, \\ -C_1' e^{3x} + C_2' e^x = -5e^x \sin x. \end{cases}$$

Решаем полученную систему.



```
C1d,C2d = symbols('C1d C2d')
''' Уравнения системы '''
y1f = exp(3*x)
y2f = exp(x)
eq1 = C1d*y1f+C2d*y2f
eq2 = -C1d*y1f+C2d*y2f+5*exp(x)*sin(x)
''' Решение системы '''
des = solve([eq1,eq2], [C1d,C2d])
des
```

```
{C1d: 5*exp(-2*x)*sin(x)/2, C2d: -5*sin(x)/2}
```

Интегрируя, находим функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

```
integrate(des[C1d])
```

$$-e^{-2x}\sin(x)-\frac{e^{-2x}\cos(x)}{2}$$

```
integrate(des[C2d])
```

$$\frac{5\cos(x)}{2}$$

Строим частное решение.

$$y_ч = C_1(x)y_{1f}+C_2(x)y_{2f} =$$

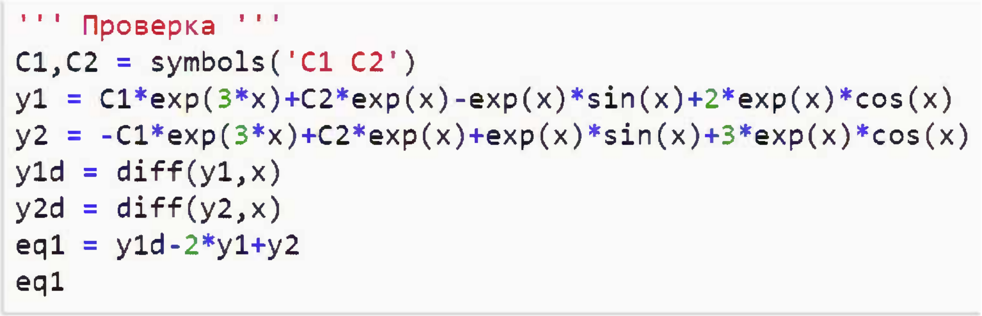
$$=\left(-e^{-2x}\sin x-\frac{1}{2}e^{-2x}\cos x\right)\begin{pmatrix}e^{3x}\\-e^{3x}\end{pmatrix}+\frac{5}{2}\cos x\begin{pmatrix}e^{x}\\e^{x}\end{pmatrix};$$

$$y_{ч1}=\left(-e^{-2x}\sin x-\frac{1}{2}e^{-2x}\cos x\right)e^{3x}+\frac{5}{2}\cos x\cdot e^{x}=-e^{x}\sin x+2e^{x}\cos x;$$

$$y_{ч2}=-\left(-e^{-2x}\sin x-\frac{1}{2}e^{-2x}\cos x\right)e^{3x}+\frac{5}{2}\cos x\cdot e^{x}=e^{x}\sin x+3e^{x}\cos x.$$

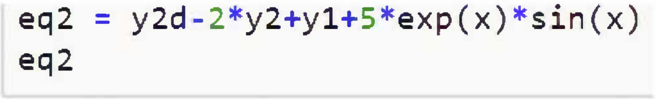
3. Суммируя общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного, получим окончательный ответ.

Выполним проверку, подставив полученные решения в каждое из уравнений системы.



```
''' Проверка '''
C1,C2 = symbols('C1 C2')
y1 = C1*exp(3*x)+C2*exp(x)-exp(x)*sin(x)+2*exp(x)*cos(x)
y2 = -C1*exp(3*x)+C2*exp(x)+exp(x)*sin(x)+3*exp(x)*cos(x)
y1d = diff(y1,x)
y2d = diff(y2,x)
eq1 = y1d-2*y1+y2
eq1
```

0



```
eq2 = y2d-2*y2+y1+5*exp(x)*sin(x)
eq2
```

0

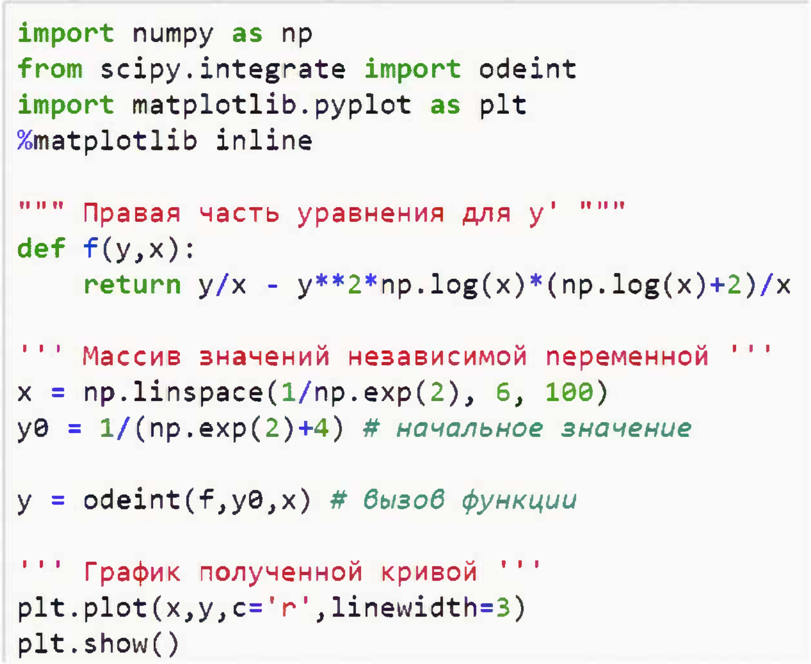
Ответ: $\begin{cases} y_1 = C_1e^{3x} + C_2e^x + e^x(2\cos x - \sin x), \\ y_2 = -C_1e^{3x} + C_2e^x + e^x(3\cos x + \sin x). \end{cases}$

26. Найти численное решение задачи Коши

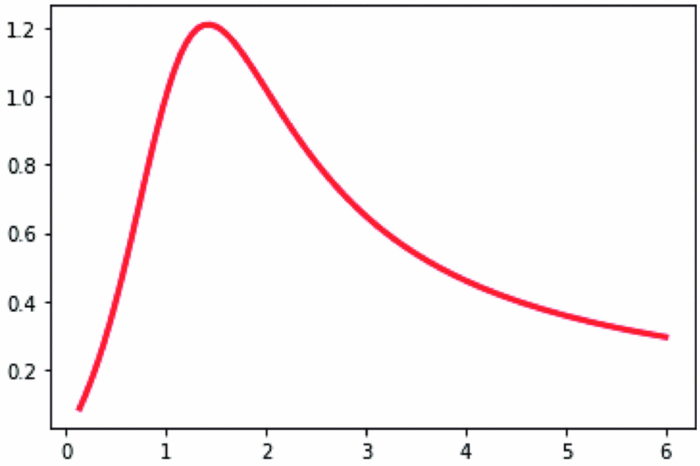
$$xy' - y + y^2(\ln x + 2)\ln x = 0, \quad y\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2+4}$$

на отрезке $\left[\frac{1}{e^2}; 6\right]$. Сравнить с точным решением задачи.

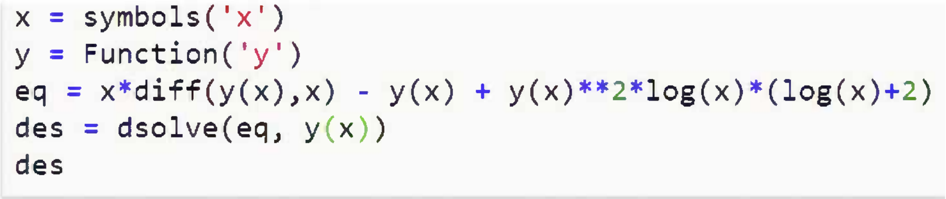
Решение. Решаем, используя функцию odeint() модуля scipy.integrate. Строим график полученной функции в matplotlib.



```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

""" Правая часть уравнения для y' """
def f(y,x):
    return y/x - y**2*np.log(x)*(np.log(x)+2)/x

''' Массив значений независимой переменной '''
x = np.linspace(1/np.exp(2), 6, 100)
y0 = 1/(np.exp(2)+4) # начальное значение

y = odeint(f,y0,x) # вызов функции

''' График полученной кривой '''
plt.plot(x,y,c='r',linewidth=3)
plt.show()
```



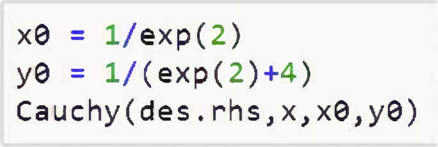
Данная задача допускает точное решение (уравнение Бернулли). Общее решение:



```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = x*diff(y(x),x) - y(x) + y(x)**2*log(x)*(log(x)+2)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

$$y(x) = \frac{x}{C_1 + x\log(x)^2}$$

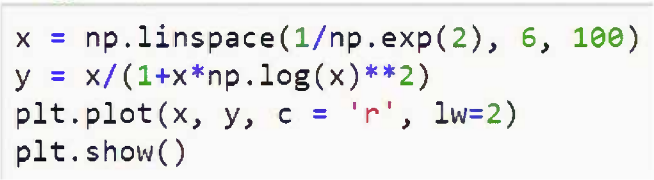
Находим частное решение:



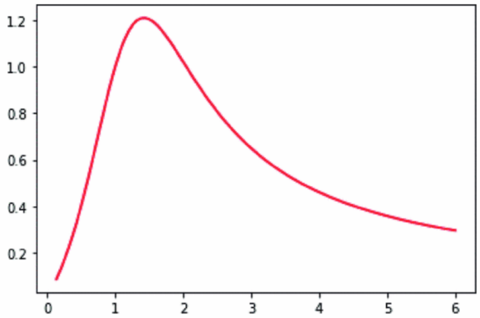
```
x0 = 1/exp(2)
y0 = 1/(exp(2)+4)
Cauchy(des.rhs,x,x0,y0)
```

```
[1]
```

Решение является функция $y = \frac{x}{1+x\ln^2|x|}$. Построим ее график на отрезке $\left[\frac{1}{e^2}; 6\right]$.



```
x = np.linspace(1/np.exp(2), 6, 100)
y = x/(1+x*np.log(x)**2)
plt.plot(x, y, c = 'r', lw=2)
plt.show()
```



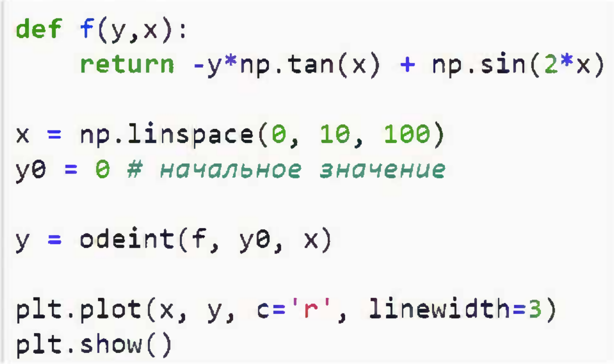
Графики численного и точного решения идентичны.

27. Найти численное решение задачи Коши

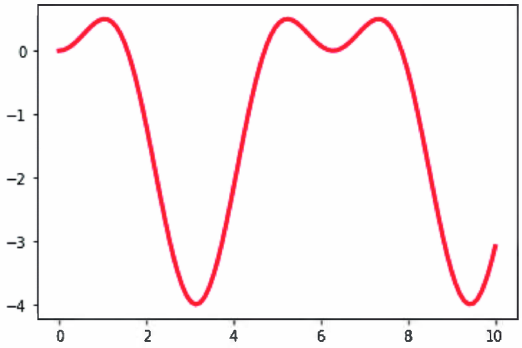
$$y' + y\text{tg}x = \sin 2x, \quad y(0) = 0$$

на отрезке $[0; 10]$. Сравнить с точным решением задачи.

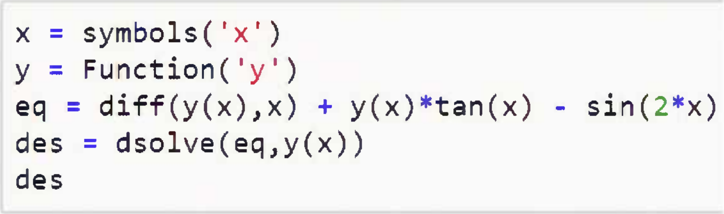
Решение.



```
def f(y,x):
    return -y*np.tan(x) + np.sin(2*x)

x = np.linspace(0, 10, 100)
y0 = 0 # начальное значение

y = odeint(f, y0, x)

plt.plot(x, y, c='r', linewidth=3)
plt.show()
```



Аналитическое общее решение:



```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = diff(y(x),x) + y(x)*tan(x) - sin(2*x)
des = dsolve(eq,y(x))
des
```

$y(x) = (C_1 - 2\cos(x))\cos(x)$

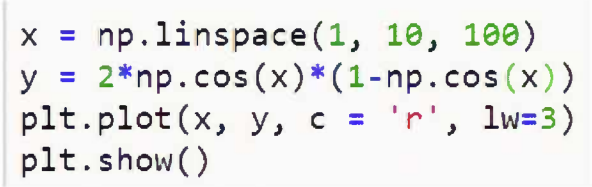
Значение постоянной частного решения:

```
x0 = 0
y0 = 0
Cauchy(des.rhs,x,x0,y0)
```

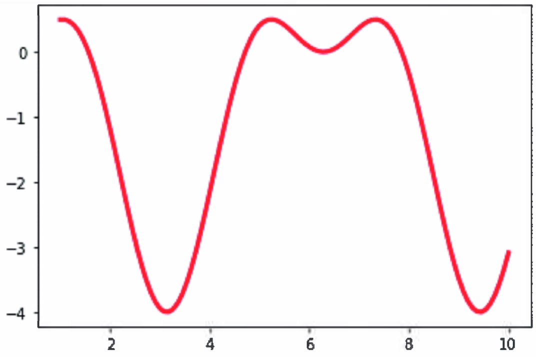
```
[2]
```

Решение: $y = 2\cos x(1 - \cos x)$.

График точного решения:



```
x = np.linspace(1, 10, 100)
y = 2*np.cos(x)*(1-np.cos(x))
plt.plot(x, y, c = 'r', lw=3)
plt.show()
```



28. Найти численное решение задачи Коши дифференциального уравнения третьего порядка

$$x^2y''' + \frac{1}{x+1}y'' + 2y = \frac{x^2}{x+2}, \quad y(0) = 0, \ \ y'(0) = -2, \ \ y''(0) = -0.5$$

на отрезке $[0; 20]$.

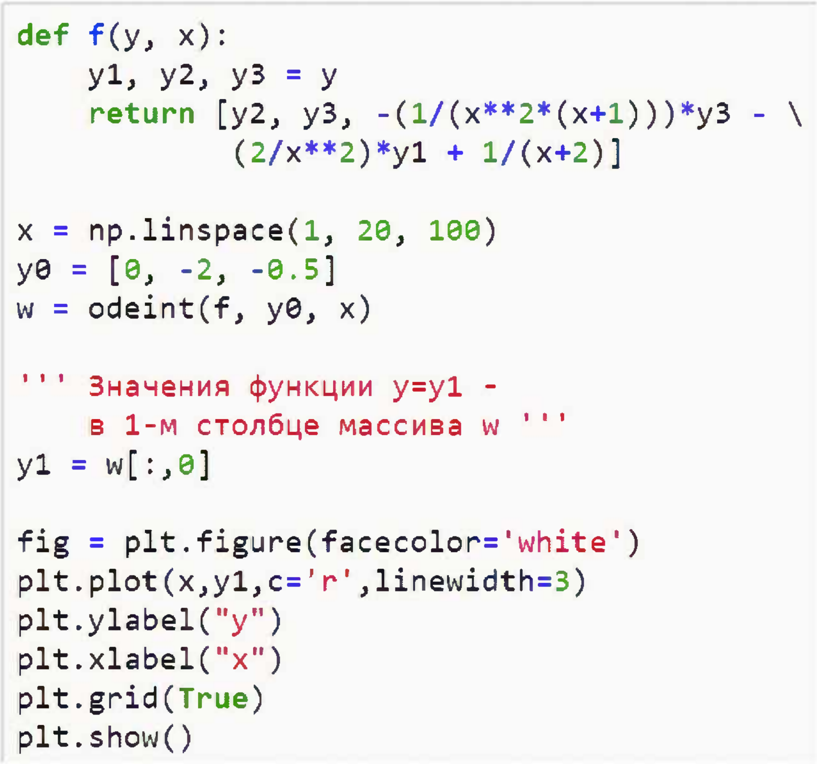
Решение. Записываем задачу в виде системы дифференциальных уравнений. Введем иовые переменные: $y_1 = y,\ y_2 = y', y_3 = y''$. Тогда

$$y_3' = y''' = -\frac{y_3}{x^2(x+1)} - \frac{2y_1}{x^2} + \frac{1}{x+2},$$

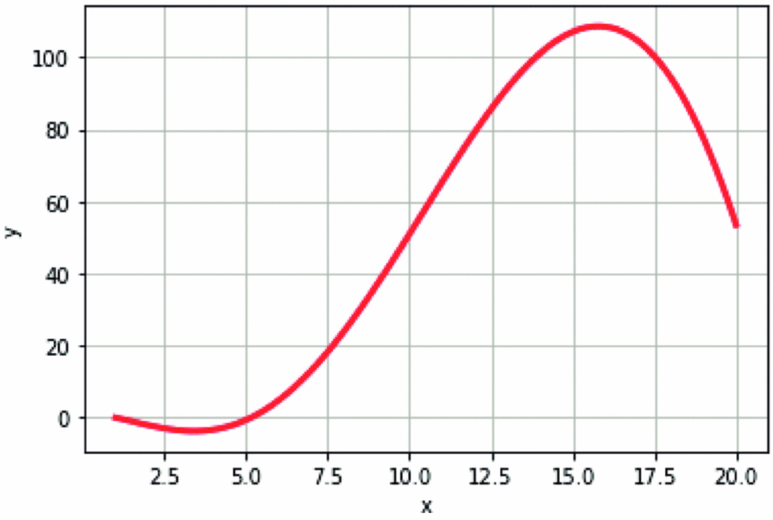
$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = -2, \ y_3(0) = -0.5.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = -\frac{y_3}{x^2(x+1)} - \frac{2y_1}{x^2} + \frac{1}{x+2}, \end{cases} \qquad y_1(0) = 0,\ y_2(0) = -2, y_3(0) = -0.5.$$



```
def f(y, x):
    y1, y2, y3 = y
    return [y2, y3, -(1/(x**2*(x+1)))*y3 - \
            (2/x**2)*y1 + 1/(x+2)]

x = np.linspace(1, 20, 100)
y0 = [0, -2, -0.5]
w = odeint(f, y0, x)

''' Значения функции y=y1 -
    в 1-м столбце массива w '''
y1 = w[:,0]

fig = plt.figure(facecolor='white')
plt.plot(x,y1,c='r',linewidth=3)
plt.ylabel("y")
plt.xlabel("x")
plt.grid(True)
plt.show()
```

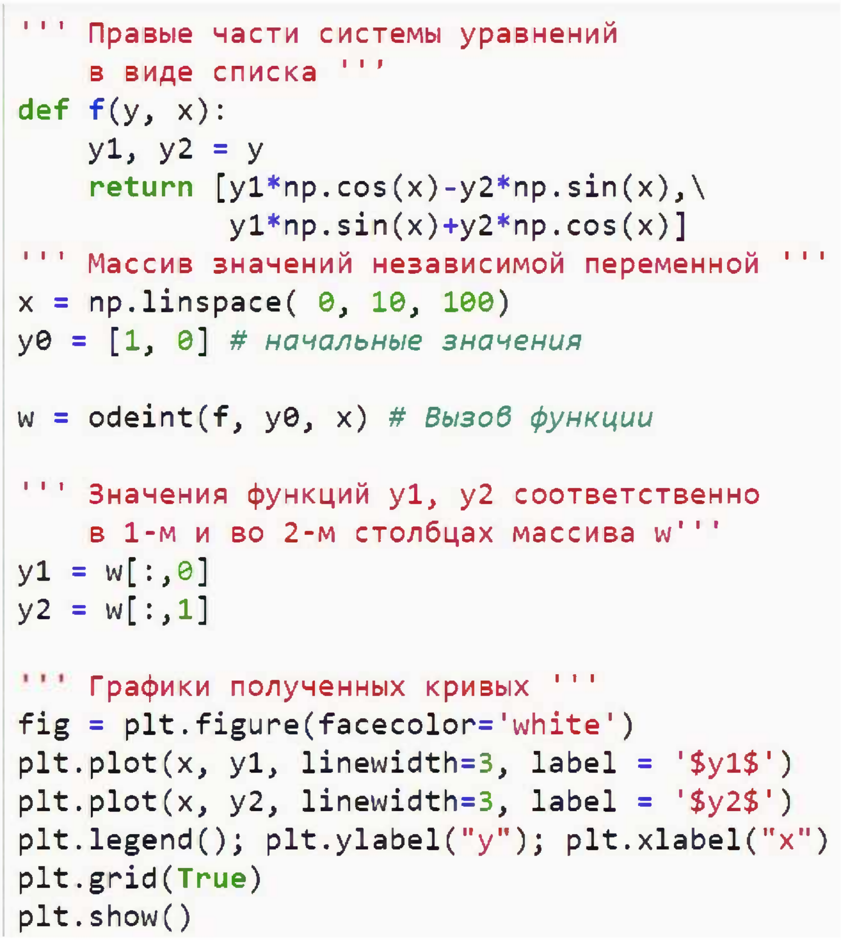


29. Найти числеииое решеиие задачи Коши системы уравиений

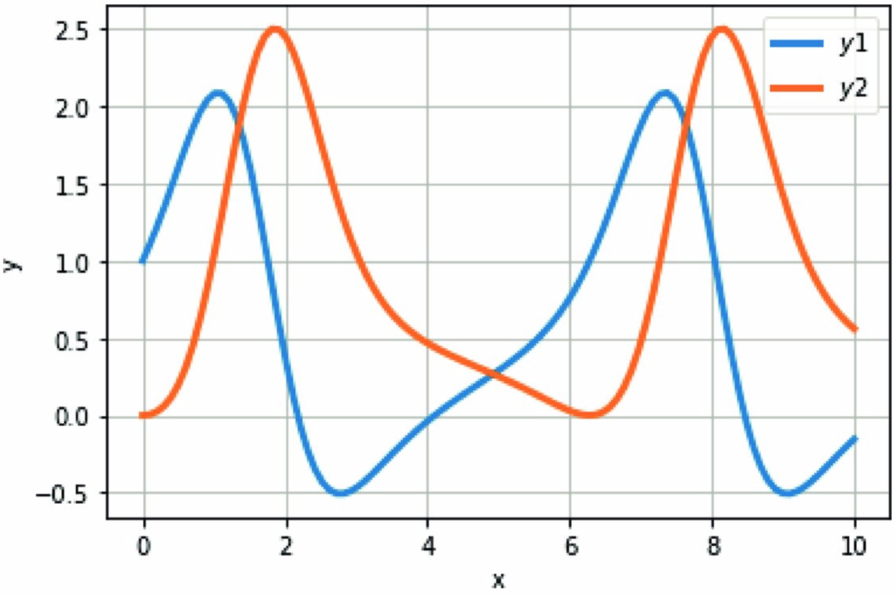
$$\begin{cases} y_1' = y_1 \cos x - y_2 \sin x, \\ y_2' = y_1 \sin x + y_2 \cos x, \end{cases} \quad y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0$$

на отрезке $[0;10]$.

Решение. Решаем, иснользуя функцию odeint() и строим график.



```
''' Правые части системы уравнений
    в виде списка '''
def f(y, x):
    y1, y2 = y
    return [y1*np.cos(x)-y2*np.sin(x),\
            y1*np.sin(x)+y2*np.cos(x)]
''' Массив значений независимой переменной '''
x = np.linspace( 0, 10, 100)
y0 = [1, 0] # начальные значения

w = odeint(f, y0, x) # Вызов функции

''' Значения функций y1, y2 соответственно
    в 1-м и во 2-м столбцах массива w'''
y1 = w[:,0]
y2 = w[:,1]

''' Графики полученных кривых '''
fig = plt.figure(facecolor='white')
plt.plot(x, y1, linewidth=3, label = '$y1$')
plt.plot(x, y2, linewidth=3, label = '$y2$')
plt.legend(); plt.ylabel("y"); plt.xlabel("x")
plt.grid(True)
plt.show()
```



30. Функции спроса D н предложения S, выражающие завпсимость от цены p и ее производных, имеют вид:

$$D(t) = 3p'' - p' - 200p + 600, \quad S(t) = 4p'' + p' + 201p - 603.$$

Найти зависимость равновесной цены от временп.

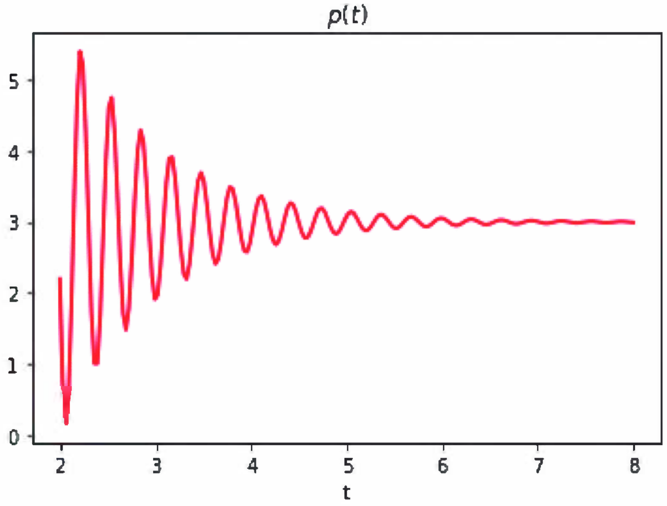
Решение. Записывая условпе равповесной цены ($D = P$), получим дифференцпальное уравнение $p'' + 2p' + 401p - 1203 = 0$. Его решенне:

```
t = symbols('t')
p = Function('p')
eq = diff(p(t),t,2)+2*diff(p(t),t)+401*p(t)-1203
des = dsolve(eq,p(t))
des
```

$$p(t) = (C_1 \sin(20t) + C_2 \cos(20t))\, e^{-t} + 3$$

Постронм график завиcпмости полученных интегральных кривых от временп (построим нри некоторых значениях ностоянных; можно будет видеть, что общий характер кривых не зависит от конкретных значений C_i).

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
t = np.linspace(2,8,200)
y = 3 + np.exp(-t)*(10*np.sin(20*t)+20*np.cos(20*t))
plt.plot(t, y, c = 'r', lw=2)
plt.xlabel("t")
plt.title("$p(t)$")
plt.show()
```



Видим, что при $t \to \infty$ цепа $p(t) \to 3$; все интегральные кривые пмеют горпзонтальную асимптоту $p = 3$. Все цены стремятся к установнвшейся цене $p = 3$ с колебаииями около нее, затухающими со временем.

31. Найти функцию спроса, если известно, что прн спросе $D = 1$ единнц, цена p составляла 18 депежиых единиц, а эластичность спроса имеет вид: $E_p(D) = \frac{p}{p-20}$.

Решение.

$$E_p(D) = \frac{pdD}{Ddp}; \quad \frac{pdD}{Ddp} = \frac{p}{p-20}; \quad \frac{dD}{D} = \frac{dp}{p-20}; \quad D = C(p-20);$$

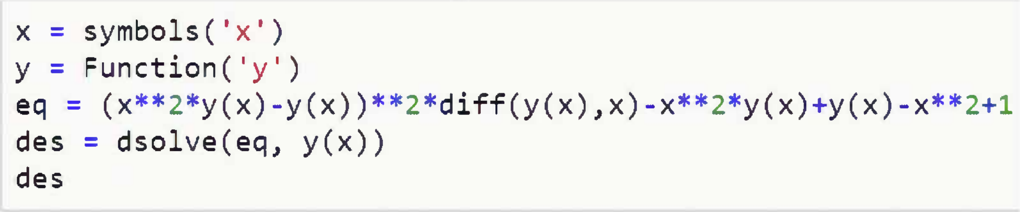
$$1 = C(18-20); \quad C = -0.5; \quad D = -0.5(p-20) = 10 - 0.5p.$$

Ответ: $D = 10 - 0.5p$.

32. Решить задачу Коши

$$(x^2y - y)^2y' = x^2y - y + x^2 - 1, \quad y(\infty) = 0.$$

Решение. Находим общее решение.



```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = (x**2*y(x)-y(x))**2*diff(y(x),x)-x**2*y(x)+y(x)-x**2+1
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

$$\frac{y^2(x)}{2} - y(x) - \frac{\log(x-1)}{2} + \frac{\log(x+1)}{2} + \log(y(x)+1) = C_1$$

Применяя формулу для разностн логарифмов, получаем решеине в виде

$$\frac{1}{2}y^2 - y + \ln|y+1| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = C_1.$$

Ищем частное решенне. Дробь $\frac{x+1}{x-1}$ при $x \to \infty$ стремится к 1, следовательио, $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 0$. Получаем уравнеиие $\ln|0+1| + 0 = C_1$; $C_1 = 0$.

Тот же результат можно получить, используя функцию Cauchy() (текст функции иа с. 25).

```
Cauchy(des,oo,0)
```

```
[0]
```

В окончательном ответе преобразуем выражение $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$, используя свойства логарифма.

Ответ: $\frac{y^2}{2} - y + \ln|y+1| = \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

33. Решить уравнение

$$\int_0^x (x-t)y(t)dt = 2x + \int_0^x y(t)dt.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\int_0^x xy(t)dt - \int_0^x ty(t)dt = 2x + \int_0^x y(t)dt.$$

Используем свойство: производная от интеграла ио верхнему пределу равна подынтегральпой фупкции. Следовательно, если ввести функцию

$$z(x) = \int_0^x y(t)dt,$$

то для ее производной будем нметь: $z'(x) = y(x)$.

Тогда интеграл от функции $ty(t)$ можно выразить через функцию $z(x)$, с помощью иптегрнрованпя по частям

$$(u = t, dv = y(t)dt = z'(t)dt = dz(t))$$

$$\int_0^x ty(t)dt = \int_0^x tdz(t) = (t \cdot z(t))|_0^x - \int_0^x z(t)dt = xz(x) - \int_0^x z(t)dt.$$

В результате исходное уравнение приобретает вид:

$$xz(x) - xz(x) + \int_0^x z(t)dt = 2x + z(x).$$

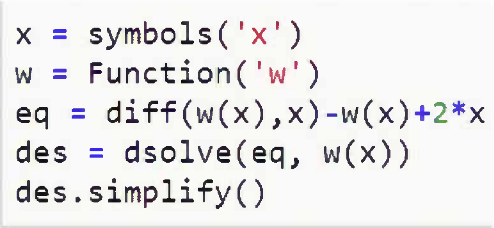
Выполним еще одну замепу:

$$\int_0^x z(t)dt = w(x), \qquad z(x) = w'(x), \;\; w(0) = 0.$$

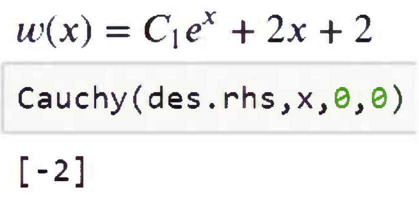
Получаем следующую задачу Коши:

$$w(x) = 2x + w'(x), \;\; w(0) = 0.$$

Находим общее решение и значение постоянной для частного решения.



```
x = symbols('x')
w = Function('w')
eq = diff(w(x),x)-w(x)+2*x
des = dsolve(eq, w(x))
des.simplify()
```



$$w(x) = C_1 e^x + 2x + 2$$

```
Cauchy(des.rhs,x,0,0)
```

```
[-2]
```

Частное решение: $w(x) = 2x - 2e^x + 2$. Находим $z(x)$, затем $y(x)$.

$$z(x) = w'(x) = 2 - 2e^x, \qquad y(x) = z'(x) = -2e^x.$$

Ответ: $y = -2e^x$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить дифференциальное уравнение $y' = \frac{1}{x}$.

Ответ: $y = C_1 + \ln|x|$.

2. Решить задачу Коши

$$y' = \frac{2\ln x + \ln^2 x}{x}, \quad y(1) = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{\ln^3 x+1}{3} + \ln^2 x$.

3. Решить дифференциальиое уравнение $xdx + (x-1)dy = 0$.

Ответ: $y = C_1 - x - \ln|x-1|$.

4. Определпть тип дифференциального уравнения: $\frac{y'}{x} = e^{x^2+y}$.

Ответ: с разделяющимися переменными.

5. Решить дифференциальное уравнение $y' = 2x + xy$.

Ответ: $y = C_1 e^{\frac{x^2}{2}} - 2$.

6. Найти решение уравнения $(1+x^2)dy - 2xydx = 0$, удовлетворяющего условию $y(1) = 2$.

Ответ: $y = x^2 + 1$.

7. Определить тии дифференциального уравнения

$$(y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0.$$

Ответ: однородное.

8. Найти решение дпфференциального уравнения $xdy - (x+y)dx$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

Ответ: $y = x(\ln|x| + 1)$.

9. Решить уравнение $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$.

Ответ: $y = x\mathrm{sh}(C_1 + \ln|x|) = \frac{C_2^2x^2-1}{2C_2}$.

10. Определить тип дифференциального уравнения

$$y' = \left(\frac{2x + 4y - 5}{4x - y}\right)^3.$$

Ответ: приводящееся к однородному.

11. Решить уравнение

$$(x + y - 2)y' = y - 1.$$

Ответ: $(y - 1)\ln|y - 1| + Cy - x = C$.

12. Определить тип дифференциального уравнения

$$(x - 2)y' - \frac{y}{x + 1} = x^3.$$

Ответ: линейное.

13. Решить уравнение $xy' - 2y = 2x^4$.
Ответ: $y = x^4 + Cx^2$.

14. Решить задачу Коши $xy' - y = x^3,\ \ y(1) = \frac{3}{2}$.

Ответ: $y = \frac{x^3}{2} + x$.

15. Найти то решение уравнения $y'\sin 2x = 2(y + \cos x)$, которое остается ограниченным при $x \to \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $y = tgx - \frac{1}{\cos x}$.

16. Решить задачу Коши $\frac{y'}{\cos x} + y = \sin x,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Ответ: $y = e^{1-\sin x} + \sin x - 1$.

17. Определить тип дифференциального уравнения

$$(\ln y - 3x)y' = y^2.$$

Ответ: линейное относительно функции $x(y)$.

18. Решить уравнение $2yy' = \frac{1}{y^2 + x}$.

Ответ: $Ce^{y^2} - y^2 = x + 1$.

19. Решить задачу Коши

$$(2x + y - 4\ln y)y' = y,\ \ y(-1) = 1.$$

Ответ: $y^2 + y = 2\ln|x| - x + 1$.

20. Решить уравнение $y^2 dx = \left(x + ye^{-\frac{1}{y}}\right)dy$.

Ответ: $(C + \ln|y|)e^{-\frac{1}{y}} = x$.

21. Определить тип дпфференциальпого уравнепия

$$(x-2)y' - \frac{y}{x+1} = x^3y^2.$$

Ответ: уравиение Бернулли.

22. Решить уравнение $y' - \frac{y}{x} = x^4y^2$.

Ответ: $y = \frac{6x}{C-x^6}$.

23. Решить задачу Коши

$$y' - 7y = e^{3x}y^2, \quad y(0) = 2.$$

Ответ: $y = \frac{10e^{7x}}{6-e^{10x}}$.

24. Определить тип дифференциального уравнеиия

$$y' - \frac{y}{x} = x^3y^2 + x^2.$$

Ответ: уравнение Риккати.

25. Решить уравнение $x^2y' + xy = 4 - x^2y^2$.

Ответ: $y = \frac{2(Cx^4+1)}{x(Cx^4-1)}$.

26. Решить уравнение $xy' = (2x+1)y + y^2 + x^2$.

Ответ: $y = \frac{x(Cx+C-1)}{Cx-1}$.

27. Решить задачу Коши

$$y' + 6y^2 = \frac{1}{x^2}, \quad y(1) = 3.$$

Ответ: $y = \frac{8x^5-6x+10}{2x(8x^5-6)}$.

28. Онределить тип дифференциального уравнения

$$(\sin 2x - 2\cos(x+y))dx = 2\cos(x+y)dy.$$

Ответ: в полных дифференциалах.

29. Решить уравнение

$$(3x^2y - 4xy^2)dx + (x^2 - 4x^2y + 12y^3)dy = 0.$$

Ответ: $3y^4 + x^2y - 2x^2y^2 = C$.

30. Решить задачу Коши

$$(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0, \quad y(0) = 0.$$

Ответ: $e^x + xy + x\sin y + e^y = 2$.

31. Решить задачу Коши

$$e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0, \quad y(1) = 0.$$

Ответ: $y + xe^{-y} = 1$.

32. Решить задачу Коши

$$3^{(x^2+y)}dy + xdx = 0, \; y(\infty) = 0.$$

Ответ: $y = \log_3\left(1 + \frac{3^{-x^2}}{2}\right)$.

33. Решить задачу Коши

$$x^2y' + 1 = y - xy', \; y(\infty) = 3.$$

Ответ: $y = \frac{3x+1}{x+1}$.

34. Решить задачу Коши

$$(x^2y - y)^2y' = x^2y - y + x^2 - 1, \; y(\infty) = 0.$$

Ответ: $\frac{y^2}{2} - y + \ln|y + 1| = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

35. Решить задачу Коши

$$y' = \frac{y^2+1}{x^2+1}, \; y(+\infty) = 0.$$

Ответ: $y = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}x\right)$.

36. Определить тип уравнения

$$x^2(x+1)y'' + 3y' - 2xy = 0.$$

Ответ: Линейное однородное уравнение второго порядка.

37. Найти общее решение уравнения

$$xy'' - (2x+1)y' + 2y = 0,$$

если известно одно его частное решение $y_1 = 2x + 1$.

Ответ: $y = C_1e^{2x} + C_2(2x+1)$.

38. Найти общее решение уравнения

$$(e^x + 1)y'' - 2y' - e^xy = 0,$$

если известно одно его частное решение $y_1 = e^x - 1$.

Ответ: $y = \frac{C_1 - C_2 + C_2e^{2x}}{2(e^x+1)} = C_3(e^x - 1) + \frac{C_4}{e^x+1}$.

39. Определить тип уравнения

$$y'' + \sin x(1 + x)y = e^x.$$

Ответ: Линейное неоднородное уравнение второго порядка.

40. Найти общее решение уравнения

$$(2x+1)y''+4xy'-4y=(2x+1)^3,$$

если известно одно частное решение соответствующего однородного уравнения: $y_1=x$.

Ответ: $y=C_1e^{-2x}+C_2x+x^3+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

41. Найти общее решение уравнения

$$xy''-(x+1)y'-2(x-1)y=x^3e^x,$$

если известно одно частное решение соответствующего однородного уравнения $y_1=e^{-x^2}$.

Ответ: $y=C_1(3x+1)e^{-x}+C_2e^{2x}-\frac{2x^2+3x+3}{4}e^x$.

42. Решить задачу Коши

$$x(2x+1)y''+2(x+1)y'-2y=x^3(2x+1)^2,$$

$$y(1)=\frac{2}{5},\ \ y'(1)=\frac{1}{2},$$

если известно одно частное решение соответствующего однородного уравнения $y_1=x+1$.

Ответ: $y=\frac{5x^6+3x^5+3x^2+3x+10}{60x}$.

43. Решить задачу Коши

$$(x^2-1)y''+(x-3)y'-y=x,$$

$$y(2)=-\frac{7}{6},\ \ y'(1)=\frac{13}{18},$$

если известно одно частное решение соответствующего однородного уравнения $y_1=x-3$.

Ответ: $y=\frac{3x^3-13x^2+4x+6}{4(x^2-1)}+\frac{(x-1)^2}{2(x+1)}\ln|x-1|$.

44. Решить уравнение $y''=4\ln x$.

Ответ: $y=2x^2\ln|x|-3x^2+C_1x+C_2$.

45. Решить задачу Коши

$$y^{(3)}=\sin x\cdot e^x,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1,\ \ y''(0)=1.$$

Ответ: $y=\frac{75x^2+145x+11}{125}+\frac{2}{125}e^{2x}\sin x-\frac{11}{125}e^{2x}\cos x$.

46. Найти решение $y(x)$ уравнения $x^4y''=-(2x+1)e^{\frac{1}{x}}$, для которого выполняются условия:

$$1)\ y(1)=1-e;\ \ \ 2)\ \lim_{x\to 0-}y(x)=1.$$

Ответ: $y = 1 - e^{\frac{1}{x}}$.

47. Определить тип уравнения

$$(2 - e^x)y' = (x + e^x)y''.$$

Ответ: допускающее понпжение порядка (не содержащее y).

48. Решить уравпение $y''' + y' = (\sin x - \cos x)e^x$.

Ответ: $y = C_1 + \left(C_2 - \frac{2}{5}e^x\right)\sin x + \left(C_3 - \frac{1}{5}e^x\right)\cos x$.

49. Решить уравиение $(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''$.

Ответ: $y = C_1\left(\frac{x^2}{2} - \sin x\right) + C_2 x + C_3$.

50. Решнть задачу Кошп

$$xy^{(3)} + y'' + x = 0,\ \ y(1) = 0,\ \ y'(1) = 1,\ \ y''(1) = 1.$$

Ответ: $y = \frac{4-3x-x^3}{12} + \frac{3}{2}x\ln|x|$.

51. Решить уравпение $x^3y'' + x^2y' = 1$.

Ответ: $y = C_1\ln|x| + \frac{1}{x} + C_2$.

52. Определить тпп уравнения

$$(y')^3 = \frac{y''}{y}$$

Ответ: допускающее понижеиие порядка (не содержащее x).

53. Решить уравиепие $2(y')^2 = (y - 1)y''$.

Ответ: $y = 1 - \frac{1}{C_1x + C_2}$; $\ \ y = C$.

54. Решить задачу Коши

$$yy'' - 2yy'\ln y = (y')^2,\ \ y(0) = y'(0) = 1.$$

Ответ: $y = e^{\operatorname{tg} x}$; $\ \ y = 1$.

55. Решить задачу Кошп

$$y''(1 + y) = 5(y')^2,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$$

Ответ: $x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(y+1)^4}$; $\ \ y = 0$.

56. Решить задачу Кошп

$$y''(1 + y) = y' + (y')^2,\ \ y(0) = y'(0) = 2.$$

Ответ: $y = 2e^x$; $\ \ y = 2$.

57. Решить задачу Коши

$$y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}},\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2.$$

Ответ: $y = (x + 1)^2$; $\ \ y = 1$.

58. Решить задачу Коши

$$y''\mathrm{tg}y = 2(y')^2,\ \ y(1) = \frac{\pi}{2},\ \ y'(1) = 2.$$

Ответ: $y = \mathrm{arcctg}(2 - 2x);\ \ y = \frac{\pi}{2}$.

59. Определить тип уравнения

$$y^{(4)} + 2y'' - \sqrt{3}y = 0.$$

Ответ: линейное однородное с постоянными коэффицнентами.

60. Определить тип уравнения

$$y''' - 5y'' + y - 6 = 0.$$

Ответ: линейное иеоднородное с постоянными коэффициентами.

61. Решить уравнение $y^{(4)} - y = 0$.

Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3\sin x + C_4\cos x$.

62. Решить задачу Коши

$$y^{(4)} - y^{(3)} = 0;\ \ y(1) = 4,\ \ y'(1) = 3,\ y''(1) = 2,\ y'''(1) = 0.$$

Ответ: $y = 2 + x + x^2$.

63. Решить уравнение $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$.

Ответ: $y = (C_1 + C_2x)\sin 2x + (C_3 + C_4x)\cos 2x$.

64. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}\sin x$.

Ответ: $y = C_1e^x + \Big(C_2 - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x\Big)e^{2x}$.

65. Решить задачу Коши

$$y''' - 7y'' + 6y' = 0;\ \ y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 30.$$

Ответ: $y = 5 - 6e^x + e^{6x}$.

66. Решить задачу Коши

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 0;\ \ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -14.$$

Ответ: $y = e^x - 3xe^x - e^{-3x}$.

67. Решить уравнение $y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}$.

Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{x}{4}e^x - \frac{e^x}{4} - xe^x + xe^x\ln|x|$.

68. Решить уравнение $y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x} + 10e^{3x}$.

Ответ:

$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{5}{9}e^{3x} + \frac{1}{9}\sin 3x \cdot \ln|\sin 3x| - \frac{1}{3}x\cos 3x$.

69. Решить уравнение $y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin^2 x} + 2x$.

Ответ: $y = e^x\left(C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x \cdot \ln|\mathrm{ctg}\frac{x}{2}| + 1\right) + x + 1.$

70. Решить задачу Коши

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2} + 4e^x; \quad y(1) = y'(1) = 0.$$

Ответ: $y = e^x(1 - 3x + 2x^2 - \ln|x|).$

71. Решить задачу Коши

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x} + 6e^{-x}; \quad y(1) = y'(1) = \frac{1}{e}.$$

Ответ: $y = e^{-x}(3 + 3x^2 + x(\ln|x| - 5).$

72. Решить задачу Коши

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} + 4\sin x; \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Ответ: $y = (x + 2)\sin x - 2x\cos x + \cos x \cdot \ln|\cos x|.$

73. Решить задачу Коши

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3} + 6e^{-2x}; \quad y(1) = \frac{2}{e^2},\ y'(1) = \frac{1}{e^2}.$$

Ответ: $y = \frac{6x^2 - x - 2}{2}e^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{2x}.$

74. Решить уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2} + e^{-x}.$$

Ответ: $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{e^{2x}}{2x} + \frac{e^{-x}}{9}.$

75. Решить систему уравненнй

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = -y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} y = C_1\cos x + C_2\sin x, \\ z = -C_1\sin x + C_2\cos x. \end{cases}$

76. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 4y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = C_1e^{10t} + C_2e^t, \\ y = C_1e^{10t} - 2C_2e^t. \end{cases}$

77. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y, \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = 3.$$

Ответ: $\begin{cases} x = 4e^{3t} - 4e^{-3t}, \\ y = 2e^{3t} + e - 3^{t}. \end{cases}$

78. Решить систему уравиенній

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t} - 4e^{3t} - e^{-t}, \\ y = \frac{1}{3} C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}. \end{cases}$

79. Решить систему уравнеиий:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 4y(t) + 4e^{-2t}, \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t). \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = C_1(\cos 2t + \sin 2t) + C_2(\cos 2t - \sin 2t) \\ y = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t + e^{-2t} \end{cases}$

80. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dx}{dt} - 3. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{t} + 3t, \\ y = C_2 e^{-t} + C_3 e^{t} \end{cases}$

81. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y - 2, \end{cases}$$

$$x(0) = 1, y(0) = -2.$$

Ответ: $\begin{cases} x = -3\cos t + 5\sin t + 4, \\ y = -4\cos t + \sin t + 2. \end{cases}$

82. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y + 3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 6y + 1, \end{cases}$$

$$x(0) = 6, y(0) = 5.$$

Ответ: $\begin{cases} x = 5e^{-2t}\cos 3t + 1, \\ y = e^{-2t}(4\cos t + 3\sin t) + 1. \end{cases}$

83. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 2e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + t^2, \end{cases}$$

$$x(0) = 1, y(0) = 2.$$

Ответ: $\begin{cases} x = 3e^t + te^t - t^2 - 2, \\ y = 3e^t + te^t - e^t - 2t. \end{cases}$

84. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y, \\ \dfrac{dz}{dt} = 15x - 7y + 4z, \end{cases}$$

$$x(0) = 10, y(0) = 10, z(0) = 5.$$

Ответ: $\begin{cases} x = 10e^{-t}, \\ y = 10e^{-t}, \\ z = 21e^{4t} - 16e^{-t}. \end{cases}$

85. Найти численное решение задачи Коши

$$y' + y = 1 + x, \quad y(-2) = e^2 - 2$$

на отрезке $[-2; 6]$. Сравнить графически полученный результат с точным решением.

Ответ: точное решение: $y = x + e^{-x}$.

86. Найти численное решение задачи Коши для уравнения Риккати

$$y' + y^2 = \frac{1}{2} + \cos x + \left(\sin x + \frac{x}{2}\right)^2, \quad y(-4) = -\sin 4 - 2$$

на отрезке $[-4;6]$. Сравннть графическн полученный результат с точным решеннем.

Для нахождення точного решения исиользовать, что у данного уравнения имеется частное решение $y=\sin x+\frac{x}{2}$.

Ответ: точное решенне: $y=\sin x+\frac{x}{2}$.

87. Найтн численное решение задачн Коши

$$y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\quad y(0)=0$$

на отрезке $[0;10]$. Сравнить графнчески иолученный результат с точным решением.

Ответ: точное решепне: $y=e^{-\sin x}+\sin x-1$.

88. Найти численное решенне задачн Коши

$$x^2y''+(x+1)y'-y=0,\quad y(1)=e+2,\ y'(1)=1.$$

на отрезке $[1;3]$.

89. Найти численное решенне задачи Коши

$$x^2y''-12y=0,\quad y(1)=2,\ y'(1)=1$$

на отрезке $[1;2]$. Сравнить графическн полученный результат с точным решением.

Ответ: точное решение: $y=x^4+\frac{1}{x^3}$.

90. Найтн численное решенне задачи Коши

$$y''+4xy'+(4x^2+2)y=0,\quad y(0)=y'(1)=0$$

на отрезке $[0;2.5]$.

91. Найтн численное решенне задачи Коши системы уравнений

$$\begin{cases} y_1'=2y_1+y_2+x+1, \\ y_2'=3y_1-4y_2+6x, \end{cases}\quad y_1(8)=0,\ y_2(8)=0.$$

на отрезке $[0;10]$.

92. Найтн численное решенне задачи Коши системы уравнений

$$\begin{cases} y_1'=xy_1+y_2, \\ y_2'=y_1-y_2, \end{cases}\quad y_1(0)=1,\ y_2(0)=0.$$

на отрезке $[0;2]$.

93. Функцин спроса D и предложения S в завнсимости от цены p имеют вид:

$$D=20-4p+2\frac{dp}{dt},\quad S=20-2p+4\frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p = 4$.

Ответ: $p = 5 - e^{-t}$.

94. Функции спроса D и предложения S в зависимости от цены p имеют вид:

$$D = 24 - 2p + 3\frac{dp}{dt}, \quad S = 16 - p + 4\frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p = 7$.

Найти $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)$. Построить график зависимости равновесной цены от времени.

Ответ: $p = 8 - e^{-t}$.

95. Функции спроса D и предложения S, выражающие зависимость от цены p и ее производных, имеют вид:

$$D(t) = 3p'' - p' - 2p + 18, \quad S = 4p'' + p' + 3p + 3.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени.

Ответ: $p(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$.

96. Количество продукции $Q(t)$, реализуемое в момент времени t, удовлетворяет дифференциальному уравнению $Q'(t) = 0{,}1 \cdot Q(t)$. Через какой промежуток времени t объем реализованной продукции увеличится на 70% по сравнению с величиной $Q(0)$?

Ответ: $t \approx$ 5,306 ед. времени.

97. Количество продукции $Q(t)$, реализованной в момент времени t, удовлетворяет дифференциальному уравнению $Q'(t) = k \cdot Q(t)$. В начальный момент времени $t = 0$ и в момент $t = 1$ было реализовано соответственно 20 и 25 единиц продукции. Какое количество продукции будет реализовано в момент времени $t = 2$?

Ответ: 31,25 ед.

98. Найти функцию спроса, если известно, что при спросе $D = 10$ единиц, цена p составляла 90 денежных единиц, а эластичность спроса имеет вид: $E_p(D) = \frac{D-100}{D}$ $(0 < D < 100)$.

Ответ: $D = 100 - p$.

99. Найти функцию спроса, если известно, что при спросе $D = 2$ единицы, цена p составляла 4 денежных единицы, а эластичность спроса постоянна: $E_p(D) = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $D = \frac{1}{\sqrt{p}}$

100. Решить уравнение

$$y(x) = \int\limits_0^x y(t)dt + x + 1.$$

Ответ: $y = 2e^x - 1$.

Глава II. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1. Аналитическая геометрия

Векторы в *n*-мерных пространствах

n–мерным вектором a называется упорядоченый набор из *n* действительных чисел.

Числа, составляющие этот набор, называются *координатами* или компонентами вектора.

n–мерным вектор можно представить в виде вектор–строки:

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

или в виде вектор–столбца:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Определение. n–мерным векторным пространством $\mathbb{R}^n$ называется множество всех *n*–мерных векторов, замкнутое относительно операций сложения и умножения на число.

Линейной комбинацией векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ называется вектор е вида: $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$.

При этом говорят, что вектор e *раскладывается* (разлагается) по этим векторам.

Система ненулевых векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, не равные одновременно нулю, такие, что выполняется равенство: $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ (0 – нулевой вектор).

Система не являющаяся линейно зависимой, называется *линейно независимой*.

Система n линейно независимых векторов пространства $\mathbb{R}^n$ называется *базисом* пространства. Любой вектор этого пространства может быть разложен (единственным образом) по базису. Координаты вектора являются коэффициентами в разложении вектора по базису пространства $\mathbb{R}^n$:

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n.$$

Модулем (длиной) вектора называется число $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$.

Единичным вектором называется вектор, модуль которого равен 1.

В аналитической геометрии рассматриваются одномерные, двумерные и трехмерные векторные пространства, которым есть геометрическая интерпретацию (прямая, плоскость и трехмерное пространство). В двумерном ($\mathbb{R}^2$) и трехмерном ($\mathbb{R}^3$) пространстве вектор можно представлять как направленный отрезок AB. Чтобы найти координаты вектора AB, зная координаты его начальной точки A и конечной точки B, нужно из координат его конечной точки вычесть соответствующие координаты начальной точки.

Направляющими косинусами вектора называются косинусы углов, образованных вектором с положительными полуосями координат. Направляющие косинусы однозначно задают направление вектора. Чтобы найти направляющие косинусы вектора, необходимо соответствующие координаты вектора поделить на модуль вектора. Для двумерного вектора $a = (a_1, a_2)$:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

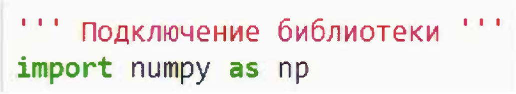
Координаты единичного вектора равны его направляющим косинусам. Выполняется свойство: сумма квадратов направляющих косинусов равна 1. Для трехмерных векторов:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Пример 1. Направляющие косинусы вектора $a = (3{,}4)$:

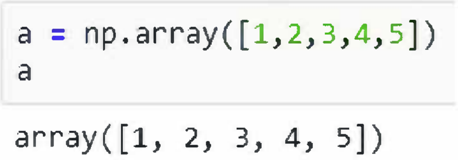
$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}, \quad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}.$$

Векторы в библиотеке numpy



```
''' Подключение библиотеки '''
import numpy as np
```

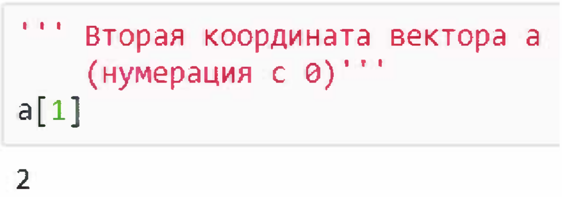
Создание вектора



```
a = np.array([1,2,3,4,5])
a
```

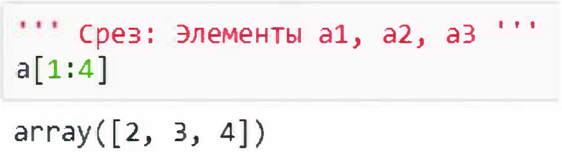
```
array([1, 2, 3, 4, 5])
```

Элементы вектора



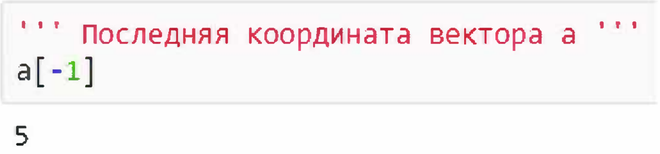
```
''' Вторая координата вектора a
    (нумерация с 0)'''
a[1]
```

```
2
```



```
''' Срез: Элементы a1, a2, a3 '''
a[1:4]
```

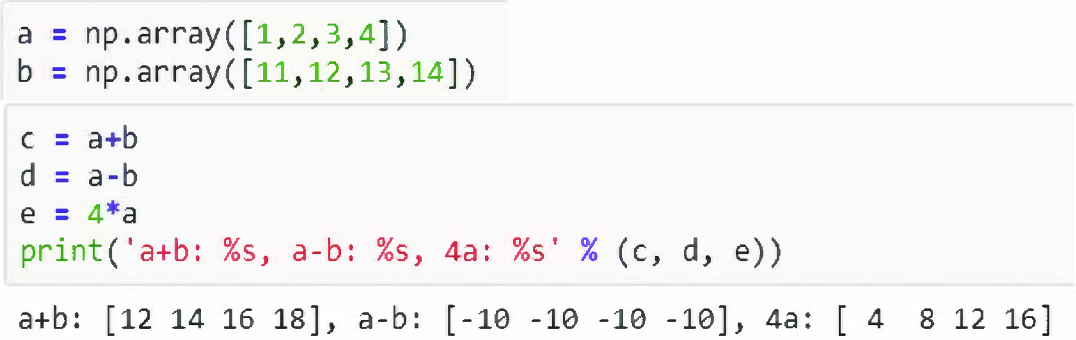
```
array([2, 3, 4])
```



```
''' Последняя координата вектора a '''
a[-1]
```

```
5
```

Действия над векторами



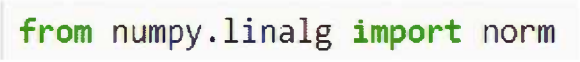
```
a = np.array([1,2,3,4])
b = np.array([11,12,13,14])
```

```
c = a+b
d = a-b
e = 4*a
print('a+b: %s, a-b: %s, 4a: %s' % (c, d, e))
```

```
a+b: [12 14 16 18], a-b: [-10 -10 -10 -10], 4a: [ 4  8 12 16]
```

Длина вектора – функция **numpy.linalg.norm**.

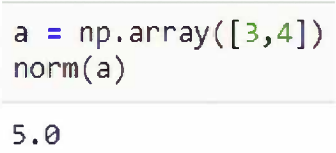
В целях более краткой записи команд иодключим функцню вычисления модуля:



```
from numpy.linalg import norm
```

Пример 2. $a = (3,4)$.

$$|a| = \sqrt{\sum a_i^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$



```
a = np.array([3,4])
norm(a)
```

```
5.0
```

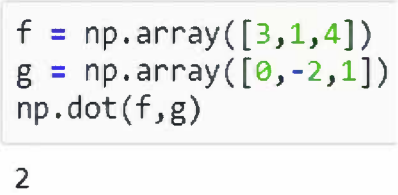
Скалярное произведение векторов – функции **numpy.dot(), numpy.inner(), метод .dot()**.

Скалярное произведение векторов f и g обозначается (f,g), и вычисляется как сумма попарных произведений координат векторов.

Снраведлива формула: $(f,g)=\frac{|f|\cdot|g|}{cos\alpha}$, где $|f|$ и $|g|$ – модули (длины) векторов, $\propto$ – угол между векторами.

Пример 3. $f=(3{,}1{,}4)$, $g=(0,-2{,}1)$.

$$(f,g)=\sum f_i g_i=3\cdot0+1\cdot(-2)+4\cdot1=2.$$



```
f = np.array([3,1,4])
g = np.array([0,-2,1])
np.dot(f,g)
```

```
2
```

Если скалярное произведение векторов равно нулю, то векторы *ортогональны* (угол между векторами – 90°).

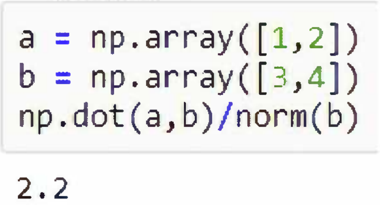
Проекцией вектора AB на ось *l* называется число, равное величине отрезка A_1B_1 оси *l*, где точки A_1 и B_1 являются проекциями точек *A* и *B* иа ось *l*.

Проекцией вектора a на направление вектора *b* называется число, равное величине проекции вектора *a* на ось, проходящую через вектор *b*; вычисляется по формуле:

$$\text{Пр}_b a=\frac{(a,b)}{|b|}.$$

Пример 4. Найти проекцию вектора $a(1{,}2)$ на вектор $b=(3{,}4)$.

Решение.



```
a = np.array([1,2])
b = np.array([3,4])
np.dot(a,b)/norm(b)
```

```
2.2
```

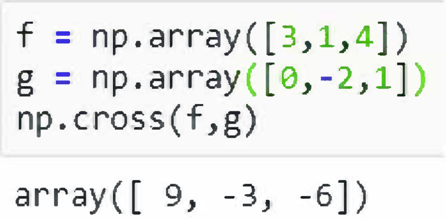
Векторное произведение трехмерных векторов – функция **numpy.cross()**.

Векторным произведением векторов f и g является вектор $[f\times g]$. Он перпендикулярен как вектору f, так и вектору g. Его длина равна $|a||b|sin\propto$.

Пример 5. $f=(3{,}1{,}4)$, $g=(0,-2{,}1)$.

$$[f\times g]=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}f_2 & f_3\\ g_2 & g_3\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}f_1 & f_3\\ g_1 & g_3\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}f_1 & f_2\\ g_1 & g_2\end{vmatrix}=$$

$$= \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 9\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}.$$



```
f = np.array([3,1,4])
g = np.array([0,-2,1])
np.cross(f,g)
```

```
array([ 9, -3, -6])
```

Если векторное произведение векторов равно 0, то векторы коллинеарпые (лежат па параллельных прямых или на одной прямой).

Площадь треугольника ABC равпа половнне модуля векторного произведение вектора АВ на вектор АС:

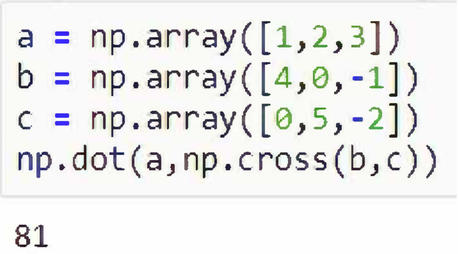
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|[AB \times AC]|.$$

Площадь параллелограмма равна модулю векторного нронзведения двух его смежных сторон.

Смешанное произведение трех трехмерных векторов *a*, *b* и *c*: обозначается $\{a, b, c\}$, и вычнсляется как скалярное произведепие вектора *a* на векторное произведение векторов *b* и *c*.

$$\{a, b, c\} = (a, [b \times c]).$$

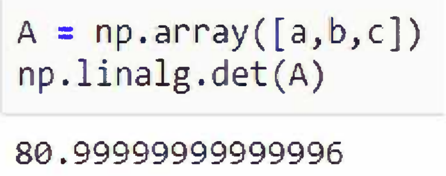
Результат смешанного произведення – число.



```
a = np.array([1,2,3])
b = np.array([4,0,-1])
c = np.array([0,5,-2])
np.dot(a,np.cross(b,c))
```

```
81
```

Смешапное произведение векторов равпо определителю, составленному из этих векторов.



```
A = np.array([a,b,c])
np.linalg.det(A)
```

```
80.99999999999996
```

Модуль смешанного произведения векторов равен объему параллелепинеда, образованного этими векторами,

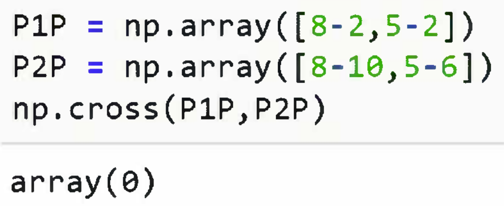
$$V_{\text{паралл}} = (a, [b \times c]).$$

Если смешанное произведение трех пенулевых векторов равно нулю, то эти векторы компланарны (лежат в одной плоскости).

Точка $P(x;y)$ принадлежнт отрезку с начальной точкой $P_1(x_1;y_1)$ и конечной точкой $P_2(x_1;y_1)$, если векторы P_1P и P_2P коллинеарные, и абсцисса точки P расположена между абсциссамн точек P_1 и P_2.

Пример 6. Даны точки $P_1(2;2)$ и $P_2(10;6)$. Выяснить, принадлежит лн точка $P(8;5)$ отрезку P_1P_2.

Решение. Абсцисса точки P удовлетворяет условию $2<8<10$. Условие коллинеарности нроверим с использованием векторного произведения:



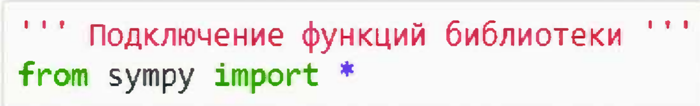
```
P1P = np.array([8-2,5-2])
P2P = np.array([8-10,5-6])
np.cross(P1P,P2P)
```

```
array(0)
```

Ответ: принадлежит.

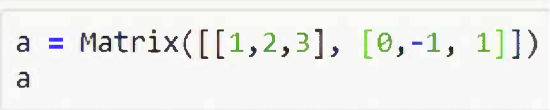
Векторы в библиотеке sympy

Для получения векторов в библиотеке sympy можно использовать матрнцы с одиой строкой или одним столбцом.



```
''' Подключение функций библиотеки '''
from sympy import *
```

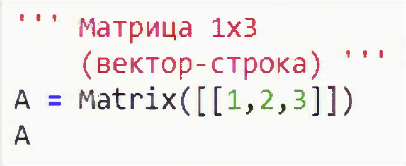
Создание матрицы



```
a = Matrix([[1,2,3], [0,-1, 1]])
a
```

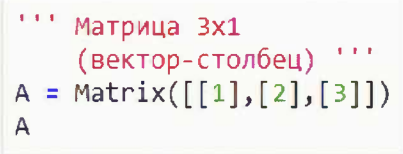
$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Матрицы с одной строкой или одиим столбцом:



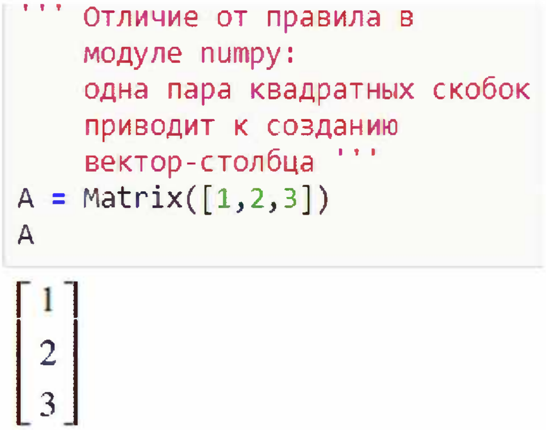
```
''' Матрица 1x3
    (вектор-строка) '''
A = Matrix([[1,2,3]])
A
```

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$



```
''' Матрица 3x1
    (вектор-столбец) '''
A = Matrix([[1],[2],[3]])
A
```

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

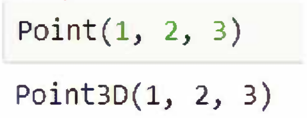


```
''' Отличие от правила в
    модуле numpy:
    одна пара квадратных скобок
    приводит к созданию
    вектор-столбца '''
A = Matrix([1,2,3])
A
```

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

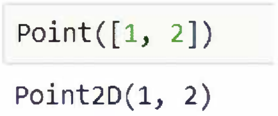
Точки

Создание точки в n–мерном пространстве – **функции Point(), Point3D()**



```
Point(1, 2, 3)
```

```
Point3D(1, 2, 3)
```

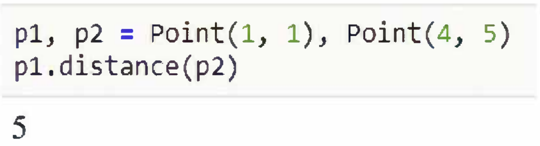


```
Point([1, 2])
```

```
Point2D(1, 2)
```

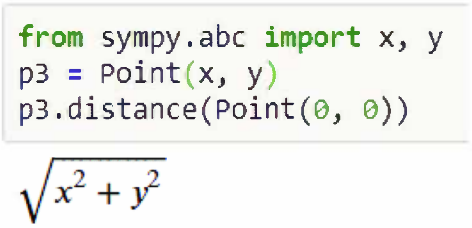
```
p = Point(dim=4)
```

Расстояние между точками – **метод .distance()**



```
p1, p2 = Point(1, 1), Point(4, 5)
p1.distance(p2)
```

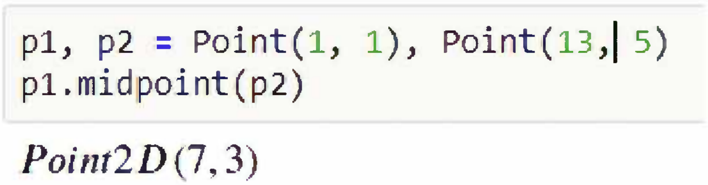
$$5$$



```
from sympy.abc import x, y
p3 = Point(x, y)
p3.distance(Point(0, 0))
```

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

Координаты середины отрезка, соединяющего две точки – **метод midpoint()**



```
p1, p2 = Point(1, 1), Point(13, 5)
p1.midpoint(p2)
```

$$Point2D(7, 3)$$

Точки принадлежат одной плоскости? – **метод .are_coplanar()**

```
p1 = Point3D(1, 2, 2)
p2 = Point3D(2, 7, 2)
p3 = Point3D(0, 0, 2)
p4 = Point3D(1, 1, 2)
Point3D.are_coplanar(p1, p2, p3, p4)
```

```
True
```

Точки лежат на одной прямой? – **метод .is_collinear()**

```
p1, p2 = Point(0, 0), Point(1, 1)
p3, p4, p5 = Point(2, 2), Point(x, x), Point(1, 2)
Point.is_collinear(p1, p2, p3, p4)
```

```
True
```

Точки принадлежат одной окружности? – **метод .is_concyclic()**

```
p1, p2, p3, p4 = Point(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)
p1.is_concyclic()
```

```
True
```

Прямые на плоскости и в пространстве

Создание прямой, проходящей через две точки – **функцня Line()**

```
Line((0, 0), (1, 1))
```

```
Line2D(Point2D(0, 0), Point2D(1, 1))
```

```
p1, p2 = Point(1, 1), Point(3, 0)
Line(p1, p2)
```

```
Line2D(Point2D(1, 1), Point2D(3, 0))
```

Общее уравнение прямой – **метод equation()**

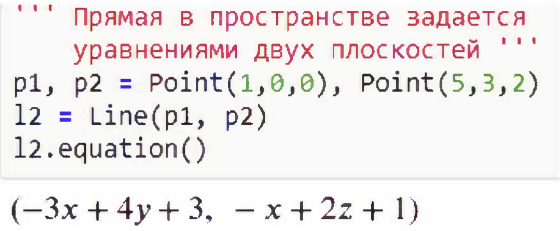
```
''' Общее уравнение прямой на плоскости:
    ax + by = 0 '''
p1, p2 = Point(1,0), Point(5,3)
l1 = Line(p1, p2)
l1.equation()
```

$-3x + 4y + 3$

Для прямой на плоскости можно узнать коэффициенты уравнения – **метод .coefficients**

```
l1.coefficients
```

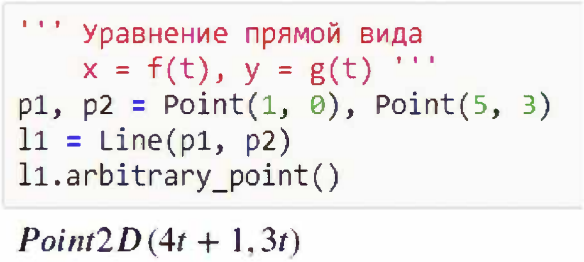
```
(-3, 4, 3)
```



```
''' Прямая в пространстве задается
    уравнениями двух плоскостей '''
p1, p2 = Point(1,0,0), Point(5,3,2)
l2 = Line(p1, p2)
l2.equation()
```

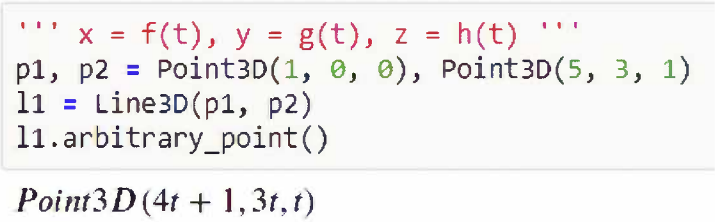
$(-3x+4y+3,\ -x+2z+1)$

Параметрическое уравнение прямой – **метод .arbitrary_point()**



```
''' Уравнение прямой вида
    x = f(t), y = g(t) '''
p1, p2 = Point(1, 0), Point(5, 3)
l1 = Line(p1, p2)
l1.arbitrary_point()
```

$Point2D(4t+1, 3t)$

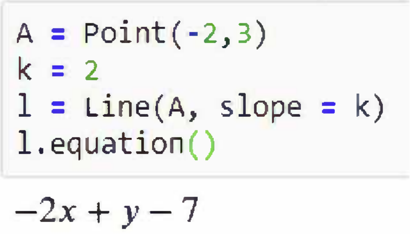


```
''' x = f(t), y = g(t), z = h(t) '''
p1, p2 = Point3D(1, 0, 0), Point3D(5, 3, 1)
l1 = Line3D(p1, p2)
l1.arbitrary_point()
```

$Point3D(4t+1, 3t, t)$

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку A под заданным углом (угол – в виде углового коэффициента (на плоскости) или в виде направления (в пространстве)).

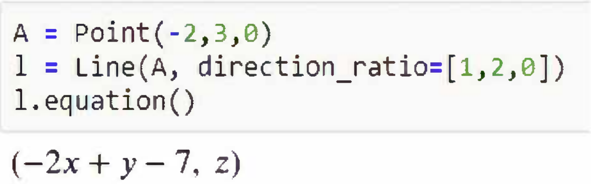
На плоскости – параметр **slope**.



```
A = Point(-2,3)
k = 2
l = Line(A, slope = k)
l.equation()
```

$-2x+y-7$

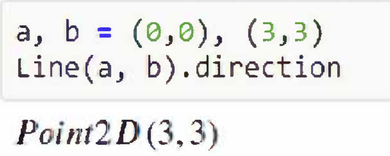
В пространстве – параметр **direction_ratio**.



```
A = Point(-2,3,0)
l = Line(A, direction_ratio=[1,2,0])
l.equation()
```

$(-2x+y-7,\ z)$

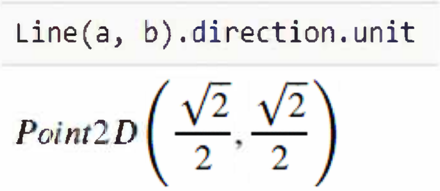
Направляющий вектор прямой – **метод .direction**



```
a, b = (0,0), (3,3)
Line(a, b).direction
```

$Point2D(3, 3)$

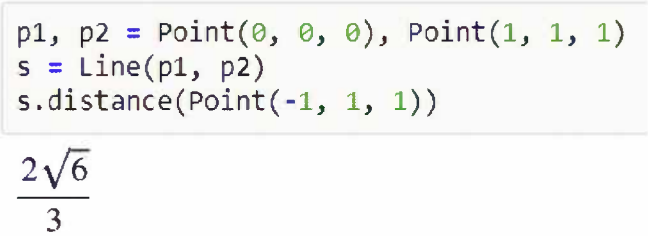
Направляющий вектор ирямой единичиой длииы – **метод .direction.unit**



```
Line(a, b).direction.unit
```

$$Point2D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

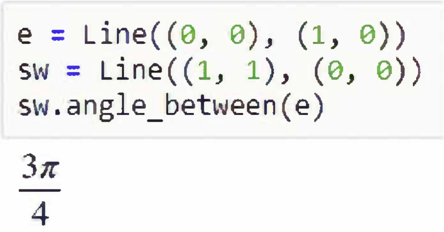
Расстояние от точки до прямой – **метод .distance()**



```
p1, p2 = Point(0, 0, 0), Point(1, 1, 1)
s = Line(p1, p2)
s.distance(Point(-1, 1, 1))
```

$$\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

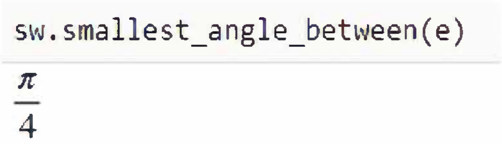
Угол между прямыми – **метод .angle_between()**



```
e = Line((0, 0), (1, 0))
sw = Line((1, 1), (0, 0))
sw.angle_between(e)
```

$$\frac{3\pi}{4}$$

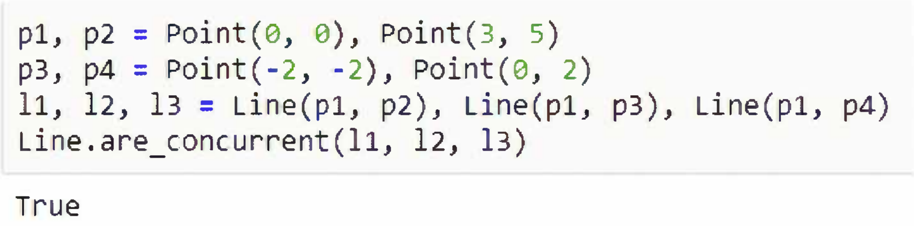
Наименьший по величине угол между прямыми – **метод .smallest_angle_between(()**



```
sw.smallest_angle_between(e)
```

$$\frac{\pi}{4}$$

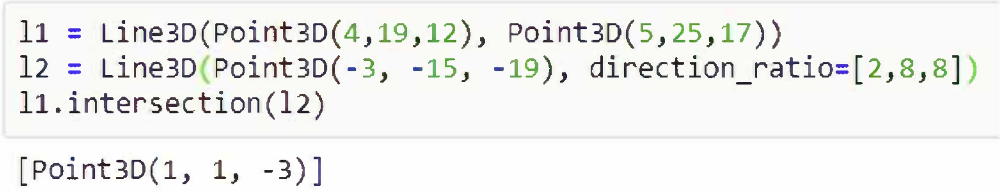
Прямые пересекаются? – **метод .are_concnrrent()**



```
p1, p2 = Point(0, 0), Point(3, 5)
p3, p4 = Point(-2, -2), Point(0, 2)
l1, l2, l3 = Line(p1, p2), Line(p1, p3), Line(p1, p4)
Line.are_concurrent(l1, l2, l3)
```

```
True
```

Точки пересечения – **метод .intersection()**

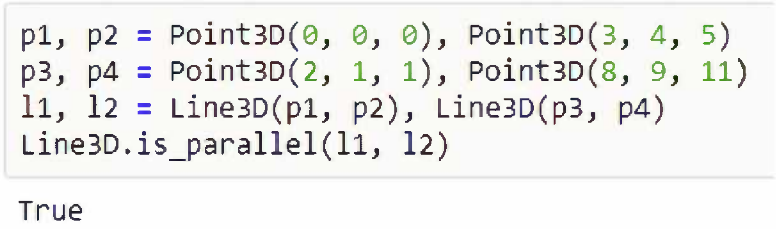


```
l1 = Line3D(Point3D(4,19,12), Point3D(5,25,17))
l2 = Line3D(Point3D(-3, -15, -19), direction_ratio=[2,8,8])
l1.intersection(l2)
```

```
[Point3D(1, 1, -3)]
```

Прямые периендкулярны? – **метод .is_perpenfdicular()**

Прямые параллельны? – **метод .is_parallel()**



```
p1, p2 = Point3D(0, 0, 0), Point3D(3, 4, 5)
p3, p4 = Point3D(2, 1, 1), Point3D(8, 9, 11)
l1, l2 = Line3D(p1, p2), Line3D(p3, p4)
Line3D.is_parallel(l1, l2)
```

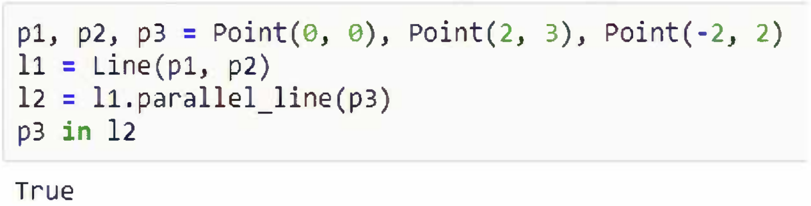
```
True
```

Прямые совпадают? – **метод .is_similar**

```
p1, p2, p3 = Point(0, 1), Point(3, 4), Point(2, 3)
l1 = Line(p1, p2)
l2 = Line(p1, p3)
l1.is_similar(l2)
```

```
True
```

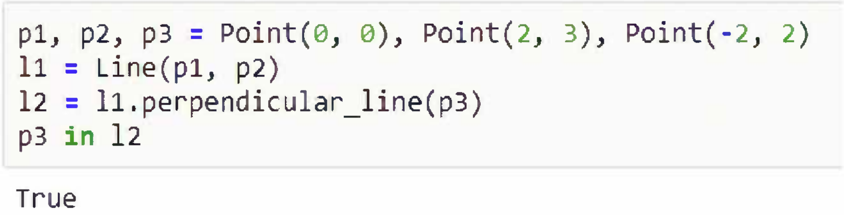
Создание прямой, параллельной данной прямой и проходящей через заданную точку – **метод .parallel_line()**



```
p1, p2, p3 = Point(0, 0), Point(2, 3), Point(-2, 2)
l1 = Line(p1, p2)
l2 = l1.parallel_line(p3)
p3 in l2
```

```
True
```

Создание прямой, перпендикулярной данной прямой и проходящей через заданную точку – **метод .perpendicular_line()**



```
p1, p2, p3 = Point(0, 0), Point(2, 3), Point(-2, 2)
l1 = Line(p1, p2)
l2 = l1.perpendicular_line(p3)
p3 in l2
```

```
True
```

Проекция точки на прямую – **метод projection()**

```
p1, p2, p3 = Point(0, 0), Point(1, 1), Point(Rational(1, 2), 0)
l1 = Line(p1, p2)
l1.projection(p3)
```

$$Point2D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Плоскости

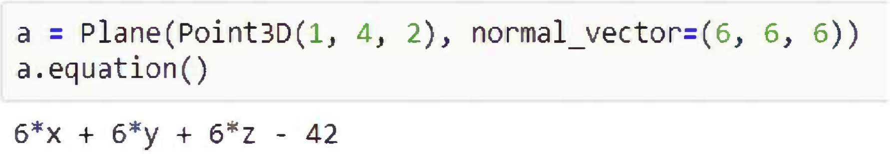
Создание плоскости – **функция Plane()**

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

```
a = Plane(Point3D(1, 1, 2), Point3D(2, 4, 7), Point3D(3, 5, 1))
a.equation()
```

```
-23*x + 11*y - 2*z + 16
```

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку с заданным нормальным вектором.

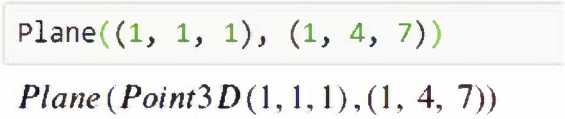


```
a = Plane(Point3D(1, 4, 2), normal_vector=(6, 6, 6))
a.equation()
```

```
6*x + 6*y + 6*z - 42
```

Если в качестве параметров указаны два массива из трех элементов, то первый массив задаст точку, через которую проводится плоскость, а второй – пормальиый вектор.

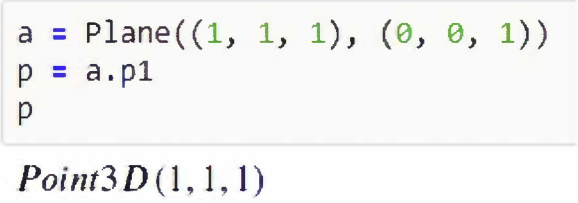
Пример 7. Построить илоскость, проходящую через точку $(1;1;1)$ с нормальпым вектором $(1;4;7)$.



```
Plane((1, 1, 1), (1, 4, 7))
```

$Plane(Point3D(1,1,1),(1,\ 4,\ 7))$

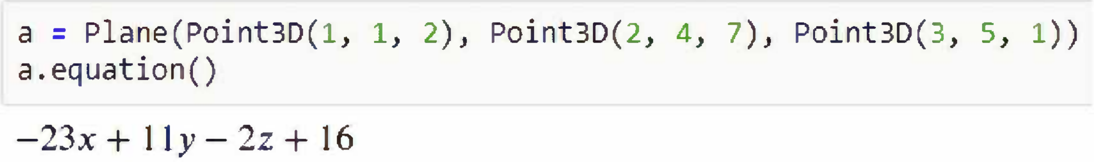
Выдать точку па плоскости – **метод .p1**



```
a = Plane((1, 1, 1), (0, 0, 1))
p = a.p1
p
```

$Point3D(1,1,1)$

Общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ – **метод equation()**



```
a = Plane(Point3D(1, 1, 2), Point3D(2, 4, 7), Point3D(3, 5, 1))
a.equation()
```

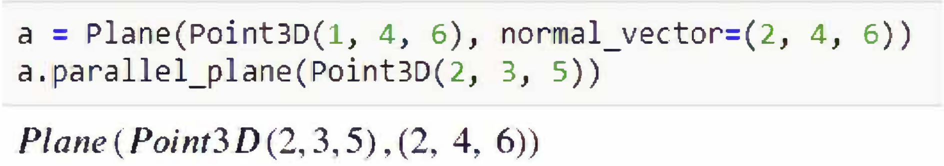
$-23x+11y-2z+16$

Координаты пормального вектора – **метод .normal_vector**

```
a = Plane(Point3D(1, 1, 1), Point3D(2, 3, 4), Point3D(2, 2, 2))
a.normal_vector
```

$(-1,\ 2,\ -1)$

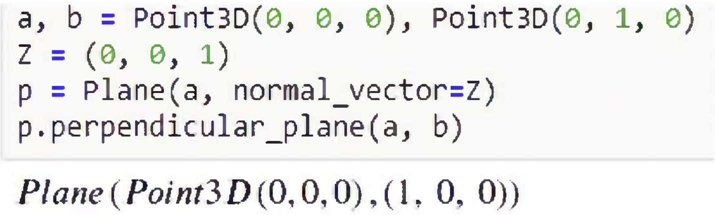
Создание плоскости, параллельпой дапной плоскости и проходящей через задапную точку – **метод .parallel_plane()**



```
a = Plane(Point3D(1, 4, 6), normal_vector=(2, 4, 6))
a.parallel_plane(Point3D(2, 3, 5))
```

$Plane(Point3D(2,3,5),(2,\ 4,\ 6))$

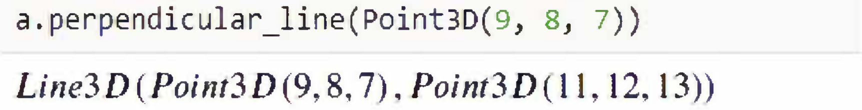
Создание плоскости, перпендикулярной данпой плоскости и проходящей через две заданные точки – **метод .perpendicular()**



```
a, b = Point3D(0, 0, 0), Point3D(0, 1, 0)
Z = (0, 0, 1)
p = Plane(a, normal_vector=Z)
p.perpendicular_plane(a, b)
```

$Plane(Point3D(0,0,0), (1,\ 0,\ 0))$

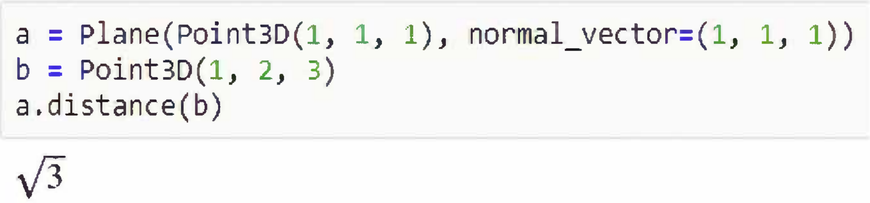
Нахождение перпендикуляра к плоскости, ироходящего через заданную точку – **метод .perpendicular_line()**



```
a = Plane(Point3D(1,4,6), normal_vector=(2, 4, 6))
a.perpendicular_line(Point3D(9, 8, 7))
```

$Line3D(Point3D(9,8,7), Point3D(11,12,13))$

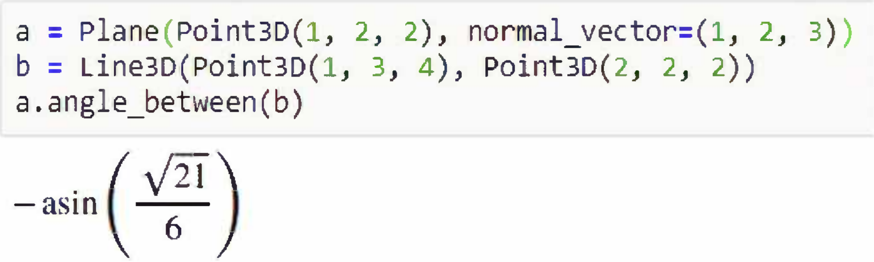
Расстояние от точки или прямой до плоскости – **метод .distance()**



```
a = Plane(Point3D(1, 1, 1), normal_vector=(1, 1, 1))
b = Point3D(1, 2, 3)
a.distance(b)
```

$\sqrt{3}$

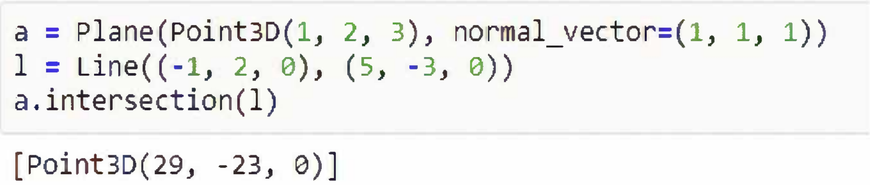
Угол между прямой и плоскостью – **метод .angle_between()**



```
a = Plane(Point3D(1, 2, 2), normal_vector=(1, 2, 3))
b = Line3D(Point3D(1, 3, 4), Point3D(2, 2, 2))
a.angle_between(b)
```

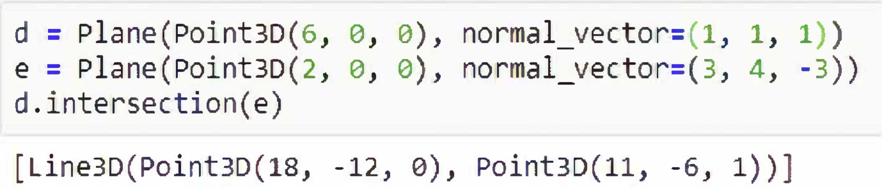
$$-\operatorname{asin}\left(\frac{\sqrt{21}}{6}\right)$$

Пересечение прямой н плоскости; двух плоскостей – **метод .intersection()**



```
a = Plane(Point3D(1, 2, 3), normal_vector=(1, 1, 1))
l = Line((-1, 2, 0), (5, -3, 0))
a.intersection(l)
```

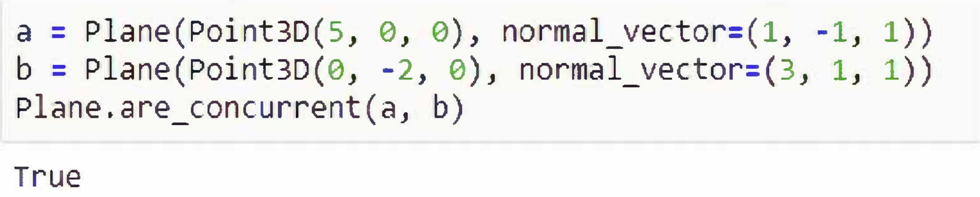
```
[Point3D(29, -23, 0)]
```



```
d = Plane(Point3D(6, 0, 0), normal_vector=(1, 1, 1))
e = Plane(Point3D(2, 0, 0), normal_vector=(3, 4, -3))
d.intersection(e)
```

```
[Line3D(Point3D(18, -12, 0), Point3D(11, -6, 1))]
```

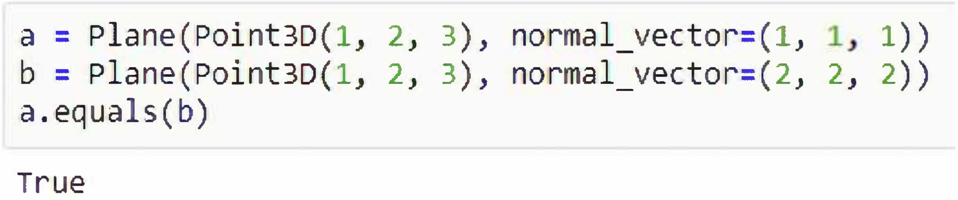
Плоскости пересекаются? – **метод Plane.are_concurrent()**



```
a = Plane(Point3D(5, 0, 0), normal_vector=(1, -1, 1))
b = Plane(Point3D(0, -2, 0), normal_vector=(3, 1, 1))
Plane.are_concurrent(a, b)
```

```
True
```

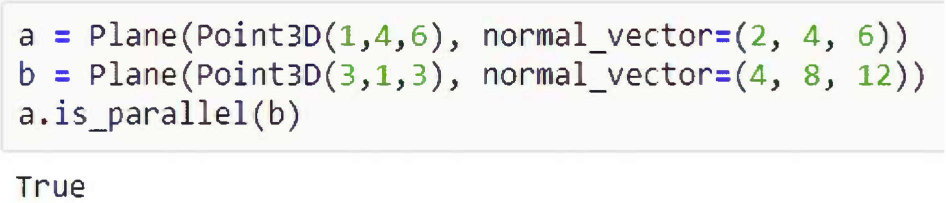
Плоскости совпадают? – **метод .equals()**



```
a = Plane(Point3D(1, 2, 3), normal_vector=(1, 1, 1))
b = Plane(Point3D(1, 2, 3), normal_vector=(2, 2, 2))
a.equals(b)
```

```
True
```

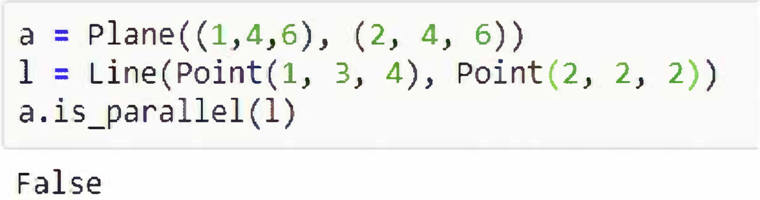
Плоскости параллельиы? – **метод .is_parallel()**



```
a = Plane(Point3D(1,4,6), normal_vector=(2, 4, 6))
b = Plane(Point3D(3,1,3), normal_vector=(4, 8, 12))
a.is_parallel(b)
```

```
True
```

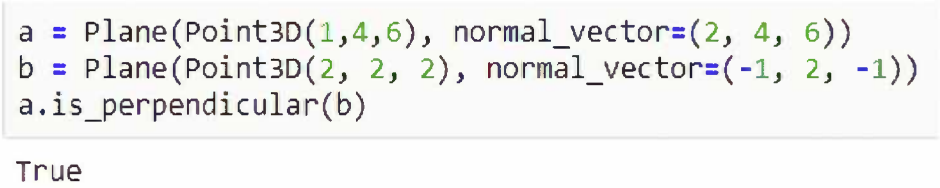
Прямая параллельна плоскостн? – **метод .is_parallel()**



```
a = Plane((1,4,6), (2, 4, 6))
l = Line(Point(1, 3, 4), Point(2, 2, 2))
a.is_parallel(l)
```

```
False
```

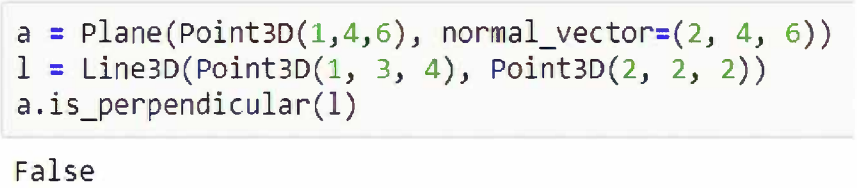
Плоскости перпендикулярны? – **метод .is_perpendicular()**



```
a = Plane(Point3D(1,4,6), normal_vector=(2, 4, 6))
b = Plane(Point3D(2, 2, 2), normal_vector=(-1, 2, -1))
a.is_perpendicular(b)
```

```
True
```

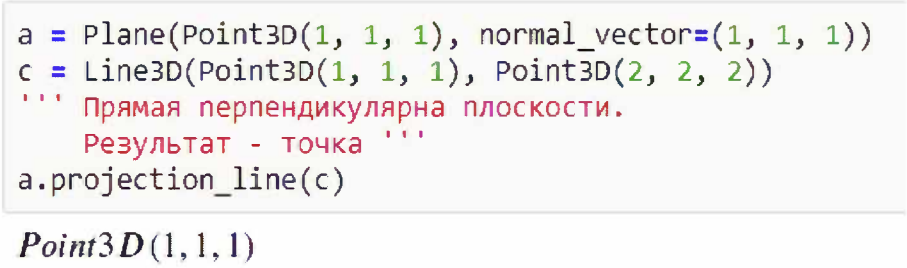
Прямая перпендикулярна плоскости? – **метод .is_perpendicular()**



```
a = Plane(Point3D(1,4,6), normal_vector=(2, 4, 6))
l = Line3D(Point3D(1, 3, 4), Point3D(2, 2, 2))
a.is_perpendicular(l)
```

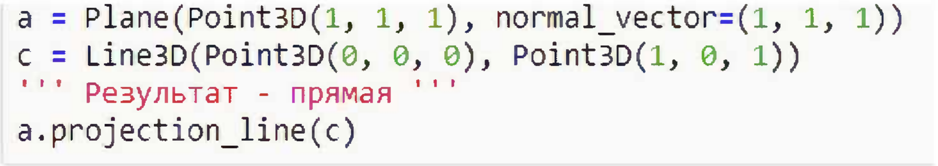
```
False
```

Проекция прямой на плоскость – **метод .projection_line()**



```
a = Plane(Point3D(1, 1, 1), normal_vector=(1, 1, 1))
c = Line3D(Point3D(1, 1, 1), Point3D(2, 2, 2))
''' Прямая перпендикулярна плоскости.
    Результат - точка '''
a.projection_line(c)
```

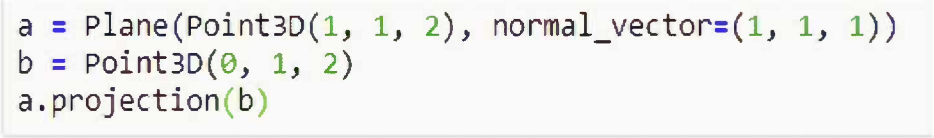
$Point3D(1, 1, 1)$



```
a = Plane(Point3D(1, 1, 1), normal_vector=(1, 1, 1))
c = Line3D(Point3D(0, 0, 0), Point3D(1, 0, 1))
''' Результат - прямая '''
a.projection_line(c)
```

$$Line3D\left(Point3D(1,1,1), Point3D\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)\right)$$

Проекция точки на плоскость – **метод .projection()**



```
a = Plane(Point3D(1, 1, 2), normal_vector=(1, 1, 1))
b = Point3D(0, 1, 2)
a.projection(b)
```

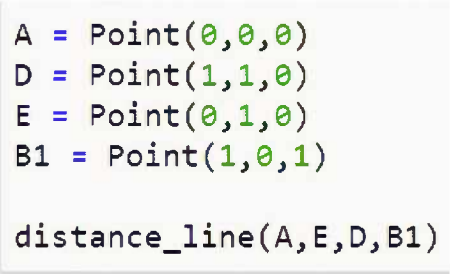
$$Point3D\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$$

В разделе «Функции Python», с. 28 приведен текст функции distance_line(), которая находит расстояние между двумя произвольными прямыми в трехмерном пространстве (в частности, между скрещивающимися прямыми).

Для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 используется следующий алгоритм: 1) провести через точку A прямой l_1 плоскость P, перпендикулярную l_1; 2) найти проекцию pl_2 прямой l_2 на плоскость P; 3) найти расстояние d от точки A до прямой pl_2. Число d и будет искомым расстоянием между прямыми.

Пример 8. В кубе $ABDEA_1B_1D_1E_1$ со стороной 1 найти расстояние между ребром AE и диагональю DB_1 (это расстояние равно 1).

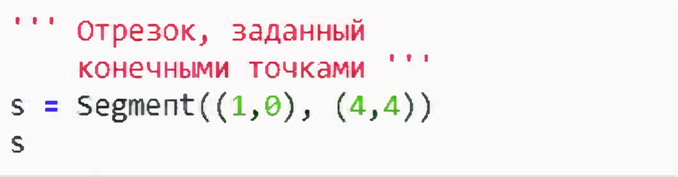
Решение.



```
A = Point(0,0,0)
D = Point(1,1,0)
E = Point(0,1,0)
B1 = Point(1,0,1)

distance_line(A,E,D,B1)
```

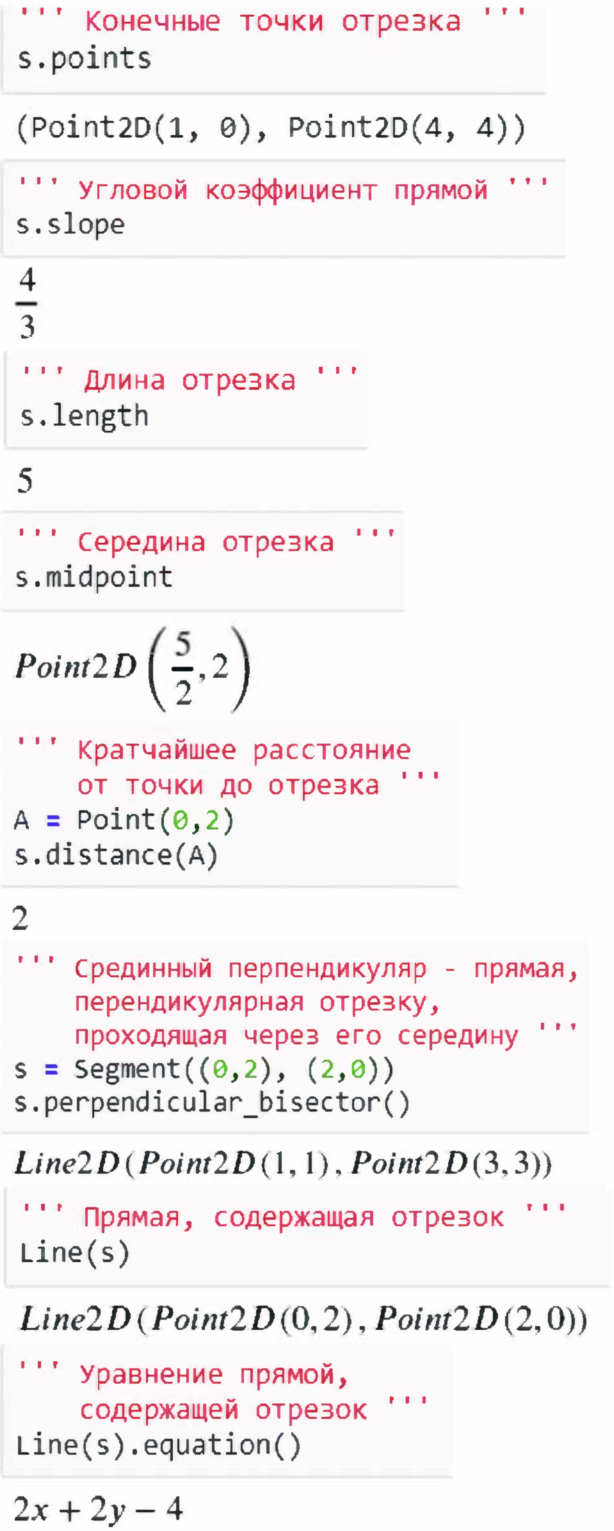
```
1
```

Отрезок



```
''' Отрезок, заданный
    конечными точками '''
s = Segment((1,0), (4,4))
s
```

$$Segment2D(Point2D(1,0), Point2D(4,4))$$



```
''' Конечные точки отрезка '''
s.points
```

```
(Point2D(1, 0), Point2D(4, 4))
```

```
''' Угловой коэффициент прямой '''
s.slope
```

$$\frac{4}{3}$$

```
''' Длина отрезка '''
s.length
```

$$5$$

```
''' Середина отрезка '''
s.midpoint
```

$$Point2D\left(\frac{5}{2}, 2\right)$$

```
''' Кратчайшее расстояние
    от точки до отрезка '''
A = Point(0,2)
s.distance(A)
```

$$2$$

```
''' Срединный перпендикуляр - прямая,
    перпендикулярная отрезку,
    проходящая через его середину '''
s = Segment((0,2), (2,0))
s.perpendicular_bisector()
```

$$Line2D(Point2D(1, 1), Point2D(3, 3))$$

```
''' Прямая, содержащая отрезок '''
Line(s)
```

$$Line2D(Point2D(0, 2), Point2D(2, 0))$$

```
''' Уравнение прямой,
    содержащей отрезок '''
Line(s).equation()
```

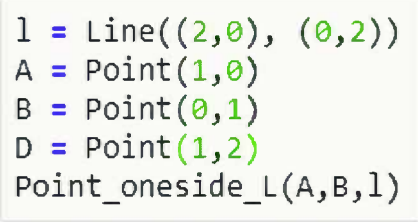
$$2x + 2y - 4$$

В разделе «Функции Python», с. 28 приведены тексты функций Point_oneside_L() и Point_oneside_P().

Первая функция для заданных двух точек и прямой на плоскости проверяет, находятся ли точки по одну сторону от прямой.

Вторая функция для заданных двух точек и плоскости трехмерного пространства проверяет, находятся ли точки по одну сторону от плоскости.

Пример 9. Проверить, находятся ли точки $A(1,0)$ и $B(0,1)$ по одну сторону от прямой CD, где $C(2,0)$, $D(0,2)$.



```
l = Line((2,0), (0,2))
A = Point(1,0)
B = Point(0,1)
D = Point(1,2)
Point_oneside_L(A,B,l)
```

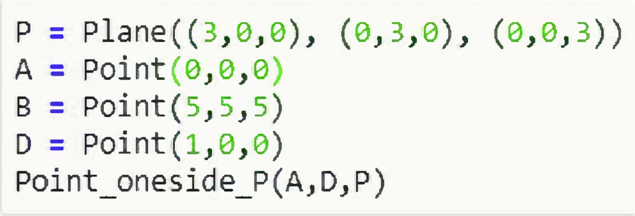
```
True
```

Пример 10. Находятся ли точки $A(1,0)$ и $D(0,1)$ по одну сторону от прямой CD?

```
Point_oneside_L(A,D,l)
```

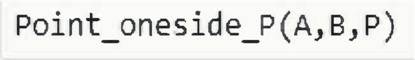
```
False
```

Пример 11. Выяснить, расположены ли по одну сторону от плоскости *EFG*: точки *A* и *D*; точки *A* и *B*, если $A(0,0,0)$, $B(5,5,5)$, $D(1,0,0)$, $E(3,0,0)$, $F(0,3,0)$, $G(0,0,3)$.



```
P = Plane((3,0,0), (0,3,0), (0,0,3))
A = Point(0,0,0)
B = Point(5,5,5)
D = Point(1,0,0)
Point_oneside_P(A,D,P)
```

```
True
```



```
Point_oneside_P(A,B,P)
```

```
False
```

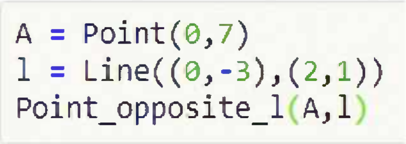
В разделе «Функции Python», с. 29 приведены тексты функций Point_opposite_l() и Point_opposite_P.

Первая функция для заданной точки *A* и прямой *l* находит координаты точки, симметричной точке *A* относительно прямой *l*.

Вторая функция для заданной точки *A* и плоскости *P* находит координаты точки, симметричной точке *A* относительно плоскости *P*.

Пример 12. Для точки $A(0,7)$ найти симметричную ей точку A_1 относительно прямой *l* с уравнением $y = 2x - 3$.

Решение.

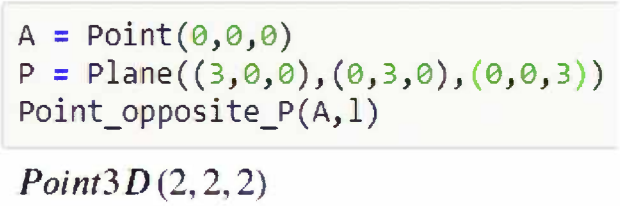


```
A = Point(0,7)
l = Line((0,-3),(2,1))
Point_opposite_l(A,l)
```

$Point2D(8,3)$

Ответ: $A_1(8,3)$.

Пример 13. Для точки $A(0,0,0)$ найти симметричную ей точку A_1 относительно плоскости P с уравнением $x + y + z = 3$.

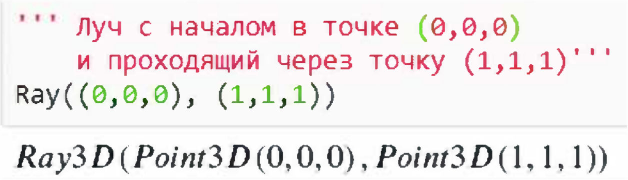


```
A = Point(0,0,0)
P = Plane((3,0,0),(0,3,0),(0,0,3))
Point_opposite_P(A,l)
```

$$Point3D\,(2,2,2)$$

Ответ: $A_1(2,2,2)$.

Луч



```
''' Луч с началом в точке (0,0,0)
    и проходящий через точку (1,1,1)'''
Ray((0,0,0), (1,1,1))
```

$$Ray3D\,(Point3D\,(0,0,0)\,,\,Point3D\,(1,1,1))$$

```
''' Вращение луча '''
r = Ray((0,0), (1,0))
r.rotate(-pi/2)
```

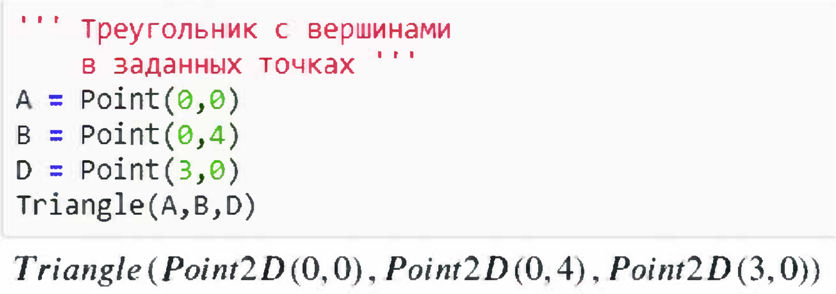
$$Ray2D\,(Point2D\,(0,0)\,,\,Point2D\,(0,-1))$$

Треугольник

Функция Triangle() модуля sympy.geometry

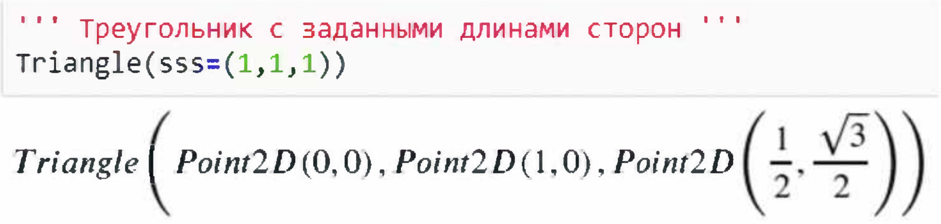
```
from sympy.geometry import Triangle
```

Задание треугольника:



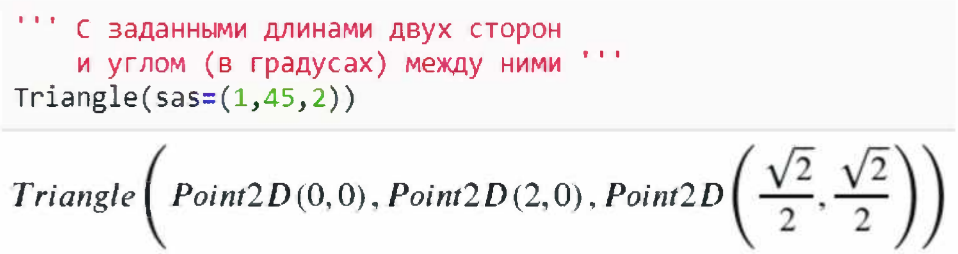
```
''' Треугольник с вершинами
    в заданных точках '''
A = Point(0,0)
B = Point(0,4)
D = Point(3,0)
Triangle(A,B,D)
```

$$Triangle\,(Point2D\,(0,0)\,,\,Point2D\,(0,4)\,,\,Point2D\,(3,0))$$



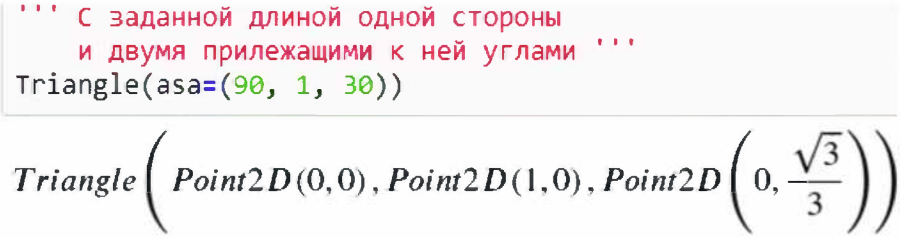
```
''' Треугольник с заданными длинами сторон '''
Triangle(sss=(1,1,1))
```

$$Triangle\left(Point2D\,(0,0)\,,\,Point2D\,(1,0)\,,\,Point2D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$



```
''' С заданными длинами двух сторон
    и углом (в градусах) между ними '''
Triangle(sas=(1,45,2))
```

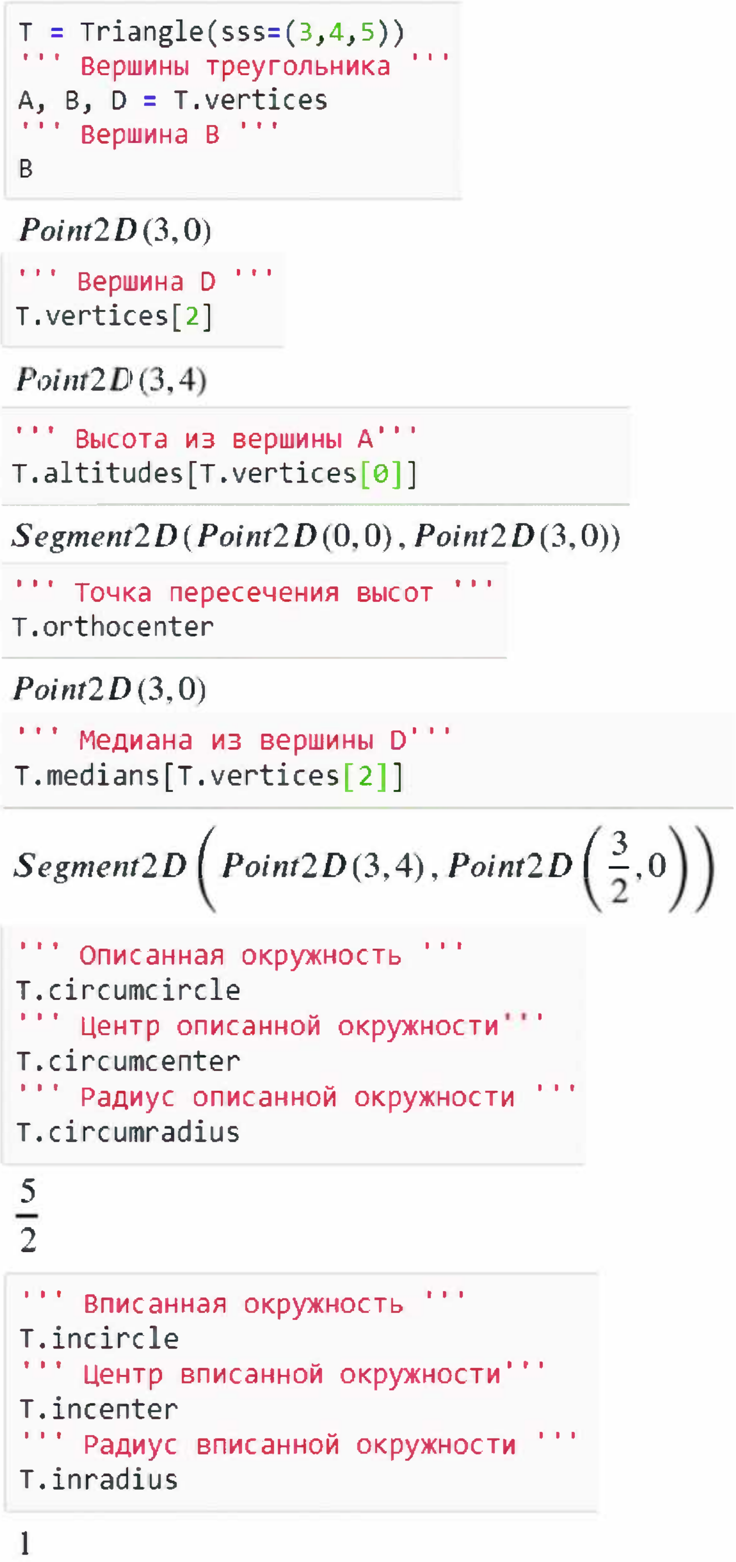
$$Triangle\left(Point2D\,(0,0)\,,\,Point2D\,(2,0)\,,\,Point2D\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$



```
''' С заданной длиной одной стороны
    и двумя прилежащими к ней углами '''
Triangle(asa=(90, 1, 30))
```

$$Triangle\left(Point2D(0,0),\,Point2D(1,0),\,Point2D\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

Атрибуты:



```
T = Triangle(sss=(3,4,5))
''' Вершины треугольника '''
A, B, D = T.vertices
''' Вершина B '''
B
```

$$Point2D(3,0)$$

```
''' Вершина D '''
T.vertices[2]
```

$$Point2D(3,4)$$

```
''' Высота из вершины A'''
T.altitudes[T.vertices[0]]
```

$$Segment2D(Point2D(0,0),\,Point2D(3,0))$$

```
''' Точка пересечения высот '''
T.orthocenter
```

$$Point2D(3,0)$$

```
''' Медиана из вершины D'''
T.medians[T.vertices[2]]
```

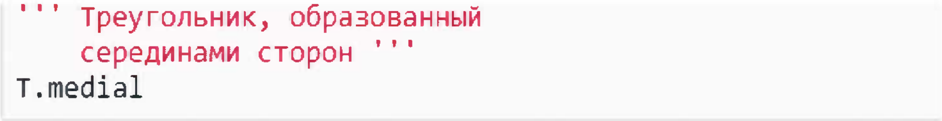
$$Segment2D\left(Point2D(3,4),\,Point2D\left(\frac{3}{2},0\right)\right)$$

```
''' Описанная окружность '''
T.circumcircle
''' Центр описанной окружности'''
T.circumcenter
''' Радиус описанной окружности '''
T.circumradius
```

$$\frac{5}{2}$$

```
''' Вписанная окружность '''
T.incircle
''' Центр вписанной окружности'''
T.incenter
''' Радиус вписанной окружности '''
T.inradius
```

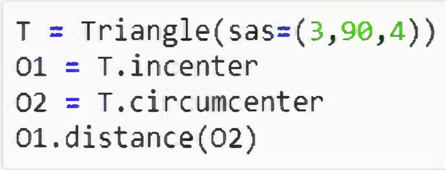
$$1$$



```
''' Треугольник, образованный
    серединами сторон '''
T.medial
```

$$Triangle\left(Point2D\left(\frac{3}{2},0\right), Point2D(3,2), Point2D\left(\frac{3}{2},2\right)\right)$$

Пример 14. В прямоугольном треугольнике со сторонами 3, 4, 5 найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружности.



```
T = Triangle(sas=(3,90,4))
O1 = T.incenter
O2 = T.circumcenter
O1.distance(O2)
```

$$\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Многоугольник – функция Polygon()

```
p1, p2, p3, p4 = [(0, 0), (4, 0), (5, 4), (0, 2)]
Polygon(p1, p2, p3, p4)
```

$$Polygon(Point2D(0,0), Point2D(4,0), Point2D(5,4), Point2D(0,2))$$

Кривые второго порядка

Кривая второго порядка имеет уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Это уравнение может быть записано в матричной форме:

$$(x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } x^T A x = 0.$$

Вид кривой зависит от четырех параметров (инвариантов):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$I = a_{11} + a_{22}, \quad B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Классификация кривых в зависимости от значений инвариантов.

Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: $\Delta \cdot I < 0, \ D > 0.$

Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: $\Delta \neq 0,\ D < 0.$

Парабола $y^2 = 2px$: $\Delta \neq 0,\ D = 0.$

Пара пересекающихся прямых $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$: $\Delta = 0,\ D < 0.$

Пара параллельных прямых $x^2 - d^2 = 0$: $\Delta = 0,\ D = 0,\ \ B < 0.$

Прямая $x^2 = 0$: $\Delta = 0,\ D = 0,\ \ B = 0.$

Точка $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 0$: $\Delta = 0,\ D > 0,\ \ B = 0.$

Мнимый эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$: $\Delta \cdot I > 0,\ D > 0.$

Пара мнимых параллельных прямых $x^2 + d^2 = 0$:
$\Delta = 0,\ D = 0,\ \ B > 0.$

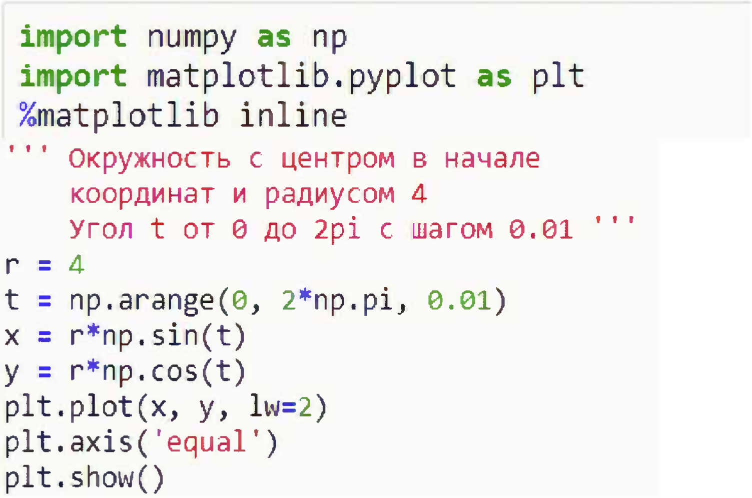
Окружность

Частным случаем эллипса является окружность.
Уравнение окружности с центром в точке $(x_0;y_0)$ и радиусом r:

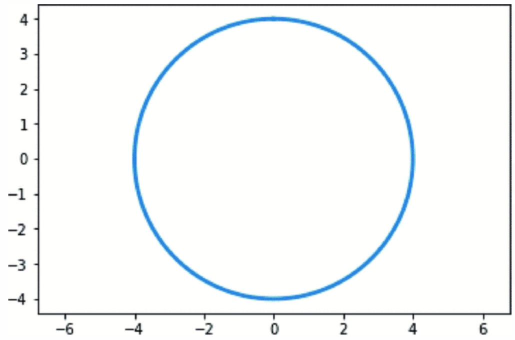
$$(x - x_0)^2 + (y - x_0)^2 = r^2.$$

Окружность можно задать в параметрической форме:

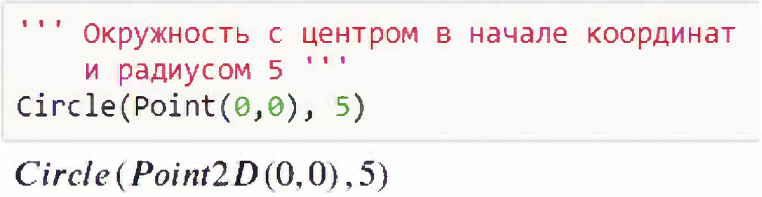
$$x(t) = r\sin t + x_0,\ y(t) = r\cos t + y_0,\ \ t \in [0;2\pi].$$



```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
''' Окружность с центром в начале
    координат и радиусом 4
    Угол t от 0 до 2pi с шагом 0.01 '''
r = 4
t = np.arange(0, 2*np.pi, 0.01)
x = r*np.sin(t)
y = r*np.cos(t)
plt.plot(x, y, lw=2)
plt.axis('equal')
plt.show()
```

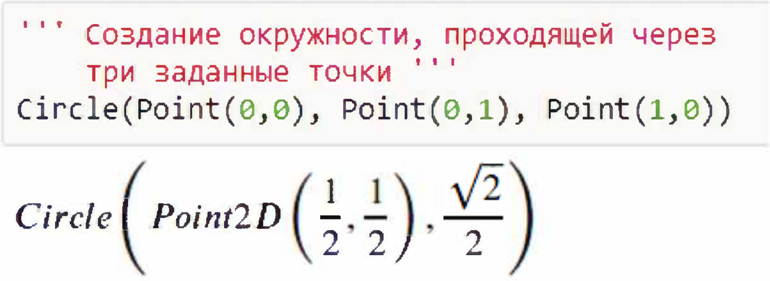


Создание окружности – **функция Circle()**



```
''' Окружность с центром в начале координат
    и радиусом 5 '''
Circle(Point(0,0), 5)
```

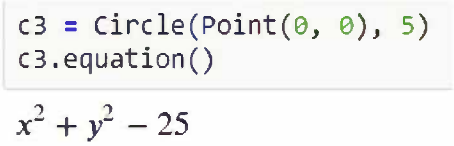
$$Circle(Point2D(0,0),5)$$



```
''' Создание окружности, проходящей через
    три заданные точки '''
Circle(Point(0,0), Point(0,1), Point(1,0))
```

$$Circle\left(Point2D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

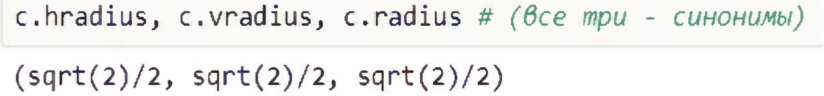
Уравнение окружности – **метод .equation()**



```
c3 = Circle(Point(0, 0), 5)
c3.equation()
```

$$x^2 + y^2 - 25$$

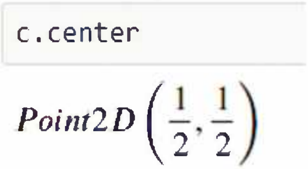
Радиус окружности.



```
c = Circle(Point(0, 0), Point(1, 1), Point(1, 0))
c.hradius, c.vradius, c.radius # (все три - синонимы)
```

```
(sqrt(2)/2, sqrt(2)/2, sqrt(2)/2)
```

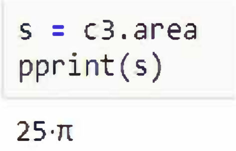
Центр окружности:



```
c.center
```

$$Point2D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

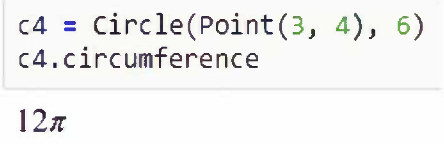
Площадь круга – **метод .area**



```
s = c3.area
pprint(s)
```

```
25⋅π
```

Длина окружности – **метод .circumference**



```
c4 = Circle(Point(3, 4), 6)
c4.circumference
```

$$12\pi$$

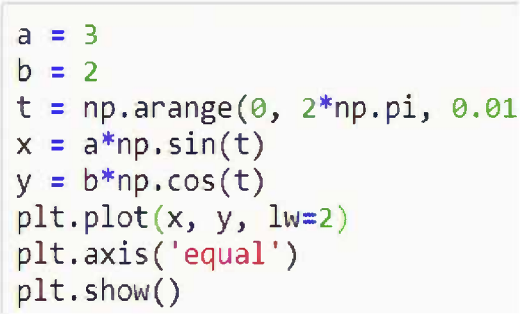
Эллипс

Каноническое уравнение эллипса:

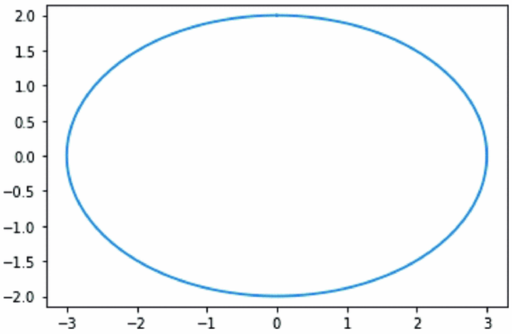
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Параметрическое уравнение эллипса:

$$x(t) = a sin t,\ y(t) = b cos t,\ \ t \in [0; 2\pi].$$

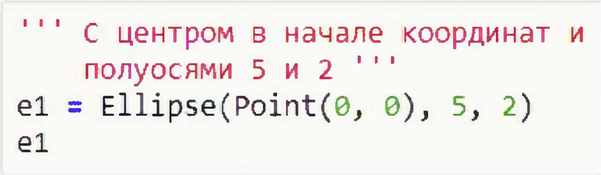


```
a = 3
b = 2
t = np.arange(0, 2*np.pi, 0.01
x = a*np.sin(t)
y = b*np.cos(t)
plt.plot(x, y, lw=2)
plt.axis('equal')
plt.show()
```



Параметры эллипса: величины полуосей, эксцентриситет, координаты фокусов, фокальное расстоянне, уравнение эволюты можно найти соответственпо с помощью методов .hradius, .vradius, eccentricity, .foci, .focus_distance, .evolute.

Создаиие эллипса – **функцня Ellipse()**



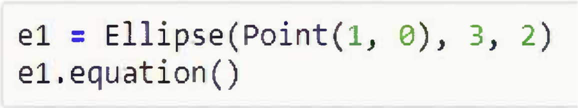
```
''' С центром в начале координат и
    полуосями 5 и 2 '''
e1 = Ellipse(Point(0, 0), 5, 2)
e1
```

$$Ellipse\left(Point2D\left(0,0\right),5,2\right)$$

```
''' С заданным центром, горизонтальной полуосью
    и эксцентриситетом '''
e2 = Ellipse(Point(3, 1), hradius=3, \
             eccentricity=Rational(4, 5))
e2
```

$$Ellipse\left(Point2D\left(3,1\right),3,\frac{9}{5}\right)$$

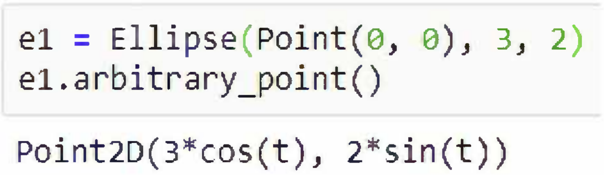
Уравнеиие эллипса – **метод equation()**



```
e1 = Ellipse(Point(1, 0), 3, 2)
e1.equation()
```

$$\frac{y^2}{4} + \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 - 1$$

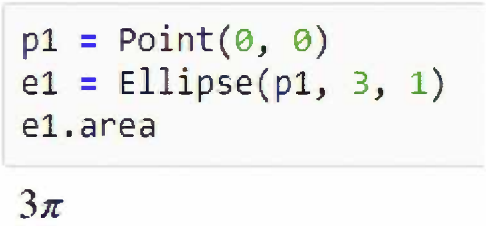
Параметрическое уравнение – **метод .arbitrary_point()**



```
e1 = Ellipse(Point(0, 0), 3, 2)
e1.arbitrary_point()
```

```
Point2D(3*cos(t), 2*sin(t))
```

Площадь эллипса – **метод .area**



```
p1 = Point(0, 0)
e1 = Ellipse(p1, 3, 1)
e1.area
```

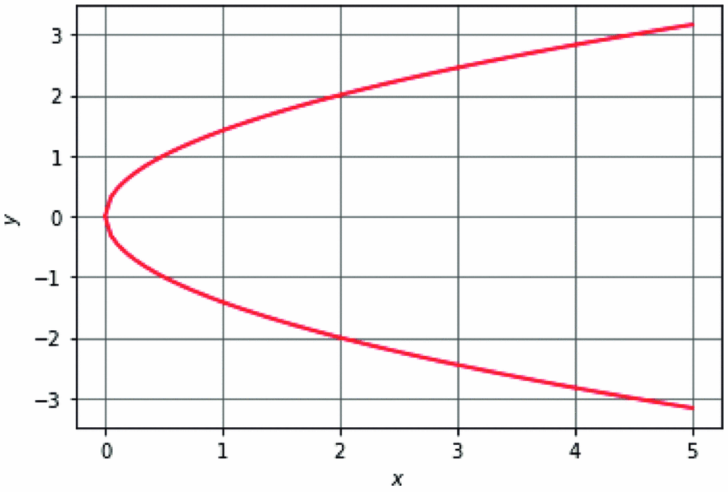
3π

Парабола

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

```
x = np.linspace(0,5,100)
y1 = np.sqrt(2*x)
y2 = -np.sqrt(2*x)

plt.plot(x, y1, lw=2, color='r')
plt.plot(x, y2, lw=2, color='r')

plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.ylabel('$y$')
plt.xlabel('$x$')
plt.show()
```

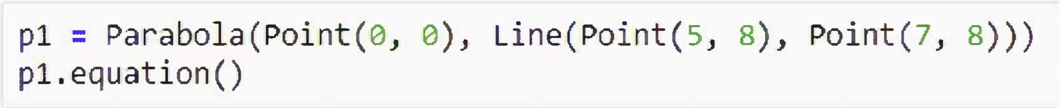


Параметры параболы: фокус, фокальное расстояние, эксцентриситет, директриса, ось симметрии могут быть найдены соответственно с помощью методов .focus, focal_length, eccentricity, directrix, .axis_of_symmetry.

Создание параболы – **функция Parabola()**

```
p1 = Parabola(Point(0, 0), Line(Point(5, 8), Point(7,8)))
```

Уравнение параболы – **метод .equation()**

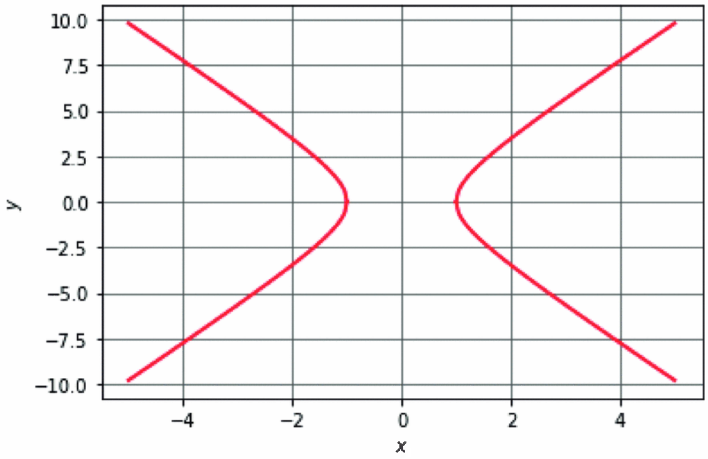


```
p1 = Parabola(Point(0, 0), Line(Point(5, 8), Point(7, 8)))
p1.equation()
```

$$-x^2 - 16y + 64$$

Гипербола

```
x1 = np.linspace(-5,-1,100)
y1 = 2*np.sqrt(x1**2-1)
y2 = -2*np.sqrt(x1**2-1)
x2 = np.linspace(1,5,100)
y3 = 2*np.sqrt(x2**2-1)
y4 = -2*np.sqrt(x2**2-1)
plt.plot(x1, y1, lw=2, color='r')
plt.plot(x1, y2, lw=2, color='r')
plt.plot(x2, y3, lw=2, color='r')
plt.plot(x2, y4, lw=2, color='r')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.ylabel('$y$')
plt.xlabel('$x$')
plt.show()
```



Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

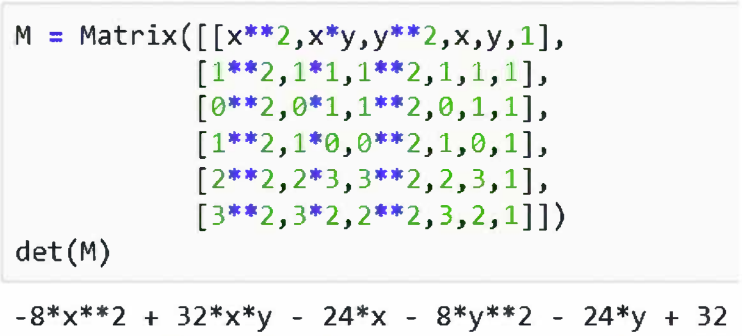
Приведение кривой второго порядка к каноническому виду

Кривая второго порядка однозначно определяется своими пятью точками, если никакие четыре из них не лежат на одной прямой. Уравнение кривой, проходящей через точки (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), (x_4,y_4), (x_5,y_5):

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Кривая, заданная своими пятью точками, вырождается, когда три из заданных точек лежат на одной прямой.

Пример 15. Найти уравнение кривой, проходящей через точки: (1,1), (0,1), (1,0), (2,3), (3,2):



```
M = Matrix([[x**2,x*y,y**2,x,y,1],
            [1**2,1*1,1**2,1,1,1],
            [0**2,0*1,1**2,0,1,1],
            [1**2,1*0,0**2,1,0,1],
            [2**2,2*3,3**2,2,3,1],
            [3**2,3*2,2**2,3,2,1]])
det(M)
```

```
-8*x**2 + 32*x*y - 24*x - 8*y**2 - 24*y + 32
```

Ответ: $x^2 + y^2 - 4xy + 3x + 3y - 4 = 0$.

Характеристической квадратичной формой кривой второго порядка называется функция:

$$F_0(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy.$$

По характеру квадратичной формы можно сделать заключения о виде кривой.

Если квадратичная форма положительно определенная – имеем эллипс; если неопределенная – имеем гиперболу; если полуопределенная (принимает только неотрицательные или только неположительные значения) – имеем параболу; если отрицательно определенная – имеем мнимый эллипс.

В разделе «Функции в Python», с. 29 приведен текст функции conic_curve(). Данная функция по коэффициентам уравнения кривой второго порядка определяет тип кривой. Кроме того, функция выполняет преобразование поворота системы координат, в результате чего уравнение в новых переменных не содержит слагаемого с произведением переменных.

После применения функции conic_curve(), для получения канонического уравнения нужно будет, при необходимости, совершить сдвиг. Формулы соответствующей замены строятся при помощи выделения полного квадрата.

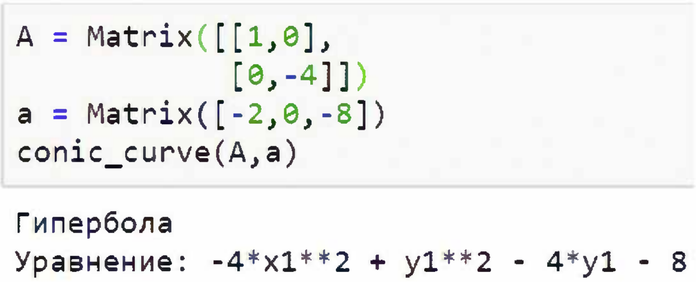
Входными параметрами функции являются:

- *A*, матрица квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$;
- *a*, вектор, содержащий коэффициенты при переменных x и y и свободный член: $A = (a_{13} \quad a_{23} \quad a_{33})$;
- f_transform, признак: если равен 0 (по умолчанию), функция выводит только наименование типа кривой; если равен 1, выводятся также уравнения замены переменных при преобразовании поворота.

Пример 16. Определить тип и привести к каноническому виду кривую второго порядка

$$x^2 - 4y^2 - 2x - 8 = 0.$$

Решение.



```
A = Matrix([[1,0],
            [0,-4]])
a = Matrix([-2,0,-8])
conic_curve(A,a)
```

```
Гипербола
Уравнение: -4*x1**2 + y1**2 - 4*y1 - 8
```

Выделяем полный квадрат по переменной y_1:

$$y_1^2 - 4y_1 = (y_1 - 2)^2 - 4.$$

В каноническом уравнении переменная x записывается со знаком «+», поэтому меняем обозначения переменных; приводим правую часть уравнения к значению 1.

$$(x_1 - 2)^2 - 4y_1^2 - 12 = 0; \qquad \frac{(x_1-2)^2}{12} - \frac{y_1^2}{3} = 1.$$

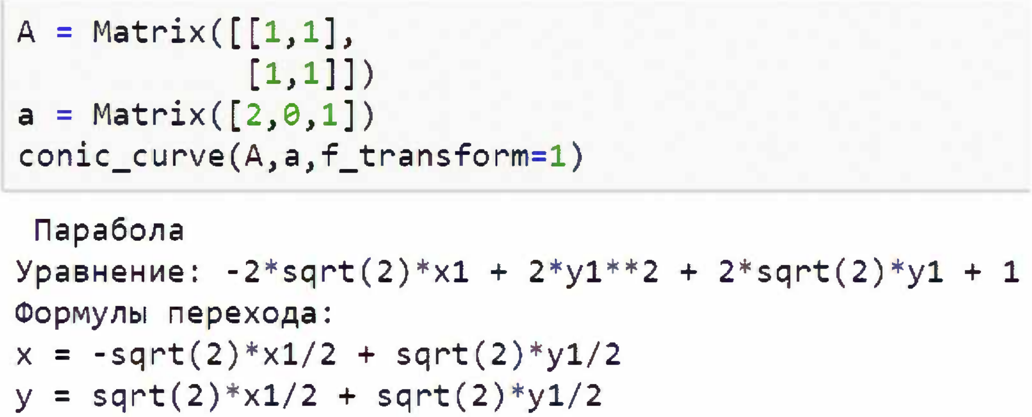
Ответ: гипербола; $\frac{(x_1-2)^2}{12} - \frac{y_1^2}{3} = 1.$

Пример 17. Определить тип кривой второго порядка

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 1 = 0.$$

Найти каноническое уравнение и записать формулы перехода к новым переменным.

Решение.



```
A = Matrix([[1,1],
            [1,1]])
a = Matrix([2,0,1])
conic_curve(A,a,f_transform=1)
```

```
 Парабола
Уравнение: -2*sqrt(2)*x1 + 2*y1**2 + 2*sqrt(2)*y1 + 1
Формулы перехода:
x = -sqrt(2)*x1/2 + sqrt(2)*y1/2
y = sqrt(2)*x1/2 + sqrt(2)*y1/2
```

Выделяем полный квадрат по перемеиной y_1:

$$2y_1^2 + 2\sqrt{2}y_1 = 2\left(y_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1.$$

Приводим правую часть уравнения к значенню 1.

Выполняя сдвиг: $x_2 = x_1$; $y_2 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, получим уравнение:

$$y_2^2 = \sqrt{2}x_2.$$

Окончательные формулы перехода имеют вид:

$$\left.\begin{array}{r} x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}x_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(y_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(y_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{r} x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}x_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y_2 - \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y_2 - \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Ответ: парабола; $y_2^2 = \sqrt{2}x_2$; $\left.\begin{array}{r} x = \frac{-\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 - \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 - \frac{1}{2} \end{array}\right\}$

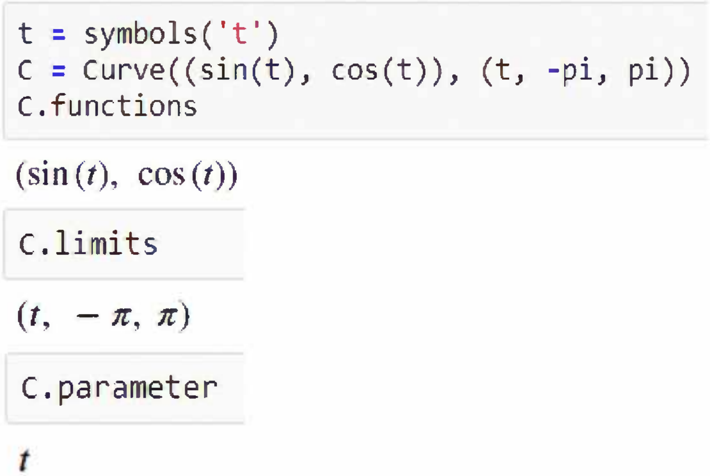
Кривая в прострапстве

Фуикция Curve(fuuctiou, limits)

Параметры: список функций, задающих параметрическое уравнение кривой; limits – кортеж, содержащий три элемента: символ параметра, через который заиисываются функции, и нижний и верхний нределы изменения параметра.

Атрибуты: functions (функции), parameter (параметр), limits (пределы изменеиия параметра).

Пример 18. Окружность.



```
t = symbols('t')
C = Curve((sin(t), cos(t)), (t, -pi, pi))
C.functions
```

$(\sin(t),\ \cos(t))$

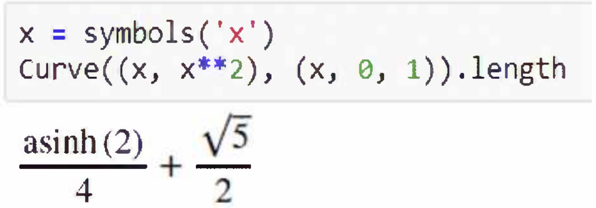
```
C.limits
```

$(t,\ -\pi,\ \pi)$

```
C.parameter
```

t

Длина крнвой



```
x = symbols('x')
Curve((x, x**2), (x, 0, 1)).length
```

$$\frac{\operatorname{asinh}(2)}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Поверхности второго порядка

Поверхность второго порядка имеет уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Вид новерхности зависит от шести параметров (нпвариантов):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{13} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix},$$

$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Классификация поверхностей в зависимости зиачений ннвариаитов.

Эллипсоид, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$: $\delta \neq 0,\ \Delta < 0, I_2 > 0,\ I_1 \cdot \delta > 0$.

Однополосный гиперболоид, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$: $\delta \neq 0,\ \Delta > 0$, $(I_2 \leq 0$ или $I_1 \cdot \delta \leq 0)$.

Двуполосный гиперболоид, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$: $\delta \neq 0,\ \Delta < 0$, $(I_2 \leq 0$ или $I_1 \cdot \delta \leq 0)$.

Конус, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$: $\delta \neq 0,\ \Delta = 0$, $(I_2 = 0$ или $I_1 \cdot \delta \leq 0)$.

Эллиптический параболоид, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$: $\delta = 0,\ \Delta < 0$.

Гиперболический параболоид, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$: $\delta = 0,\ \Delta > 0$.

Эллиптический цилиндр, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: $\delta = 0,\ \Delta = 0$,
$I_2 > 0,\ I_1 \cdot K_2 < 0$.

Гиперболический цилиндр, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$: $\delta = 0,\ \Delta = 0$,
$I_2 < 0\ \ K_2 \neq 0$.

Параболический цилиндр, $y^2 = 2px$: $\delta = 0,\ \Delta = 0$,
$I_2 = 0,\ K_2 \neq 0$.

Пара пересекающихся плоскостей, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$: $\delta = 0,\ \Delta = 0$,
$I_2 < 0,\ K_2 = 0$.

Пара параллельных плоскостей, $y^2 = a^2$: $\delta = 0,\ \Delta = 0$,
$I_2 = 0,\ K_2 = 0, K_1 < 0$.

Пара совпадающих плоскостей, $y^2 = 0$: $\delta = 0,\ \Delta = 0$,
$I_2 = 0,\ K_2 = 0, K_1 = 0$.

Мнимый эллипсоид, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$: $\delta \neq 0,\ \Delta > 0$,
$I_2 > 0,\ I_2 \cdot \delta > 0$.

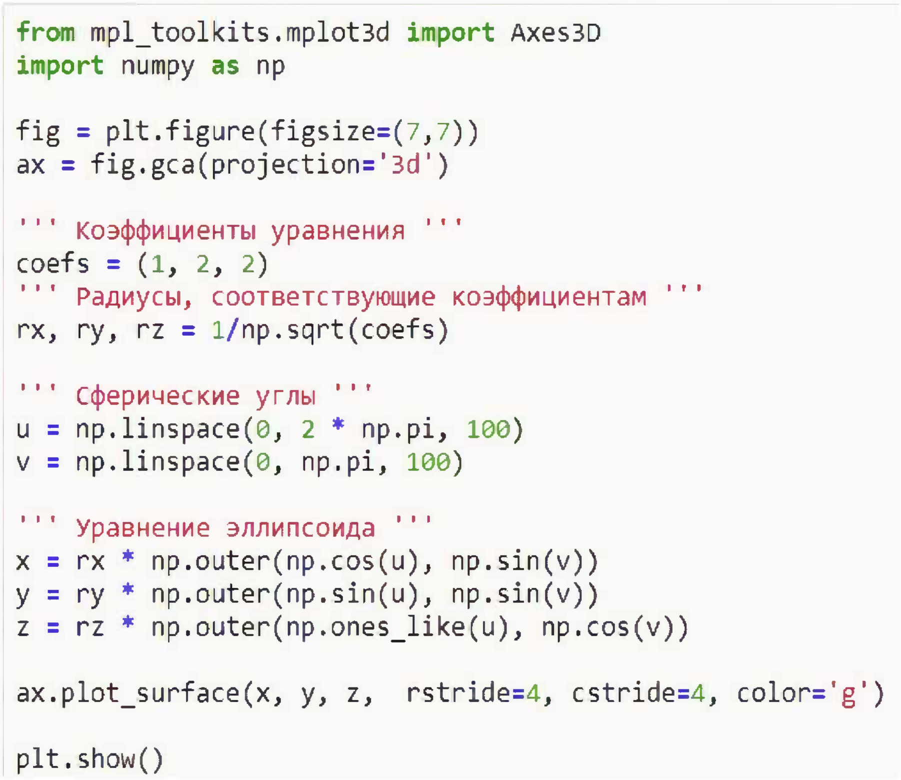
Мнимый конус, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$: $\delta \neq 0,\ \Delta = 0$,
$I_2 > 0,\ I_2 \cdot \delta > 0$.

Мнимый эллиптический цилиндр, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$: $\delta = 0,\ \Delta = 0$,
$I_2 > 0,\ I_1 \cdot K_2 > 0$.

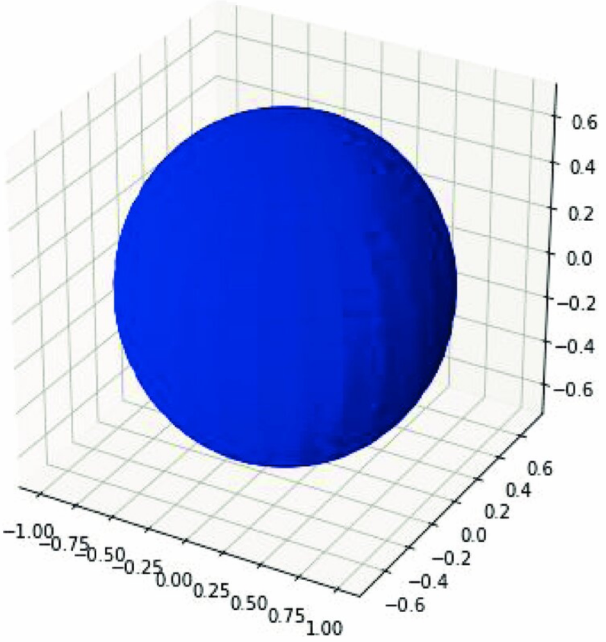
Пара мнимых пересекающихся плоскостей, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$: $\delta = 0$, $\Delta = 0$, $I_2 > 0$, $K_2 = 0$.

Пара мнимых параллельных плоскостей, $y^2 = -a^2$: $\delta = 0$, $\Delta = 0, I_2 = 0$, $K_2 = 0, K_1 > 0$.

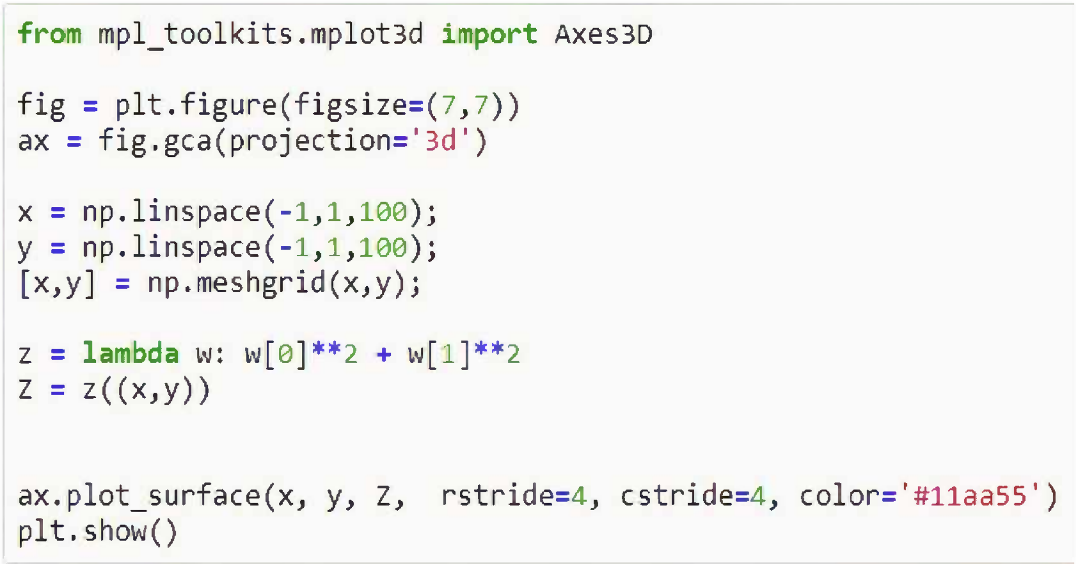
Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



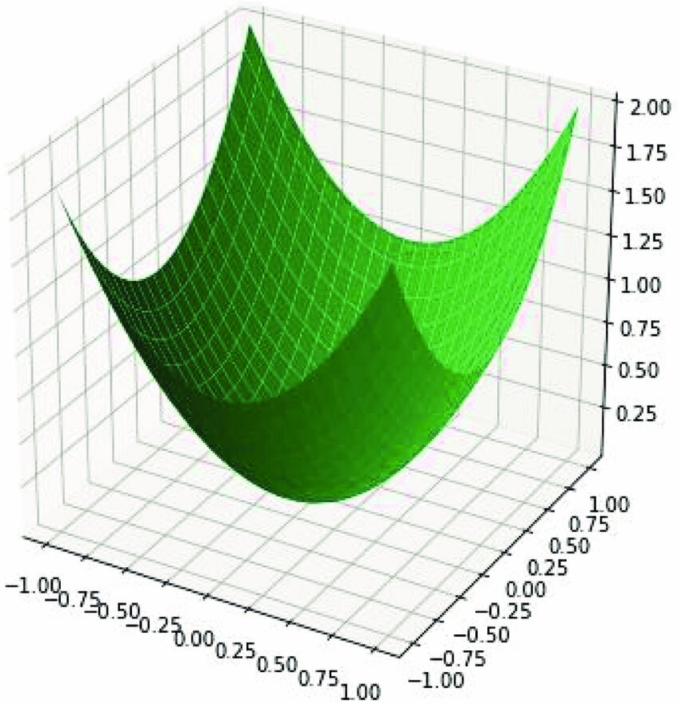
```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np

fig = plt.figure(figsize=(7,7))
ax = fig.gca(projection='3d')

''' Коэффициенты уравнения '''
coefs = (1, 2, 2)
''' Радиусы, соответствующие коэффициентам '''
rx, ry, rz = 1/np.sqrt(coefs)

''' Сферические углы '''
u = np.linspace(0, 2 * np.pi, 100)
v = np.linspace(0, np.pi, 100)

''' Уравнение эллипсоида '''
x = rx * np.outer(np.cos(u), np.sin(v))
y = ry * np.outer(np.sin(u), np.sin(v))
z = rz * np.outer(np.ones_like(u), np.cos(v))

ax.plot_surface(x, y, z,  rstride=4, cstride=4, color='g')

plt.show()
```



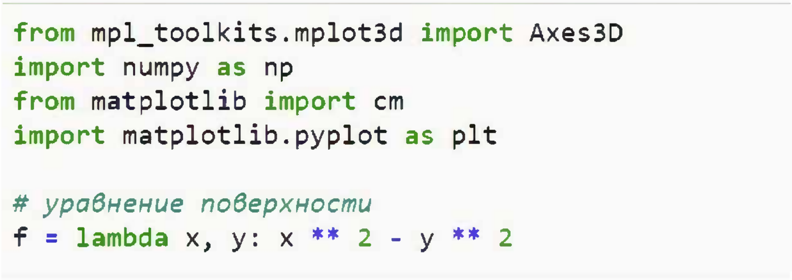
Эллиитический иараболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.$



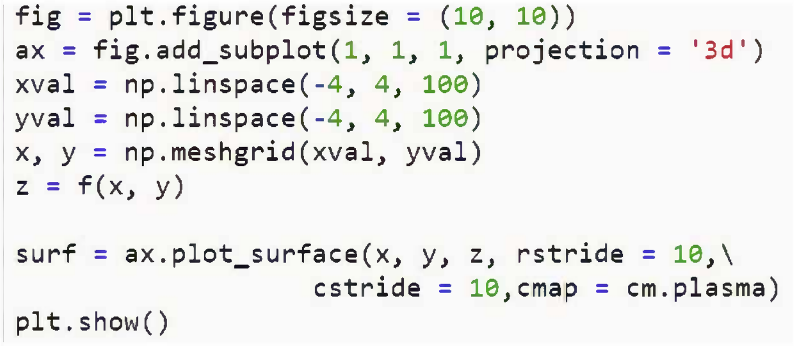
```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

fig = plt.figure(figsize=(7,7))
ax = fig.gca(projection='3d')

x = np.linspace(-1,1,100);
y = np.linspace(-1,1,100);
[x,y] = np.meshgrid(x,y);

z = lambda w: w[0]**2 + w[1]**2
Z = z((x,y))


ax.plot_surface(x, y, Z,  rstride=4, cstride=4, color='#11aa55')
plt.show()
```



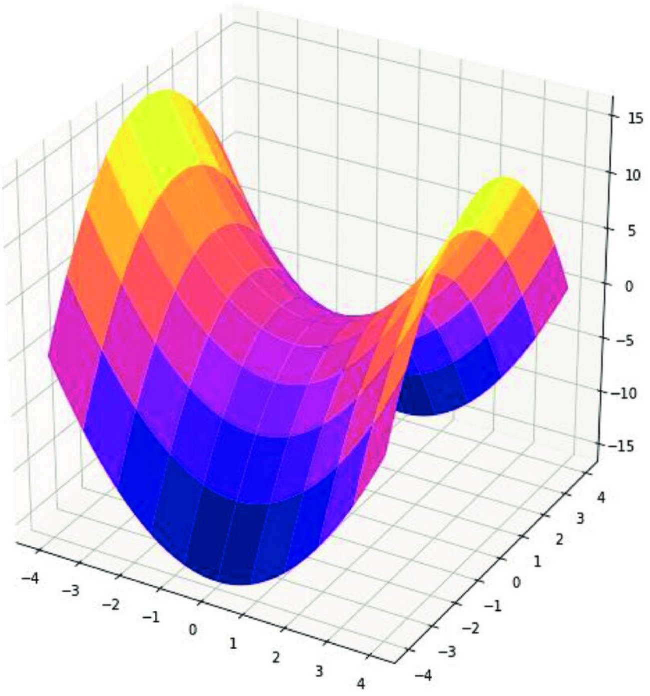
Гииерболический иараболоид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$



```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np
from matplotlib import cm
import matplotlib.pyplot as plt

# уравнение поверхности
f = lambda x, y: x ** 2 - y ** 2
```

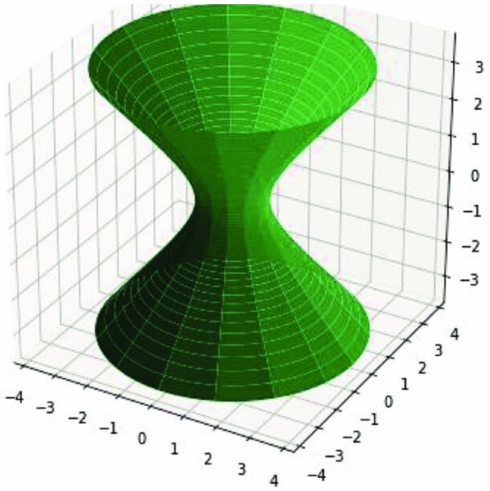


```
fig = plt.figure(figsize = (10, 10))
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1, projection = '3d')
xval = np.linspace(-4, 4, 100)
yval = np.linspace(-4, 4, 100)
x, y = np.meshgrid(xval, yval)
z = f(x, y)

surf = ax.plot_surface(x, y, z, rstride = 10,\
                   cstride = 10,cmap = cm.plasma)
plt.show()
```

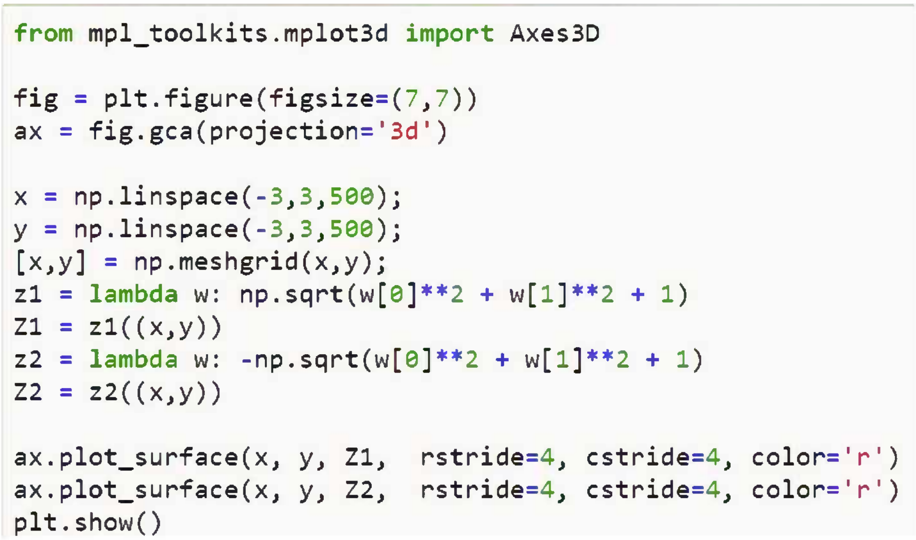


Однонолосный гннерболонд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

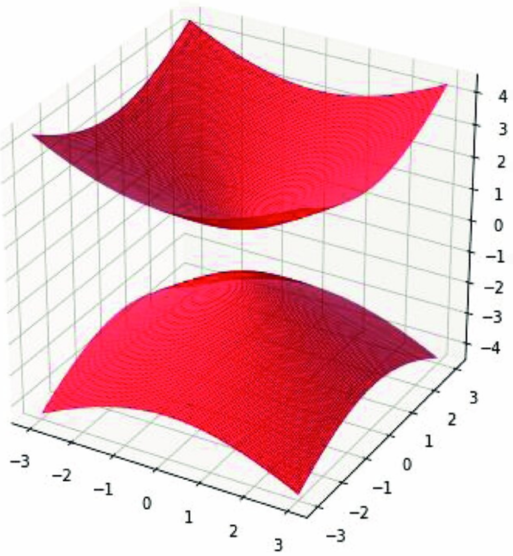
```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

fig = plt.figure(figsize=(7,7))
ax = fig.gca(projection='3d')

u=np.linspace(-2,2,200);
v=np.linspace(0,2*np.pi,60);
[u,v]=np.meshgrid(u,v);

x = np.cosh(u)*np.cos(v)
y = np.cosh(u)*np.sin(v)
z = np.sinh(u)

ax.plot_surface(x, y, z,  rstride=4, cstride=4, color='#11aa55')

plt.show()
```



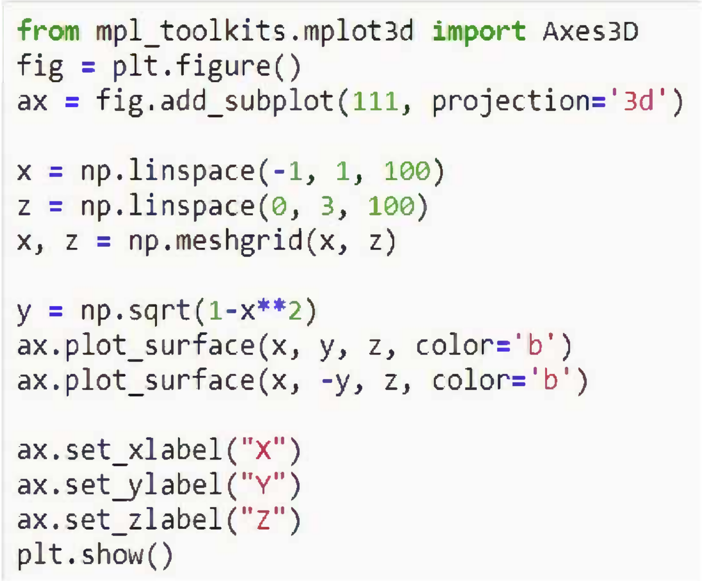
Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$



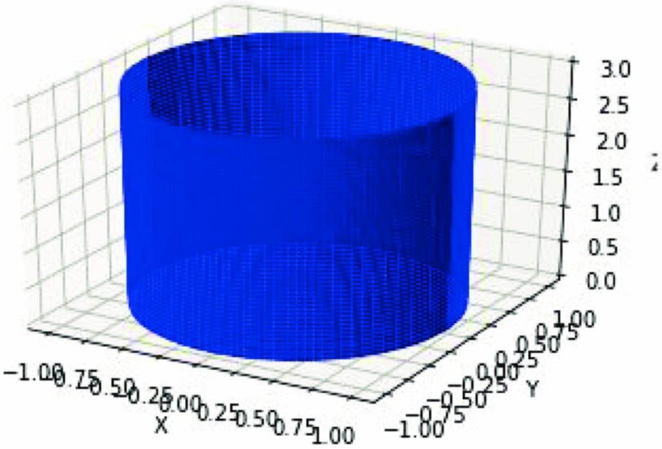
```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

fig = plt.figure(figsize=(7,7))
ax = fig.gca(projection='3d')

x = np.linspace(-3,3,500);
y = np.linspace(-3,3,500);
[x,y] = np.meshgrid(x,y);
z1 = lambda w: np.sqrt(w[0]**2 + w[1]**2 + 1)
Z1 = z1((x,y))
z2 = lambda w: -np.sqrt(w[0]**2 + w[1]**2 + 1)
Z2 = z2((x,y))

ax.plot_surface(x, y, Z1,  rstride=4, cstride=4, color='r')
ax.plot_surface(x, y, Z2,  rstride=4, cstride=4, color='r')
plt.show()
```



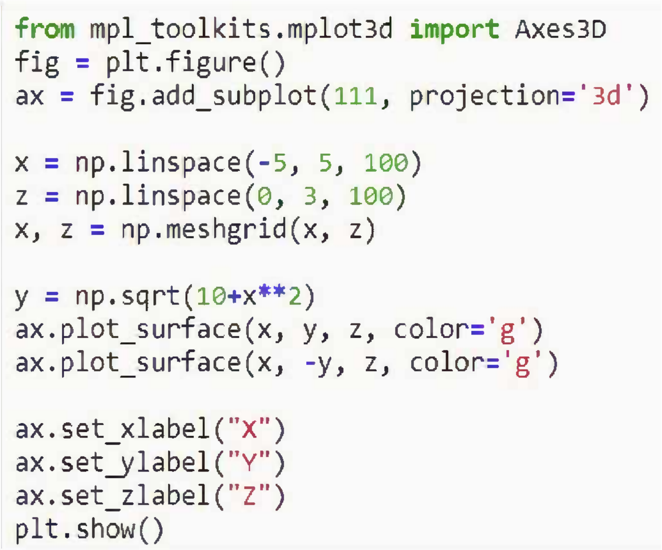
Эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$



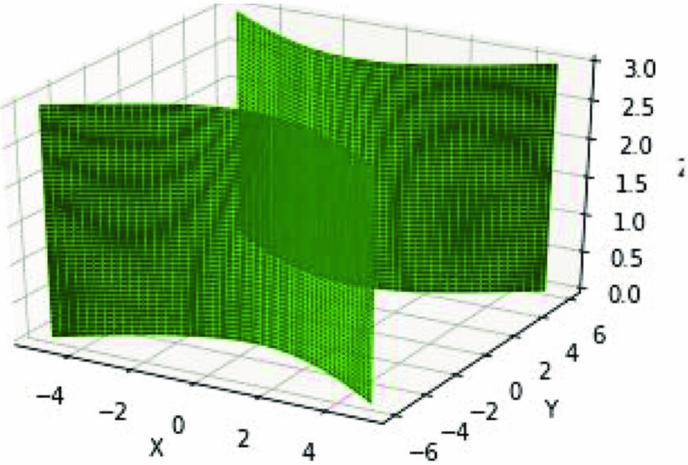
```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

x = np.linspace(-1, 1, 100)
z = np.linspace(0, 3, 100)
x, z = np.meshgrid(x, z)

y = np.sqrt(1-x**2)
ax.plot_surface(x, y, z, color='b')
ax.plot_surface(x, -y, z, color='b')

ax.set_xlabel("X")
ax.set_ylabel("Y")
ax.set_zlabel("Z")
plt.show()
```



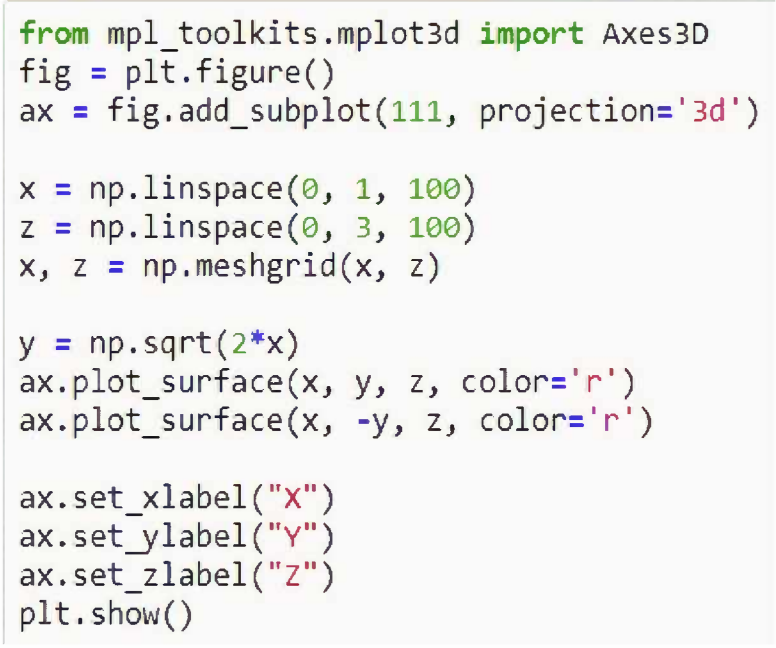
Гиперболический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$



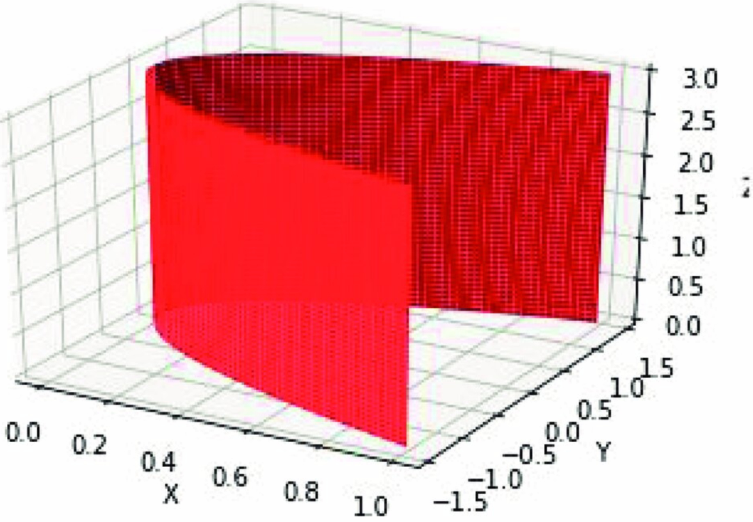
```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

x = np.linspace(-5, 5, 100)
z = np.linspace(0, 3, 100)
x, z = np.meshgrid(x, z)

y = np.sqrt(10+x**2)
ax.plot_surface(x, y, z, color='g')
ax.plot_surface(x, -y, z, color='g')

ax.set_xlabel("X")
ax.set_ylabel("Y")
ax.set_zlabel("Z")
plt.show()
```



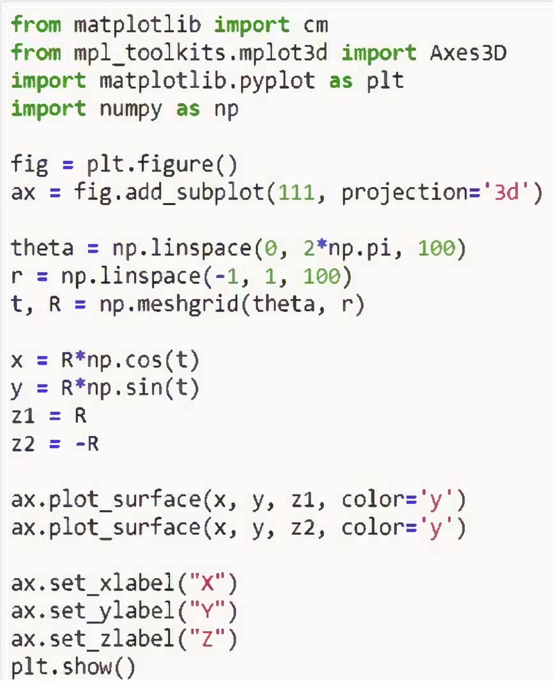
Параболический цилиндр $y^2 = 2px$.



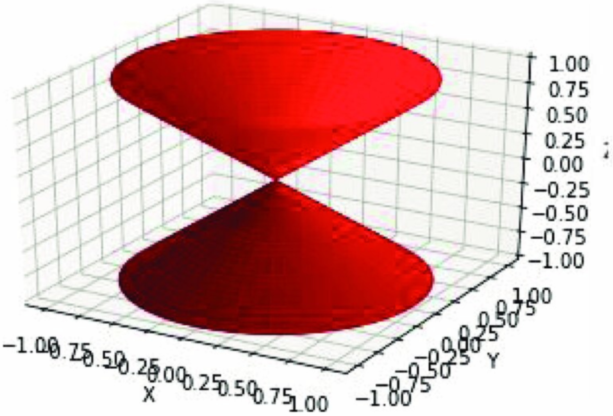
```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

x = np.linspace(0, 1, 100)
z = np.linspace(0, 3, 100)
x, z = np.meshgrid(x, z)

y = np.sqrt(2*x)
ax.plot_surface(x, y, z, color='r')
ax.plot_surface(x, -y, z, color='r')

ax.set_xlabel("X")
ax.set_ylabel("Y")
ax.set_zlabel("Z")
plt.show()
```



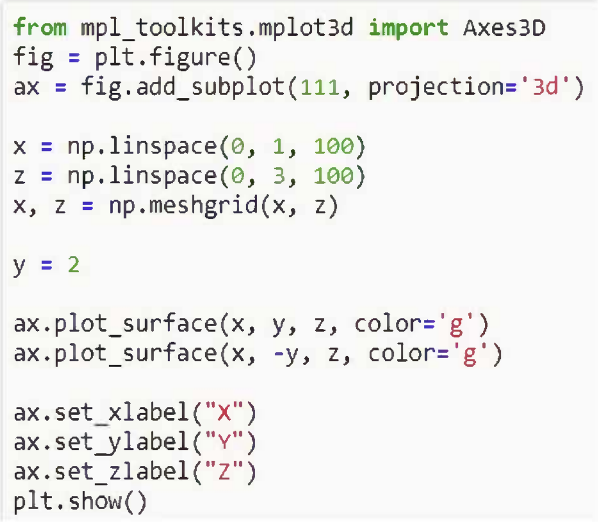
Конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$



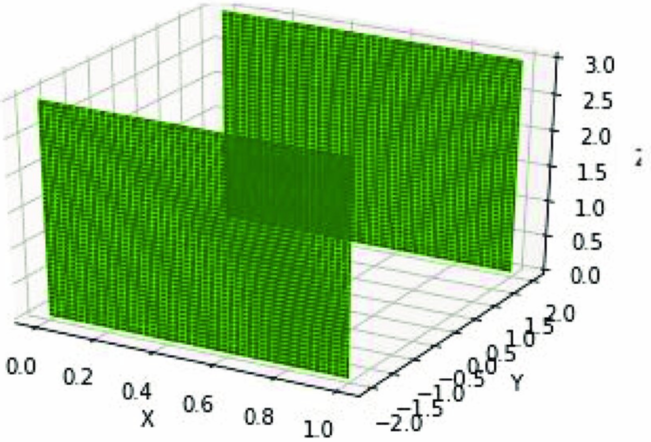
```
from matplotlib import cm
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
r = np.linspace(-1, 1, 100)
t, R = np.meshgrid(theta, r)

x = R*np.cos(t)
y = R*np.sin(t)
z1 = R
z2 = -R

ax.plot_surface(x, y, z1, color='y')
ax.plot_surface(x, y, z2, color='y')

ax.set_xlabel("X")
ax.set_ylabel("Y")
ax.set_zlabel("Z")
plt.show()
```



Пара нараллельных плоскостей $y^2-b^2=0.$

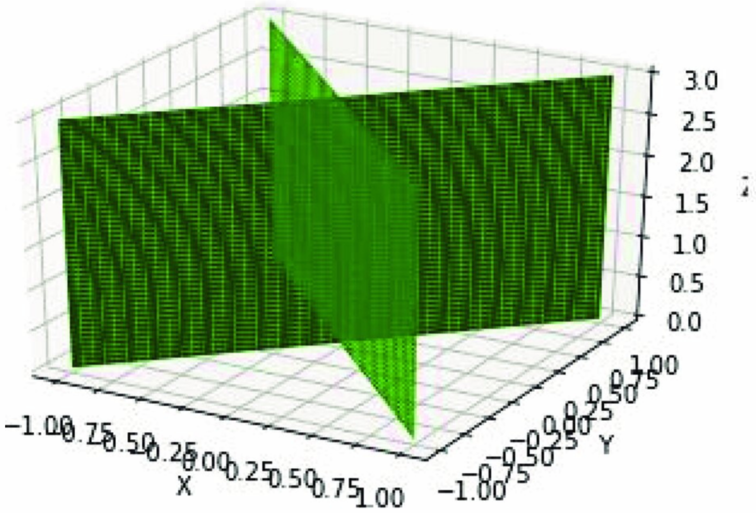


```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

x = np.linspace(0, 1, 100)
z = np.linspace(0, 3, 100)
x, z = np.meshgrid(x, z)

y = 2

ax.plot_surface(x, y, z, color='g')
ax.plot_surface(x, -y, z, color='g')

ax.set_xlabel("X")
ax.set_ylabel("Y")
ax.set_zlabel("Z")
plt.show()
```



Пара пересекающпхся плоскостей $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

x = np.linspace(-1, 1, 100)
z = np.linspace(0, 3, 100)
x, z = np.meshgrid(x, z)

y = x

ax.plot_surface(x, y, z, color='g')
ax.plot_surface(x, -y, z, color='g')

ax.set_xlabel("X")
ax.set_ylabel("Y")
ax.set_zlabel("Z")
plt.show()
```



Приведение поверхности второго порядка к каноническому виду

В разделе «Функции в Python», с. 31 приведен текст функции conic_surface(). Данная функция по коэффициентам уравнения поверхности второго порядка определяет тип поверхности. Кроме того, функция выполняет преобразование поворота системы координат, в результате чего уравнение в новых переменных не содержит слагаемых с произведением переменных. Для получения канонического уравнения нужно будет, при необходимости, совершить сдвиг. Формулы соответствующей замены строятся при помощи выделения полного квадрата.

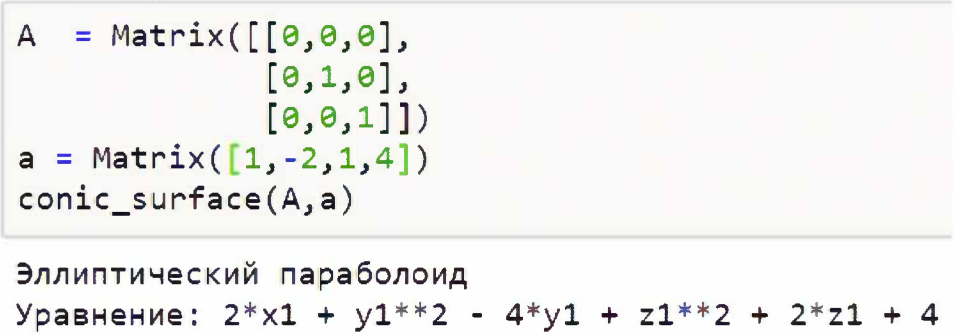
Входными параметрами функции являются:

- A, матрица квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$;
- a, вектор, содержащий коэффициенты при переменных x, y, z и свободный член: $A = (a_{14} \quad a_{24} \quad a_{34} \quad a_{44})$;
- f_transform, признак: если равен 0 (по умолчанию), функция выводит только наименование типа поверхности; если равен 1, выводятся также уравнения замены переменных при преобразовании поворота.

Пример 19. Определить тип и привести к каноническому виду поверхность второго порядка

$$2x + y^2 - 4y + z^2 + 2z + 4 = 0.$$

Решение.



```
A  = Matrix([[0,0,0],
             [0,1,0],
             [0,0,1]])
a = Matrix([1,-2,1,4])
conic_surface(A,a)
```

```
Эллиптический параболоид
Уравнение: 2*x1 + y1**2 - 4*y1 + z1**2 + 2*z1 + 4
```

Выделяя полный квадрат и переобозначая переменные, получим

$$(y_1 - 2)^2 + (z_1 + 1)^2 + 2x_1 - 1 = 0; \quad x_2^2 + y_2^2 = 2z_2;$$

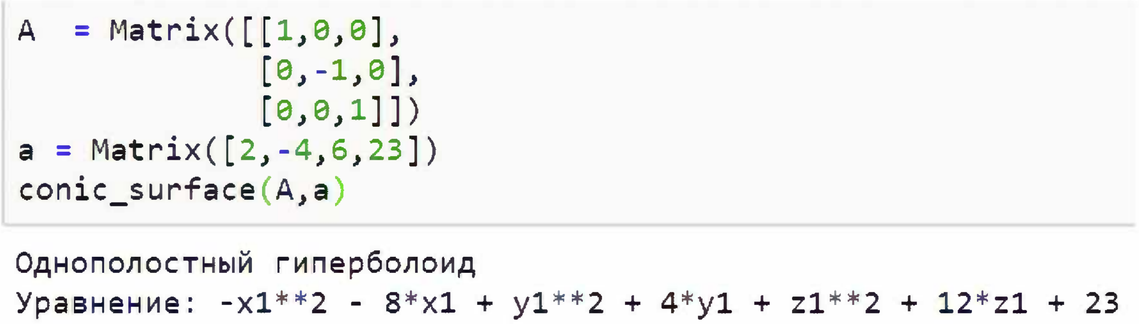
$$x_2 = z_1 + 1, \ \ y_2 = y_1 - 1, \ \ z_2 = -x_1 + \frac{1}{2}.$$

Ответ: эллиптический параболоид; $x_2^2 + y_2^2 = 2z_2$.

Пример 20. Определпть тип и привести к каноническому виду поверхность второго порядка

$$x^2+4x-y^2-8y+z^2+12z+23=0.$$

Решение.



```
A   = Matrix([[1,0,0],
             [0,-1,0],
             [0,0,1]])
a = Matrix([2,-4,6,23])
conic_surface(A,a)
```

```
Однополостный гиперболоид
Уравнение: -x1**2 - 8*x1 + y1**2 + 4*y1 + z1**2 + 12*z1 + 23
```

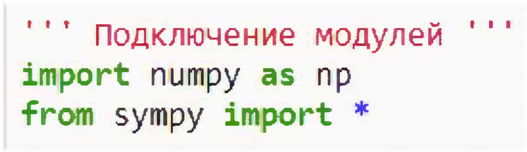
Выделяя полный квадрат и переобозначая переменные, получим

$$-(x_1+4)^2+16+(y_1+2)^2-4+(z_1+6)^2-36+23=0;$$

$$z_2=x_1+4,\;\; y_2=y_1+2,\;\; x_2=z_1+6.$$

Ответ: однополостный гиперболоид; $x_2^2+y_2^2-z_2^2=1$.

Примеры решения задач



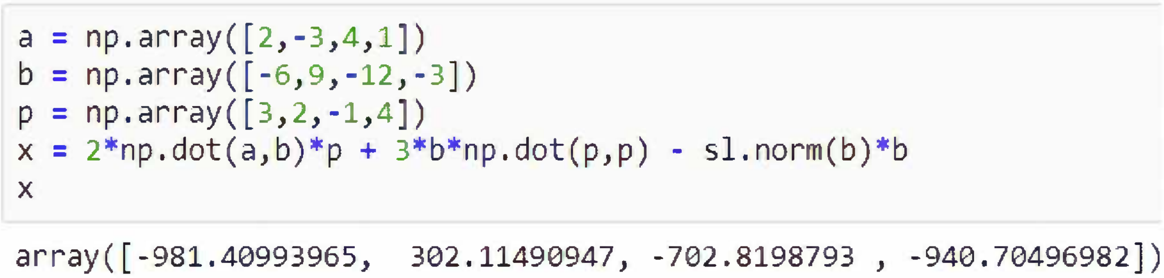
```
''' Подключение модулей '''
import numpy as np
from sympy import *
```

1. Даны векторы

$$a=(2,-3,4,1),\, b=(-6,9,-12,-3),\, p=(3,2,-1,4).$$

Вычислить:

$$x=2(a,b)\cdot p+3b(p,p)-|b|\cdot b.$$



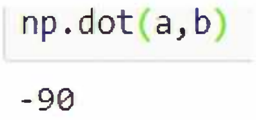
```
a = np.array([2,-3,4,1])
b = np.array([-6,9,-12,-3])
p = np.array([3,2,-1,4])
x = 2*np.dot(a,b)*p + 3*b*np.dot(p,p) - sl.norm(b)*b
x
```

```
array([-981.40993965,  302.11490947, -702.8198793 , -940.70496982])
```

2. Определить, какой угол между векторами

$$a=(2,-3,4,1),\, b=(-6,9,-12,-3):$$

острый, тупой или прямой.



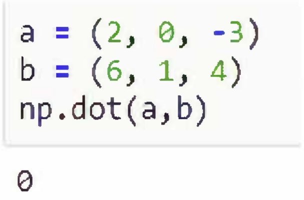
```
np.dot(a,b)
```

```
-90
```

Скалярное произведение меньше нуля, следовательно, $\cos\alpha < 0$, значит, угол – тупой.

3. Являются ли ортогональными векторы

$$a = (2,0,-3),\ b = (6,1,4)\ ?$$

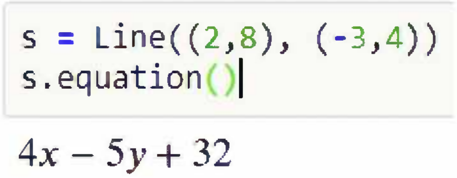


```
a = (2, 0, -3)
b = (6, 1, 4)
np.dot(a,b)
```

```
0
```

Так как скалярное произведение равно 0, векторы – ортогональны.

4. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;\ 8)$ и $B(-3;\ 4)$.



```
s = Line((2,8), (-3,4))
s.equation()
```

$$4x - 5y + 32$$

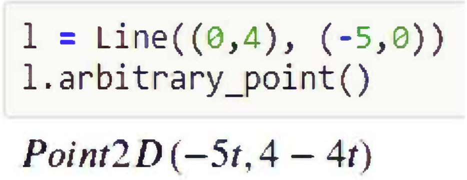
Ответ: $4x - 5y = -32$.

5. Прямую l, заданную общим уравнением

$$4x - 5y + 20 = 0,$$

записать в параметрическом виде.

Решение: Прямая проходит через точки $A(0;\ 4)$, $B(-5;\ 0)$. Проводим прямую и находим ее параметрическое уравнение.



```
l = Line((0,4), (-5,0))
l.arbitrary_point()
```

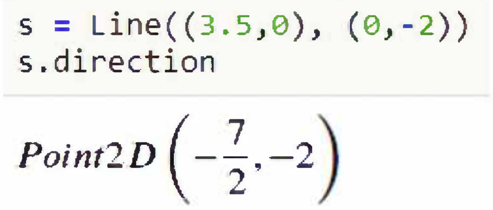
$$Point2D(-5t, 4 - 4t)$$

Ответ: $x = -5t$, $y = 4 - 4t$, $t \in \mathbb{R}$.

6. Найти направляющий вектор прямой, заданной уравнением

$$4x - 7y - 14 = 0.$$

Решение: Прямая ироходит через точки $A(3{,}5;\ 0)$ и $B(0;\ -2)$.



```
s = Line((3.5,0), (0,-2))
s.direction
```

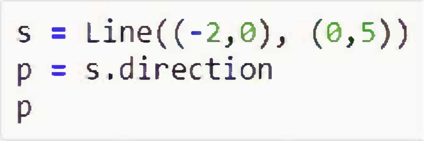
$$Point2D\left(-\frac{7}{2}, -2\right)$$

7. Прямую s, представленную общим уравнением:

$$5x - 2y + 10 = 0,$$

записать в каноническом виде.

Решение. Прямая проходит через точки $A(0; 5)$ и $B(-2; 0)$. Находим ее направляющий вектор.



```
s = Line((-2,0), (0,5))
p = s.direction
p
```

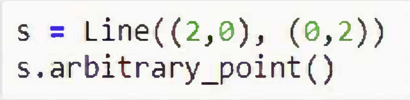
$Point2D(2, 5)$

Каноническое уравнение записываем для прямой, проходящей через точку A, и с направляющим вектором p.

Ответ: $\frac{x-0}{2} = \frac{y-5}{5}$.

8. Прямую s, представленную общим уравнением: $x + y - 2 = 0$, записать в параметрическом виде.

Решение. Прямая проходит через точки $A(0; 2)$ и $B(2; 0)$. Проводим прямую и находим ее параметрическое уравнение.

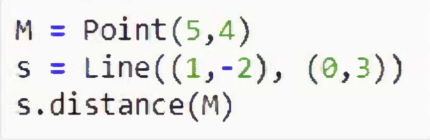


```
s = Line((2,0), (0,2))
s.arbitrary_point()
```

$Point2D(2 - 2t, 2t)$

Ответ: $x = 2 - 2t,\ y = 2t,\ t \in R$.

9. Вычислить расстояние от точки $M(5; 4)$ до прямой, проходящей через точки $A(1; -2)$ и $B(0; 3)$.

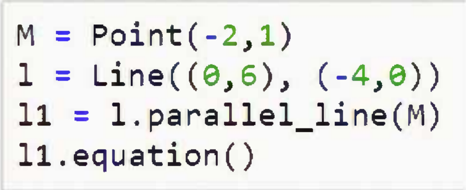


```
M = Point(5,4)
s = Line((1,-2), (0,3))
s.distance(M)
```

$\sqrt{26}$

10. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M и параллельной прямой l, если $M(-2; 1)$, l: $3x - 2y + 12 = 0$.

Решение. По уравнению прямой $3x - 2y + 12 = 0$ определяем, что она проходит через точки (0;6) и (–4;0).



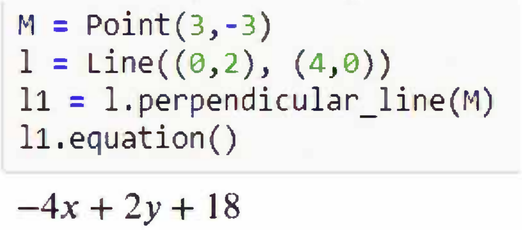
```
M = Point(-2,1)
l = Line((0,6), (-4,0))
l1 = l.parallel_line(M)
l1.equation()
```

$6x - 4y + 16$

Ответ: $3x - 2y = -8$.

11. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой l, если $M(3; -3)$, l: $x + 2y - 4 = 0$.

Решение. Прямая l проходит через точки (0; 2) и (4; 0).



```
M = Point(3,-3)
l = Line((0,2), (4,0))
l1 = l.perpendicular_line(M)
l1.equation()
```

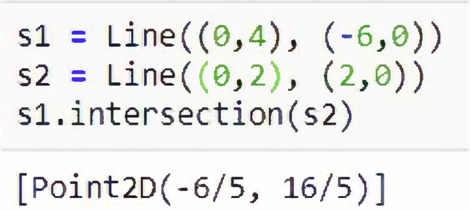
$$-4x + 2y + 18$$

Ответ: $2x - y = 9$.

12. Найти точку пересечения прямых

$$s_1: 2x - 3y + 12 = 0 \text{ и } s_2: x + y - 2 = 0.$$

Решение. Прямая s_1 проходит через точки $A_1(0; 4)$ и $B_1(-6; 0)$, s_2 – через точки $A_2(0; 2)$, $B_2(2;0)$.

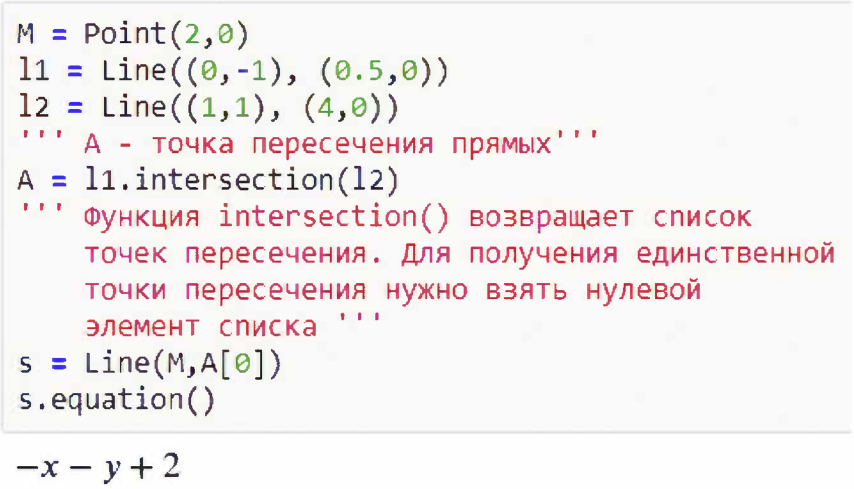


```
s1 = Line((0,4), (-6,0))
s2 = Line((0,2), (2,0))
s1.intersection(s2)
```

```
[Point2D(-6/5, 16/5)]
```

13. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M и точку пересечения прямых l_1 и l_2, если $M(2; 0)$, l_1: $2x - y - 1 = 0$, l_2: $x + 3y - 4 = 0$.

Решение. Прямая l_1 проходит через точки (0; –1) и (0,5; 0). Прямая l_2 проходит через точки (1; 1) и (4; 0).



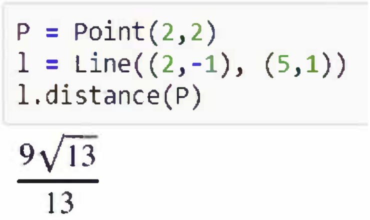
```
M = Point(2,0)
l1 = Line((0,-1), (0.5,0))
l2 = Line((1,1), (4,0))
''' A - точка пересечения прямых'''
A = l1.intersection(l2)
''' Функция intersection() возвращает список
    точек пересечения. Для получения единственной
    точки пересечения нужно взять нулевой
    элемент списка '''
s = Line(M,A[0])
s.equation()
```

$$-x - y + 2$$

Ответ: $x + y = 2$.

14. Найти расстояние от точки $P(2; 2)$ до прямой l, заданной в каноническом виде: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2}$.

Решение. Прямая проходит через точки (2; –1) и (5; 1).



```
P = Point(2,2)
l = Line((2,-1), (5,1))
l.distance(P)
```

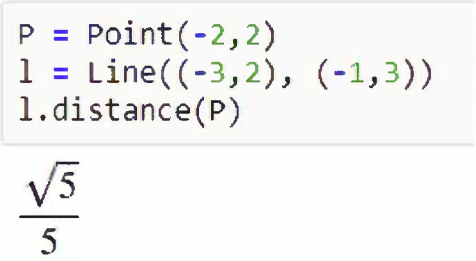
$$\frac{9\sqrt{13}}{13}$$

15. Найти расстояние от точки $P(-2;\ 2)$ до прямой l, записанной в параметрической форме:

$$x = 2t - 3,\ y = t + 2.$$

Решение. Прямая проходит через точки:

$(-3;\ 2)$ (при $t = 0$) и $(-1;\ 3)$ (при $t = 1$).

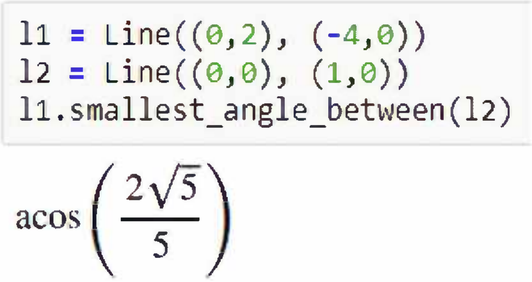


```
P = Point(-2,2)
l = Line((-3,2), (-1,3))
l.distance(P)
```

$$\frac{\sqrt{5}}{5}$$

16. Найти угол пересечения прямой $x - 2y + 4 = 0$ с осью Ox.

Решение. Прямая проходит через точки (0; 2) и (–4; 0). Ось Ox проходит через точки (0; 0) и (1; 0).

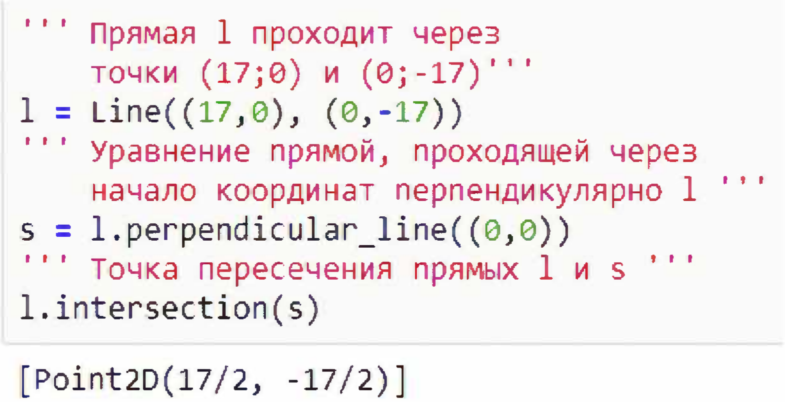


```
l1 = Line((0,2), (-4,0))
l2 = Line((0,0), (1,0))
l1.smallest_angle_between(l2)
```

$$\operatorname{acos}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

17. Найти координаты основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую l, заданную уравнением:

$$x - y - 17 = 0.$$

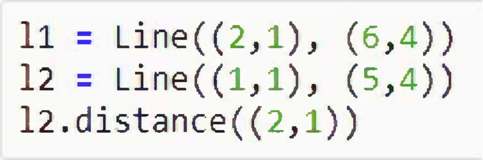


```
''' Прямая l проходит через
    точки (17;0) и (0;-17)'''
l = Line((17,0), (0,-17))
''' Уравнение прямой, проходящей через
    начало координат перпендикулярно l '''
s = l.perpendicular_line((0,0))
''' Точка пересечения прямых l и s '''
l.intersection(s)
```

```
[Point2D(17/2, -17/2)]
```

18. Найти расстояние между иараллельными ирямыми l_1, l_2, заданными уравиениями $3x - 4y - 2 = 0$ и $3x - 4y + 1 = 0$.

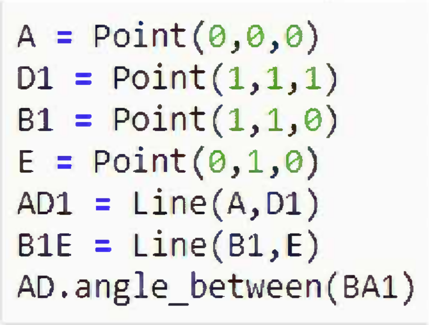
Решение. Прямая l_1 проходит через точки (2; 1), (6; 4). Прямая l_2 проходит через точки (1;1), (5;4). Искомое расстояние равно расстояиию от произвольной точки первой прямой (возьмем (2; 1)) до второй прямой.



```
l1 = Line((2,1), (6,4))
l2 = Line((1,1), (5,4))
l2.distance((2,1))
```

$$\frac{3}{5}$$

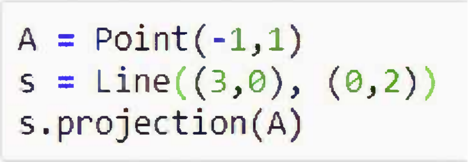
19. Даи куб $ABDEA_1B_1D_1E_1$ со стороиой, равиой 1. Найти угол между диагоиалями AD_1 и B_1E.



```
A = Point(0,0,0)
D1 = Point(1,1,1)
B1 = Point(1,1,0)
E = Point(0,1,0)
AD1 = Line(A,D1)
B1E = Line(B1,E)
AD.angle_between(BA1)
```

$$\frac{2\pi}{3}$$

20. Найти проекцию точки $A(-1; 1)$ на прямую s: $2x + 3y = 6$.
Решение. Прямая проходит через точки $B(3; 0)$, $C(0; 2)$.



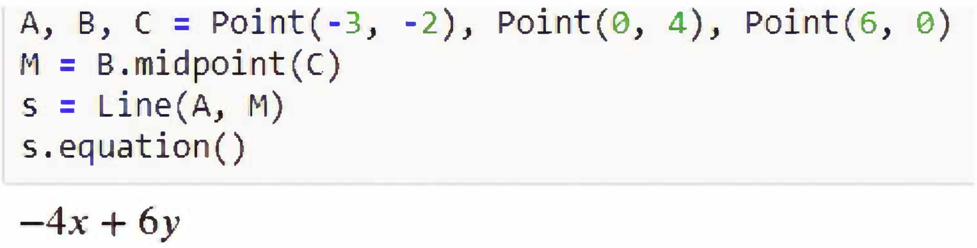
```
A = Point(-1,1)
s = Line((3,0), (0,2))
s.projection(A)
```

$$Point2D\left(-\frac{3}{13}, \frac{28}{13}\right)$$

21. Наиисать уравиеипе медианы и высоты, ироведеиных из вершины A треугольника ABC, если задаиы вершины:

$$A(-1; -5),\ \ B(3; -1),\ \ C(1; -2).$$

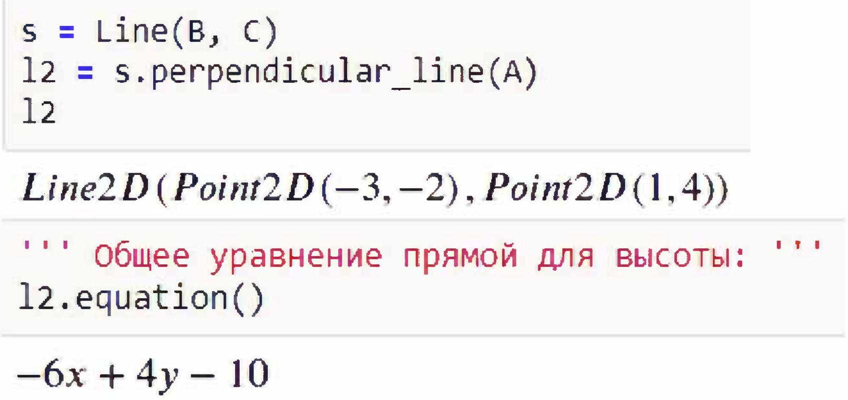
Решение. Медиаиа AM проходит через точку M – середииу отрезка BC.



```
A, B, C = Point(-3, -2), Point(0, 4), Point(6, 0)
M = B.midpoint(C)
s = Line(A, M)
s.equation()
```

$$-4x + 6y$$

Уравнение высоты AH найдем как уравнение прямой, перпендикулярной прямой BC и проходящей через точку A.



```
s = Line(B, C)
l2 = s.perpendicular_line(A)
l2
```

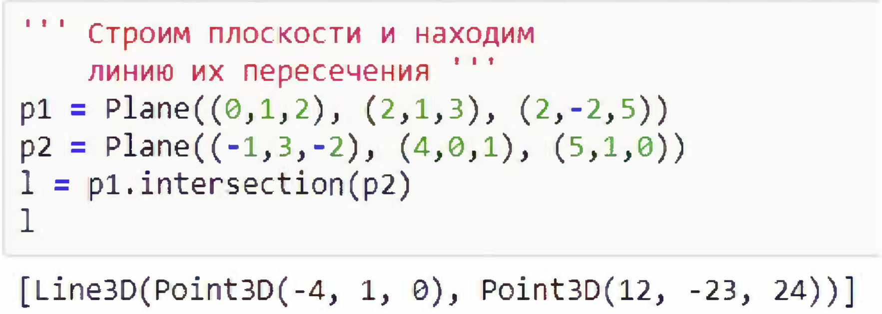
$$Line2D(Point2D(-3,-2), Point2D(1,4))$$

```
''' Общее уравнение прямой для высоты: '''
l2.equation()
```

$$-6x + 4y - 10$$

Ответ: $-2x + 3y = 0$; $-3x + 2y = 10$.

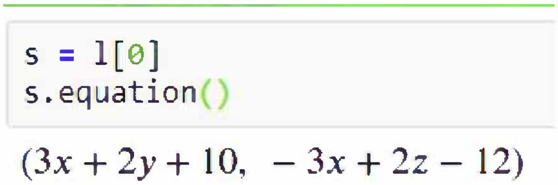
22. Найти уравнение прямой l, являющейся пересечением плоскостей p_1 и p_2, если p_1 проходит через точки (0; 1; 2), (2; 1; 3) и 2; –2; 5), а p_2 проходит через точки (–1; 3; –2), (4; 0; 1) и (5; 1; 0).



```
''' Строим плоскости и находим
    линию их пересечения '''
p1 = Plane((0,1,2), (2,1,3), (2,-2,5))
p2 = Plane((-1,3,-2), (4,0,1), (5,1,0))
l = p1.intersection(p2)
l
```

```
[Line3D(Point3D(-4, 1, 0), Point3D(12, -23, 24))]
```

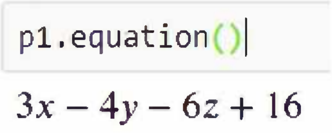
Полученный объект является списком. Чтобы получить уравнение, используем $l[0]$.



```
s = l[0]
s.equation()
```

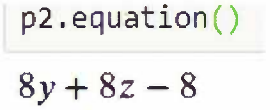
$$(3x + 2y + 10, \ -3x + 2z - 12)$$

Второй способ. Находим уравнения плоскостей. Прямая задается системой из полученных уравнений.



```
p1.equation()
```

$$3x - 4y - 6z + 16$$



```
p2.equation()
```

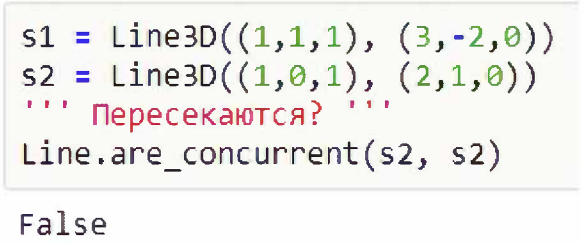
$8y + 8z - 8$

Система другая. Но она эквивалентна первой (множества их решений совпадают).

Ответ: $\begin{cases} 3x + 2y + 10 = 0, \\ -3x + 2z - 12 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 3x - 4y - z + 16 = 0, \\ \quad y + z - 1 = 0. \end{cases}$

23. Выяснить характер расположения прямых *AB* и *CD* (пересекаются, параллельны или скрещиваются), где *A*(1; 1; 1), *B*(3; –2; 0), *C*(1; 0; 1), *D*(2; 1; 0).

Решение.

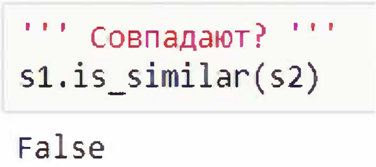


```
s1 = Line3D((1,1,1), (3,-2,0))
s2 = Line3D((1,0,1), (2,1,0))
''' Пересекаются? '''
Line.are_concurrent(s2, s2)
```

```
False
```

```
''' Параллельны? '''
Line.is_parallel(s1, s2)
```

```
False
```



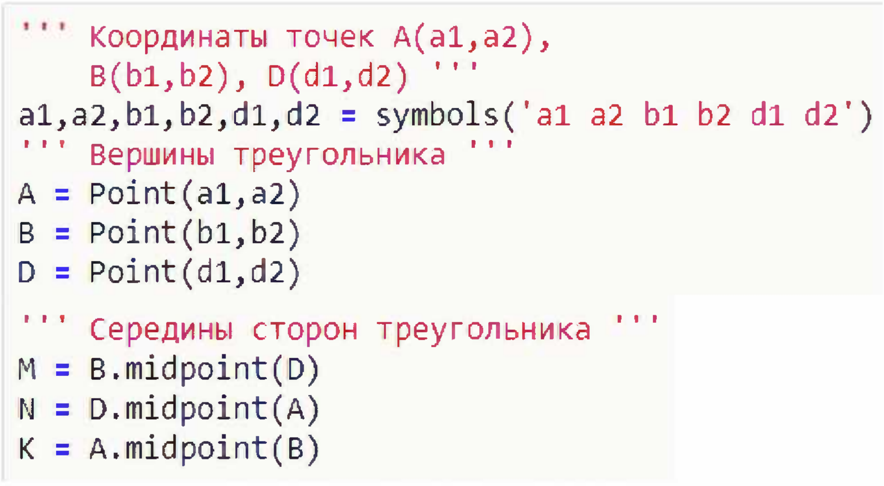
```
''' Совпадают? '''
s1.is_similar(s2)
```

```
False
```

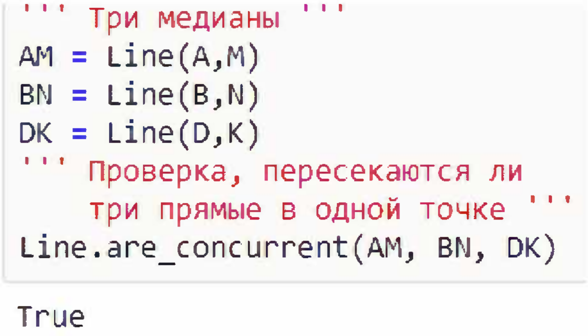
Ответ: скрещиваются.

24. Доказать, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Решение.



```
''' Координаты точек A(a1,a2),
    B(b1,b2), D(d1,d2) '''
a1,a2,b1,b2,d1,d2 = symbols('a1 a2 b1 b2 d1 d2')
''' Вершины треугольника '''
A = Point(a1,a2)
B = Point(b1,b2)
D = Point(d1,d2)
''' Середины сторон треугольника '''
M = B.midpoint(D)
N = D.midpoint(A)
K = A.midpoint(B)
```



```
''' Три медианы '''
AM = Line(A,M)
BN = Line(B,N)
DK = Line(D,K)
''' Проверка, пересекаются ли
    три прямые в одной точке '''
Line.are_concurrent(AM, BN, DK)
```

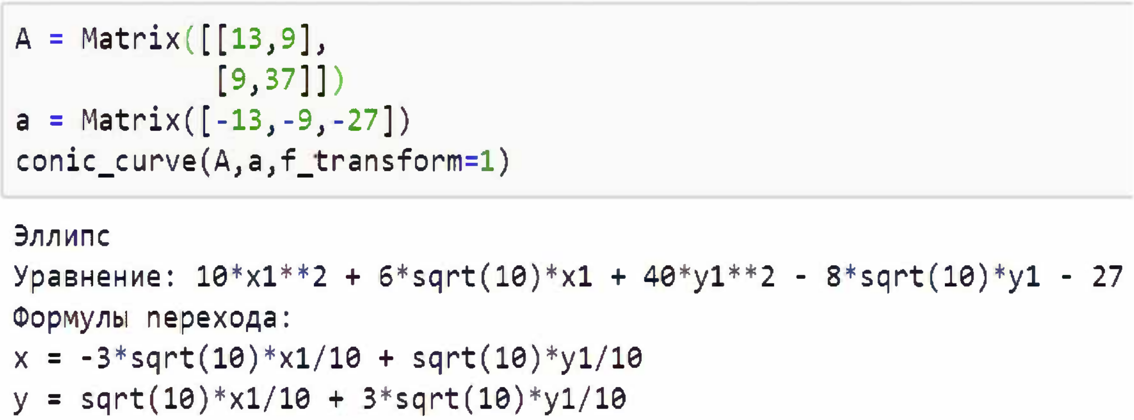
```
True
```

25. Определить тип кривой второго порядка

$$13x^2 + 18xy + 37y^2 - 26x - 18y - 27 = 0.$$

Найти каноническое уравнение и записать формулы перехода к новым переменным.

Решение. Используем функцию conic_curve() (текст на с. 29).



```
A = Matrix([[13,9],
            [9,37]])
a = Matrix([-13,-9,-27])
conic_curve(A,a,f_transform=1)
```

```
Эллипс
Уравнение: 10*x1**2 + 6*sqrt(10)*x1 + 40*y1**2 - 8*sqrt(10)*y1 - 27
Формулы перехода:
x = -3*sqrt(10)*x1/10 + sqrt(10)*y1/10
y = sqrt(10)*x1/10 + 3*sqrt(10)*y1/10
```

Выделяем полный квадрат по обеим переменным.

$$10x_1^2 + 6\sqrt{10}x_1 + 40y_1^2 - 8\sqrt{10}y_1 =$$

$$10\left(x_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}\right) - 9 + 40\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right) - 4.$$

Получаем уравнение

$$10\left(x_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}\right) + 40\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 40.$$

Для получения канонического уравнения выполняем сдвиг и делим обе части на 40.

Формулы перехода после поворота и сдвига:

$$\begin{cases} x = \frac{-3\sqrt{10}}{10}x_1 + \frac{\sqrt{10}}{10}y_1, \\ y = \frac{\sqrt{10}}{10}x_1 + \frac{3\sqrt{10}}{10}y_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}, \\ y_2 = y_1 - \frac{1}{\sqrt{10}}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x = \dfrac{-3\sqrt{10}}{10}\left(x_2 - \dfrac{3}{\sqrt{10}}\right) + \dfrac{\sqrt{10}}{10}\left(y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right), \\ y = \dfrac{\sqrt{10}}{10}\left(x_2 - \dfrac{3}{\sqrt{10}}\right) + \dfrac{3\sqrt{10}}{10}\left(y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = \dfrac{-3}{\sqrt{10}}x_2 + \dfrac{1}{\sqrt{10}}y_2 + 1, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}x_2 + \dfrac{3}{\sqrt{10}}y_2. \end{cases}$$

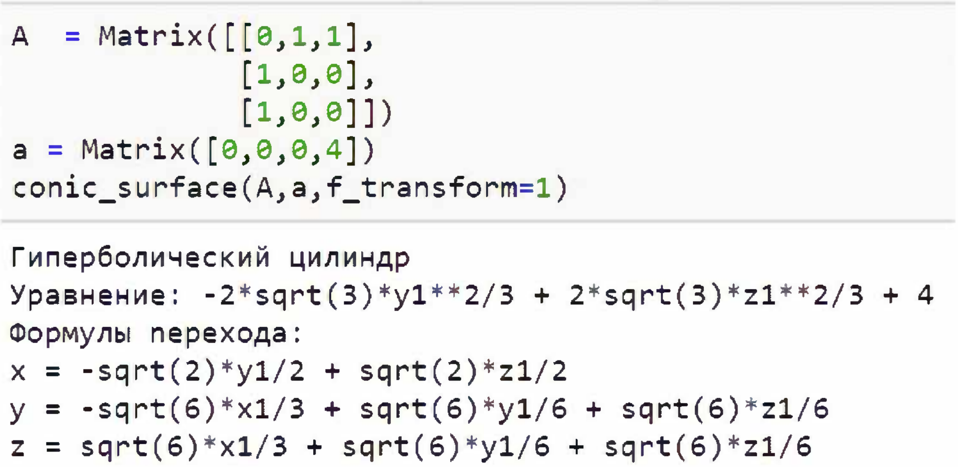
Ответ: эллипс; $\frac{x_2^2}{4} + y_2^2 = 1$; $\begin{cases} x = \frac{-3}{\sqrt{10}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{10}}y_2 + 1, \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}x_2 + \frac{3}{\sqrt{10}}y_2. \end{cases}$

26. Определить тип поверхности второго порядка

$$xy + xz + 4 = 0.$$

Найти каноническое уравнение и записать формулы перехода к новым переменным.

Решение. Используем функцию conic_surface (текст на с. 31).



```
A  = Matrix([[0,1,1],
             [1,0,0],
             [1,0,0]])
a = Matrix([0,0,0,4])
conic_surface(A,a,f_transform=1)
```

```
Гиперболический цилиндр
Уравнение: -2*sqrt(3)*y1**2/3 + 2*sqrt(3)*z1**2/3 + 4
Формулы перехода:
x = -sqrt(2)*y1/2 + sqrt(2)*z1/2
y = -sqrt(6)*x1/3 + sqrt(6)*y1/6 + sqrt(6)*z1/6
z = sqrt(6)*x1/3 + sqrt(6)*y1/6 + sqrt(6)*z1/6
```

Для получения канонического уравнения меняем обозначения переменных:

$$\begin{cases} x_2 = y_1, \\ y_2 = z_1, \\ z_2 = x_1. \end{cases}$$

Ответ: гиперболический цилиндр; $\frac{\sqrt{3}}{6}x_2^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}y_2^2 = 1$;

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y_2, \\ y = \dfrac{\sqrt{6}}{6}x_2 + \dfrac{\sqrt{6}}{6}y_2 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}z_2, \\ z = \dfrac{\sqrt{6}}{6}x_2 + \dfrac{\sqrt{6}}{6}y_2 + \dfrac{\sqrt{6}}{3}z_2. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить: $-4a+5b$, если $a=(1,1,2)$, $b=(0,-4,3)$.
   Ответ: $(-4,-24,7)$.
2. Найти координаты вектора $2a-7b+c-5d$, еслн $a=(-1,0,3,4,)$, $b=(2,-2,2,4)$, $c=(1,1,-1,8)$, $d=(0,7,-7,2)$.
   Ответ: $(-15,-20,26,-22)$.
3. Найти вектор x из уравнения
   $$a_1+2a_2+3a_3+4x=0,$$
   где
   $$a_1=(5,-8,-1,2),\ a_2=(2,-1,4,-3),\ a_3=(-3,2,-5,4).$$
   Ответ: $(0,1,2,-2)$.
4. Найти вектор x из уравнеиия
   $$3(a_1-x)+2(a_2+x)=5(a_3+x),$$
   где
   $$a_1=(2,5,1,3),\ a_2=(10,1,5,10),\ a_3=(4,1,-1,1).$$
   Ответ: $(1,2,3,4)$.
5. Найти координаты точки B, если точка A имеет коордииаты $A=(3,2,1)$, а вектор AB – коордннаты $AB=(8,-2,5)$.
   Ответ: $B(11,0,6)$.
6. Найти скалярное произведение векторов $a=(1,0,2,0,3,0,4,0)$ и $b=(-2,0,0,-1,2,3,-4,5)$.
   Ответ: –12.
7. Даиы векторы $a=(1,1,2)$, $b=(0,-4,3)$. Вычислить:
   $$2(a,a)-3|b|\cdot b.$$
   Ответ: (4; 64; –37).
8. У какого вектора: $a=(1,1,2,2,3,3,4,4)$ или $b=(-2,-1,0,1,2,3,4,5)$ больше длина?
   Ответ: одинаковые длииы.
9. Даны точки $P_1(-3;-3)$ и $P_2(1;5)$. Выясиить, прииадлежит ли точка $P(0;3)$ отрезку P_1P_2.
   Ответ: принадлежит.
10. Точка M принадлежит отрезку AB, причем $AM:MB=1:2$. Найти координаты точки M, если $A(2,-5,3)$, $B(11,4,12)$.
    Ответ: $M(5,-2,6)$.

11. Дан куб $ABDEA_1B_1D_1E_1$. Доказать, что диагонали A_1E и BD_1 перпендикулярны.

12. Найти косииус угла между векторами $a = (0,2,2)$ и $b = (-1,0,1)$.
Ответ: 0.5.

13. Найти синус угла между векторамн $a = (2,0,1)$ и $b = (0,1,0)$.
Ответ: 1.

14. В треугольнике ABC заданы вершнпы $A(1,2,1)$, $B(3,0,-1)$, $C(4,1,-1)$. Найти синус угла ABC.
Ответ: 1.

15. В кубе $ABDEA_1B_1D_1E_1$ точка M – середина ребра BB_1, N середина ребра AB. Найти косинус угла между прямыми AM и DN.
Ответ: $\frac{2}{5}$.

16. Найти векторное произведение векторов $a = (1,1,2)$ и $b = (0,-4,3)$.
Ответ: $(11,-3,-4)$.

17. Найти площадь треугольннка ABC, еслн $A(1,2,1)$, $B(3,-3,3)$, $C(4,-1,6)$.
Ответ: 10,7.

18. Коллннеарны ли векторы $c = 4a - 2b$ и $d = b - 2a$, иостроенные на векторах $a = (1,-2,5)$ н $b = (3,-1,0)$?
Ответ: да.

19. Найти площадь треугольника, построениого на векторах a и b как па сторонах, если $a = (2,-2,0)$ и $b = (5,0,5)$.
Ответ: 8,66.

20. Найти смешанное произведепие векторов $a = (1,2,3)$, $b = (1,1,1)$, $c = (1,2,1)$.
Ответ: 2.

21. Компланарны лн векторы $d = 2a - c$, $e = b + 2c$ и $f = 3a - 4b$, построенные на векторах $a = (-1,4,1)$, $b = (5,0,-18)$ и $c = (0,3,-2)$.
Ответ: нет.

22. Найти объем пирамиды, построенной на векторах

$$a = (1,2,3), b = (1,-1,1), c = (2,0,-1).$$

Ответ: 2,167.

23. Найти объем пирамиды $ABCD$, если $A(1,2,1)$, $B(3,-3,3)$, $C(4,-1,6)$, $D(0,-1,4)$.

Ответ: $9{,}667$.

24. Дан куб $ABDEA_1B_1D_1E_1$ со стороной, равной 1. Найти объем пирамиды AEA_1B.

    Ответ: $0{,}167$.

25. Дан параллелепипед $ABDEA_1B_1D_1E_1$ с вершинами $A(0{,}0{,}0)$, $B(0{,}2{,}0)$, $D(2{,}2{,}0)$, $E(2{,}0{,}0)$, $A_1(0{,}1{,}4)$, $B_1(0{,}3{,}4)$, $D_1(2{,}3{,}4)$, $E_1(2{,}1{,}4)$. Найти его объем.

    Ответ: 28.

26. Даны векторы: $a = (1{,}3{,}2)$, $b = (0{,}4{,}3)$, $c = (2,-2{,}2)$, $d = (0,-8,-6)$, $e = (3{,}9{,}6)$. Найти среди пар этих векторов: а) ортогональные, б) сонаправленные, в) образующие между собой угол, равный 0, г) угол, равный π.

    Ответ: а) *a* и *c*, *c* и *e*; б) *b* и *d*; в) *a* и *e*; г) *b* и *d*.

27. Найти проекцию вектора $a = (1{,}0{,}5)$ на вектор $b = (0{,}4{,}3)$.

    Ответ: 3.

28. Найти проекцию вектора $a = (-6{,}8)$ на прямую $y = x$.

    Ответ: $\sqrt{2}$.

29. Найти направляющие косинусы вектора $a = (3,-5{,}4)$.

    Ответ: $0{,}6;\ 0;\ -0{,}8$.

30. Вектор a составляет с положительными направлениями осей *Ox* и *Oy* соответственно углы 30° и 60°. Под каким углом расположен вектор *a* к оси *Oz*?

    Ответ: 90°.

31. Вектор *a* пространства $\mathbb{R}^3$ имеет длину 2 и расположен под равными углами в 45° к положительным направлениям осей *Ox* и *Oy*. Найти вектор *a*.

    Ответ: $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$.

32. Может ли вектор трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ составлять с координатными осями *Ox* и *Oz* углы, равные 30°?

    Ответ: нет.

33. Найти косинус угол между диагоналями *AD* и *BE* параллелограмма *ABDE*, если заданы три его вершины $A(2{,}1{,}3)$, $B(5{,}2,-1)$, $D(-3{,}3,-3)$.

    Ответ: 0,477.

34. В параллелограмме *ABDE* диагонали *AD* и *BE* пересекаются в точке *M*. Заданы координаты вершин *A*, *B* и точки *M*: $A(2{,}1{,}3)$, $B(5{,}2,-1)$, $M(3{,}2{,}0)$. Найти косинус угла *BAE*.

Ответ: 0,48.

35. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(4,0)$ и $B(-4,1)$.

Ответ: $x+8y=4$.

36. Прямую l проходит через точки $A(5,8)$ и $B(-1,3)$. Записать уравнение прямой l в параметрическом виде.

Ответ: $x=5-6t$, $y=8-5t$, $t\in\mathbb{R}$.

37. Найти направляющий вектор прямой, заданной уравнением

$$-x+5y-5=0.$$

Ответ: $(-5;-1)$ или $(5;1)$.

38. Прямую s, представленную общим уравнением: $2x+9y-18=0$, записать в параметрическом виде.

Ответ: $\frac{x-0}{9}=\frac{y-2}{-2}$.

39. Вычислить расстояние от точки $M(4,7)$ до прямой, проходящей через точки $A(1;0)$ и $B(-4;5)$.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

40. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M и параллельной прямой l, если $M(-1,1)$, l: $x-y+2=0$.

Ответ: $x-y=-2$.

41. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой l, если $M(-2;-2)$, l: $2x+5y-2=0$.

Ответ: $-5x+2y=6$.

42. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;3)$ на одинаковом расстоянии от точек $A(5;-1)$ и $B(3;7)$.

Ответ: $x-4y=-8$.

43. Найти точку пересечения прямых

$$s_1:\ x+4y+8=0 \text{ и } s_2:\ -x+3y-3=0.$$

Ответ: $\left(-\frac{36}{7};-\frac{5}{7}\right)$.

44. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M и точку пересечения прямых l_1 и l_2, если $M(2;-3)$, l_1: $x+y-2=0$, l_2: $x-2y-1=0$.

Ответ: $10x+y=17$.

45. Найти расстояние от точки $P(1;1)$ до прямой l, заданной в каноническом виде: $\frac{x-2}{-4}=\frac{y+2}{2}$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

46. Найти расстояние от точки $P(1;0)$ до прямой l, записанной в параметрической форме: $x = t + 1, y = 2t + 3$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

47. Найти расстояние от точки $M(1;4)$ до прямой, проходящей через точки $A(1;1)$ и $B(2;3)$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

48. Даны точки $A(1;2;1)$, $B(2;-1;3)$, $D(3;a;b)$. При каких значениях a и b точка D лежит на прямой AB?

Ответ: $a = -4,\ b = 5$.

49. Найти угол между прямыми $3x - 2y + 6 = 0$ и $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3}$.

Ответ: 90°.

50. Найти угол пересечения прямой $x - 2y + 4 = 0$ с осью Ox.

Ответ: $\arccos\frac{3}{5}$.

51. Найти косинус острого угла между плоскостями

$$x - 2y + 6 = 0 \text{ и } 2x - y + 4z + 2 = 0.$$

Ответ: 0,39.

52. Найти уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости

$$2x - 2y - 4z + 5 = 0$$

и проходящей через точки $A(1,-4,-7)$ и $B(-3,3,10)$.

Ответ: $x + 3y - z + 4 = 0$.

53. Дан куб $ABDEA_1B_1D_1E_1$. Найти угол между диагоналями AD и BA_1.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

54. Найти координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки $A(5;\ 8)$ на прямую, проходящую через точки $(0;\ 0)$ и $(3;\ -1)$.

Ответ: (2;1; –0,7).

55. Найти расстояние между параллельными прямыми l_1, l_2, заданными уравнениями $2x + 5y + 10 = 0$ и $2x + 5y + 15 = 0$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{29}}{29}$.

56. Найти проекцию точки $A(3;\ 1)$ на прямую s: $-x + 2y = 10$.

Ответ: $\left(\frac{4}{5};\frac{27}{5}\right)$.

57. Найти проекцию точки $P(4;\ 5)$ на прямую, проходящую через точки $A(3,-2)$ и $B(6,-1)$.

Ответ: $(3{,}9;-1{,}7)$.

58. Прямая l задана уравнением: $2x-3y=5$. Выяснить, лежат ли точки $A(1{,}0)$ и $B(2,-2)$ по одну сторону от прямой l.

Ответ: лежат по разные стороны.

59. Плоскость P проходит через точки $(0{,}0,-1)$, $(-2{,}0{,}0)$ и $(1{,}1,-2)$. Выяспить, лежат лп точки $A(1{,}1{,}1)$ п $B(3{,}4,-3)$ по одну сторопу от плоскости P.

Ответ: лежат по одну сторону.

60. Найти точку A_1, симметричную точке $A(3{,}2{,}1)$ отиосительно прямой, проходящей через точки $M(3{,}2{,}3)$ и $N(-1{,}2,-1)$.

Ответ: $A_1(1{,}2{,}3)$.

61. Найти точку A_1, спмметричпую точке $A(9{,}1{,}5)$ относптельпо плоскости $\begin{cases}2x+3y-5z=10,\\ x+y+5z=40.\end{cases}$

Ответ: $A_1(19{,}7{,}7)$.

62. Даны вершпны треугольника $A(3{,}1,-5)$ $B(4{,}2,-5)$, $D(-4{,}0{,}3)$. Найти длину меднаны, проведенной из вершины A.

Ответ: 5.

63. Найти длины сторон и величину угла при вершине A в треугольнике с вершинами $A(-1,-2{,}4)$ $B(-4,-2{,}0)$, $D(3,-2{,}1)$.

Ответ: $|AB|=5, |AD|=5, |BD|=5\sqrt{2}, \angle A=\frac{\pi}{2}$.

64. В треугольнике ABC составьте уравнения: а) стороны BC; б) медианы, проведенной из вершины C; в) высоты, опущенной из вершины A на сторону BC, если заданы вершины: $A(-3;3)$, $B(5;1)$, $C(6;-2)$.

Ответ: $3x+y=16, \quad 4x+5y=14, \quad -x+3y=12$.

65. Найти косннус угла между диагоналями AC и BD нараллелограмма, если заданы три его вершины $A(2{,}1{,}3)$ $B(5{,}2,-1)$, $D(-3{,}3,-3)$.

Ответ: 0,477.

66. Найти уравпение прямой l, являющейся пересечением нлоскостей p_1 п p_2, если p_1 проходит через точки (2; –1; 3), (0; 2; 0) и (0; 1; 2), а p_2 проходит через точки (1; 0; –1), (2; –2; 0) и (2; 1; –1).

Ответ: $\begin{cases}11x+10y-32=0\\ -7x+10z+24=0\end{cases}$ или $\begin{cases}3x+4y+2z-8=0\\ -x+y+3z+4=0\end{cases}$

67. Выяснить характер расположения прямых AB и CD (пересекаются, параллельны или скрещиваются), если $A(0; 2; -1)$, $B(2; -3; 1)$, $C(3; 2; 0)$, $D(0; -4; 1)$.

Ответ: скрещиваются.

68. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $n = (2; -3; 1)$ и проходящей через точку $M(1; 2; -4)$.

Ответ: $2x - 3y + z + 8 = 0$.

69. Прямая s проходит через точки $A(1; 2; 2)$ и $B(0; 4; -4)$. Выяснить, лежит ли точка $P(3; 1; 2)$ на этой прямой.

Ответ: нет, не лежит.

70. Прямая s проходит через точки $A(1; 0; -4)$ и $B(9; 12; 0)$. Выяснить, лежит ли точка $P(3; 3; -3)$ на этой прямой.

Ответ: да, лежит.

71. Прямая s проходит через точки $A(0; 1; 1)$ и $B(1; 0; 2)$. Чему равен угол между этой прямой и осью Oz?

Ответ: $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

72. Под каким углом пересекает ось Oy прямая, проходящая через точки $O(0; 0; 0)$ и $B(1; 1; 4)$?

Ответ: $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$.

73. Найти точку пересечения прямой l и плоскости p.

$$l: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{-3}; \quad p: 3x - y - z - 3 = 0.$$

Ответ: $(5; 3; 10)$.

74. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $M(1; 1; 1)$.

Ответ: $-x + y = 0$.

75. Прямая s проходит через точки $A(2; -4; 6)$ и $B(8; -7; 15)$. Выяснить, лежит ли точка $P(4; -5; 9)$ на этой прямой.

Ответ: да, лежит.

76. Доказать, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

77. Окружность с центром в точке $(5; 3)$ пересекает ось Ox в точке $(1; 0)$. Найти ее уравнение.

Ответ: $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

78. Окружности с центром в точке $O_1(1; 2)$ и $O_2(4; 4)$ пересекаются в точке $A(3; 2)$. Найти их уравнения.

Ответ: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$, $(x-4)^2+(y-4)^2=5$.

79. Найти центр н радиус окружности

$$x^2+y^2-4x+6y-3=0.$$

Ответ: $C(2;-3)$; $R=4$.

80. Установнть, какая лнния определяется уравнением

$$4x^2+9y^2-8x-36y+4=0.$$

Найти ее фокусы и изобразить иа чертеже.
Ответ: эллипс; $F_1(1-\sqrt{5};2)$, $F_2(1+\sqrt{5};2)$.

81. Найти вершину, фокус и уравнеиие директрисы иараболы

$$y^2+2y+8x-15=0.$$

Ответ: $C(2;-1)$; $F(0;-1)$; $x=4$.

82. Написать уравнение параболы, фокус которой иаходится в точке $F(-1;2)$, а уравиеиие директрисы $y=6$.
Ответ: $(x+1)^2=8(y-4)$.

83. Даио уравнение гнперболы: $-\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$. Найти эксцентриситет гиперболы и координаты ее фокусов.
Ответ: $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{34}}{5}$; $F_1(-1;2+\sqrt{34})$, $F_2(-1;2-\sqrt{34})$.

84. Привести уравиение кривой второго норядка

$$x^2-3y^2-6x-6y+3=0$$

к каноиическому виду, определить ее тин.
Ответ: гнпербола; $\frac{x_1^2}{3}-y_1^2=1$; $x_1=x-3$, $y_1=y+1$.

85. Привести уравнение кривой второго порядка

$$9x^2-54x+4y^2+16y+61=0$$

к каноиическому виду, определить ее тип.
Ответ: эллипс; $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}=1$; $x_1=y+2$, $y_1=x-3$.

86. Привести уравнение кривой второго норядка

$$x^2+4x-4y^2+24y-32=0$$

к каноническому виду, определить ее тип.
Ответ: пара пересекающихся прямых; $\frac{(x+2)^2}{4}-(y-3)^2=0$.

87. Определить тип кривой второго порядка

$$3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0.$$

Найти каноническое уравнение и записать формулы перехода к новым переменным.

Ответ: гипербола; $\frac{x_2^2}{4} - y_2^2 = 1$; $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + 2, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - 1. \end{cases}$

88. Определить тип кривой второго порядка $2xy = 0$. Найти каноническое уравнение и записать формулы перехода к новым переменным.

Ответ: пара пересекающихся прямых; $x_1^2 - y_1^2 = 0$;

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1. \end{cases}$$

89. Привести уравнение кривой второго порядка

$$x^2 - 4xy + y^2 = 0$$

к каноническому виду, определить ее тип.

Ответ: пара пересекающихся прямых; $3x_1^2 - y_1^2 = 0$.

90. Определить тип кривой второго порядка

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

Найти каноническое уравнение и записать формулы перехода к новым переменным.

Ответ: парабола; $y_2^2 = 4\sqrt{2}x_2$; $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + 1, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2. \end{cases}$

91. Определить тип кривой второго порядка

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0.$$

Найти каноническое уравнение и записать формулы перехода к новым переменным.

Ответ: прямая; $x_2^2 = 0$; $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{2}, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{2}. \end{cases}$

92. Привести уравнение кривой второго порядка

$$x^2 + 4xy + y^2 + 2 = 0$$

к каноническому виду, определить ее тип.

Ответ: гипербола; $\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{\frac{2}{3}} = 1$.

93. Привести уравиение кривой второго иорядка

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 10x + 20y + 24 = 0$$

к каноническому виду, оиределить ее тин.

Ответ: пара иараллельных прямых; $x_1^2 = 1$.

94. Пайтп центр п раднус сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0.$$

Ответ: $C(2;1;-1)$; $R = 5$.

95. Определить тнп поверхиости второго порядка

$$2xy + 2xz + 2yz - 5 = 0.$$

Ответ: двуполостный гнперболоид.

96. Определить тип поверхиости второго порядка

$$x^2 + xz + y^2 + z^2 - 4 = 0.$$

Пайти канонническое уравнение н записать формулы перехода к иовым переменным.

Ответ: эллиптический цнлиндр; $\frac{x_1^2}{2} + \frac{y_1^2}{4} = 1$;

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_1, \\ y = y_1, \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_1. \end{cases}$$

97. Определить тин новерхности второго иорядка $xy = 0$. Найтп капоппческое уравненне и записать формулы нерехода к новым переменным.

Ответ: пара иересекающихся илоскостей; $x^2 - y^2 = 0$;

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1, \\ z = z_1. \end{cases}$$

98. Определить тип иоверхности второго иорядка

$$4x^2 + 2xy + 5y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

Ответ: эллиисоид.

99. Привестп уравпение поверхиостн второго порядка

$$x^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2 = 0$$

к каиопическому виду, определнть ее тни.

Ответ: мнимый эллиитический цилиндр; $x_1^2 + 2y_1^2 = -2$.

100. Привести уравнение поверхности второго порядка

$$x^2 - 6xy + y^2 + z^2 = 0$$

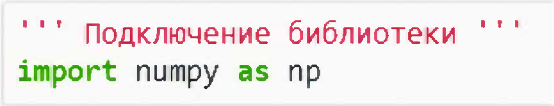
к каноническому виду, определить ее тип.

Ответ: конус; $4x_1^2 + y_1^2 - 2z_1^2 = 0$.

2. Алгебра матриц. Системы линейных уравнений

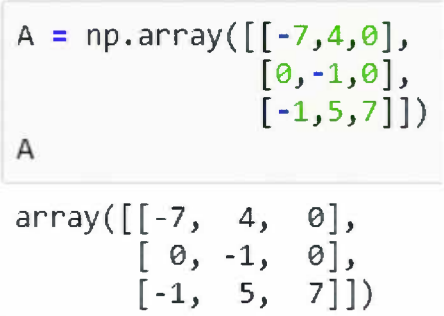
Матрицы

Матрицы в библиотеке numpy



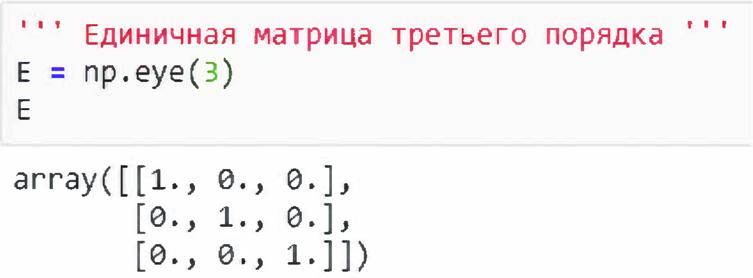
```
''' Подключение библиотеки '''
import numpy as np
```

Создание матрицы.



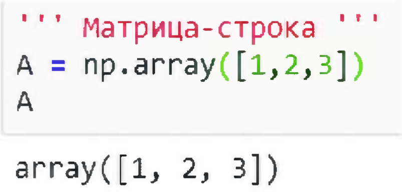
```
A = np.array([[-7,4,0],
              [0,-1,0],
              [-1,5,7]])
A
```

```
array([[-7,  4,  0],
       [ 0, -1,  0],
       [-1,  5,  7]])
```



```
''' Единичная матрица третьего порядка '''
E = np.eye(3)
E
```

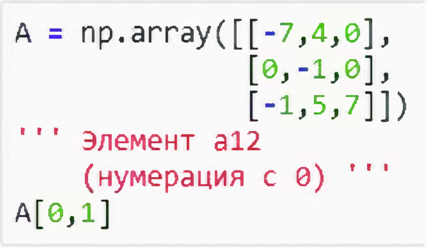
```
array([[1., 0., 0.],
       [0., 1., 0.],
       [0., 0., 1.]])
```



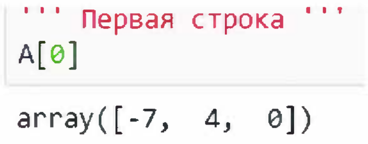
```
''' Матрица-строка '''
A = np.array([1,2,3])
A
```

```
array([1, 2, 3])
```

Элементы матрицы

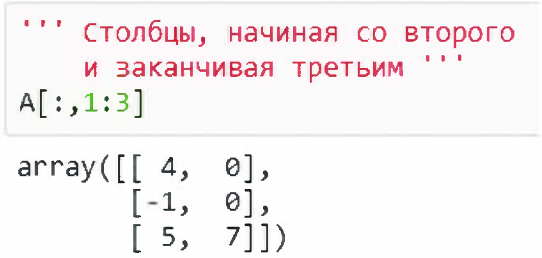


```
A = np.array([[-7,4,0],
              [0,-1,0],
              [-1,5,7]])
''' Элемент a12
    (нумерация с 0) '''
A[0,1]
```



```
''' Первая строка '''
A[0]
```

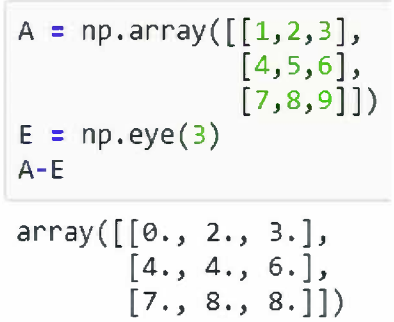
```
array([-7,  4,  0])
```



```
''' Столбцы, начиная со второго
    и заканчивая третьим '''
A[:,1:3]
```

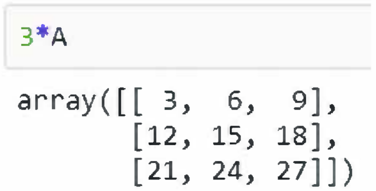
```
array([[ 4,  0],
       [-1,  0],
       [ 5,  7]])
```

Сложение, вычитание, умножение на число.



```
A = np.array([[1,2,3],
              [4,5,6],
              [7,8,9]])
E = np.eye(3)
A-E
```

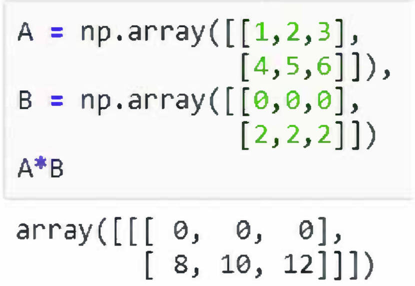
```
array([[0., 2., 3.],
       [4., 4., 6.],
       [7., 8., 8.]])
```



```
3*A
```

```
array([[ 3,  6,  9],
       [12, 15, 18],
       [21, 24, 27]])
```

Поэлементное умножение – **операцпя ***



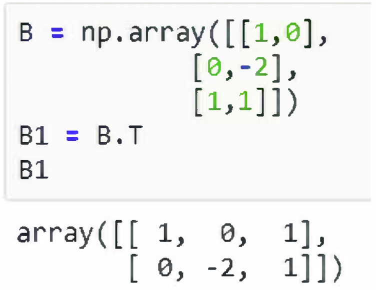
```
A = np.array([[1,2,3],
              [4,5,6]]),
B = np.array([[0,0,0],
              [2,2,2]])
A*B
```

```
array([[[ 0,  0,  0],
        [ 8, 10, 12]]])
```

Транспонирование – **метод .T**

Пример 1.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$



```
B = np.array([[1,0],
              [0,-2],
              [1,1]])
B1 = B.T
B1
```

```
array([[ 1,  0,  1],
       [ 0, -2,  1]])
```

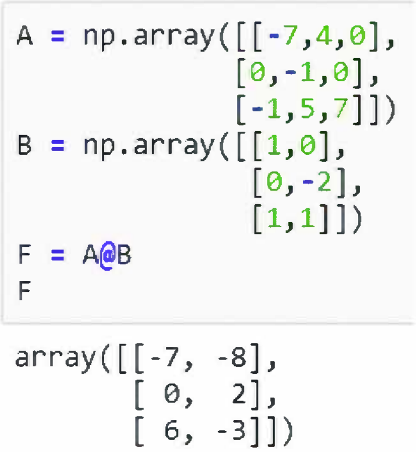
Умножение матриц – **метод .dot(), оператор @,** функции **numpy.dot(), numpy.matmul()**

Пример 2.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = AB,$$

$$f_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = -7 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = -7, \ldots,$$

$$f_{32} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} = -1 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 = -3.$$



```
A = np.array([[-7,4,0],
             [0,-1,0],
             [-1,5,7]])
B = np.array([[1,0],
              [0,-2],
              [1,1]])
F = A@B
F
```

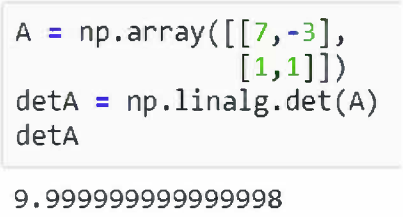
```
array([[-7, -8],
       [ 0,  2],
       [ 6, -3]])
```

Определитель матрицы

Функция **nnmpy.liualg.det()**

Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad det\ A = 7 \cdot 1 - (-3) \cdot 1 = 10.$$



```
A = np.array([[7,-3],
              [1,1]])
detA = np.linalg.det(A)
detA
```

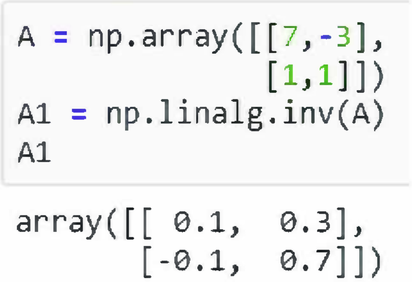
```
9.999999999999998
```

Обратная матрица

Функция numpy.linalg.inv()

Пример 4.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ -0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$



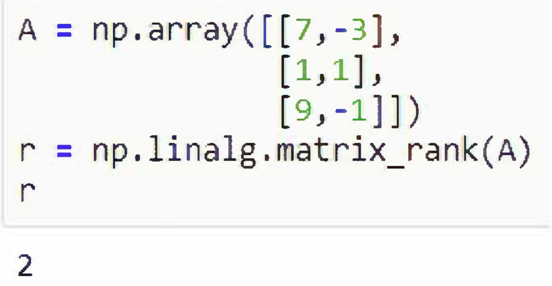
```
A = np.array([[7,-3],
              [1,1]])
A1 = np.linalg.inv(A)
A1
```

```
array([[ 0.1,  0.3],
       [-0.1,  0.7]])
```

Ранг матрицы

Функция numpy.linalg.matrix_rank()

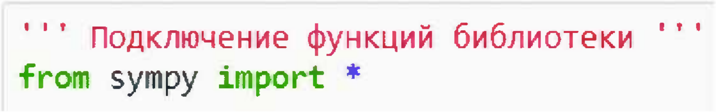
rang *A* – максимальное число линейно независимых строк (столбцов) матрицы *A*.



```
A = np.array([[7,-3],
              [1,1],
              [9,-1]])
r = np.linalg.matrix_rank(A)
r
```

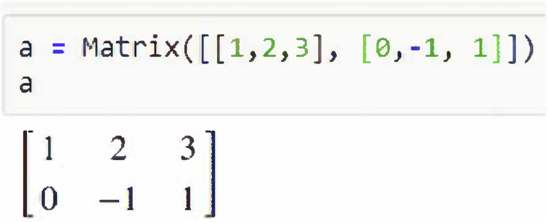
```
2
```

Матрицы в библиотеке sympy



```
''' Подключение функций библиотеки '''
from sympy import *
```

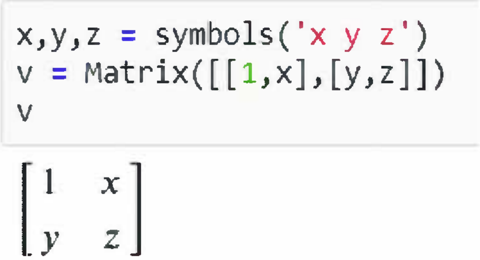
Создание матрицы



```
a = Matrix([[1,2,3], [0,-1, 1]])
a
```

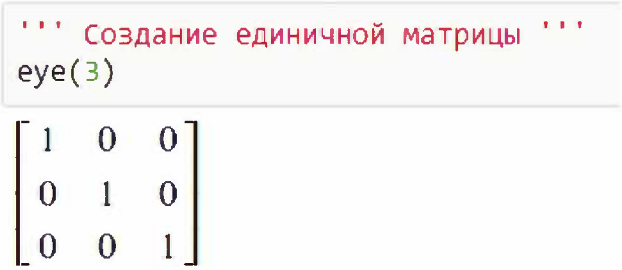
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Может содержать символы – переменные:



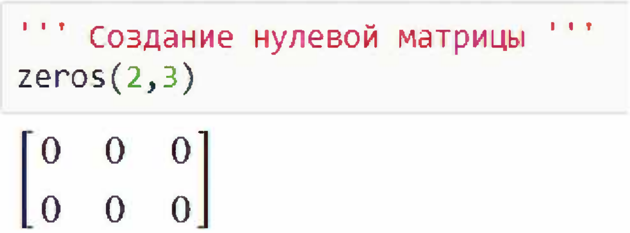
```
x,y,z = symbols('x y z')
v = Matrix([[1,x],[y,z]])
v
```

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & z \end{bmatrix}$$



```
''' Создание единичной матрицы '''
eye(3)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



```
''' Создание нулевой матрицы '''
zeros(2,3)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
''' Создание матрицы, все элементы которой равны 1'''
ones(3,2)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
''' Создание диагональной матрицы '''
diag(1,5,-2)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

```
''' Элементами диагонали могут быть матрицы '''
diag(-1, ones(2, 2), Matrix([5, 7, 5]))
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

```
''' Матрица 1x3
    (вектор-строка) '''
A = Matrix([[1,2,3]])
A
```

```
Matrix([[1, 2, 3]])
```

```
''' Матрица 3x1
    (вектор-столбец) '''
A = Matrix([[1],[2],[3]])
A
```

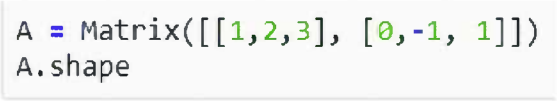
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
''' Отличие от правила в
    модуле numpy:
    одна пара квадратных скобок
    приводит к созданию
    вектор-столбца '''
A = Matrix([1,2,3])
A
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Размер матрицы

Пример 5. Матрица размера 2×3 (2 строки, 3 столбца):

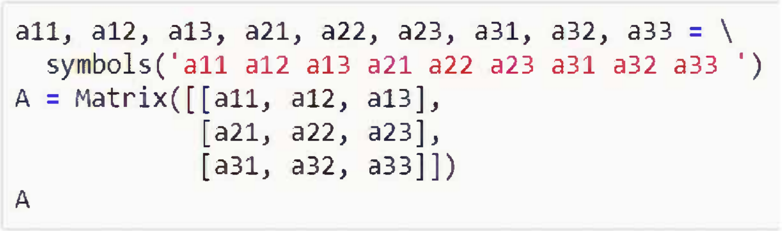


```
A = Matrix([[1,2,3], [0,-1, 1]])
A.shape
```

```
(2, 3)
```

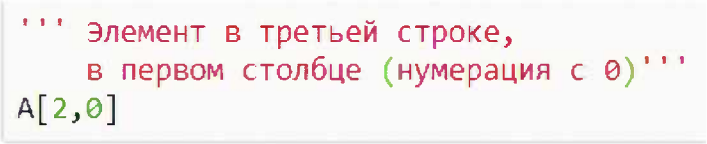
Элементы матрицы

Пример 6. Матрица третьего порядка.



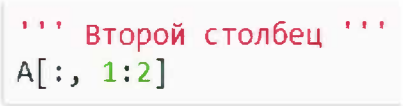
```
a11, a12, a13, a21, a22, a23, a31, a32, a33 = \
  symbols('a11 a12 a13 a21 a22 a23 a31 a32 a33 ')
A = Matrix([[a11, a12, a13],
            [a21, a22, a23],
            [a31, a32, a33]])
A
```

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$



```
''' Элемент в третьей строке,
    в первом столбце (нумерация с 0)'''
A[2,0]
```

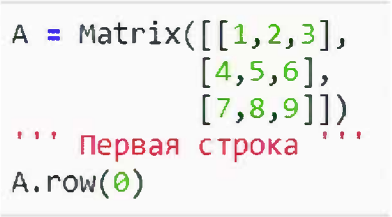
$$a_{31}$$



```
''' Второй столбец '''
A[:, 1:2]
```

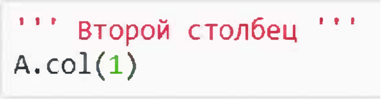
$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$$

Методы получения строкн и столбца – **.row(), .col()**



```
A = Matrix([[1,2,3],
            [4,5,6],
            [7,8,9]])
''' Первая строка '''
A.row(0)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

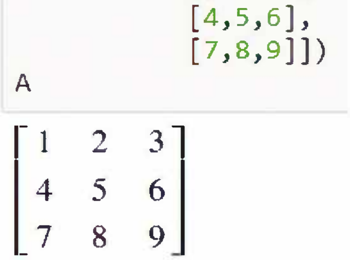


```
''' Второй столбец '''
A.col(1)
```

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

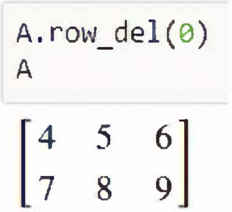
Удалить из матрицы строку, столбец – **методы .row_del(), .col_del()**
Действуют "in place" – меняют исходную матрицу.

Пример 7.



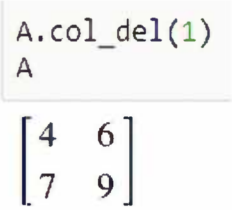
```
A = Matrix([[1,2,3],
            [4,5,6],
            [7,8,9]])
A
```

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$



```
A.row_del(0)
A
```

$$\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$



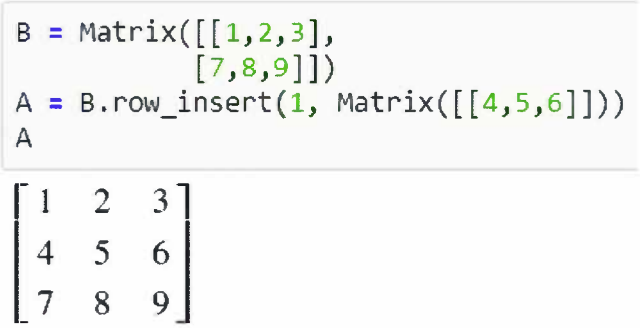
```
A.col_del(1)
A
```

$$\begin{bmatrix}4 & 6\\7 & 9\end{bmatrix}$$

Вставить новую строку, столбец – **методы .row_insert(), .col_insert()**

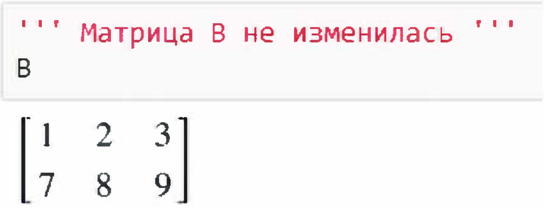
Не являются методами "in place".

Пример 8.



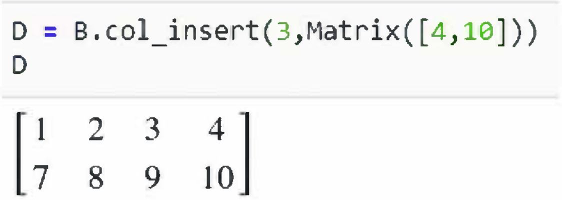
```
B = Matrix([[1,2,3],
            [7,8,9]])
A = B.row_insert(1, Matrix([[4,5,6]]))
A
```

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$



```
''' Матрица B не изменилась '''
B
```

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$



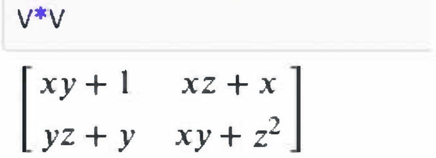
```
D = B.col_insert(3,Matrix([4,10]))
D
```

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\7 & 8 & 9 & 10\end{bmatrix}$$

Умножение матриц – **оператор ***

(В библиотеке numpy: * – поэлементное умножение матриц одинакового размера, в sympy – операция умножения матрицы размера $n \times k$ на матрицу размера $k \times m$).

Пример 9.

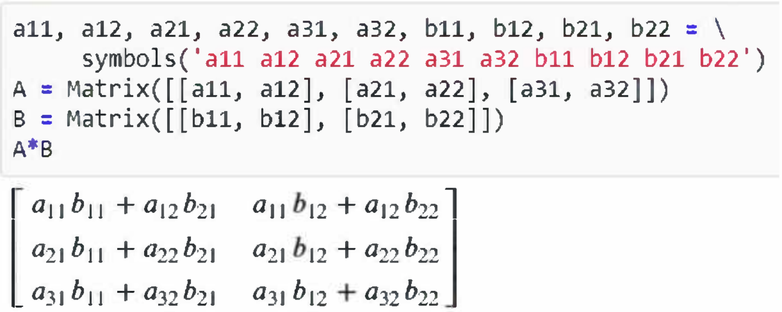


```
V = Matrix([[1,x],[y,z]])
V*V
```

$$\begin{bmatrix} xy+1 & xz+x \\ yz+y & xy+z^2 \end{bmatrix}$$

Пример 10.

Результат умножения матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ на матрицу $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$:

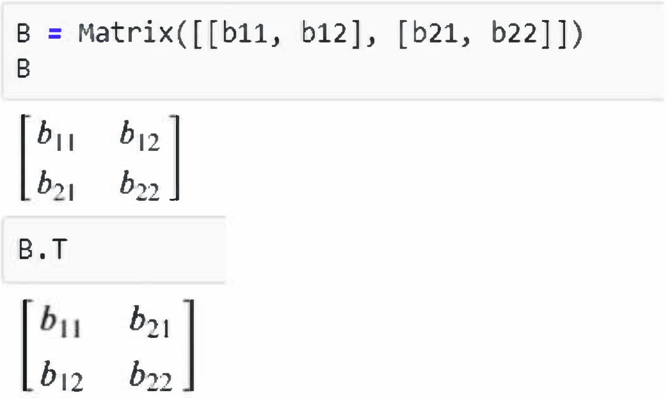


```
a11, a12, a21, a22, a31, a32, b11, b12, b21, b22 = \
     symbols('a11 a12 a21 a22 a31 a32 b11 b12 b21 b22')
A = Matrix([[a11, a12], [a21, a22], [a31, a32]])
B = Matrix([[b11, b12], [b21, b22]])
A*B
```

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

Транспонирование – **метод .T или .transpose()**

Пример 11.



```
B = Matrix([[b11, b12], [b21, b22]])
B
```

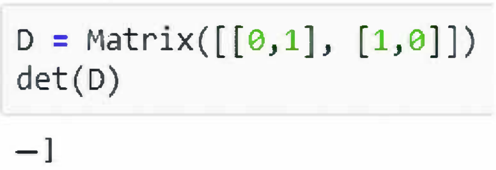
$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

```
B.T
```

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Определитель матрицы – **функция det()**

Пример 12.



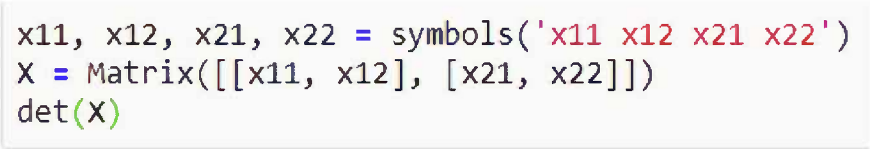
```
D = Matrix([[0,1], [1,0]])
det(D)
```

$$-1$$

Пример 13.

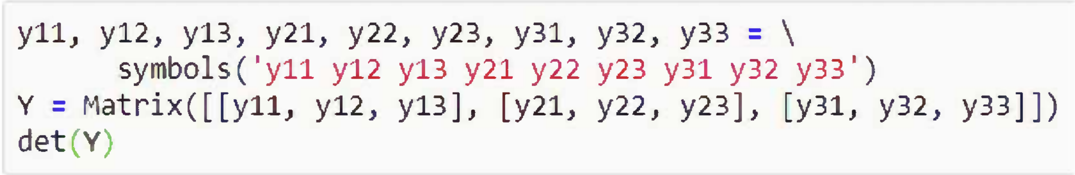
Результат вычисления определителя матриц второго и третьего порядка:

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \qquad Y=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}.$$



```
x11, x12, x21, x22 = symbols('x11 x12 x21 x22')
X = Matrix([[x11, x12], [x21, x22]])
det(X)
```

$$x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$$

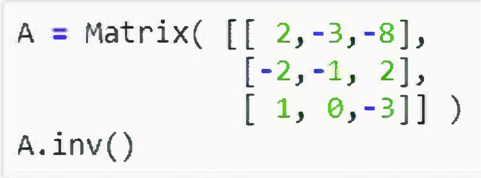


```
y11, y12, y13, y21, y22, y23, y31, y32, y33 = \
        symbols('y11 y12 y13 y21 y22 y23 y31 y32 y33')
Y = Matrix([[y11, y12, y13], [y21, y22, y23], [y31, y32, y33]])
det(Y)
```

$$y_{11}y_{22}y_{33} - y_{11}y_{23}y_{32} - y_{12}y_{21}y_{33} + y_{12}y_{23}y_{31} + y_{13}y_{21}y_{32} - y_{13}y_{22}y_{31}$$

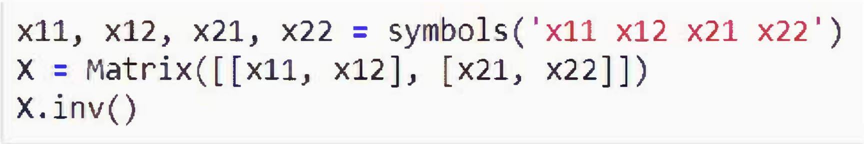
Обратная матрица – **метод .inv()**

Пример 14.



```
A = Matrix( [[ 2,-3,-8],
             [-2,-1, 2],
             [ 1, 0,-3]] )
A.inv()
```

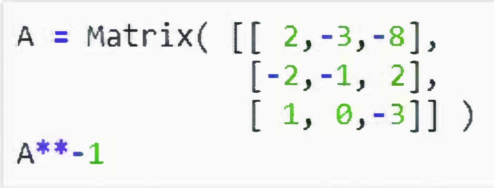
$$\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{7}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$



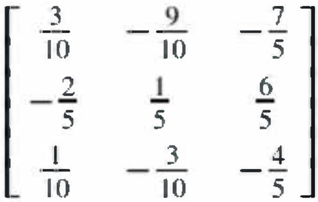
```
x11, x12, x21, x22 = symbols('x11 x12 x21 x22')
X = Matrix([[x11, x12], [x21, x22]])
X.inv()
```

$$\begin{bmatrix} \frac{x_{22}}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}} & -\frac{x_{12}}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}} \\ -\frac{x_{21}}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}} & \frac{x_{11}}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}} \end{bmatrix}$$

Получить обратную матрицу можно также путем возведения в степень -1:



```
A = Matrix( [[ 2,-3,-8],
             [-2,-1, 2],
             [ 1, 0,-3]] )
A**-1
```



$$\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{7}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$, называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация данной системы с указанными числами равна нулевому вектору $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$.

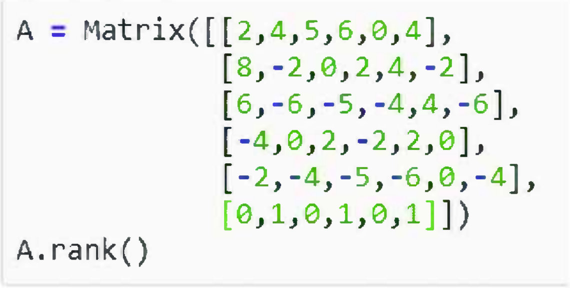
Если указанное равенство для данной системы векторов возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, то эта система векторов называется *линейно независимой*.

Рангом системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов из этой системы.

Рангом матрицы называется максимальное число линейно независимых ее векторов-строк (столбцов).

В библиотеке sympy ранг матрицы вычисляется с помощью **метода .rank()**

Пример 15.



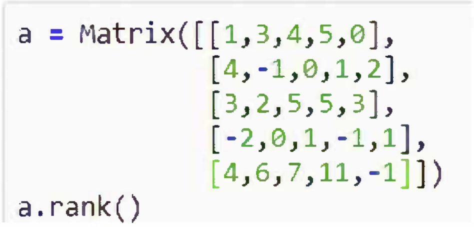
```
A = Matrix([[2,4,5,6,0,4],
            [8,-2,0,2,4,-2],
            [6,-6,-5,-4,4,-6],
            [-4,0,2,-2,2,0],
            [-2,-4,-5,-6,0,-4],
            [0,1,0,1,0,1]])
A.rank()
```

```
4
```

Вычислить ранг системы векторов можно, составив из них матрицу.

Пример 16. Найти максимальное число линейно независимых векторов, входящих в систему: $x_1 = (1{,}3{,}4{,}5{,}0)$, $x_2 = (4,-1{,}0{,}1{,}2)$, $x_3 = (3{,}2{,}5{,}5{,}3)$, $x_4 = (-2{,}0{,}1,-1{,}1)$, $x_5 = (4{,}6{,}7{,}11,-1)$.

Решение. Указанное значение совпадает с рангом матрицы, сформированной из векторов.



```
a = Matrix([[1,3,4,5,0],
           [4,-1,0,1,2],
           [3,2,5,5,3],
           [-2,0,1,-1,1],
           [4,6,7,11,-1]])
a.rank()
```

Ответ: 3.

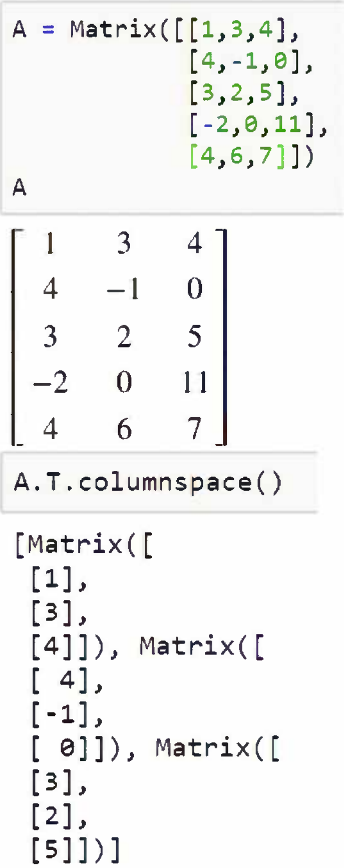
Базисом системы векторов называется максимальная независимая подсистема данной системы (это означает: 1) векторы, образующие подсистему, линейно независимы; 2) при добавлении любого нового вектора системы, подсистема становится линейно зависимой).

Замечание. Система векторов может иметь несколько различных базисов, но число векторов во всех базисах одинаковое, – равно рангу данной системы.

Метод columnspace() позволяет найти базис системы векторов, расположив их в виде столбцов матрицы.

Пример 17. Найти базис системы векторов $x_1 = (1,3,4)$, $x_2 = (4,-1,0)$, $x_3 = (3,2,5)$, $x_4 = (-2,0,1)$, $x_5 = (4,6,7)$.

Решение. Наберем векторы по строкам матрицы (так легче), а затем матрицу транспонируем.



```
A = Matrix([[1,3,4],
            [4,-1,0],
            [3,2,5],
            [-2,0,11],
            [4,6,7]])
A
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 11 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

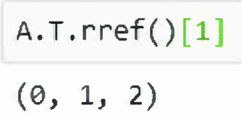
```
A.T.columnspace()
```

```
[Matrix([
 [1],
 [3],
 [4]]), Matrix([
 [ 4],
 [-1],
 [ 0]]), Matrix([
 [3],
 [2],
 [5]])]
```

Базис образуют первые три вектора.

Индексы базисных векторов можно также найти **методом .rref()**. Подробно данный метод рассматривается далее в разделе, посвященном решению систем линейных уравнений. Сейчас только сообщим, что метод применяется к матрице и возвращает два кортежа. Вторым элементом возвращаемого кортежа является кортеж, содержащий индексы базисных столбцов входной матрицы.

Для матрицы предыдущего примера:



```
A.T.rref()[1]
```

```
(0, 1, 2)
```

Тот же результат: базис образуют первые три вектора.

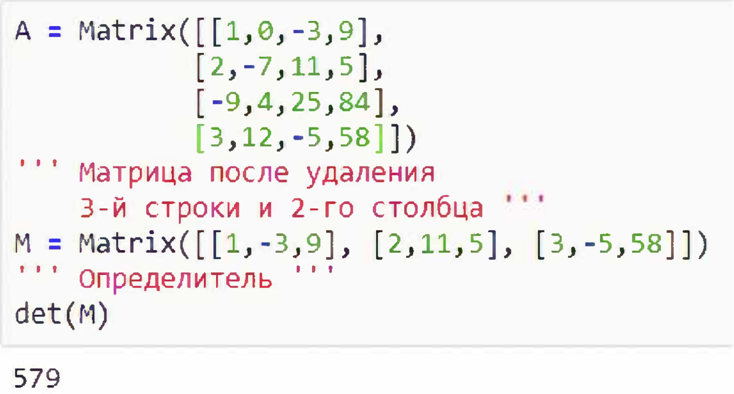
Минор элемента матрицы

Пусть дана квадратная матрица *A*. *Минором* M_{ij} элемента матрицы a_{ij} называется определитель, полученной из матрицы *A* вычёркниванием *i*–й строки и *j*–го столбца (то есть строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Пример 18. Найти минор элемента a_{32} матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 9 \\ 2 & -7 & 11 & 5 \\ -9 & 4 & 25 & 84 \\ 3 & 12 & -5 & 58 \end{pmatrix}.$$

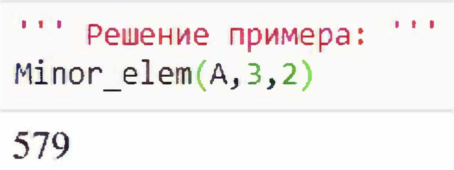
Решение.



```
A = Matrix([[1,0,-3,9],
            [2,-7,11,5],
            [-9,4,25,84],
            [3,12,-5,58]])
''' Матрица после удаления
    3-й строки и 2-го столбца '''
M = Matrix([[1,-3,9], [2,11,5], [3,-5,58]])
''' Определитель '''
det(M)
```

```
579
```

В разделе «Функции в Python», с. 33 приведен текст функции Minor_elem(), вычисляющей минор заданного элемента квадратной матрицы. Используются методы .row_del() и col_del(), удаляющие из матрицы соответственно строку и столбец. При использовании данных методов необходимо иметь в виду, что они меняют исходную матрицу. Индексы элемента матрицы нумеруются с 1 (a_{11} – элемент матрицы в первой строке и первом столбце. В матрице расположен по адресу A[0,0]).



```
''' Решение примера: '''
Minor_elem(A,3,2)
```

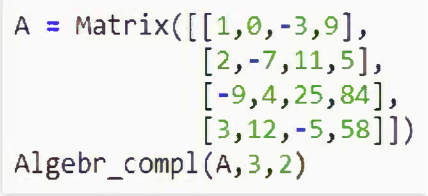
```
579
```

Алгебраическое дополнение элемента матрицы

Пусть дана квадратная матрица *A*. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента матрицы a_{ij} называется число $(-1)^{i+j}M_{ij}$, где M_{ij} – минор элемента a_{ij}.

Функция Algeb_compl(), приведенная в разделе «Функции в Python», с. 33, вычисляет алгебраическое дополнение элемента матрицы.

Пример 19. Вычислить алгебраическое дополнение A_{32} для матрицы предыдущего примера.



```
A = Matrix([[1,0,-3,9],
            [2,-7,11,5],
            [-9,4,25,84],
            [3,12,-5,58]])
Algebr_compl(A,3,2)
```

```
−579
```

Минор матрицы

Пусть в матрице *A* (произвольного размера) выделены какие–либо *k* строк и *k* столбцов. Элементы, расположенные на пересечении этих строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка *k* (подматрицу матрицы *A*).

Ее определитель называется *минором* *k*–го порядка данной матрицы *A*.

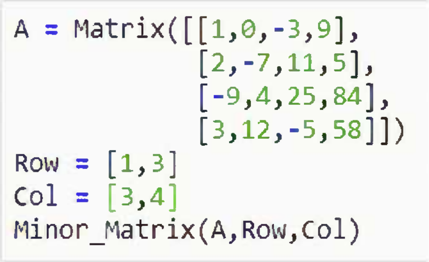
Наибольший порядок минора, отличного от нуля, называется *рангом* матрицы.

Отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу матрицы, называется *базисным минором* этой матрицы.

Строки и столбцы, на пересечении которых стоит базисный минор, называются *базисными.*

В разделе «Функции Python», с. 33 приведен текст функции Minor_Matrix(), которая находит минор матрицы *A* по данным спискам номеров строк Row и столбцов Col.

Пример 20. Для матрицы из предыдущего примера найти минор, образованный 1–й и 3–й строками и 3–м и 4–м столбцами матрицы *A*.



```
A = Matrix([[1,0,-3,9],
            [2,-7,11,5],
            [-9,4,25,84],
            [3,12,-5,58]])
Row = [1,3]
Col = [3,4]
Minor_Matrix(A,Row,Col)
```

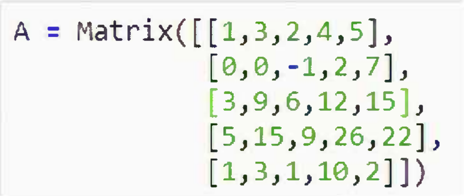
```
−477
```

В разделе «Функции Python», с. 34 приведен текст функции Basis_Minor(). Функция, принимая на входе матрицу, возвращает подматрицу, образованную базисными строками и столбцами (одну из имеющихся для данной матрицы), а также ее определитель (он является базисным минором). Индексы базисного минора находятся с использованием ранее упомянутого метода .rref().

Пример 21. Дана матрица A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 9 & 6 & 12 & 15 \\ 5 & 15 & 9 & 26 & 22 \\ 1 & 3 & 1 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти базисный минор, базисные строки и столбцы.

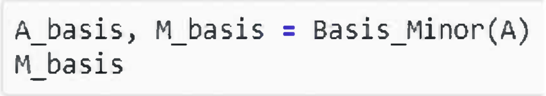


```
A = Matrix([[1,3,2,4,5],
            [0,0,-1,2,7],
            [3,9,6,12,15],
            [5,15,9,26,22],
            [1,3,1,10,2]])
```

```
''' Ранг матрицы'''
A.rank()
```

```
3
```

Ранг матрицы равен 3. Базисные системы векторов должны содержать по три вектора.



```
A_basis, M_basis = Basis_Minor(A)
M_basis
```

$$-4$$

```
A_basis
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 9 & 26 \end{bmatrix}$$

Ответ: Базисный минор равен -4; образован 1–й, 2–й и 4–й строками и 1–м, 3–м и 4–м столбцами матрицы.

Системы линейных уравнений

Случай $m = n$ – число уравнений равно числу неизвестных numpy.linalg.solve(a, b)

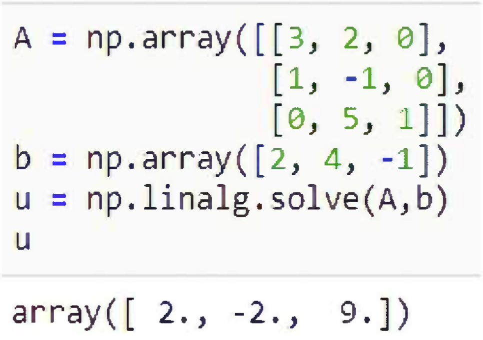
Параметры: a – матрица размера $n \times n$, коэффициенты при переменных; b – вектор длины n, задает правую часть системы.

Возвращает: вектор решений.

Пример 22. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2, \\ x - y = 4, \\ 5y + z = -1. \end{cases}$$

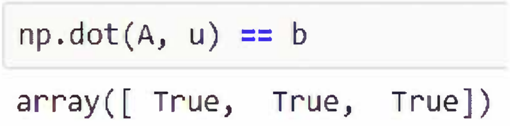
Решение.



```
A = np.array([[3, 2, 0],
              [1, -1, 0],
              [0, 5, 1]])
b = np.array([2, 4, -1])
u = np.linalg.solve(A,b)
u
```

```
array([ 2., -2.,  9.])
```

Проверка.



```
np.dot(A, u) == b
```

```
array([ True,  True,  True])
```

Решение системы линейных уравнений в библиотеке sympy

Пример 23. Чтобы решить систему уравнений

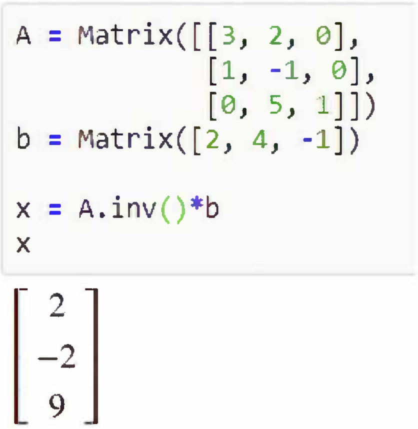
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 4, \\ 5x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

запишем ее в матричном виде:

$$Ax = b, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы находится из матричного уравнения:

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$



```
A = Matrix([[3, 2, 0],
            [1, -1, 0],
            [0, 5, 1]])
b = Matrix([2, 4, -1])

x = A.inv()*b
x
```

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

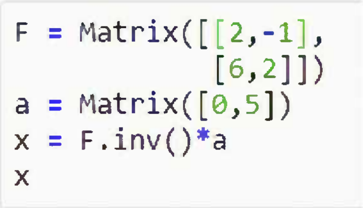
Разложение вектора по системе векторов

Разложением вектора a по системе векторов $f_1, f_2, \dots, f_n$ называется представление a в виде линейной комбинации векторов данной системы:

$$a = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n.$$

Если векторы системы линейно независимы, и число их координат совпадает с числом векторов n (это означает, что векторы системы образуют базис пространства $\mathbb{R}^n$), то разложение вектора можно найти, используя решение системы линейных уравнений. Для этого запишем указанное разложение в матричном виде: $a = x \cdot F$, где $\boldsymbol{x}$ – вектор с компонентами x_i, F – матрица, столбцы которой образуют векторы системы f_i. Тогда $x = F^{-1}a$.

Пример 24. Разложить вектор $a = (0{,}5)$ по системе векторов $f_1 = (2{,}6)$, $f_2 = (-1{,}2)$.



```
F = Matrix([[2,-1],
            [6,2]])
a = Matrix([0,5])
x = F.inv()*a
x
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ответ: $a = \frac{1}{2} f_1 + f_2$.

Линейные системы уравнений произвольного вида. Общее решение системы

Для любой системы линейных уравнений возможны три случая:

1) система не имеет решений (несовместная система);

2) система имеет единственное решение (определенная система);

3) система имеет бесконечное множество решений (неопределенная система).

Пусть A – матрица системы; $(A|b)$ – расширенная матрица системы (матрица, образованная из матрицы A добавлением столбца b правых частей системы). Справедлива теорема Кронекера-Капелли: система m линейных уравнений с n неизвестными совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

Если $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang}(A|b)$, то система несовместна.

Совместная система имеет единственное решение, если ранг матрицы равен числу неизвестных ($\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|b) = n$).

Если ранг матрицы системы меньше числа неизвестных ($\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|b) < n$), то система имеет бесконечное множество решений.

Для систем, имеющих бесконечное множество решений, разыскивается общее решение. Для этого находится базисный минор матрицы системы A (напомним: базисный минор образует максимальная линейно независимая система векторов-столбцов матрицы).

Переменные, коэффициенты при которых образуют базисный минор, называются базисными (или основными). Все остальные переменные называются свободными.

Общим решением системы называется выражение базисных переменных через свободные переменные. Свободные переменные, при этом, могут принимать произвольные действительные значения.

Частный случай общего решения, в котором все свободные переменные равны нулю, называется базисным решением.

Общее решение для системы линейных уравнений находят методом Гаусса. При этом расширенная матрица системы приводится к специальному ступенчатому виду. В библиотеке sympy данный метод реализует метод rref().

Приведение матрицы к ступенчатому виду – **метод rref()**.

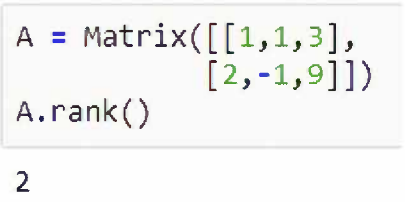
Пример 25. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 18, \\ 2x_1 - x_2 + 9x_3 = 30. \end{cases}$$

Решение. Сначала непосредственно выполним задание методом Гаусса.

В этой системе число переменных $m = 3$, число уравнений $n = 2$. Система или несовместная, или неопределенная.

Найдем ранг матрицы системы:



```
A = Matrix([[1,1,3],
            [2,-1,9]])
A.rank()
```

```
2
```

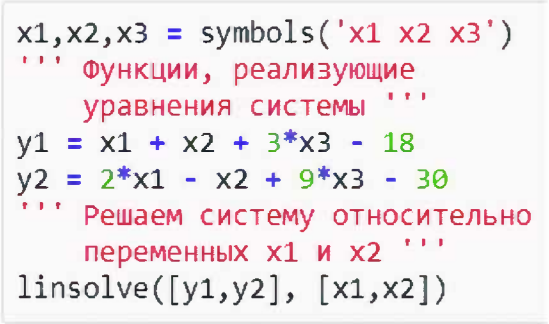
Ранг расширенной матрицы не может быть больше двух (всего две строки в матрице). По теореме Кронекера-Капелли система совместна, а так как $n < m$, то является неопределенной.

Найдем базисные переменные. Минор, образованный первыми двумя столбцами, является базисным, так как определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3\neq 0.$$

Значит, в качестве базисных переменных можно взять x_1 и x_2.

Чтобы выразить базисные переменные через свободные, решим систему уравнений относительно базисных переменных.



```
x1,x2,x3 = symbols('x1 x2 x3')
''' Функции, реализующие
    уравнения системы '''
y1 = x1 + x2 + 3*x3 - 18
y2 = 2*x1 - x2 + 9*x3 - 30
''' Решаем систему относительно
    переменных x1 и x2 '''
linsolve([y1,y2], [x1,x2])
```

$\{(16-4x_3,\ x_3+2)\}$

Получили общее решение, в котором свободная переменная x_3 может принимать произвольные действительные значения:

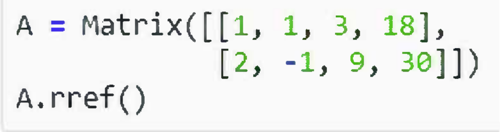
$$x_1=16-4x_3,\ \ x_2=2+x_3,\ \ x_3\in\mathbb{R}.$$

Базисное решение получается при значении $x_3=0$:

$$x_1=16,\ \ x_2=2,\ \ x_3=0.$$

Теперь рассмотрим решение примера с использованием метода rref().

Применяем метод к расширенной матрице системы:

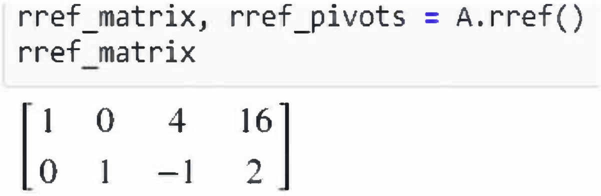


```
A = Matrix([[1, 1, 3, 18],
            [2, -1, 9, 30]])
A.rref()
```

```
(Matrix([
 [1, 0,  4, 16],
 [0, 1, -1,  2]]), (0, 1))
```

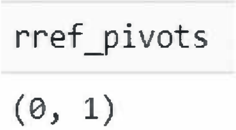
Результат возвращается в виде кортежа. Первый элемент – матрица, приведенная к ступенчатому виду в нормализованном виде. Второй элемент – кортеж, содержащий индексы ведущих столбцов (базисных переменных). Нормализованный вид ступенчатой матрицы означает, что подматрица, образованная ведущими столбцами, является единичной.

Можно вывести отдельно матрицу и индексы ведущих столбцов.



```
rref_matrix, rref_pivots = A.rref()
rref_matrix
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$



```
rref_pivots
```

```
(0, 1)
```

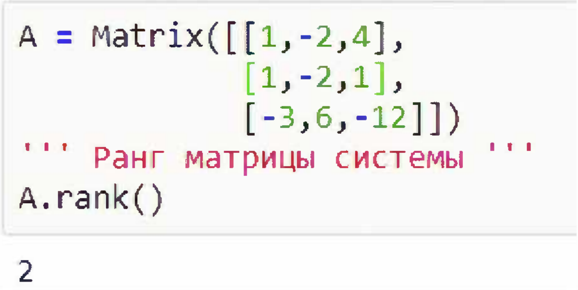
Переменные, соответствующие ведущим столбцам, являются базисными (здесь x_1 и x_2). Оставшиеся переменные – свободные (здесь x_3). Для получения общего решения достаточно из каждой строки выходной матрицы выразить базисную переменную, для чего все свободные переменные перенести в правую часть уравнений (при этом коэффициенты последнего столбца являются свободными членами уравнений, они соответствуют правым частям уравнений и в окончательное решение входят непосредственно со своими знаками. Получаем:

$$x_1 = 16 - 4x_3,\ x_2 = 2 + x_3.$$

Пример 26. Найти общее решение системы

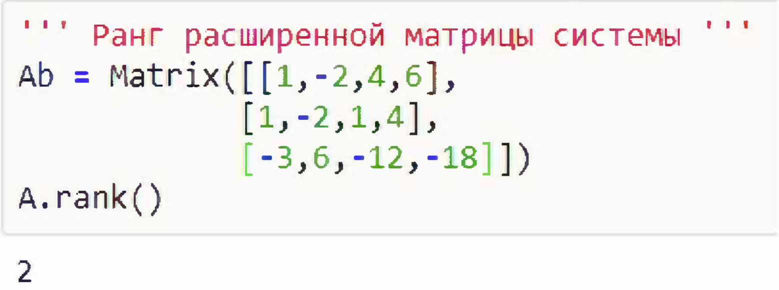
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 \ - \ 2x_2 + x_3 = 4 \\ -3x_1 + 6x_2 - 12x_3 = -18. \end{cases}$$

Найдем ранги матриц A и $(A|b)$.



```
A = Matrix([[1,-2,4],
            [1,-2,1],
            [-3,6,-12]])
''' Ранг матрицы системы '''
A.rank()
```

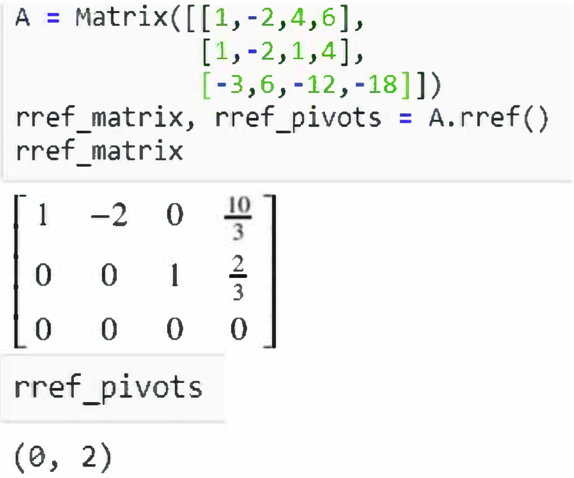
```
2
```



```
''' Ранг расширенной матрицы системы '''
Ab = Matrix([[1,-2,4,6],
            [1,-2,1,4],
            [-3,6,-12,-18]])
A.rank()
```

```
2
```

Ранги двух матриц равны – система имеет бесконечно много решений. Найдем общее решение с использованием метода rref().



```
A = Matrix([[1,-2,4,6],
            [1,-2,1,4],
            [-3,6,-12,-18]])
rref_matrix, rref_pivots = A.rref()
rref_matrix
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
rref_pivots
```

```
(0, 2)
```

Базисные переменные – x_1и x_3. Свободная переменная – x_2. Общее решение: $x_1 = \frac{10}{3} + 2\,x_2, x_3 = \frac{2}{3},\ \ x_2 \in \mathbb{R}$.

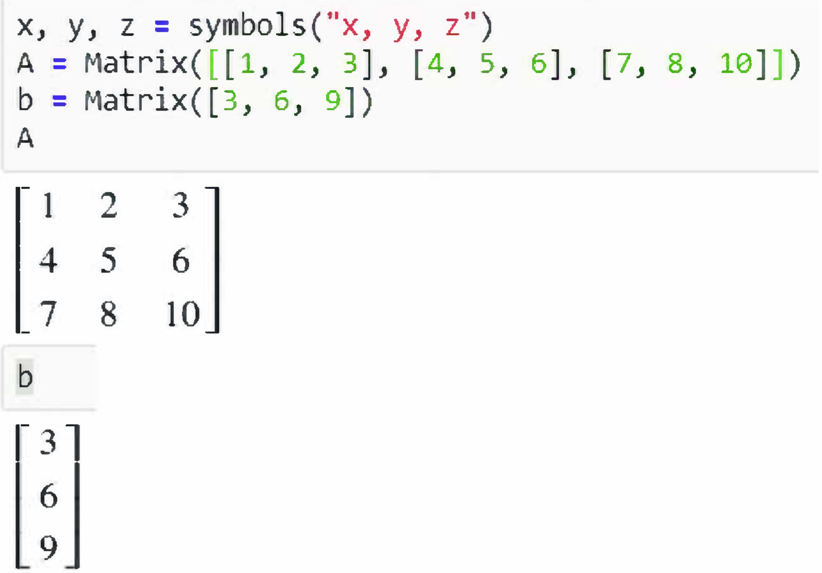
Функция linsolve() библиотеки sympy – решение системы линейных уравнений произвольного вида

Функция linsolve() находит решения систем линейных уравнений с произвольными соотношениями числа уравнений и неизвестных. Методы задания исходных данных демонстрируются на примерах.

Пример 27. Решить систему

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3, \\ 4x + 5y + 6z = 6, \\ 7x + 8y + 10z = 9. \end{cases}$$

Решение. Формируем отдельно основную матрицу системы и вектор свободных членов.



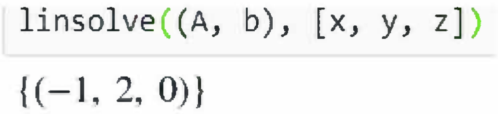
```
x, y, z = symbols("x, y, z")
A = Matrix([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 10]])
b = Matrix([3, 6, 9])
A
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

```
b
```

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Параметры функции – кортеж из матриц A и b, список неизвестных:



```
linsolve((A, b), [x, y, z])
```

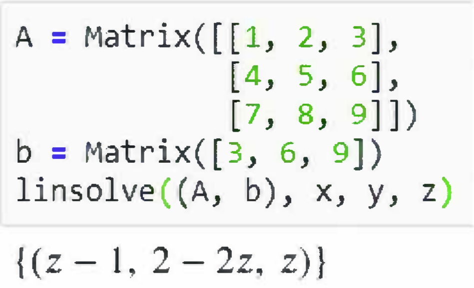
$\{(-1,\ 2,\ 0)\}$

Решением является множество, содержащее вектор $(-1;2;0)$.

Пример 28. Решить систему

$$\begin{cases} x+2y+3z=3,\\ 4x+5y+6z=6,\\ 7x+8y+9z=9. \end{cases}$$

Решение. При использовании функции linsolve(), переменные можно задать простым перечислением.

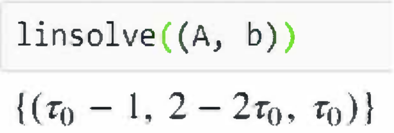


```
A = Matrix([[1, 2, 3],
            [4, 5, 6],
            [7, 8, 9]])
b = Matrix([3, 6, 9])
linsolve((A, b), x, y, z)
```

$\{(z-1,\ 2-2z,\ z)\}$

Получено общее решение системы: $x=z-1,\ y=2-2z,\ z\in\mathbb{R}$.

Если не указать имена переменных, то свободные переменные будут выведены с именем τ:

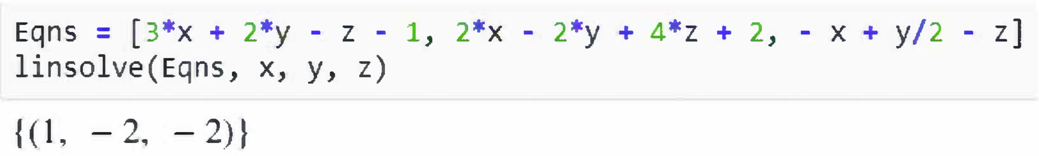


```
linsolve((A, b))
```

$\{(\tau_0-1,\ 2-2\tau_0,\ \tau_0)\}$

Пример 29. В качестве параметров функции можно указывать не матрицы, а уравнения системы (приведенные к нулевой правой части) в виде кортежа. Решение системы

$$\begin{cases} 3x+2y-z=1,\\ 2x-2y+4z=-2,\\ -x+0{,}5y-z=0 \end{cases}$$

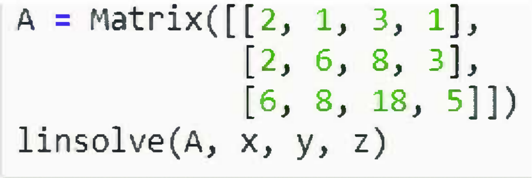


```
Eqns = [3*x + 2*y - z - 1, 2*x - 2*y + 4*z + 2, - x + y/2 - z]
linsolve(Eqns, x, y, z)
```

$\{(1,\ -2,\ -2)\}$

Пример 30. Вместо указания матриц A и b, можно указать только расширенную матрицы системы. Решение системы:

$$\begin{cases} 2x+y+3z=1,\\ 2x+6y+8z=3,\\ 6x+8y+18z=5. \end{cases}$$

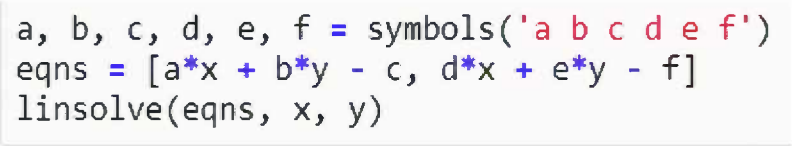


```
A = Matrix([[2, 1, 3, 1],
            [2, 6, 8, 3],
            [6, 8, 18, 5]])
linsolve(A, x, y, z)
```

$$\left\{\left(\frac{3}{10}, \frac{2}{5}, 0\right)\right\}$$

Пример 31. Пример решения системы, записанной с произвольными коэффициентами.

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f. \end{cases}$$



```
a, b, c, d, e, f = symbols('a b c d e f')
eqns = [a*x + b*y - c, d*x + e*y - f]
linsolve(eqns, x, y)
```

$$\left\{\left(\frac{-bf + ce}{ae - bd}, \frac{af - cd}{ae - bd}\right)\right\}$$

Однородные системы уравнений

Система линейных уравнений называется *однородной*, если во всех ее уравнениях свободные члены равны нулю.

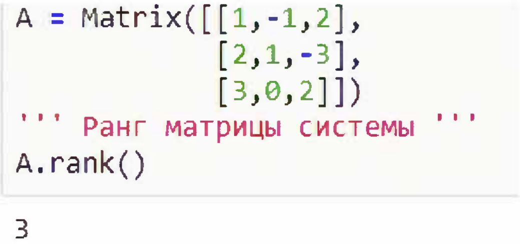
Однородная система всегда совместна, и имеет бесконечно много решений, если ранг матрицы системы r меньше числа неизвестных n. В этом множестве всех решений существует базис – набор линейно независимых ненулевых решений, через которые можно выразить все остальные решения. Такие решения образуют *фундаментальную систему решений*. Размер фундаментальной системы равен $n - r$. В качестве фундаментальной системы решений можно выбирать общие решения системы уравнений, в которой все константы C_i, кроме одной, равны нулю.

Метод *A*.nullspace() библиотеки sympy находит нулевое пространство матрицы A, – фундаментальную систему решений однородной системы уравнений, образованную матрицей A.

Пример 32. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Ранг матрицы системы:



```
A = Matrix([[1,-1,2],
            [2,1,-3],
            [3,0,2]])
''' Ранг матрицы системы '''
A.rank()
```

```
3
```

Ранг совпадает с числом неизвестных, следовательно, система имеет единственное решение. Но набор $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, очевидно, решением является. Значит, это и есть искомое решение.

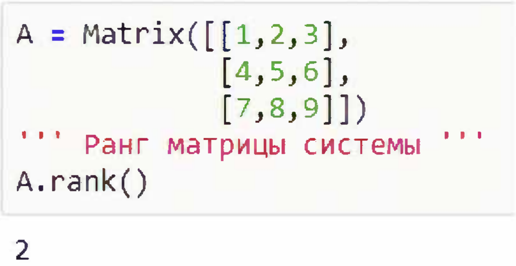
Ответ: $(0;0;0)$.

Пример 33. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Записать фундаментальную систему решений.

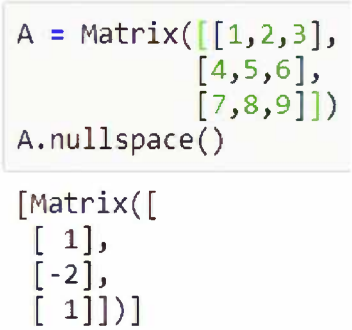
Решение. Найдем ранг матрицы системы:



```
A = Matrix([[1,2,3],
            [4,5,6],
            [7,8,9]])
''' Ранг матрицы системы '''
A.rank()
```

```
2
```

Ранг равен двум, а число неизвестных – три, следовательно, система имеет бесконечно много решений. Найдем (с помощью метода nullspace()) общее решение системы.



```
A = Matrix([[1,2,3],
           [4,5,6],
           [7,8,9]])
A.nullspace()
```

```
[Matrix([
 [ 1],
 [-2],
 [ 1]])]
```

Пространство решений системы – одномерное $(n - r = 1)$. Фундаментальную систему решений образует вектор $(1;-2;1)$. Свободным переменным соответствуют последние координаты векторов фундаментальной системы. Здесь свободная переменная – x_3, базисные переменные – x_1 и x_2. Общее решение системы:

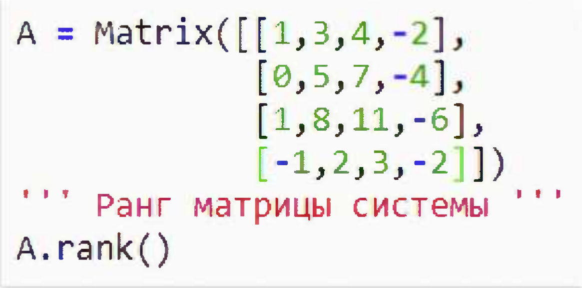
$$x_1 = \mathrm{C},\ x_2 = -2C,\ x_3 = C,\quad C \in \mathbb{R}.$$

Пример 34. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_2 + 7x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 11x_3 - 6x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Записать фундаментальную систему решений.

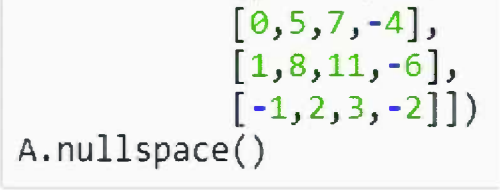
Решение. Найдем ранг матрицы системы:



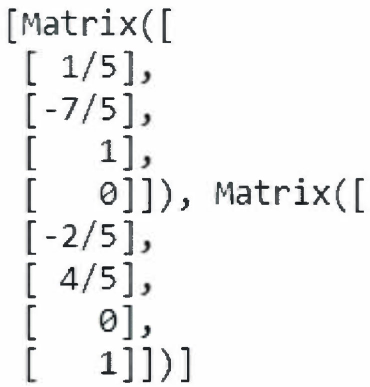
```
A = Matrix([[1,3,4,-2],
            [0,5,7,-4],
            [1,8,11,-6],
            [-1,2,3,-2]])
''' Ранг матрицы системы '''
A.rank()
```

```
2
```

Ранг меньше числа неизвестных – система имеет бесконечное множество решений.



```
A = Matrix([[1,3,4,-2],
           [0,5,7,-4],
           [1,8,11,-6],
           [-1,2,3,-2]])
A.nullspace()
```



```
[Matrix([
 [ 1/5],
 [-7/5],
 [   1],
 [   0]]), Matrix([
 [-2/5],
 [ 4/5],
 [   0],
 [   1]])]
```

Множество решений системы – двумерное. Фундаментальная система решений

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы:

$$C_1\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\ -\frac{7}{5}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\ \frac{4}{5}\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Преобразование координат вектора при переходе к новому базису

Через $\mathbb{R}^n$ обозначается множество (линейное пространство) векторов–столбцов с n координатами. Элементы этого пространства имеют вид:

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Базисом пространства $\mathbb{R}^n$ называется любая линейно независимая система из n векторов, принадлежащих этому пространству. Если векторы $e_1,e_2,\dots,e_n$ образуют базис, то любой вектор пространства x можно разложить по этому базису, то есть представить в виде

$$x=x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n.$$

Числа $x_1,\dots,x_n$ называются *координатами вектора* x в базисе $e_1,\dots,e_n$. Координаты данного вектора определяются по заданному базису однозначно. Пусть кроме базиса $e_1,\dots,e_n$ имеются векторы $e_1',\dots,e_n'$, также образующие базис. Обозначим через $x_1',\dots,x_n'$ – координаты вектора x в новом базисе. Через T обозначим матрицу перехода от базиса $e_1,\dots,e_n$ к базису $e_1',\dots,e_n'$. Столбцами матрицы T являются координаты векторов нового базиса в старом базисе:

$$T=\begin{pmatrix}e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n}\\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn}\end{pmatrix},$$

$$e_1'=\begin{pmatrix}e_{11}\\ e_{21}\\ \dots\\ e_{n1}\end{pmatrix},e_2'=\begin{pmatrix}e_{12}\\ e_{22}\\ \dots\\ e_{n2}\end{pmatrix}\dots,e_n'=\begin{pmatrix}e_{1n}\\ e_{2n}\\ \dots\\ e_{nn}\end{pmatrix}.$$

Справедлива теорема: если определитель матрицы T не равен 0, то координаты $x_1',\dots,x_n'$ находятся из уравнения:

$$x'=T^{-1}x,$$

где $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}$.

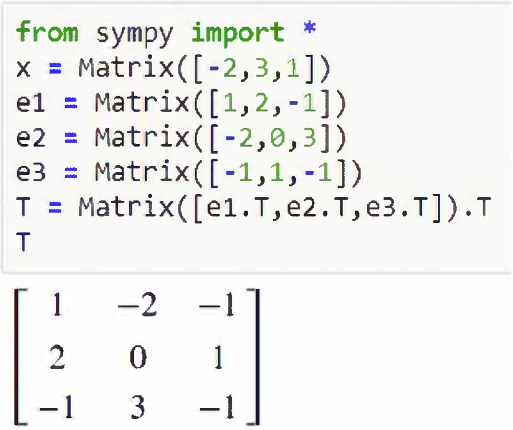
Пример 35. Пусть вектор x и базис векторов e_1', e_2', e_3' заданы своими координатамн в некотором базисе e_1, e_2, e_3:

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; e_2' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; e_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Разложнть вектор x по базису e_1', e_2', e_3'.

Решение. Разложить – означает найти коордииаты вектора x в базисе e_1', e_2', e_3', то есть нужно решить уравнение $x' = T^{-1}x$.

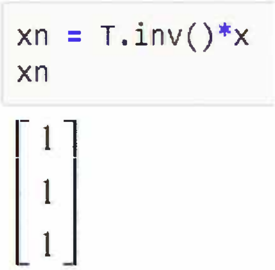
Сформировать матрицу T из векторов e_1', e_2', e_3' можно следующнм образом: составить матрицу, строками которой являются вектор–строки e_1', e_2', e_3', а затем ее транспонировать:



```
from sympy import *
x = Matrix([-2,3,1])
e1 = Matrix([1,2,-1])
e2 = Matrix([-2,0,3])
e3 = Matrix([-1,1,-1])
T = Matrix([e1.T,e2.T,e3.T]).T
T
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Находим $x' = T^{-1}x$ и решаем уравиение.



```
xn = T.inv()*x
xn
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Это озиачает, что $x = e_1' + e_2' + e_3'$.

Матрица линейного оператора

Линейным оператором $\hat{A}$ называют закон, по которому каждому вектору x нространства $\mathbb{R}^n$ ставится в соответствие другой вектор этого пространства, причем выполияются условня линейиости.

Пусть выбран некоторый базис $e_1,\ldots,e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$. Матрицей оператора $\hat{A}$ в базисе $e_1,\ldots,e_n$ называется матрица A, в которой j–й столбец состоит из коэффициентов разложения по базису результата действия оператора на j–й базисный вектор.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}e_j=a_{1j}e_1+a_{2j}e_2+\ldots+a_{nj}e_n.$$

Действие оператора на вектор эквивалентно умножению его матрицы на этот вектор: если $\hat{A}x=y$, то

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Пусть наряду с базисом $e_1,\ldots,e_n$ имеется новый базис $e'_1,\ldots,e'_n$. В новом базисе оператор $\hat{A}$ задается другой матрицей A'.

Матрицей перехода от старого базиса к новому базису называется матрица T, для которой выполняются соотношения:

$$e'_1=Te_1,\quad e'_2=Te_2,\ \ldots,\quad e'_n=Te_n.$$

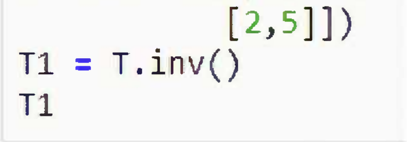
Справедлива теорема: матрицы A и A' линейного оператора $\hat{A}$ в базисах $B=e_1,\ldots,e_n$ и $B'=e'_1,\ldots,e'_n$ связаны соотношением $A'=T^{-1}AT$, где матрица T – это матрица перехода от старого базиса B к новому B'.

Пример 36. В базисе e_1,e_2 оператор $\hat{A}$ задается матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $e'_1=3e_1+2e_2$, $e'_2=-e_1+5e_2$.

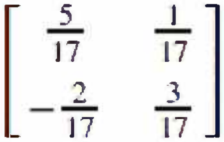
Решение. Столбцами матрицы перехода T от старого базиса к новому являются коэффициенты разложения векторов старого базиса по новому базису:

$$T=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обратная к ней матрица:

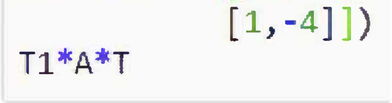


```
T = Matrix([[3,-1],
            [2,5]])
T1 = T.inv()
T1
```

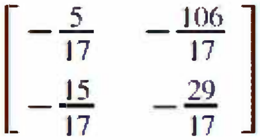


$$\begin{bmatrix} \frac{5}{17} & \frac{1}{17} \\ -\frac{2}{17} & \frac{3}{17} \end{bmatrix}$$

Для матрицы A' имеем:



```
A = Matrix([[2,-3],
            [1,-4]])
T1*A*T
```



$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{17} & -\frac{106}{17} \\ -\frac{15}{17} & -\frac{29}{17} \end{bmatrix}$$

Ответ: $A' = \frac{-1}{17}\begin{pmatrix} 5 & 106 \\ 15 & 29 \end{pmatrix}$.

Собственные векторы

Неиулевой вектор *x* иазывается *собственным вектором* квадратной матрицы *A*, если он удовлетворяет уравнению $Ax = \lambda x$ для некоторого числа λ. λ называется *собственным числом* матрнцы *A*, отвечающим собствеииому вектору *x*.

Каждому собствеиному зиачеиию λ соответствует бескоиечное миожество векторов *x*, ио все они будут коллинеарны между собой (то есть отличаются друг от друга некоторым постояниым миожителем *c*).

Функция eig() модуля numpy.linalg находит собственные векторы и собственные значения заданной матрицы.

numpy.linalg.eig(a)

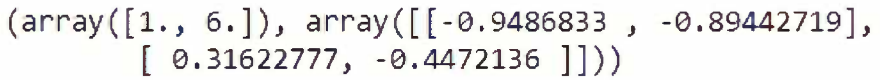
Параметры: a – квадратная матрица.

Возвращает: w – собствеиные значеиия, v – собственные векторы.

Возвращаются в виде списка: первый элемеит списка – массив, содержащнй собственные значення, второй элемент списка – матрпца; столбцы матрицы содержат соответствующие собственные векторы. (Собственные векторы возвращаются нормированными: по модулю, равными 1).

Пример 37.

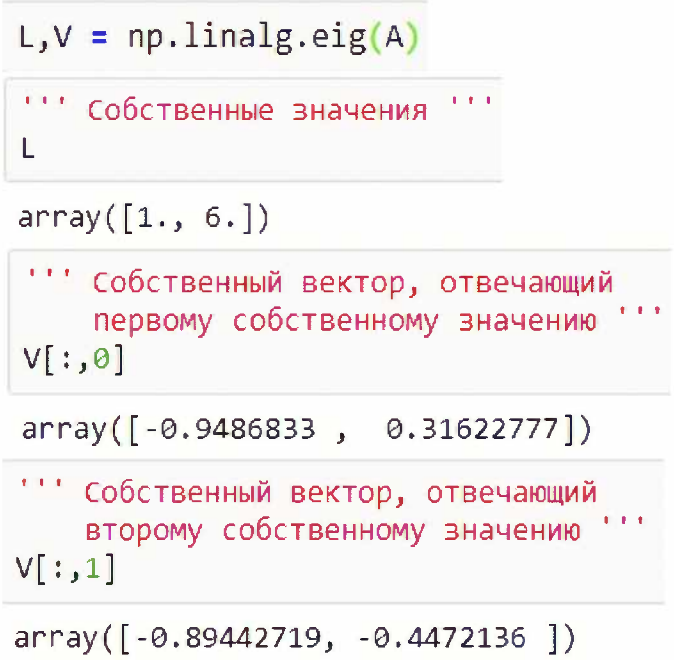
```
''' numpy '''
A = np.array([[3,6],
              [1,4]])
np.linalg.eig(A)
```



```
(array([1., 6.]), array([[-0.9486833 , -0.89442719],
       [ 0.31622777, -0.4472136 ]]))
```

Два собственных значения: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 6$.

Первому собственному значению отвечает собственный вектор $e_1 = (-0.9486833, 0.31622777)$. Второму собственному значению отвечает собственный вектор $e_2 = (-0.89442719, -0.4472136)$.



```
L,V = np.linalg.eig(A)
```

```
''' Собственные значения '''
L
```

```
array([1., 6.])
```

```
''' Собственный вектор, отвечающий
    первому собственному значению '''
V[:,0]
```

```
array([-0.9486833 ,  0.31622777])
```

```
''' Собственный вектор, отвечающий
    второму собственному значению '''
V[:,1]
```

```
array([-0.89442719, -0.4472136 ])
```

Собственными векторами являются также и все векторы вида c_1e_1, c_2e_2, где c_1, c_2 – произвольные действительные числа не равные 0.

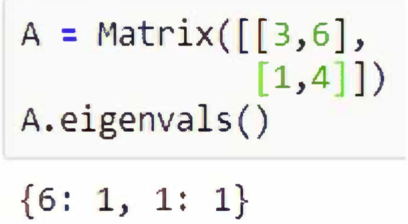
Ответ: $\lambda_1 = 1, e_1 = c_1(-0.949, 0.316)$; $\lambda_2 = 6$, $e_2 = c_2(-0.894, -0.447)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

В библиотеке sympy.

Метод A.eigenvals() находит собственные значения заданной матрицы A.

Возвращает словарь, в котором ключами являются собственные значения, значениями словаря являются кратности собственных векторов, отвечающим данным собственным значениям.

Пример 38.

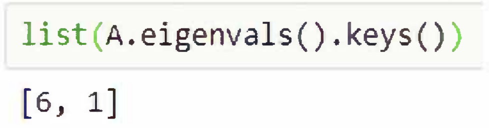


```
A = Matrix([[3,6],
            [1,4]])
A.eigenvals()
```

```
{6: 1, 1: 1}
```

Два собственных значения $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 1$ кратности 1.

Вывести список собственных значений:



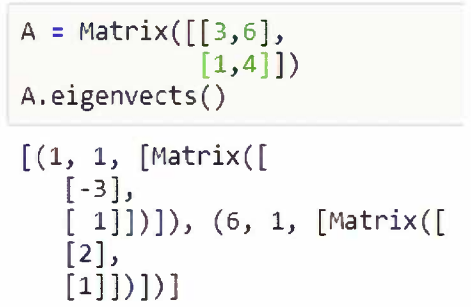
```
list(A.eigenvals().keys())
```

```
[6, 1]
```

Метод A.eigenvects() находят собственные значения и собственные векторы заданной матрицы A.

Возвращает список кортежей. Отдельными элементами кортежа являются: собственное значение, его кратность и собственный вектор в виде матрицы–столбца.

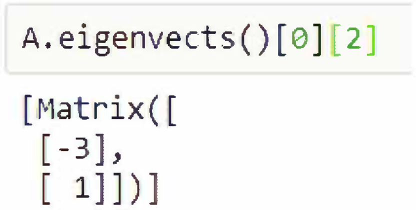
Пример 39.



```
A = Matrix([[3,6],
            [1,4]])
A.eigenvects()
```

```
[(1, 1, [Matrix([
   [-3],
   [ 1]])]), (6, 1, [Matrix([
   [2],
   [1]])])]
```

Собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$ – это нулевой элемент списка и второй элемент кортежа.

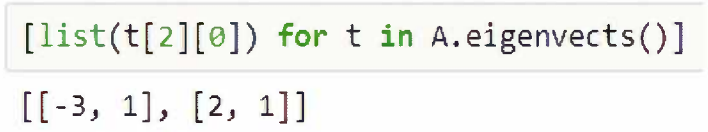


```
A.eigenvects()[0][2]
```

```
[Matrix([
 [-3],
 [ 1]])]
```

Вектор $e = (-3{,}1)$. Здесь, в отличие от решения в модуле numpy, собственный вектор не нормируется.

Вывести список всех собственных векторов:



```
[list(t[2][0]) for t in A.eigenvects()]
```

```
[[-3, 1], [2, 1]]
```

$e_1 = (-3{,}1),\ e_2 = (2{,}1).$

Ответ: $\lambda_1 = 1,\ e_1 = c_1(-3{,}1);\ \lambda_2 = 6,\ e_2 = c_2(2{,}1),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$

Характеристический многочлен

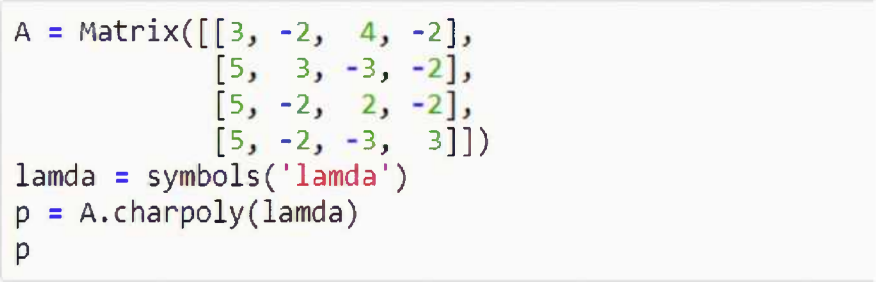
Собственные значения λ матрицы A удовлетворяют *характеристическому уравнению* $det(A - \lambda E) = 0$, а сам определитель матрицы $A - \lambda E$ называется характеристическим многочленом.

Характеристический многочлен – **метод .charpoly()** библиотеки sympy.

Пример 40. Найти характеристический многочлен матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

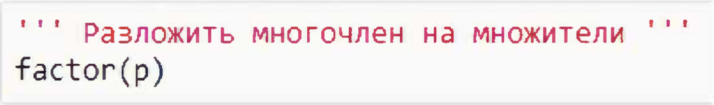
Решение.



```
A = Matrix([[3, -2,  4, -2],
            [5,  3, -3, -2],
            [5, -2,  2, -2],
            [5, -2, -3,  3]])
lamda = symbols('lamda')
p = A.charpoly(lamda)
p
```

$$\mathrm{PurePoly}\left(\lambda^4 - 11\lambda^3 + 29\lambda^2 + 35\lambda - 150, \lambda, domain = \mathbb{Z}\right)$$

Замечание. lambda – зарезервированное слово в Python. Поэтому вместо этого термина используем lamda. Переменную с таким именем библиотека sympy выводит как λ.



```
''' Разложить многочлен на множители '''
factor(p)
```

$$(\lambda - 5)^2 (\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

Матрица A в этой задаче имеет три собственные значения:

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5.$$

Это подтверждает и метод .eigenvals():

```
A.eigenvals()
```

```
{3: 1, -2: 1, 5: 2}
```

Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду

В разных базисах линейному оператору соответствуют различные матрицы. Наиболее простой вид принимает матрица A линейного оператора $\hat{A}$ в базисе, составленным из линейно независимых собственных векторов оператора $\hat{A}$.

Диагональной матрицей называется матрица, все элементы которой, лежащие вне главной диагонали, равны 0.

Пусть имеются два базиса пространства $\mathbb{R}^n$: старый и новый, и матрица перехода T от старого базиса к новому. *Приведением матрицы A к диагональному виду* называется нахождение такой матрицы перехода T, для которой матрица линейного оператора $\hat{A}$ в новом базисе имеет диагональный вид: $D = T^{-1}AT$ – диагональная.

Справедлива теорема: для того, чтобы квадратная матрица A размера $n \times n$ приводилась к диагональному виду $D = T^{-1}AT$ необходимо и достаточно, чтобы она имела n линейно независимых векторов.

Исходная матрица А выражается через диагональную по формуле:

$$A = TDT^{-1}.$$

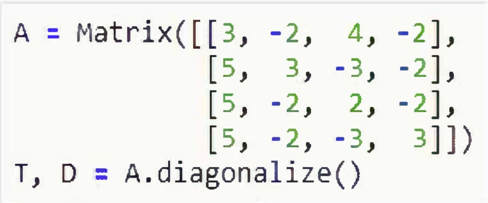
Метод .diagonalize() библиотеки sympy.

Возвращает кортеж (T, D), где T – матрица перехода, D – диагональная матрица, и $A = TDT^{-1}$.

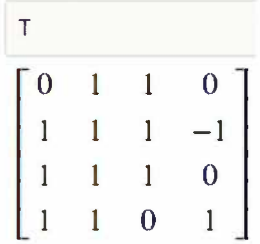
Пример 41. Привести матрицу A к диагональному виду.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

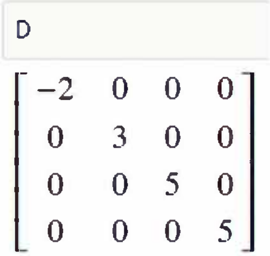


```
A = Matrix([[3, -2,  4, -2],
            [5,  3, -3, -2],
            [5, -2,  2, -2],
            [5, -2, -3,  3]])
T, D = A.diagonalize()
```



```
T
```

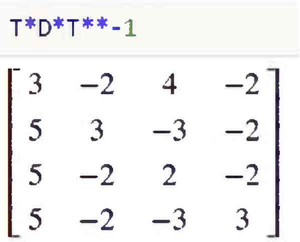
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



```
D
```

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Проверка.



```
T*D*T**-1
```

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Квадратичные формы

Квадратичной формой $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется сумма, в которой каждое слагаемое есть произведение некоторых коэффициентов на квадрат одной из переменных или на произведение двух разных переменных:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

причем коэффициенты в каждом слагаемом удовлетворяют условию симметрии $a_{ij} = a_{ji}$.

Матрица, составленная из коэффициентов при переменных, называется *матрицей квадратичной формы*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу квадратичной формы можно записать следующим образом:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x},$$

где $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$.

Пример 42. Записать матрицу квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 - 5x_3^2.$$

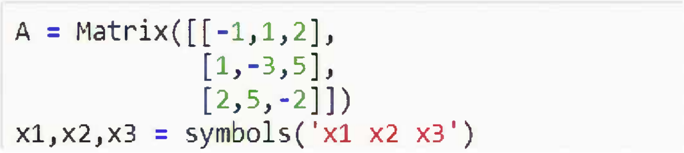
Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

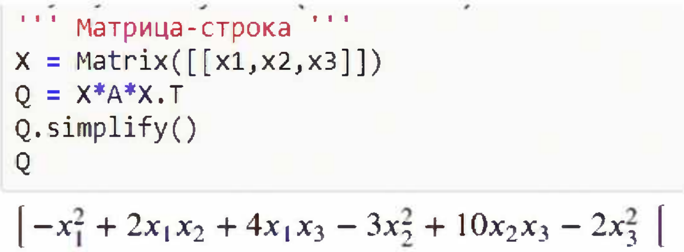
Пример 43. По матрице *A* записать квадратичную форму

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Решение.



```
A = Matrix([[-1,1,2],
            [1,-3,5],
            [2,5,-2]])
x1,x2,x3 = symbols('x1 x2 x3')
```



```
''' Матрица-строка '''
X = Matrix([[x1,x2,x3]])
Q = X*A*X.T
Q.simplify()
Q
```

$$\left[-x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 10x_2x_3 - 2x_3^2 \right]$$

Ответ: $Q(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_1x_3 + 10x_2x_3 - 2x_3^2$.

Квадратичная форма называется *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), если $Q(x_1,x_2,\ldots,x_n) > 0$ (< 0) для всех значений переменных, кроме случая, когда все они равны 0.

Квадратичная форма называется *полуопределенной*, если, либо для все значений переменных $Q(x_1,\ldots,x_n) \geq 0$, либо для всех значений $Q(x_1,\ldots,x_n) \leq 0$.

Квадратичная форма, принимающая значения разных знаков, называется *неопределенной*.

Главными минорами матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называются определители вида

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

(то есть образованными первыми *k* строками и первыми *k* столбцами.

Критерий Сильвестра. Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы *A* были положительны, то есть

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0.$$

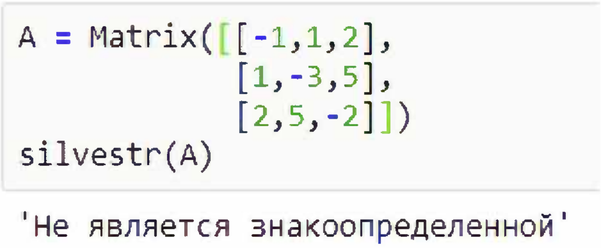
Для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров матрицы *A* чередовались, начиная со знака «–», то есть

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots$$

В разделе «Функции Python», с. 34 приведен текст функции silvestr(), реализующей критерий Сильвестра. В качестве входного параметра функция использует матрицу квадратичной формы.

Пример 44. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму

$$Q(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_1x_3 + 10x_2x_3 - 2x_3^2.$$



```
A = Matrix([[-1,1,2],
            [1,-3,5],
            [2,5,-2]])
silvestr(A)
```

```
'Не является знакоопределенной'
```

Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Квадратичная форма имеет *канонический вид*, если ее запись содержит только слагаемые с квадратами переменных.

Любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду с помощью замены переменных.

Закон инерции квадратичных форм. Количество положительных и отрицательных коэффициентов при квадратах переменных будет одним и тем же при любом выборе переменных.

Метод собственных векторов приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Находятся собственные значения и собственный векторы матрицы квадратичной формы. В качестве новых базисных векторов выбираются собственные векторы. В новом базисе матрица квадратичной формы становится диагональной. Сама квадратичная форма в новых переменных принимает канонический вид, причем коэффициенты при квадратах новых переменных в этой форме равны найденным собственным значениям.

$$Q(x_1',x_2',\dots,x_n') = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2.$$

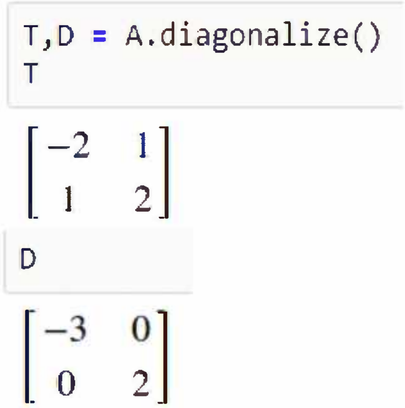
Матрица перехода от старого базиса к новому строится из нормированных собственных векторов (то есть собственных векторов с длиной 1).

Пример 45. Привести квадратичную форму Q к каноническому виду методом собственных значений и найти соответствующую матрицу перехода.

$$Q(x_1,x_2) = -2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2.$$

Решение. Матрица квадратичиой формы $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Метод .diagonalize() позволяет найти как матрицу перехода T, так и собственные значенпя (диагональные элементы матрицы D):



```
T,D = A.diagonalize()
T
```

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
D
```

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ответ: $Q = -3x_1'^2 + 2x_2'^2$; $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Использование матриц в экономике

Пример 46. Предприятие выпускает ежесуточно пять видов продукции. Показатели процесса производства приведены в таблице:

Вид изделия	Число изделий	Расход сырья, (кг/изд.)	Норма времеии изготовлеиия (ч/изд.)	Цеиа изделия, ден.ед/нзд.
1	30	5	7	45
2	60	3	10	20
3	40	7	8	50
4	80	2	15	25
5	50	4	8	30

Требуется определить:

суммарный ежесуточный расход сырья R;

общие затраты рабочего времени T;

суммарпая стоимость выпускаемой продукцпи P.

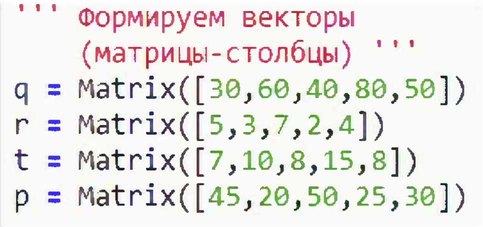
Решение. Чтобы получить данные производственного цпкла (числа выпускаемых изделий, расхода сырья, затрат времени, цен) по всем нятн нреднриятням, нужно данные таблицы запнсать в виде векторов:

q – вектор числа изделий;

r – вектор расхода сырья;

t – вектор затрат времени;

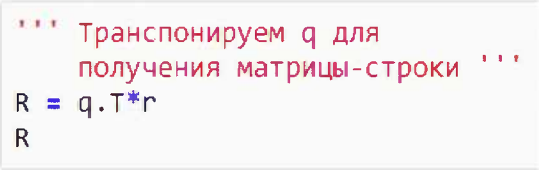
p – вектор цен.



```
''' Формируем векторы
    (матрицы-столбцы) '''
q = Matrix([30,60,40,80,50])
r = Matrix([5,3,7,2,4])
t = Matrix([7,10,8,15,8])
p = Matrix([45,20,50,25,30])
```

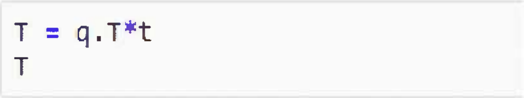
Чтобы получить ежесуточный расход сырья, нужно по каждому виду изделия умножить число изделий на расход сырья, и затем полученные произведения сложить. Такая операция (сумма произведений координат) реализуется скалярным произведением векторов $R = q \cdot r$. Аналогично вычисляются и другие требуемые величины: $T = q \cdot t$, $P = q \cdot p$.

В библиотеке sympy для вычисления скалярного произведения вектора a на вектор b нужно матрицу-строку a умножить на матрицу-столбец b.



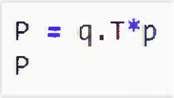
```
''' Транспонируем q для
    получения матрицы-строки '''
R = q.T*r
R
```

$[970]$



```
T = q.T*t
T
```

$[2730]$



```
P = q.T*p
P
```

$[8050]$

Ответ: R = 570 кг; T = 2730 ч; P = 8050 ден.ед.

Пример 47. В таблице приведены данные о производительности 5 предприятий, которые выпускают 4 вида продукции с потреблением трех видов сырья, а также продолжительность работы всех предприятий и цена каждого вида сырья.

Вид изделия	**Производительность предприятий, изд./день**					**Затраты сырья, ед.веса/изд**		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**
1	3	5	4	4	6	4	3	2
2	4	2	3	5	2	2	1	5
3	2	3	5	2	4	6	4	4
4	7	4	2	8	3	3	5	2
	Число рабочих дней					**Цена сырья**		
	120	200	150	170	220	60	80	50

Требуется определить:

1) производительность каждого предприятия по каждому виду изделия;

2) потребность каждого предприятия по каждому типу сырья;

3) сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска указанного вида и числа изделий.

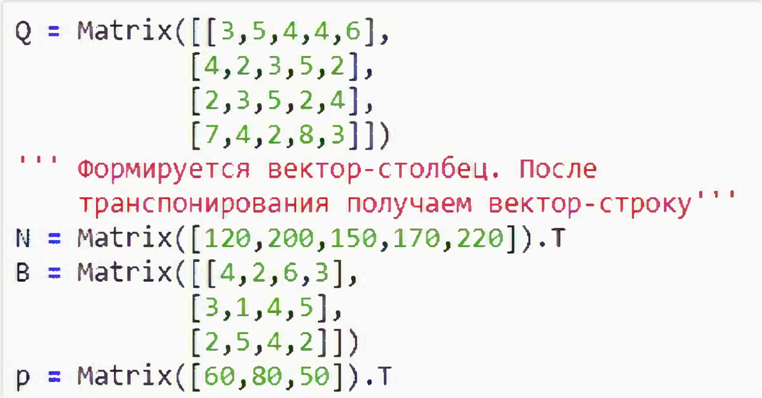
Решение. Составим матрицы, характеризующие производство:

матрица Q производительности предприятий по каждому виду изделия;

матрица-строка N для числа рабочих дней по каждому предприятию;

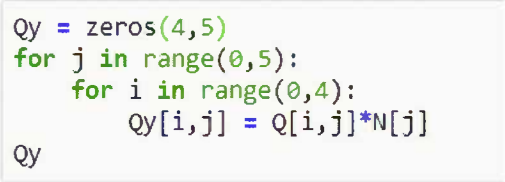
матрица затрат сырья B на единицу изделия (для каждого предприятия затраты по условию одинаковые). В матрице B строки должны соответствовать типам сырья, а столбцы – видам изделий;

матрица-строка цен сырья p.



```
Q = Matrix([[3,5,4,4,6],
            [4,2,3,5,2],
            [2,3,5,2,4],
            [7,4,2,8,3]])
''' Формируется вектор-столбец. После
    транспонирования получаем вектор-строку'''
N = Matrix([120,200,150,170,220]).T
B = Matrix([[4,2,6,3],
            [3,1,4,5],
            [2,5,4,2]])
p = Matrix([60,80,50]).T
```

Каждый столбец матрицы Q соответствует дневной производительности. Годовая производительность j-го предприятия по каждому виду продукции получается умножением элементов j-го столбца матрицы Q на элементы j-го столбца матрицы N.



```
Qy = zeros(4,5)
for j in range(0,5):
    for i in range(0,4):
        Qy[i,j] = Q[i,j]*N[j]
Qy
```

$$\begin{bmatrix} 360 & 1000 & 600 & 680 & 1320 \\ 480 & 400 & 450 & 850 & 440 \\ 240 & 600 & 750 & 340 & 880 \\ 840 & 800 & 300 & 1360 & 660 \end{bmatrix}$$

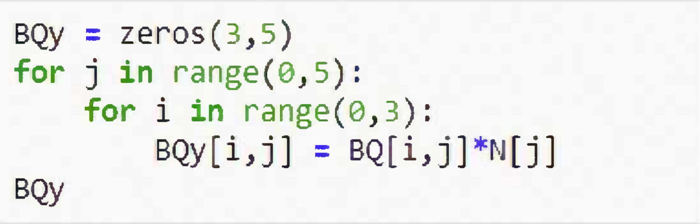
Найдем дневной расход по видам сырья для каждого предприятия. Для этого нужно матрицу B (затраты сырья на единицу изделия) умножить на матрицу Q (производительность предприятий по каждому виду изделия). Обозначим полученную матрицу BQ.

```
BQ = B*Q
BQ
```

$$\begin{bmatrix} 53 & 54 & 58 & 62 & 61 \\ 56 & 49 & 45 & 65 & 51 \\ 48 & 40 & 47 & 57 & 44 \end{bmatrix}$$

Строки матрицы *BQ* соответствуют номеру сырья, столбцы – номеру предприятия.

Если умножить каждый элемент *j*-го столбца матрицы *BQ* на соответствующий элемент *j*-го столбца матрицы *N*, получим годовую потребность каждого предприятия в каждом виде сырья (матрица *BQy*).



```
BQy = zeros(3,5)
for j in range(0,5):
    for i in range(0,3):
        BQy[i,j] = BQ[i,j]*N[j]
BQy
```

$$\begin{bmatrix} 6360 & 10800 & 8700 & 10540 & 13420 \\ 6720 & 9800 & 6750 & 11050 & 11220 \\ 5760 & 8000 & 7050 & 9690 & 9680 \end{bmatrix}$$

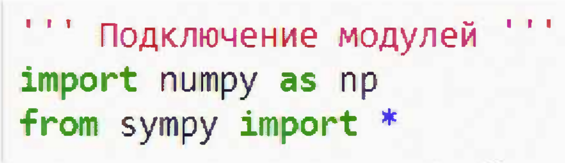
Стоимость общего годового запаса сырья для каждого предприятия (вектор *P*) получается умножением вектора *p* (цены сырья) на матрицу *BQy* (потребность в сырье).

```
P = p*BQy
P
```

$$\begin{bmatrix} 1207200 & 1832000 & 1414500 & 2000900 & 2186800 \end{bmatrix}$$

Ответ: Годовая производительность предприятий по видам изделий – матрица *Qy* (предприятия – по столбцам); годовая потребность предприятий по видам сырья – матрица *BQy*; годовая сумма кредитования – вектор *P*.

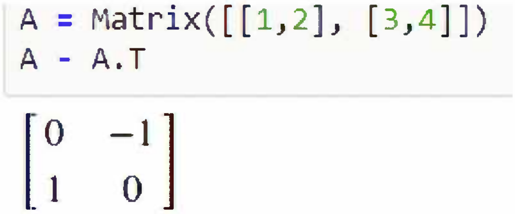
Примеры решения задач



```
''' Подключение модулей '''
import numpy as np
from sympy import *
```

1. Найти $A - A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

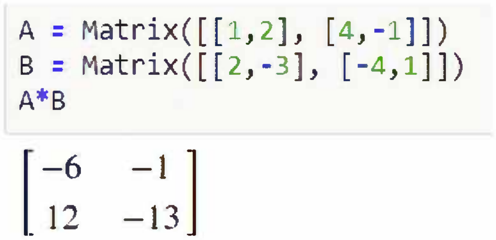


```
A = Matrix([[1,2], [3,4]])
A - A.T
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

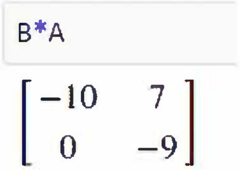
2. Найти AB и BA, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.



```
A = Matrix([[1,2], [4,-1]])
B = Matrix([[2,-3], [-4,1]])
A*B
```

$$\begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 12 & -13 \end{bmatrix}$$



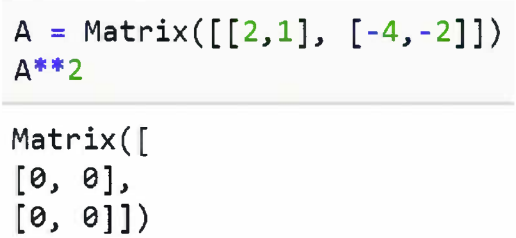
```
B*A
```

$$\begin{bmatrix} -10 & 7 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$$

3. Квадрат ненулевой матрицы, в отличие от чисел, может быть нулевым. Проверить равенство:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

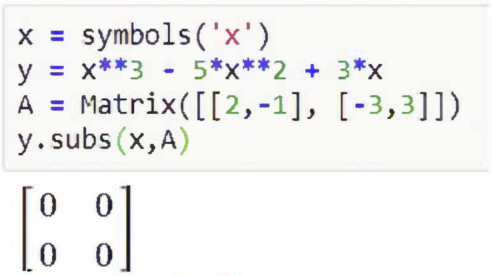


```
A = Matrix([[2,1], [-4,-2]])
A**2
```

```
Matrix([
[0, 0],
[0, 0]])
```

4. Пусть $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $f(A)$.

Решение.



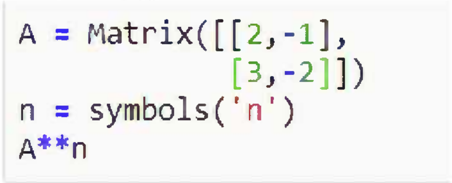
```
x = symbols('x')
y = x**3 - 5*x**2 + 3*x
A = Matrix([[2,-1], [-3,3]])
y.subs(x,A)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Вычислить $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$.

Решение.



```
A = Matrix([[2,-1],
            [3,-2]])
n = symbols('n')
A**n
```

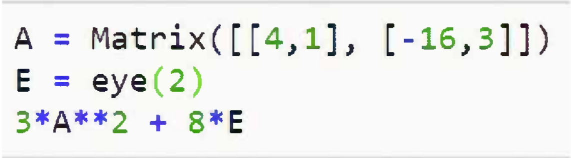
$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}-\frac{(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}-\frac{3(-1)^n}{2} & \frac{3(-1)^n}{2}-\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Для значений n с одинаковой четностью полученные выражения совпадают.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при n четном, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ при n нечетном.

6. Пусть $f(x) = 3x^2 + 8$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -16 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $f(A)$.

Решение. К матрице нельзя прибавить число. Многочленом $f(A)$ от матрицы называется выражение $f(A) = 3A^2 + 8E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и A.



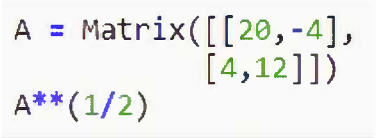
```
A = Matrix([[4,1], [-16,3]])
E = eye(2)
3*A**2 + 8*E
```

$$\begin{bmatrix} 8 & 21 \\ -336 & -13 \end{bmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 8 & 21 \\ -336 & -13 \end{pmatrix}$.

7. Вычислить $\sqrt{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 20 & -4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

Решение. $\sqrt{A}$ – такая матрица, квадрат которой совпадает с A.



```
A = Matrix([[20,-4],
            [4,12]])
A**(1/2)
```

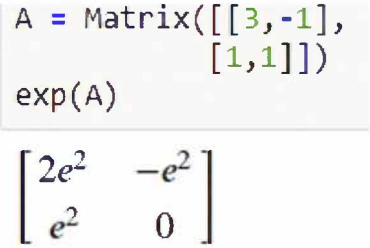
$$\begin{bmatrix} 4.5 & -0.5 \\ 0.5 & 3.5 \end{bmatrix}$$

Найдено одно значение. Второе значение получается из первого умножением на -1.

Ответ: $\sqrt{A} = \pm \begin{pmatrix} 4{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 3{,}5 \end{pmatrix}$.

8. Вычислить e^A, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.



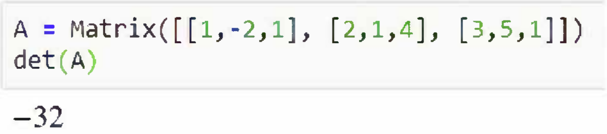
```
A = Matrix([[3,-1],
            [1,1]])
exp(A)
```

$$\begin{bmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ e^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение.

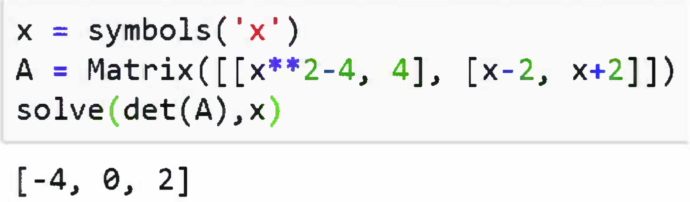


```
A = Matrix([[1,-2,1], [2,1,4], [3,5,1]])
det(A)
```

-32

10. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x^2-4 & 4 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$.

Решение. Для решения уравнения используем функцию solve().

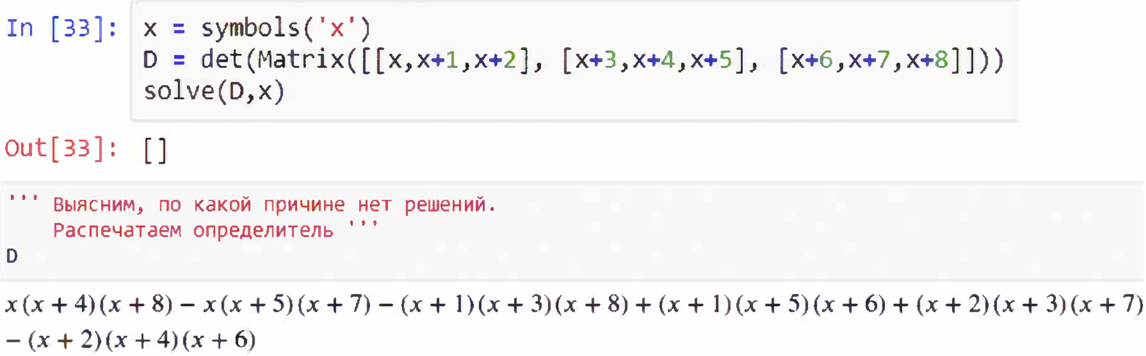


```
x = symbols('x')
A = Matrix([[x**2-4, 4], [x-2, x+2]])
solve(det(A),x)
```

```
[-4, 0, 2]
```

11. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0$.

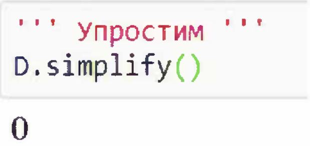
Решение.



```
In [33]: x = symbols('x')
         D = det(Matrix([[x,x+1,x+2], [x+3,x+4,x+5], [x+6,x+7,x+8]]))
         solve(D,x)

Out[33]: []
```

```
''' Выясним, по какой причине нет решений.
    Распечатаем определитель '''
D
```

$x(x+4)(x+8) - x(x+5)(x+7) - (x+1)(x+3)(x+8) + (x+1)(x+5)(x+6) + (x+2)(x+3)(x+7)$
$- (x+2)(x+4)(x+6)$



```
''' Упростим '''
D.simplify()
```

0

Определитель при всех значения x равен 0.

Ответ: x – любое число.

12. Найти $(A^{-1})^T$ и $(A^T)^{-1}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

```
A = Matrix([[1,0,-1], [2,1,0], [2,2,1]])
A.inv().T
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

```
A.T.inv()
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ответ: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

13. Решить матричиые уравиения: $AX = B$ и $YA = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

```
A = Matrix([[1,2], [3,4]])
B = Matrix([[0,1], [-1,2]])
X = A.inv()*B
X
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

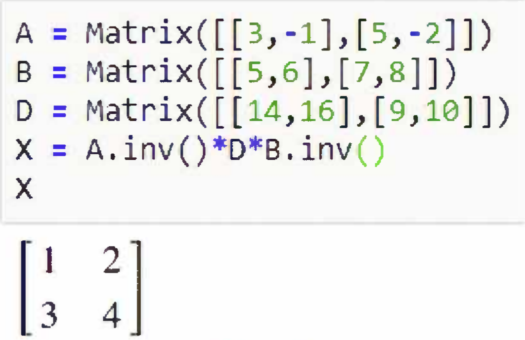
```
Y = B*A.inv()
Y
```

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

14. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем уравнение вида $AXB = D$. Если умножить обе части уравнения слева на A^{-1}, а справа на B^{-1}, получим $X = A^{-1}DB^{-1}$.



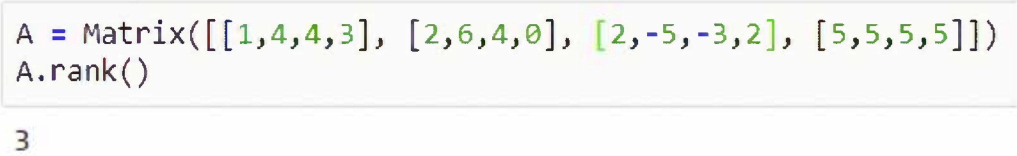
```
A = Matrix([[3,-1],[5,-2]])
B = Matrix([[5,6],[7,8]])
D = Matrix([[14,16],[9,10]])
X = A.inv()*D*B.inv()
X
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

15. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & -8 & 1 & 10 \\ 5 & 10 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение.



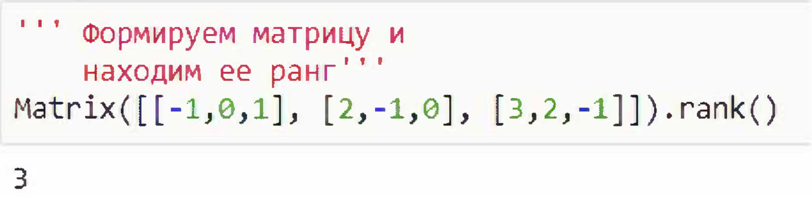
```
A = Matrix([[1,4,4,3], [2,6,4,0], [2,-5,-3,2], [5,5,5,5]])
A.rank()
```

```
3
```

Ответ: 3.

16. Являются ли векторы $\boldsymbol{a} = (-1{,}0{,}1)$, $\boldsymbol{b} = (2,-1{,}0)$ и $\boldsymbol{c} = (3{,}2,-1)$ линейно независимыми?

Решение. Система из n векторов пространства $\mathbb{R}^n$ (то есть с n координатами), является линейно независимой тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленной из этих векторов, совпадает с числом векторов n.



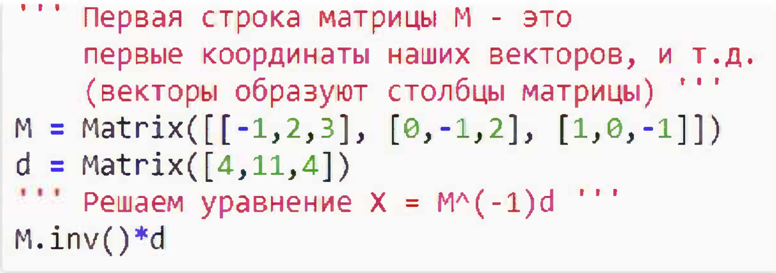
```
''' Формируем матрицу и
    находим ее ранг'''
Matrix([[-1,0,1], [2,-1,0], [3,2,-1]]).rank()
```

```
3
```

Ранг равен 3 – совпадает с числом векторов системы, следовательно векторы линейно независимы.

17. Представить вектор $\boldsymbol{d} = (4{,}11{,}4)$ как линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a} = (-1{,}0{,}1)$, $\boldsymbol{b} = (2,-1{,}0)$ и $\boldsymbol{c} = (3{,}2,-1)$.

Решение. Нужно найти числа x, y, z, при которых выполняется равенство $\boldsymbol{d} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$. Запишем это равенство в координатах, получим систему уравнений и ее решим:



```
''' Первая строка матрицы M - это
    первые координаты наших векторов, и т.д.
    (векторы образуют столбцы матрицы) '''
M = Matrix([[-1,2,3], [0,-1,2], [1,0,-1]])
d = Matrix([4,11,4])
''' Решаем уравнение X = M^(-1)d '''
M.inv()*d
```

$$\begin{bmatrix}9\\-1\\5\end{bmatrix}$$

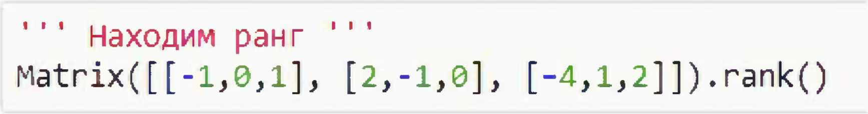
Ответ: $\boldsymbol{d} = 9\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 5\boldsymbol{c}$.

18. Даны три вектора:

$$\boldsymbol{a} = (-1,0,1),\ \boldsymbol{b} = (2,-1,0),\ \boldsymbol{c} = (-4,1,2).$$

Возможно ли выразить вектор $\boldsymbol{a}$ через остальные два вектора. Если возможно, найти это разложение.

Решение. Один из векторов системы можно выразить через остальные векторы тогда и только тогда, когда данная система векторов является линейно зависимой.

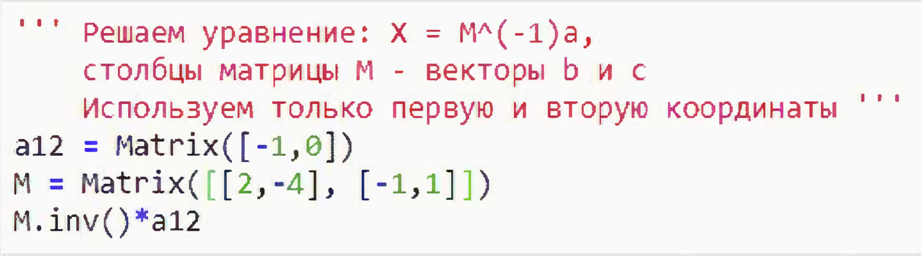


```
''' Находим ранг '''
Matrix([[-1,0,1], [2,-1,0], [-4,1,2]]).rank()
```

```
2
```

Ранг равен 2, а число векторов системы – 3, следовательно, система векторов линейно зависима. Это означает, что вектор $\boldsymbol{a}$ можно выразить через $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Для этого нужно будет найти числа x и y, при которых выполняется равенство $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c}$. Если это равенство записать в координатах, получим систему из трех уравнений с двумя неизвестными. Методом обратной матрицы такую систему решить невозможно (матрица – не квадратная). Но одно из уравнений системы (любое) можно исключить (по причине линейной зависимости векторов).

Итак, формируем уравнение из первых двух координат векторов и решаем его.



```
''' Решаем уравнение: X = M^(-1)a,
    столбцы матрицы M - векторы b и c
    Используем только первую и вторую координаты '''
a12 = Matrix([-1,0])
M = Matrix([[2,-4], [-1,1]])
M.inv()*a12
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

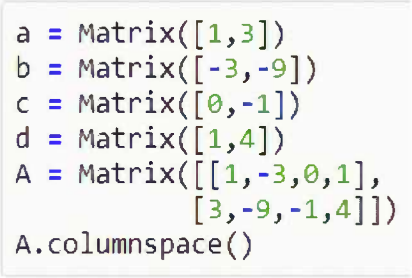
Ответ: возможно; $\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

19. В системе векторов

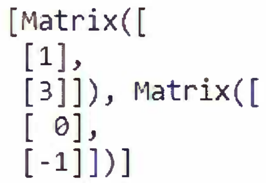
$$\boldsymbol{a} = (1{,}3),\ \boldsymbol{b} = (-3,-9),\ \boldsymbol{c} = (0,-1),\ \boldsymbol{d} = (1{,}4)$$

найти базис. Разложить каждый из векторов системы по базисным векторам.

Решение. Для нахождения базиса используем функцию columnspace().



```
a = Matrix([1,3])
b = Matrix([-3,-9])
c = Matrix([0,-1])
d = Matrix([1,4])
A = Matrix([[1,-3,0,1],
            [3,-9,-1,4]])
A.columnspace()
```

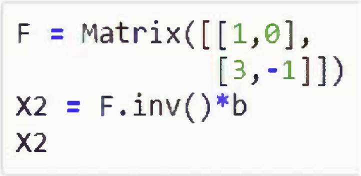


```
[Matrix([
 [1],
 [3]]), Matrix([
 [ 0],
 [-1]])]
```

Базис образуют векторы $\boldsymbol{a} = (\mathbf{1}, \mathbf{3})$ и $\boldsymbol{c} = (\mathbf{0}, -\mathbf{1})$. Решая системы уравнений методом обратной матрицы, находим разложения векторов по базису.

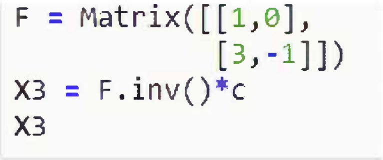
```
F = Matrix([[1,0],
            [3,-1]])
X1 = F.inv()*a
X1
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



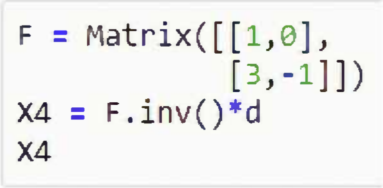
```
F = Matrix([[1,0],
            [3,-1]])
X2 = F.inv()*b
X2
```

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$



```
F = Matrix([[1,0],
            [3,-1]])
X3 = F.inv()*c
X3
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



```
F = Matrix([[1,0],
            [3,-1]])
X4 = F.inv()*d
X4
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Разложение вектора, входящего в базис, тривиальное – выражается через сам вектор.

Ответ: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \mathbf{c}$.

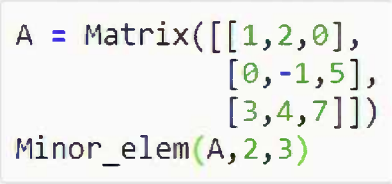
20. Дана матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Найти: 1) минор элемента a_{23}; 2) алгебраическое дополнение элемента a_{23}.

Решение. Минором элемента a_{23} является определитель матрицы, получающейся в результате вычеркивания из исходной матрицы строки и столбца, в которых расположен этот элемент.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Если использовать функцию Minor_elem() (текст функции на с. 33):

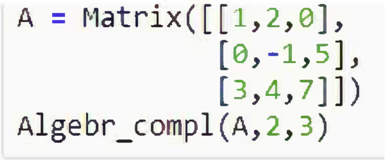


```
A = Matrix([[1,2,0],
            [0,-1,5],
            [3,4,7]])
Minor_elem(A,2,3)
```

-2

Алгебраическое дополнение A_{ij} связано с минором M_{ij} формулой: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, следовательно, $A_{23} = (-1)^{2+3}(-2) = 2$.

Если использовать функцию Algebr_compl() (текст функции на с. 33):



```
A = Matrix([[1,2,0],
            [0,-1,5],
            [3,4,7]])
Algebr_compl(A,2,3)
```

2

Ответ: -2; 2.

21. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 19 & -5 \\ 4 & 10 & -8 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти:

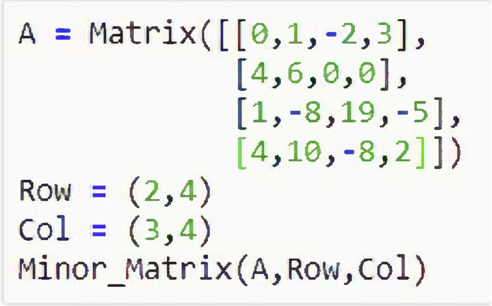
1) минор, образованный 2–й и 4–й строкамн и 3–м и 4–м столбцами.

2) базнсный мннор матрнцы А.

Решение. Для п. 1) решением является определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

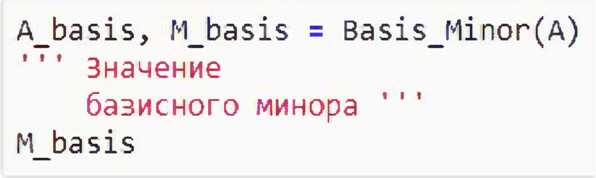
Если использовать функцию Minor_Matrix()(текст па с. 33):



```
A = Matrix([[0,1,-2,3],
            [4,6,0,0],
            [1,-8,19,-5],
            [4,10,-8,2]])
Row = (2,4)
Col = (3,4)
Minor_Matrix(A,Row,Col)
```

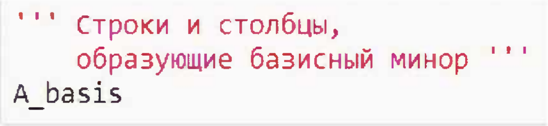
0

2) Базиспых миноров у матрицы может быть песколько. Один из возможных находит функция Basis_Minor()(текст функции на с. 34).



```
A_basis, M_basis = Basis_Minor(A)
''' Значение
    базисного минора '''
M_basis
```

-4



```
''' Строки и столбцы,
    образующие базисный минор '''
A_basis
```

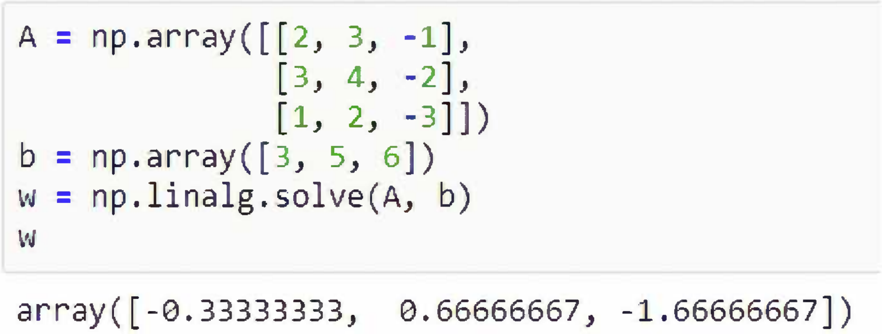
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 9 & 26 \end{bmatrix}$$

22. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y \; - \; z = 3, \\ 3x + 4y \; - \; 2z = 5, \\ x + 2y \; - \; 3z = 6. \end{cases}$$

Решение. Систему уравнений можно решать различными сиособами.

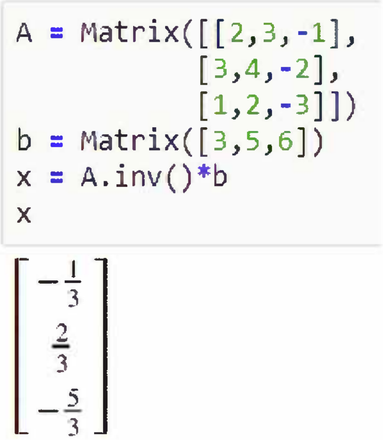
1. В библиотеке numpy:



```
A = np.array([[2, 3, -1],
              [3, 4, -2],
              [1, 2, -3]])
b = np.array([3, 5, 6])
w = np.linalg.solve(A, b)
w
```

```
array([-0.33333333,  0.66666667, -1.66666667])
```

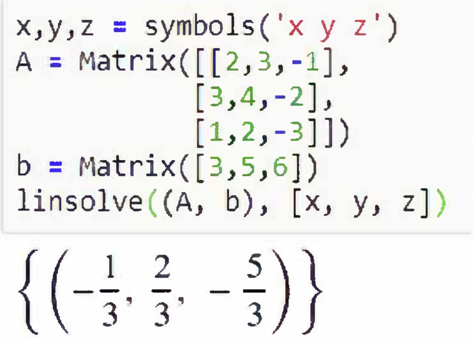
2. В библиотеке sympy методом обратной матрицы:



```
A = Matrix([[2,3,-1],
            [3,4,-2],
            [1,2,-3]])
b = Matrix([3,5,6])
x = A.inv()*b
x
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

3. Используя функцню linsolve() библиотеки sympy:



```
x,y,z = symbols('x y z')
A = Matrix([[2,3,-1],
            [3,4,-2],
            [1,2,-3]])
b = Matrix([3,5,6])
linsolve((A, b), [x, y, z])
```

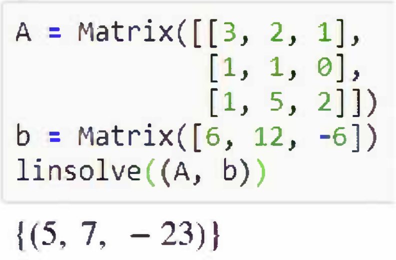
$$\left\{\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)\right\}$$

Ответ: $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -\frac{5}{3}$.

23. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z \; = 6, \\ x + y = 12, \\ x + 5y + 2z = -6. \end{cases}$$

Решение. В функции linsolve() можно и не указывать обозначения переменных.



```
A = Matrix([[3, 2, 1],
            [1, 1, 0],
            [1, 5, 2]])
b = Matrix([6, 12, -6])
linsolve((A, b))
```

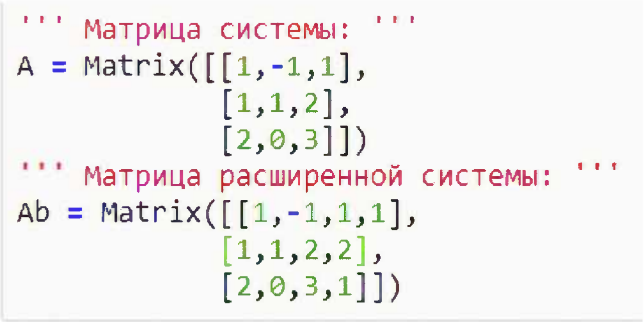
$\{(5,\ 7,\ -23)\}$

Ответ: $x = 5, y = 7, z = -23$.

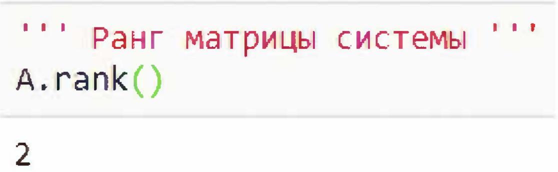
24. Выяснить, совместна ли система уравнений

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ x + y + 2z = 2, \\ 2x + 3z = 1. \end{cases}$$

Решение. По теореме Кронекера-Капелли система несовместна, если ранг матрицы системы не равен рангу расширенной матрицы системы.

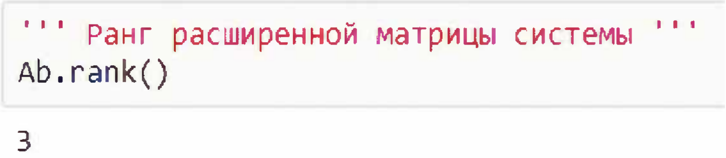


```
''' Матрица системы: '''
A = Matrix([[1,-1,1],
            [1,1,2],
            [2,0,3]])
''' Матрица расширенной системы: '''
Ab = Matrix([[1,-1,1,1],
             [1,1,2,2],
             [2,0,3,1]])
```



```
''' Ранг матрицы системы '''
A.rank()
```

```
2
```



```
''' Ранг расширенной матрицы системы '''
Ab.rank()
```

```
3
```

Ранги не совпадают, следовательно, система несовместна.

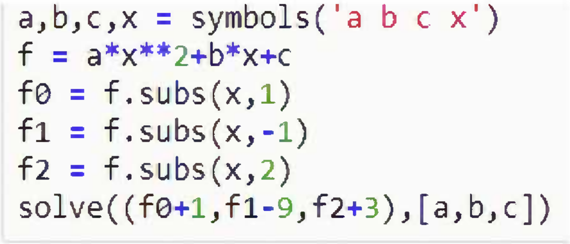
25. Найти квадратный многочлен $f(x)$, зная, что

$$f(1) = -1,\ f(-1) = 9,\ f(2) = -3.$$

Решение. Общий вид квадратного многочлена

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Подставляя вместо x заданные значения аргумента (метод .subs()), и приравнивая к соответствующим значениям, получим систему линейных уравнений.



```
a,b,c,x = symbols('a b c x')
f = a*x**2+b*x+c
f0 = f.subs(x,1)
f1 = f.subs(x,-1)
f2 = f.subs(x,2)
solve((f0+1,f1-9,f2+3),[a,b,c])
```

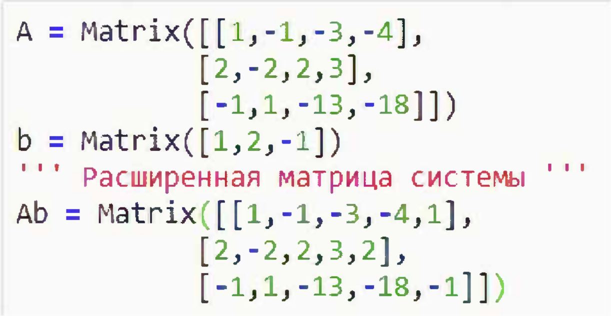
```
{a: 1, b: -5, c: 3}
```

Ответ: $f(x) = x^2 - 5x + 3$.

26. Найти общее и базисное решения системы

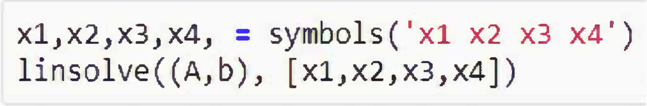
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 - 13x_3 - 18x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение. Для нахождения общего решения используем функцию linsolve(). Вводим данные.

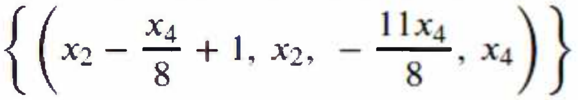


```
A = Matrix([[1,-1,-3,-4],
           [2,-2,2,3],
           [-1,1,-13,-18]])
b = Matrix([1,2,-1])
''' Расширенная матрица системы '''
Ab = Matrix([[1,-1,-3,-4,1],
            [2,-2,2,3,2],
            [-1,1,-13,-18,-1]])
```

Находим общее решение. Для того, чтобы возвращаемое решение было записано через переменные x_i, вводим символьные переменные в соответствии с обозначениями условия задачи.



```
x1,x2,x3,x4, = symbols('x1 x2 x3 x4')
linsolve((A,b), [x1,x2,x3,x4])
```



$$\left\{\left(x_2 - \frac{x_4}{8} + 1,\ x_2,\ -\frac{11x_4}{8},\ x_4\right)\right\}$$

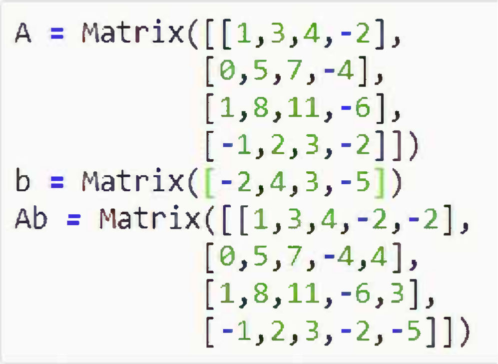
Базисное решение получается из общего в результате подстановки нулей вместо всех свободных переменных. При $x_2 = x_4 = 0$ имеем решение: (1,0,0,0).

Ответ: общее решение: $x_1 = 1 + x_2 - \frac{1}{8}x_4$, $x_3 = -\frac{11}{8}x_4$, $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$; базисное решение: (1,0,0,0).

27. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -2, \\ 5x_2 + 7x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_1 + 8x_2 + 11x_3 - 6x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$$

Решение. Вводим даные.



```
A = Matrix([[1,3,4,-2],
            [0,5,7,-4],
            [1,8,11,-6],
            [-1,2,3,-2]])
b = Matrix([-2,4,3,-5])
Ab = Matrix([[1,3,4,-2,-2],
            [0,5,7,-4,4],
            [1,8,11,-6,3],
            [-1,2,3,-2,-5]])
```

Функция linsolve() выдает пустое множество решений:

```
linsolve((A,b), [x1,x2,x3,x4])
```

$$\varnothing$$

Это означает, что спстема несовместна. В этом можно убеднться также, применяя теорему Кронекера-Капеллн.

```
print(A.rank(), Ab.rank())
```

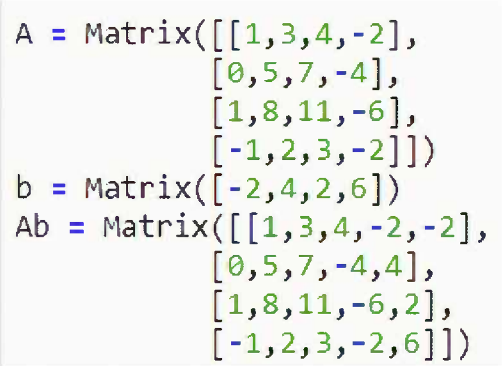
```
2 3
```

Рангн основной матрицы и расшнренной матрицы системы не совпадают, система иесовместиа.

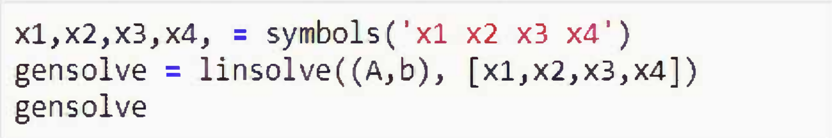
28. Найти общее и базисное решения системы

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3-2x_4=-2, \\ 5x_2+7x_3-4x_4=4, \\ x_1+8x_2+11x_3-6x_4=2, \\ -x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6. \end{cases}$$

Решение.



```
A = Matrix([[1,3,4,-2],
            [0,5,7,-4],
            [1,8,11,-6],
            [-1,2,3,-2]])
b = Matrix([-2,4,2,6])
Ab = Matrix([[1,3,4,-2,-2],
            [0,5,7,-4,4],
            [1,8,11,-6,2],
            [-1,2,3,-2,6]])
```



```
x1,x2,x3,x4, = symbols('x1 x2 x3 x4')
gensolve = linsolve((A,b), [x1,x2,x3,x4])
gensolve
```

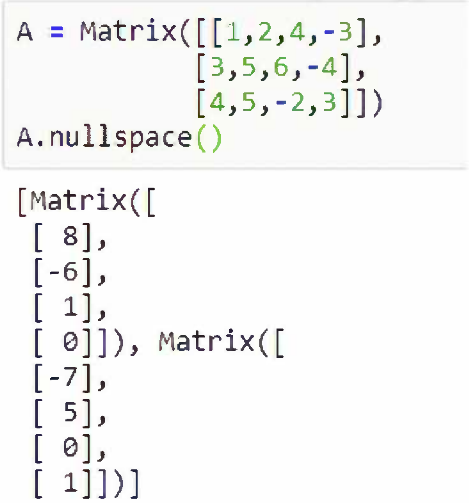
$$\left\{\left(\frac{x_3}{5}-\frac{2x_4}{5}-\frac{22}{5},\ -\frac{7x_3}{5}+\frac{4x_4}{5}+\frac{4}{5},\ x_3,\ x_4\right)\right\}$$

Ответ: общее решение: $x_1 = -\frac{22}{5} + \frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4$, $x_2 = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4$, $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$; базисное решение: $\left(-\frac{22}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0\right)$.

29. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений. Выписать фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Используем функцию nullspace() библиотеки sympy.



```
A = Matrix([[1,2,4,-3],
            [3,5,6,-4],
            [4,5,-2,3]])
A.nullspace()
```

```
[Matrix([
[ 8],
[-6],
[ 1],
[ 0]]), Matrix([
[-7],
[ 5],
[ 0],
[ 1]])]
```

Ответ: фундаментальная система: $E_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

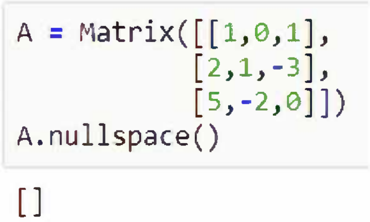
Общее решение системы:

$$C_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

30. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

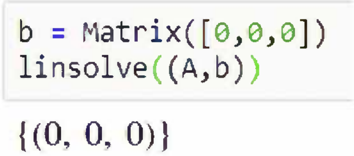
Решение. Функция nullspace() возвращает пустое множество решений.



```
A = Matrix([[1,0,1],
            [2,1,-3],
            [5,-2,0]])
A.nullspace()
```

```
[]
```

Фундаментальная система решений отсутствует. Это означает, что множество решений однородной системы состоит из одной точки – нулевого решения. В этом можно также убедиться, применяя функцию linsolve():



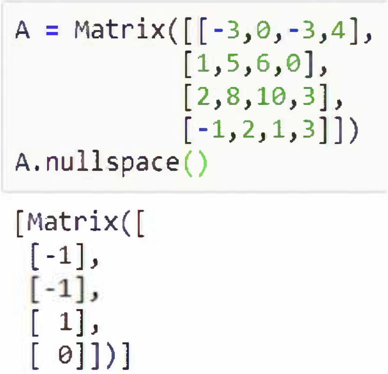
```
b = Matrix([0,0,0])
linsolve((A,b))
```

```
{(0, 0, 0)}
```

Ответ: единственное решение – (0,0,0).

31. Найти общее решение системы линейных уравнений. Выписать фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$



```
A = Matrix([[-3,0,-3,4],
            [1,5,6,0],
            [2,8,10,3],
            [-1,2,1,3]])
A.nullspace()
```

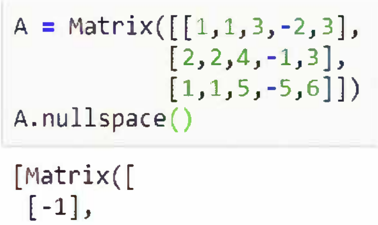
```
[Matrix([
 [-1],
 [-1],
 [ 1],
 [ 0]])]
```

Ответ: фундаментальная система: $E = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

общее решение системы: $C\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}$.

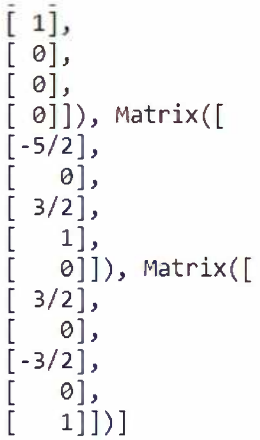
32. Найти общее решение системы линейных уравнений. Выписать фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$



```
A = Matrix([[1,1,3,-2,3],
           [2,2,4,-1,3],
           [1,1,5,-5,6]])
A.nullspace()
```

```
[Matrix([
 [-1],
```



```
[ 1],
[ 0],
[ 0],
[ 0]]), Matrix([
[-5/2],
[   0],
[ 3/2],
[   1],
[   0]]), Matrix([
[ 3/2],
[   0],
[-3/2],
[   0],
[   1]])]
```

Ответ: фундаментальная система:

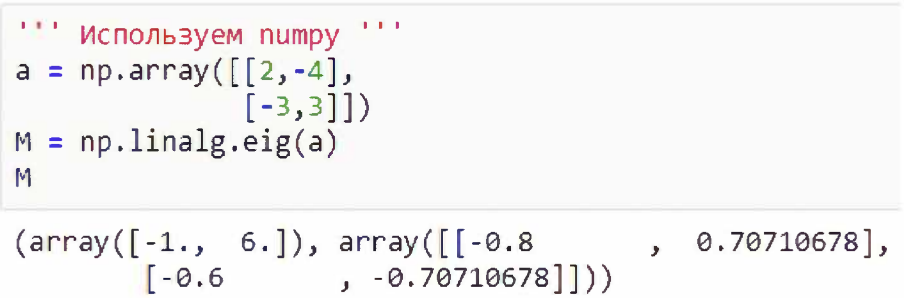
$$E_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

общее решение системы:

$$C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\cdot$$

33. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

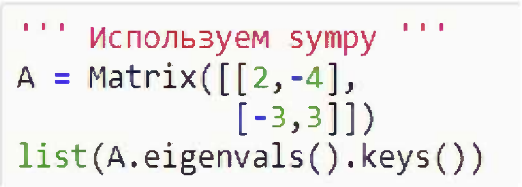
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$



```
''' Используем numpy '''
a = np.array([[2,-4],
              [-3,3]])
M = np.linalg.eig(a)
M
```

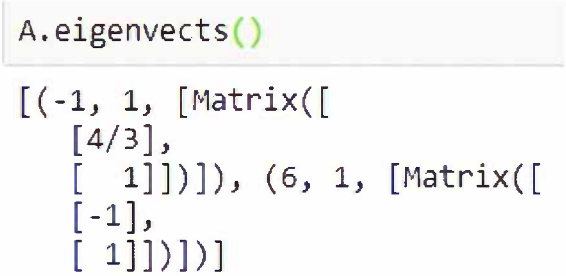
```
(array([-1.,  6.]), array([[-0.8       ,  0.70710678],
        [-0.6       , -0.70710678]]))
```

Собственному значению -1 отвечает собственный вектор $(-0{,}8;\ -0{,}6)$. Собственному значению 6 отвечает собственный вектор $(-0{,}707;\ -0{,}707)$.



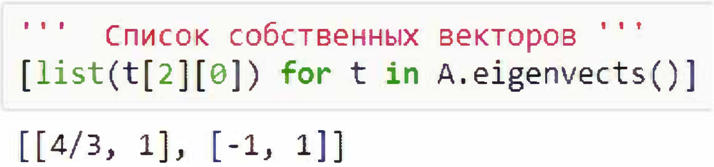
```
''' Используем sympy '''
A = Matrix([[2,-4],
            [-3,3]])
list(A.eigenvals().keys())
```

```
[6, -1]
```



```
A.eigenvects()
```

```
[(-1, 1, [Matrix([
   [4/3],
   [  1]])]), (6, 1, [Matrix([
   [-1],
   [ 1]])])]
```



```
'''  Список собственных векторов '''
[list(t[2][0]) for t in A.eigenvects()]
```

```
[[4/3, 1], [-1, 1]]
```

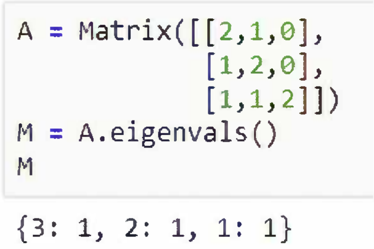
Собственному значению -1 отвечает собственный вектор $\left(\frac{4}{3}, 1\right)$. Собственному значению 6 отвечает собственный вектор $(-1,1)$.

Ответ: $\lambda_1 = -1,\ e_1 = c_1\left(\frac{4}{3}, 1\right);\ \lambda_2 = 6, e_2 = c_2(-1,1);\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

34. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

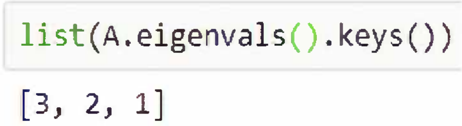
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.



```
A = Matrix([[2,1,0],
            [1,2,0],
            [1,1,2]])
M = A.eigenvals()
M
```

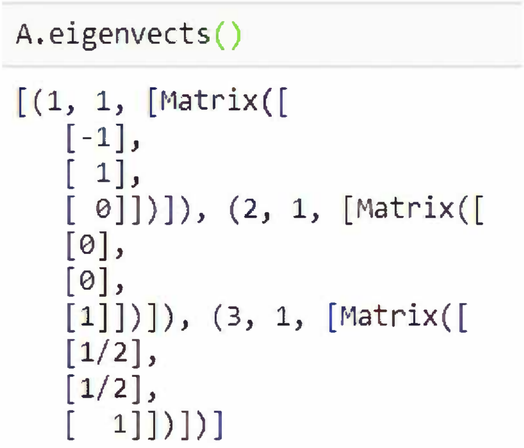
```
{3: 1, 2: 1, 1: 1}
```



```
list(A.eigenvals().keys())
```

```
[3, 2, 1]
```

Три собственных значения кратности 1.



```
A.eigenvects()
```

```
[(1, 1, [Matrix([
   [-1],
   [ 1],
   [ 0]])]), (2, 1, [Matrix([
   [0],
   [0],
   [1]])]), (3, 1, [Matrix([
   [1/2],
   [1/2],
   [  1]])])]
```

```
[list(t[2][0]) for t in A.eigenvects()]
```

```
[[-1, 1, 0], [0, 0, 1], [1/2, 1/2, 1]]
```

Ответ: $\lambda_1 = 1,\ e_1 = c_1(-1,1,0);$

$\lambda_2 = 2,\ e_2 = c_2(0,0,1);\ \lambda_3 = 3,\ e_3 = c_3\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right);\ c_1,c_2,c_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$

35. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

```
A = Matrix([[1,0,0],
            [0,0,1],
            [0,1,0]])
M = A.eigenvals()
M
```

```
{-1: 1, 1: 2}
```

```
list(A.eigenvals().keys())
```

```
[-1, 1]
```

Два собственных значения: $\lambda_1 = -1$ кратности 1 и $\lambda_2 = 2$ кратности 2.

```
A.eigenvects()
```

```
[(-1, 1, [Matrix([
   [ 0],
   [-1],
   [ 1]])]), (1, 2, [Matrix([
   [1],
   [0],
   [0]]), Matrix([
   [0],
   [1],
   [1]])])]
```

```
[list(t[2][0:]) for t in A.eigenvects()]
```

```
[[Matrix([
  [ 0],
  [-1],
  [ 1]])], [Matrix([
  [1],
  [0],
  [0]]), Matrix([
  [0],
  [1],
  [1]])]]
```

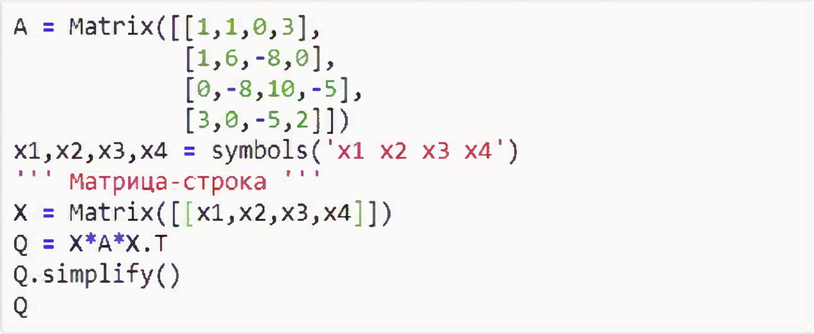
Собственному значению λ_1 отвечает собственный вектор $e_1 = (0,-1,1)$. Собственному значению λ_2, имеющему кратность 2, отвечают два линейно независимых вектора $e_2 = (1,0,0)$ и $e_3 = (0,1,1)$. Любая линейная комбинация этих двух векторов также является собственным вектором матрицы.

Ответ: $\lambda_1 = -1,\ e_1 = c_1(0,-1,1); \lambda_2 = 1, e_2 = c_2(1,0,0) + c_3(0,1,1)$; $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

36. По матрице *A* восстановить квадратичную форму

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & -8 & 0 \\ 0 & -8 & 10 & -5 \\ 3 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.



```
A = Matrix([[1,1,0,3],
            [1,6,-8,0],
            [0,-8,10,-5],
            [3,0,-5,2]])
x1,x2,x3,x4 = symbols('x1 x2 x3 x4')
''' Матрица-строка '''
X = Matrix([[x1,x2,x3,x4]])
Q = X*A*X.T
Q.simplify()
Q
```

$$\left[x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_4 + 6x_2^2 - 16x_2x_3 + 10x_3^2 - 10x_3x_4 + 2x_4^2 \right]$$

Ответ:

$$Q = x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 - 16x_2x_3 + 10x_3^2 + 6x_1x_4 - 10x_3x_4 + 2x_4^2.$$

37. Исследовать на знакоопределенность следующие квадратичные формы:

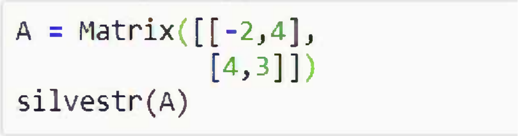
а) $Q(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$;

б) $Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_2^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 - 5x_3^2$;

в) $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + 3x_3^2 + 2x_1x_4 + 2x_1x_4 + x_4^2$.

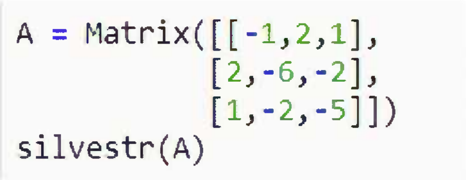
Решение.

Используем функцию silvestr()(текст функции на с. 34).

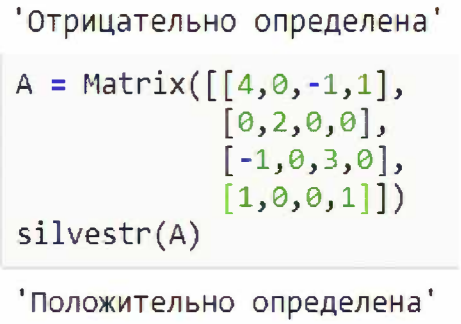


```
A = Matrix([[-2,4],
            [4,3]])
silvestr(A)
```

```
'Не является знакоопределенной'
```



```
A = Matrix([[-1,2,1],
            [2,-6,-2],
            [1,-2,-5]])
silvestr(A)
```



```
'Отрицательно определена'
```

```
A = Matrix([[4,0,-1,1],
            [0,2,0,0],
            [-1,0,3,0],
            [1,0,0,1]])
silvestr(A)
```

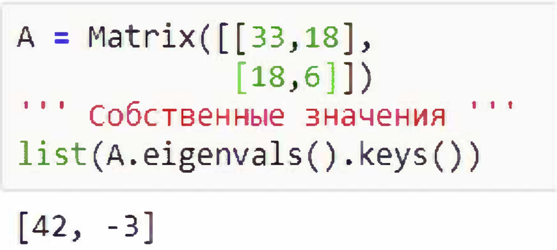
```
'Положительно определена'
```

38. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом собственных значений.

$$Q(x_1,x_2) = 33x_1^2 + 36x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Решение. Матрица квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 33 & 18 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$.

Собственные значения матрицы:



```
A = Matrix([[33,18],
            [18,6]])
''' Собственные значения '''
list(A.eigenvals().keys())
```

```
[42, -3]
```

Каноническим видом формы является ее запись в новых координатах с коэффициентами, совпадающими с собственными значениями матрицы.

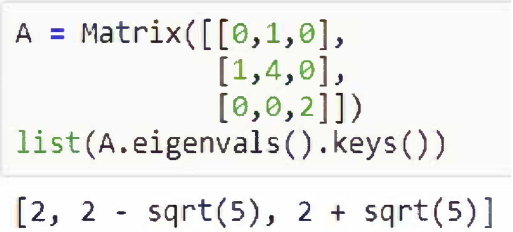
Ответ: $Q = 42x_1'^2 - 3x_2'^2$.

39. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом собственных значений.

$$Q(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_3^2.$$

Решение. Матрица квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Собственные значения матрицы:



```
A = Matrix([[0,1,0],
            [1,4,0],
            [0,0,2]])
list(A.eigenvals().keys())
```

```
[2, 2 - sqrt(5), 2 + sqrt(5)]
```

Ответ: $Q = 2x_1'^2 + \left(2-\sqrt{5}\right)x_2'^2 + \left(2+\sqrt{5}\right)x_3'^2$.

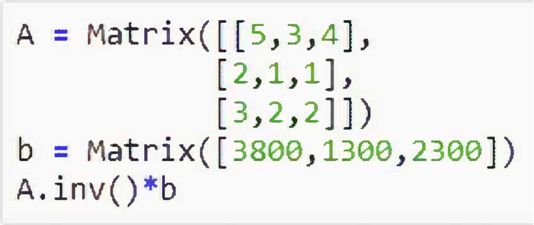
40. Кондитерская фабрика специализируется по выпуску продукции трех видов: конфеты, торты, халва. Нормы расхода каждого из их на 1 кг продукта и объем расхода сырья на 1 день заданы таблицей. Найти ежедневный объем выпуска (кг) каждого вида продукции.

Вид сырья	**Нормы расхода сырья на 1 кг продукции, усл.ед.**			**Общее количество сырья**
	Конфеты	**Торты**	**Халва**	
A	5	3	4	3800
B	2	1	1	1300
C	3	2	2	2300

Решение. Введем переменые: x_1, x_2, x_3 – объем выпускаемых за день конфет, тортов и халвы соответственно. Имеем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3800, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1300, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2300. \end{cases}$$

Решаем систему методом обратной матрицы.



```
A = Matrix([[5,3,4],
            [2,1,1],
            [3,2,2]])
b = Matrix([3800,1300,2300])
A.inv()*b
```

$$\begin{bmatrix} 300 \\ 500 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Объем выпуска: $x_1 = 300, x_2 = 500, x_3 = 200$.

41. Предприятие производит продукцию четырех видов P_1, P_2, P_3, P_4, и использует сырье пяти типов S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Нормы затрат сырья (по строкам) на единицу продукции каждого вида (по столбцам) заданы матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

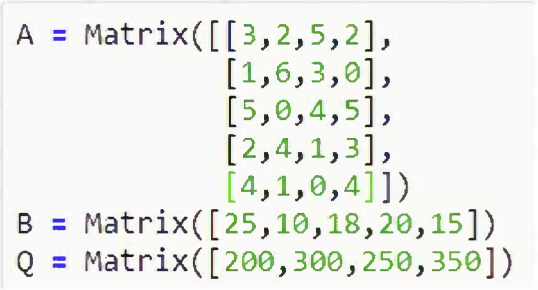
Стоимость единицы сырья каждого типа S_i задана матрицей

$$B = (25 \quad 10 \quad 18 \quad 20 \quad 15).$$

Каковы общие затраты предприятия на производство 200, 300, 250 и 350 единиц продукции вида P_1, P_2, P_3, P_4 соответственно?

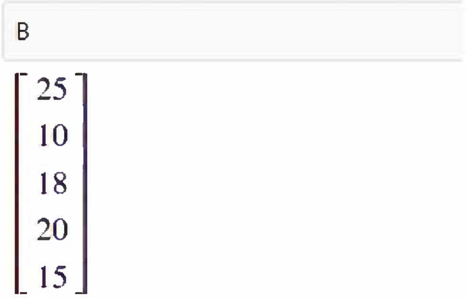
Решение. Составим матрицу объемов производства продукции Q: $Q = (200 \quad 300 \quad 250 \quad 350)$.

Наберем матрицы:



```
A = Matrix([[3,2,5,2],
            [1,6,3,0],
            [5,0,4,5],
            [2,4,1,3],
            [4,1,0,4]])
B = Matrix([25,10,18,20,15])
Q = Matrix([200,300,250,350])
```

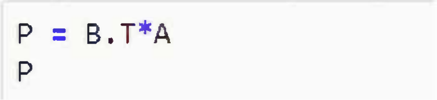
При этом нужно иметь в виду, что запись, выбранная для матриц B и Q, приводит к созданию матрицы-столбца:



```
B
```

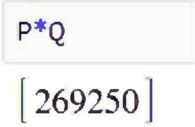
$$\begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 18 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Чтобы узнать стоимость сырья на производство единицы продукции каждого вида, нужно умножить матрицу-строку B стоимости единицы сырья на матрицу A норм затрат сырья (для получения матрицы–строки используем транспонирование):



```
P = B.T*A
P
```

Общие затраты производства найдем, умножив полученную матрицу стоимости C на матрицу объемов производства Q:



```
P*Q
```

$$\begin{bmatrix} 269250 \end{bmatrix}$$

Ответ: 269 250.

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = 3A - 4B$.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 5 & 4 \\ 14 & -18 & -32 & -9 \end{pmatrix}$

2. Даны три матрнцы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Какое из произведений $A \cdot B$ илн $A \cdot C$ существут? Найдите элемент d_{23}, стоящий во второй строке и третьем столбце этого произведеия.

Ответ: существует $D = A \cdot B$; $d_{23} = 5$.

3. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B$.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$

4. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $B \cdot A - 2A \cdot C$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -23 & -40 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}.$

5. Даны три матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $D = A^T B - 3A^T C^T$.

Ответ: $D = \begin{pmatrix} 21 & 18 & 54 \\ 48 & 54 & 99 \end{pmatrix}.$

6. Найти четвертую степень матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$

Ответ: $\begin{pmatrix} 131 & 42 \\ 105 & 110 \end{pmatrix}.$

7. Дано, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ b & 4 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти зиачеиия a, b, c, d.

Ответ: $a = -1, b = -4, c = \frac{1}{2}, d = 0.$

8. Найти матрицу $(1 \quad 2 \quad 3)\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 7\\ 8 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\ 11\end{pmatrix}$.

Ответ: (906).

9. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Доказать, что $A^2=-A$.

10. Вычислить $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}^{10}$.

Ответ: $\begin{pmatrix}-4096 & 5120\\ -5120 & 6144\end{pmatrix}$.

11. Вычислить $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{n}$.

Ответ: $\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

12. Вычислить $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^{n}$.

Ответ: $\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$.

13. Вычислить $\begin{pmatrix}4 & 3 & -3\\ 2 & 3 & -2\\ 4 & 4 & -3\end{pmatrix}^{6}$.

Ответ: $\begin{pmatrix}190 & 189 & -189\\ 126 & 127 & -126\\ 252 & 252 & -251\end{pmatrix}$.

14. Пусть $f(x)=x^2-2x+5,\ A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Найти $f(A)$.

Ответ: $\begin{pmatrix}7 & -9\\ 6 & -2\end{pmatrix}$.

15. Найти значеиие миогочлеиа $f(x)=3x^2-2x+5$ от матрицы

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}21 & -23 & 15\\ -13 & 34 & 10\\ -9 & 22 & 25\end{pmatrix}$.

16. Найти значение многочлена $f(x)=x^3-7x^2+13x-5$ от матрицы

$$\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

17. Вычислить $\sqrt{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A = \pm\begin{pmatrix} 1{,}75 & 0{,}25 \\ -0{,}25 & 2{,}25 \end{pmatrix}$.

18. Вычислить e^A, где $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 4e-3 & 2-2e \\ 6e-6 & 4-3e \end{pmatrix}$.

19. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}$.

Ответ: 34.

20. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} x^2 & 4x \\ 3x & -1 \end{vmatrix}$.

Ответ: $-13x^2$.

21. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \sin\propto & \cos\propto \\ -\cos\propto & \sin\propto \end{vmatrix}$.

Ответ: 1.

22. Вычислить определитель $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Ответ: -12.

23. Вычислить определитель $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 6 & 3 & -9 \end{vmatrix}$.

Ответ: 0.

24. Вычислить определитель $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Ответ: -18.

25. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}.$$

Ответ: 100.

26. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \frac{(1-t)^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & -\frac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

Ответ: -1.

27. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: 0.

28. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}.$$

Ответ: 0.

29. Решить уравпенпе $\begin{vmatrix} x+4 & x^2 \\ x^2-16 & -4x \end{vmatrix} = 0$.

Ответ: $-4; 0; 2$.

30. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1+x & x & x \\ x & 2+x & x \\ x & x & 3+x \end{vmatrix} = 17.$$

Ответ: 1.

31. Найти $(AB)^{-1}$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{9}{16} \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

32. Найти $(AA^T)^{-1}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

33. Найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

34. Найти обратиую матрицу для $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

35. Решить матричиое уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -2 & -7 & 10 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

36. Решить матричное уравненне $XA = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -49 & -7 & -30 \\ -115 & -16 & -69 \end{pmatrix}$.

37. Решить матричное уравнение $XA = B + 2X$, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

38. Решить матричное уравнение $XA = BX + \mathrm{E}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix}$.

39. Решить матричное уравнение $AXF + BX + D = E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} \frac{33}{5} & \frac{27}{5} \\ -\frac{37}{5} & -\frac{39}{5} \end{pmatrix}$.

40. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: решение не существует.

41. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}9 & 7 & 6\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 18 & 12 & 9\\ 23 & 15 & 11\end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

42. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix}5 & -7 & 2 & 1\\ -1 & 4 & -2 & 3\\ 2 & 5 & -4 & 10\end{pmatrix}$.

Ответ: 2.

43. Найти раиг матрицы $\begin{pmatrix}2 & -4 & 5 & 3\\ 3 & -6 & 4 & 2\\ 4 & -8 & 17 & 11\\ 5 & -10 & 9 & 5\end{pmatrix}$.

Ответ: 2.

44. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix}2 & -3 & 3 & 3\\ -1 & 3 & -3 & -2\\ 1 & -2 & 1 & 2\\ 3 & -5 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

Ответ: 3.

45. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix}4 & 3 & -5 & 2 & 3\\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2\\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7\\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5\\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6\end{pmatrix}$.

Ответ: 2.

46. Являются ли векторы $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$, $\boldsymbol{b}=(2,3,0)$ и $\boldsymbol{c}=(-2,2,1)$ лииейно независимыми?

Ответ: да, являются.

47. Являются ли векторы $\boldsymbol{a}=(0,1,1,3)$, $\boldsymbol{b}=(0,2,3,0)$, $\boldsymbol{c}=(2,1,1,1)$ и $\boldsymbol{d}=(-2,2,3,2)$ линейио независимыми?

Ответ: нет, не являются.

48. Представить вектор $\boldsymbol{f}=(46,46,92,0)$ как линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}=(0,1,1,3)$, $\boldsymbol{b}=(0,2,3,0)$, $\boldsymbol{c}=(2,1,1,1)$, $\boldsymbol{d}=(0,3,0,4)$.

Ответ: $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{3a}+\boldsymbol{22b}+\boldsymbol{23c}-\boldsymbol{8d}$.

49. Возможио ли вектор $\boldsymbol{d}=(-2,2,3,2)$ выразить через векторы $\boldsymbol{a}=(0,1,1,3)$, $\boldsymbol{b}=(0,2,3,0)$ и $\boldsymbol{c}=(2,1,1,1)$? Если возможно, найти это разложение.

Ответ: возможно; $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

50. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найти минор M_{33} элемента a_{33}, алгебраическое дополнение A_{24} элемента a_{24}.

Ответ: 1; 1.

51. Найти базисные миноры матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: 1; 2.

52. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти:

1) минор, образоваиный первыми тремя строками и первымн тремя столбцами;

2) минор, образованный всеми строкамн и всеми стобцами, кроме четвертого;

3) минор, образованный четвертой строкой и третьим столбцом;

4) все базисные миноры.

Ответ: 1) 28; 2) 104; 3) 0; 4) 104; 197; 145; −1.

53. Решить снстему уравнеиий

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 12, \\ 3x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: (2; –5).

54. Решить снстему уравнеиий

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2, \\ x - y = 4, \\ 5y + z = -1. \end{cases}$$

Ответ: (2; –2; 9).

55. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2, \\ x + 2y - z = -3, \\ x + y + z = -2. \end{cases}$$

Ответ: (2; –3; –1).

56. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = -3, \\ x - 5y + 3z = 0, \\ x - y + z = 2. \end{cases}$$

Ответ: (1; 2; 3).

57. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y+3z = 14, \\ x+y+z=6, \\ 2x+3y+z = 11. \end{cases}$$

Ответ: (1; 2; 3).

58. Выяснить, совместна ли система уравиенннй

$$\begin{cases} x+2y+2z = -1, \\ 2x+y-z=9, \\ -x+y+3z = -9. \end{cases}$$

Ответ: система несовместиа.

59. Решить систему уравиенннй

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3-x_4=-1, \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=9, \\ -x_1+3x_2+x_3+2x_4=6, \\ 3x_1-x_2+2x_3-2x_4=-3. \end{cases}$$

Ответ: $(2;1;-1;3)$.

60. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6x_1+6x_2+5x_3+18x_4+20x_5=14, \\ 10x_1+9x_2+7x_3+24x_4+30x_5=18, \\ 12x_1+12x_2+13x_3+27x_4+35x_5=32, \\ 8x_1+6x_2+6x_3+15x_4+20x_5=16, \\ 4x_1+5x_2+4x_3+15x_4+15x_5=11. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};-2;3;\frac{2}{3};-\frac{1}{5}\right)$.

61. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=3, \\ 4x_1-2x_2-2x_3+3x_4=2, \\ 2x_1-x_2+5x_3-6x_4=1, \\ 2x_1-x_2-3x_3+4x_4=5. \end{cases}$$

Ответ: решений иет.

62. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2ax-3by+cz=0, \\ 3ax-6by+5cz=2abc, \\ 5ax-4by+2cz=3abc, \end{cases}$$

где $abc \neq 0$.

Ответ: $x=bc,\ y=ac,\ z=ab$.

63. Найти миогочлен третьей степени $f(x)$, для которого

$$f(-1) = 0,\ f(1) = 4,\ f(2) = 3,\ f(3) = 16.$$

Ответ: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$.

64. Найти общее и базнсное решения системы лииейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3\ = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 - \frac{4}{5}C \\ 2 + \frac{3}{5}C \\ C \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

65. Найти общее и базисное решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 15, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 15. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -3 + 2C_1 \\ 9 - 3C_1 - C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; $\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

66. Найти общее и базисное решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 9, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -10, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{19}{3} + \frac{4}{3}C_1 - C_2 \\ -\frac{11}{3} - \frac{5}{3}C_1 + C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; $\begin{pmatrix} \frac{19}{3} \\ -\frac{11}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

67. Найти общее и базисное решения системы линейных уравиений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -8, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -16. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2-\frac{1}{6}C \\ -4+\frac{4}{3}C \\ 2-\frac{1}{2}C \\ C \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

68. Найти общее решеиие системы

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$$

Ответ: единственное решение $x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = -5,\ x_4 = 11$.

69. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_5 = 7. \end{cases}$$

Ответ: решений нет.

70. Найти общее решеиие однородиой системы линейных уравиений. Выиисать фундамеитальиую систему решений.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: фундамеитальная система: $E = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

общее решение системы: $C\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}$.

71. Найти общее решение системы линейиых уравнений. Выпнсать фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: фундаментальная система: $E = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$,

общее решение системы: $C\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \ C \in \mathbb{R}$.

72. Найти общее решение системы линейных уравнений. Выписать фундаментальную систему решеиий.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: фундаментальная система: $E_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

общее решение системы: $C_1\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

73. Найти общее решение системы линейных уравнеиий. Выписать фундаментальную систему решеиий.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 4x_2 + 4x_3 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Ответ: фундаментальная система:

$$E_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

общее решение системы: $C_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

74. Найти общее решение системы линейных уравиеиий. Вынисать фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0. \end{cases}$$

Ответ: Единственное решенне $(0; 0; 0; 0; 0; 0)$.

75. Найтн общее решенне системы линейных уравиений. Выписать фундаментальную снстему решеиий.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Ответ: фундаментальная система:

$$E_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

общее решеиие системы:

$$C_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ +C_2\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

76. Найти собствениые значеиия и собствениые векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix}1 & 4\\9 & 1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\lambda_1 = -5$, $e_1 = c_1\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$; $\lambda_2 = 7$, $e_2 = c_2\left(\frac{2}{3}, 1\right)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

77. Найти собственые значения и собственые векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\lambda_1 = 1$, $e_1 = c_1(-2{,}1)$; $\lambda_2 = 5$, $e_2 = c_2(2{,}1)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

78. Найти собственые значения и собственые векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\lambda_1 = -1$, $e_1 = c_1(0, -1, 1)$; $\lambda_2 = 0$, $e_2 = c_2(1{,}0{,}0)$, $\lambda_3 = 1$, $e_3 = c_2(0{,}1{,}1)$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

79. Найти собственые значения и собственые векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\lambda_1 = -2$, $e_1 = c_1(-2{,}0{,}1)$; $\lambda_2 = 1$, $e_2 = c_2\left(\frac{59}{20}, -\frac{3}{20}, 1\right)$, $\lambda_3 = 2$, $e_3 = c_2(2{,}0{,}1)$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

80. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\lambda = -1$, $e = c_1\left(-\frac{5}{8}, 1{,}0\right) + c_2(0{,}0{,}1)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

81. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$. Какой из векторов $x_1 = (1{,}2)$, $x_2 = (0{,}3)$, $x_3 = (0{,}0)$ является собственным для матрицы A?

Ответ: x_1.

82. Найти характеристический многочлен матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 6$.

83. Найти характеристический многочлеи матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 6$.

84. Привести матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ к диагоиальиому виду и указать матрицу перехода T.

Ответ: $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

85. Привести матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ к диагональному виду н указать матрицу перехода T.

Ответ: $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

86. Привести матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ к диагональиому виду и указать матрицу перехода T.

Ответ: $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

87. По матрице A восстановить квадратнчную форму

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $Q = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 7x_3^2 + 6x_1x_4 - 6x_3x_4 + 2x_4^2$.

88. Дана квадратичная форма

$$Q(x_1, x_2) = 6x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 8x_1x_3 + 7x_2^2.$$

Найти ее матрицу и исследовать форму на зпакоопределенность.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Не является знакоопределенной.

89. Дана квадратичная форма

$$Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3 + 5x_3^2.$$

Найти ее матрнцу и исследовать форму на знакоопределенность.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Положительно определена.

90. Дана квадратнчная форма

$$Q(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 6x_1x_2 - 7x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_3^2.$$

Найти ее матрицу и исследовать форму иа знакоопределенность.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -3 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Отрицательно определена.

91. Привести квадратичную форму к каноническому виду.

$$Q(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Ответ: $Q = 10x_1'^2 + 5x_2'^2$.

92. Привести квадратичпую форму к каноническому виду.

$$Q(x_1, x_2) = 40x_1^2 + 48x_1x_2 + 4x_2^2.$$

Ответ: $Q = 52x_1'^2 - 8x_2'^2$.

93. Привести квадратичпую форму к каноническому виду.

$$Q(x_1, x_2) = 83x_1^2 + 108x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Ответ: $Q = \frac{89-\sqrt{17593}}{2}x_1'^2 + \frac{89+\sqrt{17593}}{2}x_2'^2$.

94. Привести квадратичиую форму к каноническому виду.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_3^2.$$

Ответ: $Q = 2x_1'^2 + (2 - 2\sqrt{2})x_2'^2 + (2 + 2\sqrt{2})x_3'^2$.

95. Предприятие производит продукцию трех видов, P_1, P_2, P_3 и использует сырье трех типов S_1, S_2, S_3. Нормы затрат сырья (по строкам) на единицу продукцни каждого впда (по столбцам) заданы матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Стоимость единнцы сырья каждого типа S_1, S_2, S_3, задана матрицей

$$B = (20 \quad 30 \quad 15).$$

Каковы общие затраты иредпрнятия на производство 250, 350 и 400 едииищ иродукции вида P_1, P_2, P_3 соответствению?

Ответ: 215 500.

96. Для изготовления трех видов изделий А, В и С фабрика использует три вида сырья. Нормы расхода сырья иа производство одного изделия, а также общее количество сырья ириведено в таблице. Сколько изделий каждого вида может выпустить предприятие?

Вид сырья	**Нормы расхода сырья иа одио изделие**			**Общее количество сырья**
	А	**В**	**С**	
1	2	1	1	45
2	1	1	2	40
3	1	0	1	15

Ответ: (10;20;5).

97. Трн бригады строителей работали на постройке трех домов. Площади домов и затраты времени на их постройку прнведены ы в таблице. Найти производительность каждой бригады.

Дом	**Время работы бригады, месяц**			**Нлощадь дома**
	А	**В**	**С**	
1	2	3	1	100
2	1	5	4	190
3	4	1	3	180

Ответ: (20;10;30).

98. Предприятие производит продукцию ияти видов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 и использует сырье четырех типов S_1, S_2, S_3, S_4. Нормы затрат сырья (по строкам) на едииицу иродукции каждого вида (по столбцам) задаиы матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Стоимость единицы сырья каждого типа S_i задаиа матрицей

$$B = (40 \quad 20 \quad 27 \quad 32).$$

Каковы общие затраты предприятия на производство 250, 200, 350, 100 и 300 единиц продукции вида P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 соответственно?

Ответ: 306600.

99. Найти расчетные объемы работ (число часов использования оборудования), которые окупят затраты на эксплуатацию. Расценки на проведение работ приведены в таблице.

Виды работ	**Нормативы по видам оборудования, ч**			**Полные затраты**
	Механическое	**Тепловое**	**Электрическое**	
Техническое обслуживание	3	5	2	95
Текущие услуги	4	7	4	135
Капитальный ремонт	6	10	7	205

Ответ: число часов работы механического, теплового и электрического оборудования: 20 ч, 5ч, 5 ч.

100. Фирма продает изделия по ценам, которые характеризуются вектором $p = (10; 21; 15; 17)$, а объемы продаж по регионам определяются вектором $q = (300; 150; 100; 180)$. Найти прибыль фирмы, если издержки на реализацию составляют 1000 ден. ед.

Ответ: 9710 ден. ед.

Глоссарий

Литература

1. Балджы А.С, Хрипунова М.Б., Шмелева Л.А., Математическое моделироваие в экономике и менеджменте на языке R. М.: Научный Консультант, 2016.
2. Балджы А.С., Хрипунова М.Б., Александрова И.А. Математика на Python. Часть 1. Элементы линейной алгебры и аиалнтической геометрии: учебно-методическое пособие. Финансовый университет при Правнтельстве РФ. М.: Прометей, 2018.
3. Доусоп М. Программируем па Python. СПб.: Питер, 2014.
4. Зададаев С. А. Математика на языке R: учебник. М.: Прометей, 2018.
5. Лутц М. Изучаем Python. СПб.: Символ-Плюс, 2011.
6. Лутц М. Программирование на Python, том I. СПб.: Символ–Плюс, 2011.
7. Лутц М. Программироваие на Python, том II. СПб.: Символ–Плюс, 2011.
8. Прохоренок Н.А. Самое необходимое. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
9. Прохоренок Н.А. Python 3 и PyQt. Разработка нриложеинй. СПб.: БХВ–Петербург, 2012.
10. Пилгрим Марк. Погружение в Python 3. Apress, 2009.
11. Прохоренок Н.А. Самое необходимое. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
12. Седых И. Ю., Шевелев А. Ю., Криволапов С. Я. Математика: учебное пособие. М.: КНОРУС, 2019.
13. Степаняп И.К., Жукова Г.С., Бойкова Г.В. Математика: Учебное пособие. М.: Финансовый университет, департамент анализа данных, прииятня решеннй н финаисовых техиологий, 2019.
14. Хахаев Н.А. Практикум по алгоритмнзацин и программированию на Python. М.: Альт Лииукс, 2010.
15. Хринунова М.Б. [и др.] Высшая математика: учебник и практикум для академического бакалавриата / под общ. ред. М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. М.: Издательство Юрайт, 2020. — (Серия: Бакалавр. Академический курс).
16. Черняк Ж. А., Черняк А. А., Феденя О. А., Серебрякова П. Г., Булдык Г. М. Коитрольные задания по общему курсу высшей математике. Учебное пособие. СПб.: Питер, 2006.
17. Шабанов П.А. Научиая графика в python [Электронный ресурс]. URL:https://github.com/whitehorn/Scieпtific_graphics_in_python.