Тригонометрические преобразования и вычисления

Задачи, связанные с тригонометрическими вычислениями, обычно сводятся к стандартным манипуляциям с тригонометрическими формулами.

Формулы сложения

Основу тригонометрии составляют *формулы сложения*:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta; \quad (1)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta; \quad (2)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \quad (3)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \quad (4)$$

Из этих формул, в свою очередь, выводятся многие другие формулы, которые используются в тригонометрических вычислениях и при решении тригонометрических уравнений. А именно:

- формулы тангенса суммы и тангенса разности:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,, \quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,;$$

- формулы двойного угла:

$$\begin{aligned}&\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\\&\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,\\&\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\,;\end{aligned}$$

- формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\,, \quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\,;$$

- формулы тройного угла:

$$\begin{aligned}&\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\\&\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,\\&\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}\,.\end{aligned}$$

Вывод данных формул желательно проделать своими руками в качестве упражнения.

Задача. (*«Ломоносов», 2007*) Вычислите

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta-\cos\beta),$$

если $\sin(\alpha-\beta)=0{,}5$ и $\cos(\alpha+\beta)=0{,}2$.

Решение. Обозначим искомую величину через x. Раскрывая скобки, получим:

$$x = -(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) - (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$$

Слагаемые сгруппированы так, чтобы получились формулы (2) и (3):

$$x = -\sin(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = -0{,}5 - 0{,}2 = -0{,}7.$$

Ответ: $-0{,}7$.

Задача. (*«Физтех», 2016*) Найдите значение выражения

$$\sin^4\frac{\pi}{24} + \cos^4\frac{5\pi}{24} + \sin^4\frac{19\pi}{24} + \cos^4\frac{23\pi}{24}\,.$$

Решение. Заметим, что

$$\sin\frac{19\pi}{24} = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{24}\right) = \sin\frac{5\pi}{24}\,, \quad \cos\frac{23\pi}{24} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{24}\right) = -\cos\frac{\pi}{24}\,.$$

Обозначим для краткости $\alpha = \frac{\pi}{24}$, $\beta = \frac{5\pi}{24}$. Искомую сумму обозначим S. Тогда

$$S = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \sin^4\beta + \cos^4\beta.$$

Преобразуем сумму четвёртых степеней синуса и косинуса:

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{2}\,(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 4\alpha}{2} = \frac{3+\cos 4\alpha}{4}\,.$$

Теперь имеем:

$$S = \frac{3+\cos 4\alpha}{4} + \frac{3+\cos 4\beta}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}(\cos 4\alpha + \cos 4\beta) = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\,.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Задача. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2008*) Вычислите $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Решение. Поскольку $\sin\alpha$ положителен и $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, угол α расположен во второй четверти: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Значит, его косинус отрицателен:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{3}{5}\,.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{24}{7}$ и

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} - \operatorname{tg}2\alpha}{1 + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{-1-\frac{24}{7}}{1-\frac{24}{7}} = \frac{31}{17}\,.$$

Ответ: $\frac{31}{17}$.

Преобразование суммы синусов/косинусов в произведение

Из формул сложения нетрудно получить следующие формулы:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,, \tag{5}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,, \tag{6}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,, \tag{7}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,. \tag{8}$$

Задача. (*«Физтех», 2016*) Найдите значение выражения $\operatorname{tg} 20^\circ + 4\sin 20^\circ$.

Решение. Имеем:

$$\operatorname{tg} 20^\circ + 4\sin 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ + 4\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{(\sin 20^\circ + \sin 40^\circ) + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} =$$
$$= \frac{2\sin 30^\circ\cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \cos 50^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2\cos 30^\circ\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3}\,.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

Задача. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2000*) Найдите а) $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$, б) $\cos(\alpha-\beta)$, если известно, что выполняются равенства $\cos\alpha + \cos\beta = 0{,}3$ и $\sin\alpha + \sin\beta = -1{,}1$.

Решение. Имеем:

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0{,}3, \tag{9}$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = -1{,}1. \tag{10}$$

Разделив равенство (10) на равенство (9), сразу получаем:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{11}{3}\,.$$

Теперь возведём равенства (9) и (10) в квадрат и сложим:

$$4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 1{,}3 \;\Rightarrow\; \cos(\alpha-\beta) = 2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 1 = \frac{13}{20} - 1 = -\frac{7}{20}\,.$$

Ответ: а) $-\frac{11}{3}$; б) $-\frac{7}{20}$.

Задача. Вычислите $\sin 54^\circ - \sin 18^\circ$.

Решение. Имеем:

$$\sin 54^\circ - \sin 18^\circ = 2\sin 18^\circ\cos 36^\circ = 2\cos 36^\circ\cos 72^\circ =$$
$$= \frac{4\sin 36^\circ\cos 36^\circ\cos 72^\circ}{2\sin 36^\circ} = \frac{2\sin 72^\circ\cos 72^\circ}{2\sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{2\sin 36^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 36^\circ)}{\sin 36^\circ} = \frac{1}{2}\,.$$

Преобразование произведений синусов/косинусов в суммы

Делая в формулах (5)–(8) замену $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$, приходим к следующим формулам:

$$2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y),$$
$$2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y),$$
$$2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y),$$

Задача. Вычислите

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\,.$$

Решение. Пусть S — искомая сумма. Имеем:

$$2\sin\frac{\pi}{7}\cdot S = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} =$$
$$= \left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\right) + \left(\sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7}\right) = -\sin\frac{\pi}{7}\,,$$

откуда $S = -1/2$.

Задачи

Задачи 1 — 46 позаимствованы из общеизвестного задачника Сканави. В основном они довольно просты, и их главная цель — довести до автоматизма владение тригонометрическими формулами.

1. Докажите тождество:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta.$$

2. Докажите тождество:

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha.$$

3. Докажите тождество:

$$\sin 9\alpha + \sin 10\alpha + \sin 11\alpha + \sin 12\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{21\alpha}{2}\,.$$

4. Докажите тождество:

$$\cos 2\alpha - \cos 3\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha = -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{7\alpha}{2}\,.$$

5. Докажите тождество:

$$\sin 4\alpha - \sin 5\alpha - \sin 6\alpha + \sin 7\alpha = -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{11\alpha}{2}\,.$$

6. Докажите тождество:

$$\cos\alpha + \sin\alpha + \cos 3\alpha + \sin 3\alpha = 2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right).$$

7. Докажите тождество:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}3\alpha + \operatorname{ctg}3\alpha = \frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}.$$

8. Докажите тождество:

$$\sin^{-1}\alpha + \operatorname{tg}^{-1}\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

9. Докажите тождество:

$$\frac{\sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}3\alpha.$$

10. Докажите тождество:

$$\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha.$$

11. Докажите тождество:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

12. Докажите тождество:

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

13. Докажите тождество:

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 - (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = -4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(\alpha+\beta).$$

14. Докажите тождество:

$$\cos 4\alpha - \sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha = \cos 2\alpha - 2\cos^2\alpha.$$

15. Докажите тождество:

$$\cos 4\alpha\operatorname{tg}2\alpha - \sin 4\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}.$$

16. Докажите тождество:

$$\frac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha} - 2(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha) - 1 = 0.$$

17. Докажите тождество:

$$\frac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2}\sin 4\alpha.$$

18. Докажите тождество:

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$$

19. Докажите тождество:

$$\frac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{15\alpha}{2}\,.$$

20. Докажите тождество:

$$\frac{\sin 6\alpha + \sin 7\alpha + \sin 8\alpha + \sin 9\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha} = \operatorname{tg}\frac{15\alpha}{2}\,.$$

21. Докажите тождество:

$$\frac{\cos 4\alpha\operatorname{tg} 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha\operatorname{tg} 2\alpha + \sin 4\alpha} = -\operatorname{tg}^2 2\alpha.$$

22. Докажите тождество:

$$\frac{3 + 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha}{3 - 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha} = \operatorname{ctg}^4 2\alpha.$$

23. Докажите тождество:

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg} 2\alpha = 4\operatorname{ctg} 4\alpha.$$

24. Докажите тождество:

$$\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg} 3\alpha.$$

25. Докажите тождество:

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{3 + \cos 4\alpha}{4}\,.$$

26. Докажите тождество:

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \frac{5 + 3\cos 4\alpha}{8}\,.$$

27. Докажите равенство:

$$\frac{\sin 24^\circ \cos 6^\circ - \sin 6^\circ \sin 66^\circ}{\sin 21^\circ \cos 39^\circ - \sin 39^\circ \cos 21^\circ} = -1.$$

28. Докажите равенство:

$$\frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cos 99^\circ} = 1.$$

29. Докажите равенство:

$$\frac{\cos 63^\circ \cos 3^\circ - \cos 87^\circ \cos 27^\circ}{\cos 132^\circ \cos 72^\circ - \cos 42^\circ \cos 18^\circ} = -\operatorname{tg} 24^\circ.$$

30. Докажите равенство:

$$\frac{\cos 66^\circ \cos 6^\circ + \cos 24^\circ \cos 84^\circ}{\cos 65^\circ \cos 5^\circ + \cos 85^\circ \cos 25^\circ} = 1.$$

31. Докажите равенство:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

32. Докажите равенство:

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

33. Объясните, почему верно равенство $\cos 54^\circ = \sin 36^\circ$. Исходя из него, вычислите $\sin 18^\circ$.

$\boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

34. Докажите равенство:

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

35. Покажите, что:

а) $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$; б) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$.

36. Докажите равенство:

$$\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{16}.$$

37. Докажите равенство:

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}.$$

38. Докажите равенство:

$$\sin\frac{3\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}\,.$$

39. Докажите равенство:

$$\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} = -\frac{1}{2}\,.$$

40. Докажите равенство:

$$\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ = 8.$$

41. Докажите равенство:

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4.$$

42. Вычислите

$$\frac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}\,.$$

$\boxed{\sqrt{3}}$

43. Для треугольника ABC докажите, что

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\,.$$

44. Для треугольника ABC докажите, что

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C.$$

45. Для треугольника ABC докажите, что

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\cos A\cos B\cos C = 2.$$

46. Для треугольника ABC докажите, что

$$\cos A\cos B\cos C \leqslant \frac{1}{8}\,.$$

47. (*«Ломоносов», 2007*) Вычислите

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\beta - \cos\beta),$$

если $\sin(\alpha+\beta) = 0{,}8$ и $\cos(\alpha-\beta) = 0{,}3$.

$\boxed{-0{,}5}$

48. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}3$.

$\boxed{0{,}69}$

49. (*«Физтех», 2015, 10*) Известно, что $\sin y = \frac{3}{2}\sin x + \frac{2}{3}\cos x$, $\cos y = \frac{2}{3}\sin x + \frac{3}{2}\cos x$. Найдите $\sin 2x$.

$\boxed{-\frac{61}{72}}$

50. (*«Физтех», 2016, 10*) Найдите значение выражения

$$\sin^4\frac{5\pi}{24} + \cos^4\frac{7\pi}{24} + \sin^4\frac{17\pi}{24} + \cos^4\frac{19\pi}{24}.$$

$\boxed{\frac{6-\sqrt{3}}{4}}$

51. (*«Физтех», 2014*) Известно, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 16$, $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = 18$. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

$\boxed{144}$

52. (*«Физтех», 2016, 10*) Известно, что $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta) + 6\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}\beta = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Найдите $\operatorname{ctg}\beta$.

$\boxed{1 \text{ или } \frac{1}{7}}$

53. (*«Физтех», 2018, 11*) Числа x и y таковы, что выполняются равенства

$$\operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}y = 2 \quad \text{и} \quad 5\sin(2x-2y) = \sin 2x \sin 2y.$$

Найдите $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$.

$\boxed{-\frac{6}{5}}$

54. (*«Физтех», 2017, 11*) Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$, а числа $3+\sin x$, $3+\sin y$, $3+\sin z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\sin y$.

$\boxed{-\frac{1}{10}}$

55. (*«Физтех», 2017, 11*) Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{7}\right)$, а числа $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{7}{\cos y}$, $\frac{1}{\cos z}$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите $\cos^2 y$.

$\boxed{\frac{10}{13}}$

56. (*«Физтех», 2016, 10*) Найдите значение выражения $\operatorname{ctg}50^\circ - 4\cos 50^\circ$.

$\boxed{-\sqrt{3}}$

57. Докажите:

$$\text{а) } \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$\text{б) } \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

58. (*ОММО, 2015, 11*) Для $x = \frac{\pi}{2n}$ найдите значение суммы

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots + \sin^2 nx.$$

$\boxed{\frac{n+1}{2}}$

59. (*«Ломоносов», 2015*) Вычислить:

$$10\sqrt{2}\left(\sin^3\frac{7\pi}{32}\cos\frac{21\pi}{32} + \cos^3\frac{7\pi}{32}\sin\frac{21\pi}{32}\right)\cos\frac{7\pi}{8}.$$

$\boxed{-3{,}75}$

60. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11*) Что больше:

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ \quad \text{или} \quad \frac{200}{157}\pi\,?$$

$\boxed{\text{Второе}}$

61. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.5*) Пусть α_1, α_2, …, α_{2012} — арифметическая прогрессия с разностью d, причём $\cos\alpha_k \neq 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, 2012$ и

$$\frac{1}{\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2} + \frac{1}{\cos\alpha_2\cdot\cos\alpha_3} + \ldots + \frac{1}{\cos\alpha_{2011}\cdot\cos\alpha_{2012}} = 0.$$

Найдите все возможные значения d, не превосходящие по модулю π.

$\boxed{\frac{\pi n}{2011},\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 2010}$

62. (*«Курчатов», 2016, 11*) Найдите наименьшее натуральное n такое, что $\sin n^\circ = \sin(2016n^\circ)$.

$\boxed{72}$

63. (*ОММО, 2017*) Сравните числа $\frac{\sin 2016^\circ}{\sin 2017^\circ}$ и $\frac{\sin 2018^\circ}{\sin 2019^\circ}$.

$\boxed{\text{Второе больше}}$

64. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 11*) Приведите пример числа x, для которого выполняется равенство

$$\sin 2017x - \operatorname{tg} 2016x = \cos 2015x.$$

Ответ обоснуйте.

65. (*Всеросс., 2018, МЭ, 11.2*) Существует ли треугольник, у которого сумма косинусов внутренних углов равна 1?

66. (*ОММО, 2010*) Найдите сумму:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2}+\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2^2}+\frac{\sin\frac{3\pi}{3}}{2^3}+\ldots+\frac{\sin\frac{2010\pi}{3}}{2^{2010}}\,.$$

$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2010}}\right)}$

67. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012*) Что меньше: $\sin 1$ или $\cos\frac{1}{2^1}\cdot\cos\frac{1}{2^2}\cdot\cos\frac{1}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{1}{2^{2012}}$?

$\boxed{\sin 1 \text{ меньше}}$

68. (*Всеросс., 2014, РЭ, 11*) Дан выпуклый 7-угольник. Выбираются четыре произвольных его угла и вычисляются их синусы, от остальных трёх углов вычисляются косинусы. Оказалось, что сумма таких семи чисел не зависит от изначального выбора четырёх углов. Докажите, что у этого 7-угольника найдутся четыре равных угла.

69. (*МГУ, физический ф-т, 2008*) Указать в градусах все углы β, удовлетворяющие условию $0<\beta<720^\circ$, для каждого из которых его косинус равен $\cos 31^\circ$.

$\boxed{31^\circ,\ 329^\circ,\ 391^\circ,\ 689^\circ}$

70. (*МГУ, экономич. ф-т, 2006*) Найдите все значения x из интервала $(8;12)$, для которых справедливо равенство

$$2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\sin x=\sqrt{6-6\cos\frac{14\pi}{5}}\,.$$

$\boxed{\frac{13\pi}{5}}$

71. (*МГУ, ф-т гос. управления, 2010*) Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, а $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)<0$.

$\boxed{-\frac{2\sqrt{2}}{3},\ -\frac{4\sqrt{2}}{7}}$

72. (*МГУ, ВМК, 1994*) Найти $\cos\left(2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{7}}$.

$\boxed{-\frac{\sqrt{7}}{4}}$

73. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1996*) Найти $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$, если $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha>0$.

$\boxed{\frac{3\sqrt{3}-4}{10}}$

74. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2004*) Вычислите $\sin 255^\circ$.

$\boxed{-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

75. (*МГУ, физический ф-т, 1987*) Известно, что $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{4\pi}{3}$. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

$\boxed{-\frac{2}{3} \text{ и } -\sqrt{5}}$

76. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1998*) Найдите $\cos\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и $\pi < \alpha < 2\pi$. Установите без помощи таблиц и калькулятора, какое из чисел больше: $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$ или $\frac{2}{7}$.

$-\frac{1}{\sqrt{10}}$; первое число больше

77. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2002*) Вычислить $\cos\frac{5\pi}{8}$.

$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

78. (*МГУ, социологич. ф-т, 2008*) Вычислите $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

2

79. (*МГУ, геологич. ф-т, 2000*) Вычислить $\operatorname{tg} 8x$, если $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{4}$.

$\frac{240}{161}$

80. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2002*) Найти $\operatorname{tg} 3\alpha$, если $\sin\alpha = 2\cos\alpha$.

$\frac{2}{11}$

81. (*МГУ, ф-т психологии, 1986*) Найти $\operatorname{tg}^2 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{6}$.

$\frac{203}{121}$

82. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2008*) Вычислите $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right)$, если $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < 0$.

$-\frac{31}{17}$

83. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2000*) Найти $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\sin 4\alpha > 0$.

$\frac{24}{7}$

84. (*МГУ, геологич. ф-т, 1984*) Найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos 2\alpha \leqslant -\frac{7}{8}$ и $\cos\alpha \leqslant -\frac{1}{4}$.

$\pm\sqrt{\frac{5}{8}}$

85. (*МГУ, геологич. ф-т, 1984*) Найти $\sin\alpha$, если $\sin 2\alpha \geqslant \frac{3}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{1}{3}$.

$\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

86. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2000*) Найдите а) $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$, б) $\cos(\alpha+\beta)$, если известно, что выполняются равенства $\cos\alpha - \cos\beta = -0{,}7$ и $\sin\alpha + \sin\beta = 0{,}9$.

а) $\frac{7}{9}$; б) $\frac{7}{20}$

87. (*МГУ, геологич. ф-т, 2004*) Какие значения может принимать $\sin x$, если

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\,?$$

-1 или $\frac{1}{2}$

88. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2006*) Найдите наименьшее положительное число α, при котором синус α градусов равен синусу α радиан.

$\boxed{\frac{180\pi}{180+\pi}}$

89. (*МГУ, мехмат, 2005, устный экз.*) Найти наименьшее значение функции f, определённой на множестве натуральных чисел и удовлетворяющей равенствам

$$f(1)=\cos 2, \quad f(n+1)=f(n)\cdot\cos 1-\sqrt{1-(f(n))^2}\cdot\sin 1, \quad n\in\mathbb{N}.$$

$\boxed{\cos 3}$

90. (*МФТИ, 1995*) Найдите наименьшее натуральное число n, при котором выполнено равенство

$$\cos(n^\circ+20^\circ)-\cos(n^\circ+80^\circ)-\sin(n^\circ+80^\circ)+\sin 15^\circ=0.$$

$\boxed{235}$

91. (*МГУ, мехмат, 2002-05.1*) Найти дроби

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma} \quad \text{и} \quad \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)},$$

если числа α, β и γ выбраны так, что обе дроби положительны и одна втрое больше другой.

$\boxed{\frac{2}{3},\ 2}$

92. (*МГУ, мехмат, 2000-05.4*) Найти $\frac{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}{\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)}$, если $\frac{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{4}{9}$.

$\boxed{\frac{4}{5}}$

93. (*МГУ, мехмат, 2001-03.4*) Можно ли подобрать числа A, B, φ, ψ так, чтобы выражение

$$\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2\right)^2+A\cos(x+\varphi)+B\sin(2x+\psi)$$

принимало при всех x одно и то же значение C? Если да, то какие значения может принимать константа C?

$\boxed{\text{Можно; } C=\frac{9}{2}}$

94. (*МГУ, ВМК, 2007*) Какие значения может принимать $\cos(\alpha-\beta+\gamma)$, если при этих α, β, γ многочлен от x

$$x^4+2\cdot 3^{2\cos\alpha}x^2+x\cdot\sqrt{3^{2-\cos\beta}-3\sin\gamma}+4\cos^2\beta-\sin^2\gamma$$

является квадратом некоторого многочлена относительно x?

$\boxed{\pm\frac{\sqrt{15}}{4}}$

95. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 11.4*) На доске написано число ноль. Петру разрешается совершать следующие операции:

- применить к одному из написанных на доске чисел тригонометрическую (sin, cos, tg или ctg) или обратную тригонометрическую (arcsin, arccos, arctg или arcctg) функцию и написать результат на доске;
- написать на доске частное или произведение двух уже написанных чисел.

Помогите Петру написать на доске $\sqrt{3}$.