

В. В. Прасолов
Т. И. Голенищева-Кутузова
А. Я. Канель-Белов
Ю. Г. Кудряшов
А. С. Трепалин
И. В. Яценко

Московские
математические
олимпиады
1958—1967 г.

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 51

ББК 74.200.58:22.1

Московские математические олимпиады 1958—1967 г.

В. В. Прасолов, Т. И. Голенищева-Кутузова,

А. Я. Канель-Белов, Ю. Г. Кудряшов, И. В. Яценко

Электронное издание

М.: МЦНМО, 2016

324 с.

ISBN 978-5-4439-2493-9

В книге собраны задачи Московских математических олимпиад 1958—1967 г. с ответами, указаниями и подробными решениями. В дополнениях приведены основные факты, используемые в решении олимпиадных задач.

Все задачи в том или ином смысле нестандартные. Их решение требует смекалки, сообразительности, а иногда и многочасовых размышлений.

Книга предназначена для учителей математики, руководителей кружков, школьников старших классов, студентов педагогических специальностей. Книга будет интересна всем любителям красивых математических задач.

Подготовлено на основе книги: Московские математические олимпиады 1958—1967 г. / В. В. Прасолов и др. — 2-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2013. — 328 с. — ISBN 978-5-4439-0313-2

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-08-04
www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2493-9

© МЦНМО, 2016.

Предисловие

В этой книге собраны условия задач десяти Московских математических олимпиад, начиная с 1958 года и заканчивая 1967 годом. В книге приводятся также ответы, даются указания, а в заключение приводятся полные решения всех задач.

Председателями оргкомитетов десяти олимпиад, представленных в книге, были:

В. Г. Болтянский (олимпиада 1958 г.),
Е. М. Ландис (1959),
И. Р. Шафаревич (1960 и 1964),
В. А. Ефремович (1961),
Н. В. Ефимов (1962 и 1965),
А. Н. Колмогоров (1963),
А. А. Кронрод (1966),
В. В. Немыцкий (1967).

Это уже третья книга с полными решениями задач Московских математических олимпиад, изданная МЦНМО (Московским центром непрерывного математического образования). Ранее вышли книги «Московские математические олимпиады 1993—2005 г.» (авторы Р. М. Федоров, А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, И. В. Яценко, под редакцией В. М. Тихомирова. М.: МЦНМО, 2006) и «Московские математические олимпиады 1935—1957 г.» (В. В. Прасолов, Т. И. Голенищева-Кутузова, А. Я. Канель-Белов, Ю. Г. Кудряшов, И. В. Яценко. М.: МЦНМО, 2010). Теперь остаётся издать книги с задачами олимпиад с 1968 по 1992 гг.

В. В. Прасолов

Условия задач

1958 год (XXI олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Имеется система уравнений

$$*x + *y + *z = 0,$$

$$*x + *y + *z = 0,$$

$$*x + *y + *z = 0.$$

Два человека поочерёдно вписывают вместо звёздочек числа. Доказать, что начинающий всегда может добиться того, чтобы система имела ненулевое решение.

2. В круге проведены два диаметра AB и CD . Доказать, что если M — произвольная точка окружности, а P и Q — её проекции на диаметры AB и CD , то длина отрезка PQ не зависит от выбора точки M .

3. Сколько существует четырёхзначных номеров (от 0001 до 9999), у которых сумма двух первых цифр равна сумме двух последних цифр?

4. На плоскости даны точки A и B . Построить такой квадрат, чтобы точки A и B лежали на его границе и сумма расстояний от точки A до вершин квадрата была наименьшей.

5. Дана следующая треугольная таблица чисел:

0	1	2	...	1957	1958
1	3	3915
...	
		

Каждое число (кроме чисел верхней строчки) равно сумме двух ближайших чисел предыдущей строчки. Доказать, что число, стоящее в самой нижней строчке, делится на 1958.

8 класс

1. Внутри треугольника ABC взята точка O . На лучах OA , OB и OC построены векторы единичной длины. Доказать, что сумма этих векторов имеет длину меньшую единицы.

2. Доказать, что если уравнения с целыми коэффициентами

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0,$$

$$x^2 + p_2x + q_2 = 0$$

имеют общий нецелый корень, то $p_1 = p_2$ и $q_1 = q_2$.

3. На круглой поляне радиуса R растут три круглые сосны одинакового диаметра. Центры их стволов находятся на расстоянии $\frac{R}{2}$ от центра поляны в вершинах равностороннего треугольника. Два человека, выйдя одновременно из диаметрально противоположных точек поляны, обходят поляну по краю с одинаковой скоростью и в одном направлении и всё время не видят друг друга. Увидят ли друг друга три человека, если они так же будут обходить поляну, выйдя из точек, находящихся в вершинах вписанного в поляну правильного треугольника?

4. Решить в целых положительных числах уравнение

$$1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \dots + \frac{1}{1958}}} = \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \dots + \frac{1}{x_{1958}}}}.$$

5. Проекции многоугольника на ось OX , биссектрису 1-го и 3-го координатных углов, ось OY и биссектрису 2-го и 4-го координатных углов равны соответственно 4, $3\sqrt{2}$, 5, $4\sqrt{2}$. Площадь многоугольника — S . Доказать, что $S \leq 17,5$.

9 класс

1. Бесконечная плоская ломаная $A_0A_1 \dots A_n \dots$, все углы которой прямые, начинается в точке A_0 с координатами

тами $x=0$, $y=1$ и обходит начало координат O по часовой стрелке. Первое звено ломаной имеет длину 2 и параллельно биссектрисе 4-го координатного угла. Каждое из следующих звеньев пересекает одну из координатных осей и имеет наименьшую возможную при этом целочисленную длину. Расстояние $OA_n = l_n$. Сумма длин первых n звеньев ломаной равна s_n . Доказать, что найдётся n , для которого $\frac{s_n}{l_n} > 1958$.

2. Доказать, что если $|ax^2 - bx + c| < 1$ при любом x , $|x| \leq 1$, то и $|(a+b)x^2 + c| < 1$ при $|x| \leq 1$.

3. Какое наибольшее число осей симметрии может иметь пространственная фигура, состоящая из трёх прямых, из которых никакие две не параллельны и не совпадают?

4. Решить в целых положительных числах уравнение

$$1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \dots + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \dots + \frac{1}{x_n}}}.$$

5. Отрезок длиной 3^n разбивается на три равные части. Первая и третья из них называются отмеченными. Каждый из отмеченных отрезков разбивается на три части, из которых первая и третья снова называются отмеченными и т. д. до тех пор, пока не получатся отрезки длиной 1. Концы всех отмеченных отрезков называются отмеченными точками. Доказать, что для любого целого k ($1 \leq k \leq 3^n$) можно найти две отмеченные точки, расстояние между которыми равно k .

10 класс

1. Проекция плоского выпуклого многоугольника на ось OX , биссектрису 1-го и 3-го координатных углов, ось OY и биссектрису 2-го и 4-го координатных углов соответственно равны 4, $3\sqrt{2}$, 5, $4\sqrt{2}$. Площадь многоугольника равна S . Доказать, что $S \geq 10$.

2. Доказать, что $1155^{1958} + 34^{1958} \neq n^2$, где n — целое.

3. См. задачу 3 для 9 класса.

4. На стол кладут¹ правильный 100-угольник, в вершинах которого написаны числа 1, 2, ..., 100. Затем эти числа переписывают в порядке удаления от переднего края стола. Если две вершины находятся на равном расстоянии от края, сначала выписывается левое число, затем правое. Выписаны всевозможные наборы чисел, соответствующие разным положениям 100-угольника. Вычислить сумму чисел, стоящих в этих наборах на 13-х местах слева.

5. Из четырёх прямых на плоскости никакие две не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке. По каждой прямой с постоянной скоростью идёт пешеход. Известно, что 1-й встречается со 2-м, с 3-м и с 4-м, а 2-й встречается с 3-м и с 4-м. Доказать, что 3-й пешеход встретится с 4-м.

Второй тур

7 класс

1. Доказать, что на плоскости нельзя расположить больше четырёх выпуклых многоугольников так, чтобы каждые два из них имели общую сторону.

2. Имеются два набора из $+1$ и -1 , в каждом по 1958 чисел. Доказать, что за некоторое число шагов можно превратить первый набор во второй, если на каждом шагу разрешается одновременно изменить знак у любых 11 чисел первого набора. (Два набора считаются одинаковыми, если у них на одинаковых местах стоят одинаковые числа).

3. Каждая грань куба заклеивается двумя равными прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой, один из которых белый, другой — чёрный. Можно ли эти треугольники расположить так, чтобы при каждой вер-

¹ Предполагается, что 100-угольник нельзя переворачивать, потому что он непрозрачный и числа написаны только на одной его стороне. — *Прим. ред.*

шине куба сумма белых углов была равна сумме чёрных углов?

4. Доказать, что если целое $n > 2$, то

$$(1 \cdot 2 \dots n)^2 > n^n.$$

5. Сторона клетки клетчатой бумаги равна 1. По линиям сетки построен прямоугольник со сторонами m и n . Можно ли в прямоугольнике провести по линиям сетки замкнутую ломаную, которая ровно один раз проходила бы через каждый узел сетки, расположенный внутри или на границе прямоугольника? Если можно, то какова её длина?

8 класс

1. Из бумаги вырезан многоугольник. Две точки его границы соединяются отрезком, по которому многоугольник складывается. Доказать, что периметр многоугольника, получающегося после складывания, меньше периметра исходного многоугольника.

2. Для любых чисел a_1 и a_2 , удовлетворяющих условиям $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_1 + a_2 = 1$, можно найти такие числа b_1 и b_2 , что $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$, $b_1 + b_2 = 1$, $\left(\frac{5}{4} - a_1\right)b_1 + 3\left(\frac{5}{4} - a_2\right)b_2 > 1$. Доказать.

3. Внутри угла AOB ¹ взята точка C . Из неё опущены перпендикуляры: CD на сторону OA ; CE — на сторону OB . Из точек D и E опущены перпендикуляры: EM на сторону OA ; DN на сторону OB . Доказать, что $OC \perp MN$.

4. Доказать, что если целое $n > 1$, то

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \dots n^n < n^{n(n+1)/2}.$$

5. Обозначим через a наибольшее число непересекающихся кругов диаметра 1, центры которых лежат внутри многоугольника M , через b — наименьшее число кру-

¹ Предполагается, что $\angle AOB \neq 90^\circ$, потому что иначе точки M и N совпадают. — Прим. ред.

гов радиуса 1, которыми можно покрыть весь многоугольник M . Какое число больше: a или b ?

9 класс

1. Решить в целых положительных числах уравнение

$$x^{2y-1} + (x+1)^{2y-1} = (x+2)^{2y-1}.$$

2. Провести из точки O на плоскости n лучей¹ так, чтобы сумма всех попарных углов между ними была наибольшей. (Рассматриваются только углы, не превышающие 180° .)

3. Игральная доска имеет форму ромба с углом 60° . Каждая сторона ромба разделена на 9 частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам и малой диагонали ромба, разбивающие доску на треугольные клетки. Если на некоторой клетке поставлена фишка, проведём через эту клетку 3 прямые, параллельные сторонам и малой диагонали ромба. Клетки, которые они пересекнут, будут считаться побитыми фишкой. Каким наименьшим числом фишек можно побить все клетки доски?

4. Обозначим через a наименьшее число кругов радиуса 1, которыми можно полностью покрыть заданный многоугольник M , через b — наибольшее число непересекающихся кругов радиуса 1 с центрами внутри многоугольника M . Какое из чисел больше, a или b ?

5. Между зажимами A и B включено несколько сопротивлений. Каждое сопротивление имеет входной и выходной зажимы. Какое наименьшее число сопротивлений необходимо иметь и какова может быть схема их соединения, чтобы при порче любых 9 сопротивлений цепь осталось соединяющей зажимы A и B , но не было короткого замыкания? (Порча сопротивления: короткое замыкание или обрыв.)

¹ Лучи не обязательно должны быть различными; среди них могут быть и совпадающие. — *Прим. ред.*

10 класс

1. Решить в целых положительных числах уравнение

$$x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}.$$

2. В многоугольнике существуют такие точки A и B , что любая соединяющая их ломаная, проходящая внутри или по границе многоугольника, имеет длину больше 1. Доказать, что периметр многоугольника больше 2.

3. В школе изучают $2n$ предметов. Все ученики учатся на 4 и 5. Никакие два ученика не учатся одинаково, ни про каких двух нельзя сказать, что один из них учится лучше другого¹. Доказать, что число учеников в школе не превосходит C_{2n}^n .

4. Стороны параллелограмма равны a и b . Найти отношение объёмов тел, полученных при вращении параллелограмма вокруг стороны a и вокруг стороны b .

5. На n карточках написаны с разных сторон числа — на 1-й: 0 и 1; на 2-й: 1 и 2; ...; на n -й: $n-1$ и n .

Один человек берёт из стопки несколько карточек и показывает второму одну сторону каждой из них. Затем берёт из стопки ещё одну карточку и тоже показывает одну сторону.

Указать все случаи, в которых второй может определить число, написанное на обороте последней показанной ему карточки.

1959 год (XXII олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Пусть a и b — целые числа. Напишем число b справа от числа a . Если число a чётное, то разделим его на 2, если

¹ Один ученик учится лучше другого, если у него по всем предметам оценки не хуже, чем у второго ученика, а по некоторым предметам лучше. — Прим. ред.

оно нечётное, то сначала вычтем из него единицу, а потом разделим его на 2. Получившееся число a_1 напомним под числом a . Справа от числа a_1 напомним число $2b$. С числом a_1 сделаем ту же операцию, что и с числом a , и, получив число a_2 , напомним его под числом a_1 . Справа от числа a_2 напомним число $4b$ и так далее. Этот процесс продолжим до тех пор, пока не получим в левом столбце число 1. Доказать, что сумма тех чисел правого столбца, слева от которых стоят нечётные числа, равна произведению ab .

2. Доказать, что число $2^{2^{1959}} - 1$ делится на 3.

3. Можно ли расположить все трёхзначные числа, не оканчивающиеся нулями, в последовательности так, чтобы последняя цифра каждого числа была равна первой цифре следующего за ним?

4. Как должна¹ двигаться ладья по шахматной доске, чтобы побывать на каждом поле по одному разу и сделать наименьшее число поворотов?

5. Дан квадрат со стороной 1. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до сторон этого квадрата или их продолжений равна 4.

8 класс

1. Даны две бочки бесконечно большой ёмкости. Можно ли, пользуясь двумя ковшом ёмкостью $2 - \sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$, перелить из одной в другую ровно 1 литр?

2. Заметим, что если перевернуть лист, на котором написаны цифры, то цифры 0, 1, 8 не изменятся, 6 и 9 поменяются местами, остальные потеряют смысл. Сколько существует девятизначных чисел, которые при переворачивании листа не изменяются?

3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Середины сторон AB и CD обозначим соответственно через K и M ,

¹ В задаче не требуется описать все возможные варианты движения ладьи; достаточно предъявить один путь и доказать, что пути с меньшим числом поворотов не существует. — *Прим. ред.*

точку пересечения AM и DK — через O , точку пересечения BM и CK — через P . Доказать, что площадь четырёхугольника $МОКР$ равна сумме площадей треугольников BPC и AOD (на рис. 1 четырёхугольник $МОКР$ и треугольники BPC и AOD заштрихованы).

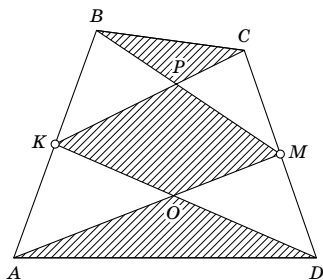


Рис. 1

4. См. задачу 4 для 7 класса.

5. Даны две непересекающиеся окружности с центрами в точках O_1 и O_2 . Пусть a_1 и a_2 — внутренние касательные к этим окружностям, a_3 и a_4 — внешние касательные к ним. Пусть, далее, a_5 и a_6 — касательные к окружности с центром в O_1 , проведённые из точки O_2 , a_7 и a_8 — касательные к окружности с центром в точке O_2 , проведённые из точки O_1 . Обозначим через O точку пересечения a_1 и a_2 . Доказать, что с центром в точке O можно провести две окружности так, чтобы первая касалась a_3 и a_4 , вторая касалась a_5, a_6, a_7, a_8 , причём радиус второй в два раза меньше радиуса первой.

9 класс

1. Имеется 1959 положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{1959}$, сумма которых равна 1. Рассматриваются всевозможные комбинации из 1000 чисел, причём комбинации считаются совпадающими, если они отличаются только порядком чисел. Для каждой комбинации рассматривается произведение входящих в неё чисел. Доказать, что сумма всех этих произведений меньше 1.

2. См. задачу 2 для 8 класса.

3. Построить окружность, проходящую через две данные точки и отсекающую от данной окружности хорду данной длины.

4. Рассмотрим лист клетчатой бумаги со стороной клетки, равной 1. Пусть P_k — число всех непересекающихся ломаных длины k , начинающихся в точке O — некотором фиксированном узле сетки. (Все ломаные составлены из звеньев сетки.) Доказать, что для любого k справедливо неравенство $\frac{P_k}{3^k} < 2$.

5. Доказать, что не существует тетраэдра, в котором каждое ребро являлось бы стороной плоского тупого угла.

10 класс

1. Доказать, что не существует целых чисел x, y, z , таких, что $x^k + y^k = z^k$ при условии $z > 0$; $0 < x < k$; $0 < y < k$; $k > 2$.

2. См. задачу 3 для 8 класса.

3. Существует ли тетраэдр, каждое ребро которого являлось бы стороной плоского тупого угла?

4. В квадратную таблицу $N \times N$ записаны все целые числа по следующему закону: 1 стоит на любом месте, 2 стоит в строке с номером, равным номеру столбца, содержащего 1, 3 стоит в строке с номером, равным номеру столбца, содержащего 2, и так далее. На сколько сумма чисел в столбце, содержащем N^2 , отличается от суммы чисел в строке, содержащей 1?

5. Дана невозрастающая последовательность чисел

$$\frac{1}{2k} = a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots; \quad a_n > 0;$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = 1.$$

Доказать, что найдутся k идущих подряд чисел, из которых самое маленькое больше половины самого большого.

Второй тур

7 класс

1. Имеется два набора чисел $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ и $b_1 > b_2 > \dots > b_n$. Доказать, что $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n > a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1$.

2. Дан треугольник ABC . Найти такую точку, что если её симметрично отразить от любой стороны треугольника, то она попадает на описанную окружность.

3. На какое целое число надо умножить 999 999 999, чтобы получить число, состоящее из одних единиц?

4. Доказать, что в любом шестизначном числе можно переставить цифры так, чтобы сумма первых трёх отличалась от суммы вторых трёх меньше, чем на 10.

5. Дано n чисел, x_1, x_2, \dots, x_n , при этом $x_k = \pm 1$. Доказать, что если $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1 = 0$, то n делится на 4.

8 класс

1. См. задачу 5 для 7 класса.

2. Даны 12 чисел, a_1, a_2, \dots, a_{12} , причём имеют место следующие неравенства:

$$a_2(a_1 - a_2 + a_3) < 0,$$

$$a_3(a_2 - a_3 + a_4) < 0,$$

.....

$$a_{11}(a_{10} - a_{11} + a_{12}) < 0.$$

Доказать, что среди этих чисел найдётся по крайней мере 3 положительных и 3 отрицательных.

3. Дан треугольник ABC . Построим треугольник, стороны которого касаются¹ вневписанных окружностей этого треугольника. Зная углы исходного треугольника, найти углы построенного.

¹ Имеются в виду общие касательные каждой из пар вневписанных окружностей, не содержащие сторон исходного треугольника. — Прим. ред.

4. Даны два пересекающихся отрезка длины 1, AB и CD . Доказать, что по крайней мере одна из сторон четырёхугольника $ACBD$ не меньше $\sqrt{2}/2$.

5. Доказать, что шахматную доску размером 4 на 4 нельзя обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле ровно один раз.

9 класс

1. Даны сто чисел, x_1, x_2, \dots, x_{100} , сумма которых равна 1, такие, что абсолютные величины разностей $x_{k+1} - x_k$ меньше $1/50$ каждая. Доказать, что из них можно выбрать 50 чисел так, чтобы сумма выбранных отличалась от половины не больше, чем на одну сотую.

2. n отрезков длины 1 пересекаются в одной точке. Доказать, что хотя бы одна сторона $2n$ -угольника, образованного их концами, не меньше стороны правильного $2n$ -угольника, вписанного в окружность диаметра 1.

3. Доказать, что не более одной вершины тетраэдра обладает тем свойством, что сумма любых двух плоских углов при этой вершине больше 180° .

4. Доказать, что существует бесконечно много чисел, не представимых в виде суммы трёх кубов.

5. В углах шахматной доски 3 на 3 стоят кони: в верхних углах — белые, в нижних — чёрные. Доказать, что для того, чтобы поменяться местами белых и чёрных коней, потребуется не менее 16 ходов. (Кони не обязательно ходят сначала белый, потом чёрный. Ходом считается ход одного коня.)

10 класс

1. См. задачу 4 для 9 класса.

2. Пусть $ABCD$ — пространственный четырёхугольник, точки K_1 и K_2 делят соответственно стороны AB и DC в отношении α , точки K_3 и K_4 делят соответственно стороны BC и AD в отношении β . Доказать, что отрезки K_1K_2 и K_3K_4 пересекаются.

3. Даны несколько перекрывающихся кругов, занимающие на плоскости площадь, равную 1. Доказать, что из них можно выбрать некоторое количество попарно неперекрывающихся, чтобы их общая площадь была не менее $\frac{1}{9}$.

4. Даны n комплексных чисел C_1, C_2, \dots, C_n , таких, что если их представлять себе как точки плоскости, то они являются вершинами выпуклого n -угольника. Доказать, что если комплексное число z обладает тем свойством, что

$$\frac{1}{z - C_1} + \frac{1}{z - C_2} + \dots + \frac{1}{z - C_n} = 0,$$

то точка плоскости, соответствующая z , лежит внутри этого n -угольника.

5. Два концентрических круга поделены на $2k$ равных секторов. Каждый сектор покрашен в белый или чёрный цвет. Доказать, что если белых и чёрных секторов на каждом круге одинаковое количество, то можно сделать такой поворот, что по крайней мере на половине длины окружности будут соприкасаться разноцветные куски.

1960 год (XXIII олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Указать все денежные суммы, выраженные целым числом рублей, которые могут быть представлены как чётным, так и нечётным числом денежных билетов¹.

2. Три равные окружности с центрами O_1, O_2, O_3 пересекаются в данной точке. A_1, A_2, A_3 — остальные точки пересечения. Доказать, что треугольники $O_1O_2O_3$ и $A_1A_2A_3$ равны.

3. В составлении 40 задач приняло участие 30 студентов со всех 5 курсов. Любые 2 однокурсника придумали одинаковое число задач. Любые два студента с разных

¹ В обращении имелись билеты достоинством в 1, 3, 5, 10, 25, 50 и 100 рублей. — *Прим. ред.*

курсов придумали разное число задач. Сколько человек придумало 1 задачу?

4. M и N — точки пересечения двух окружностей с центрами O_1 и O_2 . Прямая O_1M пересекает 1-ю окружность в точке A_1 , а 2-ю в точке A_2 . Прямая O_2M пересекает 1-ю окружность в точке B_1 , а 2-ю в точке B_2 . Доказать, что прямые A_1B_1 , A_2B_2 и MN пересекаются в одной точке.

5. Доказать: число делителей n не превосходит $2\sqrt{n}$.

8 класс

1. Доказать, что число, состоящее из трёхсот единиц и некоторого количества нулей, не является точным квадратом.

2. В турнире каждый шахматист половину всех очков набрал во встречах с участниками, занявшими три последних места. Сколько всего человек принимало участие в турнире?

3. Через данную вершину A выпуклого четырёхугольника $ABCD$ провести прямую, делящую его площадь пополам.

4. Даны отрезки AB , CD и точка O ¹. Конец отрезка называется «отмеченным», если прямая, проходящая через него и точку O , не пересекает другой отрезок. Сколько может быть отмеченных концов?

5. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $p + n^{2k}$ ни при каких простых p и целых n и k .

9 класс

1. Доказать, что любая правильная дробь может быть представлена в виде (конечной) суммы обратных величин попарно различных целых чисел.

2. См. задачу 5 для 8 класса.

¹ Предполагается, что никакие три из точек A , B , C , D и O не лежат на одной прямой. — Прим. ред.

3. Дан выпуклый многоугольник и точка O внутри него. Любая прямая, проходящая через точку O , делит площадь многоугольника пополам. Доказать, что многоугольник центрально-симметричный и O — центр симметрии.

4. Найти геометрическое место четвёртых вершин прямоугольников, у которых первая и вторая вершины лежат на данной окружности, а третья — в данной точке внутри окружности.

10 класс

1. Два правильных равных треугольника расположены в пространстве в параллельных плоскостях P_1 и P_2 , причём отрезок, соединяющий их центры, перпендикулярен плоскостям. Найти геометрическое место точек, являющихся серединами отрезков, соединяющих точки одного треугольника с точками другого треугольника.

2. Если числитель и знаменатель дроби $\frac{a^n + b^n}{a + b}$ делятся на ¹ n , то и сама дробь делится на n .

3. См. задачу 4 для 9 класса.

4. В десятичной записи целого числа A все цифры, кроме первой и последней, нули, первая и последняя — не нули, число цифр не меньше трёх. Доказать, что A не является точным квадратом.

5. Даны числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, причём для всех натуральных нечётных n имеет место равенство

$$\alpha_1^n + \alpha_2^n + \dots + \alpha_k^n = 0.$$

Доказать, что те из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, которые не равны нулю, можно разбить на пары таким образом, чтобы два числа, входящие в одну и ту же пару, были бы равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку.

¹ Число n должно быть нечётным. В случае, когда число n чётно, задача неверна: например, при $a = b = 1$, $n = 2$ условие задачи выполнено, а утверждение неверно. — *Прим. ред.*

Второй тур

7 класс

1. Даны 4 точки: A, B, C, D . Найти такую точку O , что сумма расстояний от неё до данных точек минимальна.
2. Доказать, что из сторон произвольного четырёхугольника можно сложить трапецию¹.
3. Доказать, что любой несамопересекающийся пятиугольник лежит по одну сторону от хотя бы одной своей стороны.
4. В каком-то году некоторое число ни в одном месяце не было воскресеньем. Определить это число.

8 класс

1. Каково наибольшее n , при котором так можно расположить n точек на плоскости, чтобы каждые 3 из них служили вершинами прямоугольного треугольника?
2. Имеется бесконечная шахматная доска. Обозначим через (a, b) поле, расположенное на пересечении горизонтали с номером a и вертикали с номером b . Фишка с поля (a, b) может сделать ход на любое из восьми полей: $(a \pm m, b \pm n)$, $(a \pm n, b \pm m)$, где m, n — фиксированные числа, а $(+)$ и $(-)$ комбинируются произвольно. Сделав x ходов, фишка вернулась на исходное поле. Доказать, что x чётно.
3. См. задачу 2 для 7 класса.
4. Улитка ползёт с непостоянной скоростью. Несколько человек наблюдало за ней по очереди в течение 6 мин. Каждый начинал наблюдать раньше, чем кончал предыдущий, и наблюдал ровно 1 мин. За эту минуту улитка проползала ровно 1 м. Доказать, что за все 6 мин улитка могла проползти самое большее 10 м.

¹ Здесь подразумевается, что трапеция — это четырёхугольник, у которого есть пара параллельных сторон, т. е. параллелограмм также является трапецией. Из сторон параллелограмма нельзя сложить трапецию, отличную от параллелограмма. — *Прим. ред.*

5. Дан пятиугольник $ABCDE$. $AB=BC=CD=DE$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$. Доказать, что пятиугольниками, равными данному, можно замостить плоскость.

9 класс

1. Имеется m точек, некоторые из которых соединены отрезками так, что каждая соединена с l точками. Какие значения может принимать l ?

2. Дан произвольный центрально-симметричный шестиугольник. На его сторонах, как на основаниях, построены во внешнюю сторону правильные треугольники. Доказать, что середины отрезков, соединяющих вершины соседних треугольников, образуют правильный шестиугольник.

3. Доказать, что никакую прямоугольную шахматную доску шириной в 4 клетки нельзя обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле по одному разу и последним ходом вернувшись на исходную клетку.

4. Найти геометрическое место центров прямоугольников, описанных около данного остроугольного треугольника.

5. В квадрате со стороной 100 расположено N кругов радиуса 1, причём всякий отрезок длины 10, целиком расположенный внутри квадрата, пересекает хотя бы один круг. Доказать, что $N \geq 400$.

10 класс

1. Число A делится на 1, 2, 3, ..., 9. Доказать, что если $2A$ представлено в виде суммы натуральных чисел, меньших 10, $2A = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, то из чисел a_1, a_2, \dots, a_k можно выбрать часть, сумма которых равна A .

2. $6n$ -значное число делится на 7. Последнюю цифру перенесли в начало. Доказать, что полученное число также делится на 7.

3. Собралось n человек. Некоторые из них знакомы между собой, причём каждые два незнакомых имеют рав-

но двух общих знакомых, а каждые два знакомых не имеют общих знакомых. Доказать, что каждый из них знаком с одинаковым числом человек.

4. См. задачу 4 для 9 класса.

5. Улитка¹ должна проползти вдоль линий клетчатой бумаги путь длины $2n$, начав и кончив свой путь в данном узле. Доказать, что число различных её маршрутов равно $(C_{2n}^n)^2$.

1961 год (XXIV олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Доказать, что если n — чётное число, то числа 1, 2, 3, ..., n^2 можно таким образом расположить в квадратную таблицу $n \times n$, чтобы суммы чисел, стоящих в каждом столбце, были одинаковы.

2. Имеется трёхзначное число abc , берём cba и вычтем из большего меньшее. Получим число $a_1b_1c_1$, сделаем с ним то же самое и т. д. Доказать, что на каком-то шаге мы получим или число 495, или 0. (Здесь под abc понимается число, записываемое с помощью цифр a, b, c).

3. Дан остроугольный треугольник $A_0B_0C_0$. Пусть точки A_1, B_1, C_1 — центры квадратов, построенных на сторонах B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 . С треугольником $A_1B_1C_1$ делаем то же самое. Получаем треугольник $A_2B_2C_2$ и т. д. Доказать, что треугольник $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ пересекает треугольник $A_nB_nC_n$ ровно в 6 точках.

¹ На олимпиаде эта задача предлагалась в следующей формулировке: «Доказать, что число ломаных длиной $2n$, стороны которых лежат на линиях клетчатой бумаги со стороной клетки 1, а вершины — в узлах сетки, причём ломаные начинаются и заканчиваются в данном узле сетки, равно $(C_{2n}^n)^2$ ». Но при этом имеются в виду не ломаные, а именно маршруты: одна и та же ломаная, которая обходится в разных направлениях, считается за две ломаные; более того, по одному и тому же участку ломаной можно проходить много раз и при этом, возможно, эту ломаную придётся считать за несколько ломаных. — *Прим. ред.*

4. Имеется 100 точек на плоскости, причём расстояние между любыми двумя из них не превосходит 1, и если A, B, C — любые три точки из данных, то треугольник ABC — тупоугольный. Доказать, что можно провести такую окружность радиуса $1/2$, что все данные точки лежат внутри неё или на ней самой.

5. На шахматной доске выбраны две клетки одинакового цвета. Доказать, что ладья, начиная с первой, может обойти все клетки по разу, а на второй выбранной клетке побывать два раза.

8 класс

1. Дан треугольник ABC и точка O . M_1, M_2, M_3 — центры тяжести треугольников OAB, OBC, OCA соответственно. Доказать, что площадь треугольника $M_1M_2M_3$ равна $1/9$ площади ABC .

2. Играют двое; один из них загадывает набор из целых чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) — однозначных, как положительных, так и отрицательных. Второму разрешается спрашивать, чему равна сумма $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, где (a_1, \dots, a_n) — любой набор. Каково наименьшее число вопросов, за которое отгадывающий узнает задуманный набор?

3. См. задачу 3 для 7 класса.

4. Доказать, что ладья может обойти все клетки прямоугольной шахматной доски, побывав на каждой клетке ровно один раз, и вернуться в начальную клетку, если только число клеток на доске чётное.

5. Два отрезка натурального ряда из 1961 числа подписаны один под другим. Доказать, что каждый из них можно так переставить, что если сложить числа, стоящие одно под другим, получится снова отрезок натурального ряда.

9 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса.

2. См. задачу 2 для 8 класса.

3. Доказать, что можно расположить числа от 1 до n^2 в таблицу $n \times n$, чтобы суммы чисел каждого столбца были равны.

4. В автобусе без кондуктора едут $4k$ пассажиров. У каждого из них есть только монеты в 10, 15, 20 копеек. Доказать, что если общее число монет меньше $5k$, то пассажиры не смогут правильно расплатиться за проезд¹. Для числа монет $5k$ построить пример, когда возможен правильный расчёт.

5. На плоскости дано N точек. Если A, B, C — любые три из них, то внутри треугольника ABC нет ни одной точки из данных. Доказать, что эти точки можно занумеровать так, что многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ будет выпуклым.

10 класс

1. Дана последовательность чисел U_1, U_2, \dots ; $U_1 = U_2 = 1$ и $U_{n+2} = U_n + U_{n+1}$. Доказать, что U_{5k} делится на 5 при $k = 1, 2, \dots$

2. На плоскости проведено несколько полос разной ширины. Никакие две из них не параллельны. Как нужно сдвинуть их параллельно самим себе, чтобы площадь их общей части была наибольшей?

3. k человек ехали в автобусе без кондуктора, и у всех них были монеты только достоинством в 10, 15, 20 копеек. Известно, что каждый уплатил за проезд¹ и получил сдачу. Доказать, что наименьшее число монет, которое они могли иметь, равно $k + \left[\frac{k+3}{4} \right]$, где значок $[a]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее a .

4. Окружность S и точка O лежат в одной плоскости, причём O находится вне окружности. Построим произвольный шар, проходящий через окружность S , и опишем конус с вершиной в точке O и касающийся шара. Найти геометрическое место центров окружностей, по которым конусы касаются шаров.

¹ Проезд в автобусе стоит 5 копеек. — Прим. ред.

5. Известно, что $Z_1 + \dots + Z_n = 0$, где Z_k — комплексные числа. Доказать, что среди этих чисел найдутся два таких, что разность их аргументов больше или равна 120° .

Второй тур

7 класс

1. Стороны произвольного выпуклого многоугольника покрашены снаружи. Проводится несколько диагоналей многоугольника, так, что никакие три не пересекаются в одной точке. Каждая из этих диагоналей тоже покрашена с одной стороны, т. е. с одной стороны отрезка проведена узкая цветная полоска. Доказать, что хотя бы один из многоугольников, на которые разбит диагоналями исходный многоугольник, весь покрашен снаружи.

2. В квадрате $ABCD$ на стороне AB взята точка P , на стороне BC — точка Q , на стороне CD — точка R , на стороне DA — S ; оказалось, что фигура $PQRS$ — прямоугольник. Доказать, что тогда прямоугольник $PQRS$ — либо квадрат, либо обладает тем свойством, что его стороны параллельны диагоналям квадрата.

3. Доказать, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел обязательно найдётся такое, у которого сумма цифр делится на 11.

4. Дана таблица 4 на 4 клетки, в некоторых клетках которой поставлено по звёздочке. Показать, что можно так расставить семь звёздочек, что при вычёркивании любых двух строк и любых двух столбцов этой таблицы в оставшихся клетках всегда была бы хотя бы одна звёздочка. Доказать, что если звёздочек меньше, чем семь, то всегда можно так вычеркнуть две строки и два столбца, что все оставшиеся клетки будут пустыми.

5. Доказать, что не существует целых чисел a, b, c, d , удовлетворяющих равенствам:

$$abcd - a = 1961, \quad abcd - c = 61,$$

$$abcd - b = 961, \quad abcd - d = 1.$$

8 класс

1. Дана фигура, состоящая из 16 отрезков (рис. 2). Доказать, что нельзя провести ломаную, пересекающую каждый из отрезков ровно один раз.

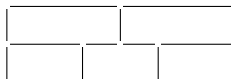


Рис. 2

Ломаная может быть незамкнутой и самопересекающейся, но её вершины не должны лежать на отрезках, а стороны — проходить через вершины фигуры.

2. С центрами в вершинах прямоугольника построены четыре окружности с радиусами r_1, r_2, r_3, r_4 , причём $r_1 + r_3 = r_2 + r_4 < d$; d — диагональ прямоугольника. Проводятся две пары внешних касательных к окружностям 1, 3 и 2, 4. Доказать, что в четырёхугольник, образованный этими четырьмя прямыми, можно вписать окружность.

3. См. задачу 3 для 7 класса.

4. См. задачу 4 для 7 класса.

5. Дана четвёрка чисел a, b, c, d . Из неё получается новая ab, bc, cd, da по следующему правилу: каждое число умножается на следующее, четвёртое — на первое. Из новой четвёрки по этому же правилу получается третья и т. д. Доказать, что в полученной последовательности четвёрок никогда не встретится вновь четвёрка a, b, c, d , кроме случая¹, когда $a = b = c = d = 1$.

9 класс

1. Точки A и B движутся равномерно и с равными угловыми скоростями по окружностям O_1 и O_2 соответственно (по часовой стрелке). Доказать, что вершина C правильного треугольника ABC также движется равномерно по некоторой окружности.²

¹ Ещё, конечно, возможен случай, когда $a = b = c = d = 0$. — Прим. ред.

² Если точки A и B в какой-то момент совпадают, то предполагается, что точка C в этот момент совпадает с ними. — Прим. ред.

2. В клетки таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторого столбца или некоторой строки. Доказать, что многократным повторением этой операции можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел, стоящих в любом столбце и любой строке, неотрицательны.

3. n точек соединены отрезками так, что каждая точка с чем-нибудь соединена и нет таких двух точек, которые соединялись бы двумя разными путями. Доказать, что общее число отрезков равно $n - 1$.

4. a, b, p — любые числа. Доказать, что найдутся взаимно простые k, l такие, что $ak + bl$ делится на p .

5. Коля и Петя делят $2n + 1$ орехов, $n \geq 2$, причём каждый хочет получить возможно больше. Предполагаются три способа дележа (каждый проходит в три этапа).

1-й этап: Петя делит все орехи на две части, в каждой не меньше двух орехов.

2-й этап: Коля делит каждую часть снова на две, в каждой не меньше одного ореха.

1-й и 2-й этапы общие для всех трёх способов.

3-й этап. При первом способе Коля берёт большую и меньшую части.

При втором способе Коля берёт обе средние части.

При третьем способе Коля берёт либо большую и меньшую части, либо обе средние части, но за право выбора отдаёт Пете один орех.

Определить, какой способ самый выгодный для Коли и какой наименее выгоден для него.

10 класс

1. Доказать, что для любых трёх бесконечных последовательностей натуральных чисел

$$a_1 \dots a_n \dots$$

$$b_1 \dots b_n \dots$$

$$c_1 \dots c_n \dots$$

найдутся такие номера p и q , что

$$a_p \geq a_q, \quad b_p \geq b_q, \quad c_p \geq c_q.$$

2. В прямоугольник со сторонами 20 и 25 бросают 120 квадратов со стороной 1. Доказать, что в прямоугольник можно поместить круг диаметра 1, не пересекающийся ни с одним из квадратов.

3. См. задачу 2 для 9 класса.

4. Расстояние от фиксированной точки P плоскости до двух вершин A, B равностороннего треугольника ABC равны $AP = 2$; $BP = 3$. Определить, какую максимальную длину может иметь отрезок PC .

5. Дан произвольный набор из $+1$ и -1 длиной 2^k . Из него получается новый по следующему правилу: каждое число умножается на следующее за ним; последнее 2^k -е число умножается на первое. С новым набором из 1 и -1 предельвается то же самое и т. д. Доказать, что в конце концов получается набор, состоящий из одних единиц.

1962 год (XXV олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Дана прямая l , перпендикулярная отрезку AB и пересекающая его. Для любой точки M прямой l строится такая точка N , что $\angle NAB = 2\angle MAB$; $\angle NBA = 2\angle MBA$. Доказать, что абсолютная величина разности $AN - BN$ не зависит от выбора точки M на прямой l .¹

2. Правильный треугольник, одна сторона которого отмечена, отражается симметрично относительно одной из своих сторон. Полученный треугольник в свою очередь отражается и т. д., пока на некотором шаге треугольник не придёт в первоначальное положение. Доказать, что при

¹ Точка N существует только если $2(\angle MAB + \angle MBA) < 180^\circ$, т. е. когда угол AMB тупой.— *Прим. ред.*

этом отмеченная сторона также займёт исходное положение.

3. Пусть a, b, c, d — стороны четырёхугольника, не являющегося ромбом. Доказать, что из отрезков a, b, c, d можно сложить самопересекающийся четырёхугольник.

4. Сумму цифр числа a обозначим через $S(a)$. Доказать, что если $S(a) = S(2a)$, то число a делится на 9.

5. Даны n карточек; на обеих сторонах каждой карточки написано по одному из чисел $1, 2, \dots, n$, причём так, что каждое число встречается на всех n карточках ровно два раза. Доказать, что карточки можно разложить на столе так, что сверху окажутся все числа: $1, 2, \dots, n$.

8 класс

1. На сторонах AB, BC, CA правильного треугольника ABC найти такие точки X, Y, Z (соответственно), чтобы площадь треугольника, образованного прямыми CX, BZ, AY , была вчетверо меньше площади треугольника ABC и чтобы было выполнено условие:

$$\frac{AX}{XB} = \frac{BY}{YC} = \frac{CZ}{ZA}.$$

2. См. задачу 2 для 7 класса.

3. Доказать, что для любого целого d найдутся такие целые m, n , что

$$d = \frac{n - 2m + 1}{m^2 - n}.$$

4. См. задачу 4 для 7 класса.

5. См. задачу 5 для 7 класса.

9 класс

1. Даны два пересекающихся отрезка AB и CD . На отрезках выбираются точки M и N (соответственно) так, что $AM = CN$. Найти положение точек M и N , при котором длина отрезка MN минимальна.

2. «Конём» называется фигура, ход которой состоит в перемещении на n клеток по горизонтали и на 1 по верти-

лы падения и отражения равны.) Доказать, что при этом длина пути шара не зависит от выбора начальной точки.

2. ABC — равнобедренный треугольник; $AB=BC$, BH — высота, M — середина стороны AB , K — точка пересечения BH с окружностью, проходящей через B , M и C . Доказать, что $BK = \frac{3}{2}R$, где R — радиус описанной около треугольника ABC окружности.

3. «Уголком» называется фигура, составленная из трёх квадратов со стороной 1 в виде буквы «Г». Доказать, что прямоугольник размерами 1961×1963 нельзя разбить на уголки, а прямоугольник размерами 1963×1965 — можно.

4. Дано число $100...01$; число нулей в нём равно 1961. Докажите, что это число — составное.

5. На плоскости даны 25 точек; известно, что из любых трёх точек можно выбрать две, расстояние между которыми меньше 1. Доказать, что среди данных точек найдутся 13, лежащие в круге радиуса 1.

8 класс

1. Проведём в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

2. Как надо расположить числа $1, 2, \dots, 1962$ в последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{1962}$, чтобы сумма

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{1961} - a_{1962}| + |a_{1962} - a_1|$$

была наибольшей?

3. В окружность вписан неправильный n -угольник, который при повороте окружности около центра на некоторый угол $\alpha \neq 2\pi$ совмещается сам с собой. Доказать, что n — число составное.

4. Из чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 можно образовать десять попарных сумм; обозначим их через a_1, a_2, \dots, a_{10} . Дока-

зять, что зная числа a_1, a_2, \dots, a_{10} (но не зная, разумеется, суммой каких именно двух чисел является каждое из них), можно восстановить числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

5. Две окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и P . Обозначим через MA хорду окружности S_1 , касающуюся окружности S_2 в точке M , а через MB — хорду окружности S_2 , касающуюся окружности S_1 в точке M . На прямой MP отложен отрезок $PN = MP$. Доказать, что четырёхугольник $MANB$ можно вписать в окружность.

9 класс

1. Школьник в течение учебного года должен решать ровно по 25 задач за каждые идущие подряд 7 дней. Время, необходимое на решение одной задачи (любой), не меняется в течение дня, но меняется в течение учебного года по известному школьнику закону и всегда меньше 45 минут. Школьник хочет затратить на решение задач в общей сложности наименьшее время. Доказать, что для этого он может выбрать некоторый день недели и в этот день (каждую неделю) решать по 25 задач.

2. См. задачу 2 для 8 класса, где вместо чисел 1, 2, ..., 1962 взяты 25 произвольных различных чисел.

3. Стороны выпуклого многоугольника, периметр которого равен 12, отодвигаются на расстояние $d = 1$ во внешнюю сторону. Доказать, что площадь многоугольника увеличится по крайней мере на 15.

4. См. задачу 4 для 8 класса.

5. Даны 2^n конечных последовательностей из нулей и единиц, причём ни одна из них не является началом никакой другой. Доказать, что сумма длин этих последовательностей не меньше $n \cdot 2^n$.

10 класс

1. На данной прямой l , проходящей через центр O данной окружности, фиксирована точка C (расположенная внутри окружности — Прим. ред.). Точки A и A' распо-

жены на окружности по одну сторону от l так, что углы, образованные прямыми AC и $A'C$ с прямой l , равны. Обозначим через B точку пересечения прямых AA' и l . Доказать, что положение точки B не зависит от точки A .

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. См. задачу 3 для 9 класса.

4. Как надо расположить в пространстве прямоугольный параллелепипед, чтобы площадь его проекции на горизонтальную плоскость была наибольшей?

5. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым другим одну партию. Доказать, что участников можно так занумеровать, что окажется, что ни один участник не проиграл непосредственно за ним следующему.

1963 год (XXVI олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Из вершины B произвольного треугольника ABC проведены вне треугольника прямые BM и BN , так что $\angle ABM = \angle CBN$. Точки A' и C' симметричны точкам A и C относительно прямых BM и BN (соответственно). Доказать, что $AC' = A'C$.

2. a, b, c — такие три числа, что $a + b + c = 0$. Доказать, что в этом случае справедливо соотношение $ab + ac + bc \leq 0$.

3. Имеется 200 карточек размером 1×2 , на каждой из которых написаны числа $+1$ и -1 (см. рис. 3). Можно ли так заполнить этими карточками лист клетчатой бумаги размером 4×100 , чтобы произведения чисел в каждом столбце и каждой строке образовавшейся таблицы были положительны? (Карточка занимает целиком две соседние клетки.)

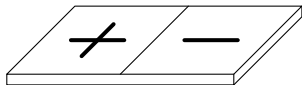


Рис. 3

4. См. задачу 4 для 8 класса.

5. Можно ли так провести прямую по листу клетчатой бумаги размером 20×30 , чтобы она пересекла 50 клеток?

8 класс

1. a_1, a_2, \dots, a_n — такие числа, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$. Доказать, что в этом случае справедливо соотношение:

$$S = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n \leq 0;$$

в сумму S входят все возможные произведения $a_i a_j$, $i \neq j$ (ср. с задачей 2 для 7 класса).

2. Даны выпуклый четырёхугольник $ABCD$ площади s и точка M внутри него. Точки P, Q, R, S симметричны точке M относительно середин сторон четырёхугольника $ABCD$. Найти площадь четырёхугольника $PQRS$.

3. Решить в целых числах уравнение

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3.$$

4. На плоскости даны 7 прямых, никакие две из которых не параллельны. Доказать, что найдутся две из них, угол между которыми меньше 26° .

5. Лист клетчатой бумаги размером $5 \times n$ заполнен карточками размером 1×2 так, что каждая карточка занимает целиком две соседние клетки. На каждой карточке написаны числа $+1$ и -1 (см. рис. 3). Известно, что произведения чисел по строкам и столбцам образовавшейся таблицы положительны. При каких n это возможно?

9 класс

1. Первый член и разность арифметической прогрессии — целые числа. Доказать, что найдётся такой член прогрессии, в записи которого участвует цифра 9.

2. См. задачу 5 для 8 класса.

3. a, b, c — любые положительные числа. Доказать, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

4. Из любых четырёх точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно так выбрать три, что треугольник с вершинами в этих точках имеет хотя бы один угол, не больший 45° . Доказать. (Ср. с задачей 2 для 10 класса.)

5. Можно ли в прямоугольник с отношением сторон $9:16$ вписать прямоугольник с отношением сторон $4:7$ (так, чтобы на каждой стороне первого прямоугольника лежала вершина второго)?

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. Из любых шести точек на плоскости (из которых никакие три не лежат на одной прямой) можно так выбрать три, что треугольник с вершинами в этих точках имеет хотя бы один угол, не больший 30° . Доказать.

3. Какое наибольшее число клеток может пересечь прямая, проведённая на листе клетчатой бумаги размером $m \times n$ клеток?

4. a, b, c — такие три числа, что $abc > 0$ и $a + b + c > 0$. Доказать, что $a^n + b^n + c^n > 0$ при любом натуральном n .

5. Дан произвольный треугольник ABC . Найти множество всех таких точек M , что перпендикуляры к прямым AM, BM, CM , проведённые из точек A, B, C (соответственно), пересекаются в одной точке.

11 класс

1. Положительные числа x, y, z обладают тем свойством, что

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z < \pi.$$

Доказать, что сумма этих чисел больше их произведения.

2. Дана система из 25 различных отрезков с общим началом в данной точке A и с концами на прямой l , не проходящей через эту точку. Доказать, что не существует замкнутой 25-звенной ломаной, для каждого звена кото-

рой нашёлся бы отрезок системы, равный и параллельный этому звену.

3. См. задачу 5 для 10 класса.

4. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составляются всевозможные семизначные числа, в записи которых каждая из этих цифр встречается ровно один раз. Доказать, что сумма всех таких чисел делится на 9.

5. Каждое ребро правильного тетраэдра разделено на три равные части. Через каждую полученную точку деления проведены две плоскости, параллельные соответственно двум граням тетраэдра, не проходящим через эту точку. На сколько частей построенные плоскости разбивают тетраэдр?

Второй тур

7 класс

1. Завод выпускает погремушки в виде кольца с надетыми на него 3 красными и 7 синими шариками. Сколько различных погремушек может быть выпущено? (Две погремушки считаются одинаковыми, если одна из них может быть получена из другой только передвижением шариков по кольцу и переворачиванием.)

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. Дан произвольный треугольник ABC и проведена такая прямая, пересекающая¹ треугольник, что расстояние от неё до точки A равно сумме расстояний до этой прямой от точек B и C . Доказать, что все такие прямые проходят через одну точку.

¹ В действительности нужно дополнительно потребовать, чтобы прямая не только пересекала треугольник, но и точки B и C лежали по одну сторону от неё. Иначе можно взять, например, прямую, проходящую через середину отрезка BC , и точку A , расстояние от которой до этой прямой вдвое больше расстояний от точек B и C . Эта прямая не проходит через точку пересечения медиан треугольника ABC , через которую проходят многие другие из рассматриваемых прямых. — *Прим. ред.*

4. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора $1, 2, \dots, 1963$, чтобы сумма любых двух выбранных чисел делилась на 26?

5. Система точек, соединённых отрезками, называется «связной», если из любой точки можно пройти в любую другую по этим отрезкам. Можно ли соединить пять точек в связную систему так, чтобы при стирании любого отрезка образовались ровно две связные системы точек, не связанные друг с другом? (Мы считаем, что в местах пересечения отрезков переход с одного из них на другой невозможен.)

8 класс

1. a_1, a_2, \dots, a_n — произвольные положительные числа. Обозначим через b_k количество чисел из набора a_1, a_2, \dots, a_n , удовлетворяющих условию: $a_i \geq k$. Доказать, что

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots$$

2. В таблицу 8×8 вписаны все целые числа от 1 до 64. Доказать, что при этом найдутся два соседних числа, разность между которыми не меньше 5. (Соседними называются числа, стоящие в клетках, имеющих общую сторону.)

3. Найти множество центров тяжести всех остроугольных треугольников, вписанных в данную окружность.

4. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора $1, 2, \dots, 1963$, чтобы сумма никаких двух чисел не делилась на их разность?

5. По аллее длиной 100 метров идут три человека со скоростями 1, 2 и 3 км/час. Дойдя до конца аллеи, каждый из них поворачивает и идёт назад с той же скоростью. Доказать, что найдётся отрезок времени в 1 минуту, когда все трое будут идти в одном направлении.

9 класс

1. Дан произвольный треугольник ABC и точка X вне его. AM, BN, CQ — медианы треугольника ABC . Доказать,

что площадь одного из треугольников XAM , XBN , XCQ равна сумме площадей двух других.

2. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая 14-звенная ломаная, проходящая по линиям клетчатой бумаги так, что ни на какой линии не лежит более одного звена ломаной?

3. В правильном 10-угольнике проведены все диагонали. Сколько попарно неподобных треугольников может при этом образоваться?

4. В таблицу 9×9 вписаны все целые числа от 1 до 81. Доказать, что найдутся два соседних¹ числа, разность между которыми не меньше 6. (Ср. с задачей 2 для 8 класса.)

5. См. задачу 5 для 8 класса.

10 класс

1. Доказать, что при нечётном² n уравнение $x^n + y^n = z^n$ не может иметь решений в целых числах, если $(x + y)$ — простое число.

2. На листе бумаги нанесена сетка из n горизонтальных и n вертикальных прямых. Сколько различных $2n$ -звенных замкнутых ломаных можно провести по линиям сетки, так чтобы каждая ломаная проходила по всем горизонтальным и всем вертикальным прямым?

3. Из центра правильного 25-угольника проведены векторы во все его вершины. Как надо выбрать несколько векторов из этих 25, чтобы их сумма имела наибольшую длину?

4. A', B', C', D', E' — середины сторон выпуклого пятиугольника $ABCDE$. Доказать, что площади пятиугольников $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ связаны соотношением:

$$S_{A'B'C'D'E'} \geq \frac{1}{2} S_{ABCDE}.$$

¹ Два числа считаются соседними, если клетки таблицы, в которых они стоят, имеют общую сторону. — *Прим. ред.*

² Предполагается, что $n \neq 1$. — *Прим. ред.*

5. Последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ образуется следующим образом:

$$a_1 = a_2 = 1; \quad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}} \quad (n \geq 3).$$

Доказать, что все числа в последовательности — целые.

11 класс

1. Доказать, что не существует попарно различных натуральных чисел x, y, z, t , для которых было бы справедливо соотношение

$$x^x + y^y = z^z + t^t.$$

2. Доказать, что из одиннадцати произвольных бесконечных десятичных дробей можно выбрать две дроби, разность которых имеет в десятичной записи либо бесконечное число нулей, либо бесконечное число девяток.

3. Найти все многочлены $P(x)$, для которых справедливо тождество:

$$x \cdot P(x-1) \equiv (x-26) \cdot P(x).$$

4. См. задачу 4 для 10 класса.

5. Доказать, что на сфере нельзя так расположить три дуги¹ в 300° каждая, чтобы никакие две из них не имели ни общих точек, ни общих концов.

1964 год (XXVII олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. В треугольнике ABC высоты, опущенные на стороны AB и BC , не меньше этих сторон соответственно. Найти углы треугольника.

¹ Имеются в виду дуги больших окружностей, центры которых совпадают с центром сферы. — Прим. ред.

2. На данной окружности выбраны диаметрально противоположные точки A и B и третья точка C . Касательная, проведённая к окружности в точке A , и прямая BC пересекаются в точке M . Доказать, что касательная, проведённая к окружности в точке C , делит пополам отрезок AM .

3. Доказать, что сумма цифр числа, являющегося точным квадратом, не может равняться пяти.

4. На листе бумаги проведено 11 горизонтальных и 11 вертикальных прямых, точки пересечения которых называются «узлами», «звеном» мы будем называть отрезок прямой, соединяющий два соседних узла одной прямой. Какое наименьшее число звеньев надо стереть, чтобы после этого в каждом узле сходилась не более трёх звеньев?

5. Последовательность a_0, a_1, a_2, \dots образована по закону: $a_0 = a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} + 1$. Доказать, что число a_{1964} не делится на 4.

8 класс

1. См. задачу 1 для 7 класса.

2. Найти все такие натуральные числа n , что число $(n-1)!$ не делится на n^2 .

3. Решить в целых числах уравнение:

$$\underbrace{\sqrt{n + \sqrt{n + \dots + \sqrt{n}}}}_{1964 \text{ раза}} = m.$$

4. В шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны. Доказать, что длины сторон такого шестиугольника удовлетворяют соотношениям: $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$.

5. Рассмотрим суммы цифр всех чисел от 1 до 1 000 000 включительно. У полученных чисел вновь рассмотрим сумму цифр и так далее, пока не получим миллион однозначных чисел. Каких чисел больше среди них — единиц или двоек?

9 класс

1. Решить в положительных числах систему:

$$\begin{cases} x^y = z, \\ y^z = x, \\ z^x = y. \end{cases}$$

2. Доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел не является степенью никакого целого числа.

3. Известно, что при любом целом $K \neq 27$ число $a - K^3$ делится без остатка на $27 - K$. Найти a .

4. См. задачу 4 для 8 класса. Кроме того, доказать, что если длины отрезков a_1, \dots, a_6 удовлетворяют соотношениям: $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$, то из этих отрезков можно построить равноугольный шестиугольник.

5. В четырёхугольнике $ABCD$ из вершин A и C проведены перпендикуляры на диагональ BD , а из вершин B и D проведены перпендикуляры на диагональ AC . Доказать, что четырёхугольники $ABCD$ и $MNPQ$ подобны. (M, N, P и Q — основания перпендикуляров, проведённых из вершин A, B, C и D соответственно.)

10–11 класс

1. Число N является точным квадратом и не заканчивается нулём. После зачёркивания у этого числа двух последних цифр снова получится точный квадрат. Найти наибольшее число N с таким свойством.

2. См. задачу 3 для 8 класса.

3. Известно, что при любом целом $K \neq 27$ число $a - K^{1964}$ делится без остатка на $27 - K$. Найти a (ср. задачу 3 для 9 класса).

4. См. задачу 4 для 8 класса.

5. На какое наименьшее число непересекающихся тетраэдров можно разбить куб?

Второй тур

7 класс

1. На отрезке AB выбрана произвольно точка C и на отрезках AB , AC и BC , как на диаметрах, построены окружности O_1 , O_2 и O_3 . Через точку C проводится произвольная прямая, пересекающая окружность O_1 в точках P и Q , а окружности O_2 и O_3 в точках R и S соответственно. Доказать, что $PR = QS$.

2. Собрались $2n$ человек, каждый из которых знаком не менее чем с n присутствующими. Доказать, что можно выбрать из них четырёх человек и рассадить их за круглым столом так, что при этом каждый будет сидеть рядом со своими знакомыми ($n \geq 2$).

3. В квадрате со стороной длины 1 выбрано 102 точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Доказать, что найдётся треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого меньше, чем $1/100$.

4. Через противоположные вершины A и C четырёхугольника $ABCD$ проведена окружность, пересекающая стороны AB , BC , CD и AD соответственно в точках M , N , P и Q . Известно, что $BM = BN = DP = DQ = R$, где R — радиус окружности. Доказать, что в таком случае сумма углов B и D данного четырёхугольника равна 120° .

5. При каких натуральных a существуют такие натуральные числа x и y , что $(x + y)^2 + 3x + y = 2a$?

8 класс

1. В n стаканах достаточно большой вместительности налито поровну воды. Разрешается переливать из любого стакана в любой другой столько воды, сколько имеется в этом последнем. При каких n можно в конечное число шагов слить воду в один стакан?

2. Даны три точки A , B , C , лежащие на одной прямой, и точка O вне этой прямой. Обозначим через O_1 , O_2 , O_3 центры окружностей, описанных около треугольников

ОАВ, ОАС, ОВС. Доказать, что точки O_1, O_2, O_3 и O лежат на одной окружности.

3. На квадратном поле размерами 99×99 , разграфлённом на клетки размерами 1×1 , играют двое. Первый игрок ставит крестик на центр поля; вслед за этим второй игрок может поставить нолик на любую из восьми клеток, окружающих крестик первого игрока, и т. д.¹ Первый игрок выигрывает, если ему удастся поставить крестик на любую угловую клетку. Доказать, что при любой игре второго игрока первый всегда может выиграть.

4. Внутри равностороннего (не обязательно правильно-го) семиугольника $A_1A_2 \dots A_7$ взята произвольно точка O . Обозначим через H_1, H_2, \dots, H_7 основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_7A_1$ соответственно. Известно, что точки H_1, H_2, \dots, H_7 лежат на самих сторонах, а не на их продолжениях. Доказать, что $A_1H_1 + A_2H_2 + \dots + A_7H_7 = H_1A_2 + H_2A_3 + \dots + H_7A_1$.

5. В квадрате со стороной 1 взята произвольно 101 точка (не обязательно внутри квадрата), причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Доказать, что существует треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше $1/60$.

9 класс

1. См. задачу 4 для 8 класса.

2. См. задачу 1 для 8 класса.

3. Доказать, что любое чётное число $2n \geq 0$ может быть единственным образом представлено в виде $2n = (x + y)^2 + 3x + y$, где x и y — целые неотрицательные числа.

4. В треугольнике ABC сторона BC равна полусумме двух других сторон. Доказать, что биссектриса угла A пер-

¹ Предполагается, что можно делать ход рядом с любой из уже занятых клеток, а не только рядом с клеткой, в которую был сделан предыдущий ход. — *Прим. ред.*

пендикулярна отрезку, соединяющему центры вписанной и описанной окружностей треугольника.

5. На клетчатой бумаге начерчена замкнутая ломаная с вершинами в узлах сетки, все звенья которой равны. Доказать, что число звеньев такой ломаной чётно.

10 класс

1. В n мензурок налиты n разных жидкостей, кроме того, имеется одна пустая мензурка. Можно ли за конечное число операций составить равномерные смеси в каждой мензурке, т. е. сделать так, чтобы в каждой мензурке было равно $1/n$ от начального количества каждой жидкости, и при этом одна мензурка была бы пустой?

Примечание. Мензурка¹ имеет деления, позволяющие отмерять объём налитой жидкости.

2. Дана система из n точек на плоскости, причём известно, что для любых двух точек данной системы можно указать движение плоскости, при котором первая точка перейдёт во вторую, а система перейдёт сама в себя. Доказать, что все точки такой системы лежат на одной окружности.

3. Дан треугольник ABC , причём сторона BC равна полусумме двух других сторон. Доказать, что в таком треугольнике вершина A , середины сторон AB и AC и центры вписанной и описанной окружностей лежат на одной окружности (ср. с задачей 4 для 9 класса).

4. См. задачу 3 для 9 класса.

5. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Доказать, что любое натуральное число встречается хотя бы на одной карточке.

¹ Предполагается также, что мензурки одинакового размера и почти заполнены жидкостью, т. е. нельзя слить всё в пустую мензурку, а затем разлить из неё поровну. — *Прим. ред.*

11 класс

1. Из точки O на плоскости проведено несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Доказать, что можно выбрать несколько векторов (или, быть может, один вектор), длина суммы которых больше 1.

2. См. задачу 3 для 9 класса.

3. В треугольнике ABC сторона BC равна полусумме двух других сторон. Через точку A и середины сторон AB и AC проведена окружность и к ней из центра тяжести треугольника проведены касательные. Доказать, что одна из точек касания является центром вписанной окружности треугольника ABC .

4. Пирог имеет форму правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Из середин сторон проведены прямолинейные надрезы длины 1. Доказать, что при этом от пирога будет отрезан какой-нибудь кусок.

5. При дворе короля Артура собрались $2n$ рыцарей, причём каждый из них имеет среди присутствующих не более $n - 1$ врага. Доказать, что Мерлин, советник Артура, может так рассадить рыцарей за круглым столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

*1965 год (XXVIII олимпиада)***Первый тур***8 класс*

1. Даны окружность O , прямая a , пересекающая её, и точка M . Через точку M провести секущую b так, чтобы её часть, заключённая внутри окружности O , делилась пополам в точке её пересечения с прямой a .

2. Докажите следующий признак делимости на 37. Для того, чтобы узнать, делится ли число на 37, надо разбить его на грани справа налево по три цифры в каждой грани. Если сумма полученных трёхзначных чисел делится на 37, то и данное число делится на 37. (Слово «трёхзначные» употреблено условно: некоторые из граней могут на-

чинаться с нулей и быть на самом деле двузначными или меньше; не трёхзначной будет и самая левая грань, если количество цифр нашего числа не делится на 3.)

3. Дана прямая a и два непараллельных отрезка AB и CD по одну сторону от неё. Найти на прямой a такую точку M , чтобы треугольники ABM и CDM были равновелики.

4. 30 команд участвуют в розыгрыше первенства по футболу. Доказать, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

9 класс

1. Шестизначное число делится на 37. Все его цифры различны. Доказать, что из тех же цифр можно составить и другое шестизначное число, тоже делящееся на 37.

2. Внутри данного треугольника ABC найти такую точку O , чтобы площади треугольников AOB , BOC , COA относились как $1:2:3$.

3. Дан треугольник ABC , в котором сторона AB больше BC . Проведены биссектрисы AK и CM (K лежит на BC , M лежит на AB). Доказать, что отрезок AM больше MK , а отрезок MK больше KC .

4. В стране Иллирии некоторые пары городов связаны прямым воздушным сообщением. Докажите, что там есть два города, связанные с равным количеством других городов.

5. Вдоль коридора положено несколько кусков ковровой дорожки. Куски покрывают весь коридор из конца в конец без пропусков и даже налегают друг на друга, так что над некоторыми местами пола они лежат в несколько слоев. Доказать, что можно убрать несколько кусков, возможно, достав их из-под других и оставив остальные в точности на тех же местах, где они лежали прежде, так что коридор по-прежнему будет полностью покрыт, и общая длина оставленных кусков будет меньше удвоенной длины коридора.

10 класс

1. Окружности O_1 и O_2 лежат внутри треугольника и касаются друг друга извне, причём окружность O_1 касается двух сторон треугольника, а окружность O_2 — тоже касается двух сторон треугольника, но не тех же, что O_1 . Доказать, что сумма радиусов этих окружностей больше радиуса окружности, вписанной в треугольник.

2. Шестизначное число делится на 37 и имеет хотя бы две различные цифры. Его первая и четвёртая цифры — не нули. Докажите, что, переставив цифры в данном числе, можно получить другое число, тоже делящееся на 37 и не начинающееся с нуля.

3. Концы отрезка постоянной длины скользят по сторонам данного угла. Из середины этого отрезка к нему восстановлен перпендикуляр. Докажите, что отрезок перпендикуляра от его основания до точки пересечения с биссектрисой угла имеет постоянную длину.

4. X — число, большее двух. Некто пишет на карточках числа: $1, X, X^2, X^3, X^4, \dots, X^k$ (каждое число только на одной карточке). Потом часть карточек он кладёт себе в правый карман, часть в левый, остальные выбрасывает. Докажите, что сумма чисел в правом кармане не может быть равна сумме чисел в левом.

5. Бумажный квадрат был проколот в 1965 точках. Из точек-проколов и вершин квадрата никакие три не лежат на одной прямой. Потом сделали несколько прямолинейных не пересекающихся между собой разрезов, каждый из которых начинался и кончался только в проколотых точках или вершинах квадрата. Оказалось, что квадрат разрезан на треугольники, внутри которых проколов нет. Сколько было сделано разрезов и сколько получилось треугольников?

11 класс

1. Все коэффициенты многочлена равны единице, нулю или минус единице. Докажите, что все его действи-

тельные корни (если они существуют) заключены в отрезке от минус двух до плюс двух.

2. На плоскости даны три точки. Построить три окружности, касающиеся друг друга в этих точках. Разобрать все случаи.

3. В квадратном уравнении $x^2 + px + c = 0$ коэффициенты p, c независимо пробегают все значения от минус единицы до плюс единицы включительно. Найти множество значений, которые при этом принимает действительный корень данного уравнения.

4. Даны окружность O , точка A , лежащая на ней, перпендикуляр к плоскости окружности O , восстановленный из точки A , и точка B , лежащая на этом перпендикуляре. Найдите геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые, проходящие через точку B и произвольную точку окружности O .

5. Даны двадцать карточек. Каждая из цифр от нуля до девяти включительно написана на двух из этих карточек (на каждой карточке — только одна цифра). Можно ли расположить эти карточки в ряд так, чтобы нули стояли рядом, между единицами лежала ровно одна карточка, между двойками — две, и так далее до девяток, между которыми должно быть девять карточек?

Второй тур

8 класс

1. Дана последовательность $\dots, a_{-n}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, бесконечная в обе стороны, причём каждый её член равен $\frac{1}{4}$ суммы двух соседних. Доказать, что если какие-то два её члена равны, то в ней есть бесконечное число пар равных между собой чисел. (Пояснение: два члена, про которые известно, что они равны, не обязательно соседние).

2. Дан прямоугольный бильярд размером¹ 26×1965 . Из нижней левой лузы под углом 45° к бортам выпуска-

¹ 26 — размер по вертикали, 1965 — по горизонтали. — *Прим. ред.*

ется шар. Доказать, что после нескольких отражений от бортов он упадёт в верхнюю левую лузу. (Угол падения равен углу отражения).

3. Два неравных картонных диска разделены на 1965 равных секторов. На каждом из дисков произвольно выбраны 200 секторов и раскрашены в красный цвет. Меньший диск наложен на больший, так что их центры совпадают, а секторы целиком лежат один против другого. Меньший диск поворачивают на всевозможные углы, кратные $\frac{1}{1965}$ части окружности, оставляя больший диск неподвижным. Доказать, что по крайней мере при 60 положениях на дисках совпадут не более 20 красных секторов.

4. Посередине между двумя параллельными улицами стоят в один ряд одинаковые дома со стороной, равной a . Расстояние между улицами — $3a$, а расстояние между двумя соседними домами — $2a$. Одна улица патрулируется полицейскими, которые движутся на расстоянии $9a$ друг от друга со скоростью v . К тому времени, как первый полицейский проходит мимо середины некоторого дома, точно напротив него на другой улице появляется гангстер. С какой постоянной скоростью и в какую сторону должен двигаться по этой улице гангстер, чтобы ни один полицейский его не заметил?

9 класс

1. Имеется 11 мешков монет. В 10 из них монеты настоящие, а в одном — все монеты фальшивые. Все настоящие монеты одного веса, все фальшивые монеты — также одного, но другого веса. Имеются весы, с помощью которых можно определить, какой из двух грузов тяжелее и на сколько. Двумя взвешиваниями определить, в каком мешке фальшивые монеты.

2. Дан бильярд прямоугольной формы. В его углах имеются лузы, попадая в которые шарик останавливается. Шарик выпускают из одного угла бильярда под углом 45° к стороне. В какой-то момент он попал в середину

некоторой стороны. Доказать, что в середине противоположной стороны он побывать не мог.

3. См. задачу 1 для 8 класса.

4. См. задачу 2 для 10 класса.

5. Найти геометрическое место центров равносторонних треугольников, описанных около данного произвольного треугольника.

10 класс

1. Имеется 11 мешков с монетами и весы с двумя чашками и стрелкой, которые показывают, на какой чашке груз тяжелее и на сколько именно. Известно, что в одном мешке все монеты фальшивые, а в остальных — все монеты настоящие. Все настоящие монеты имеют одинаковый вес, а все фальшивые — также одинаковый, но другой вес. За какое наименьшее число взвешиваний можно определить, в каком мешке лежат фальшивые монеты?

2. На лист клетчатой бумаги размером $n \times n$ клеток кладутся чёрные и белые кубики, причём каждый кубик занимает ровно одну клетку. Первый слой кубиков положили произвольно, а затем вспомнили, что каждый чёрный кубик должен граничить с чётным числом белых, а каждый белый — с нечётным числом чёрных. Кубики во второй слой положили так, чтобы для всех кубиков первого слоя выполнялось это условие. Если для всех кубиков второго слоя это условие уже выполняется, то больше кубиков не кладут, если же нет, то кладут третий слой так, чтобы для всех кубиков второго слоя выполнялось это условие, и так далее. Существует ли такое расположение кубиков первого слоя, что этот процесс никогда не кончится?

3. В прямоугольном бильярде размером $p \times 2q$, где p и q — целые нечётные числа, сделаны лузы в каждом углу и в середине каждой стороны длиной $2q$. Из угла выпущен шарик под углом 45° к стороне. Доказать, что шарик обязательно попадёт в одну из средних луз.

4. Все целые числа от 1 до $2n$ выписаны в строчку. Затем к каждому числу прибавили номер того места, на котором оно стоит. Доказать, что среди полученных сумм найдутся хотя бы две, дающие при делении на $2n$ одинаковый остаток.

5. В ящике лежат два ящика поменьше, в каждом из них ещё по два ящика и т. д. n раз. В каждом из 2^n маленьких ящиков лежит по монете, причём одни вверх гербом, а остальные — вверх решкой. За один ход разрешается переворачивать один любой ящик вместе со всем, что в нём лежит. Доказать, что не больше, чем за n ходов можно расположить ящики так, что число монет, лежащих вверх гербом, будет равно числу монет, лежащих вверх решкой.

11 класс

1. Найдите все простые числа вида $P^P + 1$ (P — натуральное), содержащие не более 19 цифр.

2. Докажите, что последние цифры чисел n^n (n — натуральное) образуют периодическую последовательность.

3. Дана плоскость P и две точки по разные стороны от неё. Построить сферу, проходящую через эти точки, отсекающую из P наименьший круг.

4. Дан многоугольник на плоскости, невыпуклый и несамопересекающийся. D — множество точек, принадлежащих тем диагоналям многоугольника, которые не выходят за его пределы (то есть лежат либо целиком внутри, либо частью внутри, частью на контуре). Концы этих диагоналей тоже включаются в D . Докажите, что любые две точки из D можно соединить ломаной, целиком принадлежащей D .

5. В каждой клетке квадратной таблицы $M \times M$ клеток стоит либо натуральное число, либо нуль. При этом, если на пересечении строки и столбца стоит нуль, то сумма чисел в этой строке и этом столбце не меньше M . Докажите, что сумма всех чисел в таблице не меньше, чем $M^2/2$.

1966 год (XXIX олимпиада)

Первый тур

8 класс

1. Найти геометрическое место центров вписанных в треугольник ABC прямоугольников (одна сторона прямоугольника лежит на AB).

2. Найти все двузначные числа такие, что при умножении на некоторое целое число получается число, предпоследняя цифра которого — 5.

3. См. задачу 1 для 9–11 классов.

4. См. задачу 5 для 9–11 классов.

5. Из 28 костей домино убрали все кости с шестёрками. Можно ли остальные выложить в цепь?

9–11 класс

1. Решить в целых положительных числах систему

$$\begin{cases} x + y = zt, \\ z + t = xy. \end{cases}$$

2. При каком значении k величина $A_k = \frac{19^k + 66^k}{k!}$ максимальна?

3. Внутри окружности расположен выпуклый пятиугольник (вершины могут лежать как внутри, так и на окружности). Доказать, что хотя бы одна из его сторон не больше стороны правильного пятиугольника, вписанного в эту окружность.

4. Доказать, что те натуральные K , для которых $K^K + 1$ делится на 30, образуют арифметическую прогрессию. Найти её.

5. Какое максимальное число дамок можно поставить на чёрных полях шахматной доски размером 8×8 так, чтобы каждую дамку била хотя бы одна из остальных? Доказать, что больше нельзя.

Второй тур

8 класс

1. Разделить циркулем и линейкой отрезок на 6 равных частей, проводя не более 8 линий (прямых, окружностей).

2. Дано: $a_1 = 1$, $a_k = [\sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}]$. Найти a_{1000} .
Примечание. $[A]$ — целая часть A .

3. Из 19 шаров 2 радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). Доказать, что за 8 проверок всегда можно выделить оба радиоактивных шара.

4. Сеть метро имеет на каждой линии не менее 4 станций, из них не более трёх пересадочных. Ни на какой пересадочной станции не скрещиваются более двух линий. Какое наибольшее число линий может иметь такая сеть, если с любой станции на любую можно попасть, сделав не больше двух пересадок?

9–11 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса.

2. Дано: $a_1 = 1966$, $a_k = [\sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}]$. Найти a_{1966} .

3. Из 11 шаров два радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). Доказать, что менее чем за 7 проверок нельзя гарантировать нахождение обоих радиоактивных шаров.

4. Из набора гирь весом 1, 2, ..., 26 выделить шесть гирь так, чтобы из них нельзя было выбрать две кучки равного веса. Доказать, что нельзя выбрать семь гирь, обладающих тем же свойством.

5. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одно-

го расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

1967 год (XXX олимпиада)

Первый тур

8 класс

1. Существуют ли два последовательных натуральных числа таких, что сумма цифр каждого из них делится на 125? Найти наименьшую пару таких чисел, или доказать, что их не существует.

2. Дан треугольник ABC . Найти на прямой AB точку M такую, чтобы сумма радиусов окружностей, описанных вокруг треугольников ACM и BCM , была минимальна.

3. Для зашифровки телеграфных сообщений требуется разбить всевозможные десятизначные «слова» — наборы из десяти точек и тире — на две группы так, чтобы любые два слова одной группы отличались не менее чем в трёх разрядах. Указать способ такого разбиения или доказать, что его не существует.

4. Дан треугольник ABC . Найти геометрическое место точек M таких, что треугольники ABM и BCM — равнобедренные.

5. Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явились 28 членов профсоюза и 37 не членов, причём Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну — не членам. Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов¹). Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера?

9 класс

1. Имеется лабиринт, состоящий из n окружностей, касающихся прямой AB в точке M . Все окружности распо-

¹ И чтобы каждому достался хотя бы один слон. — Прим. ред.

ложены по одну сторону от прямой, а их длины составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Два человека в разное время начали ходить по этому лабиринту. Их скорости одинаковы, а направления движения различны. Каждый из них проходит все окружности по порядку, и, пройдя наибольшую, снова идёт в наименьшую. Доказать, что они встретятся.

2. Можно ли разрезать квадратный пирог на 9 равновеликих частей таким способом: выбрать внутри квадрата две точки и соединить каждую из них прямолинейными разрезами со всеми четырьмя вершинами квадрата? Если можно, то какие две точки нужно выбрать?

3. См. задачу 2 для 8 класса.

4. Чему равна максимальная разность между соседними числами из числа тех, сумма цифр которых делится на 7?

5. Имеется 120-значное число. Его первые 12 цифр переставляются всеми возможными способами. Из полученных таким образом 120-значных чисел наугад выбирают 120 чисел. Доказать, что их сумма делится на 120.

10 класс

1. В квадрате расположено K точек ($K > 2$). На какое наименьшее число треугольников нужно разбить квадрат, чтобы в каждом треугольнике находилось не более одной точки?

2. Доказать, что в круге радиуса 1 нельзя найти более 5 точек, попарные расстояния между которыми все больше 1.

3. Доказать, что уравнение $19x^3 - 17y^3 = 50$ не имеет решений в целых числах.

4. В бесконечно большой каравай, занимающий всё пространство, в точках с целыми координатами впечены изюминки диаметра 0,1. Каравай разрезали на части несколькими плоскостями. Доказать, что найдётся неразрезанная изюминка.

5. Из первых k простых чисел 2, 3, 5, ..., p_k ($k > 4$) составлены всевозможные произведения, в которые каж-

дое из чисел входит не более одного раза (например, $3 \cdot 5$, $3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot p_k$, 11 и т. д.). Обозначим сумму всех таких чисел через S . Доказать, что $S + 1$ разлагается в произведение более $2k$ простых сомножителей.

Второй тур

7 класс

1. В треугольнике ABC проведены высоты AE , BM и CP . Известно, что прямая EM параллельна AB и прямая EP параллельна AC . Докажите, что прямая MP параллельна BC .

2. Над квадратным катком нужно повесить четыре лампы так, чтобы они его полностью освещали. На какой наименьшей высоте нужно повесить лампы, если каждая лампа освещает круг радиуса, равного высоте, на которой она висит?

3. Доказать, что существует число q такое, что в десятичной записи числа $q \cdot 2^{1000}$ нет ни одного нуля.

4. Число y получается из натурального числа x некоторой перестановкой его цифр. Докажите, что каково бы ни было x , $x + y \neq 9999 \dots 99$ (1967 девяток).

5. В четырёх заданных точках на плоскости расположены прожекторы, каждый из которых может освещать прямой угол. Стороны этих углов могут быть направлены на север, юг, запад или восток. Доказать, что эти прожекторы можно направить так, что они осветят всю плоскость.

8 класс

1. Доказать, что существует число q такое, что в десятичной записи числа $q \cdot 2^{1967}$ нет ни одного нуля.

2. Обозначим через $d(N)$ число делителей N . Найти все N такие, что $N/d(N) = P$ — целое и простое число (числа 1 и N также считаются делителями).

3. На каждой стороне прямоугольного треугольника построено по квадрату (пифагоровы штаны), и вся фигура

вписана в круг. Для каких прямоугольных треугольников это можно сделать?

4. На шахматной доске размера 1000×1000 находится чёрный король и 499 белых ладей. Чёрные и белые ходят по очереди. Доказать, что как бы ни ходили ладьи, король всегда может за несколько ходов встать под бой одной из них.

5. Семь школьников решили за воскресенье обойти семь кинотеатров. Во всех них сеансы начинаются в 9.00, 10.40, 12.20, 14.00, 15.40, 17.20, 19.00 и 20.40 (8 сеансов). На каждый сеанс шестеро шли вместе, а кто-нибудь один (не обязательно один и тот же) шёл в другой кинотеатр. К вечеру каждый побывал в каждом кинотеатре. Докажите, что в каждом кинотеатре был сеанс, на котором не был ни один из этих школьников.

9 класс

1. Число Y получается из натурального числа X некоторой перестановкой его цифр. Известно, что $X + Y = 1000 \dots 00$ (200 нулей). Доказать, что X делится на 50.

2. Дана последовательность целых положительных чисел $X_1, X_2 \dots X_n$, все элементы которой не превосходят некоторого числа M . Известно, что при всех $k > 2$ $X_k = |X_{k-1} - X_{k-2}|$. Какой может быть максимальная длина этой последовательности?

3. На каждой стороне треугольника ABC построено по квадрату во внешнюю сторону (пифагоровы штаны). Оказалось, что внешние вершины всех квадратов лежат на одной окружности. Доказать, что треугольник ABC — равнобедренный.

4. Задано натуральное число A такое, что для любого натурального N , делящегося на A , число \bar{N} тоже делится на A . (\bar{N} — число, состоящее из тех же цифр, что и N , но записанных в обратном порядке). Например, $\overline{1967} = 7691$, $\overline{450} = 54$. Доказать, что A является делителем числа 99.

5. Испанский король решил перевесить по-своему портреты своих предшественников в круглой башне замка. Од-

нако он хочет, чтобы за один раз меняли местами только два портрета, висящие рядом, причём это не должны быть портреты двух королей, один из которых царствовал сразу после другого. Кроме того, ему важно лишь взаимное расположение портретов, и два расположения, отличающиеся поворотом круга, он считает одинаковыми. Доказать, что как бы сначала ни висели портреты, король может по этим правилам добиться любого нового их расположения.

10 класс

1. Дана таблица $n \times n$ клеток. Таблица заполняется следующим образом: пусть в некоторой строчке записаны числа $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ (m и $n - k$ взаимно просты). Тогда в следующей строчке записываются те же числа, но в таком порядке: $a_{m+1}, \dots, a_n, a_{k+1}, \dots, a_m, a_1 \dots a_k$. В первую строчку записываются числа $1, 2 \dots n$. Доказать, что после заполнения таблицы в каждом столбце будут написаны все числа от 1 до n .

2. См. задачу 3 для 9 класса.

3. Можно ли расставить на окружности числа $1, 2 \dots 12$ так, чтобы разность между двумя рядом стоящими числами была 3, 4 или 5?

4. В восьми данных точках пространства установлено по прожектору, каждый из которых может осветить в пространстве октант (трёхгранный угол со взаимно-перпендикулярными сторонами). Доказать, что можно повернуть прожекторы так, чтобы они осветили всё пространство.

5. Рассматриваются всевозможные n -значные числа¹, составленные из цифр 1, 2 и 3. В конце каждого из этих чисел приписывается цифра 1, 2 или 3 так, что к двум числам, у которых во всех разрядах стоят разные цифры, приписываются разные цифры. Доказать, что найдётся n -значное число, в записи которого участвует лишь одна единица и к которому приписывается единица.

¹ Предполагается, что $n \geq 2$. — Прим. ред.

ОТВЕТЫ

1958 год (XXI олимпиада)

Первый тур

7 класс. 3. 669.

8 класс. 3. Не увидят.

9 класс. 3. 9. 4. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, ..., $x_n = n$.

10 класс. 4. 10100.

Второй тур

7 класс. 3. Можно. 5. Если n и m чётны, то такой ломаной не существует, если же хотя бы одно из чисел n и m нечётно, то такая ломаная существует и её длина равна $(n+1)(m+1)$.

8 класс. 5. $a \geq b$.

9 класс. 1. $x = 1$, $y = 1$. 2. Если $n = 2k$, то половину лучей нужно провести в одном направлении, а оставшуюся половину — в противоположном. Если же $n = 2k + 1$, то k лучей нужно провести в одном направлении, а оставшиеся $k + 1$ — в противоположном. 3. Шестью фишками. 4. $a \geq b$. 5. 100 (10 соединённых параллельно цепочек из 10 соединённых последовательно сопротивлений или цепочка из 10 звеньев, каждое из которых состоит из 10 соединённых параллельно сопротивлений).

10 класс. 1. $x = 3$, $y = 1$. 4. b/a . 5. Пусть k — последнее показанное число. Второй может определить число, написанное на обороте последней карточки, в следующих случаях: 1) Были показаны все числа от k до n включительно. 2) Были показаны все числа от 0 до k включительно. 3) Были показаны все числа между k и $l \neq k$, а число l было показано дважды.

1959 год (XXII олимпиада)

Первый тур

7 класс. 3. Можно. 4. Наименьшее число поворотов равно 14. 5. Введём на плоскости систему координат так, чтобы вершины квадрата имели координаты $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$. Искомое ГМТ — восьмиугольник, стороны которого лежат на прямых, задаваемых уравнениями $x = \pm\frac{3}{2}$, $y = \pm\frac{3}{2}$, $x + y = \pm 2$, $x - y = \pm 2$.

8 класс. 1. Нельзя. 2. 1500.

10 класс. 3. Нет, не существует. 4. На $N^2 - N$.

Второй тур

7 класс. 2. Точка пересечения высот треугольника. 3. Например, на $\underbrace{11\dots1}_{9 \text{ цифр}} \underbrace{22\dots2}_{9 \text{ цифр}} \dots \underbrace{77\dots7}_{9 \text{ цифр}} \underbrace{88\dots8}_{8 \text{ цифр}} 9$.

8 класс. 3. $180^\circ - 2\angle A$, $180^\circ - 2\angle B$ и $180^\circ - 2\angle C$.

1960 год (XXIII олимпиада)

Первый тур

7 класс. 1. 10 рублей или больше. 3. 26.

8 класс. 4. 0, 2 или 4.

10 класс. 1. Выпуклый шестиугольник (вместе с его внутренностью), стороны которого параллельны сторонам данных треугольников и равны половинам этих сторон. Если стороны данных треугольников попарно параллельны, то шестиугольник вырождается в правильный треугольник.

Второй тур

7 класс. 1. Если данные точки — вершины выпуклого четырёхугольника, то O — точка пересечения его диагоналей; если данные точки не являются вершинами выпук-

лого четырёхугольника, но не лежат на одной прямой, то O — та из данных точек, которая лежит внутри треугольника с вершинами в трёх оставшихся точках; если данные точки лежат на одной прямой, то O — любая точка, расположенная между двумя средними (т. е. не крайними) точками. 4. 31.

8 класс. 1. 4.

9 класс. 1. $l < t$, причём число lt чётно. 4. Криволинейный треугольник, стороны которого — дуги трёх окружностей, диаметрами которых служат средние линии данного треугольника.

1961 год (XXIV олимпиада)

Первый тур

8 класс. 2. Один вопрос.

10 класс. 2. Оси симметрии полос должны пересекаться в одной точке. (Точнее говоря, если какая-либо из полос содержит внутри себя общую часть остальных полос, то её можно сдвигать в любую сторону до тех пор, пока общая часть остальных полос не попадёт на её границу. Площадь общей части полос при этом не изменяется.)

Второй тур

9 класс. 5. Первый способ самый выгодный, остальные два одинаково невыгодные.

10 класс. 4. 5

1962 год (XXV олимпиада)

Первый тур

9 класс. 2. При чётных n может, а при нечётных — нет.

4. $x_{25} = 1$ или $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Второй тур

7 класс. 1. Шар, стоящий у стороны AB многоугольника $ABC \dots$, нужно пустить параллельно прямой AC .

8 класс. 2. 981, 982, 980, 983, 979, 984, ..., $981 - i$, $981 + i + 1$, ..., 1, 1962.

9 класс. 2. $b_1, b_{25}, b_2, b_{24}, \dots, b_{11}, b_{15}, b_{12}, b_{14}, b_{13}$, где $b_1 < b_2 < \dots < b_{25}$ — данные числа.

10 класс. 4. Возьмём вершину параллелепипеда и рассмотрим три соседние с ней вершины. Горизонтальная плоскость должна быть параллельна плоскости, проходящей через три эти вершины. (Такие плоскости имеют 4 разных направления; для каждого из них площадь проекции одна и та же.)

1963 год (XXVI олимпиада)

Первый тур

7 класс. 3. Да, можно.

8 класс. 2. 2s. 3. $x = y = z = 1$; $x = 1$ и $y = z = -1$; $y = 1$ и $x = z = -1$; $z = 1$ и $x = y = -1$. 5. При n , делящихся на 4.

9 класс. 5. Нет, нельзя.

10 класс. 3. $m + n - 1$. 5. Описанная окружность треугольника ABC , за исключением его вершин.

11 класс. 5. На 16 частей.

Второй тур

7 класс. 1. Восемь погремушек. 4. 76 чисел. 5. Можно.

8 класс. 3. Внутренность круга с центром в центре исходной окружности и радиусом $\frac{R}{3}$, где R — радиус данной окружности. 4. 655.

9 класс. 2. 17. 3. 8.

10 класс. 2. $\frac{n! \cdot (n-1)!}{2}$. 3. Нужно выбрать векторы, идущие в последовательные 12 или 13 вершин (все такие суммы имеют одну и ту же длину).

11 класс. 3. $P(x) = cx(x-1)(x-2) \dots (x-25)$, где c — некоторая константа.

1964 год (XXVII олимпиада)

Первый тур

7 класс. 1. $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = \angle C = 45^\circ$. 4. 41.

8 класс. 2. Числа вида p и $2p$, где p — любое простое число, и числа 8 и 9. 3. $n = 0$ и $m = 0$. 5. Единиц на одну больше.

9 класс. 1. $x = y = z = 1$. 3. $a = 27^3$.

10–11 класс. 1. 1681. 3. $a = 27^{1964}$. 5. На 5.

Второй тур

7 класс. 5. При всех натуральных a .

8 класс. 1. При $n = 2^k$.

10 класс. 1. Да, можно.

1965 год (XXVIII олимпиада)

Первый тур

10 класс. 5. 5896 разрезов, 3932 треугольника.

11 класс. 3. Действительный корень принимает значения от $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ до $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ включительно. 4. Пусть C — точка окружности O , диаметрально противоположная точке A , а K — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BC . Искомое геометрическое место — окружность, по которой пересекаются сферы с диаметрами AB и AK , с выколотой точкой A . 5. Нельзя.

Второй тур

8 класс. 4. Со скоростью $\frac{1}{2}v$ или $2v$ в направлении, противоположном направлению движения полицейских.

9 класс. 5. Две окружности, центры которых совпадают с точкой пересечения медиан данного треугольника.

10 класс. 1. За два взвешивания. 2. Нет, не существует.

11 класс. 1. $2 = 1^1 + 1$, $5 = 2^2 + 1$ и $257 = 4^4 + 1$.

1966 год (XXIX олимпиада)

Первый тур

8 класс. 1. Отрезок, соединяющий середину высоты CH с серединой стороны AB , за исключением его концов.
2. Все числа, не делящиеся на 20. 5. Нельзя.

9–11 класс. 1. (1, 5, 2, 3), (5, 1, 2, 3), (1, 5, 3, 2), (5, 1, 3, 2), (2, 3, 1, 5), (2, 3, 5, 1), (3, 2, 1, 5), (3, 2, 5, 1), (2, 2, 2, 2). 2. При $k = 65$. 4. 29, $29 + 30$, $29 + 2 \cdot 30$, $29 + 3 \cdot 30$, ...
5. 16.

Второй тур

8 класс. 2. $a_{1000} = 495$. 4. 10 линий.

9–11 класс. 2. $a_{1966} = 1024$. 5. 14.

1967 год (XXX олимпиада)

Первый тур

8 класс. 1. $8 \underbrace{9 \dots 9}_{12} 8 \underbrace{9 \dots 9}_{14}$ и $8 \underbrace{9 \dots 9}_{13} \underbrace{0 \dots 0}_{14}$. 3. Такого способа не существует. 5. $2 \cdot 28 \cdot 37 = 2072$.

9 класс. 2. Нельзя. 4. 13.

10 класс. 1. На $K + 1$ треугольник.

Второй тур

7 класс. 2. На высоте $\frac{a}{2\sqrt{2}}$, где a — сторона квадрата.

8 класс. 2. 8, 9, 12, 18 и $8p$, $12p$, $18p$, где p — любое простое число. 3. Для равнобедренных.

9 класс. 2. 2, если $[M] = 1$; $3n + 3$, если $[M] = 2n + 1 > 1$; $3n + 1$, если $[M] = 2n$.

Указания

1958 год (XXI олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Начинаящий может добиться, чтобы в каждом уравнении коэффициенты при x и при y были равны.

2. Рассмотрите окружность, диаметром которой служит отрезок, соединяющий точку M с центром круга.

3. Сначала найдите количество двузначных номеров, у которых сумма цифр равна заданному числу.

4. Докажите, что точки A и B должны быть противоположными вершинами квадрата.

5. Выразите сумму остатков от деления на 1958 чисел в какой-либо строке через сумму остатков чисел в строке, расположенной над ней.

8 класс

1. Докажите, что сумма рассматриваемых векторов равна вектору \overrightarrow{OH} , где H — точка пересечения высот треугольника с вершинами в концах рассматриваемых векторов.

2. Рассмотрите разность данных уравнений.

3. Докажите, что радиус ствола каждой из трёх сосен не меньше $R/4$.

5. Для каждой из четырёх проекций рассмотрите множество точек, проецирующихся на неё.

9 класс

1. Рассмотрите, что происходит при одном обходе вокруг начала координат.

2. Воспользуйтесь способом доказательства от противного.

3. Сначала рассмотрите фигуру, состоящую из двух не параллельных прямых.

4. Сначала найдите x_1 , затем найдите x_2 и т. д.
5. Примените индукцию по n .

10 класс

1. Замените данный выпуклый многоугольник на выпуклый многоугольник наименьшей площади, имеющий те же самые проекции на рассматриваемые оси и биссектрисы.
2. $(1155^{979})^2 < 1155^{1958} + 34^{1958} < (1155^{979} + 2)^2$.
4. В рассматриваемых наборах все места равноправны.
5. Рассмотрите графики движения пешеходов, введя третью ось координат — ось времени.

Второй тур

7 класс

1. Предположим, что на плоскости удалось расположить 5 выпуклых многоугольников так, что каждые два из них имеют общую сторону. Выберем внутри каждого из них точку, отметим на каждой общей стороне двух многоугольников точку и соединим её с точками, выбранными внутри этих двух многоугольников. Полученные 10 двузвенных ломаных не имеют общих точек, отличных от их концов. Докажите, что такого не может быть.
2. Сначала докажите, что можно изменить знаки у любых двух чисел набора, а затем докажите, что можно изменить знак у любого числа.
3. Заклейте каждую пару противоположных граней куба одинаково.
4. Докажите, что если $1 < x < n$, то $x(n + 1 - x) > n$.
5. Докажите, что, с одной стороны, длина такой ломаной должна быть чётной, а с другой стороны (если такая ломаная существует), должна быть равна $(n + 1)(m + 1)$.

8 класс

1. Чтобы найти разность между периметром исходного многоугольника и периметром полученного, достаточно рассмотреть совместившиеся части многоугольника.

2. Докажите, что одно из чисел $\frac{5}{4} - a_1$, $3\left(\frac{5}{4} - a_2\right)$ больше единицы.

3. Рассмотрите точки M' и N' , в которых прямые CD и CE пересекают прямые OB и OA , и докажите, что $M'N' \parallel MN$.

4. Воспользуйтесь тем, что $k^k < n^k$ для любого натурального $k < n$.

5. Для каждого из непересекающихся кругов диаметра 1 рассмотрите круг радиуса 1 с тем же самым центром.

9 класс

1. Рассмотрите остатки от деления на $x + 1$.

2. Примените индукцию по n .

3. Предположим, что 5 фишек бьют все клетки доски. Рассмотрите 4 свободные от фишек полосы, параллельные одной стороне ромба, и 4 свободные полосы, параллельные другой стороне. Клетки, стоящие на пересечении этих полос, занимают более пяти различных диагоналей.

4. Докажите, что в любом из кругов радиуса 1, покрывающих M , не может лежать более одного из центров непересекающихся кругов радиуса 1.

5. Для каждого k рассмотрите множество тех зажимов, для которых кратчайший путь до зажима A проходит через k сопротивлений.

10 класс

1. Докажите, что при $y > 1$, с одной стороны, число y делится на $\frac{x+1}{2}$, а с другой стороны, $y < \frac{x+1}{2}$.

2. В случае, когда отрезок AB не проходит целиком внутри или по границе многоугольника, рассмотрите пересечение прямой AB с многоугольником, выберите отрезки, на которых лежат точки A и B , и проведите разрезы по этим отрезкам.

3. Рассмотрим такую последовательность наборов оценок по $2n$ предметам, начинающуюся со всех четвёрок и

оканчивающуюся всеми пятёрками, что каждый следующий набор получается из предыдущего заменой одной четвёрки на пятёрку. Воспользуйтесь тем, что в любой такой последовательности может встретиться не более одного набора оценок, реально существующих у учеников школы.

4. Докажите, что объём тела, полученного вращением параллелограмма вокруг стороны a , равен объёму цилиндра с высотой a и радиусом основания, равным высоте параллелограмма, опущенной на сторону a .

5. Примените индукцию по числу показанных карточек.

1959 год (XXII олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Рассмотрите двоичную запись числа a .

2. Воспользуйтесь тем, что $4^n - 1$ делится на 3 для любого натурального n .

3. Сначала докажите, что все двузначные числа, не оканчивающиеся нулями, можно расположить в последовательности так, чтобы последняя цифра каждого числа была равна первой цифре следующего за ним.

4. Докажите, что ладья должна сделать ход либо вдоль каждой вертикали, либо вдоль каждой горизонтали.

5. Воспользуйтесь методом координат.

8 класс

1. Этими ковшами можно перелить только $m(2 - \sqrt{2}) + n\sqrt{2}$ литров, где m и n — целые числа.

2. Искомые девятизначные числа определяются первыми пятью своими цифрами, причём первая цифра не 0, а пятая — не 6 и не 9.

3. Сначала докажите, что $S_{CKD} = S_{ADM} + S_{BCM}$.

5. Докажите, что расстояние от точки O до любой касательных a_5 , a_6 , a_7 и a_8 равно $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, где R_1 и R_2 — радиусы

данных окружностей, а расстояние до любой из касательных a_3 и a_4 равно $\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$.

9 класс

1. Рассмотрите выражение $(a_1 + \dots + a_{1959})^{1000}$.

3. Сначала докажите, что для всех окружностей, проходящих через две данные точки, их общие хорды с данной окружностью (или их продолжения) пересекаются в одной точке или параллельны.

4. Докажите индукцией по k , что число всех k -звенных ломаных не превосходит $4 \cdot 3^{k-1}$.

5. Рассмотрите наибольшее ребро тетраэдра.

10 класс

1. Докажите, что если $0 < x \leq y \leq z - 1$, $y < k$ и $k > 2$, то $x^k + y^k < z^k$.

4. Докажите, что номер столбца, содержащего N^2 совпадает с номером строки, содержащей 1.

5. Предположив противное, сначала доказать, что

$$\begin{aligned} a_1 + a_{1+(k-1)} + a_{1+2(k-1)} + \dots + a_{1+n(k-1)} &\leq \\ &\leq a_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots \right) \leq 2a_1. \end{aligned}$$

Второй тур

7 класс

1. Сгруппируйте в обоих выражения члены, равноотстоящие от концов.

2. Докажите, что точка, симметричная точке пересечения высот треугольника относительно стороны, лежит на описанной окружности.

3. Пусть A — искомое число. Воспользуйтесь тем, что $A = 1\,000\,000\,000\,A - 111\dots 11$.

4. Рассмотрите число $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, где $a_1 \geq a_4 \geq a_2 \geq a_5 \geq a_3 \geq a_6$.

5. Сначала докажите, что количество чисел $x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_nx_1$ чётно, а затем докажите, что количество чисел -1 среди этих чисел также чётно.

8 класс

2. Докажите, что в каждой четвёрке чисел $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ есть хотя бы одно отрицательное число.

3. Докажите, что прямая BC отсекает от построенного треугольника равнобедренный треугольник с углом $\angle A$ при основании.

4. Рассмотрите сумму квадратов двух сторон четырёхугольника $ACBD$, которые видны из точки пересечения диагоналей под неострым углом.

5. Рассмотрите ходы коня из четырёх угловых клеток и в эти клетки.

9 класс

1. Пусть данные числа разделены на две группы по 50 чисел и суммы чисел первой и второй группы равны S_1 и S_2 соответственно, причём $S_1 \geq S_2$. Поменяем местами два числа из разных групп. Предположим, что при этом неравенство меняет знак, т. е. $S'_1 \leq S'_2$. Докажите, что тогда S_1 или S'_1 отличается от $1/2$ менее чем на $1/100$.

2. Рассмотрите прямые, проходящие через данные отрезки, и среди углов, на которые эти прямые делят плоскость, выберите наибольший. Затем рассмотрите сторону $2n$ -угольника, заключённую внутри этого угла, и противоположную ей сторону.

3. Предположим, что сумма любых двух плоских углов при вершинах A и B тетраэдра $ABCD$ больше 180° . Разверните на плоскость грани ABC и ABD .

4. Рассмотрите остатки при делении на 9.

5. Докажите, что число ходов каждого коня чётно, и ни один конь не может сделать только два хода.

10 класс

2. Воспользуйтесь свойствами центра масс системы точек.

3. Если круг радиуса r пересекается с кругом радиуса $R \geq r$ с центром O , то он целиком лежит внутри круга радиуса $3R$ с центром O .

4. Если точка z лежит вне многоугольника $C_1 \dots C_n$, то векторы с началом в точке z и концами в точках C_1, \dots, C_n лежат в одной полуплоскости, граница которой содержит точку z .

5. Рассмотрите все возможные совмещения секторов при различных поворотах одного круга относительно другого.

1960 год (XXIII олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Денежную сумму менее 10 рублей можно представить лишь билетами нечётного достоинства. В представлении денежной суммы 10 рублей или более один билет достоинством в 10 рублей можно заменить десятью билетами достоинством в 1 рубль.

2. Середина общей хорды двух равных окружностей является также и серединой отрезка, соединяющего их центры.

3. С одной стороны, одно и то же число задач не могли придумать более 26 студентов. С другой стороны, одну задачу не могли придумать менее 26 студентов.

4. Докажите, что прямые A_1B_1 , A_2B_2 и MN содержат высоты треугольника A_1MB_2 .

5. Хотя бы одно из чисел d и n/d не превосходит \sqrt{n} .

8 класс

1. Воспользуйтесь признаками делимости на 3 и на 9.

2. Пусть в турнире принимало участие n человек. В партиях с участниками, занявшими три последних места, остальные игроки набрали $(n-3) \cdot 3 - 3$ очка, а в партиях между собой они набрали столько же очков.

3. Пусть для определённости $S_{ABC} < S_{ACD}$. Постройте на стороне CD точку E так, что $S_{AED} = S_{ABC}$.

4. Рассмотрите фигуру, образованную углом AOB и вертикальным с ним углом, и разберите различные варианты пересечения отрезка CD с границей этой фигуры.

5. Требуемое бесконечное множество натуральных чисел можно найти среди полных квадратов.

9 класс

1. Примените индукцию по числителю дроби.

3. Площади частей многоугольника, заключённых внутри любых двух вертикальных углов с вершиной O , равны.

4. Рассмотрите два случая: четвёртая вершина соседняя с данной точкой внутри окружности или противоположная ей.

10 класс

1. Рассмотрите проекции данных треугольников на плоскость, которая параллельна плоскостям P_1 и P_2 и равноудалена от каждой из них.

2. В сумме $a^{n-1} + (-a^{n-2}b) + \dots + (-ab^{n-2}) + b^{n-1}$ каждое из n слагаемых даёт один и тот же остаток при делении на n .

4. Предположим, что число $A = a \cdot 10^k + b$, где $1 \leq a, b \leq 9$ и $k \geq 3$, есть точный квадрат. Сначала докажите, что b — точный квадрат и одно из чисел $\sqrt{A} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{A} - \sqrt{b}$ делится на 5^k , а затем докажите, что произведение этих чисел больше $9 \cdot 10^k$.

5. Разделите сумму $\alpha_1^n + \alpha_2^n + \dots + \alpha_k^n$ на наибольшее по абсолютной величине слагаемое.

Второй тур

7 класс

1. В тех случаях, когда данные точки не лежат на одной прямой, воспользуйтесь неравенством треугольника.

2. Пусть a, b, c и d — стороны данного четырёхугольника, причём $a \geq b \geq c \geq d$. Докажите сначала, что существует треугольник со сторонами $a - d, b, c$.

3. У любого несамопересекающегося пятиугольника есть два соседних угла, каждый из которых меньше 180° .

4. В период с мая по ноябрь каждый день недели хотя бы раз бывает любым числом с 1 по 30.

8 класс

1. Если AB — наибольший отрезок, соединяющий рассматриваемые точки, то все остальные точки лежат на окружности с диаметром AB .

2. Для каждой из четырёх пар ходов в противоположных направлениях замените их сумму на разность и составьте два уравнения для этих разностей.

4. Докажите, что наблюдателей можно занумеровать так, что промежутки наблюдения для наблюдателей с нечётными номерами не пересекаются, и для наблюдателей с чётными номерами тоже не пересекаются.

5. Сложите шестиугольник из четырёх таких пятиугольников.

9 класс

1. Общее число отрезков равно $lm/2$, поэтому число lm чётно.

2. Рассмотрите поворот, переводящий вектор стороны шестиугольника в вектор стороны построенного на ней правильного треугольника.

3. Рассматриваемую шахматную доску можно разбить на 4 полосы так, что за один ход из двух крайних полос можно попасть только в одну из двух средних полос.

4. Одна из вершин прямоугольника совпадает с вершиной данного треугольника, причём вершина прямоугольника, противоположная этой вершине, лежит на полуокружности, диаметром которой служит сторона треугольника.

5. Если отрезок пересекает круг радиуса 1, то центр этого круга лежит внутри фигуры, состоящей из точек, расстояние от которых до отрезка не превосходит 1.

10 класс

1. Докажите, что если среди чисел a_1, a_2, \dots, a_k одно из чисел $1, \dots, 9$ встречается более 7 раз, то из чисел a_1, a_2, \dots, a_k можно выбрать часть, сумма которых равна A .
2. Пусть A — исходное число, B — полученное число. Докажите, что число $10B - A$ делится на 7.
3. Докажите, что если с кем-либо из собравшихся знакомы m человек, то не знакомы с ним $\frac{m(m-1)}{2}$ человек.
5. При любом таком маршруте число ходов вверх равно числу ходов вниз, а число ходов вправо равно числу ходов влево. Кроме того, любой маршрут задаётся последовательностью направлений ходов.

1961 год (XXIV олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Последовательные $2n$ чисел можно записать в две строки (одну под другой) так, что суммы чисел в каждом столбце равны.
2. Если число $a_1b_1c_1$ отлично от нуля, то оно обладает следующими свойствами: 1) $b_1 = 9$; 2) $a_1b_1c_1$ делится на 9.
3. Докажите сначала, что если треугольник $A_nB_nC_n$ остроугольный, то треугольник $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ пересекает его в шести точках, а затем докажите индукцией по n , что треугольник $A_nB_nC_n$ остроугольный.
4. Выберите среди данных точек две точки, расстояние между которыми наибольшее, и рассмотрите окружность, центр которой — середина отрезка, соединяющего данные точки.
5. Примените индукцию, представив доску размером $(2n+2) \times (2n+2)$ в виде меньшей доски размером $2n \times 2n$, заключённой в рамку.

8 класс

1. Треугольник $M_1M_2M_3$ подобен треугольнику, образованному средними линиями треугольника ABC .
2. Положите $a_1 = 100$, $a_2 = 100^2$, ..., $a_n = 100^n$.
4. Путь должен состоять из чётного числа шагов, потому что при каждом шаге меняется цвет клетки.
5. Если данные отрезки начинаются с a и b , то искомый отрезок начинается с $a + b + 980$.

9 класс

3. Сначала запишите числа в таблицу по порядку, а затем в каждой строке сдвиньте все числа по кругу на номер строки.
4. После оплаты проезда у каждого пассажира должна остаться хотя бы одна монета, и в кассу должно быть опущено не менее k монет.
5. Рассмотрите выпуклую оболочку данных точек.

10 класс

1. Примените индукцию по k .
2. Выясните, как изменяется площадь общей части при малом сдвиге одной из полос.
3. После оплаты проезда у каждого пассажира должна остаться хотя бы одна монета, и в кассу должно быть опущено не менее $k/4$ монет.
4. Рассмотрите сечение плоскостью, которая проходит через точку O , центр окружности S и перпендикулярна к плоскости, содержащей эту окружность.
5. Докажите, что если $n > 2$, то начало координат принадлежит и некоторому треугольнику с вершинами Z_i .

Второй тур

7 класс

1. Провести диагонали не одновременно, а по очереди, и доказать, что на каждом шаге будет получаться многоугольник, целиком покрашенный снаружи.

2. Сначала докажите, что середина диагонали PR совпадает с центром квадрата $ABCD$, а затем рассмотрите точки пересечения этого квадрата и окружности с диаметром PR .

3. Рассмотрите числа, следующие за первым из данных чисел, делящимся на 10.

4. Когда звёздочек меньше семи, разберите два случая: 1) в какой-то строке таблицы звёздочек нет; 2) в каждой строке таблицы звёздочки есть.

5. Докажите сначала, что числа a , b , c и d должны быть нечётными.

8 класс

1. Если ломаная не начинается и не заканчивается в области, то она пересекает её границу чётное число раз.

2. Вычислите расстояния от центра прямоугольника до внешних касательных.

5. Предположим, что в построенной последовательности снова встретились четвёрка a, b, c, d . Сначала докажите, что $abcd = 1$, а затем, что $c = 1/a$ и $d = 1/b$.

9 класс

1. Примените векторы.

2. Рассмотрите таблицу с наибольшей суммой всех чисел.

3. Докажите, что найдётся точка, которая соединена только с одной точкой.

4. Примените индукцию по $|a| + |b|$.

5. Пусть Петя разделил $2n + 1$ орехов на две кучки, в которых a и b орехов, причём $a > b$, т. е. $a \geq n + 1$. Докажите, что при первом способе Коля всегда может получить a орехов. При втором способе Петя может на первом этапе сделать кучки из $2n - 1$ и 2 орехов, а при третьем — из $n + 1$ и n орехов; тогда Коля получит не более n орехов.

10 класс

1. Докажите, что из любой последовательности натуральных чисел можно выбрать неубывающую подпоследовательность.

2. Для каждого из квадратов со стороной 1 рассмотрите множество точек, удалённых от него не более чем на $1/2$.

4. Рассмотрите поворот на 60° с центром A , переводящий точку B в точку C .

5. Докажите, что после 2^p шагов получится набор $a_1 a_{2^{p+1}}, a_2 a_{2^{p+2}}, \dots, a_{2^k} a_{2^p}$.

1962 год (XXV олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Точка M — центр вписанной окружности треугольника ANB .

2. Рассмотрите все точки, в которые может попасть вершина треугольника, противоположная отмеченной стороне.

3. Пусть $a \leq b \leq c \leq d$. Докажите, что существует треугольник со сторонами $a + b$, c и d .

4. $a = (2a - S(2a)) - (a - S(a))$.

5. Можно начать с любой карточки и положить её произвольно.

8 класс

1. Воспользуйтесь тем, что отношения соответственных сторон двух подобных треугольников равны.

3. Сначала выразите n через d и m , а затем выберите m так, чтобы n было целым.

9 класс

1. Пусть O — точка пересечения отрезков AB и CD . Для определённости будем считать, что $AO < CO$. Отметьте на отрезке CO точку X так, что $AO = CX$, а на луче AO точку

У так, что $AY = CO$, и рассмотрите среднюю линию треугольника OXY , параллельную стороне XU .

2. Докажите, что если n чётно, то конь может попасть на соседнее (по вертикали или горизонтали) поле.

4. Докажите, что произведение $x_1 \cdot \dots \cdot x_k$ удовлетворяет уравнению $x - 1/x = 1$.

5. Рассмотрите сетку квадратов с достаточно малой стороной и в каждый квадрат впишите круг.

10 класс

1. Достройте треугольник BNM до параллелограмма $BNMP$.

2. Рассмотрите последовательности параллелограммов, граничащих по стороне, которые начинаются на двух сторонах равнобедренных треугольников с общей вершиной.

3. Для любого натурального числа m можно выбрать n так, что $a_n \leq m < a_{n+1}$.

Второй тур

7 класс

1. Если шар, стоящий у стороны AB многоугольника $ABCD\dots$, пустить параллельно диагонали AC , то от стороны BC он отразится параллельно диагонали BD , причём длина пути шара по двум прямолинейным участкам равна AC .

2. Докажите, что точка K равноудалена от точек A и M .

3. 1. Площадь прямоугольника размерами 1961×1963 не делится на 3.

2. Сначала разбейте прямоугольник размерами 1963×1965 на прямоугольники размерами 1965×1958 , 1956×5 и 5×9 .

4. $a^3 + 1$ делится на $a + 1$.

5. Если A и B — данные точки, расстояние между которыми не меньше 1, то все данные точки лежат внутри кругов радиуса 1 с центрами A и B .

8 класс

1. Докажите по индукции, что найдутся по крайней мере две несмежные вершины, из которых не проведено ни одной диагонали.

2. В рассматриваемую сумму слагаемые 1, 2, ..., 981 должны входить со знаком минус, а слагаемые 982, 983, ..., 1962 — со знаком плюс.

3. Рассмотрите повороты n -угольника относительно центра окружности на углы α , 2α , 3α , ...

4. Расположите искомые числа и их суммы в порядке возрастания.

5. Рассмотрите центр R окружности, описанной около треугольника ABM , и докажите, что $RP \perp MP$.

9 класс

1. Пусть в какие-то понедельник, вторник, ..., воскресенье школьник решил α_1 , α_2 , ..., α_7 задач. Тогда общее затраченное им время равно $c_1\alpha_1 + \dots + c_7\alpha_7$, где c_1 , ..., c_7 — некоторые константы.

2. Пусть $b_1 < b_2 < \dots < b_{25}$ — данные числа. В рассматриваемую сумму слагаемые b_1 , b_2 , ..., b_{12} должны входить со знаком минус, а слагаемые b_{14} , b_{15} , ..., b_{25} — со знаком плюс (слагаемое b_{13} должно входить как со знаком плюс, так и со знаком минус).

3. Рассмотрите фигуру, которая состоит из точек, удалённых от исходного многоугольника не более чем на $d = 1$.

5. Разделим отрезок $[0, 1]$ на два равных отрезка и обозначим их I_0 и I_1 . Затем отрезок I_0 разделим на два равных отрезка и обозначим их I_{00} и I_{01} , а отрезок I_1 разделим на отрезки I_{10} и I_{11} , и т. д. Сопоставьте каждой из данных последовательностей отрезков с соответствующим номером и докажите, что эти отрезки не имеют общих внутренних точек.

10 класс

1. Сначала докажите, что $BA' \cdot BA = BC \cdot BO$.

4. Площадь проекции параллелепипеда равна удвоенной площади проекции треугольника, вершины которого соединены рёбрами с одной и той же вершиной параллелепипеда.

5. Примените индукцию по числу участников турнира.

1963 год (XXVI олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Докажите, что треугольники ABC' и $A'BC$ равны.

2. Рассмотрите $(a + b + c)^2$.

3. Прямоугольник размером 4×100 можно разбить на 50 прямоугольников размером 4×2 .

8 класс

1. Рассмотрите $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$.

2. Площадь четырёхугольника $PQRS$ в 4 раза больше площади четырёхугольника, образованного серединами сторон четырёхугольника $ABCD$.

3. Сначала найдите положительные решения, воспользовавшись неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим.

4. Проведите через одну точку прямые, параллельные данным.

5. Число -1 встречается чётное число раз в каждом столбце, поэтому оно встречается чётное число раз и во всей таблице.

9 класс

1. Если первый член и разность арифметической прогрессии по абсолютной величине меньше 10^k , то найдётся член прогрессии, у которого $(k+1)$ -я цифра — любая заданная цифра.

3. Сделайте замену переменных: $a + b = x$, $b + c = y$, $a + c = z$.

4. Либо данные точки являются вершинами выпуклого четырёхугольника, либо одна из них лежит внутри треугольника с вершинами в трёх других точках.

5. Докажите, что если прямоугольник с отношением сторон $\lambda < 1$ вписан в прямоугольник с отношением сторон $\mu < 1$, то $\mu \geq \lambda$.

10 класс

2. Рассмотрите вершину наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего данные точки.

3. При переходе из одной клетки в другую прямая пересекает горизонтальную или вертикальную линию клетчатой бумаги.

4. Если $b < 0$ и $c < 0$, то $(-b - c)^n > (-b)^n + (-c)^n$ при любом натуральном $n > 1$.

5. Пусть указанные перпендикуляры пересекаются в точке M' . Рассмотрите окружность с диаметром MM' .

11 класс

1. Сделайте замену переменных $\varphi_1 = \operatorname{arctg} x$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} y$, $\varphi_3 = \operatorname{arctg} z$, и докажите неравенство $\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2 + \operatorname{tg} \varphi_3 - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_3 > 0$.

2. Рассмотрите проекцию на прямую, перпендикулярную прямой l .

4. Каждое рассматриваемое число при делении на 9 даёт остаток 1.

5. Представьте тетраэдр в виде объединения четырёх тетраэдров, гомотетичных исходному с коэффициентом $2/3$ (центры гомотетии находятся в вершинах).

Второй тур

7 класс

1. Погремушка задаётся тремя числами, равными количеству синих шариков между данной парой красных.

3. Рассмотрите проекцию на прямую, перпендикулярную данной прямой.

4. Если выбрано больше двух чисел, то все они дают одинаковые остатки при делении на 26.

5. Соедините первую точку со второй, вторую с третьей, третью с четвертой, четвертую с пятой.

8 класс

1. На клетчатом листе бумаги, начиная от левого края, отметьте в первой строке a_1 клеток, во второй a_2 клеток и т. д., и рассмотрите столбцы полученной таблицы.

2. Перемещаясь каждый раз в соседнюю клетку, можно не более чем за 14 ходов попасть из клетки, содержащей число 1, в клетку, содержащую число 64.

3. Расстояние от центра описанной окружности треугольника до точки пересечения медиан втрое меньше, чем расстояние до точки пересечения высот.

4. Выберите числа, дающие остаток 1 при делении на 3. Если выбрано более 655 чисел, то разность между какими-то двумя из выбранных чисел равна 1 или 2.

5. Начало отсчёта времени можно выбрать так, что первые два человека 3 минуты идут в одном направлении.

9 класс

1. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что одно из расстояний от точек A , B и C до прямой XO равно сумме двух других.

2. Занумеруйте горизонтальные звенья ломаной сверху вниз и выясните, какое наибольшее число точек самопересечения может быть на каждом из них.

3. Могут образоваться треугольники с углами $\frac{a\pi}{10}$, $\frac{b\pi}{10}$, $\frac{c\pi}{10}$, где a , b и c — натуральные числа, сумма которых равна 10.

4. Докажите, что существует число m ($1 < m < 81$), обладающее следующим свойством: если отметить клетки,

в которых стоят числа $1, \dots, m$, и поставить звёздочки в оставшиеся клетки, соседние с отмеченными, то звёздочек окажется не меньше 9.

10 класс

1. При нечётном n сумма $x^n + y^n$ делится на $x + y$.
2. Ломаную можно восстановить, если известно, на какой прямой лежит её первое звено, на какой второе и т. д.
3. Рассмотрите прямую, проходящую через центр правильного 25-угольника и перпендикулярную к сумме выбранных векторов.
4. Каждая внутренняя точка пятиугольника $ABCDE$ покрыта не более чем двумя из треугольников ABC , BCD , CDE , DEA и EAB .
5. Докажите, что $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$.

11 класс

1. Если z — наибольшее из различных натуральных чисел x, y, z , то $x^x + y^y < z^z$.
2. Сначала для каждого знака после запятой найдите пару дробей, у которых эти знаки совпадают, а затем найдите пару дробей, у которых совпадает бесконечно много знаков.
3. Докажите, что $P(0) = P(1) = \dots = P(25) = 0$.
5. Предположив, что такие дуги существуют, рассмотрите дополнительные к ним дуги.

1964 год (XXVII олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Высоты, опущенные на стороны AB и BC , не меньше сторон BC и AB соответственно
2. Пусть O и O_1 — середины отрезков AB и AM . Докажите, что $\triangle O_1AO = \triangle O_1CO$.
3. Рассмотрите остаток от деления на 3.

4. Количество узлов, в которых сходится 4 звена, равно 81, поэтому нужно стереть по крайней мере 41 звено.
5. Рассмотрите остатки от деления на 4.

8 класс

2. Сначала выясните, на какую наибольшую степень простого числа p делится число $(n-1)!$.

3. Обозначим $\underbrace{\sqrt{n + \sqrt{n + \dots + \sqrt{n}}}}_{x \text{ раз}}$ через $A_x(n)$. Докажите, что если число $A_{1964}(n)$ целое, то число $A_{1963}(n)$ тоже целое.

4. Проведите через точки A , C и E прямые, параллельные прямым BC , DE и FA .

5. Единицы получаются из чисел вида $9k+1$, а двойки — из чисел вида $9k+2$.

9 класс

1. Рассмотрите случаи, когда $x=1$, $x>1$ и $x<1$.

2. Числа n и $n+1$ не имеют общих делителей.

3. Воспользуйтесь тем, что $a - K^3 = (a - 27^3) + (27^3 - K^3)$.

4. См. указание к задаче 4 для 8 класса.

5. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника. Докажите, что $OM : OA = |\cos AOB|$.

10–11 класс

1. Пусть a — число, квадратом которого является число, полученное из числа N после зачёркивания у него двух последних цифр. Сначала докажите, что $a < 5$.

3. Воспользуйтесь тождеством $a - K^{1964} = (a - 27^{1964}) + (27^{1964} - K^{1964})$.

5. К двум противоположным граням куба должны прилегать по крайней мере 4 тетраэдра, причём сумма их объёмов меньше объёма куба.

Второй тур

7 класс

1. Пусть K , L и M — центры окружностей O_1 , O_2 и O_3 . Докажите, что $\triangle LRK = \triangle MKS$.

2. Докажите, что если два человека не знакомы, то у них найдутся два общих знакомых.

3. Рассмотрите наименьший выпуклый многоугольник, содержащий данные точки, и разрежьте его на треугольники с вершинами в данных точках.

4. Докажите, что $\angle A = \angle C = \angle B + \angle D$.

5. См. указание к задаче 3 для 9 класса.

8 класс

1. Пусть на каком-то шаге количество воды в каждом стакане имеет вид $\frac{m}{2^k}$, где m — целое число. Докажите, что тогда и на предыдущем шаге количество воды в каждом стакане имеет такой вид.

2. Основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны треугольника $O_1O_2O_3$ или на их продолжения, лежат на одной прямой.

3. Первый игрок может делать ходы, симметричные ходам второго игрока.

4. Сначала, воспользовавшись теоремой Пифагора, докажите, что $A_1H_1^2 + A_2H_2^2 + \dots + A_7H_7^2 = A_2H_1^2 + A_3H_2^2 + \dots + A_1H_7^2$.

5. Рассмотрите наименьший выпуклый многоугольник, содержащий данные точки, и разрежьте его на треугольники с вершинами в данных точках.

9 класс

3. Занумеруйте точки с целыми неотрицательными координатами (x, y) в следующем порядке: $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$, $(0, 4)$ и т. д.

4. Пусть B' и C' — середины сторон AC и AB , а K и M — точки касания этих сторон с вписанной окружностью. Сначала докажите, что $B'K = C'M$.

5. Рассмотрите остатки от деления на 4 квадрата длины звена и координат вектора этого звена. Воспользуйтесь также тем, что для каждой из координат сумма координат векторов звеньев равна нулю.

10 класс

1. Получите сначала равномерную смесь двух жидкостей, затем трёх и т. д.

2. Если движение переводит систему, состоящую из конечного числа точек на плоскости, в себя, то центр масс этой системы точек остаётся на месте.

3. См. указание к задаче 4 для 9 класса.

5. Сначала найдите количество карточек, на которых написаны делители числа n , меньшие n .

11 класс

1. Сначала выберите прямую, сумма длин проекций на которую данных векторов больше 2, а затем выберите на этой прямой направление,

3. Сначала докажите, что радиус вписанной окружности равен $\frac{1}{3}$ высоты AH .

4. Пусть B_1, B_2, \dots, B_n — середины сторон $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ данного правильного n -угольника, а надрезы — это отрезки B_1C_1, \dots, B_nC_n . Докажите, что если $\angle A_1B_1C_1 \geq \angle A_2B_2C_2$, то отрезки B_1C_1 и B_2C_2 пересекаются.

5. Если два врага сидят рядом, то рыцарей можно пересадить так, что эта пара сидящих рядом врагов исчезнет и никаких новых пар, сидящих рядом врагов не возникнет.

1965 год (XXVIII олимпиада)

Первый тур

8 класс

1. Рассмотрите окружность, диаметром которой служит отрезок, соединяющий точку M с центром окружности O .

2. Воспользуйтесь тем, что 999 делится на 37.

3. Пусть O — точка пересечения прямых AB и CD . Отложите на луче OA отрезок OX , равный AB , а на луче OC — отрезок OY , равный CD .

4. Если бы все команды сыграли разное число матчей, то одна команда не сыграла бы ни одного матча, а другая команда сыграла бы со всеми.

9 класс

1. Воспользуйтесь признаком делимости на 37, сформулированном в задаче 2 для 8 класса.

2. Рассмотрите точки, в которых прямые AO и BO пересекают стороны треугольника.

3. Докажите, что точка M более удалена от прямой AC , чем точка K .

4. Если бы любые два города были связаны с разным количеством других городов, то один город не был бы связан вообще ни с каким городом, а другой город был бы связан со всеми городами.

5. Выберите сначала среди всех кусков ковровой дорожки, покрывающих левый конец коридора, кусок I_1 , у которого правый конец самый правый. После того как выбран кусок I_k , выберите среди всех кусков, покрывающих его правый конец, тот, у которого правый конец самый правый.

10 класс

1. Рассмотрите образы треугольника при гомотетиях, переводящих вписанную окружность в окружности O_1 и O_2 .

2. Воспользуйтесь признаком делимости на 37, сформулированным в задаче 2 для 8 класса.

3. Рассмотрите окружность, проходящую через вершину угла и концы отрезка.

4. Наибольшее из чисел, лежащих в карманах, больше суммы остальных.

5. Вычислите двумя способами сумму углов полученных треугольников. Затем вычислите двумя способами число сторон этих треугольников.

11 класс

1. Если $q \geq 2$, то $q^n > 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$.

2. Данные точки являются точками касания вписанной или невписанной окружности треугольника с вершинами в центрах искоемых окружностей с его сторонами.

3. Если $x > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, то $x^2 + px + c > 0$.

4. Пусть C — точка окружности O , диаметрально противоположная точке A , а K — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BC . Рассмотрите сферы с диаметрами AB и AK .

5. Для каждой пары цифр есть 4 карточки, на которых они написаны. Рассмотрите те пары цифр, для которых эти карточки чередуются, т. е. две карточки с одной цифрой не заключены между двумя карточками с другой цифрой.

Второй тур

8 класс

1. Пусть $a_n = a_m$, причём $n > m$. Рассмотрите последовательность $b_k = a_k - a_{n+m-k}$ и докажите, что $b_k = 0$ для всех k .

2. Числа 26 и 1965 взаимно простые.

3. Оцените сверху количество положений диска, при которых совпадают не менее 21 пары окрашенных секторов.

4. Рассмотрите те моменты времени, в которые гангстер оказывается напротив полицейского.

9 класс

1. При первом взвешивании положите на одну чашку весов по одной монете из первых пяти мешков, а на другую — по одной монете из следующих пяти мешков. Если весы не пришли в равновесие, то при втором взвешивании

положите на правую чашку одну монету из первого мешка, две монеты из второго мешка, ..., десять монет из десятого мешка, а на левую чашку — $1 + \dots + 10 = 55$ монет из одиннадцатого мешка.

2. Пусть a и b — длины сторон бильярда. Равенства $ka = \left(l + \frac{1}{2}\right)b$ и $k'a = \left(l' + \frac{1}{2}\right)b$, где k, k', l и l' — натуральные числа, причём числа k и k' имеют разную чётность, не могут выполняться.

5. Рассмотрим центры трёх правильных треугольников, построенных внешним образом на сторонах данного треугольника, и проведём через эти три точки окружность. Аналогично проведём окружность для правильных треугольников, построенных внутренним образом. Докажите, что искомое ГМТ состоит из этих двух окружностей.

10 класс

1. См. указание к задаче 1 для 9 класса.

2. Если процесс бесконечен, то найдутся два последовательных слоя, совпадающие с двумя другими последовательными слоями.

3. Можно считать, что p и q — взаимно простые нечётные числа, и за одну секунду шарик смещается на 1 по вертикали и на 1 по горизонтали. Тогда шарик попадёт в лузу через pq секунд после вылета из угла бильярда.

4. Предположите, что числа $a_1 + 1, a_2 + 2, \dots, a_{2n} + 2n$ при делении на $2n$ дают остатки 1, 2, ..., $2n$, и сравните суммы этих двух наборов чисел.

5. Докажите, что при переворачивании одного из ящиков абсолютная величина разности между числом монет, лежащих вверх гербом, и числом монет, лежащих вверх решкой, уменьшается по крайней мере вдвое.

11 класс

1. Докажите, что $P = 2^{2^l}$.

2. Докажите, что числа n^n и $(n+20)^{n+20}$ дают одинаковые остатки при делении на 5.

3. Рассмотрите диаметр искомого круга, который пересекает отрезок, соединяющий данные точки.

4. Докажите по индукции, что любые две точки из D можно соединить ломанной, целиком принадлежащей D , причём любая сторона n -угольника имеет общую точку с множеством D .

5. Среди всех строк и всех столбцов таблицы выберите строку или столбец с наименьшей суммой чисел.

1966 год (XXIX олимпиада)

Первый тур

8 класс

1. Сначала найдите геометрическое место середин тех сторон вписанных прямоугольников, которые перпендикулярны прямой AB .

2. Сначала докажите, что множество остатков от деления чисел вида kn на m есть множество остатков, делящихся на $d = \text{НОД}(m, n)$.

5. В цепи цифры встречаются парами.

9–11 класс

1. Рассмотрим отдельно случай, когда одно из чисел x , y , z , t равно 1, и случай, когда все эти числа больше 1.

2. Пусть $B_k = \frac{19^k}{k!}$ и $C_k = \frac{66^k}{k!}$. Рассмотрите $\frac{B_{k+1}}{B_k}$ и $\frac{C_{k+1}}{C_k}$.

3. Рассмотрите сторону данного пятиугольника, которая видна из центра окружности под наименьшим углом.

4. Рассмотрите остатки от деления на 2, 3 и 5.

5. Разделите доску на 4 квадрата и докажите, что в каждом из них не больше 4 дамоч.

Второй тур

8 класс

1. Окружность, построенная на стороне правильного треугольника как на диаметре, делит остальные его стороны пополам.

2. Докажите, что последовательность a_k устроена следующим образом: вначале 4 раза идёт 1, потом идут последовательно натуральные числа, причём степени двойки повторяются по 3 раза, а остальные числа по 2 раза.

3. Сначала нужно проверить, есть ли радиоактивный шар среди первых 6 шаров.

4. С каждой линии можно попасть на любую другую линию, сделав не более двух пересадок.

9–11 класс

2. Последовательность a_k устроена следующим образом: 1966, 44, 44, ..., 73, 73, 74, 74, 74, 75, 75, 76, 76, ... Здесь все числа до 74 встречаются парами; тройками встречаются только числа вида $2^k \cdot 74$.

3. Докажите, что на первом шаге необходимо проверять ровно 3 шара.

4. Из семи гирь можно составить 98 различных наборов, содержащих не более четырёх гирь. Наибольший вес четырёх гирь тоже равен 98.

5. Рассмотрите путь, поворачивающий в отмеченных клетках, который идёт поочерёдно в горизонтальном и вертикальном направлении.

1967 год (XXX олимпиада)

Первый тур

8 класс

1. Меньшее число в паре имеет вид $\overline{a_1 \dots a_n \underbrace{9 \dots 9}_k}$. Найдите условия на числа k и $\overline{a_1 \dots a_n}$.

2. Выразите радиусы описанных окружностей треугольников $АСМ$ и $ВСМ$ через стороны $АС$ и $ВС$ и синусы противоположных углов.

3. Рассмотрите все слова, начинающиеся с одной и той же последовательности из восьми точек и тире.

4. Сначала найдите множество точек M , для которых треугольник ABM равнобедренный.

5. Если члену профсоюза выдаётся больше 37 слонов (или не члену профсоюза больше 28 слонов), то возможен и другой способ раздачи.

9 класс

1. Рассмотрите тот момент, когда один человек начинает обход самой большой окружности.

2. Рассмотрим 4 треугольника, на которые разбивают квадрат отрезки, соединяющие точку внутри квадрата с его вершинами. Сумма площадей двух треугольников, примыкающих к противоположным сторонам квадрата, равна половине площади квадрата.

4. Докажите, что среди любых 13 идущих подряд натуральных чисел есть число, сумма цифр которого делится на 7.

5. Все выбранные числа дают один и тот же остаток при делении на 3.

10 класс

1. 1) Чтобы доказать, что квадрат можно разбить на $K + 1$ треугольник, рассмотрите сначала разбиения не квадрата, а треугольника. 2) Чтобы доказать, что квадрат не всегда можно разбить на K треугольников, рассмотрите случай, когда все данные точки расположены на отрезке, соединяющем центр квадрата с одной из вершин.

2. Рассмотрите отрезок с концами в данных точках, который виден из центра окружности под наименьшим углом.

3. Рассмотрите остатки от деления на 9.

4. Сначала докажите, что для любого числа R существует точка в пространстве, расстояние от которой до каждой из данных плоскостей больше R .

5. Рассмотрите произведение $(2 + 1)(3 + 1) \dots (p_k + 1)$.

Второй тур

7 класс

1. Сначала докажите, что треугольники ACB и ECM подобны.

2. Найдите наименьший радиус круга, который может покрыть центр квадрата и одну из его вершин.

3. Докажите, что для любого натурального n существует число, содержащее n цифр, в десятичной записи которого встречаются только цифры 1 и 2 и которое делится на 2^n .

4. Пусть число y получается из натурального числа x перестановкой его цифр и $x + y = 9999 \dots 99$. Тогда в записи числа x число нулей равно числу девяток, число единиц — числу восьмёрок, ..., число четвёрок — числу пятёрок.

5. Из двух самых северных точек можно осветить полуплоскость, состоящую из всех точек, находящихся южнее этих двух точек.

8 класс

1. См. указание к задаче 3 для 7 класса.

2. Пусть $N = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ — разложение числа N на простые множители. Тогда $d(N) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_s + 1)$.

3. Серединные перпендикуляры к сторонам квадратов, противолежащих сторонам треугольника, пересекаются в середине гипотенузы.

4. Рассмотрите движение короля по диагонали от поля, соседнего с левым нижним, до поля, соседнего с правым верхним.

5. Предположив, что в некотором кинотеатре на каждом сеансе был хотя бы один из этих школьников, рассмотрите остальные кинотеатры.

9 класс

1. Пусть число B получается из натурального числа A перестановкой его цифр, причём $A + B = 1000 \dots 00$ (некоторое число нулей). Докажите, что тогда последние цифры чисел A и B одинаковые.

2. При $[M] > 1$ наибольшую длину имеет последовательность, для которой $X_1 = [M] - 1$, $X_2 = [M]$.

3. Центр рассматриваемой окружности совпадает с центром описанной окружности треугольника ABC .

4. Складывая и вычитая числа вида N и \bar{N} , получите число вида $990 \dots 0$.

5. Сначала добиться, чтобы портреты королей висели в порядке их царствования.

10 класс

1. Докажите, что при указанных преобразованиях строк число не может оказаться в том же самом положении на строке после менее чем n преобразований.

3. Числа 1, 2, 3, 10, 11, 12 не могут стоять рядом.

4. Сначала выберите прожекторы в четырёх точках на наибольшей высоте и осветите полупространство, расположенное под этими точками.

5. Пусть число i состоит из одних единиц, а a и b состоят из двоек и троек, так что никакие два разряда не совпадают. Применив метод от противного, выясните, какие цифры можно приписать к числам $1i$, $2a$, $3b$, $1a$, $2i$, $3i$, $1b$, $2b$, $3a$.

Решения

1958 год (XXI олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Начинаящий первым ход записывает произвольный коэффициент при z в первом уравнении. Затем на ход второго он отвечает следующим образом. Если второй записывает какой-то коэффициент при x или при y , то первый записывает в том же самом уравнении при y или при x такой же коэффициент. Если же второй записывает какой-то коэффициент при z , то первый записывает произвольный коэффициент при z в оставшемся уравнении. Полученная система имеет решение $(1, -1, 0)$.

2. Пусть O — центр круга. Точки P и Q лежат на окружности с диаметром OM , т. е. точки O, P, Q и M лежат на окружности постоянного радиуса. При этом либо $\angle POQ = \angle AOD$ (рис. 4, а), либо $\angle POQ = \angle BOD = 180^\circ - \angle AOD$ (рис. 4, б), поэтому длина хорды PQ постоянна.

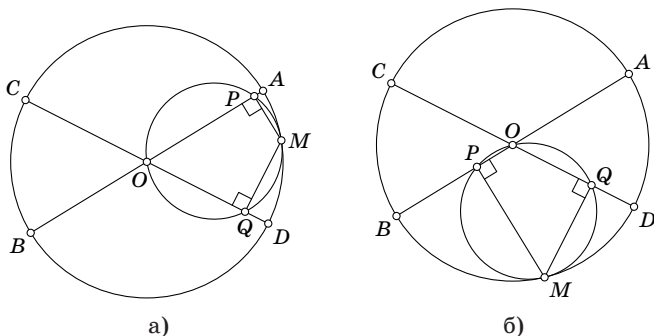


Рис. 4

3. Пусть сумма первых двух цифр равна n , и сумма двух последних цифр тоже равна n . Число n принимает значения от 1 до 18. Если количество двузначных номе-

ров, у которых сумма цифр равна n , равно a_n , то искомое число равно $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{18}^2$. Двухзначный номер, у которого сумма цифр равна n , состоит из цифр a и $n - a$, где $0 \leq a \leq 9$ и $0 \leq n - a \leq 9$. Таким образом, $0 \leq a \leq 9$ и $n - 9 \leq a \leq n$. Если $n \leq 9$, то два неравенства эквивалентны неравенству $0 \leq a \leq n$, а если $n \geq 9$, то два неравенства эквивалентны неравенству $n - 9 \leq a \leq 9$. В итоге получаем $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, ..., $a_8 = 9$, $a_9 = 10$, $a_{10} = 9$, ..., $a_{17} = 2$, $a_{18} = 1$.

4. Сначала решим следующую задачу: в данном квадрате отметить на границе две точки A и B , так чтобы отношение суммы расстояний от точки A до вершин квадрата к длине отрезка AB было минимальным.

Прежде всего заметим, что сумма расстояний от точки A до вершин квадрата не зависит от выбора точки B , поэтому отношение будет минимальным, когда точка B является наиболее удалённой от A вершиной квадрата.

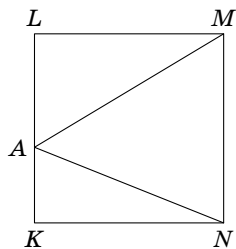


Рис. 5

Обозначим вершины квадрата K, L, M и N . Пусть точка A лежит на стороне KL так, что $AM \geq AN$ (рис. 5). Покажем, что

$$\frac{AK + AL + AM + AN}{AM} \geq \frac{KL + KM + KN}{KM}.$$

Действительно, $\frac{AK + AL}{AM} \geq \frac{KL}{KM}$ и $\frac{AN}{AM} \geq \frac{KN}{KM}$, так как $AM \leq KM$ и $AN \geq KN$, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{AK + AL + AM + AN}{AM} &= \frac{AK + AL}{AM} + \frac{AM}{AM} + \frac{AN}{AM} \geq \\ &\geq \frac{KL}{KM} + \frac{KM}{KM} + \frac{KN}{KM} = \frac{KL + KM + KN}{KM}. \end{aligned}$$

Таким образом, отношение суммы расстояний от точки A до вершин квадрата к длине отрезка AB минимально, когда A и B — противоположные вершины квадрата.

Вернёмся к первоначальной задаче. Обратим внимание, что требуется найти квадрат, для которого отношение

суммы расстояний от точки A до вершин K длине отрезка AB минимально (так как длина отрезка AB постоянна). Таким образом, нужно построить квадрат, в котором A и B — пара противоположных вершин. Для этого построим серединный перпендикуляр к отрезку AB и окружность радиуса $\frac{AB}{2}$ с центром в середине O отрезка AB . Точки их пересечения — две оставшиеся вершины квадрата.

5. Нас интересуют не сами числа, а лишь их остатки от деления на 1958. Поэтому будем записывать в таблицу остатки от деления на 1958. Первая строка таблицы при симметрии относительно среднего числа $\frac{1958}{2}$ преобразуется следующим образом: остаток k переходит в $-k$ (по-другому это можно сказать так: сумма чисел, равноудалённых от концов строки, делится на 1958). Следовательно, при симметрии относительно прямой, проходящей через средние числа, таблица преобразуется так, что остаток k переходит в $-k$.

Если в какой-то строке таблицы стоят числа a_1, a_2, \dots, a_n , сумма которых равна S , то в следующей строке стоят числа $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n$, сумма которых равна $2S - a_1 - a_n$. В рассматриваемой ситуации число $a_1 + a_n$ делится на 1958, поэтому при переходе к следующей строке сумма остатков каждый раз удваивается. В первой строке сумма остатков равна $\frac{1958}{2}$, поэтому во всех остальных строках сумма остатков равна 0. В частности, в последней строке стоит число, делящееся на 1958.

8 класс

1. *Первый способ.* Пусть $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OC_1}$ — построенные векторы единичной длины. Построим также вектор $\overrightarrow{OC'_1} = -\overrightarrow{OC_1}$. Точка O лежит внутри треугольника ABC , поэтому луч OC'_1 лежит внутри угла A_1OB_1 . Построим треугольник A_1OB_1 до ромба A_1OB_1D . Тогда $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{C'_1O} = \overrightarrow{C'_1D}$. Пусть S —

имеют общий корень x_1 . Вычитая из первого уравнения второе, получаем $(p_1 - p_2)x_0 + (q_1 - q_2) = 0$, т. е. $x_1 = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$ — рациональное число. Это рациональное число является корнем многочлена с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1, поэтому оно целое (см. «Основные факты»). Таким образом, в случае, когда $p_1 \neq p_2$, данные уравнения не могут иметь общий нецелый корень.

Второй способ. Рациональный корень многочлена с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 является целым (см. «Основные факты»), поэтому общий корень x_1 данных уравнений — иррациональное число. Это число имеет вид $a \pm \sqrt{b}$, где числа a и b рациональные, причём число \sqrt{b} иррациональное. По условию $(a \pm \sqrt{b})^2 + p_1(a \pm \sqrt{b}) + q_1 = 0$, т. е. $a^2 + b + p_1a + q_1 \pm (2a + p_1)\sqrt{b} = 0$. Поэтому $p_1 = -2a$ и $q_1 = a^2 - b$. Для чисел p_2 и q_2 получаем те же самые выражения.

3. Пусть O — центр поляны, A , B и C — центры стволов сосен. Рассмотрим диаметр, перпендикулярный OA . Так как люди, находящиеся в концах этого диаметра, не видят друг друга, то хотя бы один ствол сосны должен с ним пересекаться. Поэтому радиусы стволов не меньше $R/4$.

Пусть ω_A , ω_B и ω_C — окружности с центрами в A , B и C и радиусами $R/4$. Рассмотрим окружность ω с центром в O и радиусом $R/2$ (рис. 7). Отметим, что общая внешняя касательная любой пары из окружностей ω_A , ω_B и ω_C , не проходящая через точку O , касается окружности ω . Таким образом, любая касательная к окружности ω пересекается с хотя бы одной из окружностей ω_A , ω_B или ω_C .

Но если три человека обходят поляну, находясь в вершинах правильного треугольника, то отрезок, соединяющий любых двух из них, будет касательной к ω , а значит, они не смогут увидеть друг друга.

4. См. решение задачи 4 для 9 класса.

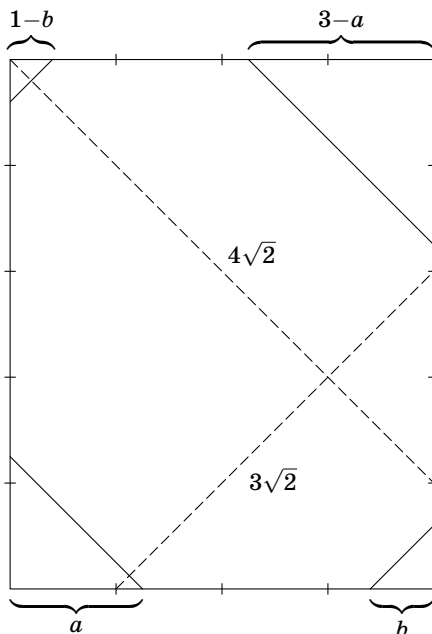


Рис. 8

наты любой точки A_i имеют вид $\left(\frac{n}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{m}{\sqrt{2}}\right)$, где m, n — целые числа.

На рис. 9 изображено начало ломаной. Индукцией по n несложно доказать, что точка A_{4n} имеет координаты $(0, 1 + n\sqrt{2})$, точка A_{4n+1} — координаты $((n+1)\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$, точка A_{4n+2} — координаты $(0, 1 - (n+2)\sqrt{2})$, а точка A_{4n+3} — координаты $\left(-\frac{2n+3}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} s_{4(n+1)} &= s_{4n} + |A_{4n}A_{4n+1}| + |A_{4n+1}A_{4n+2}| + |A_{4n+2}A_{4n+3}| + \\ &+ |A_{4n+3}A_{4n+4}| = s_{4n} + (2n+2) + (2n+2) + (2n+3) + \\ &+ (2n+3) = s_{4n} + (8n+10). \end{aligned}$$

Следовательно, $s_{4n+4} - s_{4n} > 8(n+1)$, откуда $s_{4n} > \sum_{k=1}^n 8k = 4n(n+1) > 4n^2$. С другой стороны, $l_{4n} = |OA_{4n}| = 1 + n\sqrt{2} <$

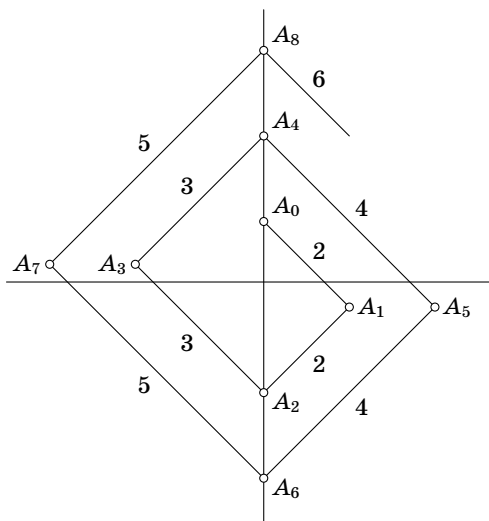


Рис. 9

$< 2n + 1 < 3n$ (при $n \geq 1$). Следовательно, $\frac{s_n}{l_n} > \frac{4n}{3} > n > 1958$ при $n > 1958$.

2. Предположим, что утверждение задачи неверно, т. е. для некоторого x , где $-1 \leq x \leq 1$, выполнено неравенство $|(a+b)x^2 + c| \geq 1$. Изменив при необходимости знаки у всех чисел a, b, c , можно считать, что $(a+b)x^2 + c \geq 1$. Аналогично, меняя знак числа x , можно считать, что $bx \leq 0$. Поскольку $x \geq -1$, $bx^2 \leq -bx$, а значит, $ax^2 - bx + c \geq ax^2 + bx^2 + c \geq 1$, что противоречит условию задачи. Полученное противоречие доказывает, что $|(a+b)x^2 + c| < 1$ при $|x| \leq 1$.

3. Сначала докажем, что пространственная фигура, состоящая из двух не параллельных и не совпадающих прямых l_1 и l_2 , имеет ровно три оси симметрии. Рассмотрим для этого плоскость Π , параллельную прямым l_1 и l_2 и равноудалённую от них (в случае пересекающихся прямых это будет содержащая их плоскость). Если при осевой

симметрии каждая из прямых l_1 и l_2 переходит в себя, то ось симметрии ортогональна обоим прямым. Если же прямые l_1 и l_2 переходят друг в друга, то ось симметрии лежит в плоскости Π и является осью симметрии фигуры, состоящей из ортогональных проекций прямых l_1 и l_2 на плоскость Π . Таким образом, осями симметрии будут прямая, ортогональная плоскости Π и проходящая через точку пересечения проекций, и две биссектрисы углов, образованных ортогональными проекциями прямых l_1 и l_2 на плоскость Π .

Если фигура, состоящая из трёх прямых, имеет ось симметрии, то при симметрии относительно этой оси либо каждая из трёх прямых переходит в себя, либо одна прямая переходит в себя, а две оставшиеся прямые переходят друг в друга. Поэтому ось симметрии фигуры, состоящей из трёх прямых, является также осью симметрии некоторых двух из этих прямых. Из трёх прямых можно выбрать три пары прямых. Поэтому количество осей симметрии фигуры, состоящей из трёх прямых, не превосходит 9. Ясно также, что фигура, состоящая из трёх взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через одну точку, имеет ровно 9 осей симметрии.

4. Выражение в левой части больше $\frac{1}{2}$, поэтому $x_1 < 2$, а значит, $x_1 = 1$. Пусть $a = 0$ и $x = \frac{1}{x_2}$ при $n = 2$, а при $n > 2$

$$\frac{1}{3 + \dots + \frac{1}{n}} = a \quad \text{и} \quad \frac{1}{x_2 + \dots + \frac{1}{x_n}} = x.$$

Тогда $1 - \frac{1}{2+a} = \frac{1}{1+x}$, т. е. $\frac{1}{x} = 1 + a$. Таким образом,

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \dots + \frac{1}{n}}} = x_2 + \frac{1}{x_3 + \frac{1}{x_4 + \dots + \frac{1}{x_n}}}$$

Ясно, что целые части выражений в левой и правой части равны 1 и x_2 , поэтому $x_2 = 1$. После этого получаем равенство

$$3 + \frac{1}{4 + \dots + \frac{1}{n}} = x_3 + \frac{1}{x_4 + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Снова сравнивая целые части, получаем $x_3 = 3$ и т. д.

5. Назовём отрезок, у которого оба конца являются отмеченными точками, *псевдоотмеченным*.

Докажем утверждение задачи индукцией по n . Для $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что для $n = m$ утверждение задачи верно, тогда докажем его для $n = m + 1$.

Заметим, что в отрезке длины 3^{m+1} , разбитом на три равные части, первая и третья части являются отрезками длины 3^m и удовлетворяют предположению индукции. Поэтому для любого k такого, что $1 \leq k \leq 3^m$ существует псевдоотмеченный отрезок длины k . Ясно также, что при параллельном переносе, совмещающем первую часть с третьей, отмеченные точки совмещаются с отмеченными.

Теперь заметим, что если в отрезке длины 3^m существует псевдоотмеченный отрезок длины l , то дополнением к нему будут два псевдоотмеченных отрезка (возможно, один из них имеет нулевую длину), прилегающих к концам большого отрезка и имеющих суммарную длину $3^m - l$. При этом к центральному отрезку длины 3^m будут прилегать два отмеченных отрезка, имеющих суммарную длину $3^m - l$.

Таким образом, если $3^m < k < 2 \cdot 3^m$, то псевдоотмеченный отрезок длины k существует и состоит из центрального отрезка длины 3^m , а также прилегающих к его концам двух псевдоотмеченных отрезков суммарной длиной $k - 3^m$, где $0 \leq k - 3^m \leq 3^m$. Если же $2 \cdot 3^m \leq k \leq 3^{m+1}$, то искомый псевдоотмеченный отрезок существует, поскольку

ку существуют два псевдоотмеченных отрезка, прилегающих к концам отрезка длины 3^{m+1} , с суммарной длиной $0 \leq 3^{m+1} - k \leq 3^m$, а значит, дополнением к ним является псевдоотмеченный отрезок длины k .

10 класс

1. Для каждой из четырёх данных проекций многоугольника рассмотрим полосу, состоящую из точек, которые проецируются на данную проекцию. Каждая граница такой полосы пересекает все остальные полосы, поскольку иначе проекция многоугольника была бы меньше, чем нужно. Таким образом, пересечение этих полос — восьмиугольник P , который может быть и вырожденным (некоторые его стороны могут иметь нулевую длину). Искомый многоугольник M заключается внутри восьмиугольника P , причём на каждой из сторон восьмиугольника P должна быть хотя бы одна вершина многоугольника M . Выбрав на каждой из сторон восьмиугольника P по одной вершине многоугольника M , получим новый восьмиугольник Q , который тоже может быть вырожденным, поскольку некоторые из выбранных вершин могут совпадать друг с другом или с вершинами восьмиугольника P . Многоугольник M выпуклый, поэтому он содержит восьмиугольник Q (на рисунке 10 заштрихована часть многоугольника M , расположенная вне восьмиугольника). Наша задача сводится к тому, чтобы выяснить, когда площадь восьмиугольника Q будет наименьшей.

Пусть A , B и C — вершины восьмиугольника Q , расположенные на трёх последовательных сторонах многоугольника P (рис. 11). При перемещении вершины B по стороне, на которой она расположена, площадь треугольника ABC изменяется монотонно (или остаётся постоянной). Поэтому можно считать, что B — одна из вершин восьмиугольника P . Это относится и к остальным вершинам восьмиугольника Q . Таким образом, вершины восьмиугольника Q — это некоторые из вершин восьмиуголь-

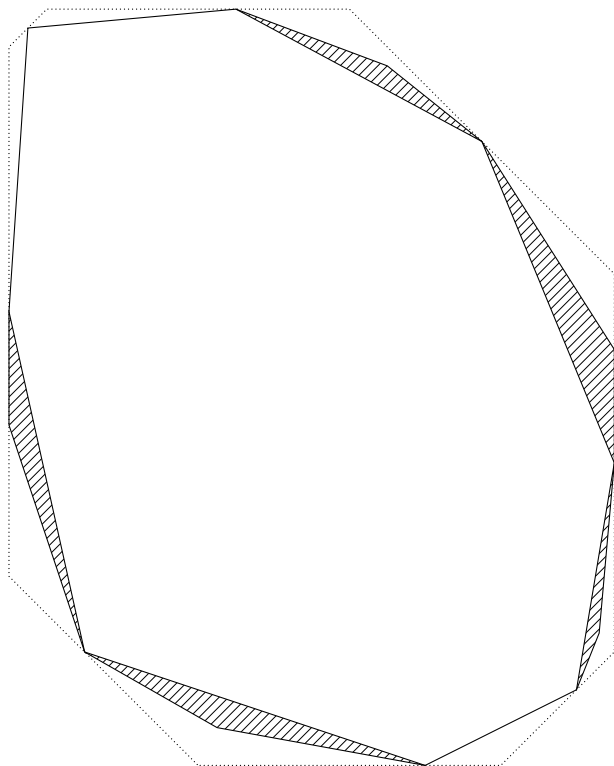


Рис. 10

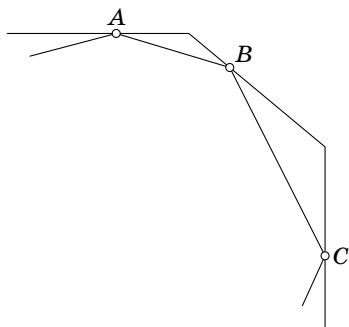


Рис. 11

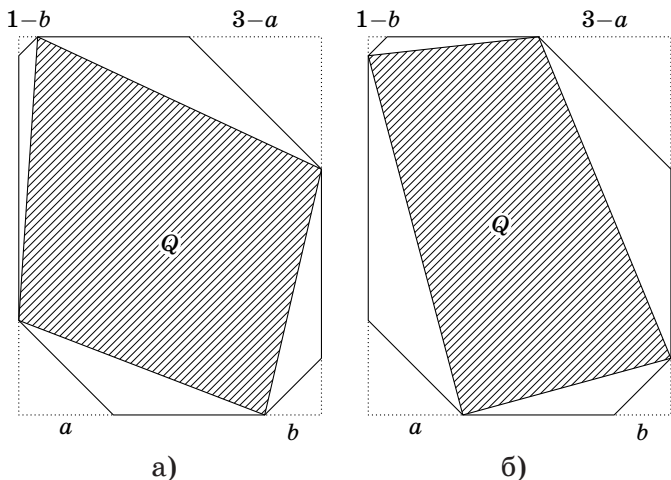


Рис. 12

ника P . Этот набор вершин восьмиугольника P обладает следующими двумя свойствами: 1) в нём не могут отсутствовать две соседние вершина восьмиугольника P (иначе проекция многоугольника M оказалась бы меньше, чем требуется); 2) в нём не могут присутствовать три последовательные вершины восьмиугольника P (иначе площадь восьмиугольника Q не была бы наименьшей). Перебирая все варианты, получаем, что возможны лишь два случая: либо восьмиугольник Q вырождается в четырёхугольник (вершины восьмиугольника P берутся через одну, как на рис. 12), либо восьмиугольник Q вырождается в пятиугольник (выбирается одна вершина восьмиугольника P , соседние с ней и противоположная ей вершины отсутствуют, как на рис. 13).

Рассмотрим сначала случай, когда восьмиугольник Q вырождается в четырёхугольник. Этот четырёхугольник может быть расположен двумя разными способами: см. рис. 12. При решении задачи 5 для 8 класса было объяснено, что от прямоугольника размером 4×5 при этом действительно отрезаются равнобедренные прямоуголь-

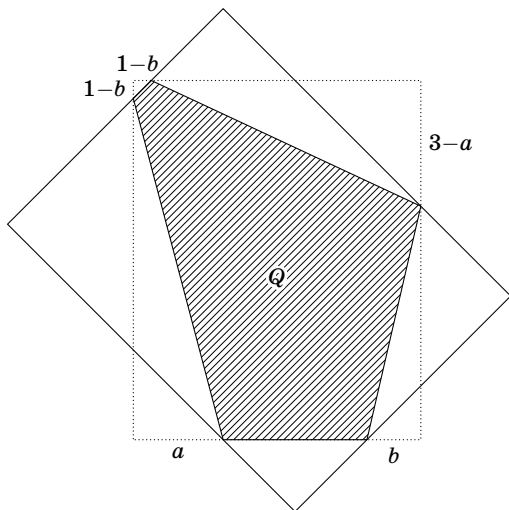


Рис. 13

ные треугольники с катетами a и $3-a$, b и $1-b$, как показано на рисунке 12. Поэтому в случаях (а) и (б) четырёхугольник Q получается в результате отрезания треугольников, суммарная площадь которых равна

$$\frac{1}{2}(a(4-b) + (5-a)(1-b) + (3+b)(3-a) + b(2+a)) = 7$$

и

$$\frac{1}{2}(a(4+b) + (1-b)(1+a) + (3-a)(5-b) + b(4-a)) = 8$$

соответственно, следовательно, площадь четырёхугольника Q равна 13 и 12 соответственно.

Рассмотрим теперь случай, когда восьмиугольник Q вырождается в пятиугольник. В этом случае, в отличие от случая четырёхугольника, площадь пятиугольника Q зависит от a и b . Пятиугольник может быть расположен четырьмя разными способами. Действительно, одна его сторона лежит на большей или на меньшей стороне прямоугольника размером 4×5 с вертикальными и горизонтальными сторонами, а другая — на большей или мень-

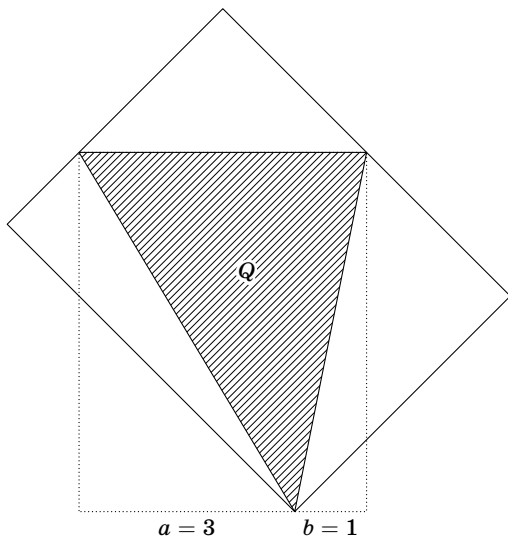


Рис. 14

шей стороне прямоугольника размером $3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$ с наклонными сторонами.

Несложные вычисления показывают, что в тех двух случаях, когда сторона пятиугольника лежит на вертикальной (большей) стороне прямоугольника, его площадь не меньше 12, а в двух оставшихся случаях его площадь не меньше 10. Проведём эти вычисление для пятиугольника Q, изображённого на рисунке 13. В этом случае отрезаются треугольники, удвоенная площадь которых равна $a(4+b) + (1-b)^2 + (3+b)(3-a) + b(2+a) = 10 + a + 3b + ab + b^2 \leq 20$, поскольку $a \leq 3$ и $b \leq 1$. Следовательно, площадь пятиугольника Q не меньше $20 - \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$. Равенство достигается в случае, когда $a = 3$ и $b = 1$ (рис. 14).

2. С одной стороны,

$$1155^{1958} + 34^{1958} = (1155^{979})^2 + 34^{1958} > (1155^{979})^2.$$

С другой стороны, $1155^{1958} + 34^{1958} < (1155^{979} + 2)^2$, поскольку

ку $34^{1958} = (34^2)^{979} = 1156^{979}$ и

$$\left(\frac{1156}{1155}\right)^{979} = \left(1 + \frac{1}{1155}\right)^{979} < \left(1 + \frac{1}{1155}\right)^{1155} < 3 < 4,$$

т. е. $1156^{979} < 4 \cdot 1155^{979}$. (Неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ справедливо для любого натурального n : см. «Основные факты»).

Таким образом, если бы число $1155^{1958} + 34^{1958}$ было квадратом натурального числа n , то число n было бы равно $1155^{979} + 1$. Но этого не может быть, потому что число $1155^{979} + 1$ чётно, а число $1155^{1958} + 34^{1958}$ нечётно.

4. В силу симметрии правильного 100-угольника любые два из ста чисел встречаются в наборах на тринадцатом месте одинаковое количество раз, а значит, количество наборов кратно 100. Если непрерывно поворачивать правильный 100-угольник против часовой стрелки вокруг его центра, то, во-первых, встретятся все наборы, которые вообще могут встретиться, а во-вторых, смена наборов если и будет происходить, то только тогда, когда одна из диагоналей или сторон 100-угольника будет параллельна краю стола. Всего различных направлений сторон у правильного 100-угольника 50. Любая диагональ параллельна либо стороне, либо диагонали, соединяющей вершины многоугольника, идущие через одну — таких различных направлений еще 50. За полный оборот 100-угольника смена наборов происходит не более двух раз по каждому направлению, а значит, всего не более 200 раз. Число 1 встречается на первом месте как минимум в двух наборах. Действительно, у вершины, в которой написано число 1, есть две соседние вершины, и оба числа, написанных в этих вершинах, могут встретиться на втором месте, когда на первом месте стоит 1. Кроме того, количество наборов кратно 100, поэтому всего различных наборов ровно 200. Следовательно, сумма чисел, стоящих в этих наборах на 13-х местах слева равна $2 \cdot (1 + 2 + \dots + 100) = 10100$.

5. Введём наряду с координатами в плоскости, в которой движутся пешеходы, ещё и третью ось координат — ось времени. Рассмотрим графики движения пешеходов. Ясно, что пешеходы встречаются, когда их графики движения пересекаются. Из условия задачи следует, что графики движения третьего и четвёртого пешеходов лежат в плоскости, заданной графиками двух первых пешеходов (при доказательстве этого нужно воспользоваться тем, что никакие три данные прямые не пересекаются в одной точке). Поэтому графики движения третьего и четвёртого пешеходов пересекаются, поскольку никакие две данные прямые не параллельны.

Второй тур

7 класс

1. *Первый способ.* Предположим, что на плоскости удалось расположить 5 выпуклых многоугольников так, что каждые два из них имеют общую сторону. Выберем внутри каждого из многоугольников по одной точке; пусть это будут точки A, B, C, D и E . Затем на каждой общей стороне двух многоугольников отметим точку и соединим её отрезками с точками, выбранными внутри этих двух многоугольников. В результате точки A, B, C, D и E будут попарно соединены двузвенными ломаными, причём эти 10 ломаных не будут иметь общих точек за исключением их концов. Покажем, что такого быть не может.

Ломаные, соединяющие точки A и B, B и C, C и D, D и E, E и A , составляют замкнутую несамопересекающуюся ломаную L , и она разбивает плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю. Помимо указанных ломаных у нас есть ещё 5 ломаных, соединяющих точки A, B, C, D и E . Три из них лежат в одной области. Среди этих трёх ломаных можно выбрать две, не имеющие общих концов. Возьмём одну из них. Вместе с ломаной L она разбивает плоскость на 3 области, причём концы другой ломаной лежат в разных областях. Следовательно, рассматривае-

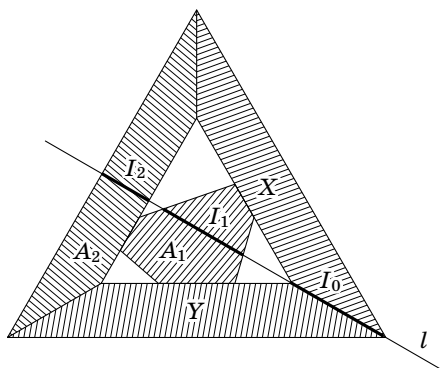


Рис. 15

мые 10 ломаных имеют общую точку, отличную от их концов. Получено противоречие, поэтому на плоскости нельзя расположить больше четырёх выпуклых многоугольников так, чтобы каждые два из них имели общую сторону.

Второй способ. Предположим, что на плоскости удалось расположить пять выпуклых многоугольников X , Y , A_1 , A_2 , A_3 так, что каждые два из них имеют общую сторону. Проведём прямую l через общую сторону I_0 многоугольников X и Y . В силу выпуклости каждый из этих двух многоугольников лежит по одну сторону от прямой l . Каждый из оставшихся многоугольников A_i имеет общую сторону как с многоугольником X , так и с многоугольником Y . Следовательно, у него есть точки по обе стороны от прямой l , а значит, он пересекает эту прямую по некоторому отрезку I_i . На прямой l с какой-то стороны от отрезка I_0 лежат хотя бы два из этих трёх отрезков; без ограничения общности можно считать, что по одну сторону от I_0 лежат отрезки I_1 и I_2 , причём ближайший к I_0 — это I_1 , а следующий за ним I_2 (рис. 15). В таком случае, так как многоугольник A_2 имеет общие стороны с обоими многоугольниками X и Y , многоугольник A_1 лежит внутри объединения многоугольников X , Y и A_2 , а потому не может иметь общей стороны с многоугольником A_3 . По-

лучено противоречие, поэтому на плоскости нельзя расположить больше четырёх выпуклых многоугольников так, чтобы каждые два из них имели общую сторону.

2. Сначала заметим, что у любой пары чисел (a_i, a_j) ($i \neq j$) в наборе можно изменить знаки. Для этого возьмём произвольные десять чисел, отличных от a_i и a_j . Тогда, изменив знаки сначала у этих десяти чисел и числа a_i , а потом у тех же десяти чисел и числа a_j , получим, что знаки изменились только у a_i и a_j . Теперь заметим, что можно изменить знак у любого числа a_i из набора. Рассмотрим произвольные десять чисел b_1, b_2, \dots, b_{10} , отличные от a_i , тогда сначала изменим знаки у $b_1, b_2, \dots, b_{10}, a_i$, а затем изменим знаки у пар: $(b_1, b_2), (b_3, b_4), \dots, (b_9, b_{10})$. Тем самым в итоге знак изменится только у a_i . Таким образом, сменив знаки у всех несовпадающих чисел, из любого набора можно получить любой другой набор за конечное число шагов.

3. На рисунке 16 приведён пример раскраски куба, удовлетворяющей условию задачи. При каждой из вершин куба, помеченных буквой А, есть три чёрных и три белых угла в 45° , а при каждой из остальных вершин есть только один чёрный и один белый угол в 45° и ещё есть один чёрный и один белый прямой угол.

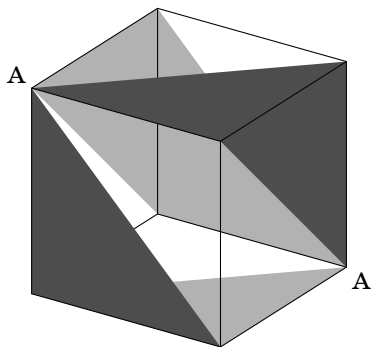


Рис. 16

4. Рассмотрим квадратный трёхчлен $f(x) = x(a - x)$, где $a > 0$. Пусть b — положительное число, $b < \frac{a}{2}$. Если $b < x < a - b$, то $f(x) > f(b)$ (рис. 17).

$(n+1)(m+1)$. Для этого заметим, что из любого узла сетки, расположенного внутри или на границе прямоугольника $n \times m$, выходит ровно одно звено пути, потому что иначе в этом узле либо ни разу не побывали, либо побывали более одного раза. Всего узлов внутри или на границе прямоугольника $(n+1)(m+1)$, а значит, длина ломаной равна $(n+1)(m+1)$.

8 класс

1. Выделим в полученном многоугольнике совместившиеся части (на рис. 19 эти части заштрихованы). Все стороны, не принадлежащие заштрихованным многоугольникам, входят в периметр исходного и полученного многоугольников. Что же касается заштрихованных многоугольников, то их стороны, лежащие на прямой сгиба, входят в периметр полученного многоугольника, а все остальные — в периметр исходного многоугольника. Так как у любого многоугольника сумма его сторон, лежащих на некоторой прямой, меньше суммы остальных сторон, то периметр исходного многоугольника всегда больше, чем периметр полученного.

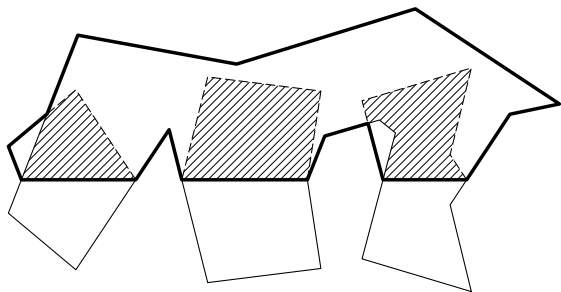


Рис. 19

Комментарий. В связи с этой задачей представляет интерес вопрос о том, можно ли так сложить прямоугольный лист бумаги на плоскости, что периметр полученной фигуры превысит периметр исходного листа. Этот вопрос был поставлен В. И. Арнольдом в 1956 году. Частичные решения были получены Р. Лэнгом и И. Яценко в 90-е

годы, а исходная задача Арнольда была решена А. Тарасовым только в 2004 году. Подробности можно найти на сайте «Математические этюды» (<http://www.etudes.ru/ru/mov/mov051/>) или в статье А. Петруни-на <http://arxiv.org/abs/1004.0545>.

2. Докажем, что одно из чисел $\frac{5}{4} - a_1$, $3\left(\frac{5}{4} - a_2\right)$ больше единицы. Действительно, пусть оба эти числа не превосходят единицы:

$$\begin{aligned}\frac{5}{4} - a_1 &\leq 1; \\ 3\left(\frac{5}{4} - a_2\right) &\leq 1.\end{aligned}$$

Умножив первое неравенство на 3 и сложив со вторым, получим

$$3\left(\frac{5}{2} - a_1 - a_2\right) \leq 4,$$

откуда

$$a_1 + a_2 \geq \frac{5}{2} - \frac{4}{3} = \frac{7}{6} > 1,$$

что противоречит условию. Итак, одно из чисел $\frac{5}{4} - a_1$, $3\left(\frac{5}{4} - a_2\right)$ больше единицы. Значит, достаточно взять либо $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, либо $b_1 = 0$, $b_2 = 1$.

3. Рассмотрим точки M' и N' , в которых прямые CD и CE пересекают прямые OB и OA ; если угол AOB острый, то прямые CD и CE пересекают лучи OB и OA , а если этот угол тупой, то они пересекают продолжения этих лучей (рис. 20).

Пусть $\angle AOB = \alpha$. Тогда $OM = OE |\cos \alpha| = OM' |\cos \alpha|^2$ и $ON = OD |\cos \alpha| = ON' |\cos \alpha|^2$, поэтому $M'N' \parallel MN$. Точка C является точкой пересечения высот $M'E$ и $N'D$ треугольника $OM'N'$, поэтому $OC \perp M'N'$. Следовательно, $OC \perp MN$.

4. Перемножив неравенства $1 < n$, $2^2 < n^2$, $3^3 < n^3$, ..., $(n-1)^{n-1} < n^{n-1}$, $n^n \leq n^n$, получим

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot n^n < n^{1+2+3+\dots+n} = n^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

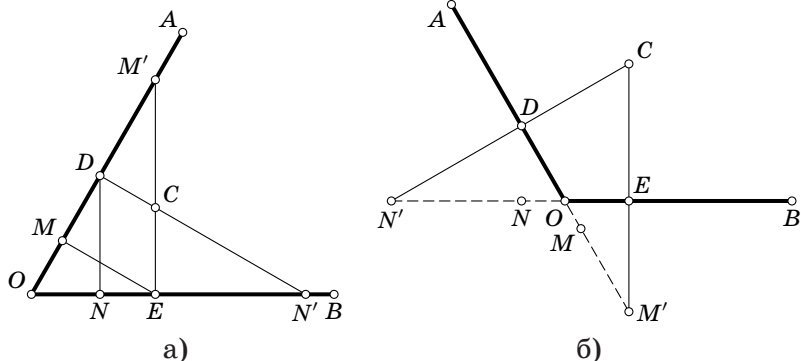


Рис. 20

5. Пусть D_1, \dots, D_a — непересекающиеся круги диаметра 1, центры которых принадлежат многоугольнику M . Рассмотрим наряду с ними круги D'_1, \dots, D'_a радиуса 1 с теми же центрами. Предположим, что круги D'_1, \dots, D'_a не покрывают какую-либо точку A многоугольника M . Тогда эта точка удалена от центров всех кругов не меньше чем на 1, поэтому круг диаметра 1 с центром A не пересекается ни с одним из кругов D_1, \dots, D_a диаметра 1, и его можно добавить к этим кругам. Это противоречит определению числа a , поэтому наше предположение неверно, т. е. круги D'_1, \dots, D'_a радиуса 1 полностью покрывают многоугольник. А так как b — наименьшее число кругов радиуса 1, которыми можно покрыть многоугольник M , то $b \leq a$.

Комментарий. Числа a и b могут быть равны. Например, если многоугольник M очень мал, то $a = 1$ и $b = 1$.

9 класс

1. Если $x^{2y-1} + (x+1)^{2y-1} = (x+2)^{2y-1}$, то $x^{2y-1} \equiv (x+2)^{2y-1} \pmod{x+1}$. Но $x^{2y-1} \equiv (-1)^{2y-1} \equiv -1 \pmod{x+1}$ и $(x+2)^{2y-1} \equiv 1^{2y-1} \equiv 1 \pmod{x+1}$. Поэтому $1 \equiv -1 \pmod{x+1}$, а значит, $x+1=2$, т. е. $x=1$. Подставляя $x=1$ в исходное уравнение, приходим к уравнению $1 + 2^{2y-1} = 3^{2y-1}$, которое имеет только одно решение: $y=1$.

2. Если $n = 2k$, то половину лучей проведём в одном направлении, а оставшуюся половину — в противоположном. Если же $n = 2k + 1$, то k лучей проведём в одном направлении, а оставшиеся $k + 1$ — в противоположном. Обозначим сумму попарных углов для таких наборов n лучей через $S(n)$. Ясно, что $S(2k) = k^2 \cdot 180^\circ$ и $S(2k + 1) = k(k + 1) \cdot 180^\circ$.

Докажем индукцией по n , что сумма попарных углов между n лучами не может быть больше $S(n)$. Для $n = 2$ это утверждение очевидно. Предположим, что оно верно для всех $n \leq m$, и тогда докажем его для $n = m + 1$.

Мы будем пользоваться тем, что если на плоскости точки O проведены два противоположно направленных луча OA_1 и OA_2 , то $\angle A_3OA_1 + \angle A_3OA_2 = 180^\circ$, где OA_3 — любой другой луч, проведённый из этой же точки.

Предположим, что существует набор из $m + 1$ лучей с большей суммой попарных углов между лучами. Пусть OA — один из этих лучей. Тогда прямая, на которой лежит этот луч, делит все лучи на три группы: лежащие в одной и в другой полуплоскостях, а также лежащие на этой прямой. Допустим, что среди рассматриваемых лучей нет луча, дополняющего луч OA до прямой. Тогда можно поворачивать луч OA , до тех пор, пока один из лучей не станет дополнять его до прямой. Причём такой поворот в сторону полуплоскости, в которой лучей не меньше, чем в другой, не уменьшает сумму попарных углов между всеми лучами. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что луч, дополняющий луч OA до прямой, есть. Выбросив из рассмотрения два противоположно направленных луча, по предположению индукции получим, что сумма попарных углов между оставшимися лучами не может превышать $(k - 1)^2 \cdot 180^\circ$, если $m + 1 = 2k$, и $k(k - 1) \cdot 180^\circ$, если $m = 2k + 1$. А значит, сумма попарных углов между всеми лучами не превышает $(k - 1)^2 \cdot 180^\circ + 2(k - 1) \cdot 180^\circ + 180^\circ = k^2 \cdot 180^\circ$, если $m + 1 = 2k$, и $k(k - 1) \cdot 180^\circ + (2k - 1) \cdot 180^\circ + 180^\circ = k(k + 1) \cdot 180^\circ$, если

$m = 2k + 1$. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно, поэтому не существует набора из $m + 1$ лучей с большей суммой попарных углов между лучами.

3. Шесть фишек, стоящих на чёрных клетках (рис. 21), бьют все клетки доски. Действительно, все клетки заштрихованного центрального ромба они бьют параллельно малой диагонали, а остальные клетки они бьют параллельно сторонам.

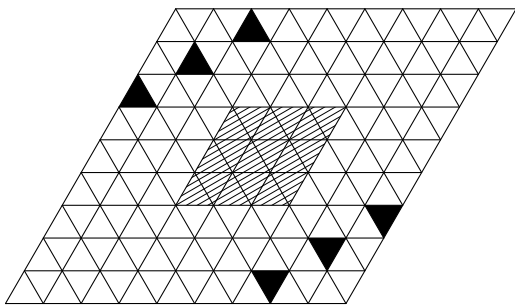


Рис. 21

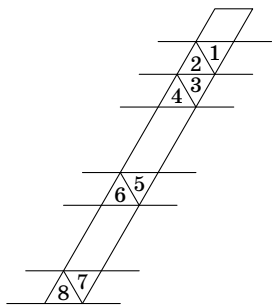


Рис. 22

Покажем теперь, что 5 фишек не могут побить все клетки доски. Для пяти фишек всегда найдутся 4 полосы, параллельных одной стороне ромба, и 4 полосы, параллельных другой стороне ромба, на которых нет фишек. Они пересекаются по 32 треугольным клеткам. Каждую из этих клеток фишка может бить только параллельно малой диагонали. Рассмотрим одну из таких полос (рис. 22). Треугольные клетки этой полосы, принадлежащие четырём полосам другого направления, лежат по крайней мере на 5 различных диагоналях. Действительно, всего таких клеток 8, но три пары клеток, принадлежащие соседним полосам, могут оказаться на одной диагонали (клетки 2 и 3 на рисунке 22). Рассмотрев вторую полосу, мы получим по крайней мере одну дополнительную диагональ, т. е. по

крайней мере 6 различных диагоналей. Наши 5 фишек не могут стоять на шести различных диагоналях, поэтому они не могут бить все клетки доски.

4. Пусть D_1, \dots, D_b — непересекающиеся круги радиуса 1 с центрами O_1, \dots, O_b , лежащими внутри многоугольника M . Все точки O_i лежат внутри многоугольника M и расстояние между любыми двумя из них больше 2. Следовательно, в любом из кругов D'_1, \dots, D'_a радиуса 1, покрывающих многоугольник M , может содержаться не более одной из точек O_i . Точки O_1, \dots, O_b содержатся в объединении кругов D'_1, \dots, D'_a , поэтому $a \geq b$.

5. Рассмотрим граф, вершинами которого являются зажимы, а рёбрами — сопротивления. Между вершинами A и B не может быть пути, состоящего из менее чем 10 рёбер, поскольку иначе при коротком замыкании всех рёбер этого пути у нас получалось бы короткое замыкание цепи. Кроме того, для любых 9 рёбер существует путь из A в B , не проходящий через эти рёбра.

Пусть A_k — множество тех вершин графа, для которых кратчайший путь до вершины A состоит из k рёбер (множество A_0 состоит из вершины A). Вершина B принадлежит некоторому множеству A_n , где $n \geq 10$. Множества A_0 и A_1 должны соединять не менее 10 рёбер; то же самое верно и для любой пары множеств A_k и A_{k+1} , где $0 \leq k \leq n-1$. Поэтому всего рёбер (т. е. сопротивлений) не меньше $10n \geq 100$.

Пример цепи с 100 сопротивлениями — 10 попарно непересекающихся путей длины 10 из вершины A в вершину B .

10 класс

1. При $y=0$ уравнение, очевидно, не имеет решения. При $y=1$ уравнение обращается в квадратное, имеющее лишь одно решение $x=3$ (второй корень $x=-1$ отрицателен).

Предположим теперь, что $y > 1$. Докажем, что в этом случае уравнение не имеет решений. Числа x^{2y} и $(x+2)^{2y}$ одной чётности, поэтому число $(x+1)^{2y}$ чётно и число $x+1$ тоже чётно, т. е. $x+1 = 2k$. Подставим это значение и значения $x = 2k - 1$ и $x + 2 = 2k + 1$ в уравнение и воспользуемся формулой разложения бинома:

$$(2k-1)^{2y} + (2k)^{2y} = (2k+1)^{2y}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} [(2k)^{2y} - 2y \cdot (2k)^{2y-1} + \dots - 2y \cdot 2k + 1] + (2k)^{2y} = \\ = (2k)^{2y} + 2y \cdot (2k)^{2y-1} + \dots + 2y \cdot 2k + 1. \end{aligned}$$

Перенесём все члены, кроме $2 \cdot 2y \cdot 2k$, в левую часть и вынесем $(2k)^3$ за скобки (это можно сделать, поскольку $y \geq 2$, а значит, $2y \geq 4$):

$$\begin{aligned} (2k)^3 [-2C_{2y}^3 - 2C_{2y}^5 (2k)^2 - \dots - 2C_{2y}^1 (2k)^{2y-4} + (2k)^{2y-3}] = \\ = 2 \cdot 2y \cdot 2k. \end{aligned}$$

После сокращения обеих частей равенства на $8k$ получаем, что число y должно делиться на k .

Докажем теперь, что $y < k$, а потому y не может делиться на k . Разделим слагаемые в равенстве (1) на $(2k)^{2y}$:

$$\left(1 - \frac{1}{2k}\right)^{2y} + 1 = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2y}.$$

Ясно, что $\left(1 - \frac{1}{2k}\right)^{2y} < 1$, поэтому $1 + \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^{2y} < 2$. С другой стороны, $\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2y} = 1 + \frac{2y}{2k} + C_{2y}^2 \left(\frac{1}{2k}\right)^2 + \dots$, так что $\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2y} > 1 + \frac{2y}{2k}$. Следовательно, $1 + \frac{2y}{2k} < 2$, поэтому $\frac{2y}{2k} < 1$, т. е. $y < k$.

2. Рассмотрим сначала случай, когда отрезок AB целиком проходит внутри или по границе многоугольника. Пересечение прямой AB с многоугольником может состоять из нескольких отрезков и точек, но оно обязательно содержит отрезок I , которому принадлежит отрезок AB .

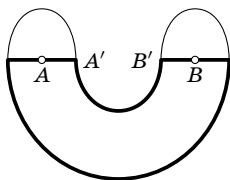


Рис. 23

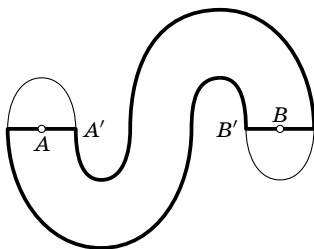


Рис. 24

Длина отрезка I не меньше длины отрезка AB . Периметр многоугольника не меньше удвоенной длины отрезка I , поскольку концы отрезка I разбивают границу многоугольника на две ломаных, длина каждой из которых не меньше длины отрезка I . Следовательно, периметр многоугольника не меньше удвоенной длины отрезка AB , т. е. он больше 2.

Рассмотрим теперь случай, когда отрезок AB не проходит целиком внутри или по границе многоугольника. В этом случае пересечение прямой AB с многоугольником содержит два непересекающихся отрезка, на одном из которых лежит точка A , а на другом — точка B . Концы этих отрезков разбивают границу многоугольника на 4 части, и ближайшие друг к другу точки этих отрезков (точки A' и B' на рис. 23; граница многоугольника схематично изображена гладкой кривой) могут принадлежать либо одной из этих частей (рис. 23), либо разным (рис. 24). Заменяем каждую из двух частей границы многоугольника, соединяющих концы одного и того же отрезка, на этот отрезок. В результате получим многоугольник, выделенный жирным на рисунке; периметр этого многоугольника не больше периметра исходного многоугольника. Легко убедиться, что полученный многоугольник составлен из двух ломаных, соединяющих точки A и B и проходящих внутри или по границе исходного многоугольника. Поэтому периметр полученного многоугольника больше 2, а значит, периметр исходного многоугольника тоже больше 2.

3. Рассмотрим все варианты наборов оценок (четвёрок и пятёрок) по $2n$ предметам. Назовём *цепью* такую последовательность наборов оценок, начинающуюся со всех четвёрок и оканчивающуюся всеми пятёрками, что каждый следующий набор получается из предыдущего заменой одной четвёрки на пятёрку. В цепи каждый следующий набор оценок лучше предыдущего, поэтому в любой цепи может встретиться не более одного набора оценок, реально существующих у учеников школы. Общее количество таких цепей равно числу перестановок $2n$ элементов, т. е. $(2n)!$. В самом деле, если сначала заменяется четвёрка, стоящая на месте с номером i_1 , затем четвёрка, стоящая на месте с номером i_2 , и т. д., то таким заменам соответствует перестановка $(i_1, i_2, \dots, i_{2n})$.

Покажем, что набор оценок каждого ученика школы содержится не менее чем в $(n!)^2$ цепях. Предположим, что его набор оценок (четвёрок и пятёрок) содержит k пятёрок. Тогда этот набор оценок содержится в $k!(2n - k)!$ цепях. Действительно, чтобы получилась цепь, содержащая этот набор, надо сначала заменить на пятёрки оценки по тем k предметам, по которым в наборе стоят пятёрки, а затем заменить оценки по всем остальным предметам. Остётся заметить, что $k!(2n - k)! \geq (n!)^2$.

Пусть число учеников в школе равно x . Набор оценок каждого из x учеников содержится не менее чем в $(n!)^2$ цепях, причём в одной цепи не могут содержаться наборы оценок двух разных учеников, поэтому наборы оценок учеников содержатся не менее чем в $x(n!)^2$ цепях. Но количество всех цепей равно $(2n)!$, поэтому $x(n!)^2 \leq (2n)!$, т. е. $x \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2} = C_{2n}^n$, что и требовалось.

4. Пусть h_a — высота, опущенная из одной из вершин параллелограмма на сторону a , h_b — на сторону b .

Докажем, что объём тела, полученного вращением такого параллелограмма вокруг стороны a , равен объёму цилиндра с высотой a и радиусом основания h_a . Если основа-

ние высоты h_a попадает на сторону a , то можно разрезать исходное тело по кругу, образованному вращением этой высоты и, переставив части, получить цилиндр с высотой a и радиусом основания h_a . А значит, объём цилиндра равен объёму исходного тела вращения. Если же основание высоты попадает на продолжение стороны a , то разрежем исходное тело на две части конусом, получающимся при вращении меньшей из диагоналей параллелограмма. Переставив части, получим фигуру, полученную вращением вокруг стороны a параллелограмма, полученного переставлением частей исходного параллелограмма, на которые его делит меньшая диагональ. При этом основание высоты сместится на расстояние a по направлению к стороне a . Такими операциями можно добиться того, чтобы высота попала на сторону.

Итак, объём тела, полученного вращением параллелограмма вокруг стороны a , равен $\pi a h_a^2$. Аналогично объём тела, полученного вращением параллелограмма вокруг стороны b , равен $\pi b h_b^2$. Заметим, что площадь параллелограмма $S = ah_a = bh_b$. А значит, $\frac{V_a}{V_b} = \frac{\pi a h_a^2}{\pi b h_b^2} = \frac{b}{a}$.

5. Пусть k — последнее показанное число. Докажем, что второй может определить число, написанное на обороте последней карточки тогда и только тогда, когда выполнена одна из следующих возможностей:

- 1) Были показаны все числа от k до n включительно.
- 2) Были показаны все числа от 0 до k включительно.
- 3) Были показаны все числа между k и $l \neq k$, а число l было показано дважды.

Сначала докажем, что в каждом из этих случаев число, написанное на обороте последней карточки, определить можно.

Действительно, в случае 1) второй знает, что на карточке, которая была показана стороной n , с другой стороны написано число $n - 1$, на карточке, показанной стороной

$n - 1$, написано число $n - 2$, ..., на карточке, показанной стороной k , написано число $k - 1$.

Случай 2) симметричен случаю 1). В случае 2) на обратной стороне написано число $k + 1$.

В случае 3) на обратной стороне будет написано число $k + 1$, если $l < k$, и число $k - 1$ в противном случае.

Предположим теперь, что второй может определить число, написанное на обороте последней карточки. Докажем, что тогда выполнен один из случаев 1) — 3).

Пусть число, написанное на обороте последней карточки, равно $k + 1$. Второй может сделать вывод, что на обороте последней карточки написано число $k + 1$, только из того, что карточка $(k - 1, k)$ уже встречалась ранее, причём она была показана стороной $k - 1$. Действительно, если обе карточки $(k, k + 1)$ и $(k - 1, k)$ были показаны стороной k , то нельзя узнать, какая из них была показана последней.

Если встречались обе карточки, показанные стороной $k - 1$, то мы попадаем в ситуацию 3). Если встречалась только одна карточка, показанная стороной $k - 1$, то мы знаем, что второй может про неё установить, что на обороте написано k . Таким образом, мы попадаем в ситуацию, аналогичную ситуации с исходной карточкой, но с меньшим k . Уменьшая таким образом k , мы попадём в одну из ситуаций 2) или 3).

Если же число, написанное на обороте последней карточки равно $k - 1$, то мы аналогично попадём в одну из ситуаций 1) или 2).

1959 год (XXII олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Рассмотрим двоичную запись числа $a = \overline{\alpha_n \dots \alpha_0}$. Пусть i_1, \dots, i_s — позиции, на которых стоит цифра 1. Тогда $a = \sum_{i=0}^n \alpha_i 2^i = \sum_{i=1}^s \alpha_{i_i} 2^{i_i} = \sum_{i=1}^s 2^{i_i}$. Заметим, что a_i нечётно тогда и только тогда, когда на i -й позиции двоичной за-

писи числа a стоит цифра 1. Поскольку справа от a_i стоит $b \cdot 2^i$, искомая сумма равна $\sum_{i=1}^s b \cdot 2^{i_i} = b \sum_{i=1}^s 2^{i_i} = ab$.

Комментарий. Этот довольно эффективный способ умножения чисел иногда называют способом русских крестьян, а иногда египетским способом.

2. Ясно, что $2^{2^{1959}} - 1 = 2^{2 \cdot 2^{1958}} - 1 = 4^{2^{1958}} - 1$. Число $4^n - 1 = (4 - 1)(4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4 + 1)$ делится на $4 - 1 = 3$ при любом n .

3. Достаточно доказать, что все двузначные числа, не оканчивающиеся нулями, можно расположить в последовательности так, чтобы последняя цифра каждого числа была равна первой цифре следующего за ним. Действительно, в такой последовательности первая цифра первого числа совпадает с последней цифрой последнего числа, поэтому такую последовательность можно записать 10 раз подряд, и в первой последовательности между цифрами каждого двузначного числа вставить 0, во второй вставить 1 и т. д. В результате получим требуемую последовательность.

Задача о последовательности двузначных чисел допускает следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим правильный 9-угольник и сопоставим его вершинам цифры от 1 до 9, а направленному отрезку из вершины a в вершину b сопоставим число $10a + b$. Требуется доказать, что можно выйти из некоторой вершины 9-угольника и совершить обход по его сторонам и диагоналям так, чтобы каждую сторону и диагональ пройти дважды (в противоположных направлениях) и вернуться в исходную вершину. Достаточно доказать, что можно совершить обход так, чтобы по каждой стороне и диагонали пройти ровно один раз. Действительно, такой обход можно повторить в противоположном направлении.

Рассмотрим отдельно стороны, диагонали, соединяющие вершины через одну, через две и через три. Диагона-

ли, соединяющие вершины через две, составляют три треугольника. Мы не можем совершить требуемый обход по таким диагоналям, поэтому добавим к ним стороны многоугольника. Для полученной конфигурации требуемый обход изображён на рисунке 25: мы выходим из вершины с пометкой 1, идём в вершину с пометкой 2, затем в вершину с пометкой 3, и т. д. и, наконец, из вершины с пометкой 18 возвращаемся в исходную вершину. А для конфигурации, состоящей из диагоналей, соединяющих вершины через одну (через три), обход очевиден.

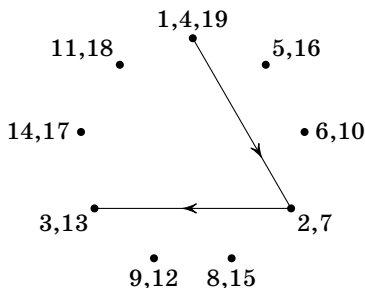


Рис. 25

Комментарий. Эйлер доказал, что если граф связан и количество вершин, из которых выходит нечётное число рёбер, не превосходит двух, то можно совершить обход этого графа так, чтобы по каждому ребру пройти ровно один раз. (См., например, [6], задача 22.6.) В рассматриваемом в этой задаче графе нет вершин, из которых выходит нечётное число рёбер, поэтому такой обход существует и заканчивается он в той же вершине, в какой начинается.

4. Предположим, что ладья совершила обход шахматной доски, побывав при этом на каждом поле по одному разу. Покажем, что тогда ладья должна либо сделать ход вдоль каждой вертикали, либо вдоль каждой горизонтали. Действительно, пусть вдоль некоторой вертикали ладья никогда не делала хода. По условию ладья побывала на всех полях этой вертикали, поэтому каждое её поле ладья проходила, двигаясь вдоль соответствующей горизонтали. Следовательно, ладья двигалась хотя бы один раз вдоль каждой горизонтали.

Пусть, для определённости, ладья двигалась хотя бы один раз вдоль каждой вертикали. На каждую вертикаль (кроме, быть может, той, с которой начинается обход, и

той, на которой обход заканчивается) ладья должна сначала войти, а затем выйти с неё. При входе на вертикаль и при выходе с неё обязательно делаются повороты.

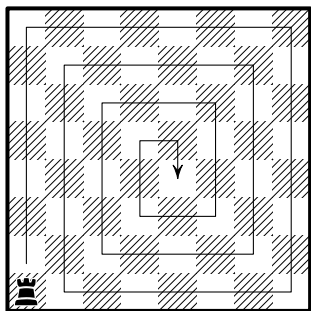


Рис. 26

Таким образом, общее число поворотов не меньше, чем $6 \cdot 2 + 1 + 1 = 14$. Действительно, есть 6 вертикалей, куда ладья входит и откуда выходит, есть начальная вертикаль, откуда ладья только выходит, и есть конечная вертикаль, куда ладья только входит.

Итак, ладья не может сделать меньше 14 поворотов. Пример обхода, содержащего ровно 14 поворотов, приведён на рисунке 26.

5. Введём на плоскости систему координат так, чтобы вершины квадрата имели координаты $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$. Заметим, что для точки с координатами (x, y) сумма расстояний до сторон параллельных Oy равна $2|x|$, если $|x| > \frac{1}{2}$, и равна 1, если $|x| \leq \frac{1}{2}$. Аналогично для сторон, параллельных оси Ox .

Внутри квадрата сумма расстояний до сторон постоянна и равна 2, поэтому внутри квадрат нет точек искомого ГМТ. Рассмотрим теперь остальные восемь областей, на которые прямые, содержащие стороны квадрата, разбивают плоскость. В четырёх из этих областей, задаваемых неравенствами $|x| \geq \frac{1}{2}$ и $|y| \geq \frac{1}{2}$, точки искомого ГМТ удовлетворяют уравнению $|x| + |y| = 2$. В двух областях, задаваемых неравенствами $|x| \leq \frac{1}{2}$ и $|y| \geq \frac{1}{2}$, точки искомого ГМТ удовлетворяют уравнению $1 + 2|y| = 4$, т. е. $|y| = \frac{3}{2}$. В двух областях, задаваемых неравенствами $|x| \geq \frac{1}{2}$ и $|y| \leq \frac{1}{2}$, точки искомого ГМТ удовлетворяют уравнению $|x| = \frac{3}{2}$.

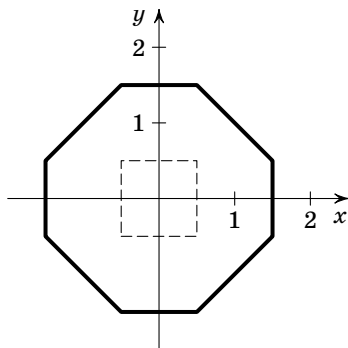


Рис. 27

Таким образом, искомое ГМТ — восьмиугольник, стороны которого лежат на прямых, задаваемых уравнениями $x = \pm \frac{3}{2}$, $y = \pm \frac{3}{2}$, $x + y = \pm 2$, $x - y = \pm 2$ (рис. 27; исходный четырёхугольник изображён пунктиром).

8 класс

1. При каждом переливании мы увеличиваем или уменьшаем содержимое бочки на $2 - \sqrt{2}$ или на $\sqrt{2}$. Поэтому такими ковшами нельзя перелить объём жидкости, отличный от $m(2 - \sqrt{2}) + n\sqrt{2}$ литров, где m и n — целые числа. Поэтому достаточно доказать, что число 1 нельзя представить в виде $m(2 - \sqrt{2}) + n\sqrt{2}$, где m и n — целые числа.

Если $m \neq n$, то число $m(2 - \sqrt{2}) + n\sqrt{2}$ иррационально. А если $m = n$, то это число чётно (оно равно $2m$). В обоих случаях оно не может быть равно 1.

2. Все такие числа должны состоять из цифр, имеющих смысл при переворачивании листа, причём число определяется первыми пятью своими цифрами. Заметим, что пятая цифра не может быть 6 или 9, а также первая цифра не может быть 0. Получаем, что для первой цифры четыре варианта — 1, 6, 8, 9. Для второй, третьей и четвёртой пять вариантов — 0, 1, 6, 8, 9, а для пятой три варианта —

0, 1, 8. Таким образом, получаем, что всего таких чисел $4 \cdot 5^3 \cdot 3 = 1500$.

3. Пусть расстояние от точек A , K и B до прямой CD равны h_1 , h и h_2 . Тогда $h = \frac{h_1 + h_2}{2}$. Пусть длина стороны CD равна $2a$. Тогда $S_{CKD} = ah$, $S_{ADM} = \frac{1}{2}ah_1$ и $S_{BCM} = \frac{1}{2}ah_2$. Поэтому $S_{CKD} = S_{ADM} + S_{BCM}$. Вычитая из обеих частей этого равенства $S_{PCM} + S_{ODM}$, получаем требуемое.

5. Пусть R_1 и R_2 — радиусы данных окружностей с центрами O_1 и O_2 . Рассматривая внутренние касательные a_1 и a_2 , получаем, что точка O лежит на отрезке O_1O_2 , причём $O_1O : OO_2 = R_1 : R_2$ (рис. 28). Теперь легко вычислить расстояние x от точки O до касательной a_5 (оно же равно и расстоянию до касательной a_6). Действительно, $x : R_1 = OO_2 : O_1O_2$, поэтому $x = \frac{R_1 \cdot OO_2}{O_1O_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Полученное выражение симметрично относительно R_1 и R_2 , поэтому расстояния от точки O до касательных a_7 и a_8 тоже равны $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Найдём теперь расстояние y от точки O до касательных a_3 и a_4 . Для определённости будем считать, что $R_2 > R_1$.

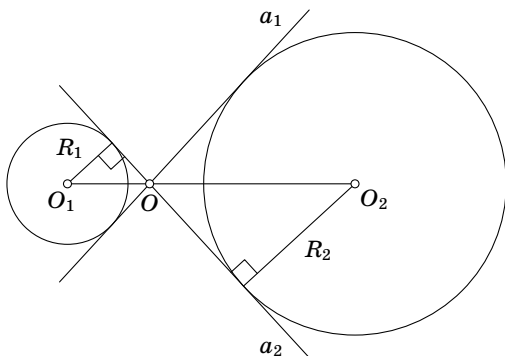


Рис. 28

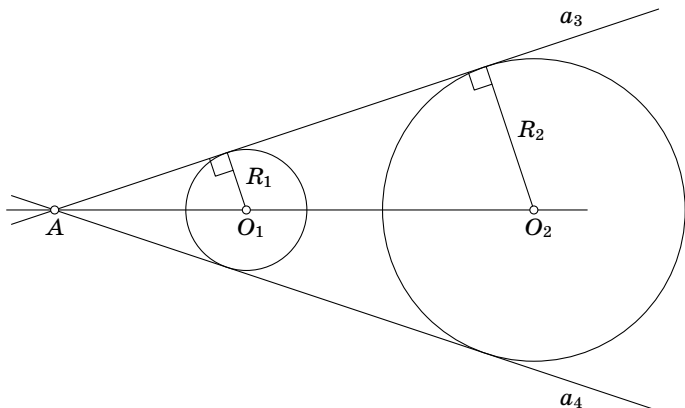


Рис. 29

Пусть A — точка пересечения касательных a_3 и a_4 . Тогда $AO_1:AO_2=R_1:R_2$ (рис. 29), поэтому $AO_1:O_1O_2=R_1:(R_2-R_1)$, т. е. $O_1O_2=\frac{R_2-R_1}{R_1}AO_1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} AO &= AO_1 + O_1O_2 = AO_1 + \frac{R_1}{R_1+R_2}O_1O_2 = AO_1 \left(1 + \frac{R_2-R_1}{R_1+R_2}\right) = \\ &= AO_1 \cdot \frac{2R_2}{R_1+R_2}. \end{aligned}$$

Таким образом, $y:R_1=AO:AO_1=\frac{2R_2}{R_1+R_2}$, т. е. $y=\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$.

Расстояние y в два раза больше расстояния x , поэтому можно провести две требуемые окружности.

9 класс

1. Рассмотрим выражение $(a_1 + \dots + a_{1959})^{1000}$. С одной стороны, это выражение равно 1, поскольку $a_1 + \dots + a_{1959} = 1$. С другой стороны, раскрыв скобки, мы получим сумму всех возможных произведений чисел a_i , в каждое из которых входят 1000 множителей, причём числа a_i в этих произведениях могут повторяться несколько раз. Кроме того, произведения, отличающиеся порядком множителей, входят в эту сумму отдельно друг от друга. Тем самым, каждая рассматриваемая в задаче комбинация вхо-

дит в эту сумму, но в эту сумму входят ещё и другие слагаемые. Все слагаемые положительны, следовательно, искомая сумма меньше 1.

3. Пусть A и B — данные точки, S — данная окружность, S' — окружность, проходящая через точки A и B и пересекающая окружность S в двух точках. Если центр окружности S лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB , то общая хорда окружностей S и S' параллельна прямой AB . Покажем, что если центр окружности S не лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB , то для всех различных окружностей S' общая хорда окружностей S и S' (или её продолжение) проходит через одну и ту же точку. Пусть окружности S и S' пересекаются в точках M и N , а прямые AB и MN пересекаются в точке P . Пусть некоторая окружность S'_1 , проходящая через точки A и B , пересекает окружность S в

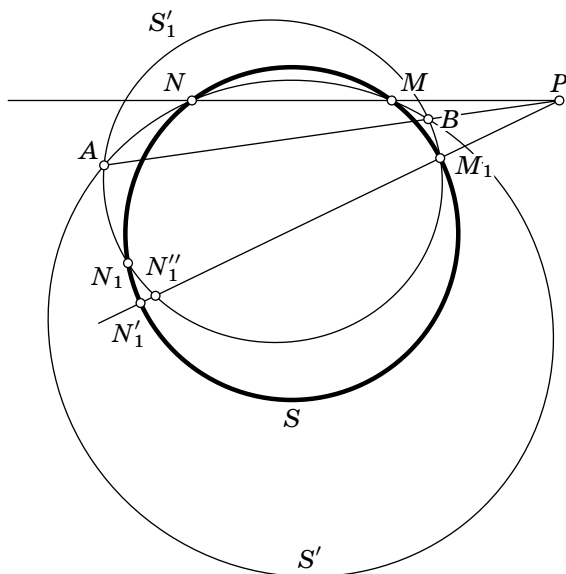


Рис. 30

точках M_1 и N_1 , а прямая PM_1 пересекает окружности S и S'_1 в точках N'_1 и N''_1 , отличных от M_1 (рис. 30). Достаточно доказать, что точки N'_1 и N''_1 совпадают. Ясно, что $PM_1 \cdot PN''_1 = PA \cdot PB = PM \cdot PN = PM_1 \cdot PN'_1$, поэтому точки N'_1 и N''_1 совпадают. Точку P , в которой пересекаются общие хорды окружностей S и S' (или их продолжения) несложно построить, построив произвольную окружность, проходящую через точки A и B .

Хорды окружности S , имеющие данную длину, касаются фиксированной окружности, которую легко построить. После этого остаётся построить касательную к этой окружности либо параллельную AB (в случае, когда центр окружности S лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB), либо проходящую через точку P .

4. Докажем индукцией по k , что $P_k \leq 3^{k-1} \cdot P_1$ при $k \geq 1$. Заметим, что каждая $(k+1)$ -звенная ломаная получается прибавлением последнего звена к k -звенной ломаной. К любой k -звенной ломаной в конце можно прибавить ещё одно звено не более чем тремя способами, а значит, $P_{k+1} \leq 3P_k$, следовательно $P_{k+1} \leq 3^k \cdot P_1$. Поскольку однозвенных ломаных, начинающихся в заданной точке O , четыре, получаем, что $P_{k+1} \leq 4 \cdot 3^k < 2 \cdot 3^{k+1}$, что и требовалось доказать.

5. В треугольнике может быть только один тупой угол, поэтому тупой угол лежит против той стороны, длина которой строго больше длин всех других сторон. В частности, наибольшая сторона треугольника не может быть стороной тупого угла.

Выберем в данном тетраэдре наибольшее ребро (если несколько рёбер тетраэдра имеют наибольшую длину, то выберем любое из них). Это ребро является общей стороной двух треугольников, причём в каждом из них эта сторона наибольшая. Поэтому наибольшее ребро не может быть стороной плоского тупого угла.

10 класс

1. Предположим, что такие числа x, y, z существуют. Без ограничения общности можно считать, что $x \leq y$. Поскольку x, y и z — целые числа и $x > 0$, то $z \geq y + 1$. Разложим $(y + 1)^k$ по биному Ньютона: $(y + 1)^k = y^k + ky^{k-1} + \dots$. При $k > 2$, поскольку $k > y$, получаем $ky^{k-1} > y^k$. Следовательно, $(y + 1)^k > 2y^k \geq x^k + y^k$, а значит, $x^k + y^k < z^k$. Получено противоречие, поэтому таких чисел не существует.

3. См. решение задачи 5 для 9 класса.

4. Обозначим через (a, b) клетку, находящуюся на пересечении строки с номером a и столбца с номером b . Каждое из чисел $1, 2, \dots, N$ встречается в такой записи всех клеток чётное число раз, а именно, $2N$ раз: N раз оно встречается как номер столбца и N раз как номер строки.

Пусть 1 стоит в клетке (a, x_1) . По условию номер строки, в которой стоит 2 равен номеру столбца, в котором стоит 1, т. е. он равен x_1 . Следовательно, 2 стоит в клетке (x_1, x_2) . Аналогично 3 стоит в клетке (x_2, x_3) и т. д., и наконец, N^2 стоит в некоторой клетке (x_{N^2-1}, x_{N^2}) .

Если отбросить крайние номера a и x_{N^2} , то в последовательности $(a, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{N^2-2}, x_{N^2-1}), (x_{N^2-1}, x_{N^2})$ все внутренние номера встречаются чётное число раз, поскольку они встречаются парами. Но каждый номер, в том числе и номер a , встречается в этой последовательности чётное число раз (а именно, $2N$ раз). Номер a встречается 1 раз в самом начале, затем чётное число раз внутри последовательности, поэтому он должен встретиться в конце последовательности, т. е. $x_{N^2} = a$. Это означает, что номер столбца, содержащего N^2 совпадает с номером строки, содержащей 1.

Рассмотрим в столбце, содержащем N^2 , любое число p , отличное от 1 и N^2 . Это число стоит в клетке (y, a) , поэтому следующее за ним число $p + 1$ стоит в клетке (a, z) , т. е. оно стоит в той же строке, в которой стоит 1. Таким обра-

зом, сумма чисел, стоящих в столбце, содержащем N^2 , и отличных от 1 и N^2 , на $N - 1$ меньше суммы чисел, стоящих в строке, содержащей 1, и отличных от 1 и N^2 . Чтобы получить искомую разность, нужно из $N^2 - 1$ вычесть $N - 1$. В результате получим $N^2 - N$.

5. Воспользуемся методом от противного: предположим, что среди любых k идущих подряд чисел данной последовательности наименьшее число меньше или равно половине наибольшего. Рассмотрим k чисел a_1, a_2, \dots, a_k . По условию число a_1 — наибольшее среди них, а число a_k — наименьшее. Согласно предположению $a_k \leq \frac{1}{2}a_1$.

Рассматривая k чисел $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2k-1}$, получим $a_{2k-1} \leq \frac{1}{2}a_k \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2^2}a_1$, и аналогично $a_{n(k-1)+1} \leq \frac{1}{2^n}a_1$.

Рассмотрим сумму

$$S_1 = a_1 + a_k + a_{2k-1} + \dots + a_{n(k-1)+1} + \dots$$

Складывая доказанные выше неравенства и используя формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии, получаем

$$S_1 \leq a_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots \right) = 2a_1.$$

Из этого следует, что

$$S_2 = a_2 + a_{k+1} + \dots + a_{n(k-1)+2} + \dots \leq 2a_1,$$

$$S_3 = a_3 + a_{k+2} + \dots + a_{n(k-1)+3} + \dots \leq 2a_1,$$

.....

$$S_{k-1} = a_{k-1} + a_{2k-2} + \dots + a_{n(k-1)+(k-1)} + \dots \leq 2a_1,$$

так как каждому слагаемому в этих суммах соответствует не меньшее слагаемое в сумме S_1 . Таким образом,

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_{k-1} \leq 2 \cdot (k-1) \cdot a_1 = 2 \frac{k-1}{2k} < 1,$$

так как $a_1 = \frac{1}{2k}$. С другой стороны,

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_{k-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = 1$$

по условию. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Второй тур

7 класс

1. Сгруппируем в обоих выражения члены, равноотстоящие от концов. В результате получим, что разность между выражением слева и выражением справа равна $s_1 + \dots + s_m$, где $s_k = a_k b_k + a_{n+1-k} b_{n+1-k} - a_k b_{n+1-k} - a_{n+1-k} b_k$ и $m = \frac{n}{2}$ при чётном n и $m = \frac{n-1}{2}$ при нечётном n (при нечётном n сокращаются равные члены $a_{m+1} b_{m+1}$). Легко видеть, что $s_k = (a_k - a_{n+1-k})(b_k - b_{n+1-k}) > 0$.

2. Искомая точка является точкой пересечения окружностей, симметричных описанной окружности относительно сторон треугольника. Прежде всего докажем, что эти окружности пересекаются не более чем в одной точке. Две из этих окружностей пересекаются в двух точках, одна из которых — вершина треугольника. Третья окружность может проходить через эту вершину лишь в том случае, когда треугольник прямоугольный. Легко видеть, что в случае прямоугольного треугольника рассматриваемые окружности пересекаются в вершине прямого угла.

Докажем теперь, что точка H , в которой пересекаются высоты треугольника ABC , обладает требуемым свойством. Проведём диаметр AD описанной окружности этого треугольника. Пусть M — середина стороны BC , H_a — точка пересечения прямой AH с описанной окружностью, отличная от точки A (рис. 31). Прямые BH и DC параллельны, поскольку обе они перпендикулярны прямой AC . Аналогично $BD \parallel HC$, поэтому четырёхугольник $BDCH$ — параллелограмм. Точка M является серединой отрезка

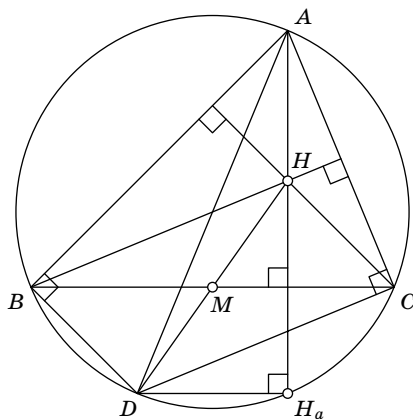


Рис. 31

DH , а прямые MC и DH_a перпендикулярны прямой AH_a , поэтому точка H_a симметрична точке H относительно прямой BC , т. е. точка, симметричная точке H относительно прямой BC , лежит на описанной окружности. Для точек, симметричных точке H относительно прямых AB и AC доказательство аналогично.

3. Решим сначала более простую задачу, заменив данное в условии число 999 999 999 на 99. Пусть A — искомое число. Тогда $99A = 111...11$, т. е. $100A - A = 111...11$, откуда $A = 100A - 111...11$. Мы знаем две последние цифры числа $100A$ и числа $111...11$, поэтому мы можем найти две последние цифры числа A . Но тогда мы знаем уже четыре последние цифры числа $100A$ и числа $111...11$, поэтому мы можем найти шесть последних цифры числа A , и т. д. Последние цифры числа A вычисляются следующим образом:

$$\begin{array}{r}
 \dots 00 \\
 - \dots 111 \\
 \hline
 89
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \dots 8900 \\
 - \dots 11111 \\
 \hline
 7789
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \dots 778900 \\
 - \dots 111111 \\
 \hline
 667789
 \end{array}$$

и так далее. В конце концов мы приходим к следующему:

$$\begin{array}{r} 112233445566778900 \\ - 111111111111111111 \\ \hline 1122334455667789 \end{array}$$

Наши рассуждения показывают, что 1122334455667789 — наименьшее искомое число. Но это не единственное число, обладающее требуемым свойством. Дело в том, что мы можем не останавливаться, а продолжать дальше вычисления последних цифр числа A :

$$\begin{array}{r} . . 00112233445566778900 \\ - . 11111111111111111111 \\ \hline . . 89001122334455667789 \end{array}$$

Так мы получим число

$$1122334455667789001122334455667789$$

и т. д.

Для числа 999 999 999 решение совершенно аналогично. В этом случае наименьшее число, обладающее требуемым свойством, равно

$$A_1 = \underbrace{11 \dots 1}_{9 \text{ цифр}} \underbrace{22 \dots 2}_{9 \text{ цифр}} \dots \underbrace{77 \dots 7}_{9 \text{ цифр}} \underbrace{88 \dots 8}_{8 \text{ цифр}} 9,$$

а любое число A_n , обладающее требуемым свойством, имеет вид:

$$A_n = A_1 \underbrace{000 \dots 00}_{9 \text{ цифр}} A_1 \underbrace{000 \dots 00}_{9 \text{ цифр}} A_1 \dots 0 A_1 \underbrace{000 \dots 00}_{9 \text{ цифр}} A_1.$$

4. Переставим цифры в следующем порядке:

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6},$$

где $a_1 \geq a_4 \geq a_2 \geq a_5 \geq a_3 \geq a_6$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a_1 + a_2 + a_3) - (a_4 + a_5 + a_6) \leq \\ &\leq (a_1 + a_2 + a_3) - (a_2 + a_3 + a_6) = a_1 - a_6 \leq 9. \end{aligned}$$

5. Покажем сначала, что n чётно. В самом деле, среди n чисел $x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_nx_1$ должно быть столько же чисел $+1$, сколько чисел -1 , так как они все равны ± 1 , а их сумма равна нулю. Итак, среди этих n чисел k раз встречается $+1$ и k раз -1 , т. е. $n = 2k$.

Рассмотрим теперь все числа $x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_nx_1$, равные -1 . Если $x_mx_{m+1} = -1$, то числа x_m и x_{m+1} имеют разные знаки. И наоборот, если числа x_m и x_{m+1} имеют разные знаки, то $x_mx_{m+1} = -1$. Таким образом, k равно числу перемен знака в последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, x_1$. В конце этой последовательности стоит то же число, что и в начале. Следовательно, число перемен знака в ней должно быть чётно: $k = 2l$. Но тогда $n = 2k = 4l$, что и требовалось доказать.

8 класс

2. Докажем сначала, что среди этих чисел найдётся по крайней мере 3 отрицательных. Для этого разобьём данные числа на три четвёрки подряд идущих чисел и докажем, что в каждой четвёрке встретится хотя бы одно отрицательное число. Предположим, что в некоторой четвёрке a, b, c, d подряд идущих чисел все числа неотрицательны. По условию $b(a - b + c) < 0$, следовательно, $a + c < b$. Аналогично $b + d < c$. Складывая эти неравенства, получаем $a + d < 0$, а значит, одно из чисел a и d отрицательно, что противоречит предположению. Таким образом, среди любых четырёх подряд идущих чисел есть хотя бы одно отрицательное. Следовательно, среди данных двенадцати чисел по крайней мере 3 отрицательных.

Докажем теперь, что среди данных чисел найдётся по крайней мере 3 положительных. Рассмотрим набор чисел $-a_1, \dots, -a_{12}$. Ясно, что этот набор также удовлетворяет условию задачи. Следовательно, в нём есть хотя бы три отрицательных числа, а значит, в исходном наборе есть по крайней мере три положительных числа, что и требовалось.

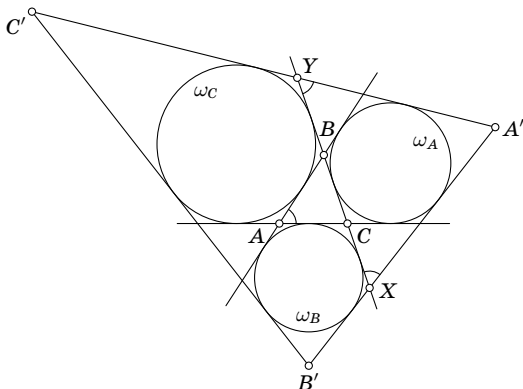


Рис. 32

3. Пусть ω_A , ω_B и ω_C — вневписанные окружности, касающиеся сторон BC , CA и AB ; A' , B' и C' — вершины построенного треугольника (окружность ω_A касается сторон $A'B'$ и $A'C'$ и т. д., рис. 32). Прямая BC пересекает стороны $A'B'$ и $A'C'$ в точках X и Y .

Прямые AB и $A'B'$ являются общими внешними касательными к окружностям ω_A и ω_B , а прямые AC и BC — общими внутренними касательными. Поэтому $\angle YXA' = \angle BAC = \angle A$. Аналогично $\angle XYA' = \angle A$. Следовательно, $\angle B'A'C' = 180^\circ - 2\angle A$. Аналогично $\angle A'B'C' = 180^\circ - 2\angle B$ и $\angle A'C'B' = 180^\circ - 2\angle C$.

Комментарий. Требуемый треугольник можно построить только для остроугольного треугольника ABC . Если треугольник ABC тупоугольный, то можно построить лишь треугольник, у которого одна сторона и продолжения двух других сторон касаются вневписанных окружностей треугольника ABC . А если треугольник ABC прямоугольный, то две общие внешние касательные к его вневписанным окружностям параллельны.

4. Предположим, что каждая из сторон четырехугольника $ACBD$ меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда квадрат длины каждой стороны меньше $\frac{1}{2}$. Среди четырех углов, под которыми видны стороны четырехугольника из точки пересечения

диагоналей, есть два неострых угла. Рассмотрим две противоположные стороны четырёхугольника, которые видны их точки пересечения диагоналей под неострыми углами. Сумма квадратов их длин меньше 1. Квадрат длины стороны треугольника, лежащей против неострого угла, не меньше суммы квадратов длин двух других сторон треугольника. Поэтому сумма квадратов длин четырёх отрезков, на которые делятся отрезки AB и CD точкой пересечения, меньше 1. С другой стороны, каждый из этих отрезков делится точкой пересечения на два отрезка, сумма квадратов длин которых не меньше $\frac{1}{2}$, поскольку $x^2 + (1-x)^2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$. Получено противоречие.

5. Предположим, что такой обход существует. Рассмотрим все участки этого обхода, входящие в четыре угловые клетки или выходящие из них. Каждый из этих участков идёт в одну из четырёх центральных клеток. По крайней мере две из угловых клеток не могут быть началом или концом обхода, поэтому рассматриваемых участков не менее 6 и есть две пары участков, проходящих через центральную клетку. Таким образом, рассматриваемые участки образуют конфигурацию, изображённую на рисунке 33, т. е. начальная и конечная клетки обхода — это угловые клетки, расположенные на одной стороне, а третьи с начала и с конца пути — это оставшиеся угловые клетки, диаметрально противоположные началу и концу соответственно.

Покажем, что, начав из любой клетки внутреннего квадрата 2×2 , нельзя оказаться в соседней с ней клетке того же квадрата, побывав во всех клетках доски, кроме угловых и клеток внутреннего квадрата. На рисунке 34 изображены 6 участков, которые обязательно должны встретиться в

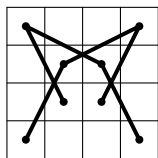


Рис. 33

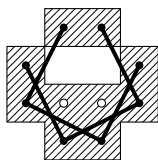


Рис. 34

таком обходе. Легко проверить, что эти участки нельзя дополнить до требуемого обхода. Следовательно, искомого обхода не существует.

9 класс

1. Рассмотрим сначала случай, когда $x_1 + x_3 + \dots + x_{99} \geq 1/2 \geq x_2 + x_4 + \dots + x_{100}$. Будем последовательно переставлять x_{2i-1} из левой части в правую, а x_{2i} из правой части в левую, начиная с $i=1$, до тех пор пока знак неравенства не изменится. Такое когда-нибудь обязательно произойдет, поскольку в конце концов наборы чисел в левой и в правой частях поменяются местами. Пусть знак неравенства изменился после замены x_{2k-1} на x_{2k} , где $1 \leq k \leq 50$, т. е.

$$s_k = x_2 + x_4 + \dots + x_{2(k-1)} + x_{2k-1} + x_{2k+1} + \dots + x_{99} \geq \frac{1}{2},$$

$$s_{k+1} = x_2 + x_4 + \dots + x_{2(k-1)} + x_{2k} + x_{2k+1} + \dots + x_{99} \leq \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\left| s_k - \frac{1}{2} \right| + \left| s_{k+1} - \frac{1}{2} \right| = s_k - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - s_{k+1} = s_k - s_{k+1} = x_{2k-1} - x_{2k}.$$

По условию $|x_{2k-1} - x_{2k}| < \frac{1}{50}$, поэтому из чисел $|s_{k+1} - 1/2|$ и $|s_k - 1/2|$ хотя бы одно меньше $1/100$, что и требовалось.

Случай, когда $x_1 + x_3 + \dots + x_{99} \leq 1/2 \leq x_2 + x_4 + \dots + x_{100}$, рассматривается аналогично.

2. Если в треугольнике ABC угол C не меньше π/n , то

$$\begin{aligned} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C &\geq a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{\pi}{n} \geq \\ &\geq (a^2 + b^2) \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Предположим, что все стороны рассматриваемого $2n$ -угольника меньше стороны правильного $2n$ -угольника, вписанного в окружность диаметра 1. Тогда квадрат длины любой стороны меньше $\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)$. Прямые, проходящие через данные отрезки, делят плоскость на $2n$ углов,

поэтому наибольший из этих углов не меньше π/n . Рассмотрим два данных отрезка, образующих этот угол. Концы этих отрезков соединены двумя сторонами $2n$ -угольника, лежащими против углов, не меньших π/n . Поэтому сумма квадратов длин этих сторон не меньше, чем сумма квадратов длин четырёх отрезков, на которые выбранные отрезки делятся точкой пересечения, умноженная на $1 - \cos \frac{\pi}{n}$. С другой стороны, согласно предположению сумма квадратов длин двух сторон $2n$ -угольника меньше $1 - \cos \frac{\pi}{n}$. Поэтому сумма квадратов длин четырёх отрезков, на которые выбранные отрезки делятся точкой их пересечения, меньше 1. Но этого не может быть, поскольку отрезок длины 1 делится на отрезки x и $1 - x$, а

$$x^2 + (1 - x)^2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

3. Предположим противное: пусть сумма любых двух плоских углов при вершинах A и B тетраэдра $ABCD$ больше 180° . Развернём на плоскость две грани ABC и ABD , примыкающие к ребру AB . В результате получим четырёхугольник $ACBD$, у которого каждый из углов при вершинах A и B больше 180° . Сумма всех углов этого четырёхугольника больше 360° , что невозможно. Получили противоречие.

4. Легко проверить, что куб целого числа при делении на 9 даёт в остатке 0 или ± 1 . Поэтому целое число вида $9k \pm 4$ нельзя представить в виде суммы трёх кубов.

5. Занумеруем поля доски (кроме центрального, на которое кони попасть не могут) в порядке обхода их шахматным конём (рис. 35); белые кони стоят на полях 1 и 3, чёрные — на полях 5 и 7. Ходы коней на рассматриваемой шахматной доске эквиваленты перемещениям в соседние вершины графа, изображённого на рисунке 36.

1	6	3
4		8
7	2	5

Рис. 35

Чтобы кони поменялись местами, каждый конь должен сделать чётное число ходов, так как после одного хода меняется цвет поля, на котором стоит конь, а все поля, на которых они стоят в начале, одного цвета.

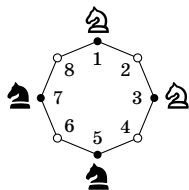


Рис. 36

Покажем, что каждый конь при этом не может сделать только 2 хода. Предположим, например, что белый конь 1 встал на поле 7, пройдя через поле 8. Тогда белый конь 3 должен встать на поле 5, а чёрный конь 5 на одно из полей 1 или 3. Поэтому кони 3 и 5 на графе должны перескочить либо один через другого, либо через коня 1. Но при таком перескакивании при каком-то ходе в одной клетке окажутся сразу два коня, что противоречит правилам.

Итак, ни один конь не может сделать только 2 хода и каждый конь должен сделать чётное число ходов. Поэтому каждый конь должен сделать не меньше 4 ходов, поэтому всего будет сделано не меньше, чем $4 \cdot 4 = 16$ ходов.

10 класс

2. Поместим в точки A , B , C и D массы 1, α , $\alpha\beta$ и β . Тогда K_1 — центр масс точек A и B , K_2 — центр масс точек C и D . Поэтому центр масс всей системы точек лежит на отрезке K_1K_2 . Аналогично доказывается, что центр масс лежит на отрезке K_3K_4 . Таким образом, отрезки K_1K_2 и K_3K_4 пересекаются в центре масс.

3. Выберем круг наибольшего радиуса, раздуем его в три раза и выбросим все круги, целиком лежащие в этом раздутии. Оставшиеся круги не пересекаются с первым. Для них сделаем то же самое и т. д. Раздутия всех выбранных кругов содержат все данные круги, а площадь раздутия в 9 раз больше площади исходного круга, поэтому $9S \geq 1$, где S — общая площадь всех выбранных кругов. Следовательно, $S \geq 1/9$.

4. Предположим, что точка z лежит вне рассматриваемого многоугольника $C_1 \dots C_n$. Тогда через точку z можно провести прямую l , не пересекающую многоугольник $C_1 \dots C_n$. Поэтому векторы с началом в точке z и концами в точках C_1, \dots, C_n лежат в одной полуплоскости, заданной прямой l . Следовательно, комплексные числа $w_1 = z - C_1, \dots, w_n = z - C_n$ лежат в одной полуплоскости, заданной прямой l_1 , параллельной прямой l и проходящей через 0. Сопряжённые числа $\overline{w_1}, \dots, \overline{w_n}$ лежат в одной полуплоскости, заданной прямой l_2 , симметричной прямой l_1 относительно вещественной оси. Следовательно, векторы $\frac{1}{z - C_1}, \dots, \frac{1}{z - C_n}$ лежат в одной полуплоскости, заданной прямой l_2 , поскольку $\frac{1}{w} = \frac{\overline{w}}{|w|^2}$. Поэтому $\frac{1}{z - C_1} + \dots + \frac{1}{z - C_n} \neq 0$. Получено противоречие.

5. Расположим круги так, чтобы границы секторов совместились. После этого зафиксируем один круг, а другой будем поворачивать на все углы вида $\pi l/k$, т. е. всеми способами, при которых границы секторов совмещаются. При этом каждый сектор будет при половине способов совмещаться с сектором того же цвета, а при половине способов — с сектором другого цвета. Следовательно, при таких поворотах число совмещений одноцветных секторов равно числу совмещений разноцветных секторов. Поэтому хотя бы для одного поворота число совмещений разноцветных секторов не меньше числа совмещений одноцветных секторов.

1960 год (XXIII олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Покажем сначала, что денежную сумму в n рублей, где $n \geq 10$, можно представить как чётным, так и нечётным количеством денежных билетов. Действительно, эта

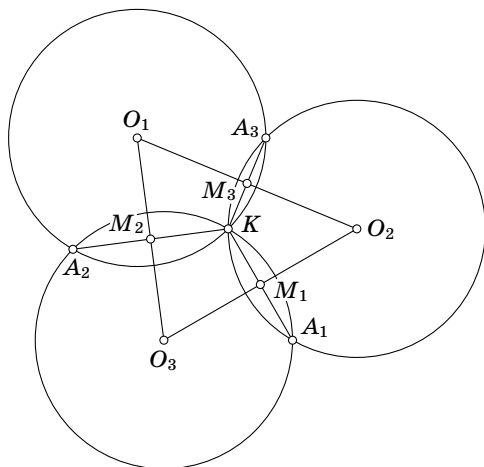


Рис. 37

денежная представляется, с одной стороны, n билетами достоинством в 1 рубль, а с другой — одним билетом в 10 рублей и ещё $n - 10$ билетами по одному рублю. Одно из чисел n и $1 + (n - 10) = n - 9$ чётно, а другое нечётно.

Покажем теперь, что денежную сумму в n рублей, где $n < 10$, можно представить лишь числом билетов, имеющим ту же чётность, что и n . Для представления этой суммы в распоряжении имеются лишь билеты достоинством в 1, 3, 5 рублей, а все эти числа нечётные. Ясно, что сумма нечётного числа нечётных чисел нечётна, а сумма чётного числа нечётных чисел чётна.

2. Пусть K — общая точка трёх окружностей. Можно считать, что A_1 — общая точка окружностей с центрами O_2 и O_3 и т. д. (рис. 37). Середина общей хорды двух равных окружностей является также и серединой отрезка, соединяющего их центры. Поэтому середины M_1, M_2, M_3 хорд KA_1, KA_2, KA_3 являются серединами сторон треугольника $O_1O_2O_3$. Следовательно, $M_1M_2 = \frac{1}{2}O_1O_2$. Отрезок M_1M_2 является также средней линией треугольника

A_1A_2K , поэтому $M_1M_2 = \frac{1}{2}A_1A_2$. Таким образом, $A_1A_2 = O_1O_2$. Равенство остальных сторон треугольников $O_1O_2O_3$ и $A_1A_2A_3$ доказывается аналогично.

3. Для каждого студента выпишем количество задач, которые он придумал. По условию задачи, среди этих чисел встречается не менее пяти различных, всего выписано 30 чисел и сумма написанных чисел равна 40.

Поскольку выписано 30 чисел и среди них встречается не менее пяти различных, никакое число не может встречаться более 26 раз. Действительно, если какое-то число встречается 27 раз, то остаётся всего 3 числа, и среди них не может быть 4 различных. С другой стороны, если единица встречается менее 26 раз, то кроме неё встречаются 4 числа, не меньшие 2, 3, 4 и 5, и ещё одно число, не меньшее 2. Следовательно, сумма всех выписанных чисел не меньше $25 + 2 \cdot 2 + 3 + 4 + 5 = 41$, что противоречит условию задачи. Итак, единиц может быть только 26, то есть одну задачу могли придумать только 26 студентов.

Остаётся привести пример, когда одну задачу придумали ровно 26 студентов. Это возможно в следующей ситуации: каждый студент придумал столько задач, каков номер его курса, причём в составлении задач с первого курса принимало участие 26 студентов, а с остальных — по одному студенту.

4. Углы A_1NM и B_2NM прямые, так как опираются на диаметры. Поэтому точки A_1 , N и B_2 лежат на одной прямой. Углы A_1B_1M и B_2A_2M прямые, так как они опираются на диаметры. Угол MNB_2 , как уже было замечено, тоже прямой. Поэтому прямые MN , A_1B_1 и A_2B_2 содержат высоты треугольника A_1MB_2 . Следовательно, эти три прямые пересекаются в одной точке.

5. Если d_1 — делитель числа n , то $d_2 = n/d_1$ тоже делитель числа n . Рассмотрим множество пар (d_1, d_2) , где

d_1 и d_2 — делители числа n , $d_1 \leq d_2$ и $d_1 d_2 = n$. Все делители n входят в такие пары, поэтому число делителей n не превосходит удвоенного числа таких пар. С другой стороны, число таких пар не превосходит \sqrt{n} , поскольку $d_1 \leq \sqrt{d_1 d_2} = \sqrt{n}$. Поэтому число делителей n не превосходит $2\sqrt{n}$.

8 класс

1. Сумма цифр данного числа равна 300, поэтому оно делится на 3, но не делится на 9. Но любой точный квадрат, делящийся на 3, должен делиться и на 9.

2. Будем для краткости называть шахматистов, занявших последние три места, «плохими», а всех остальных — «хорошими». Плохие шахматисты сыграли между собой три партии, и в этих партиях было набрано в общей сложности три очка. По условию, это половина всех очков, набранных плохими шахматистами, поэтому в играх с хорошими плохие шахматисты набрали ещё 3 очка.

Пусть n — общее число шахматистов. Всего между плохими и хорошими шахматистами было сыграно $(n - 3) \cdot 3$ партий и разыграно столько же очков. Из них 3 очка набрали плохие шахматисты, а остальные очки набрали хорошие. Следовательно, в партиях с плохими шахматистами хорошие шахматисты набрали $(n - 3) \cdot 3 - 3$ очка. По условию столько же очков хорошие шахматисты набрали (в общей сложности) в играх друг с другом.

Между хорошими шахматистами было проведено

$$\frac{(n - 3)(n - 4)}{2}$$

партий и разыграно столько же очков. Следовательно,

$$\frac{(n - 3)(n - 4)}{2} = (n - 3) \cdot 3 - 3.$$

Получаем квадратное уравнение, которое имеет два решения: $n = 4$ и $n = 9$.

Решение $n=4$ следует отбросить. Действительно, в этом случае единственный хороший шахматист набрал все свои очки во встречах с тремя остальными участниками; все очки могут быть равны половине всех очков лишь в том случае, когда шахматист набрал 0 очков, но такой шахматист не смог бы занять первое место. Остаётся одно решение: $n=9$. Нужно проверить, что это решение подходит, т. е. нужно показать, что возможно такое распределение очков в турнире между девятью участниками, при котором выполняются требования, указанные в условии задачи. Пример турнирной таблицы, показывающей, что такое распределение очков возможно, приведён на рисунке 38.

		0	0	1	1	1	1	1	1
1			0	0	1	1	1	1	1
1	1			0	0	1	1	1	1
0	1	1			0	0	0	1	1
0	0	1	1			0	1	0	1
0	0	0	1	1			1	1	0
0	0	0	1	0	0			1/2	1/2
0	0	0	0	0	1	0	1/2		1/2
0	0	0	0	0	0	1	1/2	1/2	

Рис. 38

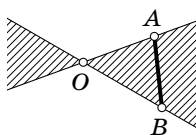
3. Опустим из вершин B и D перпендикуляры BB_1 и DD_1 на диагональ AC . Пусть для определённости $DD_1 > BB_1$. Построим отрезок длины $a = DD_1 - BB_1$ и проведём прямую, параллельную прямой AC , удалённую от AC на расстояние a и пересекающую сторону CD в некоторой точке E . Ясно, что $S_{AED} = (ED/CD)S_{ACD} = (BB_1/DD_1)S_{ACD} = S_{ABC}$. Поэтому искомая прямая содержит медиану треугольника AEC .

4. Проведём прямые OA и OB и заштрихуем угол AOB и вертикальный с ним угол (рис. 39). Точка C или точка D будет отмечена, если она не лежит в заштрихованных углах, и не будет отмечена, если она лежит в одном из заштрихованных углов.

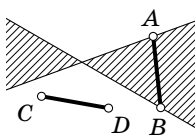
Возможны следующие варианты расположения отрезка CD относительно прямых OA и OB .

1) Отрезок CD не пересекает ни одной из прямых OA и OB . В этом случае обе точки A, B являются отмеченными. В этом случае точки C и D лежат обе в одном и том же из четырёх углов, определяемых прямыми OA и OB , т. е. либо обе являются отмеченными (рис. 39, б), либо обе не являются отмеченными (рис. 39, в). Таким образом, в рассматриваемом случае отмечены либо 2, либо 4 точки.

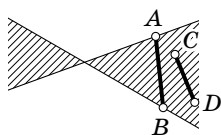
2) Отрезок CD пересекает только одну из прямых OA и OB , т. е. только одна из точек A и B является отмеченной. В этом случае точки C и D лежат в двух смежных углах, определяемых прямыми OA и OB (рис. 39, г), т. е. одна лежит в заштрихованном углу, а другая — в незаштрихованном; следовательно, только одна из точек C и D являет-



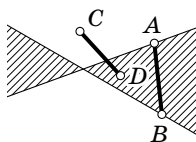
а)



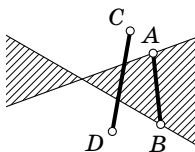
б)



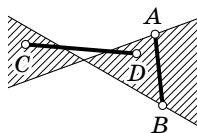
в)



г)



д)



е)

Рис. 39

ся отмеченной. Таким образом, в рассматриваемом случае отмечены 2 точки.

3) Отрезок CD пересекает обе прямые OA и OB , т. е. ни одна из точек A и B не является отмеченной. В этом случае точки C и D лежат в двух вертикальных углах, т. е. либо обе отмечены (рис. 39, д), либо ни одна из них не отмечена (рис. 39, е). Таким образом, в рассматриваемом случае либо 2 точки отмечены, либо ни одна не отмечена.

Итак, отмеченными могут быть 0, 2 или 4 точки.

5. Покажем, что уже среди чисел, являющихся полными квадратами, есть бесконечно много чисел, не представимых в виде $m = p + n^{2k}$.

Пусть $m = a^2$ и $m = p + n^{2k}$, где p — простое число. Для p получаем выражение: $p = a^2 - n^{2k} = (a - n^k)(a + n^k)$. Чтобы p было простым, необходимо, чтобы один из сомножителей был равен 1. Так как $a + n^k > a - n^k$, должно выполняться соотношение $a - n^k = 1$. Поэтому $n^k = a - 1$ и $p = 1 \cdot (a + n^k) = a + (a - 1) = 2a - 1$.

Остаётся заметить, что нечётных чисел $2a - 1$, не являющихся простыми, бесконечно много: таковы, например, все числа вида $3b$, где b нечётно.

9 класс

1. Пусть $\frac{m}{n}$ — правильная дробь. Докажем требуемое утверждение индукцией по m . При $m = 1$ утверждение очевидно. Пусть $m > 1$. Запишем n в виде $n = qm - r$, где $0 \leq r < m$. Тогда $qm = n + r$, поэтому $\frac{m}{n} = \frac{n+r}{qn} = \frac{1}{q} + \frac{r}{qn}$. Дробь $\frac{r}{qn}$ правильная, поскольку $r < m < n$. Её можно представить в требуемом виде по предположению индукции.

3. Пусть l — произвольная прямая, проходящая через точку O . Она пересекает границу многоугольника в точках A и B . Требуется доказать, что $OA = OB$. Предположим, что отрезки OA и OB не равны, например, $OA > OB$.

Проведём прямую l' , проходящую через O и пересекающую границу многоугольника в точках A' и B' , настолько близких к точкам A и B , что $OA' > OB'$ и на участках границы от A до A' и от B до B' нет вершин многоугольника. Прямая l разбивает площадь многоугольника на части S_1 и S_2 , прямая l' — на части S'_1 и S'_2 , причём, по условию $S_1 = S_2$ и $S'_1 = S'_2$. Вычитая одно равенство из другого, получим $S_{AOA'} = S_{BOB'}$.

С другой стороны, $S_{AOA'} > S_{BOB'}$, поскольку $AO > BO$, $OA' > OB'$ и $\angle AOA' = \angle BOB'$. Полученное противоречие показывает, что для любой прямой l , проходящей через точку O , имеет место равенство $OA = OB$.

4. Пусть A — данная точка внутри окружности, O — центр окружности. Четвёртая вершина может быть либо соседней с A , либо противоположной ей. Если четвёртая вершина соседняя с A , то она находится от точки O на таком же расстоянии, как и точка A , т. е. четвёртая вершина лежит на окружности радиуса OA с центром O . При этом четвёртая вершина должна быть отлична от точки A .

Рассмотрим теперь случай, когда четвёртая вершина C прямоугольника $ABCD$ противоположна вершине A . Используя теорему Пифагора, несложно доказать, что для любого прямоугольника $ABCD$ и любой точки O выполняется равенство $OA^2 - OD^2 = OB^2 - OC^2$. В нашем случае $OB = OD = R$, где R — радиус данной окружности, поэтому $OC^2 = 2R^2 - OA^2$, т. е. точка C лежит на окружности радиуса $\sqrt{2R^2 - OA^2}$ с центром O . Заметим, что $\sqrt{2R^2 - OA^2} > R$, т. е. эта окружность лежит вне данной окружности.

Покажем теперь, что любая точка каждой из этих двух окружностей (окружности S_1 радиуса OA с центром O и окружности S_2 радиуса $\sqrt{2R^2 - OA^2}$ с центром O), за исключением точки A , принадлежит множеству четвёртых вершин прямоугольников. Пусть X — любая точка окружности S_1 , отличная от A . Через точки A и X проведём перпендикуляры к прямой AX и рассмотрим их точки пере-

сечения с данной окружностью. Две из этих точек, лежащие по одну сторону от прямой AX , являются вершинами искомого прямоугольника.

Рассмотрим теперь произвольную точку X окружности S_2 . Построим окружность, диаметром которой служит отрезок AX . Пусть B — одна из точек её пересечения с данной окружностью. По точкам A и B можно построить прямоугольник $ABCD$, вершина D которого, противолежащая вершине B , лежит на данной окружности (т. е. B и D по нашей терминологии — первая и вторая вершины). Таких прямоугольников два, причём их четвёртые вершины, как было доказано, лежат на окружности S_2 . С другой стороны, эти четвёртые вершины обоих прямоугольников лежат на прямой XB , так как $XB \perp AB$. Прямая BX пересекает окружность S_2 в двух точках, поэтому именно они и являются четвёртыми вершинами прямоугольников. Одна из точек пересечения прямой BX с окружностью S_2 совпадает с точкой X , следовательно, точка X принадлежит рассматриваемому множеству.

10 класс

1. Все точки искомого ГМТ лежат в плоскости P , которая параллельна плоскостям P_1 и P_2 и равноудалена от каждой из них. Проекции данных треугольников на плоскость P — это два равных правильных треугольника с общим центром. Искомые точки — середины отрезков, соединяющих точки этих треугольников. Покажем, что эти точки замещают выпуклый многоугольник, вершинами которого служат середины отрезков, соединяющих вершины данных треугольников (рис. 40). (Этот многоугольник — шестиугольник, стороны которого параллельны сторонам данных треугольников и равны половинам этих сторон.)

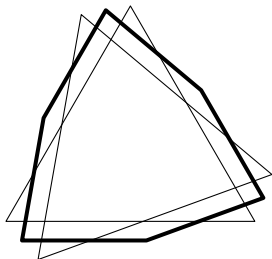


Рис. 40

Прежде всего заметим, что эти точки замечают выпуклое множество. Действительно, пусть A и B — середины отрезков A_1A_2 и B_1B_2 , где A_1 и B_1 — точки треугольника P_1 , а A_2 и B_2 — точки треугольника P_2 . Тогда отрезки A_1B_1 и A_2B_2 принадлежат треугольникам P_1 и P_2 , а середины отрезков, концы которых принадлежат отрезкам A_1B_1 и A_2B_2 , замечают параллелограмм, вершинами которого являются точки A и B и середины отрезков A_1B_2 и A_2B_1 . Диагональ AB этого параллелограмма принадлежит рассматриваемому множеству, поэтому оно выпуклое.

Ясно также, что если точка A_1 является внутренней точкой отрезка, целиком принадлежащего треугольнику P_1 , то точка A_1 является внутренней точкой отрезка, целиком принадлежащего рассматриваемому выпуклому множеству. Следовательно, это множество является выпуклой оболочкой (см. «Основные факты») середин отрезков, соединяющих вершины треугольника P_1 с вершинами треугольника P_2 .

Отметим, что если стороны данных треугольников попарно параллельны, то шестиугольник вырождается в правильный треугольник.

2. Мы будем предполагать, что число n нечётно. В таком случае $\frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}$. В этой сумме каждое из n слагаемых a^{n-1} , $-a^{n-2}b$, ..., $-ab^{n-2}$, b^{n-1} даёт один и тот же остаток при делении на n . Действительно, разность двух соседних слагаемых $\pm a^{n-k}b^k$ и $\mp a^{n-k-1}b^{k+1}$ равна $\pm a^{n-k-1}b^k(a + b)$, а по условию $a + b$ делится на n . Сумма n слагаемых, дающих одинаковые остатки при делении на n , делится на n .

4. Предположим, что число $A = a \cdot 10^k + b$, где $1 \leq a, b \leq 9$ и $k \geq 3$, есть точный квадрат. Тогда его последняя цифра b равна 1, 4, 5, 6 или 9. Но точный квадрат не может оканчиваться ни на 05, ни на 06. Следовательно, b — одна из цифр 1, 4, 9. Число $A - b = a \cdot 10^k$ делится на 5^k и явля-

ется произведением целых чисел $\sqrt{A} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{A} - \sqrt{b}$. Если бы оба этих числа делились на 5, то их разность, равная $2\sqrt{b}$, тоже делилась бы на 5, что неверно. Поэтому ровно одно из этих чисел делится на 5, а потому и на 5^k . Следовательно, одно из этих чисел не меньше 5^k , а другое не меньше $5^k - 6$, а значит, произведение этих чисел не меньше, чем $5^k(5^k - 6)$. При $k \geq 3$ имеет место неравенство $5^k - 6 > 9 \cdot 2^k$, поэтому $a \cdot 10^k = A - b > 5^k \cdot 9 \cdot 2^k = 9 \cdot 10^k$, т. е. $a > 9$. Полученное противоречие показывает, что число A не может быть точным квадратом.

5. Можно считать, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ занумерованы в порядке убывания их абсолютных величин: $|\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \dots \geq |\alpha_k|$. Разделим соотношение $\alpha_1^n + \alpha_2^n + \dots + \alpha_k^n = 0$ на α_1^n :

$$1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^n + \dots + \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_1}\right)^n = 0. \quad (2)$$

Пусть α_{l+1} — первое число, абсолютная величина которого меньше абсолютной величины числа α_1 . Соотношение (2) переписывается тогда следующим образом:

$$1 \pm 1 \pm \dots \pm 1 + \left(\frac{\alpha_{l+1}}{\alpha_1}\right)^n + \dots + \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_1}\right)^n = 0. \quad (3)$$

Абсолютная величина числа α_{l+1}/α_1 меньше 1, поэтому при достаточно большом n абсолютная величина числа $(\alpha_{l+1}/\alpha_1)^n$ меньше $\frac{1}{2(k-l)}$. При таком n абсолютная величина суммы

$$\left(\frac{\alpha_{l+1}}{\alpha_1}\right)^n + \dots + \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_1}\right)^n$$

будет меньше $\frac{1}{2}$. Следовательно, количество $+1$ и -1 в равенстве (3) должно быть одинаковым, поэтому числа, равные по абсолютной величине числу α_1 , разбиваются на пары. Сумма этих чисел равна 0, поэтому их можно исключить из рассмотрения, а для оставшихся чисел (если они есть) повторить те же самые рассуждения.

Второй тур

7 класс

1. Возможны три варианта расположения данных точек.

1) Точки A , B , C и D — вершины выпуклого четырёхугольника. Для любой точки M сумма расстояний от концов диагонали этого четырёхугольника не меньше диагонали. Записав эти неравенства для каждой из двух диагоналей и сложив их, получим, что сумма расстояний от точки M до данных точек не меньше суммы диагоналей четырёхугольника. Легко убедиться, что для точки пересечения диагоналей эта сумма расстояний равна сумме диагоналей, а для любой другой точки эта сумма расстояний больше суммы диагоналей.

2) Точки A , B , C и D не являются вершинами выпуклого четырёхугольника, но не лежат на одной прямой. В этом случае одна из точек лежит внутри или на стороне треугольника с вершинами в трёх остальных точках. Пусть для определённости точка D лежит внутри или на стороне треугольника ABC . Искомая точка не может находиться вне треугольника ABC . Действительно, если M — точка вне треугольника ABC , а M' — точка пересечения отрезка DM с границей треугольника, то сумма расстояний от точки M' до данных точек меньше, чем от точки M .

Пусть точка M лежит внутри или на стороне треугольника BDC (если точка M лежит внутри или на стороне треугольника ABD или ACD , то рассуждения аналогичны). Проведём прямую AM и рассмотрим ту из вершин B и C , которая лежит по ту же сторону от прямой AM , что и точка D ; пусть для определённости это будет вершина C . Тогда $AM + CM \geq AD + CD$ и $DM + BM \geq BD$. Складывая эти неравенства, получаем что $AM + BM + CM + DM \geq AD + BD + CD$, т. е. для точки D исследуемая сумма минимальна.

3) Точки A , B , C и D лежат на одной прямой. Пусть, например, точки C и D лежат между A и B . Тогда искомой

точкой будет любая точка M отрезка CD . Действительно, для любой такой точки M сумма $AM + BM + CM + DM$ равна $AB + CD$; для точки M , не лежащей на отрезке CD , эта сумма больше.

2. Достаточно рассмотреть случай, когда из сторон данного четырёхугольника нельзя сложить параллелограмм. Пусть a, b, c и d — стороны данного четырёхугольника, причём $a \geq b \geq c \geq d$. По предположению из сторон четырёхугольника нельзя сложить параллелограмм, поэтому $a > b$ или $c > d$. Покажем сначала, что существует треугольник со сторонами $a - d, b, c$. Действительно, неравенство $a - d < b + c$ эквивалентно очевидному неравенству $a < b + c + d$ (сторона четырёхугольника меньше суммы его остальных сторон); неравенство $b < (a - d) + c$ следует из того, что $b \leq a$ и $c - d \geq 0$ (причём по крайней мере одно из этих неравенств строгое) согласно предположениям о числах a, b, c и d ; неравенство $c < (a - d) + b$ следует из того, что $c \leq a$ и $b - d \geq 0$ (причём по крайней мере одно из этих неравенств строгое).

Построим треугольник со сторонами $a - d, b$ и c . Его можно достроить до трапеции со сторонами a, b, c и d . Для этого нужно продолжить сторону $a - d$ на отрезок d (в любую сторону) и на отрезках c и d построить параллелограмм.

3. Сумма углов любого несамопересекающегося пятиугольника равна 540° , поэтому у него не может быть более двух углов, превосходящих 180° (по поводу определения углов невыпуклого многоугольника см. «Основные факты».) Следовательно, у него не менее трёх углов, каждый из которых меньше 180° ; два из этих углов соседние. Пусть углы A и B пятиугольника $ABCDE$ меньше 180° . Тогда отрезки AE и BC лежат по одну сторону от прямой AB . Если точка D лежит по ту же сторону от прямой AB , то сторона AB искомая. Пусть точка D лежит по другую

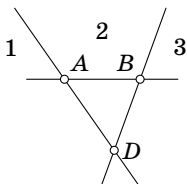


Рис. 41

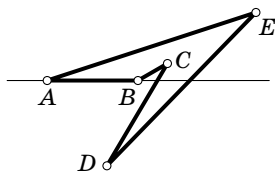


Рис. 42

сторону от прямой AB . Тогда прямые AD и BD разбивают полуплоскость, в которой лежат точки C и E , на три части (рис. 41). Вершины C и E могут лежать только в 1-й и 3-й частях, так как иначе пятиугольник был бы самопересекающимся. Точки C и E не могут лежать в разных частях, потому что в таком случае получается пятиугольник, в котором углы A и B больше 180° . Следовательно, точки C и E лежат в одной части, и стороны CD и DE пересекают прямую AB по одну сторону от отрезка AB (рис. 42); та из сторон CD и DE , которая пересекает прямую AB дальше от отрезка AB , искомая.

4. Пусть 1 декабря какого-то года — понедельник, тогда 1 ноября — суббота, 1 октября — среда, 1 сентября — понедельник, 1 августа — пятница, 1 июля — вторник, 1 июня — воскресенье, 1 мая — четверг, 1 апреля — вторник, 1 марта — суббота, 1 февраля — пятница или суббота, 1 января — вторник или среда. Отметим, что с мая по ноябрь 1-е число попадало на каждый день недели. Значит, все числа с 1 по 30 тоже попадали на каждый день недели. Ясно, что если 1 декабря не понедельник, а какой-то другой день недели, то все числа с 1 по 30 тоже попадают на каждый день недели. Поэтому искомым числом может быть только 31.

Легко проверить, что если 1 декабря какого-то года — понедельник, то 31 число ни в одном месяце этого года не может быть вторником. Значит, если 1 декабря какого-то года — суббота, то ни в одном месяце этого года 31 число не может быть воскресеньем.

8 класс

1. Рассмотрим систему точек, обладающих требуемым свойством, и выберем из всех отрезков, соединяющих эти точки, наибольший (или один из наибольших). Пусть это будет отрезок AB . Во всех треугольниках с вершинами A и B наибольшая сторона AB должна лежать против прямого угла. Таким образом, все рассматриваемые точки лежат на окружности с диаметром AB .

Пусть C — третья точка. Выясним, где может лежать четвёртая точка D . В треугольнике ACD угол ACD не прямой, так как иначе точка D совпадала бы с точкой B . Далее, $\angle ADC \neq 90^\circ$, так как этот угол опирается на хорду AC , не являющуюся диаметром. Следовательно, в треугольнике ACD прямым должен быть угол DAC , поэтому CD — диаметр. Итак, положение четвёртой точки определено однозначно, поэтому наибольшее возможное значение n равно 4 (четыре точки расположены в вершинах прямоугольника).

2. Прежде всего заметим, что если $m=0$ или $n=0$, то число ходов, очевидно, чётно. В дальнейшем будем считать, что $mn \neq 0$.

Пусть p — разность количеств ходов вида $(a+m, b+n)$ и $(a-m, b-n)$, q — вида $(a+m, b-n)$ и $(a-m, b+n)$, r — вида $(a+n, b+m)$ и $(a-n, b-m)$, s — вида $(a+n, b-m)$ и $(a-n, b+m)$.

Все ходы вида $(a+m, b+n)$ и $(a-m, b-n)$ в совокупности приводят к перемещению фишки с поля (a, b) на поле $(a+pt, b+pn)$ и т. д. После всех ходов фишка вернулась на исходное поле, поэтому числа p, q, r и s удовлетворяют уравнениям

$$(p+q)m + (r+s)n = 0, (p-q)n + (r-s)m = 0.$$

Выразив из каждого из них $-\frac{m}{n}$ и приравняв эти выражения, получим $\frac{r+s}{p+q} = \frac{p-q}{r-s}$, т. е. $p^2 - q^2 - r^2 + s^2 = 0$. Для

любого числа c чётности чисел c , $-c$ и c^2 одинаковы, поэтому число $p + q + r + s$ чётно (оно имеет ту же чётность, как и 0).

Число $p + q + r + s$ имеет такую же чётность, как и число x , потому что разность количеств ходов двух видов имеет такую же чётность, как и их сумма. Следовательно, число x чётно.

4. Пусть a_1 — первый наблюдатель. Рассмотрим всех наблюдателей, которые начали следить за улиткой не позже того момента, когда кончил следить a_1 (по условию такие наблюдатели есть). Пусть a_2 — последний из таких наблюдателей. Рассмотрим затем всех наблюдателей, начавших следить за улиткой не позже, чем кончил a_2 , и обозначим a_3 последнего из них. Аналогично выберем наблюдателя a_4 и т. д. В конце концов мы дойдём до наблюдателя, окончившего наблюдать как раз в конце шестой минуты (если наблюдатель a_k кончил наблюдать раньше, то имеются наблюдатели, начавшие следить позже, чем a_k , а потому можно выбрать наблюдателя a_{k+1}). Пусть a_1, a_2, \dots, a_k — все выбранные таким образом наблюдатели. Покажем, что промежутки наблюдения a_1, a_3, a_5, \dots не пересекаются. Предположим, например, что в какой-то момент времени за улиткой наблюдали a_1 и a_3 . Это означает, что наблюдатель a_2 выбран неправильно, так как a_3 начал наблюдать позже, чем a_2 , но ещё до того, как кончил a_1 . Аналогично промежутки, в которые следили наблюдатели a_2, a_4, a_6, \dots , не пересекаются.

Так как промежутки наблюдения a_1, a_3, \dots (каждый длиной в 1 минуту) не пересекаются, то наблюдателей a_1, a_3, a_5, \dots не больше 5, ибо весь интервал наблюдения составляет 6 минут. Точно так же наблюдателей a_2, a_4, \dots не более 5, т. е. всего наблюдателей a_1, a_2, \dots, a_k имеется не более десяти: $k \leq 10$.

За улиткой всё время наблюдает кто-нибудь из наблюдателей a_1, a_2, \dots, a_k ; всего таких наблюдателей не более

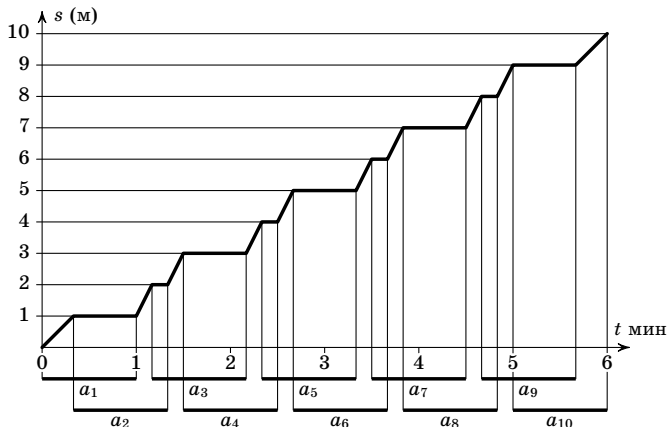


Рис. 43

10, и каждый видит, как улитка проползла 1 м. Значит, больше 10 м улитка не могла проползти.

На рисунке 43 приведён пример движения улитки, когда она проползает ровно 10 м. Улитка ползёт только тогда, когда на неё смотрит ровно один из 10 наблюдателей, и за это время проползает 1 м; остальное время улитка не движется.

5. Отрезки AC и EC являются гипотенузами равных прямоугольных треугольников, поэтому они равны. Таким образом, биссектриса угла C равнобедренного треугольника ACE является осью симметрии рассматриваемого пятиугольника. Сумма углов пятиугольника при вершинах A , E и C равна 360° . Поэтому из четырёх таких пятиугольников можно сложить шестиугольник (рис. 44). Такими шестиугольниками, очевидно, можно замостить плоскость.

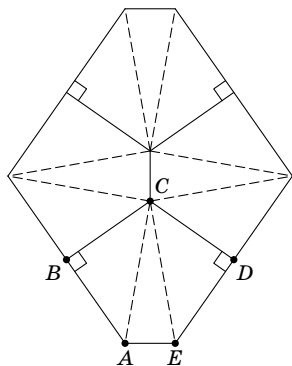


Рис. 44

9 класс

1. Так как каждую точку можно соединить не более чем с $m - 1$ другими, $l < m$. Кроме того, общее число пар вида (отрезок, конец этого отрезка) равно lm , а значит, общее число отрезков равно $lm/2$, откуда следует, что число lm чётно.

Докажем, что для любых $l < m$, для которых число lm чётно, описанная в условии конструкция осуществима. Рассмотрим сначала случай, когда число l чётно. Расположим точки в вершинах правильного m -угольника и проведём те диагонали, по какую-нибудь сторону от которых лежит не более $\frac{l}{2} - 1$ вершин многоугольника. Тогда каждая вершина будет соединена ровно с l другими.

Рассмотрим теперь случай, когда число l нечётно, а число m чётно. Расположим точки в вершинах двух правильных $(m/2)$ -угольников $A_1 \dots A_{m/2}$ и $B_1 \dots B_{m/2}$. Если $l < \frac{m}{2}$, то в каждом из этих $(m/2)$ -угольников можно провести диагонали так, что каждая вершина будет соединена ровно с l другими. Если же $l \geq \frac{m}{2}$, то в каждом из двух $(m/2)$ -угольников проведём все диагонали и для всех i соединим вершину A_i с $k + 1$ вершинами $B_i, B_{i+1}, \dots, B_{i+k}$, где $k = l - \frac{m}{2}$.

2. Пусть K, L, M и N — вершины правильных треугольников, построенных на сторонах BC, AB, AF и FE ; B_1, A_1 и F_1 — середины отрезков KL, LM и MN (рис. 45). Пусть, далее, $a = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$, $b = \overrightarrow{AB}$ и $c = \overrightarrow{AF}$; R — поворот на 60° , переводящий вектор \overrightarrow{BC} в \overrightarrow{BK} . Тогда $\overrightarrow{AM} = -R^2 c$ и $\overrightarrow{FN} = -R^2 a$. Поэтому $2\overrightarrow{A_1 B_1} = R^2 c + Ra + b$ и $2\overrightarrow{F_1 A_1} = R^2 a - c + Rb$, т. е. $\overrightarrow{F_1 A_1} = R(\overrightarrow{A_1 B_1})$.

3. Шахматную доску $n \times 4$ можно разбить на 4 полосы, каждая из которых состоит из n клеток; две полосы расположены по краям и две в середине. Предположим, что шахматный конь обошёл доску, побывав на каждом поле

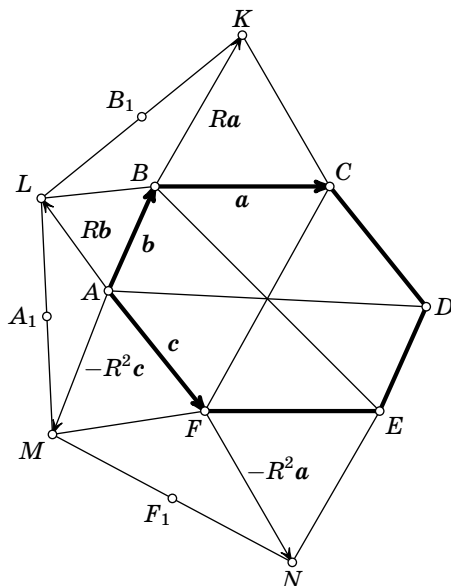


Рис. 45

по одному разу и последним ходом вернувшись на исходную клетку. Этот обход схематично можно изобразить $4n$ -угольником, вершины которого соответствуют клеткам, а стороны — ходам коня. Из любой клетки крайней полосы за один ход конь может попасть только на среднюю полосу. Это означает, что в рассматриваемом многоугольнике две соседние вершины не могут соответствовать клеткам крайних полос. Но ровно половина вершин многоугольника соответствует клеткам крайних полос, поэтому вершины, соответствующие клеткам крайних полос, и вершины, соответствующие клеткам средних полос, строго чередуются. Следовательно, делая ход из белой клетки крайней полосы мы сначала попадаем в чёрную клетку средней полосы, а через один ход попадаем снова в белую клетку крайней полосы (а делая ход из чёрной клетки крайней полосы, через один ход попадаем в чёрную клетку крайней полосы). Таким образом, все клетки крайних полос

имеют один и тот же цвет. Полученное противоречие показывает, что требуемого обхода не существует.

4. Каждая сторона прямоугольника должна проходить через какую-нибудь вершину треугольника. Так как при этом вершин у треугольника на одну меньше, чем сторон у прямоугольника, то хотя бы одна вершина прямоугольника должна совпадать с одной из вершин треугольника. Будем называть такую вершину опорной; на рисунке 46 вершина A треугольника ABC опорная. Вершина Q прямоугольника $APQR$, противоположная вершине A , лежит на полуокружности, построенной (внешним образом) на стороне BC треугольника ABC как на диаметре. Пусть A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон треугольника ABC . Центр прямоугольника — это середина отрезка AQ , поэтому он лежит на полуокружности, построенной как на диаметре на средней линии B_1C_1 треугольника ABC .

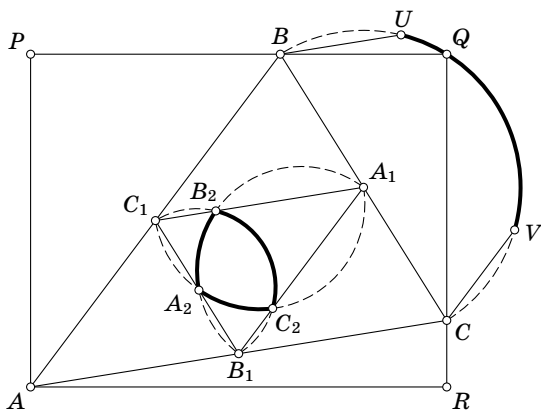


Рис. 46

Вершины прямоугольников заматают не всю полуокружность, а лишь дугу UV , где U и V — такие точки, что $BU \parallel C_1A_1$ и $CV \parallel B_1A_1$. В точках U и V происходит смена опорной вершины треугольника.

Окружности с диаметрами A_1B_1 , B_1C_1 и C_1A_1 пересекаются в точках A_2 , B_2 и C_2 , которые являются основаниями высот треугольника $A_1B_1C_1$. Искомое ГМТ — это криволинейный треугольник $A_2B_2C_2$, сторонами которого являются дуги этих окружностей.

5. Рассмотрим фигуру Φ , состоящую из множества точек, удалённых от отрезка длины 10 не более чем на 1 (рис. 47). Разобьём весь квадрат 100×100 на 50 вертикальных полос размером 2×100 , и в каждую из этих полос поместим по 8 непересекающихся фигур, равных Φ . Из условия задачи следует, что в каждую из 400 фигур попадает по крайней мере один центр круга и поэтому кругов не меньше 400.

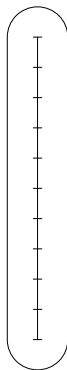


Рис. 47

10 класс

1. Предположим, что число A делится на 1, 2, 3, ..., 9 и число $2A$ представлено в виде суммы натуральных чисел, меньших 10, $2A = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, так, что из чисел a_1, a_2, \dots, a_k нельзя выбрать часть, сумма которых равна A .

Наименьшее натуральное число, которое делится на 1, 2, 3, ..., 9, равно 2520, поэтому $2A \geq 2520 \cdot 2 = 5040$. Таким образом, чтобы прийти к противоречию, достаточно доказать, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_k ни одно из чисел 1, ..., 9 не может встретиться более 7 раз. Действительно, тогда мы получим, что $a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq 7 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 315$.

Предположим, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_k число n встречается по крайней мере 8 раз. Исключим эти 8 чисел n и рассмотрим оставшиеся числа. Их сумма довольно велика: она не меньше $5040 - 72$. Поэтому среди них можно выбрать либо число, делящееся на n , либо n чисел, дающих одинаковые остатки при делении на n ; сумма выбранных таким образом чисел делится на n . Среди оставшихся чисел снова выберем таким же способом несколько

чисел, сумма которых делится на n , и добавим их к уже выбранным числам. Так мы будем выбирать числа до тех пор пока их сумма будет оставаться меньше A . Пусть сумма выбранных в итоге чисел равна S . Прибавив к S число $a \leq 8n$, мы получим число, которое не меньше A , поэтому $A \leq S + a \leq S + 8n$, т. е. $S \geq A - 8n$. Кроме того, по построению $S < A$ и S делится на n . Поэтому одно из чисел $S + n, \dots, S + 8n$ равно A . Получено противоречие.

2. Представим исходное число A в виде $A = 10a + b$. После перестановки последней цифры b в начало получим число $B = 10^{6n-1} \cdot b + a$.

Легко проверить, что число $10^6 - 1$ делится на 7, т. е. число 10^6 при делении на 7 даёт в остатке 1. Следовательно, число 10^{6n} при делении на 7 также даёт в остатке 1. Поэтому число $10B = 10^{6n} \cdot b + 10a$ при делении на 7 даёт такой же остаток, как и число $b + 10a = A$.

По условию число A делится на 7, поэтому число $10B$ тоже делится на 7. Следовательно, и число B делится на 7.

3. Пусть A — один из собравшихся; он имеет m знакомых A_1, A_2, \dots, A_m . Никакие два человека из A_1, A_2, \dots, A_m не могут быть знакомы, потому что у них есть общий знакомый A . Поэтому у каждого двух человек A_i и A_j есть ровно один общий знакомый, кроме A ; обозначим его A_{ij} . Ясно, что человек A_{ij} не может быть одним из A_1, A_2, \dots, A_m , потому что он не знаком с A . Для разных пар (A_i, A_j) люди A_{ij} разные, потому что иначе у двух незнакомых людей A и A_{ij} оказалось бы больше двух общих знакомых.

Таким образом, число людей, не знакомых с A , не меньше, чем количество пар, составленных из m человек A_1, A_2, \dots, A_m , т. е. не меньше $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$. С другой стороны, каждый человек, не знакомый с A , имеет с ним ровно двух общих знакомых, причём они должны быть из числа A_1, A_2, \dots, A_m . При этом разным людям соответствуют разные пары. Действительно, если бы одна пара

(A_i, A_j) соответствовала двум или более людям, то общими знакомыми A_i и A_j были бы эти люди и ещё A . Поэтому число людей, не знакомых с A , не больше C_m^2 .

Итак, есть m человек, знакомых с A , и $\frac{m(m-1)}{2}$ человек, не знакомых с A . Поэтому $n = 1 + m + \frac{m(m-1)}{2}$. Рассматривая это выражение как квадратное уравнение относительно m , мы видим, что оно имеет только один положительный корень, поэтому для любого из собравшихся число m знакомых с ним постоянно.

Комментарий. Соотношение $n = 1 + m + \frac{m(m-1)}{2}$ показывает, что описанная в условии задачи ситуация возможна не для всех натуральных n , а только для тех, которые имеют вид $n = 1 + m + \frac{m(m-1)}{2}$, где m — целое число, т. е. для $n = 1, 2, 4, 7, 11, \dots$

5. При любом таком маршруте число ходов вверх равно числу ходов вниз, а число ходов вправо равно числу ходов влево. Кроме того, любой маршрут задаётся последовательностью направлений ходов.

Вычислим сначала число маршрутов с фиксированным числом k ходов, сделанных вправо. Ясно, что влево при этом делается k ходов, вверх и вниз — по $n - k$ ходов в каждую сторону. Общее число таких маршрутов — это количество перестановок $2n$ элементов, среди которых есть k , k , $n - k$ и $n - k$ неразличимых. Поэтому число маршрутов N_k равно

$$\frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = \frac{(2n)!}{n! n!} \cdot \frac{(n!)^2}{(k!)^2((n-k)!)^2} = C_{2n}^n (C_n^k)^2.$$

Искомое число маршрутов равно сумме N_k по всем возможным k :

$$N = \sum_{k=0}^n N_k = C_{2n}^n \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2.$$

Но последняя сумма равна C_{2n}^n , так как $(C_n^k)^2 = C_n^k C_n^{n-k}$ — это число способов выбрать n элементов из $2n$ так, чтобы

выбранными оказались k из первой половины и $n - k$ из второй половины. Следовательно, $N = (C_{2n}^n)^2$, что и требовалось.

1961 год (XXIV олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Запишем числа от 1 до $2n$ в две строки следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n, \\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & \dots & n+2 & n+1. \end{array}$$

Суммы чисел в каждом столбце при этом равны. Так как число n чётно, мы можем разбить строки квадратной таблицы на пары и в первую пару строк записать числа от 1 до $2n$ так, как было указано; во вторую пару — числа от $2n+1$ до $4n$ аналогичным способом:

$$\begin{array}{cccc} 2n+1 & 2n+2 & \dots & 3n, \\ 4n & 4n-1 & \dots & 3n+1, \end{array}$$

и т. д.

В каждой паре строк суммы чисел в столбцах одинаковы, поэтому и во всей таблице суммы чисел, стоящих в каждом столбце, одинаковы.

2. Прежде всего покажем, что если число $a_1b_1c_1$ отлично от нуля, то оно обладает следующими свойствами: 1) $b_1 = 9$; 2) $a_1b_1c_1$ делится на 9. Действительно, пусть для определённости $a > c$. Тогда $a_1b_1c_1 = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99(a - b)$. Это число делится на 9. Кроме того, оно имеет вид $100k - k$, где $k \leq 9$, а у числа такого вида вторая цифра — девятка.

Таким образом, $a_1b_1c_1$ — одно из чисел 99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891, 990. Остаётся заметить, что $594 \rightarrow 99 \rightarrow 891 \rightarrow 693 \rightarrow 297 \rightarrow 495$.

3. Докажем сначала, что если треугольник $A_n B_n C_n$ остроугольный, то треугольник $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$ пересекает его в шести точках. Поскольку $\angle B_{n+1} A_n C_n = 45^\circ = \angle C_{n+1} A_n B_n$, а $\angle B_n A_n C_n$ острый, лучи $A_n B_n$ и $A_n C_n$ лежат внутри угла $B_{n+1} A_n C_{n+1}$. Поэтому шестиугольник $A_n C_{n+1} B_n A_{n+1} C_n B_{n+1}$ лежит по одну сторону от прямых $A_n B_{n+1}$ и $A_n C_{n+1}$. Аналогично доказывается, что он лежит по одну сторону от продолжений остальных сторон. Значит, этот шестиугольник выпуклый и, следовательно, треугольник $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$ пересекает треугольник $A_n B_n C_n$ в шести точках.

Докажем индукцией по n , что треугольник $A_n B_n C_n$ остроугольный. Предположим, что при $n = k$ треугольник остроугольный, и докажем, что при $n = k + 1$ треугольник также будет остроугольным. Как уже было доказано, шестиугольник $A_k C_{k+1} B_k A_{k+1} C_k B_{k+1}$ выпуклый, поэтому $\angle C_{n+1} A_{n+1} B_{n+1} < \angle B_n A_{n+1} C_n = 90^\circ$, т. е. угол $\angle C_{n+1} A_{n+1} B_{n+1}$ острый. Аналогично доказывается, что и остальные углы треугольника $C_{n+1} A_{n+1} B_{n+1}$ острые.

4. Выберем среди данных точек две точки A и B , расстояние между которыми наибольшее (если таких пар точек несколько, то берём любую из них). Если C — любая из данных точек, то в треугольнике ABC тупым может быть только угол при вершине C . Поэтому точка C лежит внутри окружности с диаметром AB .

5. Достаточно доказать, что если на шахматной доске выбраны две клетки A и B разного цвета, то ладья может совершить обход, начав в одной из этих клеток и закончив в другой, побывав в каждой клетке ровно по одному разу. Действительно, если мы рассмотрим клетку C , соседнюю с клеткой B , и совершим обход из A и B , побывав в каждой клетке по одному разу, то, дополнив этот обход ходом из B в C , мы получим требуемый обход.

Докажем это для доски размером $2n \times 2n$ индукцией по n . Для $n = 1$ утверждение очевидно. Чтобы доказать шаг ин-

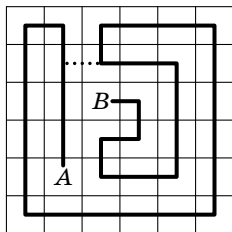


Рис. 48

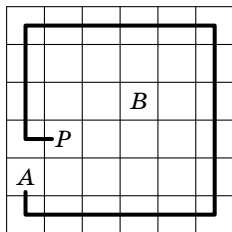


Рис. 49

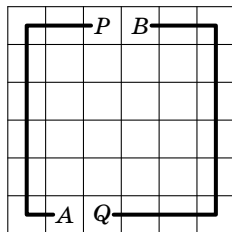


Рис. 50

дукции, представим доску размером $(2n + 2) \times (2n + 2)$ в виде меньшей доски размером $2n \times 2n$, заключённой в рамку. Рассмотрим несколько вариантов расположения клеток A и B .

1) Обе клетки расположены на меньшей доске. Рассмотрим путь, идущий из A в B по меньшей доске, который существует по предположению индукции. Хотя бы одно звено этого пути проходит вдоль границы меньшей доски. Это звено можно заменить на обход рамки и получить требуемый путь (рис. 48).

2) Клетка A расположена в рамке, а клетка B — на меньшей доске. Начнём с обхода рамки, причём если точка A соседняя с угловой клеткой, то выберем тот обход, который заканчивается не в угловой клетке (рис. 49). Завершив обход, войдём в меньшую доску и попадём в некоторую клетку P . Клетка P имеет такой же цвет, как и клетка A , поэтому она отлична от клетки B . Клетки P и B можно соединить по предположению индукции.

3) Обе клетки расположены в рамке, причём хотя бы одна из них не соседняя с угловой. Начало пути идёт из клетки A в клетку P , соседнюю с B ; конец пути идёт в клетку B из клетки Q , соседней с A (рис. 50). Промежуточный путь из P в Q находится по предположению индукции. Но для построения этого пути нужно, чтобы клетки P и Q были не угловыми. Направление пути из клетки A можно выбрать двумя способами; это направление нуж-

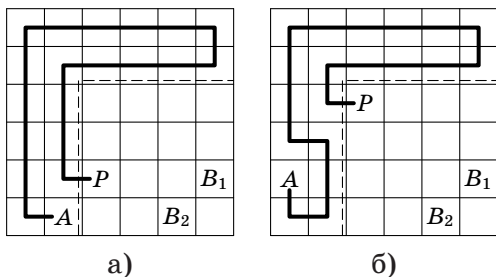


Рис. 51

но выбрать так, чтобы путь из клетки, соседней с угловой, проходил через эту угловую клетку (на рисунке 50 путь из клетки A выбран именно так). Если обе клетки A и B не соседние с угловыми, то направление пути можно выбрать любое. Отметим, что точка B может совпасть с точкой P (или точка A совпасть с точкой Q), но на ход рассуждений это не влияет.

4) Обе клетки расположены в рамке, причём обе они соседние с угловыми. Клетки A и B разного цвета, поэтому угловые клетки, к которым они примыкают, лежат на одной стороне рамки. Представим доску размером $(2n+2) \times (2n+2)$ в виде меньшей доски размером $2n \times 2n$, расположенной в углу доски, и оставшейся Г-образной части (рис. 51). Обойдём Г-образную часть, начав обход из клетки A . В зависимости от того, где именно расположена клетка A , возможны два варианта обхода, изображённые на рисунках а) и б). Завершив обход, войдём в меньшую доску и попадём в некоторую клетку P . Клетки P и B можно соединить по предположению индукции.

8 класс

1. *Первый способ.* Пусть A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , CA и AB . При гомотетии с центром O и коэффициентом $\frac{2}{3}$ треугольник $A_1B_1C_1$ переходит в треугольник $M_1M_2M_3$, поэтому $S_{M_1M_2M_3} = \frac{4}{9}S_{A_1B_1C_1} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{9}S_{ABC}$.

Второй способ.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]| = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}]|.$$

Аналогично $S_{M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_2}]|$. При этом $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, поскольку радиус-вектор центра масс треугольника равен среднему арифметическому радиус-векторов вершин треугольника. Аналогично $\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{OM_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Тогда,

$$\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}), \quad \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}).$$

А значит,

$$\begin{aligned} S_{M_1 M_2 M_3} &= \frac{1}{2} |[\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_2}]| = \\ &= \frac{1}{18} |[\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}]| = \frac{1}{9} S_{ABC}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

2. Докажем, что задуманный набор можно определить, задав всего один вопрос. Положим $a_1 = 100$, $a_2 = 100^2$, ..., $a_n = 100^n$. Тогда сообщённая сумма равна

$$S_1 = 100x_1 + 100^2x_2 + \dots + 100^nx_n,$$

поэтому

$$\frac{S_1}{100^n} = \frac{100x_1 + 100^2x_2 + \dots + 100^{n-1}x_{n-1}}{100^n} + x_n.$$

Покажем, что

$$\left| \frac{100x_1 + 100^2x_2 + \dots + 100^{n-1}x_{n-1}}{100^n} \right| < \frac{1}{10}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |100x_1 + 100^2x_2 + \dots + 100^{n-1}x_{n-1}| &\leq \\ &\leq 100 \cdot |x_1| + 100^2 \cdot |x_2| + \dots + 100^{n-1} \cdot |x_{n-1}| \leq \\ &\leq 9 \cdot (100 + 100^2 + \dots + 100^{n-1}), \end{aligned}$$

так как x_1, x_2, \dots, x_{n-1} — однозначные числа. Число

$$9(100 + 100^2 + \dots + 100^{n-1})$$

имеет $2n - 1$ десятичных знаков, поэтому оно меньше, чем 10^{2n-1} . Таким образом, интересующее нас отношение меньше, чем

$$\frac{10^{2n-1}}{100^n} = \frac{10^{2n} \cdot \frac{1}{10}}{10^{2n}} = \frac{1}{10}.$$

Итак, отношение $\frac{S_1}{100^n}$ отличается от целого числа x_n меньше, чем на $\frac{1}{10}$. Это позволяет однозначно определить x_n . Зная x_n , мы можем найти сумму

$$S_2 = S_1 - 100^n x_n = 100x_1 + 100^2 x_2 + \dots + 100^{n-1} x_{n-1}$$

и по ней найти x_{n-1} (разделив на 100^{n-1}), и т. д.

4. Если одна из сторон шахматной доски равна 2, то обход по периметру удовлетворяет условию. Когда длина одной из сторон чётна, возможен обход, показанный на рисунке 52. Поэтому если число клеток на доске чётное, то требуемый обход существует.

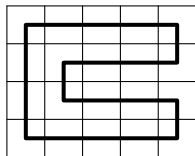


Рис. 52

После каждого шага ладьи меняется цвет клетки, на которой она стоит. Если ладья начинает и заканчивает обход в одной и той же клетке, то количество пройденных чёрных и белых клеток одинаково. Таким образом, ладья может обойти, вернувшись назад, только чётное число клеток. Поэтому если число клеток на доске нечётное, то требуемого обхода не существует.

Комментарий. По сути дела та же задача уже предлагалась на олимпиаде 1958-го года (II тур, 7 класс, задача 5).

5. Сумма чисел отрезка натурального ряда $a, a + 1, \dots, a + 1960$ равна $1961a + 1961 \cdot 980$. Пусть данные отрезки

начинаются с a и b , а искомый отрезок начинается с c . Тогда $1961(a + 980 + b + 980) = 1961(c + 980)$, поэтому $c = a + b + 980$. Теперь требуемая перестановка легко находится:

$$\begin{array}{cccccccc} a & a+981 & a+1 & a+982 & \dots & a+979 & a+1960 & a+980 \\ b+980 & b & b+981 & b+1 & \dots & b+1959 & b+979 & b+1960 \end{array}$$

9 класс

3. Сначала расставим числа так: в первую строчку 1, 2, ..., n , во вторую $n + 1$, $n + 2$, ..., $n + n$, и так далее. Тогда в j -м столбце будут стоять числа j , $n + j$, ..., $(n - 1)n + j$. Эта таблица ещё не удовлетворяет условию задачи. Чтобы получить требуемую таблицу, в каждой строке этой таблицы сдвинем все числа по кругу на номер строки. Тогда сумму чисел в каждом столбце можно представить в виде $n + 2n + \dots + (n - 1)n + 1 + 2 + \dots + n$, поскольку в эту сумму входит ровно по одному числу из каждого столбца и каждой строки первоначальной таблицы. Следовательно, суммы чисел во всех столбцах равны.

4. Докажем, что если пассажиры смогли расплатиться, то общее число монет не меньше $5k$. Проезд в автобусе стоит 5 копеек, и ни у кого из пассажиров нет монет мельче 10 копеек, поэтому после оплаты проезда каждый пассажир должен получить сдачу, т. е. после оплаты проезда у каждого пассажира должна остаться хотя бы одна монета. Таким образом, после оплаты у пассажиров должно остаться не менее $4k$ монет.

Стоимость проезда $4k$ пассажиров составляет $20k$ копеек, и для её оплаты даже самыми крупными (20-копеечными) монетами требуется не менее k монет. Поэтому в кассу автобуса опущено не менее k монет, и общее количество монет не менее $5k$.

Остаётся построить пример оплаты проезда при наличии у пассажиров ровно $5k$ монет. Разобьём пассажиров

на k групп по 4 человека и пусть в каждой группе деньги распределены следующим образом:

- 1-й пассажир: 15 коп.;
 2-й пассажир: 10 + 10 коп.;
 3-й пассажир: 15 коп.;
 4-й пассажир: 20 коп.

(5 монет на каждую группу из 4 человек; всего $5k$ монет).
 Расчёт в группе происходит следующим образом:

1-й	получает	10 коп.	взамен	15 коп.;
2-й	»	15 коп.	»	20 коп.;
3-й	»	10 коп.	»	15 коп.;
4-й	»	15 коп.	»	20 коп.

В кассу опущено 20 копеек за четырёх пассажиров.

5. Рассмотрим выпуклую оболочку данных точек, т. е. выпуклый многоугольник M с вершинами в некоторых из данных точек, содержащий все данные точки. Докажем, что ни одна из данных точек не может лежать на стороне или внутри многоугольника. Для этого рассмотрим одну из вершин; весь многоугольник разбивается диагоналями, проведёнными из данной вершины, на треугольники, причём ни в одном из них по условию не может лежать ещё одна из данных точек. Значит, все данные точки являются вершинами многоугольника M , т. е. M является искомым выпуклым многоугольником.

10 класс

1. Применим индукцию по k . Простые вычисления показывают, что $U_5 = 5$. Предположим, что U_{5k} делится на 5. Пусть U_{5k+1} даёт остаток x при делении на 5. Тогда числа U_{5k+2} , U_{5k+3} , U_{5k+4} , U_{5k+5} при делении на 5 дают, соответственно, такие же остатки, как числа x , $2x$, $3x$, $5x$. Таким образом, число $U_{5(k+1)}$ делится на 5.

Комментарий. Числа U_k называются *числами Фибоначчи*. Утверждение задачи допускает следующее обобщение: если m делится на n , то U_m делится на U_n (при $n = 5$ получаем утверждение задачи).

2. Пусть M — многоугольник, который является общей частью полос, P — полоса, граница которой пересекает M по паре отрезков, длины которых l_1 и l_2 . При сдвиге полосы на достаточно малое расстояние ε площадь пересечения изменится на $\varepsilon(l_1 - l_2) + c \cdot \varepsilon^2$. Если $l_1 - l_2 \neq 0$, то, сдвигая полосу, площадь общей части можно как увеличить, так и уменьшить. Поэтому если площадь многоугольника M наибольшая, то $l_1 = l_2$. Таким образом, если площадь многоугольника M наибольшая, то граница любой полосы либо не пересекает его (и тогда весь многоугольник M лежит внутри этой полосы), либо пересекает по двум равным и параллельным отрезкам.

Рассмотрим выпуклый многоугольник $A_1 A_2 \dots A_n$, у которого для каждой стороны есть параллельная и равная ей сторона. Число вершин такого многоугольника чётно, т. е. $n = 2k$. Равными параллельными сторонами являются стороны $A_1 A_2$ и $A_{k+1} A_{k+2}$, ..., $A_k A_{k+1}$ и $A_{2k} A_1$, поэтому середины каждой пары отрезков $A_1 A_{k+1}$ и $A_2 A_{n+2}$, $A_2 A_{n+2}$ и $A_3 A_{n+3}$, ..., $A_k A_{2k}$ и $A_{k+1} A_1$ совпадают. Следовательно, середины всех этих отрезков совпадают. Поэтому прямые, равноудалённые от пар параллельных прямых $A_1 A_2$ и $A_{k+1} A_{k+2}$, ..., $A_k A_{k+1}$ и $A_{2k} A_1$, пересекаются в одной точке.

В итоге получаем, что если сдвинуть все полосы так, чтобы их оси симметрии пересекались в одной точке, то площадь их общей части будет наибольшей.

Комментарий. Решение основано на предположении, что существует многоугольник M , площадь которого является наибольшей.

3. Проезд в автобусе стоит 5 копеек, и ни у кого из пассажиров нет монет мельче 10 копеек, поэтому после оплаты проезда каждый пассажир должен получить сда-

чу, т. е. после оплаты проезда у каждого пассажира должна остаться хотя бы одна монета. Таким образом, после оплаты у пассажиров должно остаться не менее k монет.

Стоимость проезда k пассажиров составляет $5k$ копеек, и для её оплаты даже самыми крупными (20-копеечными) монетами требуется не менее $\frac{k}{4}$ монет. Наименьшее целое число, не меньшее $\frac{k}{4}$, равно $\left[\frac{k+3}{4} \right]$. Поэтому в кассу автобуса опущено не менее $\left[\frac{k+3}{4} \right]$ монет, и общее количество монет не менее $k + \left[\frac{k+3}{4} \right]$.

Остаётся построить пример оплаты проезда при наличии у пассажиров ровно $k + \left[\frac{k+3}{4} \right]$ монет. Ясно, что $k \geq 2$, потому что один пассажир не мог уплатить за проезд и получить сдачу. Применим индукцию по k . Сначала проверим базу индукции при $k = 2, 3, 4, 5$. При $k = 2$ первый пассажир платит 10 копеек в кассу и 10 копеек второму пассажиру, а второй платит 15 копеек первому. При $k = 3$ первые двое расплачиваются как в предыдущем примере, но 10 копеек отдают не в кассу, а третьему, который кладёт в кассу 15 копеек. При $k = 4$ первые трое расплачиваются как в предыдущем примере, но 15 копеек отдают четвёртому, который кладёт в кассу 20 копеек. При $k = 5$ первые двое и остальные трое расплачиваются по отдельности, как это описано в предыдущих примерах.

Пусть теперь $k \geq 6$ и при всех меньших k утверждение доказано. Выделим четырёх пассажиров. Пусть все остальные расплачиваются как в соответствующем примере для $k - 4$, а выделенные четверо — как в примере для четырёх.

4. Прежде всего докажем, что искомое ГМТ лежит в плоскости, которая проходит через точку O , центр окружности S и перпендикулярна к плоскости, содержащей эту окружность. Действительно, рассмотрим шар, проходя-

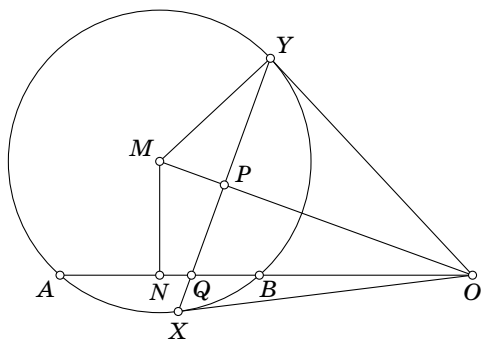


Рис. 53

щий через окружность S , и конус с вершиной O , касающийся его. Центр шара лежит на прямой, перпендикулярной к плоскости, в которой лежит окружность S , и проходящей через центр окружности S . В свою очередь, центр окружности, по которой конус касается шара, лежит на прямой, соединяющей центр шара и точку O .

Таким образом, задача сводится к следующей планиметрической задаче. На прямой задан отрезок AB и отмечена точка O вне его. Построим сначала окружность, проходящую через точки A и B , а затем касательные к ней, проходящие через точку O . Требуется найти множество середин отрезков, соединяющих точки касания.

Пусть N — середина отрезка AB , M — центр построенной окружности, X и Y — точки касания, P — середина отрезка XY , Q — точка пересечения отрезков XY и AB (рис. 53). Из подобия треугольников POQ и NOM получаем $\frac{OQ}{OM} = \frac{PO}{NO}$, поэтому $OQ = \frac{OM \cdot PO}{ON}$. В свою очередь, из подобия треугольников POY и YOM получаем $\frac{PO}{YO} = \frac{OY}{OM}$, поэтому $\frac{OM \cdot PO}{ON} = \frac{OY^2}{ON}$. Но $OY^2 = OB \cdot OA$, поэтому $OQ = \frac{OB \cdot OA}{ON}$, а значит, длина отрезка OQ не зависит от выбора точки M .

Таким образом, точка P лежит на окружности с диаметром OQ , причём все точки этой окружности, кроме точки O , можно получить таким способом.

5. Каждому комплексному числу можно сопоставить вектор на комплексной плоскости, поэтому можно считать, что дано n векторов, проведённых из точки O в точки Z_1, \dots, Z_n , причём сумма этих векторов равна нулю. Если $n=2$, то тогда, поскольку сумма векторов равна нулю, они равны по модулю и противоположно направлены, а значит, разность аргументов комплексных чисел равна 180° , т. е. больше 120° . Если же $n > 2$, то точка O принадлежит выпуклой оболочке точек Z_1, \dots, Z_n , поскольку иначе сумма векторов была бы не равна нулю. Поэтому точка O принадлежит и некоторому треугольнику с вершинами Z_i . Без ограничения общности можно считать, что это треугольник $Z_1Z_2Z_3$. Тогда $\angle Z_1OZ_2 + \angle Z_2OZ_3 + \angle Z_3OZ_1 = 360^\circ$, а значит, один из этих углов не меньше $120^\circ = 360^\circ/3$, что и требовалось, поскольку угол равен разности аргументов.

Второй тур

7 класс

1. Сотрём все проведённые диагонали и будем проводить их снова, но уже по одной, по очереди. Первая диагональ разделит многоугольник на два многоугольника; каждый из них покрашен снаружи всюду, кроме диагонали. Диагональ покрашена с одной стороны, поэтому один из двух многоугольников целиком покрашен снаружи.

Проведём вторую диагональ. Если она проходит так, что не пересекает выбранный нами многоугольник, то он остаётся покрашенным снаружи. Если же диагональ пересекает многоугольник, то она снова разбивает его на две части, одна из которых покрашена снаружи. И каждый раз, проводя новую диагональ, мы либо сохраняем уже имеющийся многоугольник, покрашенный снаружи, либо получаем новый.

2. Точка пересечения диагоналей прямоугольника $PQRS$ равноудалена от сторон AB и CD и от сторон BC и DA ,

поэтому она совпадает с центром квадрата $ABCD$. Будем считать, что на сторонах квадрата отмечены только точки P и R , и выясним, где могут находиться точки Q и S . Ясно, что эти точки расположены на окружности с диаметром PR . Центром этой окружности служит середина отрезка

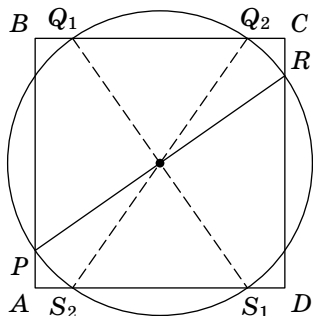


Рис. 54

ка PR , которая совпадает с центром квадрата $ABCD$. Эта окружность пересекает квадрат в восьми точках (рис. 54). Точка Q — это одна из точек Q_1 и Q_2 , расположенных на стороне BC , а точка S — это одна из точек S_1 и S_2 , расположенных на стороне AD . Прямоугольник PQ_1RS_1 — квадрат, а стороны прямоугольника PQ_2RS_2 параллельны диагоналям квадрата $ABCD$.

3. Будем обозначать сумму цифр числа n через $S(n)$. Среди любых 39 последовательных натуральных чисел есть не менее трёх, делящихся на 10; пусть a — наименьшее из них. Меньше a могут быть только 9 из данных чисел, поэтому среди данных 39 чисел есть также числа $a+1, \dots, a+29$. Поскольку a делится на 10, то $S(a+1) = S(a) + 1$, $S(a+2) = S(a) + 2$, ..., $S(a+9) = S(a) + 9$. Поэтому если среди чисел $a, a+1, \dots, a+9$ не встречается число, сумма цифр которого делится на 11, то $S(a)$ при делении на 11 даёт остаток 1.

Рассмотрим сначала случай, когда $a+10$ не делится на 100. В этом случае $S(a+10) = S(a) + 1$, поэтому среди чисел $a+10, a+11, \dots, a+19$ найдётся число, сумма цифр которого делится на 11.

Рассмотрим теперь случай, когда $a+10$ делится на 100. В этом случае $S(a+20) = S(a+10) + 1$, поэтому среди чисел $a+10, a+11, \dots, a+29$ найдётся число, сумма цифр которого делится на 11.

4. При вычёркивании любых двух строк таблицы, изображённой на рисунке 55, звёздочки остаются по крайней мере в трёх столбцах, поэтому при вычёркивании любых двух строк и столбцов в оставшихся клетках всегда есть хотя бы одна звёздочка.

Предположим теперь, что в таблице представлено меньше, чем семь звёздочек. Тогда возможны два случая.

*			*
	*		*
		*	
*	*		

Рис. 55

1) В какой-то строке таблицы звёздочек нет; пусть для определённости звёздочек нет в первой строке. Тогда найдётся строка, в которой расположено не больше двух звёздочек. Действительно, если бы в каждой из трёх остальных строк было не менее трёх звёздочек, то общее количество звёздочек в таблице превысило бы 6. Пусть для определённости не более двух звёздочек расположено во второй строке. Вычеркнем из таблицы третью и четвертую строки, а также столбцы, содержащие звёздочки второй строки (этих столбцов не больше двух). Получившаяся таблица не содержит звёздочек.

2) В таблице нет строк, не содержащих звёздочек. Если бы при этом в трёх строках нашлось по две звёздочки, то число звёздочек в таблице превысило бы 6. Следовательно, найдутся две строки, в каждой из которых содержится только по одной звёздочке; пусть для определённости это будут первая и вторая строки. Вычеркнем третью и четвертую строки таблицы и те столбцы, в которых стоят звёздочки первой и второй строк (таких столбцов не больше двух). Оставшаяся таблица не содержит звёздочек.

5. Предположим, что существуют целые числа a , b , c и d , удовлетворяющие указанным равенствам. Нечётные числа 1961, 961, 61 и 1 делятся, соответственно, на a , b , c и d . Поэтому числа a , b , c и d нечётные. Но тогда число $abcd$ нечётное. Следовательно, число $abcd - a$ чётное. Приходим к противоречию.

8 класс

1. Данная фигура разбивает плоскость на шесть областей; среди них пять ограниченных и одна бесконечная. Только две из них имеют чётное число граничных отрезков (из которых состоит фигура), а оставшиеся четыре — нечётное.

Если ломаная не начинается и не заканчивается в области, то она пересекает её границу чётное число раз. Поэтому не может быть более двух областей, границу которых она пересекает нечётное число раз. Поскольку каждый отрезок данной фигуры она должна пересекать ровно один раз, а областей с нечётным числом отрезков на границе четыре, то ломаной, удовлетворяющей условию задачи, не существует.

2. Пусть O — точка пересечения диагоналей. Рассмотрим внешнюю касательную к окружностям 1 и 3 и опустим на неё перпендикуляры из точки O и из центров окружностей 1 и 3. В результате получим трапецию, в которой проведена средняя линия. Длина этой средней линии равна $\frac{r_1 + r_3}{2}$. Аналогичные рассуждения показывают, что расстояния от точки O до всех четырёх проведённых внешних касательных равны, поэтому O — центр вписанной окружности.

5. Предположим, что в построенной последовательности снова встретилась четвёрка a, b, c, d . Покажем, что в этом случае все числа данной четвёрки положительны. Рассмотрим сначала случай, когда в четвёрке все числа отличны от нуля. Пусть сперва в четвёрке имеется одно отрицательное число, т. е. знаки в ней (с точностью до циклической перестановки) расположены так:

$$+++ - .$$

Рассмотрим тогда первые пять шагов исследуемого про-

цесса:

1) +++- 2) ++-- 3) +-+- 4) ---- 5) ++++.

Ни на каком шаге не получается четвёрка, содержащая одно отрицательное число (как исходная), а после пятого шага все числа становятся положительными. Попутно мы разобрали случай двух отрицательных членов: эти случаи соответствуют второму и третьему шагам разобранного примера (отрицательные числа стоят в четвёрке рядом или не рядом); в этих случаях повторения тоже не возникает. Случай четырёх отрицательных чисел также разобран (четвёртый шаг примера). Осталось рассмотреть тот случай, когда лишь одно число в четвёрке положительно:

1) +--- 2) -+++ 3) -+-+ 4) ---- 5) ++++.

Рассмотрим теперь случай, когда одно из чисел равно нулю. В этом случае мы получаем последовательность

1) 0, a , b , c ; 2) 0, ab , bc , 0; 3) 0, ab^2c , 0, 0; 4) 0, 0, 0, 0.

В этой последовательности исходная четвёрка может встретиться лишь в том случае, когда в этой четвёрке все числа — нули.

Таким образом, можно считать, что числа a , b , c и d положительны. Докажем, что $abcd = 1$. Предположим, что $abcd > 1$. Тогда произведение второй четвёрки чисел равно $(abcd)^2 > abcd$, произведение третьей четвёрки ещё больше и т. д. Поэтому четвёрка a , b , c , d больше никогда не встретится. Случай, когда $abcd < 1$, рассматривается аналогично.

Во второй четвёрке числа обладают следующим свойством: $a_1c_1 = (ab)(cd) = 1$ и $b_1d_1 = (bc)(da) = 1$. Ясно, что и во всех последующих четвёрках числа обладают этим свойством. Первая четвёрка чисел совпадает с одной из последующих, поэтому она тоже обладает этим свойством, т. е. $c = \frac{1}{a}$ и $d = \frac{1}{b}$. Можно считать, что a — наибольшее из чисел в первой четвёрке. Во второй четвёрке есть числа

ab и $a \cdot \frac{1}{b}$, одно из которых не меньше a и даже больше a в том случае, когда $b \neq 1$. Поэтому если $b \neq 1$, то во всех последующих четвёрках наибольшее число строго больше, чем в первой четвёрке, а значит, первая четвёрка не может совпасть ни с какой последующей. Следовательно, $b = 1$. Тогда вторая четвёрка чисел — это $a, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}, a$. Если $a \neq 1$, то в этой четвёрке все числа отличны от 1, поэтому в третьей четвёрке и во всех последующих наибольшее число строго больше a . Поэтому первая четвёрка может совпасть только со второй, но тогда $a = 1$.

9 класс

1. Пусть $a(t)$ и $b(t)$ — векторы, идущие из центров окружностей O_1 и O_2 в точки A и B в момент t , c — вектор, идущий из центра окружности O_1 в центр окружности O_2 , R — поворот на 60° , переводящий вектор \overrightarrow{AB} в вектор \overrightarrow{AC} . Тогда вектор, идущий из центра окружности O_1 в точку C , равен

$$a(t) + R(-a(t) + c + b(t)) = Rc + (Rb(t) - Ra(t) + a(t)).$$

Конец этого вектора равномерно движется по окружности с центром Rc поскольку вектор $Rb(t) - Ra(t) + a(t)$ получается из вектора $Rb(0) - Ra(0) + a(0)$ равномерным вращением.

2. Меняя знаки у всех чисел таблицы любыми способами, мы можем получить лишь конечное число различных таблиц, поэтому с помощью перемен знака у чисел некоторого столбца или некоторой строки таблицы мы можем получить лишь конечное число различных таблиц. Среди конечного числа таблиц можно выбрать таблицу, сумма всех чисел которой наибольшая (таких таблиц может оказаться несколько).

Если бы у выбранной таблицы сумма чисел некоторой строки была бы отрицательна, то с помощью перемены

знака у всех чисел этой строки мы получили бы таблицу с большей общей суммой (так как суммы чисел, стоящих во всех остальных строках, при этом не меняются). По той же причине не может быть отрицательной сумма чисел никакого столбца таблицы. Поэтому выбранная таблица — искомая.

3. Докажем это утверждение индукцией по n . При $n = 1$, $n = 2$ утверждение очевидно. Допустим, что оно верно при $n = k$, тогда докажем, что оно верно и для $n = k + 1$. Если в графе G есть *висячая вершина* (т. е. вершина, из которой выходит ровно одно ребро), тогда выбросим эту вершину вместе с выходящим из неё ребром. При этом в графе останется k вершин, а также он будет удовлетворять условию, а значит, по предположению индукции в нём $k - 1$ ребро. Тем самым получили, что в исходном графе k рёбер.

Итак, осталось доказать, что в любом графе, удовлетворяющем условию задачи, найдётся висячая вершина. Рассмотрим какой-нибудь путь в графе и будем его продолжать. Во-первых, заметим, что путь не может содержать никакую вершину более одного раза, поскольку в графе нет циклов. А во-вторых, в графе конечное число вершин, поэтому в нём найдётся вершина, из которой путь продолжить нельзя, но тогда это — висячая вершина.

4. Докажем это утверждение индукцией по $|a| + |b|$. Случай, когда $a = 0$ или $b = 0$, очевиден. Поскольку можно поменять знак у чисел k и l , можно считать, что $a > 0$ и $b > 0$. Тогда $|a| + |b| > |a - b| + |b|$, поэтому согласно предположению индукции найдутся взаимно простые числа k' и l' , для которых $(a - b)k' + bl'$ делится на p , т. е. $ak' + b(l' - k')$ делится на p . Числа k' и l' взаимно простые, поэтому числа $k = k'$ и $l = l' - k'$ также взаимно простые, что и требовалось.

5. Пусть Петя разделил $2n + 1$ орехов на две кучки, в которых a и b орехов, причём $a > b$, т. е. $a \geq n + 1$.

При первом способе дележа Коля сможет получить a орехов. Действительно, пусть он разобьёт кучку из a орехов на две кучки, содержащие $a - 1$ и 1 орех, а кучку из b орехов как угодно. Тогда бóльшая кучка будет состоять из $a - 1$ ореха, а меньшая из 1 . Больше, чем a орехов, Коля получить не сможет. Действительно, предположим, что он берёт орехи из разных кучек, сделанных Петей: из одной бóльшую часть, а из другой меньшую. Взятая меньшая часть не превосходит меньшей части той кучки, из которой взята бóльшая часть. Поэтому всего Коля берёт орехов не больше, чем их было в той кучке, из которой он взял бóльшую часть. Таким образом, Коля всегда может получить по крайней мере $n + 1$ орех, а если Петя сделает кучки из $n + 1$ и n орехов, то Коля не может получить больше $n + 1$ орехов.

При втором способе дележа Коля может разделить кучку из a орехов примерно пополам (т. е. либо на $\frac{a}{2}$ и $\frac{a}{2}$ орехов, либо на $\frac{a+1}{2}$ и $\frac{a-1}{2}$ орехов), а от кучки из b орехов отложить один. При этом, если a чётно и $b - 1 \geq \frac{a}{2}$ или a нечётно и $b - 1 \geq \frac{a+1}{2}$, то он получит a орехов, поэтому он получит по крайней мере $n + 1$ орех. Во всех остальных случаях Коля получит $\left[\frac{a}{2}\right] + b - 1$ орех. Ясно, что

$$\begin{aligned} \left[\frac{a}{2}\right] + b - 1 &= \left[\frac{a}{2} + b - 1\right] = \left[\frac{a + 2b - 2}{2}\right] = \left[\frac{2n + b - 1}{2}\right] = \\ &= n + \left[\frac{b - 1}{2}\right], \end{aligned}$$

поэтому по крайней мере n орехов Коля всегда получит. Если же Петя первоначально сделает кучки из $2n - 1$ и 2 орехов, то Коля не сможет получить больше $n - 1$ орехов из первой кучки и одного ореха из второй кучки. Таким образом, Коля всегда может получить по крайней мере n орехов, а если Петя сделает кучки из $2n - 1$ и 2 орехов, то Коля не может получить больше n орехов.

Заметим, что при втором способе дележа Коля тоже не сможет получить больше a орехов. Действительно, если он берёт средние части из разных кучек, то из кучки с b орехами он должен взять меньше, чем достаётся Пете из кучки с a орехами.

При третьем способе дележа Коля может поступить так же, как при первом способе дележа, и в результате получить хотя бы $a - 1$ орех. Если же Петя сделает кучки из $n + 1$ и n орехов, то Коля не сможет получить более n орехов, потому что ни взяв бóльшую и меньшую части, ни взяв средние части, он не получит больше $n + 1$ орехов, а один орех он должен отдать. Таким образом, Коля всегда может получить по крайней мере n орехов, а если Петя сделает кучки из $n + 1$ и n орехов, то Коля не может получить больше n орехов.

10 класс

1. Докажем сначала, что из любой последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ натуральных чисел можно выбрать неубывающую подпоследовательность, т. е. такую, что каждый её член не меньше предыдущего. В последовательности натуральных чисел можно выбрать наименьшее число x_p . Если x_p встречается в последовательности бесконечно много раз, то выбрав члены последовательности, равные x_p , мы получим требуемую подпоследовательность. Если x_p встречается в последовательности конечное число раз, то выберем последний член последовательности, равный x_p , и рассмотрим идущую после него часть последовательности. С ней поступим точно так же и т. д. В итоге получим неубывающую подпоследовательность.

Выберем из последовательности a_1, \dots, a_n, \dots неубывающую подпоследовательность. В последовательности b_1, \dots, b_n, \dots рассмотрим подпоследовательность членов с такими же номерами и из неё выберем неубывающую подпоследовательность. Наконец, в последовательности c_1, \dots, c_n, \dots рассмотрим последовательность членов с такими же

номерами и из неё выберем неубывающую подпоследовательность $c_{i_1} \leq c_{i_2} \leq \dots$. При этом $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots$ и $b_{i_1} \leq b_{i_2} \leq \dots$.

2. Для каждого из квадратов со стороной 1 рассмотрим множество точек, удалённых от него не более чем на $\frac{1}{2}$ (рис. 56). Площадь этой фигуры равна $1 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2$, т. е. равна $3 + \frac{\pi}{4}$, что меньше 3,79, поскольку $\pi < 3,16$.

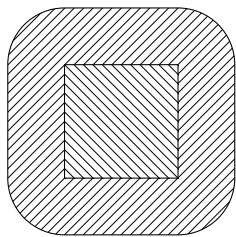


Рис. 56

Все 120 таких фигур занимают площадь, не большую, чем $120 \cdot 3,79 = 454,8 < 455$. При этом все точки прямоугольника, отстоящие от его контура более чем на $\frac{1}{2}$, образуют прямоугольник, площадь которого равна $19 \cdot 24 = 456$. Следовательно, в этом

меньшем прямоугольнике найдётся точка O , не лежащая ни внутри, ни на границе ни одной из рассматриваемых фигур. Круг радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке O не пересекается ни с каким квадратом. Кроме того, круг радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в O лежит целиком в прямоугольнике 20×25 .

4. Рассмотрим поворот на 60° с центром A , переводящий точку B в точку C . Пусть при этом повороте точка P переходит в точку P' (рис. 57). Тогда $CP \leq CP' + P'P = BP + AP = 3 + 2 = 5$.

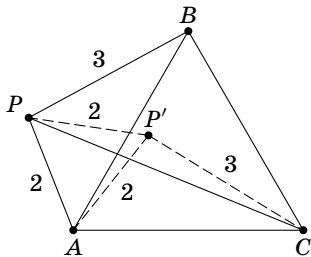


Рис. 57

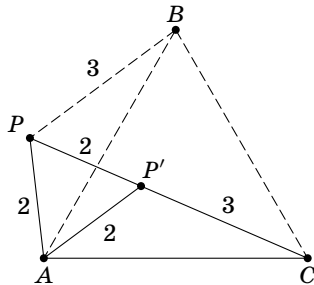


Рис. 58

Покажем теперь, что длина отрезка CP может быть равна 5. Построим сначала равносторонний треугольник $AP'P$ со стороной 2, а затем на продолжении его стороны PP' за точку P' отметим точку C так, что $P'P = 3$ (рис. 58). После этого построим равносторонний треугольник ABC . Длина отрезка BP равна 3, поскольку при повороте с центром A на угол 60° отрезок CP' переходит в отрезок BP .

5. Рассмотрим несколько первых шагов исследуемого процесса. Из исходного набора $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{2^k}$ после первого шага получается набор $a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, \dots, a_{2^k}a_1$. После второго шага получается набор $a_1a_3, a_2a_4, a_3a_5, \dots, a_{2^k}a_2$ (так как $a_i^2 = 1$). Таким образом, после двух шагов мы приходим к набору, числа которого получаются из чисел исходного набора умножением через одно. Ещё через два шага с этим набором произойдёт то же самое, т. е. мы получим набор $a_1a_5, a_2a_4, a_3a_7, \dots, a_{2^k}a_4$. Итак, в результате четырёх шагов мы приходим к набору, числа которого получаются из чисел исходного набора умножением через 3. Ещё через 4 шага с этим последним набором произойдёт то же самое, т. е. мы получим набор $a_1a_9, a_2a_{10}, a_3a_{11}, \dots, a_{2^k}a_8$.

Теперь по индукции легко доказать, что после 2^p шагов мы получим набор $a_1a_{2^p+1}, a_2a_{2^p+2}, \dots, a_{2^k}a_{2^p}$. В частности, после 2^{k-1} шагов мы получим набор $a_1a_{2^{k-1}+1}, a_2a_{2^{k-1}+2}, \dots, a_{2^k}a_{2^{k-1}}$, а ещё после 2^{k-1} шагов (т. е. всего после 2^k шагов) — набор $a_1^2, a_2^2, \dots, a_{2^k}^2$, состоящий из одних единиц.

1962 год (XXV олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Для каждой точки M можно построить две точки N , симметричных относительно прямой AB . Разность $AN - BN$ для обеих точек одна и та же, поэтому можно считать, что точки M и N лежат по одну сторону от прямой AB .

Тогда точка M является центром вписанной окружности треугольника ANB . Поэтому $AN - BN = AK - BK$, где K — точка касания вписанной окружности со стороной AB , т. е. точка пересечения прямых AB и l . Точка K не зависит от выбора точки M , поэтому разность $AN - BN$ тоже не зависит от выбора точки M .

2. Рассмотрим бесконечную треугольную сетку из правильных треугольников, содержащую данный. При применении описанной в условии задачи операции вершины треугольника всегда остаются в узлах сетки; при этом две вершины треугольника остаются на месте, а третья переходит в соседнюю к ним обеим и отличную от первоначальной.

Отметим вершину, противоположную отмеченной стороне. Рассмотрим все правильные треугольники сетки с вершиной в отмеченной точке, отразим их всеми возможными способами относительно их сторон, и отметим все точки, куда попадёт отмеченная точка. Для полученных отмеченных точек найдём новые отмеченные точки и т. д. Отмеченные точки тоже являются узлами сетки правильных треугольников, но с большей стороной (рис. 59). Ясно, что отмеченная вершина треугольника может оказаться только в отмеченном узле. Таким образом, когда тре-

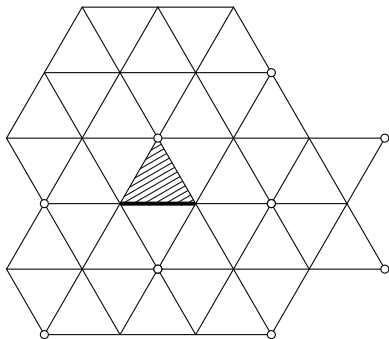


Рис. 59

угольник вернётся на место, его отмеченная вершина окажется в исходном положении, поэтому отмеченная сторона тоже займёт исходное положение.

3. Можно считать, что $a \leq b \leq c \leq d$. Тогда $a + b < c + d$, поскольку данный четырёхугольник — не ромб. Кроме того, $a + b > d - c$, поскольку существует четырёхугольник со сторонами a, b, c, d . Поэтому существует треугольник со сторонами $a + b, c$ и d . Построив этот треугольник, несложно построить требуемый самопересекающийся четырёхугольник, см. рис. 60.

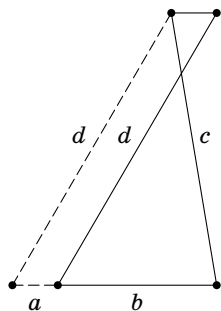


Рис. 60

4. Для любых натуральных k и n число $n \cdot 10^k - n$ делится на 9. Поэтому для любого натурального m число $m - S(m)$ делится на 9. Следовательно, число $(2a - S(2a)) - (a - S(a)) = 2a - a = a$ делится на 9.

5. Возьмём произвольную карточку. На ней написаны числа a_1 и a_2 . Положим её числом a_1 вверх. Если $a_2 \neq a_1$, то найдётся карточка с числами a_2 и a_3 . Положим её числом a_2 вверх. Ясно, что $a_3 \neq a_2$, поскольку иначе одно число встречалось бы по крайней мере три раза. Если $a_3 \neq a_1$, то найдётся карточка с числами a_3 и a_4 ; положим её числом a_3 вверх. Ясно, что a_4 отлично от a_2 и a_3 . Если $a_4 \neq a_1$, то найдётся карточка с числами a_4 и a_5 и т. д. Если после того как мы выложим карточку с числами a_k и a_1 , останутся карточки, то мы можем повторить для них ту же самую процедуру.

8 класс

1. Рассмотрим сначала случай, когда $AX < XB$. Обозначим точки пересечения прямых и длины отрезков так, как показано на рисунке 61. Треугольник $AA'X$ подобен тре-

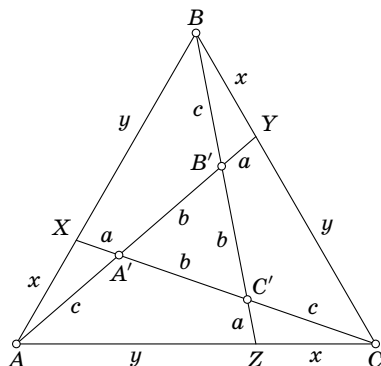


Рис. 61

угольнику CAH , а треугольник $AB'Z$ подобен треугольнику ACU , поэтому

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a+b+c} = \frac{c}{x+y}, \quad \frac{y}{a+b+c} = \frac{b+c}{x+y} = \frac{a+b}{y}.$$

Из этих равенств получаем: $\frac{x}{y} = \frac{c}{b+c}$, $\frac{x^2}{y^2} = \frac{a}{a+b}$. Следовательно, $\frac{c}{b} = \frac{1}{\lambda-1}$ и $\frac{a}{b} = \frac{1}{\lambda^2-1}$. Сложив равенства $\frac{x}{a+b+c} = \frac{c}{x+y}$ и $\frac{y}{a+b+c} = \frac{b+c}{x+y}$, получим также $\frac{x+y}{a+b+c} = \frac{b+2c}{x+y}$.

Чтобы площадь треугольника $A'B'C'$ была вчетверо меньше площади треугольника ABC , должно выполняться равенство $x+y=2b$. Поэтому $\frac{2b}{a+b+c} = \frac{b+2c}{2b}$, т. е. $4b^2 = ab + 2ac + b^2 + 3bc + 2c^2$. Разделив это равенство на b^2 и подставив найденные выше значения для $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$, получим уравнение $3 = \frac{1}{\lambda^2-1} + \frac{2}{(\lambda-1)(\lambda^2-1)} + \frac{3}{\lambda-1} + \frac{2}{(\lambda-1)^2}$, т. е. $3\lambda^3 - 6\lambda - 3 = 0$. Это уравнение можно переписать в следующем виде: $(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-1) = 0$. Отрицательный корень $\lambda = -1$ нам не подходит, а квадратное уравнение $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, из которых положителен только $\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Таким образом, точки X , Y и Z делят стороны треугольника ABC в отношении золотого сечения.

Случай, когда $AX > XB$, сводится к предыдущему случаю осевой симметрией треугольника ABC .

3. Выразим n через d и m . В результате получим

$$n = \frac{dm^2 + 2m - 1}{d + 1} = m^2 - \frac{(m - 1)^2}{d + 1}.$$

Положим $m = d + 2$. Тогда $n = d^2 + 3d + 3$.

Итак, пусть $m = d + 2$ и $n = d^2 + 3d + 3$, где d — данное целое число. Тогда если $d \neq -1$, то

$$\frac{n - 2m + 1}{m^2 - n} = \frac{d^2 + d}{d + 1} = d.$$

Чтобы получить $d = -1$, можно взять $m = 1$ и $n = 0$.

9 класс

1. Пусть O — точка пересечения отрезков AB и CD . Для определённости будем считать, что $AO < CO$. Отметим на отрезке CO точку X так, что $AO = CX$, а на луче AO точку Y так, что $AY = CO$ (рис. 62). Заметим, что $XO = YO$.

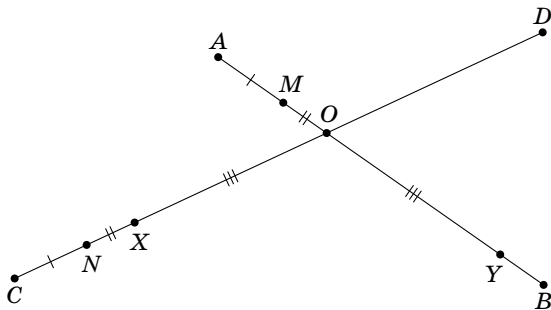


Рис. 62

Сначала докажем, что минимальное значение длины отрезка MN достигается, когда точка M лежит на отрезке OY , а точка N — на отрезке OX . Действительно, если точка M лежит на отрезке AO , то точка N лежит на отрезке CX и $MN > OX$, так как проекция OM на OX меньше, чем

XN . Аналогично, если точка B лежит вне отрезка OY , а точка M лежит на отрезке YB , то $MN > OY$.

Пусть $X'Y'$ — средняя линия треугольника XYO , параллельная стороне XY . Если точка N лежит на отрезке XX' , то точка M лежит на отрезке OY' . Пусть M' и N' — проекции точек M и N на прямую $X'Y'$ (рис. 63). Треугольники $NX'N'$ и $MY'M'$ равны, поэтому $MN > M'N' = X'Y'$. Аналогичное неравенство можно написать, если точка N лежит на отрезке $X'O$. Таким образом, если точка Y' лежит на отрезке AB , то $X'Y'$ — искомый отрезок.

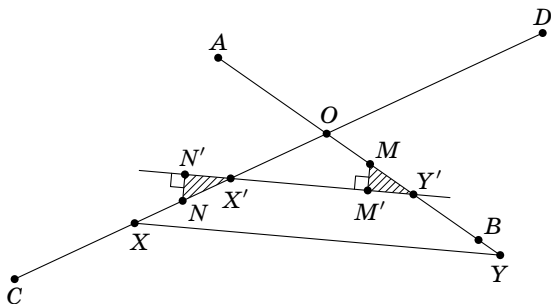


Рис. 63

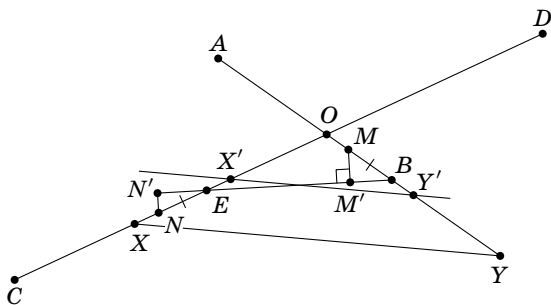


Рис. 64

Остаётся рассмотреть случай, когда точка B лежит на отрезке OY' . Пусть E — такая точка отрезка $X'X$, что $Y'B = X'E$ (рис. 64). Тогда для точки M , лежащей на отрезке OB , проекция отрезка MB на прямую BE будет ко-

роче проекции отрезка NE на эту прямую, так как угол OBE больше угла OEB (в случае, когда угол OBE тупой, обе проекции попадают внутрь проекции отрезка MN , и этот случай очевиден), поэтому $BE < MN$. Таким образом, BE — искомый отрезок.

2. Если n нечётно, то ход конём не меняет цвет клетки шахматной доски. В этом случае конь не сможет попасть ни на одно поле, цвет которого отличен от цвета поля, на котором он стоит.

Покажем, что при чётном n ($n = 2k$) конь может попасть на любое наперёд заданное поле. Заметим, что за два хода конь может переместиться на две клетки по вертикали или горизонтали. За один ход конь может переместиться на одну клетку по вертикали и на $2k$ по горизонтали, затем за $2k$ ходов сдвинуться на $2k$ клеток по горизонтали в обратном направлении. Значит, за $2k + 1$ ход конь может сместиться на одну клетку по вертикали. Аналогично он может сместиться и на одну по горизонтали. Поэтому конь может попасть на любое поле.

4. Уравнения

$$\begin{aligned}x_1 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1} \cdot \dots \cdot x_{1962} &= 1, \\x_1 \cdot \dots \cdot x_k - x_{k+1} \cdot \dots \cdot x_{1962} &= 1\end{aligned}$$

показывают, что произведение $x_1 \cdot \dots \cdot x_k$ удовлетворяет уравнению $x - \frac{1}{x} = 1$, т. е. $x^2 - x - 1 = 0$. Поэтому

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \varepsilon_k \sqrt{5}}{2},$$

где $\varepsilon_k = \pm 1$. С другой стороны, по той же причине

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_{k+1} = \frac{1 + \varepsilon_{k+1} \sqrt{5}}{2}.$$

Сопоставляя эти равенства, получаем, что $x_{k+1} = \frac{1 + \varepsilon_{k+1} \sqrt{5}}{1 + \varepsilon_k \sqrt{5}}$

при $k+1 \leq 1961$ и $x_{1962} = \frac{2}{1 + \varepsilon_{1961}\sqrt{5}}$. Поэтому $x_{25} = 1$ или $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Несложно проверить, что каждый набор чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{1961}$, равных ± 1 , даёт решение рассматриваемой системы уравнений. Если $\varepsilon_{24} = \varepsilon_{25}$, то $x_{25} = 1$, а если $\varepsilon_{24} = -\varepsilon_{25}$, то $x_{25} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

5. Разобьём меньшую сторону прямоугольника на n равных отрезков длины α . Большую сторону разобьём на m отрезков длины α и, возможно, какой-то остаток, который меньше α . Затем весь прямоугольник разобьём на mn квадратов со стороной α и, возможно, ещё один вытянутый прямоугольник (рис. 65). Одна сторона этого прямоугольника равна меньшей стороне исходного прямоугольника, поэтому она не превосходит 1, а другая сторона меньше α .

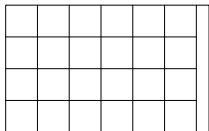


Рис. 65

Прямоугольник, площадь которого равна 1, разбит на mn квадратов площади α^2 и прямоугольник, площадь которого меньше $1 \cdot \alpha$, поэтому $mn \cdot \alpha^2 + \alpha > 1$ т. е.

$$mn > \frac{1 - \alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}.$$

Впишем в каждый из квадратов со стороной α окружность радиуса $\alpha/2$. Сумма радиусов всех этих окружностей равна

$$mn \cdot \frac{\alpha}{2} > \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right) \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}.$$

Выбрав n достаточно большим, т. е. α достаточно малым, можно добиться, чтобы эта сумма была больше 1962. Уменьшив затем радиус всех окружностей, можно добиться, чтобы сумма радиусов была равна 1962.

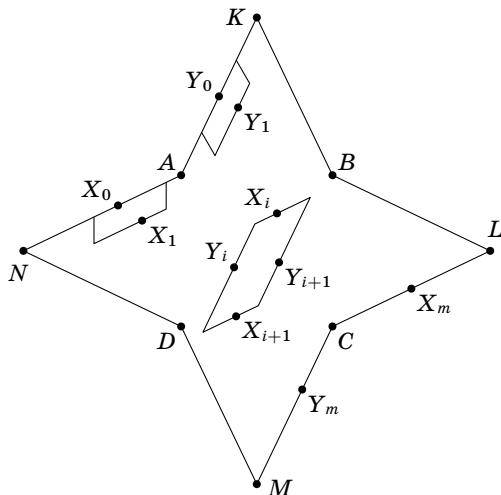


Рис. 67

Рассмотрим параллелограмм, сторона которого лежит на отрезке NA . Отметим на этой стороне внутреннюю точку X_0 , а на противоположной стороне внутреннюю точку X_1 . Затем рассмотрим другой параллелограмм, содержащий точку X_1 . Отметим на его стороне, противоположной той, которая содержит X_1 , внутреннюю точку X_2 . Повторяя этот процесс, получим точку X_n на границе фигуры. Она может лежать только на стороне CL , так как у каждого из рассмотренных параллелограммов одна сторона параллельна NA . Аналогичным образом построим последовательность точек Y_j для стороны AK .

Ясно, что ломаные $X_0X_1 \dots X_n$ и $Y_0Y_1 \dots Y_m$ пересекаются. Пусть отрезок X_iX_{i+1} пересекается с отрезком Y_jY_{j+1} , причём отрезки с меньшими номерами не пересекаются. Эти отрезки соединяют противоположные стороны параллелограмма, стороны которого параллельны прямой NA и KA (рис. 67). Точки X_i, X_{i+1}, Y_j и Y_{j+1} должны быть расположены именно так, как показано на этом рисунке, потому что точка X_i расположена ближе к прямой AN , чем точка X_{i+1} , а точка Y_j расположена ближе к прямой AK ,

чем точка Y_{j+1} . Но тогда ломаные $X_0X_1\dots X_i$ и $Y_0Y_1\dots Y_j$ должны пересекаться. Получено противоречие.

3. Докажем требуемое утверждение по индукции. База индукции очевидна. Последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает, поэтому для любого натурального числа m можно выбрать n так, что $a_n \leq m < a_{n+1}$. По предположению индукции число $m - a_n$ (если оно отлично от нуля) можно представить в виде суммы нескольких разных членов последовательности $\{a_n\}$. При этом $m - a_n < a_{n+1} - a_n = a_{n-1}$. Значит, в этом разложении не присутствует даже a_{n-1} , и, тем более, не присутствует a_n .

Комментарий. Приведённое доказательство показывает, что утверждение задачи можно усилить, потребовав, чтобы в представлении не было двух подряд идущих членов последовательности. Представление с таким дополнительным условием будет уже единственно (запись числа в фибоначчиевой системе счисления).

Второй тур

7 класс

1. Пусть шар стоит у стороны AB правильного $2n$ -угольника $ABCD\dots$. Пустим его параллельно диагонали AC (см. рис. 68). Отразившись от стороны BC , он будет двигаться параллельно диагонали BD , отразившись от стороны CD — параллельно диагонали CE и т. д.

Пусть шар находится на расстояниях x и y от точек A и B , а длина диагонали AC равна d . Тогда на стороне BC он попадёт в точку, удалённую на y и x от вершин B и C (x и y меняются местами), пройдя при этом расстояние $\frac{y}{x+y}d$. При прохождении всего многоугольника x и y поменяются местами чётное число раз, а значит, шар вернёт-

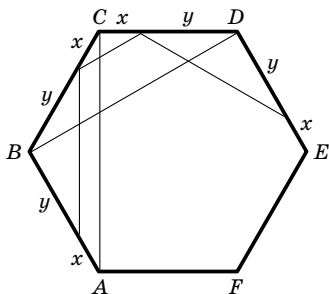


Рис. 68

ся в исходную точку. При этом он пройдёт расстояние $\frac{n(x+y)}{x+y}d = nd$, что не зависит от начальной точки.

2. Четырёхугольник $BCKM$ вписанный, причём $\angle MBK = \angle CBK$. Поэтому $\angle CMK = \angle MCK$ и $MK = KC$. Следовательно, $AK = KC = MK$.

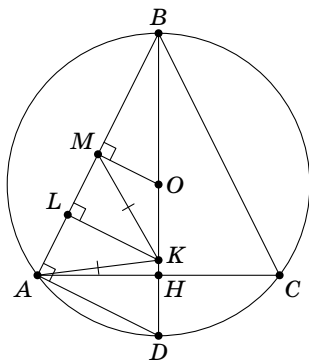


Рис. 69

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , BD — диаметр этой окружности (рис. 69). Проведём в равнобедренном треугольнике AKM высоту KL . Прямые MO , LK и AD параллельны, причём точка L — середина отрезка AM , поэтому K — середина отрезка OD . Следовательно, $BK = BO + \frac{OD}{2} = \frac{3}{2}R$.

3. Площадь уголка равна 3, поэтому площадь прямоугольника, который можно разбить на уголки должна делиться на 3. Но число 1961×1963 не делится на 3, потому что ни одно из чисел 1961 и 1963 не делится на 3. Поэтому прямоугольник размерами 1961×1963 нельзя разбить на уголки.

Докажем, что второй прямоугольник разбить на уголки можно. Для этого прямыми, параллельными сторонам прямоугольника, разобьём его на три прямоугольни-

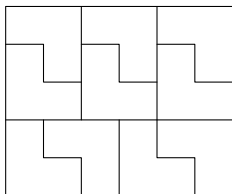


Рис. 70

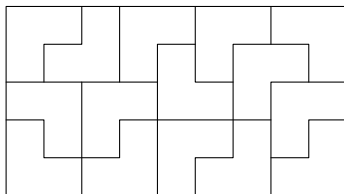


Рис. 71

ка размерами 1965×1958 , 1956×5 и 5×9 и покажем, что каждый из этих прямоугольников можно разбить на уголки.

У первого прямоугольника длина одной стороны чётна, а длина другой делится на 3, поэтому его можно разбить на прямоугольники размерами 2×3 , каждый из которых в свою очередь разбивается на два уголка. У второго прямоугольника одна сторона равна 5, длина другой делится на 6; разобьём его на прямоугольники размерами 5×6 , каждый из которых разбивается на уголки, как показано на рисунке 70. Наконец, разобьём на уголки прямоугольник 5×9 , как показано на рисунке 71.

4. Рассматриваемое число равно $10^{1962} + 1$. Его можно представить в виде $(10^{654})^3 + 1$, поэтому оно делится на $10^{654} + 1$.

Представив это же число в виде $(10^2)^{981} + 1$, можно указать ещё один делитель: $10^2 + 1$ (для любого нечётного n число $a^n + 1$ делится на $a + 1$).

5. Пусть A и B — данные точки, расстояние между которыми наибольшее. Если $AB \leq 1$, то все данные точки лежат в круге радиуса 1 с центром в любой из данных точек. Рассмотрим теперь случай, когда $AB > 1$. Пусть C — одна из данных точек, отличная от A и B . По условию один из отрезков AB , BC и AC меньше 1. Но $AB > 1$, поэтому $AC < 1$ или $BC < 1$. Таким образом, все данные точки лежат в двух кругах радиуса 1 с центрами A и B . Следова-

тельно, в одном из них лежит по крайней мере 13 данных точек.

8 класс

1. Пусть n — число вершин многоугольника. Докажем индукцией по n , что найдутся по крайней мере две несмежные вершины, из которых не проведено ни одной диагонали. При $n=4$ это очевидно. Докажем шаг индукции. Пусть в многоугольнике проведена диагональ через вершины M и N . Эта диагональ разрезает его на два многоугольника с меньшим числом вершин, в каждом из которых по предположению индукции найдутся две несмежные вершины, из которых не проведены диагонали. Ясно, что для каждого многоугольника одна из этих вершин отлична от M и N .

2. Выделим в рассматриваемой сумме положительные и отрицательные слагаемые и запишем её в виде $S_1 - S_2$. Каждое из слагаемых S_1 и S_2 содержит 1962 слагаемых, и каждое из чисел 1, 2, ..., 1962 входит в S_1 или в S_2 ровно два раза. Следовательно, $S_2 \geq 2(1 + 2 + \dots + 981)$ и $S_1 \leq 2(982 + 983 + \dots + 1962)$, поэтому число $S_1 - S_2$ будет наибольшим, когда слагаемые 1, 2, ..., 981 входят в S_2 , а слагаемые 982, 983, ..., 1962 входят в S_1 (если такое возможно).

Для последовательности 981, 982, 980, 983, 979, 984, ..., $981 - i$, $981 + i + 1$, ..., 1, 1962 получаем сумму

$$(982 - 981) + (982 - 980) + (983 - 980) + (983 - 979) + \\ + \dots + (1962 - 1) + (1962 - 981).$$

Эта сумма обладает требуемым свойством.

3. Предположим, что n — простое число. Отметим одну вершину n -угольника и рассмотрим повороты относительно центра окружности на углы α , 2α , 3α , ... При

этих поворотах отмеченная вершина попадает в вершины n -угольника, поэтому различных поворотов не более n . Пусть количество различных поворотов равно k . Тогда любая вершина n -угольника при рассматриваемых поворотах пробегает k вершин. Поэтому n делится на k , следовательно, $k = n$, так как число n простое. Таким образом, при рассматриваемых поворотах отмеченная вершина попадает во все вершины n -угольника. В частности, при некотором повороте она попадает в соседнюю вершину, но в таком случае n -угольник должен быть правильным. Полученное противоречие показывает, что число n составное.

4. Упорядочим искомые числа и их суммы по возрастанию: $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ и $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{10}$. Ясно, что $a_1 + \dots + a_{10} = 4(x_1 + \dots + x_5)$, так как каждое число входит ровно в четыре суммы. Поэтому по числам a_i можно восстановить сумму $x_1 + \dots + x_5$. Далее, ясно, что $a_1 = x_1 + x_2$, $a_2 = x_1 + x_3$, $a_9 = x_3 + x_5$, $a_{10} = x_4 + x_5$. Следовательно, можно восстановить число $x_3 = (x_1 + \dots + x_5) - (x_1 + x_2) - (x_4 + x_5) = (x_1 + \dots + x_5) - a_1 - a_{10}$, а по нему вычислить $x_1 = a_2 - x_3$, $x_2 = a_1 - x_1$, $x_5 = a_9 - x_3$ и $x_4 = a_{10} - x_5$.

5. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2 . Построим сначала центр R окружности, описанной около треугольника ABM . Точка R — это точка пересечения перпендикуляров, проведённых из точек A и B к прямым AM и BM (рис. 72). Требуется доказать, что $RM = RN$, т. е. $RP \perp MP$. Ясно, что $O_2M \perp AM$, так как O_2M — радиус, проведённый в точку касания, поэтому $O_2M \parallel O_1R$. Аналогично $O_1M \parallel O_2R$. Следовательно, O_2MO_1R — параллелограмм, поэтому $O_2R = O_1M$ и $O_1R = O_2M$. Это означает, что точка R лежит на пересечении окружностей с центрами O_1 и O_2 , имеющих такие же радиусы, как данные окружности (на рисунке 72 эти окружности изображены пунктиром). Точки пересечения всех четырёх окружно-

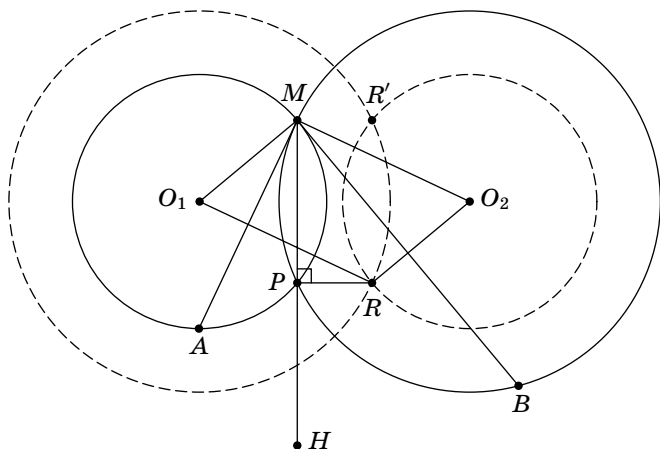


Рис. 72

стей являются вершинами прямоугольника $MPRR'$, поэтому $RP \perp MP$. (Нужная нам точка пересечения окружностей это именно точка R , а не точка R' , потому что четырёхугольник O_2MO_1R' — не параллелограмм.)

9 класс

1. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_7, a_8$ — число задач, решённых школьником за некоторые идущие подряд 8 дней. По условию $a_1 + a_2 + \dots + a_7 = 25$ и $a_2 + a_3 + \dots + a_8 = 25$, поэтому $a_1 = a_8$. Итак, число задач, решаемых школьником за день, должно повторяться через каждые 7 дней. Школьнику, таким образом, нужно выбрать не план на весь год, а лишь план на неделю.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7$ — произвольный план на неделю, т. е. каждый понедельник школьник решает α_1 задач, каждый вторник — α_2 задач и т. д. Если бы школьник решал все 25 задач в понедельник, то он истратил бы на все задачи в течение учебного года некоторое время S_1 . Точно так же определим числа S_2, S_3, \dots, S_7 . Решая по понедельникам не 25, а α_1 задач, школьник за все понедельники

всего года потратит время, равное $\frac{\alpha_1}{25} S_1$. Аналогично за все вторники он потратит время $\frac{\alpha_2}{25} S_2$ и т. д. Общее затраченное школьником время равно

$$S = \frac{1}{25} (\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_7 S_7).$$

При этом по условию $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_7 = 25$.

Пусть S_k — наименьшее из чисел S_1, S_2, \dots, S_7 . Положив соответствующий коэффициент α_k равным 25, а остальные — нулю, мы добьёмся того, что S станет наименьшим. Действительно, числа $\alpha_1, \dots, \alpha_7$ неотрицательные, поэтому

$$\frac{1}{25} (\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_7 S_7) \geq \frac{1}{25} (\alpha_1 S_k + \alpha_2 S_k + \dots + \alpha_7 S_k) = S_k.$$

2. Обозначим эти числа b_1, b_2, \dots, b_{25} в порядке возрастания. Расположим их так: $b_1, b_{25}, b_2, b_{24}, \dots, b_{11}, b_{15}, b_{12}, b_{14}, b_{13}$. Тогда сумма будет равна $b_{13} + 2b_{14} + \dots + 2b_{25} - (2b_1 + 2b_2 + \dots + 2b_{12} + b_{13})$. Покажем, что эта сумма наибольшая. Действительно при раскрытии знаков модуля возникает 25 чисел со знаком плюс и 25 чисел со знаком минус, при этом каждое число встречается два раза. Сумма будет наибольшей, если плюсы стоят перед 25 наибольшими числами, а минусы перед 25 наименьшими. Именно такая расстановка приведена выше.

3. Полученный многоугольник содержит фигуру, которая состоит из точек, удалённых от исходного многоугольника не более чем на $d = 1$. Для выпуклого многоугольника площади S и периметра P такая фигура имеет площадь $S + dP + \pi d^2$ (рис. 73). В нашем случае эта фигура имеет площадь $S + 12 + \pi > S + 15$.

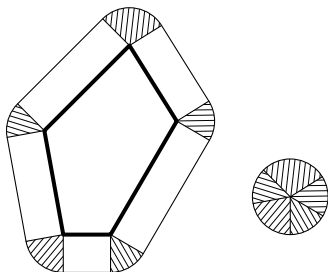


Рис. 73

5. Набор последовательностей, удовлетворяющий условиям задачи, будем называть *правильным*. Пусть дан правильный набор, состоящий из k последовательностей, длины которых равны m_1, \dots, m_k . Сначала докажем, что

$$2^{-m_1} + \dots + 2^{-m_k} \leq 1.$$

Для этого рассмотрим следующие отрезки, расположенные на отрезке $I = [0, 1]$. Разделим отрезок I на два равных отрезка и обозначим их I_0 и I_1 . Затем отрезок I_0 разделим на два равных отрезка и обозначим их I_{00} и I_{01} , а отрезок I_1 разделим на отрезки I_{10} и I_{11} , и т. д. Каждой последовательности из нулей и единиц можно сопоставить отрезок с соответствующим номером; длина отрезка, сопоставленного последовательности длины m равна 2^{-m} .

Покажем, что правильному набору последовательностей соответствует набор отрезков, не имеющих общих внутренних точек. По построению для любых последовательностей α и β отрезок I_α содержится в отрезке $I_{\alpha\beta}$. Двум последовательностям, ни одна из которых не является началом другой, сопоставляются отрезки $I_{\alpha 0 \beta}$ и $I_{\alpha 1 \gamma}$. Они принадлежат отрезкам $I_{\alpha 0}$ и $I_{\alpha 1}$, которые являются разными половинами отрезка I_α .

Таким образом, рассматриваемому правильному набору последовательностей сопоставляются отрезки, длины которых равны $2^{-m_1}, \dots, 2^{-m_k}$, причём эти отрезки не имеют общих точек. Поэтому $2^{-m_1} + \dots + 2^{-m_k} \leq 1$, что и требовалось.

Вернёмся теперь к исходной задаче, и покажем, что при $k = 2^n$ из неравенства $2^{-m_1} + \dots + 2^{-m_k} \leq 1$ следует неравенство $m_1 + \dots + m_k \geq n \cdot 2^n$. Действительно, согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\sqrt[k]{2^{-m_1} \cdot \dots \cdot 2^{-m_k}} \leq \frac{1}{k} (2^{-m_1} + \dots + 2^{-m_k}) \leq \frac{1}{k},$$

поэтому $2^{m_1 + \dots + m_k} \geq k^k = 2^{n \cdot 2^n}$.

Комментарий. В теории кодирования то, что мы называли правильными последовательностями, обычно называют *префиксными кодами*, а неравенство $2^{-m_1} + \dots + 2^{-m_k} \leq 1$ для префиксных кодов называют *неравенством Крафта—Макмиллана*, см. [10].

10 класс

1. Пусть для определённости точка A' ближе к прямой l , чем точка A . Рассмотрим точку A_1 , симметричную точке A относительно прямой l . Ясно, что $\angle CA'A = \angle A_1A'A = \frac{1}{2}\angle A_1OA$. Угол $\angle A_1OA$ равен удвоенному внешнему углу при вершине O четырёхугольника $AA'CO$. Поэтому четырёхугольник $AA'CO$ вписанный, а значит, $BA' \cdot BA = BC \cdot BO$.

Пусть P — точка данной окружности, проекция которой на прямую l совпадает с точкой C . Касательная в точке P пересекает прямую l в некоторой точке B_1 . Ясно, что $B_1P^2 = B_1C \cdot B_1O$. Если точка X , лежащая вне окружности, движется по прямой l от точки O , то величина $XC \cdot XO$ монотонно возрастает. Поэтому точка B совпадает с фиксированной точкой B_1 .

4. Проекция прямоугольного параллелепипеда на плоскость представляет собой шестиугольник (он может вырождаться в четырёхугольник). Проекция каждой грани параллелепипеда — параллелограмм, поэтому площадь треугольника ABC (см. рис. 74) равна половине площади всей проекции. Треугольник ABC является проекцией треугольника $A'B'C'$, вершины которого — три вершины параллелепипеда, соседние с одной и той же вершиной. Расположение треугольника $A'B'C'$ задаёт расположение в пространстве всего параллелепипеда.

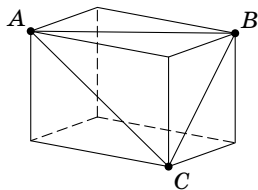


Рис. 74

Согласно известной формуле (см. «Основные факты») $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'B'C'} \cdot \cos \alpha$, где α — угол между плоскостями треугольников ABC и $A'B'C'$. Площадь треугольника ABC бу-

дет наибольшей, когда $\cos \alpha = 1$, т. е. $\alpha = 0$, иначе говоря, когда точки A' , B' и C' лежат в горизонтальной плоскости (или в параллельной ей плоскости).

5. Применим индукцию по числу участников турнира. При числе участников, равном 2, утверждение очевидно. Пусть k участников можно расположить так, как требуется в условии задачи: a_1, a_2, \dots, a_k . Возьмём $(k+1)$ -го участника и посмотрим, как он сыграл с a_1 . Если он выиграл или сыграл вничью, то поставим его перед a_1 . Если же он проиграл, то сравним с игроком a_2 , и так до тех пор, пока не обнаружим такого участника из числа a_1, a_2, \dots, a_k у которого он выиграл или сыграл вничью (а предыдущему проиграл). Найдя такого участника, мы поставим $(k+1)$ -го участника перед ним. Если же $(k+1)$ -й участник проиграл всем шахматистам a_1, a_2, \dots, a_k , то поставим его после a_k .

1963 год (XXVI олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Треугольники ABC' и $A'BC$ равны, поскольку $AB = A'B$, $BC' = BC$ и $\angle ABC' - \angle A'BC = \angle CBC' - \angle A'BA = 2\angle CBN - 2\angle ABM = 0$. Поэтому $AC' = A'C$.

2. Ясно, что $0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$. Поэтому $2(ab + ac + bc) = -a^2 - b^2 - c^2 \leq 0$.

3. Разобьём прямоугольник размером 4×100 на 50 прямоугольников размером 4×2 , и каждый из этих прямоугольников заполним карточками так, чтобы в первом столбце стояли числа $+1$, а во втором — числа -1 (рис. 75). В каждой строке стоит 50 чисел -1 , поэтому их произведение положительно. В каждом столбце стоит либо 4 числа $+1$, либо 4 числа -1 ; их произведение положительно.

+	-	+	-		+	-
+	-	+	-		+	-
+	-	+	-	+	-
+	-	+	-		+	-

Рис. 75

5. См. решение задачи 3 для 10 класса.

8 класс

1. Ясно, что $0 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + \dots + a_n^2 + 2S$. Поэтому $2S = -(a_1^2 + \dots + a_n^2) \leq 0$.

2. Пусть P_1, Q_1, R_1, S_1 — середины сторон AB, BC, CD, DA . Площадь четырёхугольника $PQRS$ в 4 раза больше площади четырёхугольника $P_1Q_1R_1S_1$. Чтобы найти площадь четырёхугольника $P_1Q_1R_1S_1$, заметим, что

$$S_{P_1BQ_1} + S_{R_1DS_1} = \frac{1}{4}S_{ABC} + \frac{1}{4}S_{ADC} = \frac{1}{4}s$$

и аналогично

$$S_{Q_1CR_1} + S_{P_1AS_1} = \frac{1}{4}s.$$

Поэтому

$$S_{P_1Q_1R_1S_1} = s - S_{P_1BQ_1} - S_{R_1DS_1} - S_{Q_1CR_1} - S_{P_1AS_1} = \frac{1}{2}s.$$

Следовательно, площадь четырёхугольника $PQRS$ равна $4 \cdot \frac{1}{2}s = 2s$.

3. Найдём сначала положительные решения. Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{1}{3} \left(\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} \right) \geq \sqrt[3]{\frac{xy}{z} \cdot \frac{xz}{y} \cdot \frac{yz}{x}} = \sqrt[3]{xyz},$$

поэтому $\sqrt[3]{xyz} \leq 1$. Числа x, y и z целые положительные, поэтому $x = y = z = 1$.

Предположим теперь, что среди чисел x , y и z есть отрицательные. Тогда их ровно два, потому что иначе все слагаемые в сумме $\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x}$ отрицательные. Поменяв знаки у этих двух отрицательных чисел, мы получим набор из трёх единиц.

4. Возьмём на плоскости произвольную точку A и проведём через неё 7 прямых, параллельных данным прямым. Углы между построенными прямыми равны соответствующим углам между прямыми исходной системы. Через точку A проходит 7 прямых, которые делят угол в 360° на 14 углов. Наименьший из этих углов не превосходит $\frac{360^\circ}{14} = 25\frac{5}{7}^\circ$, поэтому он меньше 26° .

5. Будем считать, что таблица имеет столбцы длины 5 и строки длины n . Так как произведение чисел в каждом столбце положительно, то число -1 встречается в каждом столбце чётное число раз, поэтому и во всей таблице число -1 встречается чётное число раз. Но число -1 встречается в таблице столько раз, сколько имеется карточек. Таким образом, общее число карточек чётно; обозначим его $2m$. Тогда общее число клеток в таблице (которое вдвое больше) равно $4m$, т. е. делится на 4.

+	1	-	1	-	1	+	1	-	1	+	1
+	1	-	1	-	1	+	1	-	1	+	1
-	1	+	1	-	1	+	1	-	1	+	1
+	1	+	1	-	1	-	1	+	1	-	1
-	1	+	1	+	1	-	1	+	1	-	1

Рис. 76

Итак, $5n$ делится на 4, поэтому n делится на 4. Покажем теперь, что для любого $n = 4k$ возможно требуемое размещение карточек.

Для этого достаточно разместить карточки на листе размером 5×4 и повторить это расположение k раз. Требуемый пример приведён на рис. 76.

9 класс

1. Предположим, что первый член и разность арифметической прогрессии по абсолютной величине меньше 10^k . Будем следить за $(k+1)$ -й цифрой последовательных чле-

нов арифметической прогрессии. У первого члена она равна 0. Какой-то член последовательности по абсолютной величине должен превысить $10^{k+1} - 1$, но он не может сразу превысить $2 \cdot 10^{k+1} - 1$, потому что разность арифметической прогрессии по абсолютной величине меньше 10^k . Поэтому встретится член, у которого $(k+1)$ -я цифра равна 1. Затем встретится член, у которого $(k+1)$ -я цифра равна 2 и т. д. до цифры 9.

3. Пусть $a+b=x$, $b+c=y$, $a+c=z$, т. е. $a = \frac{x+z-y}{2}$, $b = \frac{x+y-z}{2}$, $c = \frac{y+z-x}{2}$. Тогда требуемое неравенство запишется в виде

$$\frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} + \frac{y+z-x}{2x} \geq \frac{3}{2}.$$

Это равенство следует из того, что $x/y + y/x \geq 2$ и т. д.

4. Возможны два случая.

1) Данные точки являются вершинами выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Один из его углов не превосходит 90° . Пусть для определённости $\angle A \leq 90^\circ$. Тогда один из углов $\angle BAC$ и $\angle CAD$ не превосходит $90^\circ/2 = 45^\circ$.

2) Точка D лежит внутри треугольника ABC . Один из углов треугольника ABC не превосходит 60° . Пусть для определённости $\angle A \leq 60^\circ$. Тогда один из углов $\angle BAD$ и $\angle CAD$ не превосходит $60^\circ/2 = 30^\circ$.

5. Докажем, что если прямоугольник с отношением сторон $\lambda < 1$ вписан в прямоугольник с отношением сторон $\mu < 1$, то $\mu \geq \lambda$. Пусть вершины A_1, B_1, C_1, D_1 одного прямоугольника лежат на сторонах AB, BC, CD, DA другого прямоугольника. Тогда середина отрезка A_1C_1 лежит на отрезке, соединяющем середины сторон BC и AD , а середина отрезка B_1D_1 лежит на отрезке, соединяющем середины сторон AB и CD . Поэтому центры прямоугольников совпадают.

Пусть $AD_1 = x$, $AA_1 = y$. Из подобия треугольников A_1AD_1 и B_1BA_1 следует, что $A_1B = \lambda x$ и $BB_1 = \lambda y$ для некоторого λ . Ясно, что $\lambda = A_1B_1 : A_1D_1$. Далее,

$$\frac{AD}{AB} - \lambda = \frac{x + \lambda y}{y + \lambda x} - \lambda = \frac{(1 - \lambda^2)x}{y + \lambda x} > 0$$

при $\lambda < 1$. Аналогично

$$\frac{AB}{AD} - \lambda = \frac{y + \lambda x}{x + \lambda y} - \lambda = \frac{(1 - \lambda^2)y}{x + \lambda y} > 0.$$

Прямоугольник с отношением сторон $\lambda = \frac{4}{7}$ нельзя вписать в прямоугольник с отношением сторон $\mu = \frac{9}{16}$, потому что $\frac{9}{16} < \frac{4}{7}$.

10 класс

2. Рассмотрим наименьший выпуклый многоугольник, содержащий данные точки. Пусть A — одна из его вершин. Соединим точку A со всеми остальными точками; при этом получится 5 лучей: AB , AC , AD , AE , AF .

Если угол BAF меньше или равен 120° , то лучи AC , AD , AE разбивают его на четыре части, среди которых найдётся одна, меньшая или равная 30° .

Если же угол BAF больше 120° , то в треугольнике ABF сумма углов ABF и AFB меньше 60° , поэтому один из них должен быть меньше 30° .

3. Будем двигаться по рассматриваемой прямой l по направлению к листу бумаги. Сначала мы попадём в какую-то первую клетку. Чтобы попасть в следующую клетку, мы должны пересечь горизонтальную или вертикальную линию клетчатой бумаги. Всего есть $m - 1$ горизонтальных линий (края листа бумаги мы не считаем) и $n - 1$ вертикальных (или наоборот), поэтому прямая l не может пересечь более $(m - 1) + (n - 1) = m + n - 2$ линий (каждую вертикальную и каждую горизонтальную линию она пе-

ресекает не более одного раза). Следовательно, прямая переходит из одной клетки в другую не более $m + n - 2$ раз. Добавляя первую клетку, получаем что прямая l может пересечь не более $m + n - 1$ клеток.

Покажем, что прямая может пересечь $m + n - 1$ клеток. Выберем в двух противоположных угловых клетках по точке и проведём через них прямую. Если эта прямая не проходит через вершины клеток, то она искомая. Поэтому мы фиксируем первую выбранную точку, а вторую выберем так, чтобы прямая не проходила через вершины клеток.

4. Случай, когда все три числа положительны, очевиден. Предположим, что хотя бы одно число отрицательное. Тогда, поскольку $abc > 0$, их ровно два. Пусть для определённости $a > 0$ и $b, c < 0$. Тогда $-b, -c > 0$, поэтому при любом натуральном $n > 1$ имеет место неравенство $(-b - c)^n > (-b)^n + (-c)^n$. Поскольку $a + b + c > 0$, получаем, что $a^n > (-b - c)^n > (-b)^n + (-c)^n$. Следовательно, $a^n + b^n + c^n > 0$.

5. Предположим, что указанные перпендикуляры пересекаются в точке M' . Тогда точки A, B и C лежат на окружности с диаметром MM' . Следовательно, точка M лежит на описанной окружности треугольника ABC .

Предположим теперь, что точка M лежит на описанной окружности треугольника ABC и отлична от его вершин. Тогда указанные перпендикуляры пересекаются в точке M' , диаметрально противоположной точке M .

11 класс

1. Пусть $\varphi_1 = \operatorname{arctg} x$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} y$, $\varphi_3 = \operatorname{arctg} z$. По условию $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 < \pi$. Ясно также, что $0 < \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 < \frac{\pi}{2}$, поскольку $0 < x, y, z$. Следовательно, $\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \cos \varphi_3 > 0$.

Требуется доказать, что $x + y + z - xyz > 0$, т. е.

$$\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2 + \operatorname{tg} \varphi_3 - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_3 > 0.$$

Поскольку $\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \cos \varphi_3 > 0$, обе части этого неравенства можно домножить на произведение косинусов. Таким образом, надо доказать, что

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 + \\ + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 > 0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулами

$$\sin \varphi \sin \psi = \frac{1}{2}(\cos(\varphi - \psi) - \cos(\varphi + \psi)),$$

$$\sin \varphi \cos \psi = \frac{1}{2}(\sin(\varphi - \psi) + \sin(\varphi + \psi)),$$

получим, что

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 = -\frac{1}{4}(\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + \\ + \sin(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) + \sin(-\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) + \sin(-\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3)). \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 = \frac{1}{4}(\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + \\ + \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)), \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 + \\ + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 = \frac{1}{4}(3 \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + \\ + \sin(-\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 - \\ - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3). \end{aligned}$$

Остаётся заметить, что $\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) > 0$, поскольку $0 < \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 < \pi$.

2. Пусть B_1, \dots, B_{25} — концы данных отрезков. Предположим, что существует замкнутая 25-звенная ломаная,

векторы звеньев которой равны $\pm \overrightarrow{AB_i}$. Для замкнутой ломаной сумма векторов звеньев должна быть равна нулю. Покажем, что этого не может быть. Рассмотрим проекции векторов звеньев на прямую, перпендикулярную прямой l . С одной стороны, сумма этих проекций равна нулю. С другой стороны, эти проекции — параллельные векторы равной длины. Сумма 25 таких векторов не может быть равна нулю, потому что сумма 25 чисел ± 1 нечётна, а потому не может быть равна нулю.

4. При делении на 9 любое натуральное число даёт такой же остаток, как и его сумма цифр. Сумма $1 + 2 + \dots + 7 = 28$ при делении на 9 даёт остаток 1, поэтому каждое рассматриваемое число при делении на 9 даёт остаток 1. Количество всех различных семизначных чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно $7!$. Пусть их сумма равна S . При делении на 9 число S даёт такой же остаток, как и $7!$. Но $7!$ делится на 9, поэтому S тоже делится на 9.

5. Сначала выясним, на сколько частей разбивают тетраэдр плоскости, проведённые через середины рёбер. Всего таких плоскостей четыре и они разбивают тетраэдр на пять частей: четыре тетраэдра, гомотетичных исходному (центры гомотетии находятся в вершинах тетраэдра, а коэффициент гомотетии равен $\frac{1}{2}$), и октаэдр, расположенный между ними.

Теперь вернёмся к исходной задаче. Рассмотрим четыре тетраэдра, гомотетичных исходному тетраэдру с коэффициентом $\frac{2}{3}$, причём центры гомотетии находятся в вершинах. Каждые два из этих тетраэдров пересекаются по тетраэдру, сторона которого втрое меньше стороны исходного тетраэдра, и никакие три не имеют общих внутренних точек. Как мы уже выяснили, каждый из них делится плоскостями на 5 частей, поэтому всего будет $5 \cdot 4 - 4 = 16$ частей; среди них 4 октаэдра и 12 тетраэдров.

Второй тур

7 класс

1. Для каждой игрушки для каждого двух красных шариков выпишем число синих шариков между ними. В результате получим три числа. Заметим, что две игрушки одинаковы тогда и только тогда, когда для них совпадают выписанные наборы (с точностью до перестановки). Таким образом, искомое число равно числу способов представить число семь в виде суммы трёх слагаемых. Выпишем все такие представления:

$$\begin{aligned} 7 &= 7 + 0 + 0; & 7 &= 6 + 1 + 0; & 7 &= 5 + 2 + 0; & 7 &= 5 + 1 + 1; \\ 7 &= 4 + 3 + 0; & 7 &= 4 + 2 + 1; & 7 &= 3 + 3 + 1; & 7 &= 3 + 2 + 2. \end{aligned}$$

3. Пусть l — данная прямая. Мы предполагаем, что точка A лежит по одну сторону от прямой l , а точки B и C — по другую. Рассмотрим проекцию на прямую, перпендикулярную прямой l . Прямая l при этой проекции переходит в точку O , для которой $\overrightarrow{OA'_1} + \overrightarrow{OB'_1} + \overrightarrow{OC'_1} = \vec{0}$, где A' , B' и C' — проекции вершин треугольника. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC , а M' — её проекция, то $\overrightarrow{M'A'} + \overrightarrow{M'B'} + \overrightarrow{M'C'} = \vec{0}$, поэтому точка M' совпадает с точкой O . Это означает, что прямая l проходит через точку M .

4. Если $x + y \equiv 0 \pmod{26}$ и $y + z \equiv 0 \pmod{26}$, то $x \equiv z \pmod{26}$. Поэтому если выбрано больше двух чисел, то все они дают одинаковые остатки x при делении на 26. Следовательно, $2x \equiv 0 \pmod{26}$, т. е. либо $x \equiv 0 \pmod{26}$, либо $x \equiv 13 \pmod{26}$. Число 1963 делится на 13, но не делится на 26, поэтому количество чисел первого типа равно $\left\lfloor \frac{1963}{26} \right\rfloor$, а второго типа — $\left\lfloor \frac{1963}{26} \right\rfloor + 1$. Таким образом, наибольшее количество выбранных чисел равно $\left\lfloor \frac{1963}{26} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{151}{2} \right\rfloor + 1 = 76$.

5. Соединим первую точку со второй, вторую с третьей, третью с четвёртой, четвёртую с пятой. При стирании отрезка, соединяющего точки k и $k+1$, образуются связанные системы из точек $1, \dots, k$ и $k+1, \dots, 5$, не связанные друг с другом.

8 класс

1. Составим диаграмму, как показано на рисунке 77, где в i -й строке расположено a_i квадратов. Тогда b_j — это число квадратов в j -м столбце. С одной стороны, общее число квадратов в этой таблице равно сумме квадратов в строках, т. е. оно равно $\sum a_i$. С другой стороны, общее число квадратов равно сумме квадратов в столбцах, т. е. оно равно $\sum b_j$. Следовательно, $\sum a_i = \sum b_j$.

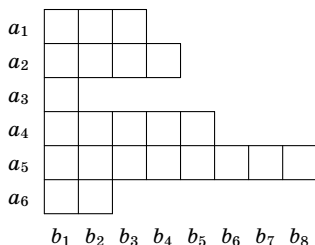


Рис. 77

2. Выберем горизонтальную строку таблицы, содержащую число 1, и вертикальный столбец, содержащий число 64. Двигаясь сначала по выбранной строке, а потом по выбранному столбцу, можно пройти от клетки, в которой написано число 1, к клетке, в которой написано число 64. Этот путь состоит не более чем из 14 переходов из одной клетки в соседнюю с ней клетку. В самом деле, двигаясь по горизонтали, мы делаем не более 7 ходов, и же самое справедливо для вертикали.

Предположим, что разность между любыми двумя соседними числами в таблице меньше 5. Это означает, что при каждом ходе к предыдущему числу прибавляется не

больше, чем 4, а за 14 или меньшее число ходов, которые мы сделали при переходе от 1 к 64, к исходному числу 1 прибавится не больше, чем $14 \times 4 = 56$. Но при переходе от 1 к 64 к числу 1 должно прибавиться 63. Полученное противоречие показывает, что найдутся два соседних числа, разность между которыми больше 4, что и требовалось доказать.

3. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC , R — радиус описанной окружности. M — точка пересечения медиан, H — точка пересечения высот. Точка M лежит на отрезке OH и делит его в отношении $OM : MH = 1 : 2$ (см. «Основные факты»).

В остроугольном треугольнике точка H лежит внутри него. Поэтому $OH < R$, следовательно $OM = \frac{1}{3}OH < \frac{R}{3}$. Таким образом, всё искомое ГМТ содержится внутри круга радиуса $\frac{R}{3}$ с центром в точке O . Докажем, что каждая точка внутри этого круга является центром тяжести некоторого остроугольного треугольника, вписанного в данную окружность. Если M совпадает с O , то можно взять правильный треугольник. Если же M лежит строго внутри круга радиуса $\frac{R}{3}$ и не совпадает с O , то возьмём в качестве вершины A точку пересечения луча MO с данной окружностью, затем построим точку A_1 так, что A_1 лежит на продолжении отрезка AM за точку M и $MA_1 = \frac{1}{2}MA$, и проведём через точку A_1 прямую BC , перпендикулярную AA_1 . Точка H , в которой пересекаются высоты треугольника ABC , лежит внутри данной окружности, потому что $OH = 3OM < R$. Следовательно, треугольник ABC остроугольный.

4. Покажем сначала, что из данного набора можно выбрать требуемым способом 655 чисел. Возьмём числа вида $3k + 1$, где $k = 0, 1, \dots, 654$. Разность любых двух таких чисел делится на 3, а сумма любых двух из них даёт при

деления на 3 остаток 2. Поэтому сумма никаких двух чисел из выбранных нами не делится на их разность.

Покажем теперь, что выбрать требуемым способом больше 655 чисел нельзя. Предположим, что выбрано больше, чем 655 чисел. Тогда найдутся два числа, отличающихся друг от друга на 1 или на 2, поскольку иначе разность между наибольшими и наименьшими числами данного набора должна быть не меньше, чем $3 \times 655 = 1965$, что невозможно. Итак, должны найтись два числа, отличающиеся друг от друга на 1 или на 2. Если разность между двумя выбранными числами равна 1, то их сумма делится на их разность. Если же разность между выбранными числами равна 2, то оба эти числа имеют одинаковую чётность, поэтому их сумма — чётное число; в этом случае сумма выбранных чисел также делится на их разность.

5. Заметим, что время прохождения аллеи в одну стороны составляет соответственно 6, 3 и 2 минуты. Покажем, что найдутся 3 минуты, когда первые два человека идут в одном направлении. Рассмотрим 6 минут, за которые первый человек проходит аллею от начала до конца. В эти 6 минут целиком уложатся 3 минуты, за которые второй человек проходит аллею. Если они при этом идут в одном направлении, то всё доказано. Если же они идут в разных направлениях, то ровно через 6 минут они будут идти в одном направлении, поскольку через 6 минут первый человек меняет направление, а второй идёт в прежнем направлении.

Будем считать начало промежутка времени, когда первые два человека 3 минуты идут в одном направлении, началом отсчёта времени. Второй человек разворачивается через 3 минуты; первый — через a минут, где $3 \leq a \leq 6$; третий — через b минут. Третий человек поворачивает каждые 2 минуты, поэтому, $b \leq 2$. Если $b \geq 1$, то уже в течении первых трёх минут найдётся промежуток времени в 1 минуту, когда все трое идут в одном направлении: это либо

первая минута, если вначале все трое идут в одном направлении, либо третья минута, если вначале третий идёт в противоположном направлении.

Рассмотрим теперь случай, когда $0 < b < 1$. Если третий человек вначале идёт в противоположном направлении, то после его поворота 2 минуты все трое будут идти в одном направлении. Предположим теперь, что вначале все трое идут в одном направлении. Рассмотрим промежуток времени от a минут до 6 минут. В это время первые двое идут в направлении, противоположном первоначальному, а третий начинает идти в направлении, противоположном первоначальному, в $4 + b$ минут и заканчивает в $6 + b$ минут. Таким образом, если $a \leq 5$, то в промежуток времени от 5 минут до 6 минут все трое идут в одном направлении.

Остаётся рассмотреть случай, когда $5 < a \leq 6$. Рассмотрим период с 9 минут до $6 + a$ минут. В это время первые двое идут в направлении, противоположном первоначальному, а третий тоже идёт в этом направлении, начиная с $8 + b$ минут и до $10 + b$ минут. При этом $6 + a > 10 + b$, так как $a > 5$ и $1 > b$. Поэтому с 9 минут до $10 + b$ минут все трое идут в одном направлении.

9 класс

1. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC . Вместо треугольников $ХАМ$, $ХВN$ и $ХСQ$ можно рассмотреть треугольники $ХОА$, $ХОВ$ и $ХОС$, так как $S_{ХОА} = \frac{2}{3}S_{ХАМ}$ и т. д. Треугольники $ХОА$, $ХОВ$ и $ХОС$ имеют общее основание $ХО$, поэтому достаточно доказать, что одно из расстояний от точек A , B и C до прямой $ХО$ равно сумме двух других; обозначим эти расстояния h_A , h_B , h_C (рис. 78). Без ограничения общности можно считать, что точка A лежит по одну сторону от прямой $ХО$, а точки B и C по другую. Точка M — середина отрезка BC , поэтому расстояние от точки M до прямой $ХО$ равно $\frac{h_B + h_C}{2}$. С дру-

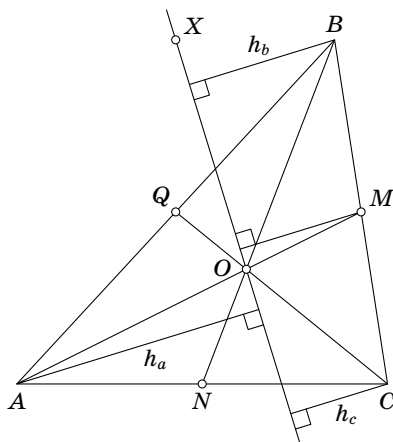


Рис. 78

гой стороны, $OM = \frac{AO}{2}$, следовательно, это расстояние равно $\frac{h_A}{2}$. Таким образом, $h_A = h_B + h_C$, что и требовалось.

2. Из каждой вершины рассматриваемой ломаной выходят одно вертикальное и одно горизонтальное звено, поэтому у неё 7 горизонтальных и 7 вертикальных звеньев. Занумеруем горизонтальные звенья ломаной сверху вниз и выясним, какое наибольшее точек самопересечения может быть на каждом звене. На первом и седьмом звеньях не может быть точек самопересечения, так как выше первого и ниже седьмого звена нет вершин ломаной. Ясно также, что на втором и шестом звеньях может быть не более двух, а на третьем и пятом звеньях — не более четырёх точек самопересечения (по числу вершин ломаной, лежащих сверху или, соответственно, снизу от этих звеньев). Покажем, что на четвёртом звене не может быть более пяти точек самопересечения. Действительно, если бы их было шесть, то при этом каждая вершина ломаной, лежащая выше четвёртого звена, оказалась бы соединённой с одной из вершин, лежащих ниже этого звена, и наоборот. Таким

содержащие числа $1, \dots, t$, и поставим звёздочки в оставшиеся клетки, соседние с отмеченными. Если при этом звёздочек окажется не меньше n , то требуемое утверждение будет доказано. Действительно, все числа в клетках со звёздочками больше t , поэтому наибольшее из них $a \geq t + n$. Клетка, содержащая число a , соседствует с некоторой отмеченной клеткой, в которой стоит число $b \leq t$. Так как $a \geq t + n$ и $b \leq t$, то $a - b \geq n$. Мы нашли два соседних числа a и b , разность между которыми не меньше n .

Остаётся доказать, что существует число m ($1 < m < n^2$), обладающее следующим свойством: если отметить клетки, в которых стоят числа $1, \dots, t$, и поставить по звёздочке в те из оставшихся клеток, которые соседствуют с отмеченными, то звёздочек окажется не меньше n . Докажем это. Обозначим через k наименьшее число, обладающее следующим свойством: *в каждой строке и в каждом столбце имеется число, не превосходящее k* . Так как k — наименьшее число, обладающее указанным свойством, то число $k - 1$ этим свойством не обладает. Другими словами, найдётся либо строка, либо столбец, не содержащие ни одного из чисел $1, \dots, k - 1$. Рассмотрим три случая.

1. Есть строка, не содержащая ни одного из чисел $1, \dots, k - 1$, но нет столбцов, не содержащих этих чисел.

Покажем, что число $m = k - 1$ обладает требуемым свойством. Отметим клетки, содержащие числа $1, \dots, m = k - 1$, и поставим звёздочки в те из оставшихся клеток, которые соседствуют с отмеченными. Каждый столбец содержит отмеченные клетки. Кроме того, в каждом столбце есть хотя бы одна неотмеченная клетка, поскольку целая строка не содержит отмеченных клеток. Поэтому в каждом столбце есть хотя бы одна звёздочка. Всего столбцов n , поэтому звёздочек не меньше n .

2. Есть столбец, не содержащий ни одного из чисел $1, \dots, k - 1$, но нет строк, не содержащих этих чисел.

Этот случай сводится к случаю 1: достаточно отразить таблицу относительно главной диагонали.

3. Есть строка и столбец, не содержащие ни одного из чисел $1, \dots, k-1$. Каждая из таких строк и каждый из таких столбцов должен содержать число k , потому что по предположению каждая строка и каждый столбец содержат одно из чисел $1, \dots, k$. Таким образом, есть ровно одна строка и ровно один столбец, не содержащие ни одного из чисел $1, \dots, k-1$; число k стоит на пересечении этой строки и этого столбца, как число 8 в следующей таблице:

1	2	3	*	
4	5	*		
6	*		*	
*		*	8	*
			*	7

Покажем, что число $m = k$ обладает требуемым свойством. Пусть число $m = k$ стоит в клетке a_{ij} на пересечении i -й строки и j -го столбца. Отметим клетки, содержащие числа $1, \dots, m$. Проверим, что в каждой строке имеются как отмеченные, так и неотмеченные клетки. Согласно определению числа k , в каждой строке есть число, не превосходящее k . А так как $m = k$, в каждой строке есть отмеченная клетка. В i -й строке все клетки, кроме a_{ij} , не отмечены. Наоборот, при $l \neq i$ в l -й строке не отмечена клетка a_{lj} . Итак, каждая строка содержит как отмеченные, так и неотмеченные клетки, поэтому она содержит хотя бы одну звёздочку. Следовательно, звёздочек не меньше n .

Комментарий. Числа $1, 2, \dots, n^2$ можно расставить в таблице $n \times n$ так, чтобы разность любых двух соседних не превосходила n . При $n = 5$ числа можно расставить, например, так:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Для произвольного n числа расставляются аналогично.

10 класс

1. При нечётном n сумма $x^n + y^n$ делится на $x + y$, поскольку $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1})$. Предположим, что $x^n + y^n = z^n$, где x , y и z — целые числа, а $x + y$ — простое число. Тогда z^n делится на простое число $x + y$, поэтому и само число z должно делиться на $x + y$. Следовательно, $z \geq x + y$, поэтому $z^n \geq (x + y)^n$, и мы получаем неравенство $x^n + y^n = z^n \geq (x + y)^n$, чего не может быть.

2. Поскольку прямых $2n$ и звеньев у ломаной тоже $2n$, то на каждой прямой лежит ровно одно звено. Занумеруем прямые каждого направления номерами от 1 до n . Фиксируем ребро ломаной, лежащее на первой горизонтальной прямой. Тогда каждая ломаная задаётся последовательностью номеров оставшихся горизонтальных звеньев и номеров вертикальных звеньев. Действительно, если известно, с какой горизонтальной прямой на какую вертикальную прямую (или наоборот) мы переходим, то это задаёт вершину ломаной.

Всего таких последовательностей номеров горизонтальных звеньев и номеров вертикальных звеньев $(n - 1)! \cdot n!$, но мы не учли, что одну и ту же ломаную можно обходить в двух различных направлениях, поэтому это число надо разделить на два.

3. Пусть O — центр правильного 25-угольника. Выберем несколько из данных 25 векторов и рассмотрим их сумму \vec{OS} . Проведём через точку O прямую l , перпендикулярную прямой OS .

Предположим сначала, что среди выбранных векторов есть хотя бы один, который либо лежит на прямой l , либо он и вектор \vec{OS} лежат по разные стороны от прямой l . Исключим этот вектор из числа выбранных, т. е. вычтем его из суммы \vec{OS} . Тогда новая сумма будет иметь бóльшую длину. Действительно, треугольник OAS прямоугольный или тупоугольный, поэтому $SA > OS$, но $\vec{AS} = \vec{OS} - \vec{OA}$.

Предположим теперь, что среди выбранных векторов нет какого-либо вектора, лежащего по ту же сторону от прямой l , что и вектор \vec{OS} . Добавим этот вектор к числу выбранных, т.е. прибавим его к сумме \vec{OS} . Тогда новая сумма $\vec{OS'}$ будет иметь бóльшую длину. Действительно, треугольник $OS'S$ тупоугольный, поэтому $OS' > OS$, но $\vec{OS'} = \vec{OS} + \vec{OB}$.

Таким образом, чтобы получить сумму наибольшей длины, нужно поступить следующим образом. Проведём прямую через центр многоугольника и выберем векторы, лежащие по одну сторону от прямой, включая и вектор, лежащий на этой прямой, если он есть. Так можно будет выбрать 12 или 13 векторов. Для всех полученных таким образом наборов векторов сумма длин одна и та же, потому что сумма всех 25 векторов равна нулю.

4. Пусть площадь пятиугольника $ABCDE$ равна S , а сумма площадей треугольников ABC , BCD , CDE , DEA и EAB равна S' . Тогда площадь пятиугольника $A'B'C'D'E'$ равна $S - \frac{S'}{4}$. Таким образом, требуемое неравенство приобретает вид $S - \frac{S'}{4} \geq \frac{S}{2}$, что равносильно неравенству $2S \geq S'$. Последнее неравенство очевидно, так как каждая внутренняя точка пятиугольника $ABCDE$ покрыта не более чем двумя из треугольников ABC , BCD , CDE , DEA и EAB .

5. *Первый способ.* Докажем индукцией по n , что $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$. Для $a_3 = 3$ и для $a_4 = 11$ это равенство легко проверяется. Предположим теперь, что $N \geq 5$ и для всех n , удовлетворяющих неравенствам $2 < n < N$, доказываемое утверждение выполняется. Тогда

$$a_N = \frac{a_{N-1}^2 + 2}{a_{N-2}} = \frac{(4a_{N-2} - a_{N-3})^2 + 2}{a_{N-2}} = 16a_{N-2} - 8a_{N-3} + \frac{a_{N-3}^2 + 2}{a_{N-2}}.$$

Так как $a_{N-2} = \frac{a_{N-3}^2 + 2}{a_{N-4}}$, последнее слагаемое равно a_{N-4} .

Следовательно,

$$\begin{aligned} a_N &= 16a_{N-2} - 8a_{N-3} + a_{N-4} = \\ &= 4(4a_{N-2} - a_{N-3}) - (4a_{N-3} - a_{N-4}) = 4a_{N-1} - a_{N-2}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Итак, при всех натуральных n выполнено равенство $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$, поэтому все числа последовательности целые.

Второй способ. Пусть пара чисел (x_1, y_1) — одно из решений уравнения $x^2 - 4xy + y^2 + 2 = 0$ в натуральных числах. Построим по этому решению новое решение следующим образом. Фиксируем $y = y_1$ и рассмотрим данное уравнение как квадратное уравнение относительно x . Это уравнение имеет вид $x^2 - (4y_1)x + (y_1^2 + 2) = 0$, и у него известен один корень x_1 . По теореме Виета можно найти его второй корень x_2 , причём двумя способами: $x_2 = \frac{y_1^2 + 2}{x_1}$ и $x_2 = 4y_1 - x_1$. Первое представление показывает, что число x_2 положительное, а второе представление показывает, что оно целое.

Заметим, что пара (a_1, a_2) является решением уравнения $x^2 - 4xy + y^2 + 2 = 0$ в натуральных числах, и построим по этому решению новое решение указанным способом. В результате получим решение (a_2, a_3) , из него получим решение (a_3, a_4) и т. д. При этом все полученные решения натуральные, т. е. все числа a_n натуральные.

11 класс

1. Предположим, что такие числа нашлись. Пусть для определённости z — наибольшее из этих чисел. Тогда $x^x + y^y < 2(z-1)^{z-1} < 2z^{z-1}$. Кроме того, $z > 2$, поэтому $2z^{z-1} < z^z < z^z + t^t$. Таким образом, $x^x + y^y < z^z + t^t$, что противоречит предположению. Следовательно, таких чисел не существует.

2. Рассмотрим первый знак после запятой у данных дробей. Этим дробей 11, а различных знаков (цифр) 10,

поэтому согласно принципу Дирихле найдётся пара дробей, у которых первые знаки после запятой одинаковые. Аналогично и для каждого знака после запятой найдётся пара дробей, у которых на этом месте стоят одинаковые цифры. Отметим такую пару последовательностей для каждого знака. Так как всего возможных пар из 11 дробей конечное число, какая-нибудь пара встретится бесконечно много раз, т. е. найдётся пара дробей, десятичные записи которых совпадают в бесконечном числе знаков. Докажем, что эта пара дробей является искомой. Рассмотрим разность этих дробей. Если в некотором разряде десятичные записи дробей совпадают, то у разности в этом разряде находится либо нуль (если при вычитании «в столбик» из этого разряда не занимали), либо девятка (если занимали). Следовательно, в десятичной записи разности либо бесконечное число нулей, либо бесконечное число девяток.

3. Для $x = 0$ получаем $0 = -26P(0)$, т. е. $P(0) = 0$. Для $x = 1$ получаем $P(0) = -25P(1)$, т. е. $P(1) = 0$. Далее полагаем $x = 2, 3, \dots, 25$ и последовательно получаем $2P(1) = -24P(2), \dots, 25P(24) = -P(25)$. Поэтому $P(0) = P(1) = \dots = P(25) = 0$. Следовательно,

$$P(x) = x(x-1)(x-2) \dots (x-25)Q(x),$$

где $Q(x)$ — некоторый многочлен. При этом из тождества $xP(x-1) = (x-26)P(x)$ следует, что $Q(x-1) = Q(x)$. Пусть x_0 — произвольное число и $Q(x_0) = c$. Тогда у многочлена $Q(x) - c$ бесконечно много корней: $x_0, x_0 \pm 1, x_0 \pm 2, \dots$. Поэтому $Q(x) = c$ — одно и то же число для всех x .

5. Предположим, что нашлись три такие дуги ω_A, ω_B и ω_C . Большие окружности, содержащие дуги ω_A и ω_B , пересекаются в диаметрально противоположных точках C и C' . Аналогично определим диаметрально противоположные точки B и B', A и A' . Дуга ω_A больше 180° , поэтому

хотя бы одна из точек C и C' лежит на ней. Обе эти точки не могут лежать на дуге ω_A , потому что одна из этих точек лежит на дуге ω_B , и эта точка была бы общей точкой дуг ω_A и ω_B . Аналогично доказывается, что ровно одна из точек B и B' лежит на дуге ω_A . Для определённости можно считать, что на дуге ω_A не лежат точки B и C . Дуга BC лежит вне дуги ω_A , поэтому она меньше 60° . Вне дуги ω_B лежит дуга $B'A$ или дуга $B'A'$; для определённости будем считать, что вне дуги ω_B лежит дуга $B'A'$. Тогда вне дуги ω_C лежит дуга AC' . Заменив дугу BC на симметричную её дугу $B'C'$, получим, что дуги AC' , $C'B'$ и $B'A'$, каждая из которых меньше 60° , соединяют диаметрально противоположные точки A и A' . Покажем, что такого быть не может.

Пусть O — центр сферы. Тогда $\angle AOB' + \angle B'OA' = 180^\circ$. С другой стороны, $\angle B'OA' < 60^\circ$ и, так как любой плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других плоских углов, $\angle AOB' < \angle AOC' + \angle C'OB' < 120^\circ$.

1964 год (XXVII олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Пусть CH и AK — высоты треугольника ABC . По условию $CH \geq AB$ и $AK \geq BC$. А так как перпендикуляр короче наклонной, то $AB \geq AK$ и $BC \geq CH$. Объединяя все эти неравенства, получаем $CH \geq AB \geq AK \geq BC \geq CH$. Следовательно, все эти неравенства обращаются в равенства. В частности, $AB = BC$, т. е. треугольник равнобедренный. Кроме того, равенство $AB = AK$ означает, что высота AK совпадает со стороной AB , т. е. $\angle B = 90^\circ$.

2. Пусть O и O_1 — середины отрезков AB и AM . Ясно, что $AC \perp BM$, поэтому точка C лежит на окружности с диаметром AM . Следовательно, $O_1A = O_1C$. Кроме того,

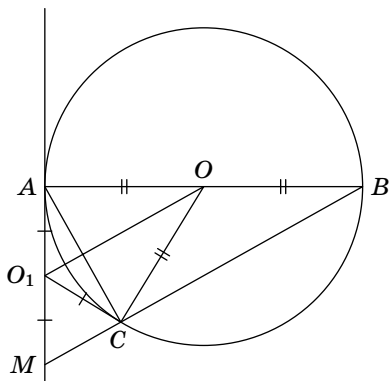


Рис. 80

$OA = OC$. Поэтому $\triangle O_1AO = \triangle O_1CO$ (рис. 80). В частности, $\angle O_1CO = 90^\circ$. Это означает, что O_1C — касательная к окружности.

3. Пусть сумма цифр числа n равна 5. Сумма цифр любого числа при делении на 3 даёт тот же остаток, что и само число. Следовательно, число n даёт остаток 2 при делении на 3. Точный квадрат при делении на 3 может давать только остатки 0 или 1, поэтому число n не может быть точным квадратом.

4. Изначально узлы, в которых сходится 4 звена, — это точки пересечения 9 внутренних горизонтальных и 9 внутренних вертикальных прямых. Количество таких узлов равно 81, поэтому нужно стереть по крайней мере 41 звено.

Покажем, как это сделать. Со второй по десятую горизонталь сотрём звенья, соединяющие вторую и третью, четвертую и пятую, шестую и седьмую, восьмую и девятую вертикали. Теперь узлы, в которых сходится 4 звена, остались только на десятой вертикали. В ней сотрём звенья между вторым и третьим, четвёртым и пятым, шестым и седьмым, восьмым и девятым, десятым и одина-

дцатым узлами. Теперь в каждом узле сходятся не более трёх звеньев. При этом было стёрто $4 \cdot 9 + 5 = 41$ звеньев.

5. Остаток произведения (суммы) зависит только от остатков сомножителей (слагаемых). Используя это свойство, выпишем последовательность остатков при делении на 4 чисел a_i : 1, 1, 2, 3, 3, 2, 3, 3, ... Дальше последовательность периодична с периодом 3. Ни один член этой последовательности не равен 0, поэтому ни один член последовательности a_i не делится на 4.

8 класс

2. Число $n = 1$ не подходит, так как $0! = 1$ делится на 1^2 .

Пусть p — простое число. Тогда ни одно из чисел от 1 до $p - 1$ не делится на p , а среди чисел от 1 до $2p - 1$ только число p делится на p . Следовательно, числа $n = p$ и $n = 2p$ подходят для любого простого p .

Рассмотрим теперь любое число вида $n = l \cdot m$, где числа l и m взаимно простые и не равны 2. Среди чисел от 1 до $n - 1$ встречаются числа $l, 2l, m$ и $2m$, причём все эти числа различны. Следовательно, $(n - 1)!$ делится на n^2 , т. е. такое число не подходит.

Остаётся рассмотреть числа вида $n = p^k$ и $n = 2p^k$, где p — простое число и $k \geq 2$. В первом случае наибольшая степень числа p , на которую делится $(n - 1)!$, равна $(p^{k-1} - 1) + (p^{k-2} - 1) + \dots + (p - 1)$. Если $p \geq 5$, то $p^m - 1 \geq 4$ при $m \geq 1$, поэтому $(p^{k-1} - 1) + (p^{k-2} - 1) + \dots + (p - 1) \geq 4(k - 1) \geq 2k$. Следовательно, $(p^k - 1)!$ делится на $(p^k)^2 = p^{2k}$. Ясно также, что $(2p^k - 1)!$ делится на $(p^k - 1)!$ и на 4, поэтому $(2p^k - 1)!$ делится на $(2p^k)^2$. Итак, если $p \geq 5$, то числа вида $n = p^k$ и $n = 2p^k$ не подходят.

Для $p = 3$ получаем $3 - 1 < 4$, поэтому $(3^2 - 1)!$ не делится на $(3^2)^2$, т. е. число 9 подходит. Затем мы получаем $(3^2 - 1) + (3 - 1) \geq 6$ и вообще $(3^{k-1} - 1) + (3^{k-2} - 1) + \dots + (3 - 1) \geq 2k$ при $k \geq 3$. Поэтому числа $n = 3^k$ при $k \geq 3$ не подходят. Наибольшая степень числа 3, на которую де-

лится $(2 \cdot 3^k - 1)!$, равна $(2 \cdot 3^{k-1} - 1) + (2 \cdot 3^{k-2} - 1) + \dots + (2 \cdot 3 - 1) \geq 2k$, поэтому числа $n = 2 \cdot 3^k$, где $k \geq 2$, не подходят.

Для $p = 2$ нужно рассмотреть числа вида $n = 2^k$, где $k \geq 3$. Ясно, что $(2^2 - 1) + (2 - 1) < 2 \cdot 3$ и $(2^{k-1} - 1) + (2^{k-2} - 1) + \dots + (2 - 1) \geq 2k$ при $k \geq 4$. Поэтому число $n = 2^3$ подходит, а числа $n = 2^k$ при $k \geq 4$ не подходят.

3. Обозначим $\underbrace{\sqrt{n + \sqrt{n + \dots + \sqrt{n}}}}_{x \text{ раз}}$ через $A_x(n)$. Ясно, что

$$n + A_{x-1}(n) = n + \underbrace{\sqrt{n + \sqrt{n + \dots + \sqrt{n}}}}_{x \text{ раз}} = (A_x(n))^2$$

Таким образом, если число $A_{1964}(n) = m$ целое, то число $A_{1963}(n) = m^2 - n$ тоже целое; но тогда и число $A_{1961}(n) = (n^2 - n)^2 - n$ — тоже целое, и, наконец, число $A_1(n) = \sqrt{n}$ целое. А из того, что число $\sqrt{n} = a$ целое, следует, что $n = a^2$, где a — целое число.

Итак, числа

$$A_1(n) = \sqrt{n} = a$$

и

$$A_2(n) = \sqrt{n + \sqrt{n}} = \sqrt{a^2 + a} = \sqrt{a(a+1)}$$

должны быть целыми. Но числа a и $a+1$ взаимно простые, поэтому произведение $a(a+1)$ может быть полным квадратом, лишь если и a , и $a+1$ — полные квадраты, т. е. если $a = 0$. А если $a = 0$, то, очевидно, $n = 0$ и $A_x(n) = 0$ при любом x . Таким образом, $n = 0$ и $m = 0$.

4. Проведём через точки A , C и E прямые l_1 , l_2 и l_3 , параллельные прямым BC , DE и FA соответственно. Обозначим точки пересечения прямых l_1 и l_2 , l_2 и l_3 , l_3 и l_1 через P , Q , R . Из равенства углов шестиугольника следует, что треугольник PQR правильный. С другой стороны,

длины сторон этого треугольника равны $a_1 - a_4$, $a_5 - a_2$ и $a_3 - a_6$ или $a_4 - a_1$, $a_2 - a_5$ и $a_6 - a_3$.

5. Сумма цифр числа при делении на девять даёт тот же остаток, что и само число. Следовательно, единицы получают из чисел вида $9k + 1$, а двойки — из чисел вида $9k + 2$. Все числа от 1 до 999 999 разбиваются на девятки подряд идущих, в каждой из которых по одному числу каждого вида. Оставшееся число 1 000 000 имеет вид $9k + 1$, а значит, из него получается единица. Итак, единиц на одну больше, чем двоек.

9 класс

1. Заметим сначала, что если одно из неизвестных чисел равно единице, то остальные тоже равны единице. Действительно, пусть $x = 1$. Тогда $z = 1^y = 1$, $y = z^x = 1^1 = 1$.

Предположим, что существует ещё какое-нибудь решение, кроме $(1, 1, 1)$. Пусть сначала $x > 1$. Тогда $z = x^y > 1$, $y = z^x > 1$. Следовательно, $z = x^y > x^1 = x$, $y = z^x > z^1 = z$, $x = y^z > y^1 = y$, что невозможно. Значит, этот случай невозможен. Случай $x < 1$ получается из случая $x > 1$ заменой всех знаков $>$ на знаки $<$.

2. Предположим, что $n(n+1) = a^m$, где $m \geq 2$ (a , m и n — натуральные числа). Числа n и $n+1$ не имеют общих делителей, поэтому $n = b^m$ и $n+1 = c^m$. Но этого не может быть, потому что разность между двумя последовательными m -ми степенями строго больше 1.

3. Заметим, что

$$\frac{a - K^3}{27 - K} = \frac{a - 27^3}{27 - K} + \frac{27^3 - K^3}{27 - K} = \frac{a - 27^3}{27 - K} + 27^2 + 27K + K^2.$$

Следовательно, число $\frac{a - 27^3}{27 - K}$ целое при любом $K \neq 27$, т. е. число $a - 27^3$ делится на любое целое число, отличное от нуля, а значит, $a = 27^3$.

4. Воспользуемся решением задачи 4 для 8 класса. Равноугольный шестиугольник очевидным образом строится с помощью введённого там вспомогательного треугольника PQR , сторона которого равна $|a_1 - a_4|$.

5. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD . Для определённости будем считать, что $\alpha = \angle AOB < 90^\circ$ (если $\alpha = 90^\circ$, то четырёхугольник $MNPQ$ вырождается в точку). Тогда $OM = OA \cos \alpha$, $ON = OB \cos \alpha$, $OP = OC \cos \alpha$ и $OQ = OD \sin \alpha$. Поэтому при симметрии относительно биссектрисы угла AOB четырёхугольник $MNPQ$ переходит в четырёхугольник, гомотетичный четырёхугольнику $ABCD$ с коэффициентом $\cos \alpha$.

10–11 класс

1. Пусть a — число, квадратом которого является число, полученное из числа N после зачёркивания у него двух последних цифр. Тогда $100a^2 < N < 100a^2 + 100$, откуда $\sqrt{N} > 10a$. По условию, число \sqrt{N} целое. Следовательно, $\sqrt{N} \geq 10a + 1$, т. е. $N \geq (10a + 1)^2 = 100a^2 + 20a + 1$. Учитывая, что $N < 100a^2 + 100$, получаем неравенство $20a + 1 < 100$, поэтому $a < 5$. Таким образом, наибольшее возможное значение a равно 4, т. е. искомое число имеет вид $(4x)^2$. При $x = 1$ получаем $N = 41^2 = 1681$, а при $x \geq 2$ получаем $N \geq 42^2 > 1700$, но первые две цифры должны образовывать число $a^2 = 16$. Итак, наибольшее возможное значение N равно 1681.

3. Заметим, что

$$\frac{a - K^{1964}}{27 - K} = \frac{a - 27^{1964}}{27 - K} + \frac{27^{1964} - K^{1964}}{27 - K}.$$

Дробь $\frac{27^{1964} - K^{1964}}{27 - K}$ всегда есть целое число, поэтому дробь $\frac{a - 27^{1964}}{27 - K}$ тоже должна быть целым числом при любом $K \neq 27$, следовательно, $a = 27^{1964}$.

5. Если из куба $ABCA'B'C'D'$ вырезать тетраэдр $A'BC'D$, то оставшаяся часть куба распадается на 4 тетраэдра, т. е. куб можно разбить на 5 тетраэдров.

Докажем, что на меньшее число тетраэдров куб разбить нельзя. Грань $ABCD$ не может быть гранью тетраэдра, на которые разбит куб, поэтому к ней прилегает по крайней мере два тетраэдра. Рассмотрим все тетраэдры, прилегающие к грани $ABCD$. Их высоты, опущенные на эту грань, не превосходят a , где a — ребро куба, а сумма площадей их граней, лежащих на $ABCD$, равна a^2 . Поэтому сумма их объёмов не превосходит $a^3/3$. Так как грани одного тетраэдра не могут располагаться на противоположных гранях куба, к граням $ABCD$ и $A'B'C'D'$ прилегает по крайней мере 4 тетраэдра, причём сумма их объёмов не превосходит $2a^3/3 < a^3$. Следовательно, есть ещё один тетраэдр разбиения.

Второй тур

7 класс

1. Пусть K , L и M — центры окружностей O_1 , O_2 и O_3 . Достаточно доказать, что $KR=KS$. Докажем, что $\triangle LRK = \triangle MKS$. Действительно, $KM = KB - BM = \frac{AB - BC}{2} = \frac{AC}{2} = RL$ и $KL = KA - AL = \frac{AB - AC}{2} = \frac{BC}{2} = SM$. Кроме того, $\angle RLK = \angle KMS = 180^\circ - 2\alpha$, где α — угол между прямыми AB и PQ .

2. Если все присутствующие знакомы друг с другом, то можно выбрать любых четырёх человек и посадить их произвольно. Предположим теперь, что A и B не знакомы. Пусть из остальных $2n - 2$ собравшихся a и b человек знакомы с A и B соответственно и c человек знакомы с ними обоими. Тогда количество человек, знакомых с A или B , равно $a + b - c$, поэтому $a + b - c \leq 2n - 2$. По условию $a \geq n$ и $b \geq n$, поэтому $2n - c \leq a + b - c$. Следовательно, $2n - c \leq 2n - 2$, т. е. $c \geq 2$. Таким образом, у A и B есть два общих знакомых C_1 и C_2 , поэтому можно посадить A и B напротив друг друга, а между ними посадить C_1 и C_2 .

3. Рассмотрим наименьший выпуклый многоугольник, содержащий данные точки. Пусть он имеет k вершин. Разрежем его диагоналями, выходящими из одной точки, на $k - 2$ треугольника. Возьмём одну из оставшихся точек и соединим её с вершинами того треугольника, в котором она лежит. Так последовательно будем поступать со всеми оставшимися точками. При каждом разрезании треугольника общее число треугольников увеличивается на 2, поэтому общее число треугольников не меньше 100. Сумма их площадей меньше 1, поэтому площадь хотя бы одного из треугольников меньше $1/100$.

4. Пусть O — центр окружности, $\angle ADC = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$. Четырёхугольник $DPOQ$ — ромб, поэтому $DP \parallel QO$ и $\angle AQO = \alpha$. Треугольник AOQ равнобедренный, поэтому $\angle QAO = \alpha$. Аналогично получаем: $\angle DCO = \alpha$, $\angle BCO = \beta$, $\angle BAO = \beta$. Таким образом, в четырёхугольнике $ABCD$ сумма углов равна $3\alpha + 3\beta = 360^\circ$, откуда $\angle ABC + \angle ADC = \alpha + \beta = 120^\circ$.

5. См. решение задачи 3 для 9 класса.

8 класс

1. Сначала покажем, как перелить всю воду в один стакан при $n = 2^k$. Разобьём все стаканы на пары и в каждой из пар перельём содержимое одного из стаканов в другой. В результате получим 2^{k-1} стаканов, в которых налито поровну воды. Произведя описанную операцию ещё $k - 1$ раз, мы перельём всю воду в один стакан.

Предположим теперь, что при данном n можно перелить всю воду в один стакан. Докажем, что тогда $n = 2^k$.

Первый способ. Примем общее количество воды за единицу. Тогда после всех переливаний количество воды в одном из стаканов равно 1, а в остальных оно равно нулю. Следовательно, перед этим в двух стаканах воды было по $1/2$, а в остальных воды не было. Пусть в некоторый

момент количество воды в каждом стакане имеет вид $\frac{m}{2^k}$, где m — целое число. Докажем, что тогда и на предыдущем шаге количество воды в каждом стакане имеет такой вид. Изменив нумерацию стаканов, можно считать, что при этом переливании вода переливалась из первого стакана во второй. Пусть после переливания в этих стаканах стало $\frac{m_1}{2^{k_1}}$ и $\frac{m_2}{2^{k_2}}$ соответственно. Тогда перед этим переливанием в стаканах было $\frac{m_1}{2^{k_1}} + \frac{m_2}{2^{k_2+1}}$ и $\frac{m_2}{2^{k_2+1}}$ соответственно. Оба эти числа имеют вид $\frac{m}{2^k}$. Следовательно, в самом начале во всех стаканах количество воды тоже имело такой вид. Но количество воды в каждом стакане было равно $\frac{1}{n}$, а значит, $n = 2^k$ при некотором k .

Второй способ. Предположим, что число n имеет нечётный простой делитель p . Будем считать, что общее количество воды равно n . Пусть после переливания воды из первого стакана во второй количество воды в первом и втором стаканах равно x и y соответственно. Тогда на предыдущем шаге воды в них было $x + \frac{y}{2}$ и $\frac{y}{2}$ соответственно. Поэтому если на каком-то шаге количество воды в каждом стакане представляет собой несократимую дробь, числитель которой делится на p , то и на предыдущем шаге количество воды в каждом стакане имеет такой же вид. На последнем шаге остаётся один стакан, количество воды в котором равно n , причём n делится на p . Поэтому на первом шаге, когда количество воды в каждом стакане равно 1, это количество тоже должно быть несократимой дробью, числитель которой делится на p . Полученное противоречие показывает, что n не имеет нечётных простых делителей.

2. Пусть A_1 , B_1 и C_1 — середины отрезков OA , OB и OC ; эти точки лежат на одной прямой. Ясно также, что эти точки являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны треугольника $O_1O_2O_3$ или на

их продолжения. Докажем, что если основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны треугольника $O_1O_2O_3$ или на их продолжения, лежат на одной прямой, то точка O лежит на описанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$.

Чтобы не рассматривать отдельно разные варианты расположения точек, воспользуемся свойствами ориентированных углов. Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром O_1O , поэтому $\angle(O_1O, OA) = \angle(O_1B_1, B_1A_1)$. Точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром O_3O , поэтому $\angle(O_3B_1, B_1C_1) = \angle(O_3O, OC_1)$. Учитывая, что

$$\angle(O_1B_1, B_1A_1) = \angle(O_3B_1, B_1C_1),$$

получаем равенство $\angle(O_1O, OA) = \angle(O_3O, OC_1)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\angle(O_1O, OO_3) &= \angle(O_1O, OA_1) + \angle(A_1O, OO_3) = \\ &= \angle(O_3O, OC_1) + \angle(A_1O, OO_3) = \angle(A_1O, OC_1).\end{aligned}$$

Точки A_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром OO_2 , поэтому $\angle(A_1O, OC_1) = \angle(A_1O_2, O_2C_1) = \angle(O_1O_2, O_2O_3)$. Таким образом, $\angle(O_1O, OO_3) = \angle(O_1O_2, O_2O_3)$, т. е. точки O_1 , O_2 , O_3 и O лежат на одной окружности.

3. Пусть первый игрок делает ходы по следующему правилу: если он может занять угловую клетку, то занимает её, а если не может, то делает ход, симметричный относительно центра доски ходу второго игрока. Тогда после каждого хода первого игрока второй не может занять угловую клетку, потому что иначе это сделал бы первый предыдущим ходом.

4. По теореме Пифагора $A_1H_1^2 = A_1O^2 - H_1O^2$, ..., $A_7H_7^2 = A_7O^2 - H_7O^2$, поэтому $A_1H_1^2 + A_2H_2^2 + \dots + A_7H_7^2 = A_1O^2 + \dots + A_7O^2 - (H_1O^2 + \dots + H_7O^2)$. Аналогично $A_2H_1^2 + A_3H_2^2 + \dots + A_1H_7^2 = A_1O^2 + \dots + A_7O^2 - (H_1O^2 + \dots + H_7O^2)$. Следо-

вательно,

$$A_1 H_1^2 + A_2 H_2^2 + \dots + A_7 H_7^2 = A_2 H_1^2 + A_3 H_2^2 + \dots + A_1 H_7^2.$$

Вычтем правую часть из левой и применим формулу разности квадратов:

$$\begin{aligned} (A_1 H_1 - A_2 H_1)(A_1 H_1 + A_2 H_1) + \\ + (A_2 H_2 - A_3 H_2)(A_2 H_2 + A_3 H_2) + \dots + \\ + (A_7 H_7 - A_1 H_7)(A_7 H_7 + A_1 H_7) = 0. \end{aligned}$$

По условию все множители $A_i H_i + A_{i+1} H_i = A_i A_{i+1}$ равны, поэтому

$$A_1 H_1 + A_2 H_2 + \dots + A_7 H_7 = H_1 A_2 + H_2 A_3 + \dots + H_7 A_1,$$

что и требовалось.

5. Рассмотрим наименьший выпуклый многоугольник, содержащий данные точки. Пусть он имеет k вершин. Разрежем его диагоналями, выходящими из одной точки, на $k - 2$ треугольника. Возьмём одну из оставшихся точек и соединим её с вершинами того треугольника, в котором она лежит. Так последовательно будем поступать со всеми оставшимися точками. При каждом разрезании треугольника общее число треугольников увеличивается на 2, поэтому общее число треугольников не меньше 99. Сумма их площадей не превосходит 1, поэтому площадь хотя бы одного из треугольников не больше $\frac{1}{99} < \frac{1}{60}$.

9 класс

3. Занумеруем точки с целыми неотрицательными координатами (x, y) в следующем порядке: $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$, $(0, 4)$ и т. д. (рис. 81). Докажем, что точка с координатами (x, y) имеет номер $n = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}$. Для первой точки это очевидно.

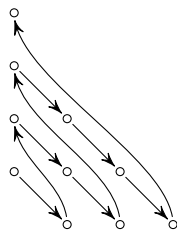


Рис. 81

Предположим, что требуемое утверждение доказано для точки с номером n . Пусть n -я точка имеет координаты (x, y) . Рассмотрим два случая.

1. Пусть $y \neq 0$. Тогда $(n+1)$ -я точка имеет координаты $(x', y') = (x+1, y-1)$. Ясно, что

$$\frac{(x'+y')^2 + 3x' + y'}{2} = \frac{(x+y)^2 + 3x + 3 + y - 1}{2} = n + 1.$$

2. Пусть $y = 0$. Тогда $(n+1)$ -я точка имеет координаты $(x', y') = (0, x+1)$. Ясно, что

$$\frac{(x'+y')^2 + 3x' + y'}{2} = \frac{(x+1)^2 + x + 1}{2} = \frac{x^2 + 3x}{2} + 1 = n + 1.$$

4. Пусть I и O — центры вписанной и описанной окружностей, B' и C' — середины сторон AB и AC . Точки B' и C' лежат на окружности с диаметром AO . Пусть K и M — точки касания вписанной окружностью сторон AB и AC . Тогда $AK = AM = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{BC}{2}$, поскольку $AB + AC = 2BC$ по условию. Ясно, что $AB' = \frac{AB}{2}$ и $AC' = \frac{AC}{2}$, поэтому, ещё раз воспользовавшись равенством $AB + AC = 2BC$, получим, что $B'K = |AK - AB'| = |AC' - AM| = C'M$, поэтому треугольники $IB'K$ и $IC'M$ равны по двум катетам. Следовательно, $\angle B'IC' = \angle KIM = 180^\circ - \angle A = \angle B'OC'$, поэтому точка I тоже лежит на окружности с диаметром AO , т. е. $IO \perp AI$, что и требовалось.

5. Предположим, что существует замкнутая ломаная $A_1 \dots A_n$ с нечётным числом звеньев равной длины, все вершины которой лежат в узлах целочисленной решётки. Пусть a_i и b_i — координаты проекций вектора $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ на горизонтальную и вертикальную оси. Обозначим длину звена ломаной через c . Тогда $c^2 = a_i^2 + b_i^2$, поэтому c^2 при делении на 4 даёт остаток 0, 1 или 2. Если c^2 делится на 4, то a_i и b_i делятся на 4 (это доказывается простым перебором всех возможных остатков, которые a_i и b_i дают при делении на 4). Поэтому при гомотетии с центром A_1

и коэффициентом 0,5 наша ломаная перейдёт в ломаную с меньшей длиной звена, вершины которой по-прежнему лежат в узлах решётки. После нескольких таких операций придём к ломаной, у которой c^2 не делится на 4, т. е. даёт остаток 1 или 2. Разберём эти варианты, предварительно заметив, что $a_1 + \dots + a_m = b_1 + \dots + b_m = 0$.

1. c^2 при делении на 4 даёт остаток 2. Тогда числа a_i и b_i оба нечётны, поэтому число $a_1 + \dots + a_m$ нечётно и не может равняться нулю.

2. c^2 при делении на 4 даёт остаток 1. Тогда одно из чисел a_i и b_i нечётно, а другое чётно, поэтому число $a_1 + \dots + a_m + b_1 + \dots + b_m$ нечётно и не может равняться нулю.

10 класс

1. Получим сначала равномерную смесь двух жидкостей, затем трёх и т. д. Сделаем это так. Сначала перельём половину жидкости из первой мензурки в пустую мензурку, затем половину жидкости из второй мензурки перельём в первую и выльем во вторую мензурку всё содержимое бывшей пустой мензурки. В результате в первой и второй мензурках получится равномерная смесь первых двух жидкостей. Пусть на каком-то шаге в первых k мензурках получена равномерная смесь первых k жидкостей, причём в каждой из этих мензурок содержится одинаковое количество жидкости. Перельём в пустую мензурку $\frac{1}{k+1}$ жидкости каждой из этих k мензурок, затем в каждую из k мензурок перельём $\frac{1}{k+1}$ жидкости из $(k+1)$ -й мензурки и выльем в $(k+1)$ -ю мензурку содержимое бывшей пустой мензурки. В результате в первых $k+1$ мензурках получится равномерная смесь первых $k+1$ жидкостей.

2. Любое движение, которое переводит в себя систему из n точек, оставляет на месте центр масс O этой системы точек. Движение плоскости, оставляющее точку O неподвижной, — это либо симметрия относительно оси, прохо-

дящей через точку O , либо поворот с центром O (см. «Основные факты»). Как симметрия относительно оси, проходящей через точку O , так и поворот с центром O переводят любую точку A в точку, лежащую на окружности радиуса OA с центром O . Поэтому все точки рассматриваемой системы лежат на окружности с центром O и радиусом OA , где A — одна из точек системы.

3. См. решение задачи 4 для 9 класса.

5. Найдём количество карточек, на которых написано число $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где p_1, \dots, p_k — различные простые делители числа n . Для этого сначала найдём количество карточек, на которых написаны делители числа n , меньшие n . Каждый такой делитель является делителем одного из чисел $\frac{n}{p_1}, \dots, \frac{n}{p_k}$. Обозначим через A_i множество карточек, на которых написан один из делителей числа $\frac{n}{p_i}$. Заметим, что $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_l}$ (пересечение множеств A_{i_1}, \dots, A_{i_l}) — это множество карточек, на которых написаны делители числа $\frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_l}}$. Следовательно, по условию задачи,

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_l}| = \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_l}},$$

где $|A|$ — количество элементов множества A .

По формуле включений и исключений (см. «Основные факты») получаем, что количество карточек, на которых написаны делители числа n , меньшие n , равно

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{l=1}^k (-1)^l \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq k} \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_l}}.$$

Следовательно, количество карточек, на которых написано число n , равно

$$n - \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k} \right) = \varphi(n) > 0.$$

В частности, каждое число встречается хотя бы на одной карточке.

Комментарий. Полученная функция $\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера*; можно доказать, что она равна количеству чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n .

11 класс

1. Введём систему координат с началом в точке O так, чтобы оси Ox и Oy не были параллельны ни одному из проведённых векторов. Сумма длин проекций каждого вектора на обе оси координат больше длины вектора, потому что сумма длин катетов больше длины гипотенузы. Таким образом, сумма длин проекций всех проведённых векторов на обе оси больше 4, поэтому сумма длин проекций на одну из осей больше 2. Выберем эту ось. Проекции одной части векторов на неё положительны, а другой отрицательны. Сумма длин проекций одной из этих двух частей на выбранную ось больше 1. Но если проекции всех векторов на некоторую прямую направлены в одну сторону, то длина суммы этих векторов не меньше суммы длин их проекций. Следовательно, длина суммы выбранных векторов больше 1.

Комментарий. В действительности справедлива более точная оценка: можно выбрать несколько векторов (или, быть может, один вектор), длина суммы которых не меньше $4/\pi$. См. «Задачи по планиметрии», задача 13.44.

3. Мы воспользуемся тем, что было получено при решении задачи 4 для 8 класса. Напомним некоторые обозначения: I — центр вписанной окружности, B' и C' — середины сторон AB и AC . Из решения задачи 4 мы знаем, что точки A , B' , C' и I лежат на одной окружности, т. е. точка I лежит на проведённой окружности.

Пусть AH — высота, r — радиус вписанной окружности. С одной стороны, площадь треугольника ABC равна $\frac{AH \cdot BC}{2}$, а с другой стороны она равна $\frac{r \cdot (AB + BC + AC)}{2} =$

$= \frac{3r \cdot BC}{2}$. Таким образом, $r = \frac{AH}{3}$. Это означает, что прямая, проведённая через точку пересечения медиан параллельно BC , проходит через точку I . Прямая AI — биссектриса угла $B'AC'$, поэтому отрезки $B'I$ и IC' равны, как хорды, стягивающие равные дуги. Следовательно, точка I лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $B'C'$, поэтому проведённая прямая касается проведённой окружности в точке I .

4. Пусть B_1, B_2, \dots, B_n — середины сторон $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ данного правильного n -угольника, а надрезы — это отрезки B_1C_1, \dots, B_nC_n . Рассмотрим углы $A_1B_1C_1, \dots, A_nB_nC_n$ и выберем среди них наибольший. Без ограничения общности можно считать, что угол $A_1B_1C_1$ не меньше остальных углов; в частности, $\angle A_1B_1C_1 \geq \angle A_2B_2C_2$. Докажем, что тогда отрезки B_1C_1 и B_2C_2 пересекаются (и поэтому отрезают кусок пирога).

Рассмотрим окружность с диаметром A_2O , где O — центр правильного n -угольника (рис. 82). Точки B_1 и B_2 лежат на этой окружности. Пусть луч B_2C_2 пересекает эту окружность в точке D_2 . Тогда $B_2D_2 \leq A_2D_2 = B_2C_2$, поэто-

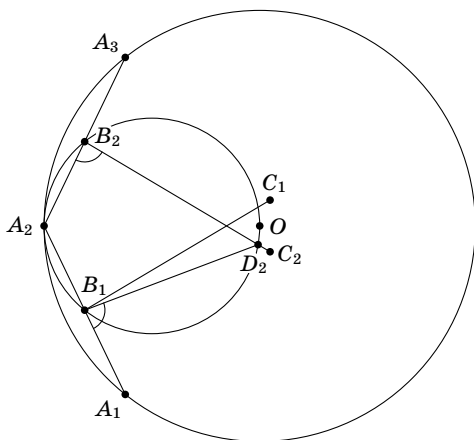


Рис. 82

му точка D_2 лежит на отрезке B_2C_2 . По предположению $\angle A_1B_1C_1 \geq \angle A_2B_2C_2 = \angle A_1B_1D_2$, поэтому луч B_1C_1 пересекает отрезок B_2C_2 . Ясно также, что точка пересечения лежит на отрезке B_1C_1 , потому что длина этого отрезка равна диаметру A_2O рассматриваемой окружности.

5. Будем называть друзьями любых двух рыцарей, не являющихся врагами. Сначала рассадим всех рыцарей за круглым столом произвольно. Пусть где-то за столом сидят рядом рыцарь A и его враг B ; для определённости будем считать, что B сидит справа от A . Покажем, что за столом есть место, где рядом сидят рыцари A' — друг A и B' — друг B , причём B' сидит справа от A' . В самом деле, рыцарь A имеет не менее n друзей; мест справа от них также не менее n , а врагов у B не более $n - 1$. Поэтому хотя бы одно из мест справа от друга A' рыцаря A занимает друг B' рыцаря B . Пересадим теперь в обратном порядке всех рыцарей, сидящих справа от A , начиная с рыцаря B и вплоть до рыцаря A' . При этом изменятся лишь пары соседей A, B и A', B' — они заменятся на пары друзей A, A' и B, B' . Таким образом, число пар сидящих рядом врагов уменьшится по крайней мере на 1. Продолжая пересаживать рыцарей таким же образом, можно уничтожить все пары сидящих рядом врагов.

1965 год (XXVIII олимпиада)

Первый тур

8 класс

1. Пусть N — центр окружности O . Тогда середины отрезков секущих, заключённых внутри окружности O и проходящих через точку M , лежат на окружности O_1 с диаметром MN . Искомая секущая b проходит через точку пересечения прямой a и окружности O_1 , лежащую внутри окружности O . Если таких точек пересечения нет, то искомым секущих тоже нет.

2. Докажем, что полученная в условии сумма S даёт тот же остаток при делении на 37, что и исходное число n . Так как число 999 делится на 37, достаточно доказать, что числа S и n дают одинаковый остаток при делении на 999. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству признака делимости на девять. А именно,

$$\begin{aligned} n - S &= \overline{a_k \dots a_0} - S = \\ &= \dots + \overline{a_{3r+2} a_{3r+1} a_{3r}} \cdot 10^{3r} + \dots + \overline{a_2 a_1 a_0} - S = \\ &= \dots + \overline{a_{3r+2} a_{3r+1} a_{3r}} \cdot (10^{3r} - 1) + \dots + \overline{a_5 a_4 a_3} \cdot 999 + \overline{a_2 a_1 a_0} \cdot 0. \end{aligned}$$

Каждое слагаемое в этой сумме делится на 999, поэтому вся сумма делится на 999. Следовательно, числа n и S дают одинаковый остаток при делении на 999.

3. Пусть O — точка пересечения прямых AB и CD . Отложим на луче OA отрезок OX , равный AB , а на луче OC — отрезок OY , равный CD . Для любой точки M площади треугольников ABM и OXM равны; площади треугольников CDM и OYM тоже равны. Множество точек P , для которых площади треугольников OXP и OYP равны, состоит из двух прямых: прямой, проходящей через точку O и середину отрезка XY , и прямой, проходящей через точку O параллельно прямой XY . В качестве точки M можно взять точку пересечения прямой a с любой из этих прямых.

4. Предположим, что все команды сыграли разное число матчей. Количество матчей, сыгранных некоторой командой, может принимать одно из 30 значений (от 0 до 29). По предположению все эти значения разные, поэтому каждое такое значение должно встретиться. Но этого не может быть, потому что тогда есть команда, которая не сыграла ни одного матча, и есть команда, сыгравшая со всеми остальными командами.

9 класс

1. Пусть $\overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$ — данное число. По доказанному в задаче 2 для 8 класса признаку делимости на 37, меняя местами в этом числе цифры, номера которых отличаются на 3, мы снова получим число, которое тоже делится на 37. Следовательно, число $\overline{a_5 a_4 a_0 a_2 a_1 a_3}$ тоже делится на 37.

2. Предположим, что искомая точка O построена. Пусть прямые AO и BO пересекают стороны BC и CA в точках A_1 и B_1 . Тогда $AB_1 : B_1C = S_{AOB} : S_{BOC} = 1 : 2$ и $CA_1 : A_1B = S_{COA} : S_{AOB} = 3 : 1$. Из этого вытекает следующее построение. Сначала строим точки A_1 и B_1 , а затем строим точку пересечения прямых AA_1 и BB_1 .

3. По свойству биссектрисы $BM : MA = BC : CA$ и $BK : KC = BA : AC$. Поэтому $BM : MA < BK : KC$, т. е.

$$\frac{AB}{AM} = 1 + \frac{BM}{MA} < 1 + \frac{BK}{KC} = \frac{CB}{CK}.$$

Следовательно, точка M более удалена от прямой AC , чем точка K , т. е. $\angle AKM > \angle KAC = \angle KAM$ и $\angle KMC < \angle MCA = \angle MCK$. Из того, что $\angle AKM > \angle KAM$, следует, что $AM > MK$ (против большей стороны треугольника лежит больший угол). Аналогично доказывается, что $MK > KC$.

4. Решение аналогично решению задачи 4 для 8 класса.

5. Выберем среди всех кусков ковровой дорожки, покрывающих левый конец коридора, тот, у которого правый конец самый правый, и обозначим этот кусок I_1 . После того как выбран кусок I_k , выберем среди всех кусков, покрывающих его правый конец, тот, у которого правый конец самый правый. Таким образом выберем несколько кусков, полностью покрывающих коридор. Кусок I_{k+2} не имеет общих точек с I_k , так как иначе вместо I_{k+1} мы должны были бы выбрать I_{k+2} . Поэтому каждая точка ко-

ридора покрыта не более чем двумя кусками I_k , причём какая-то часть левого конца коридора покрыта только куском I_1 . Следовательно, сумма длин выбранных кусков меньше удвоенной длины коридора.

10 класс

1. Пусть окружность O_1 касается сторон AC и AB треугольника ABC , окружность O_2 касается сторон BC и AB , O — вписанная окружность. Обозначим радиусы окружностей O , O_1 и O_2 через r , r_1 и r_2 . Пусть AB_1C_1 и A_2BC_2 — треугольники, в которые переходит треугольник ABC при гомотетиях с центрами A и B и коэффициентами гомотетии r_1/r и r_2/r соответственно. Тогда окружности O_1 и O_2 являются вписанными для треугольников AB_1C_1 и A_2BC_2 . Следовательно, эти треугольники пересекаются, так как иначе окружности O_1 и O_2 не имели бы общих точек. Поэтому $AB_1 + A_2B > AB$, т. е. $r_1 + r_2 > r$.

2. Из признака делимости на 37, доказанного в задаче 2 для 8 класса, следует, что, меняя местами цифры, номера которых различаются на три, мы снова получаем число, делящееся на 37. Если из данного числа такими замещениями невозможно получить другое число, то данное число имеет вид $\overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc}$. Так как числа 37 и 1001 взаимно просты и данное число делится на 37, число \overline{abc} тоже делится на 37. Следовательно, число $10 \cdot \overline{abc} = \overline{abc0}$ делится на 37. По признаку делимости на 37 число $\overline{bca} = \overline{a + bca0}$ делится на 37, а значит, число $\overline{abcbsca}$ делится на 37. Поскольку в исходном числе есть хотя бы две различные цифры, построенное число отлично от исходного, что и требовалось доказать.

3. Пусть отрезок BC постоянной длины скользит по сторонам угла с вершиной A . Рассмотрим описанную окружность треугольника ABC . Её радиус $R = \frac{BC}{2 \sin A}$ постоянен.

Рассматриваемый отрезок перпендикуляра от его основания до точки пересечения с биссектрисой угла — это отрезок, соединяющий середину дуги BC с серединой хорды BC . Ясно, что он имеет постоянную длину.

4. См. решение задачи 1 для 11 класса.

5. Решим задачу в общем случае, когда квадрат проколот в n точках. Пусть число полученных треугольников равно x . С одной стороны, сумма углов всех этих треугольников равна $x \cdot 180^\circ$. С другой стороны, она равна $360^\circ + n \cdot 360^\circ$ (сумма углов квадрата и сумма углов 360° при n вершинах). Следовательно, $x = 2n + 2$.

Пусть число проведенных разрезов равно y . С одной стороны, число сторон полученных треугольников равно $3x$. С другой стороны, оно равно $4 + 2y$ (каждая сторона квадрата учитывается один раз, а каждый разрез — два раза). Следовательно, $y = \frac{3x - 4}{2} = 3n + 1$.

11 класс

1. Требуется доказать, что если $|x| \geq 2$, то равенство $x^{n_1} \pm x^{n_2} \pm \dots \pm x^{n_r} = 0$, где $n_1 > n_2 > \dots > n_r \geq 0$ — целые числа, не может выполняться. Пусть $q = |x|$. Тогда

$$q^{n_1} = |q^{n_2} \pm q^{n_3} \pm \dots \pm q^{n_r}| \leq q^{n_2} + q^{n_2-1} + \dots + q + 1 = \frac{q^{n_2+1} - 1}{q - 1}.$$

Докажем, что если $q \geq 2$, то $\frac{q^{n_2+1} - 1}{q - 1} < q^{n_2+1}$. Действительно, $q^{n_2+2} \geq 2q^{n_2+1} > 2q^{n_2+1} - 1$, поэтому $q^{n_2+2} - q^{n_2+1} > q^{n_2+1} - 1$. Поделив обе части этого неравенства на $q - 1$, получаем требуемое. Таким образом, $q^{n_1} < q^{n_2+1} \leq q^{n_1}$. Полученное противоречие показывает, что $x^{n_1} \pm x^{n_2} \pm \dots \pm x^{n_r} \neq 0$.

2. Предположим, что мы построили окружности S_1, S_2 и S_3 , попарно касающиеся в данных точках: S_1 и S_2 касаются в точке C ; S_1 и S_3 — в точке B ; S_2 и S_3 — в точке A .

Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры окружностей S_1, S_2 и S_3 . Тогда точки A, B и C лежат на сторонах треугольника $O_1O_2O_3$ или на их продолжениях, причём $O_1B = O_1C$, $O_2C = O_2A$ и $O_3A = O_3B$. Поэтому точки A, B и C являются точками касания вписанной или внеписанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$ со сторонами.

Из этого вытекает следующее построение. Строим описанную окружность треугольника ABC и проводим к ней касательные в точках A, B и C . Точки пересечения этих касательных являются центрами искомых окружностей.

3. Заметим сначала, что любой корень такого уравнения не превосходит $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Действительно, если $x > \alpha$, то

$$x^2 + px + c > \alpha^2 - \alpha - 1 = 0.$$

Кроме того, любой такой корень не превосходит $-\alpha$. Действительно, если x — корень уравнения $x^2 + px + c = 0$, то $-x$ — корень уравнения $x^2 - px + c = 0$, поэтому $-x \leq \alpha$.

Докажем теперь, что любое число между $-\alpha$ и α может быть корнем такого уравнения. Рассмотрим сначала уравнения вида $x^2 - px - 1 = 0$, $0 \leq p \leq 1$. Большой корень такого уравнения равен $x(p) = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}$. Поскольку $x(0) = 1$, а $x(1) = \alpha$, любое число между 1 и α является корнем одного из таких уравнений. Следовательно, любое число между $-\alpha$ и -1 является корнем уравнения вида $x^2 + px - 1 = 0$. Осталось доказать, что любое число между -1 и 1 является корнем уравнения вида $x^2 + px + c = 0$. Но число x_0 является корнем уравнения $x^2 + (-x_0)x + 0 = 0$.

4. Пусть C — точка окружности O , диаметрально противоположная точке A , а K — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BC .

Возьмём произвольную точку M на окружности O . Пусть H — основание высоты, проведённой из точки A к прямой

ВМ. Во-первых, так как угол *АНВ* прямой, точка *Н* лежит на сфере, построенной на отрезке *АВ* как на диаметре.

Во-вторых, $AB \perp CM$ (прямая *АВ* перпендикулярна к плоскости окружности *О*, поэтому она перпендикулярна и к прямой *СМ*, лежащей в этой плоскости) и $CM \perp AM$, поэтому прямая *СМ* перпендикулярна плоскости *ВАМ*, в частности, $CM \perp AN$. Кроме того, $AN \perp BM$, поэтому прямая *АН* перпендикулярна плоскости *СВМ*; в частности, она перпендикулярна прямой *КН*. Таким образом, точка *Н* лежит на сфере, построенной на отрезке *АК* как на диаметре.

Две полученные сферы пересекаются по окружности, которая, за исключением точки *А*, и есть искомое множество.

5. Допустим, что это возможно. Будем говорить, что пара цифр *a* и *b* образует *беспорядок*, если карточки, на которых написаны эти цифры чередуются, т. е. идут либо в порядке *abab*, либо в порядке *baba*. Заметим, что чётность числа беспорядков, в которых участвует цифра *a* совпадает с чётностью самой цифры *a*. Действительно, все карточки, лежащие между карточками, на которых написана цифра *a*, разбиваются на те, с которыми цифра *a* образует беспорядок и пары карточек, на которых написаны одинаковые цифры. Следовательно, чётность общего числа участий карточек в беспорядках совпадает с чётностью числа $1 + 2 + \dots + 9 = 45$. С другой стороны, это число должно быть в два раза больше общего числа беспорядков (поскольку каждый беспорядок был учтён дважды). Полученное противоречие доказывает, что описанная в условии ситуация невозможна.

Второй тур

8 класс

1. Пусть $a_n = a_m$, причём $n > m$. Рассмотрим последовательность $b_k = a_k - a_{n+m-k}$. Легко проверить, что каж-

дый член этой последовательности также равен четверти суммы двух соседних и, кроме того, $b_n = b_m = 0$. Покажем, что $b_k = 0$ для любого k . Предположим, что $b_{m+1} > 0$. Тогда $b_{m+2} = 4b_{m+1} - b_m = 4b_{m+1} > b_{m+1}$, $b_{m+3} = 4b_{m+2} - b_{m+1} > > 3b_{m+2} > b_{m+2}$ и т. д., т. е. начиная с члена b_{m+1} последовательность возрастает. В частности, $b_n > 0$, чего не может быть. Случай, когда $b_{m+1} < 0$, рассматривается аналогично. Таким образом, $b_m = b_{m+1} = 0$, поэтому $b_k = 0$ для всех k , т. е. $a_k = a_{n+m-k}$ для всех k , поэтому в последовательности есть бесконечное число пар равных между собой чисел.

2. Пусть за одну секунду шар смещается на 1 по горизонтали и на 1 по вертикали. Тогда каждые 26 секунд шар ударяется о горизонтальную сторону бильярда, а каждые 1965 секунд — о вертикальную. Шар попадает в лузу, если он одновременно ударяется о вертикальную и о горизонтальную стороны. Поскольку числа 26 и 1965 взаимно просты, это впервые произойдет через $26 \cdot 1965$ секунд. Это будет четное соударение с вертикальной стороной бильярда и нечетное соударение с горизонтальной стороной, т. е. шар попадет в верхнюю левую лузу.

3. Возьмем 1965 дисков, раскрашенных так же, как меньший из наших дисков, и положим их на больший диск так, чтобы они занимали все возможные положения. Тогда над каждым окрашенным сектором большего диска расположено 200 окрашенных секторов, т. е. всего имеется 200^2 пар совпадающих окрашенных секторов. Пусть имеется n положений меньшего диска, при которых с большим диском совпадает не менее 21 пары окрашенных секторов. Тогда число совпадений окрашенных секторов не меньше $21n$. Таким образом $21n \leq 200^2$, поэтому $n < 1904,8$. Так как n — целое число, то $n \leq 1904$. Следовательно, по крайней мере при $1965 - 1904 = 61$ положениях совпадает не более 20 пар окрашенных секторов.

4. Введём систему координат вдоль улиц, так что место, где появляется гангстер, будет иметь координату 0, координаты вертикальных границ домов будут $6n \pm 1$; тогда координаты полицейских в начальный момент будут $18k$, где k — целые числа (рис. 83).

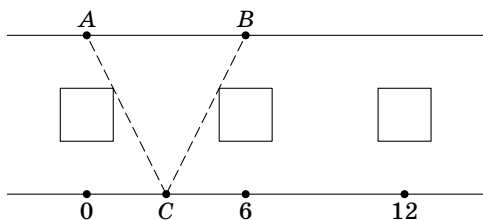


Рис. 83

Если гангстер будет двигаться в ту же сторону, что и полицейские, то его заметит полицейский на пути из точки A в точку B . Действительно, во время этого движения полицейский видит точку C , поэтому гангстер не может пройти через точку C незамеченным. А из точки B полицейский видит весь отрезок от начала координат до точки C .

Предположим теперь, что гангстер движется в направлении, противоположном направлению движения полицейских, со скоростью αv . Пусть в момент t_0 строго напротив него находится какой-либо из полицейских. Это означает, что $(v + \alpha v)t_0 = 18k$, т. е. $t_0 = \frac{18k}{v + \alpha v}$. В этот момент гангстер находится на расстоянии $\alpha v t_0 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \cdot 18k$ от начала координат. Ясно, что в такой момент полицейский заметит гангстера, если они не разделены домом. Поэтому, чтобы полицейские не заметили гангстера, для любого целого числа k должно найтись такое целое число n_k , что

$$6n_k - 1 \leq \frac{\alpha}{1 + \alpha} \cdot 18k \leq 6n_k + 1,$$

т. е.

$$n_k - \frac{1}{6} \leq \frac{3\alpha}{1 + \alpha} \cdot k \leq n_k + \frac{1}{6}.$$

В таком случае число $\frac{3\alpha}{1+\alpha}$ должно быть целым. Действительно, если оно равно $n_1 + \varepsilon$, где $\frac{1}{6} \leq \varepsilon \leq -\frac{1}{6}$ и $\varepsilon \neq 0$, то для некоторого целого k число $|k\varepsilon|$ больше $\frac{1}{6}$, но меньше 1.

Легко проверить, что число $\frac{3\alpha}{1+\alpha}$ целое, только если $\alpha = \frac{1}{2}$ или $\alpha = 2$.

Покажем, что если $\alpha = 2$, то полицейские не заметят гангстера. Наибольшее расстояние (вдоль улицы), на котором полицейский может увидеть гангстера равно 12 (рис. 84). Поэтому в каждый момент времени нас инте-

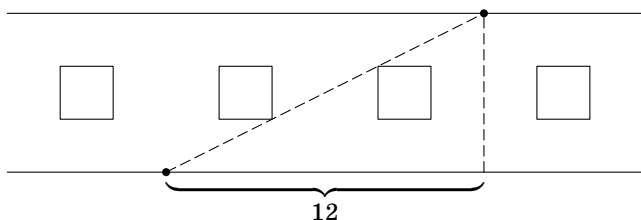


Рис. 84

ресуют не более двух полицейских. Но для каждого из этих двух полицейских в любой момент времени отрезок, соединяющий полицейского с гангстером проходит через фиксированную точку — середину стороны дома (рис. 85). Этот дом загораживает гангстера от полицейского.

Для $\alpha = \frac{1}{2}$ рассуждения аналогичны, нужно только перевернуть рисунок 85.

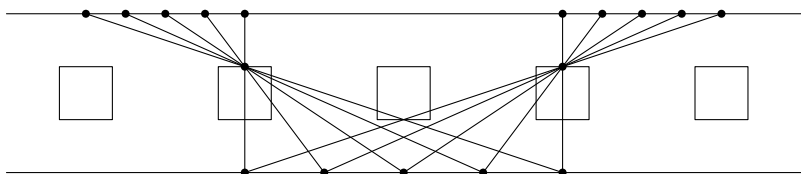


Рис. 85

9 класс

1. Сначала положим на правую чашку весов по одной монете из первых пяти мешков, а на левую — по одной монете из следующих пяти мешков. Если весы пришли в равновесие, то фальшивые монеты в одиннадцатом мешке. Если же этого не случилось, то разность масс, которую показывают весы, — это разность между массой настоящей и фальшивой монет, а монеты в одиннадцатом мешке настоящие. В этом случае вторым взвешиванием положим на правую чашку одну монету из первого мешка, две монеты из второго мешка, ..., десять монет из десятого мешка, а на левую чашку — $1 + \dots + 10 = 55$ монет из одиннадцатого мешка. Разделив разность, которую покажут весы, на разность масс, полученную в первом взвешивании, мы получим номер мешка с фальшивыми монетами.

2. Будем считать, что шарик вылетел из левого нижнего угла бильярда в нулевой момент времени и попал в середину горизонтальной стороны. Пусть шарик ударяется о горизонтальную сторону бильярда каждые a секунд, а о вертикальную сторону — каждые b секунд. Тогда соударение с серединой горизонтальной стороны произошло в момент времени, который, с одной стороны, имеет вид ka , а с другой стороны — вид $\left(l + \frac{1}{2}\right)b$, где k и l — натуральные числа. Предположим, что в какой-то другой момент времени шарик попал в середину противоположной стороны бильярда. Этот момент времени имеет вид $k'a = \left(l' + \frac{1}{2}\right)b$, где числа k и k' разной чётности. Следовательно, между этими событиями прошло $(k' - k)a = (l' - l)b$ секунд. Деля это равенство на равенство $k'a = \left(l' + \frac{1}{2}\right)b$, получаем

$$\frac{k' - k}{2k'} = \frac{l' - l}{2l' + 1}.$$

Но это равенство невозможно, поскольку числа $k' - k$ и $2l' + 1$ нечётные.

5. Чтобы не рассматривать различные варианты расположения точек, воспользуемся свойством ориентированных углов. Пусть прямые FG , GE и EF проходят через точки A , B и C , причём треугольник EFG равносторонний, т. е. $\angle(GE, EF) = \angle(EF, FG) = \angle(FG, GE) = \pm 60^\circ$ (знак плюс берётся в том случае, когда прямая EG переходит в прямую EF при повороте на 60° против часовой стрелки, а знак минус — когда по часовой стрелке). Тогда $\angle(BE, EC) = \angle(CF, FA) = \angle(AG, GB) = \pm 60^\circ$. Выбрав один из знаков, получим три окружности S_E , S_F и S_G , на которых должны лежать точки E , F и G . Любая точка E окружности S_E однозначно определяет треугольник EFG .

Пусть O — центр треугольника EFG ; P , R и Q — точки пересечения прямых OE , OF и OG с соответствующими окружностями S_E , S_F и S_G (на рисунке 86 изображена точка P). Докажем, что P , Q и R — центры правильных треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC (для одного семейства описанных треугольников эти треугольники построены внешним образом, для другого внутренним; на рисунке 86 изображён правильный треугольник, центром которого является точка P), а точка O лежит

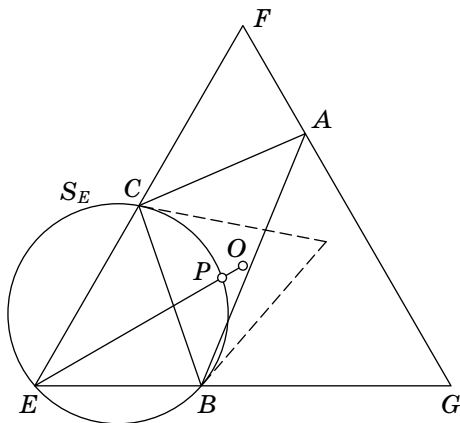


Рис. 86

на описанной окружности треугольника PQR . Ясно, что $\angle(CB, BP) = \angle(CE, EP) = \angle(EF, EO) = \mp 30^\circ$, а $\angle(BP, CP) = \angle(BE, EC) = \angle(GE, EF) = \pm 60^\circ$. Поэтому $\angle(CB, CP) = \angle(CB, BP) + \angle(BP, CP) = \pm 30^\circ$. Следовательно, P — центр правильного треугольника со стороной BC . Для точек Q и R доказательство аналогично.

Треугольник PQR равносторонний, причём его центр совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC . Чтобы доказать это, сначала докажем следующее вспомогательное утверждение. Пусть на сторонах AB и AC треугольника ABC внешним образом построены прямоугольные треугольники ABC_1 и AB_1C , причём $\angle C_1 = \angle B_1 = 90^\circ$, $\angle ABC_1 = \angle ACB_1 = \varphi$; M — середина BC . Тогда $MB_1 = MC_1$ и $\angle B_1MC_1 = 2\varphi$. Действительно, пусть B_2 и C_2 — середины сторон AB и AC . Тогда $MB_2 = AC/2 = C_2B_1$, $MC_2 = AB/2 = B_2C_1$ и $\angle C_1B_2M = \angle C_1B_2B + \angle BB_2M = \angle B_1C_2C + \angle CC_2M = \angle B_1C_2M$. Следовательно, $\triangle MC_2B_1 = \triangle C_1B_2M$, а значит, $MC_1 = MB_1$. Кроме того, $\angle B_2MC_1 + \angle C_2MB_1 = \angle C_2B_1M + \angle C_2MB_1 = 180^\circ - \angle MC_2B_1$, а $\angle MC_2B_1 = \angle A + \angle CC_2B_1 = \angle A + (180^\circ - 2\varphi)$. Следовательно, $\angle B_1MC_1 = \angle B_2MC_2 + 2\varphi - \angle A = 2\varphi$. (Случай, когда $\angle C_1B_2B + \angle BB_2M > 180^\circ$, разбирается аналогично.)

Теперь уже можно доказать требуемое утверждение. Возьмём на сторонах AB и AC такие точки B' и C' , что $AB' : AB = AC' : AC = 2 : 3$. Середина M отрезка $B'C'$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC . Построим на сторонах AB' и AC' внешним образом прямоугольные треугольники $AB'C_1$ и AB_1C' с углом $\varphi = 60^\circ$. Тогда B_1 и C_1 — центры правильных треугольников, построенных на сторонах AB и AC ; с другой стороны, как только что было доказано, $MB_1 = MC_1$ и $\angle B_1MC_1 = 120^\circ$. (Все утверждения остаются верными и для треугольников, построенных внутренним образом).

Легко проверить, что $\angle(PR, RQ) = \mp 60^\circ = \angle(OE, OG) = \angle(OP, OQ)$, т. е. точка O лежит на описанной окружности треугольника PQR .

10 класс

1. В задаче 1 для 9 класса показано, как определить мешок с фальшивыми монетами за два взвешивания.

За одно взвешивание этот мешок определить нельзя. Действительно, при любом взвешивании может случиться, что перевешивает чашка, на которой число монет не меньше, чем на другой чашке, а тогда мы не сможем даже определить, на какой из двух чашек есть фальшивые монеты.

2. Предположим, что этот процесс бесконечен. Тогда найдутся такие номера слоёв i и j , что i -й слой совпадает с j -м, а $(i+1)$ -й слой совпадает с $(j+1)$ -м, причём $i < j$. Из условия укладки кубиков легко заметить, что $(i-1)$ -й слой восстанавливается однозначно и, следовательно, совпадает с $(j-1)$ -м, $(i-2)$ -й с $(j-2)$ -м и т. д. В частности, второй слой совпадает с $(j-i+2)$ -м, а первый — с $(j-i+1)$ -м. Следовательно, у каждого кубика из $(j-i+1)$ -го слоя нужное число соседей другого цвета среди кубиков $(j-i+1)$ -го и $(j-i+2)$ -го слоёв, поскольку у каждого кубика из первого слоя нужное число соседей среди кубиков первого и второго слоёв. Кроме того, по построению у каждого кубика из $(j-i+1)$ -го слоя нужное число соседей другого цвета среди кубиков $(j-i)$ -го, $(j-i+1)$ -го и $(j-i+2)$ -го слоёв. Поэтому под каждым кубиком из $(j-i+1)$ -го слоя находится кубик того же самого цвета, т. е. $(j-i)$ -й слой совпадает с $(j-i+1)$ -м. Но это означает, что у каждого кубика из $(j-i)$ -го слоя нужное число соседей другого цвета среди кубиков $(j-i)$ -го и $(j-i+1)$ -го слоёв, т. е. процесс должен было остановиться на $(j-i)$ -м слое.

3. Изменив, если надо, единицу измерения длины, можно считать, что числа p и q взаимно просты. Далее, изменив скорость шарика, можно считать, что шарик за одну секунду смещается на 1 по вертикали и на 1 по горизонтали. Тогда шарик каждые p секунд ударяется о горизон-

тальную сторону бильярда, а каждые q секунд его абсцисса кратна q . Заметим, что шарик попадает в лузу тогда, когда эти события происходят одновременно. Поскольку числа p и q взаимно просты, впервые это произойдёт через pq секунд после вылета шарика из угла бильярда. Поскольку число p нечётно, абсцисса шарика в этот момент будет равна q , т. е. шарик попадёт в одну из средних луз.

4. Пусть в строчку выписаны числа a_1, a_2, \dots, a_{2n} . Предположим, что все числа $a_1 + 1, a_2 + 2, \dots, a_{2n} + 2n$ дают разные остатки при делении на $2n$. Тогда эти остатки равны $1, 2, \dots, 2n$. Поэтому числа $(a_1 + 1) + (a_2 + 2) + \dots + (a_{2n} + 2n) = 2(1 + 2 + \dots + 2n)$ и $1 + 2 + \dots + 2n$ дают одинаковые остатки при делении на $2n$. Приходим к противоречию, поскольку число $1 + 2 + \dots + 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n^2 + n$ при делении на $2n$ даёт остаток n .

5. Назовём самый большой ящик *ящиком ранга n* , следующие по величине два ящика — *ящиками ранга $n - 1$* и т. д. до ящиков *ранга 1*, в которых лежат монеты. Разность числа гербов и решек в каком-нибудь ящике назовём *дефектом* этого ящика. Дефект самого большого ящика обозначим d . Докажем, что всегда найдётся ящик, при переворачивании которого модуль дефекта самого большого ящика уменьшается по крайней мере вдвое; тогда задача будет решена, так как $|d| \leq 2^n$ и d всегда чётно, поскольку общее число монет чётно.

Будем считать, что $d > 0$ (иначе надо рассмотреть разность не гербов и решек, а решек и гербов). Предположим, что при переворачивании любого ящика абсолютная величина дефекта самого большого ящика будет больше $\frac{d}{2}$. При переворачивании всех монет в ящике, дефект которого равен d_1 , дефект самого большого ящика уменьшается на $2d_1$, т. е. становится равным $d - 2d_1$. По предположению $|d - 2d_1| > \frac{1}{2}d$, т. е. либо $d_1 < \frac{d}{4}$, либо $d_1 > \frac{3d}{4}$. Дока-

жем индукцией по рангу ящика, что неравенство $d_1 > \frac{3d}{4}$ не может выполняться, т. е. для любого ящика выполняется неравенство $d_1 < \frac{d}{4}$. Дефект любого ящика ранга 1 равен ± 1 , поэтому он меньше $\frac{3d}{4} \geq \frac{3 \cdot 2}{4} = 1,5$. Следовательно, дефект любого ящика ранга 1 меньше $\frac{d}{4}$. Отсюда следует, что дефект любого ящика ранга 2 не больше $\frac{d}{2}$, поэтому он меньше $\frac{d}{4}$. Продолжая это рассуждение, получаем, что дефект любого ящика меньше $\frac{d}{4}$. В частности, дефект ящика ранга n меньше $\frac{d}{4}$, хотя он равен d и $d > 0$. Получено противоречие.

11 класс

1. Заметим сначала, что число P либо равно единице, либо чётно. Действительно, если число $P > 1$ нечётно, то число $P^P + 1 > 2$ чётно, а значит, не простое.

Заметим, далее, что если число P имеет нечётный простой делитель (т. е. $P = pr$, где p — нечётное простое число), то число $P^P + 1 = (P^r)^p + 1^p = (P^r + 1)(P^{r-1} - P^{r-2} + \dots + 1)$ делится на $P^r + 1$, а значит, не простое. Следовательно, $P = 2^k$. Если число k имеет нечётный простой делитель p (т. е. $k = ps$), то число $P^P + 1 = 2^{k2^k} + 1 = (2^{s2^k})^p + 1$ делится на $2^{s2^k} + 1$. Таким образом, $P = 2^{2^l}$.

Если $l = 0$, то $P = 2$ и число $P^P + 1 = 5$ простое. Если $l = 1$, то $P = 4$ и число $P^P + 1 = 257$ простое. Если же $l \geq 2$, то $P \geq 16$ и $P^P + 1 > P^P \geq 16^{16} = 2^{64} = (2^{10})^6 \cdot 2^4 > 1000^6 \cdot 10 = 10^{19}$, т. е. количество цифр в десятичной записи этого числа больше 19.

2. Докажем, что числа n^n и $(n + 20)^{n+20}$ оканчиваются на одну и ту же цифру. Для этого докажем, что они дают одинаковые остатки при делении на 2 и на 5. Первое следует из того, что чётность числа k^k совпадает с чётностью числа k .

Докажем теперь, что эти числа дают одинаковые остатки при делении на 5. Записывая остатки при делении на 5 в виде $0, \pm 1$ и ± 2 , легко проверить, что $n^5 \equiv n \pmod{5}$. Следовательно, $n^n \equiv n^{n+4k} \pmod{5}$, откуда

$$n^n \equiv n^{n+20} \equiv (n+20)^{n+20} \pmod{5}.$$

3. Пусть A и B — данные точки, M — точка пересечения отрезка AB и плоскости P . Рассмотрим произвольную сферу, проходящую через точки A и B ; она высекает на плоскости P окружность. Проведём через точку M диаметр CD этой окружности. Нас интересует, когда длина отрезка CD наименьшая. При этом величина $CM \cdot MD = AM \cdot MB$ постоянна, поэтому величина $CD = CM + MD$ наименьшая, когда $CM = MD$. Таким образом, центр искомой сферы лежит на перпендикуляре к плоскости P , проходящем через точку M ; кроме того, он лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему.

4. Докажем по индукции более сильное утверждение, состоящее из двух частей: 1) любые две точки множества D можно соединить ломанной, целиком принадлежащей D ; 2) любая сторона n -угольника имеет общую точку с множеством D . Это утверждение мы будем доказывать для произвольного n -угольника, который может быть и выпуклым, причём $n \geq 4$.

При $n = 4$ доказательство очевидно. Пусть теперь $n \geq 5$. Существует диагональ, целиком лежащая внутри n -угольника (см. «Основные факты»). Разрежем n -угольник вдоль этой диагонали. К каждой из полученных при этом частей можно применить предположение индукции (в случае, когда одна из этих частей — треугольник, достаточно применить предположение индукции к другой части). Из утверждений 1 и 2 для каждой из полученных частей непосредственно следуют утверждения 1 и 2 для всего n -угольника.

5. Среди всех строк и всех столбцов таблицы выберем строку или столбец с наименьшей суммой чисел. Пусть для определённости это будет строка и сумма чисел в ней равна k . Если $k \geq M$, то сумма всех чисел в таблице не меньше M^2 , поэтому будем считать, что $k < M$.

В выбранной строке не больше k отличных от нуля чисел, поэтому в ней не меньше $M - k$ нулей. Сумма чисел в каждом столбце, содержащем один из этих нулей, не меньше $M - k$, потому что сумма чисел в этом столбце и в выбранной строке не меньше M . Напомним, что в каждом другом столбце сумма чисел не меньше k .

Возьмём $M - k$ столбцов, в каждом из которых сумма чисел не меньше $M - k$; в каждом из k остальных столбцов сумма чисел не меньше k . Поэтому сумма чисел в таблице не меньше $(M - k)^2 + k^2$. Минимум этого выражения достигается при $k = \frac{M}{2}$, причём он равен $\frac{M^2}{2}$.

1966 год (XXIX олимпиада)

Первый тур

8 класс

1. Пусть вершины P и S прямоугольника $PQRS$ лежат на стороне AB , а вершины Q и R — на сторонах AC и BC соответственно; пусть, далее, O — середина высоты CH , M — середина отрезка AB , D и E — середины сторон RQ и PS соответственно.

Точки D и E лежат на прямых AO и BO соответственно. Середина отрезка DE является центром прямоугольника $PQRS$. Ясно, что она лежит на отрезке OM . Поэтому искомым ГМТ является отрезок OM , за исключением его концов.

2. Заметим сначала, что числа, делящиеся на 20, не подходят. Действительно, после умножения на любое целое число мы получим число, делящееся на 20. Следовательно

но, последняя цифра этого числа будет нулём, а предпоследняя будет чётной, а значит, не может быть равна 5.

Докажем теперь, что для любого числа N , не делящегося на 20, существует число, при умножении на которое получается число, предпоследняя цифра которого равна 5. Для этого докажем, что множество остатков от деления чисел вида kn на m есть множество остатков, делящихся на $d = \text{НОД}(m, n)$. Действительно, из алгоритма Евклида нахождения НОД следует, что $d = am + bn$ для некоторых целых a и b (см. «Основные факты»). Докажем, что мы можем получить любой остаток вида ld . Умножив обе части равенства на l , получим $ld = alm + bnl$, а значит, число bnl даёт остаток ld при делении на m . С другой стороны, остатка, не делящегося на d , получиться не может.

Теперь нам осталось рассмотреть различные значения $d = \text{НОД}(100, N)$. Если число d равно одному из чисел 1, 2, 5, 10, 25, 50, то среди чисел вида Nk найдётся число, оканчивающееся на 50. Если же $d = 4$, то среди этих чисел встретится число 52.

5. В цепи все цифры (за исключением, быть может, двух крайних) встречаются парами, а у нас осталось нечётное число экземпляров каждой цифры от 0 до 5.

9–11 класс

1. Рассмотрим сначала случай, когда одно из чисел x, y, z, t равно 1. Если $x = 1$, то $z + t = y = zt - 1$, откуда $(z - 1)(t - 1) = zt - z - t + 1 = 2$. Следовательно, одно из чисел z, t равно 2, а другое равно 3. Итак, в этом случае получаем следующие решения: (1, 5, 2, 3), (5, 1, 2, 3), (1, 5, 3, 2), (5, 1, 3, 2), (2, 3, 1, 5), (2, 3, 5, 1), (3, 2, 1, 5), (3, 2, 5, 1).

Пусть теперь все числа x, y, z, t больше 1. Тогда

$$(x - 1)(y - 1) \geq 1,$$

откуда $xy \geq x + y$. Аналогично $zt \geq z + t$. Складывая эти

неравенства, получаем $xy + zt \geq x + y + z + t$. С другой стороны, складывая уравнения данной системы, получаем $xy + zt = x + y + z + t$. Следовательно, оба неравенства $xy \geq x + y$ и $zt \geq z + t$ на самом деле есть равенства, т. е. $x = y = z = t = 2$.

2. Пусть $B_k = \frac{19^k}{k!}$ и $C_k = \frac{66^k}{k!}$. Тогда $A_k = B_k + C_k$, $\frac{B_{k+1}}{B_k} = \frac{19}{k+1}$ и $\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{66}{k+1}$. Следовательно, $B_{k+1} \geq B_k$ и $C_{k+1} \geq C_k$ при $k \leq 19$ и $B_{k+1} \leq B_k$ и $C_{k+1} \leq C_k$ при $k \geq 65$. Поэтому максимальное значение A_k достигается при таком k , что $19 \leq k \leq 65$.

Заметим, что при $19 \leq k \leq 64$ выполняются неравенства

$$\frac{C_{k+1}}{C_k} \geq \frac{66}{65} \quad \text{и} \quad \frac{B_k}{C_k} = \left(\frac{19}{66}\right)^k < \left(\frac{1}{3}\right)^{19} < \frac{1}{65}.$$

Следовательно,

$$A_{k+1} - A_k = C_{k+1} - C_k + B_{k+1} - B_k \geq \frac{1}{65}C_k - B_k > 0.$$

Поэтому величина A_k максимальна при $k = 65$.

3. Предположим сначала, что центр O окружности лежит внутри данного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$. Рассмотрим углы A_1OA_2 , A_2OA_3 , ..., A_5OA_1 . В сумме эти пять углов дают 2π , поэтому один из них, например A_1OA_2 , не превосходит $2\pi/5$.

Пусть лучи OA_1 и OA_2 пересекают рассматриваемую окружность в точках B_1 и B_2 . Отрезок A_1B_1 расположен в треугольнике B_1OB_2 , поэтому он не больше наибольшей стороны треугольника B_1OB_2 (см. «Основные факты»). А так как $\angle A_1OA_2 \leq 2\pi/5$, наибольшая сторона треугольника B_1OB_2 не больше стороны правильного пятиугольника, вписанного в рассматриваемую окружность.

Если точка O не принадлежит данному пятиугольнику, то углы A_1OA_2 , ..., A_5OA_1 дают в объединении угол меньше π , причём каждая точка этого угла покрыта ими дважды. Поэтому в сумме эти пять углов дают меньше 2π ,

т.е. один из них меньше $2\pi/5$. Дальнейшее доказательство аналогично предыдущему случаю.

Если точка O лежит на стороне пятиугольника, то один из рассматриваемых углов не больше $\pi/4$, а если она является его вершиной, то один из них не больше $\pi/3$. Ясно, что $\pi/4 < \pi/3 < 2\pi/5$.

4. Во-первых, заметим, что число K нечётное, так как иначе $K^K + 1$ не делится на 2. При этом для любого нечётного K число $K^K + 1$ делится на 2.

Во-вторых, заметим, что K даёт остаток 2 при делении на 3, так как только в этом случае $K^K + 1$ делится на 3. При этом, если K нечётно и даёт остаток 2 при делении на 3, то $K^K + 1$ делится на 3.

Наконец, заметим, что K даёт остаток 4 при делении на 5, так как никакие другие остатки в нечётной степени не могут равняться 4, а K^K должно быть сравнимо с 4 по модулю 5. При этом остаток от деления K^K на 5 всегда равен 4 для нечётного K , равного 4 по модулю 5.

Таким образом, остались только числа вида $29 + 30n$, и все они подходят.

5. Рассмотрим некоторую расстановку дамек, удовлетворяющую условию задачи. Докажем, что число дамек не превосходит 16. Заметим сначала, что дамку, стоящую на краю доски, не может бить никакая другая дамка, поэтому все дамки стоят во «внутреннем» квадрате 6×6 . Разделим этот квадрат на 4 квадрата 3×3 (рис. 87). Ни в одном из этих квадратов не может быть больше четырёх дамек. Действительно, пять чёрных полей есть только в двух из этих квадратов, и если в одном из них пять дамек, то на всех чёрных полях этого квадрата стоят дамки. Но тогда дамку, стоящую в центре квадрата, не бьёт ни одна дамка. Таким образом, количество дамек не превосходит $4 \cdot 4 = 16$.

Пример расстановки 16 дамек приведён на рисунке 88.

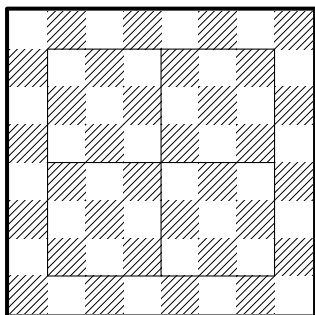


Рис. 87

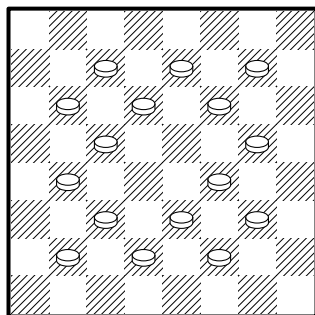


Рис. 88

Второй тур

8 класс

1. Обозначим данный отрезок AB . Проведём две окружности с центрами в точках A и B , радиус каждой из которых равен AB (рис. 89). Пусть C и D — их точки пересечения. Проведём прямую через точки C и D . Она пересекает отрезок AB в его середине O . Проведём прямую через точ-

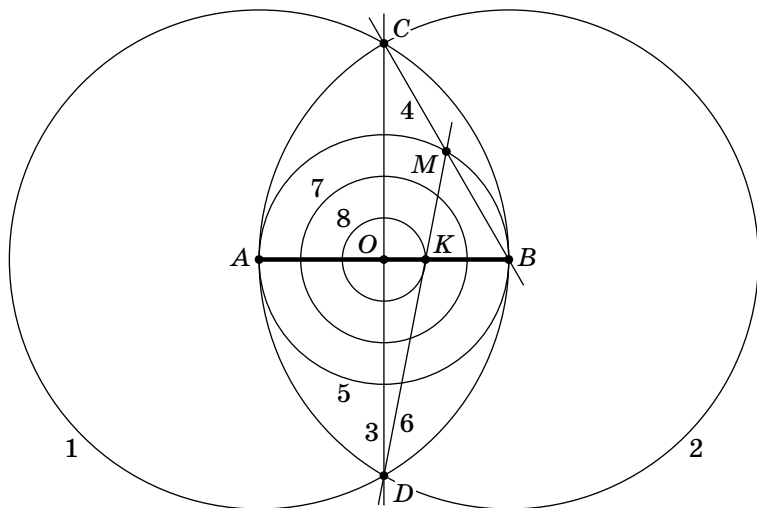


Рис. 89

ки B и C . Проведём окружность с центром в точке O и радиусом OB . Она пересекает отрезок BC в его середине M . Проведём прямую через точки D и M . Она пересекает отрезок OA в точке K , причём $OK = 2BK$, так как BO и DM — медианы треугольника BCD . Осталось провести две окружности с центрами в O и радиусами OK и BK , которые разделят отрезок на нужные части.

2. Покажем, что последовательность a_k устроена следующим образом: вначале 4 раза идёт 1, потом идут последовательно натуральные числа, причём степени двойки повторяются по 3 раза, а остальные числа по 2 раза.

Пусть $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$. Тогда $S_{k+1} = S_k + [\sqrt{S_k}]$ и $a_{k+1} = S_{k+1} - S_k$. Ясно, что S_{k+1} зависит только от S_k .

Легко проверить, что $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$. Таким образом, $S_4 = 4 = 2^2$.

Предположим, что какой-то член S_n — полный квадрат, т. е. $S_n = c^2$. Тогда $S_{n+1} = c^2 + c$, $S_{n+2} = c^2 + 2c < (c+1)^2$ и $S_{n+3} = c^2 + 3c = (c+1)^2 + c - 1$. Таким образом, $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = c$ и $a_{n+3} = c + 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда S_n — не полный квадрат, причём $a_n > a_{n-1} = b - 1$. В этом случае $S_{n-1} = (b-1)^2 + d$, где $d < 2b - 1$, и $S_n = (b-1)^2 + d + b - 1$, причём $(b-1)^2 + d + b - 1 > b^2$, т. е. $d > b$. Ясно, что $S_n = b^2 + d - b < b^2 + 2b - 1 - b < (b+1)^2$, поэтому $a_n = b$ и $S_{n+1} = b^2 + d < b^2 + 2b - 1 < (b+1)^2$. Следовательно, $a_{n+1} = b$ и $S_{n+2} = b^2 + d + b > b^2 + 2b$, поэтому $a_{n+2} = b + 1$. Таким образом, $a_{n-1} = b - 1$, $a_n = a_{n+1} = b$ и $a_{n+2} = b + 1$.

Обратим внимание на члены $S_n = b^2 + (d - b)$ и $S_{n+2} = (b+1)^2 + (d - b - 1)$: довесок к полному квадрату уменьшился ровно на 1. Таким образом, после члена $S_n = c^2$ мы получаем $S_{n+3} = c^2 + 3c = (c+1)^2 + c - 1$, затем $S_{n+5} = (c+2)^2 + c - 2$ и постепенно доходим до полного квадрата $(c+c)^2 + c - c = (2c)^2$. Это означает, что в нашем случае какой-нибудь член S_n может быть равен c^2 тогда и только тогда, когда c — степень двойки.

Итак, последовательность a_k действительно устроена так, как описано в начале решения. Чтобы вычислить a_{1000} , рассмотрим более простую последовательность $b_{2n-1} = b_{2n} = n$, $n = 1, 2, \dots$. Несложно проверить, что $a_{1000} = b_{990} = 495$. Действительно, $2^8 < 495 < 2^9$, поэтому если в последовательность b_1, \dots, b_{990} вставить 10 дополнительных членов (две единицы и 8 степеней двойки), то мы получим последовательность a_1, \dots, a_{1000} .

3. Решим сначала более простую задачу: требуется выделить один радиоактивный шар из данных n шаров. Легко указать способ, позволяющий за k проверок выделить один из $n = 2^k$ шаров: вначале делим все шары на две равные кучки по 2^{k-1} шаров в каждой, проверяем одну из них и тем самым определяем, в какой из них находится радиоактивный шар, затем эту кучку из 2^{k-1} шаров снова делим пополам, проверяем одну из половин и т. д. — при каждой проверке число шаров уменьшается вдвое, и после k проверок мы найдём радиоактивный шар. Ясно, что если $n < 2^k$, то тоже достаточно k проверок. Решением этой более простой задачи мы воспользуемся при решении исходной задачи, к которому мы сейчас переходим.

Один из возможных способов выделить оба радиоактивных шара из данных 19 шаров за 8 проверок показан на рисунке 90. Сначала мы проверяем шары 1–6. Если среди них есть радиоактивный шар, то дальше мы идём по стрелке с надписью «да», а если среди них нет радиоактивного шара, то идём по стрелке с надписью «нет». В последнем случае возникает новая задача: выделить два радиоактивных шара из данных 13 шаров (шаров 7–19) за 7 проверок. Решение этой задачи приведено ниже. Если после проверки шаров 6–11 выяснится, что среди них нет радиоактивных, то нам нужно выделить два радиоактивных шара из данных 13 шаров (шаров 1–5 и 12–19) за 6 проверок, но при дополнительном условии, что среди шаров 1–5 есть радиоактивный шар. Предлагаемый ниже

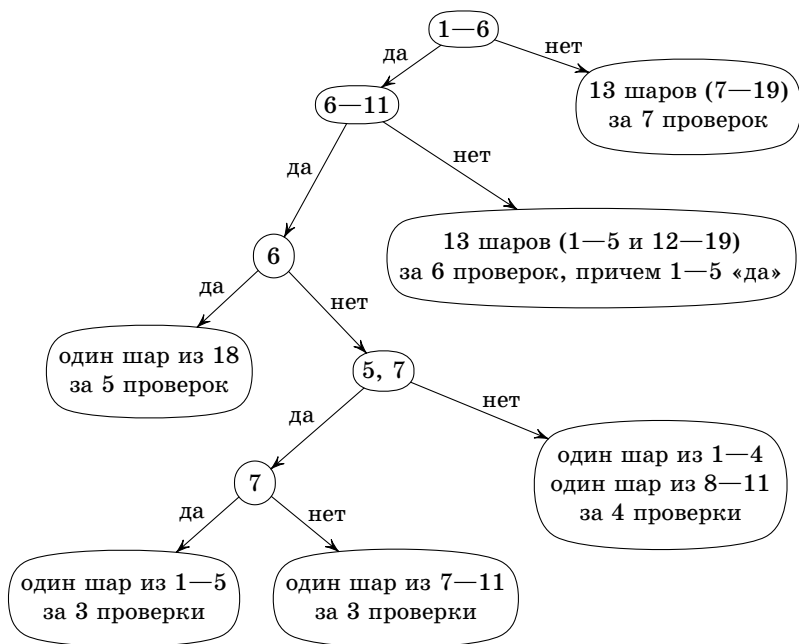


Рис. 90

способ выделить два радиоактивных шара из данных 13 шаров за 7 проверок начинается как раз с проверки шаров 1–5, поэтому он даёт также решение и этой задачи. В остальных случаях нужно лишь выделить один радиоактивный шар из некоторого набора шаров, а это делать мы уже научились.

Способ выделить оба радиоактивных шара из данных 13 шаров за 7 проверок показан на рисунке 91. При этом возникают такие задачи: выделить два радиоактивных шара из данных 8 шаров за 6 проверок и выделить два радиоактивных шара из данных 8 шаров за 5 проверок, если известно, что среди шаров 1–4 есть радиоактивный шар. Это можно сделать не только для 8 шаров, но даже для 10. Предлагаемый ниже способ начинается с проверки шаров 1–4, поэтому он даёт решение обеих задач.

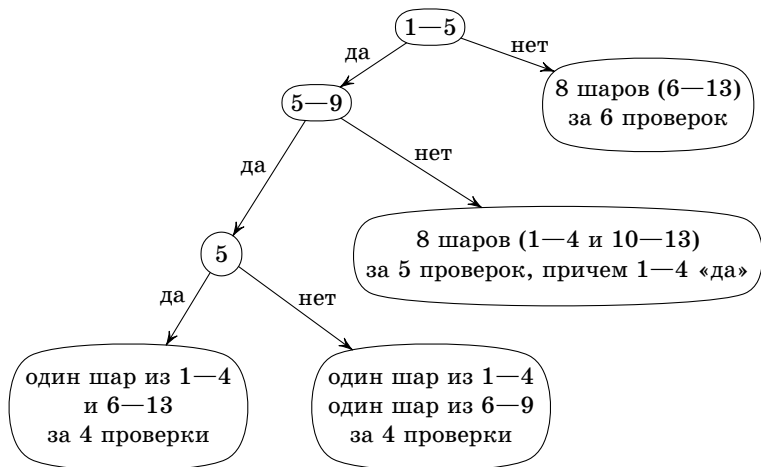


Рис. 91

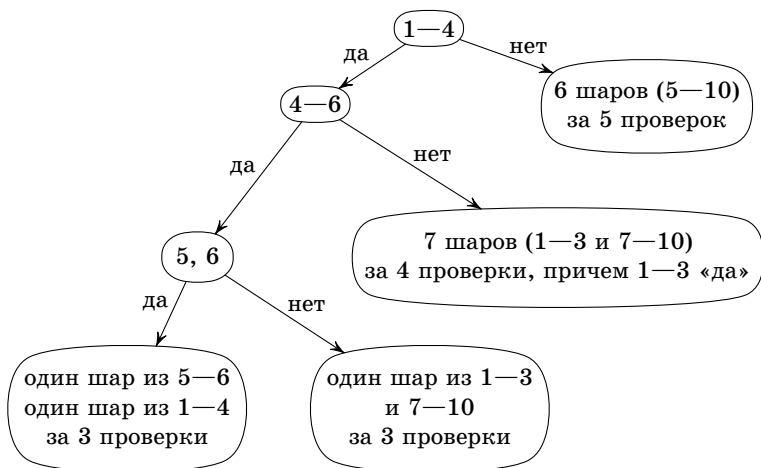


Рис. 92

Способ выделить оба радиоактивных шара из данных 10 шаров за 6 проверок показан на рисунке 92. При этом возникают такие задачи: выделить два радиоактивных шара из данных 6 шаров за 5 проверок и выделить два

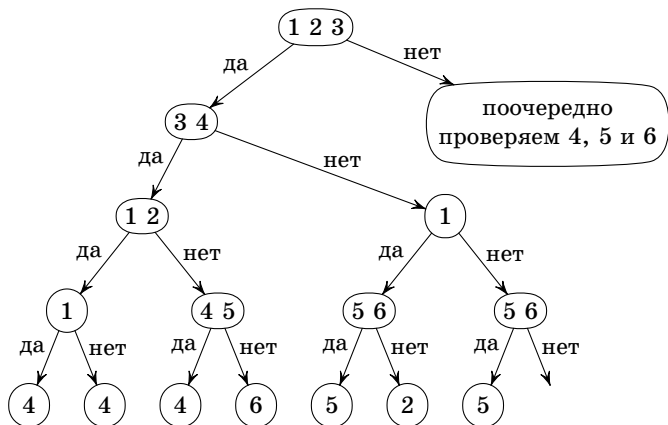


Рис. 93

радиоактивных шара из данных 7 шаров за 4 проверки, если известно, что среди шаров 1–3 есть радиоактивный шар.

Способ выделить оба радиоактивных шара из данных 7 шаров за 5 проверок показан на рисунке 93. Одна из стрелок с надписью «нет» никуда не ведёт, потому что никаких дополнительных проверок не требуется: радиоактивные шары имеют номера 2 и 7.

4. По условию на каждой линии есть станция, на которой нельзя сделать пересадку. Находясь на такой станции, мы находимся только на данной линии. Следовательно, с любой линии метро можно попасть на любую другую линию, сделав не более двух пересадок. Фиксируем какую-нибудь линию. С неё можно попасть не более чем на три линии, а с каждой из них — ещё не более чем на две. Следовательно, всего линий не более $1 + 3 + 2 \cdot 3 = 10$.

На рисунке 94 показана схема пересадок для 10 линий, удовлетворяющая условию (станции, с которых нельзя сделать пересадки, не отмечены; такие станции можно произвольно отметить на каждой линии).

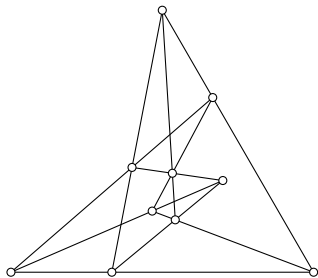


Рис. 94

9–11 класс

2. Пусть $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$. Тогда $S_{k+1} = S_k + [\sqrt{S_k}]$ и $a_{k+1} = S_{k+1} - S_k$. При решении задачи 2 для 8 класса было доказано, что последовательность a_k устроена следующим образом: вначале идёт 1966, потом идут последовательно натуральные числа, равные $[\sqrt{S_k}]$, причём если S_k — точный квадрат, то число встречается 3 раза подряд, а иначе 2 раза. Несложно проверить, $a_1 = 1966$, $a_2 = a_3 = 44$, $a_4 = a_5 = 45$, ..., $a_{60} = a_{61} = 73$ и при $k < 61$ числа S_k не являются полными квадратами; первый полный квадрат — это число $S_{61} = 74^2$. Таким образом, первое число, которое повторится 3 раза в последовательности a_k — это 74. Затем 3 раза повторятся числа $2 \cdot 74 = 148$, $4 \cdot 74 = 296$, $8 \cdot 74 = 592$ и.т. д.

Чтобы вычислить a_{1966} , рассмотрим более простую последовательность $b_{2n-1} = b_{2n} = 43 + n$, $n = 1, 2, \dots$. Несложно проверить, что $a_{1966} = b_{1961} = 1024$. Действительно, $2^3 \cdot 74 < 1024 < 2^4 \cdot 74$, поэтому если в последовательность b_1, \dots, b_{1961} вставить 5 дополнительных членов (1966, 74, 148, 296 и 592), то мы получим последовательность a_1, \dots, a_{1966} .

3. За k проверок мы получаем k ответов «да» и «нет»; всего получается 2^k различных вариантов таких ответов. Поэтому если количество различных вариантов расположения радиоактивных шаров среди данных шаров больше

2^k , то мы не сможем выделить радиоактивные шары за k проверок.

Предположим, что за 6 проверок можно выделить два радиоактивных шара среди данных 11 шаров. Пусть на первом шаге проверяется $11 - q$ шаров. Если среди них нет радиоактивных шаров, то за 5 проверок можно выделить два радиоактивных шара среди q оставшихся шаров. Количество различных способов выбрать 2 шара из q равно

$C_q^2 = \frac{q(q-1)}{2}$, поэтому $C_q^2 \leq 32$. Если же среди проверенных шаров есть хотя бы один радиоактивный шар, то количество различных вариантов распределения радиоактивных шаров равно $C_{11}^2 - C_q^2$ (возможно любое распределение шаров за исключением тех случаев, когда оба радиоактивных шара находятся среди непроверенных шаров). Поэтому $C_{11}^2 - C_q^2 \leq 32$, т. е. $C_q^2 \geq 23$. Единственное число q , для которого выполняются неравенства $23 \leq C_q^2 \leq 32$, равно 8. Это означает, что на первую проверку необходимо взять 3 шара. Кроме того, из нашего предположения следует, что за 5 проверок можно выделить два радиоактивных шара среди данных 8 шаров.

Предположим, что за 5 проверок можно выделить два радиоактивных шара среди данных 8 шаров. Пусть на первом шаге проверяется $8 - q$ шаров. Тогда $C_q^2 \leq 16$ и $C_8^2 - C_q^2 \leq 16$, т. е. $12 \leq C_q^2 \leq 16$. Таким образом, $q = 6$. Кроме того, за 4 проверки можно выделить два радиоактивных шара среди данных 6 шаров.

Предположим, что за 4 проверки можно выделить два радиоактивных шара среди данных 6 шаров. Пусть на первом шаге проверяется $6 - q$ шаров. Тогда $C_q^2 \leq 8$ и $C_6^2 - C_q^2 \leq 8$, т. е. $7 \leq C_q^2 \leq 8$. Получено противоречие, потому что такого числа q не существует.

4. Шесть гирь можно выбрать, например, следующим образом: 11, 19, 22, 24, 25, 26. Веса пар этих гирь заключены между 30 и 51, веса троек — между 52 и 75, а вес

четырёх гирь не меньше 76. Поэтому в кучках равного веса должно быть равное число гирь. Легко проверить, что все 15 сумм пар указанных чисел различны. Ясно также, что указанные гири нельзя разбить на две тройки равного веса, потому что сумма шести указанных чисел нечётна.

Выберем теперь произвольно семь гирь из данного набора, и докажем, что из них можно выбрать две кучки равного веса. Из семи гирь можно составить 7 различных наборов, состоящих из одной гири, 21 набор из двух гирь, 35 наборов из трёх гирь и 35 наборов из четырёх гирь. Таким образом, существует 98 различных наборов, состоящих не более чем из четырёх гирь.

Наибольший вес набора из четырёх гирь равен $26 + 25 + 24 + 23 = 98$. Но если среди выбранных семи гирь есть все 4 гири наибольшего веса, то можно выбрать две кучки равного веса, поскольку $26 + 23 = 24 + 25$. Если же хотя бы одной из этих гирь нет, то наибольший вес набора, состоящего не более чем из четырёх гирь (из выбранных семи гирь), не превосходит 97, а всего таких наборов 98. Поэтому два различных набора гирь имеют один и тот же вес. Можно считать, что одна и та же гиря не входит в оба набора, потому что иначе её можно убрать из обоих наборов. А в таком случае мы получаем две кучки равного веса.

5. Рассмотрим путь, который идёт из произвольной отмеченной клетки A_1 в отмеченную клетку A_2 на той же горизонтали; из клетки A_2 в отмеченную клетку A_3 на той же вертикали, что и A_2 ; из клетки A_3 в отмеченную клетку A_4 на той же горизонтали, что и A_3 , и т. д. На каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки, поэтому путь вернётся именно в клетку A_1 . У этого пути вертикальных звеньев столько же, сколько горизонтальных, поэтому он проходит через чётное число клеток; ясно также, что путь проходит не менее чем через 4 клетки. Все отмеченные клетки входят в один из таких путей, причём эти пути не имеют общих отмеченных

клеток. Таким образом, данному расположению отмеченных клеток мы сопоставили представление числа 22 в виде суммы чётных слагаемых, каждое из которых не меньше 4; это то же самое, что представление числа 11 в виде суммы слагаемых, каждое из которых не меньше 2.

Ясно, что эквивалентным расположениям отмеченных точек соответствуют одинаковые представления числа 11 в виде суммы слагаемых. Несложно убедиться, что и любые два расположения, которым соответствуют одинаковые представления числа 11, эквивалентны. Например, любые два расположения, которым соответствует представление $11 = 2 + 3 + 6$, перестановками вертикалей и горизонталей можно привести к такому виду, как на рисунке 95.

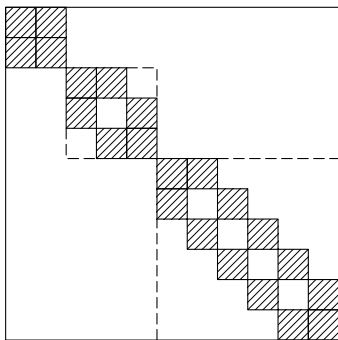


Рис. 95

Количество различных представлений числа 11 в виде суммы слагаемых, каждое из которых не меньше 2, равно 14: $2 + 9$, $2 + 2 + 7$, $2 + 3 + 6$, $2 + 4 + 5$, $2 + 2 + 2 + 5$, $2 + 2 + 3 + 4$, $2 + 3 + 3 + 3$, $2 + 2 + 2 + 2 + 3$, $3 + 8$, $3 + 3 + 5$, $3 + 4 + 4$, $4 + 7$, $5 + 6$, 11 .

1967 год (XXX олимпиада)

Первый тур

8 класс

1. Заметим сначала, что при переносе через разряд в числе, оканчивающемся ровно на k девяток, сумма цифр уменьшается на $9k - 1$. Пусть $N = \overline{a_1 \dots a_n \underbrace{9 \dots 9}_k}$ — меньшее число в искомой паре ($a_n \neq 9$). Тогда число $9k - 1$ делится на 125. Следовательно, $9k \equiv 1 \pmod{125}$. Обозначим через

$s(X)$ сумму цифр числа X . Так как $s(N) \equiv 0 \pmod{125}$ и $s(\underbrace{9 \dots 9}_k) \equiv 1 \pmod{125}$, то $s(\overline{a_1 \dots a_n}) = s(N) - s(\underbrace{9 \dots 9}_k) \equiv 124 \pmod{125}$. Таким образом, если числа $s(N)$ и $s(N+1)$ делятся на 125, то $9k \equiv 1 \pmod{125}$ и $s(\overline{a_1 \dots a_n}) \equiv 124 \pmod{125}$. Заметим, что эти условия являются также и достаточными.

Так как условия на числа k и $\overline{a_1 \dots a_n}$ независимы, то можно отдельно минимизировать k и $\overline{a_1 \dots a_n}$. Поскольку $14 \cdot 9 = 126$ и 14 взаимно просто с 125, из того, что $9k \equiv 1 \pmod{125}$ следует, что $14 \cdot 9k \equiv 14 \pmod{125}$, или, что то же самое, $k \equiv 14 \pmod{125}$, а значит, наименьшее возможное значение k равно 14. Так как $a_1 + \dots + a_n \equiv 124 \pmod{125}$, то $a_1 + \dots + a_n \geq 124$. Учитывая, что $a_i \leq 9$, получаем, что $n \geq \left\lceil \frac{124}{9} \right\rceil = 14$. Поскольку число с бóльшим количеством цифр всегда больше числа с меньшим количеством цифр, в искомой паре $n = 14$. Следовательно, среди цифр a_1, \dots, a_n либо одна семёрка, а остальные — девятки, либо две восьмёрки, а остальные — девятки. Цифра a_1 не может быть семёркой, так как в этом случае $a_n = a_{14} = 9$. Таким образом, минимальное значение a_1 равно 8. Учитывая, что в этом случае в числе $\overline{a_1 \dots a_n}$ ровно две восьмёрки, одна из которых должна стоять на последнем месте, а другая — на первом, получаем, что минимальное значение $\overline{a_1 \dots a_n}$ равно $\underbrace{89 \dots 98}_{12}$. Итак, минимальное значение числа N равно $\underbrace{89 \dots 98}_{12} \underbrace{989 \dots 9}_{14}$.

2. Радиусы описанных окружностей треугольников $АСМ$ и $ВСМ$ равны $\frac{AC}{2 \sin \angle AMC}$ и $\frac{BC}{2 \sin \angle BMC}$ соответственно. Легко проверить, что $\sin \angle AMC = \sin \angle BMC$. Поэтому

$$\frac{AC}{2 \sin \angle AMC} + \frac{BC}{2 \sin \angle BMC} = \frac{AC + BC}{2 \sin \angle BMC}.$$

Последнее выражение будет наименьшим, когда $\sin \angle BMC = 1$, т. е. $CM \perp AB$.

3. Докажем, что такого способа не существует. Рассмотрим все возможные слова, начинающиеся с одной и той же последовательности из восьми точек и тире. Таких различных слов всего четыре, причём они все должны быть в разных группах, что невозможно, поскольку по условию групп только две.

4. Сначала найдём множество точек M , для которых треугольник ABM равнобедренный. Оно состоит из серединного перпендикуляра к отрезку AB и окружностей с центрами A и B и радиусом AB (рис. 96). При этом 5 точек, лежащих на прямой AB , в это множество не входят (на рисунке 96 эти точки выделены). Аналогично строится множество точек, для которых треугольник BCM равнобедренный.

Искомое множество — пересечение этих двух множеств (имеются в виду точки пересечения прямой или окружности из первого множества с прямой или окружностью из второго множества). Рассматриваемые прямые и окружности не всегда пересекаются и, кроме того, точки их пересечения могут попадать на прямую AB или прямую BC . Обсудим, когда это происходит.

Серединные перпендикуляры пересекаются в центре описанной окружности треугольника ABC . Эта точка ле-

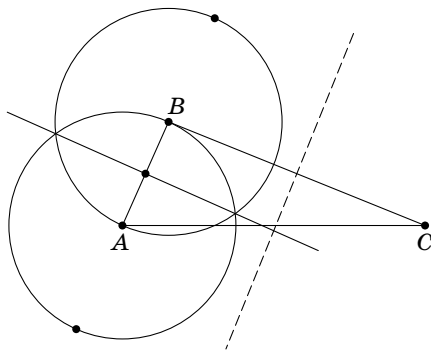


Рис. 96

жит на прямой AB или прямой BC , если один из углов A и C прямой.

Серединный перпендикуляр может не пересекать одну или обе окружности. Например, на рисунке 96, серединный перпендикуляр к отрезку BC не пересекает окружности с центрами A и B радиуса AB .

Серединный перпендикуляр к отрезку BC пересекает окружность с центром B радиуса AB в точке, лежащей на прямой AB , в двух случаях: 1) $AB = AC$; 2) расстояние от второй точки пересечения окружности с центром B и радиусом AB с прямой AB до точки C равно AB (рис. 97).

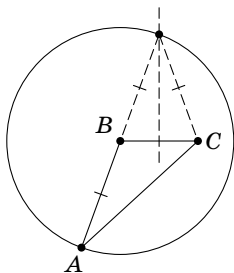


Рис. 97

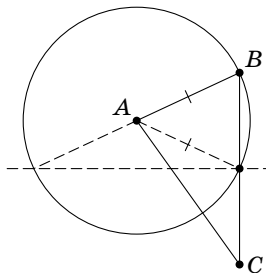


Рис. 98

Серединный перпендикуляр к отрезку BC и окружность радиуса AB с центром A пересекаются на прямой AB , если медиана, проведённая к стороне BC , равна AB (рис. 98).

Две окружности радиусов AB и BC с центром в точке B не пересекаются, если $AB \neq BC$, и совпадают, если $AB = BC$.

Две окружности радиусов AB и BC с центрами в точках A и C пересекаются в точке B и в другой точке, не лежащей на прямых AB и BC .

Окружность с центром C и радиусом BC пересекается с окружностью с центром B и радиусом AB в двух точках. Одна из этих точек лежит на прямой AB в двух случаях: 1) $AC = BC$; 2) расстояние от второй точки пересечения

окружности с центром B и радиусом AB с прямой AB до точки C равно BC .

5. Пусть у О. Бендера всего было N слонов, каждому члену профсоюза он выдавал x слонов, а каждому не члену — y слонов. Тогда $28x + 37y = N$. Если $x > 37$, то при том же количестве слонов О. Бендер мог выдавать каждому члену профсоюза $x - 37$ слонов, а каждому не члену — $y + 28$ слонов. Следовательно, $x \leq 37$. Аналогично получаем, что $y \leq 28$. Таким образом, $N = 28x + 37y \leq 2 \cdot 28 \cdot 37 = 2072$.

Докажем теперь, что при $N = 2072$ существует лишь один способ раздачи слонов. Рассмотрим произвольный способ раздачи 2072 слонов и докажем, что при этом способе $x = 37$ и $y = 28$. Действительно, $28x + 37y = 2072 = 28 \cdot 37 + 37 \cdot 28$, т. е. $28(x - 37) = 37(28 - y)$. Числа 28 и 37 взаимно простые, поэтому $x - 37 = 37k$ и $28 - y = 28k$ для некоторого целого k . Из этих уравнений получаем: $x = 37(k + 1)$ и $y = 28(1 - k)$. Числа x и y положительные, поэтому $-1 < k < 1$, а значит, $k = 0$. Таким образом, при $N = 2072$ существует лишь один способ раздачи слонов.

9 класс

1. Рассмотрим тот момент, когда первый человек начинает обход самой большой окружности. Если второй в этот момент уже идёт по самой большой окружности, то они обязательно встретятся. Если же второй в этот момент находится на какой-нибудь другой окружности, то, так как длина самой большой окружности больше суммы длин всех остальных, второй успеет пройти все оставшиеся ему окружности и зайти на самую большую до того, как первый пройдёт её полностью. В этом случае они тоже встретятся на самой большой окружности.

2. Будем считать, что сторона квадрата равна 1. Предположим, что можно выбрать две точки требуемым об-

разом. Отрезки, соединяющие одну из этих точек с вершинами квадрата, разбивают квадрат на 4 треугольника. При этом сумма площадей треугольников, примыкающих к каждой паре противоположных сторон квадрата, равна $1/2$. Отрезки, соединяющие вторую выбранную точку с вершинами квадрата, разбивают одну из этих пар треугольников на 4 части, а другую — на 5 частей. Рассмотрим, например, 4 части. С одной стороны, сумма их площадей равна $1/2$, а с другой стороны, она должна быть равна $4/9$. Приходим к противоречию.

4. Рассмотрим два натуральных числа, разность между которыми больше 13. Между ними расположено не менее 13 натуральных чисел, идущих подряд. Среди любых 13 натуральных чисел, идущих подряд, хотя бы 7 чисел лежат в одном десятке. Суммы цифр этих семи чисел — последовательные натуральные числа, поэтому среди них есть число, делящееся на 7. Следовательно, искомая разность не больше 13.

Докажем теперь, что искомая разность не меньше 13. Между числами 993 и 1006, суммы цифр которых равны 21 и 7, нет других чисел, сумма цифр которых делится на семь, а разность $1006 - 993$ равна 13. Итак, искомая разность равна 13.

5. По условию задачи каждое слагаемое имеет вид $A_i = \overline{a_i X}$, где a_i — 12-значное число, а X — 108-значное, причём число X одно и то же для всех слагаемых. Преобразуем данную сумму.

$$\sum_{i=1}^{120} A_i = 120X + 10^{108} \sum_{i=1}^{120} \overline{a_i},$$

т.е. достаточно доказать, что число $10^{108} \sum_{i=1}^{120} \overline{a_i}$ делится на 120. Но $120 = 3 \cdot 40$, а число 10^{108} делится на 40. Следовательно, достаточно доказать, что $\sum_{i=1}^{120} \overline{a_i}$ делится

на 3. Поскольку числа a_i отличаются только перестановкой цифр, а остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления на 3 его суммы цифр, получаем, что остатки от деления на 3 у всех слагаемых одинаковы. Но сумма кратного трём числа слагаемых, дающих одинаковый остаток при делении на 3, делится на 3. Итак, $\sum_{i=1}^{120} \overline{a_i}$ делится на 3, а значит, исходная сумма делится на 120.

10 класс

1. Предварительно докажем, что если в треугольнике расположено k точек ($k > 0$), то его можно разбить на k треугольников так, чтобы в каждом из них находилось ровно по одной точке. Применим индукцию по k . База индукции, когда $k = 1$, очевидна: единственным треугольником разбиения будет исходный треугольник. Предположим теперь, что для всех $k < K$ утверждение верно. Докажем его для $k = K$. Вершины треугольника ABC можно обозначить так, что не все отмеченные точки лежат на какой-либо прямой, проходящей через вершину A . Тогда через вершину A можно провести прямую l так, что по каждую сторону от неё есть хотя бы одна отмеченная точка, а на самой прямой ни одной отмеченной точки нет. Эта прямая разбивает треугольник ABC на два треугольника, в каждом из которых лежит не более $K - 1$ точки. По предположению индукции каждый этих треугольников можно разбить на треугольники, в каждом из которых будет находиться ровно по одной точке. Суммарное разбиение этих двух треугольников даёт требуемое разбиение исходного треугольника на K треугольников.

Докажем сначала, что при $K > 1$ квадрат можно разбить требуемым образом на K треугольников или на $K + 1$ треугольник. Для этого заметим, что найдётся хотя бы одна из вершин квадрата, для которой не все точки лежат на какой-либо прямой, проходящей через неё. Пусть это будет вершина A квадрата $ABCD$. Тогда существует точка P , лежащая на стороне BC , для которой ни одна из данных

точек не лежит на отрезках AP и DP , а также не все данные точки лежат в одном из треугольников ABP , APD и DCP (т. е. не более чем в одном из этих треугольников нет данных точек). Те из этих трёх треугольников, в которых есть данные точки, разобьём на треугольники, в каждом из которых находится ровно одна данная точка. В результате получим разбиение на K треугольников (если данные точки есть в каждом из трёх треугольников) или на $K + 1$ треугольник (если в одном из трёх треугольников нет данных точек).

Докажем теперь, что разбить квадрат требуемым образом на K треугольников не всегда возможно. Пусть O — центр данного квадрата $ABCD$. Расположим K точек на интервале BO . Предположим, что существует разбиение квадрата на K треугольников, удовлетворяющее условию задачи. Тогда в каждом треугольнике лежит ровно одна отмеченная точка и каждая отмеченная точка лежит ровно в одном треугольнике (т. е. точка не может лежать на границе двух треугольников). В этом разбиении рассмотрим все треугольники с вершиной D . Если таких треугольников несколько, то хотя бы один из них либо не содержит отрезка прямой BD , либо какая-нибудь из сторон этого треугольника лежит на прямой BD . Ни в одном из этих случаев в этом треугольнике не может быть отмеченных точек, что противоречит предположению. Следовательно, такой треугольник если и может быть, то только один. Но тогда две его стороны лежат на отрезках AD и CD , а значит, этот треугольник содержится в треугольнике ACD , тем самым ни одна отмеченная точка не может лежать в нём. Получено противоречие.

2. Предположим, что внутри круга радиуса 1 можно расположить шесть точек так, чтобы расстояние между любыми двумя было больше 1. Так как расстояние от центра круга радиуса 1 до любой его точки не превосходит 1, ни одна из этих шести точек не может совпа-

дать с центром круга. Пусть A_1, \dots, A_6 — это данные точки, занумерованные по часовой стрелке, O — центр круга. Если точка O лежит внутри многоугольника $A_1 \dots A_6$, то $\angle A_1OA_2 + \dots + \angle A_6OA_1 = 360^\circ$, поэтому одно из слагаемых не превосходит 60° , т. е. $\angle A_kOA_{k+1} \leq 60^\circ$ для некоторого k . Если же точка O лежит вне этого многоугольника, то $\angle A_kOA_{k+1} \leq \frac{180^\circ}{5} < 60^\circ$ для некоторого k .

Пусть лучи OA_k и OA_{k+1} пересекают окружность в точках B и C . Отрезок A_kA_{k+1} лежит внутри треугольника BOC , наибольшая сторона которого равна 1, поэтому длина этого отрезка не превосходит 1 (см. «Основные факты»). Полученное противоречие показывает, что внутри круга радиуса 1 нельзя расположить шесть точек так, чтобы расстояние между любыми двумя было больше 1.

3. При делении на 9 число n^3 даёт остаток 0 или ± 1 . Поэтому число $19x^3 - 17y^3 \equiv x^3 + y^3 \pmod{9}$ при делении на 9 даёт остаток 0, ± 1 или ± 2 . А 50 при делении на 9 даёт остаток 5.

4. Пусть дан конечный набор плоскостей в пространстве. Докажем, что для любого числа R существует точка в пространстве, расстояние от которой до каждой из плоскостей этого набора больше R . Пользуясь этим, легко доказать требуемое. Действительно, сначала найдём в пространстве такую точку P , что расстояние от неё до каждой из данных плоскостей больше 100. Тогда шар с центром в этой точке радиуса 100 не пересекает ни одну из данных плоскостей. Неразрезанной является, например, любая изюминка, центр которой удалён от точки P не более чем на 90.

Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение: объём множества точек пространства, удалённых от круга радиуса r не более чем на расстояние d , не превосходит $2\pi d(r+d)^2$. Действительно, если расстоя-

ние от некоторой точки P до данного круга не превосходит d , то расстояние от этой точки до плоскости, содержащей данный круг, не превосходит d , а значит, точка P лежит в полосе ширины $2d$. Кроме того, расстояние от проекции этой точки до данного круга не превосходит d , а значит, точка P лежит в бесконечном в обе стороны цилиндре, основанием которого является круг радиуса $r + d$, концентрический данному кругу. Следовательно, точка P лежит в цилиндре с радиусом основания $r + d$ и высотой $2d$. Таким образом, объём множества точек, удалённых от данного круга не более чем на d не превосходит объёма этого цилиндра, т. е. не превосходит $2\pi d(r + d)^2$, что и требовалось.

Возьмём произвольную точку O и рассмотрим два концентрических шара D_a и D_{a+R} с центром O , радиусы которых равны a и $a + R$. Докажем, что при достаточно большом a в шаре D_a найдётся искомая точка P , расстояние от которой до каждой из плоскостей данного набора больше R . Рассмотрим круг, по которому одна из плоскостей данного набора пересекает шар D_{a+R} . Если точка P , принадлежащая шару D_a , удалена от этой плоскости на расстояние, не превосходящее R , то расстояние от точки P до рассматриваемого круга тоже не превосходит R . Этот круг является сечением шара радиуса $a + R$, поэтому его радиус не превосходит $a + R$. Согласно вспомогательному утверждению из этого следует, что объём множества всех точек шара D_a , удалённых от данной плоскости не более чем на R , не превосходит $2\pi R(a + 2R)^2$. Таким образом, если набор состоит из n плоскостей, то объём множества точек всех шаров D_a , удалённых от одной из плоскостей данного набора не более чем на R , не превосходит $2n\pi R(a + 2R)^2$. Но при достаточно больших a этот объём меньше, чем объём шара D_a , равный $\frac{4}{3}\pi a^3$.

5. Легко проверить, что $S + 1 = (2 + 1)(3 + 1) \dots (p_k + 1)$. При $k > 1$ каждое выражение в скобках является чётным

числом, поэтому оно разлагается по крайней мере на 2 простых множителя. Несложные вычисления показывают, что при $k = 5$ число $S + 1$ разлагается в произведение 11 простых множителей. Поэтому при $k > 5$ число $S + 1$ также разлагается в произведение более $2k$ простых множителей, потому что при увеличении k на 1 добавляются по крайней мере 2 простых множителя.

Второй тур

7 класс

1. Треугольники ACB и ECM подобны, поскольку угол C у них общий и $EC : AC = |\cos C| = MC : BC$. Поэтому $\angle MEC = \angle BAC$. С другой стороны, $\angle MEC = \angle ABC$, поскольку $EM \parallel AB$. Таким образом, $\angle A = \angle B$. Аналогично из того, что $EP \parallel AC$, следует, что $\angle A = \angle C$. Поэтому треугольник ABC равносторонний, а для равностороннего треугольника очевидно, что $MP \parallel BC$.

2. Пусть сторона квадрата равна a . Рассмотрим следующие 5 точек: вершины квадрата и его центр. Если диаметр круга меньше $\frac{a}{\sqrt{2}}$, то он может содержать не более одной из этих точек. Поэтому 4 круга радиуса меньше $\frac{a}{\sqrt{2}}$ не могут целиком покрыть квадрат со стороной a .

Легко видеть, что 4 круга, диаметрами которых служат отрезки, соединяющие центр квадрата с его вершинами, полностью покрывают квадрат.

3. Докажем, что существует число, содержащее n цифр, в десятичной записи которого встречаются только цифры 1 и 2 и которое делится на 2^n . Ясно, что это число имеет вид $q_n \cdot 2^n$ и в его десятичной записи нет ни одного нуля. Искомое число q — это q_{1000} .

Применим индукцию по n . При $n = 1$ число 2 обладает требуемым свойством. Предположим теперь, что для данного n построено требуемое число $q_n \cdot 2^n$. Припишем к

этому числу слева цифру 1 или 2, т. е. рассмотрим числа $10^n + q_n \cdot 2^n = 2^n(5^n + q_n)$ и $2 \cdot 10^n + q_n \cdot 2^n = 2^n(2 \cdot 5^n + q_n)$. Однако из этих чисел делится на 2^{n+1} , поскольку одно из чисел $5^n + q_n$ и $2 \cdot 5^n + q_n$ чётно.

4. Предположим, что число y получается из натурального числа x некоторой перестановкой его цифр, причём $x + y = 9999 \dots 99$ (1967 девяток). Тогда числа x и y состоят из одинакового количества цифр. Так как $x < x + y = 9999 \dots 99$ (1967 девяток), то это количество не превосходит 1967. С другой стороны, если оно меньше, чем 1967, то

$$x + y \leq \underbrace{9999 \dots 99}_{1966 \text{ девяток}} + \underbrace{9999 \dots 99}_{1966 \text{ девяток}} < \underbrace{9999 \dots 99}_{1967 \text{ девяток}}.$$

Следовательно, $x = \overline{x_1 \dots x_{1967}}$. Но тогда

$$y = \underbrace{9999 \dots 99}_{1967 \text{ девяток}} - \overline{x_1 \dots x_{1967}} = \overline{y_1 \dots y_{1967}},$$

где $y_k = 9 - x_k$. Таким образом, в записи числа x число нулей равно числу девяток, число единиц — числу восьмёрок, ..., число четвёрок — числу пятёрок. Но это невозможно, так как число x состоит из нечётного количества цифр.

5. Среди данных точек выберем две наиболее северные (если есть несколько наиболее северных точек, то выбираем любые две из них). Одну из сторон каждого прямого угла в этих точках направим на юг, а другие стороны направим навстречу друг другу. В результате будет освещена вся полуплоскость, состоящая из точек, расположенных южнее этих двух прожекторов. С помощью двух оставшихся прожекторов можно осветить полуплоскость, расположенную севернее их.

8 класс

1. См. решение задачи 3 для 7 класса.

2. Пусть $N = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ — разложение числа N на простые множители. Без ограничения общности можно считать, что $P = p_1$. Тогда $d(N) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_s + 1)$ и

$$\frac{N}{d(N)} = \frac{p_1^{k_1}}{k_1 + 1} \cdot \frac{p_2^{k_2}}{k_2 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_s^{k_s}}{k_s + 1} = p_1$$

в силу условия задачи.

Нам понадобятся следующие неравенства, которые либо очевидны, либо доказываются по индукции по той же схеме, что и первое из них.

1) Если $p > 3$ и $k \geq 2$, то $\frac{p^k}{k+1} > p$. Требуемое неравенство можно переписать в виде $p^{k-1} > k+1$, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $p = 5$. База индукции: $5 > 2$. Шаг индукции: если $5^{k-1} > k+1$, то $5^k > 5(k+1) > k+2$.

2) Если $p = 3$ и $k = 2$, то $\frac{p^k}{k+1} = p$.

3) Если $p = 3$ и $k > 2$, то $\frac{p^k}{k+1} > p$.

4) Если $p \geq 2$ и $k \geq 1$, то $\frac{p^k}{k+1} \geq 1$, причём если $p > 2$ или $k > 1$, то неравенство строгое.

5) Если $p = 2$ и $k \geq 4$, то $\frac{p^k}{k+1} > p$.

Рассмотрим сначала случай, когда число N делится на p_1^2 , т. е. $k_1 \geq 2$. Если при этом $p_1 > 3$, то

$$p_1 = \frac{p_1^{k_1}}{k_1 + 1} \cdot \frac{p_2^{k_2}}{k_2 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_s^{k_s}}{k_s + 1} > p_1,$$

так как каждый из сомножителей не меньше единицы, а первый больше p_1 . Следовательно, $p_1 = 3$ или $p_1 = 2$. Если $p_1 = 3$, то $k_1 = 2$. Так как в произведении уже есть сомножитель, равный p_1 , то все остальные сомножители равны единице. Следовательно, либо $N = 9$, либо $N = 2 \cdot 9 = 18$.

Пусть теперь $p_1 = 2$. Тогда $k_1 \leq 3$ (иначе соответствующий множитель будет больше 2, а значит, и всё произведение будет больше 2). Если $k_1 = 3$, то $\frac{p_1^{k_1}}{k_1 + 1} = \frac{2^3}{4} = 2$, а значит, $N = 8$. Если $k_1 = 2$, то $\frac{p_1^{k_1}}{k_1 + 1} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$. В знаменателе по-

явилось число 3. Следовательно, число N делится на 3. Число $N = 3 \cdot 2^2$ подходит, и поскольку $\frac{3^k}{k+1} > 1,5$ при $k > 1$, то в большей степени множитель 3 в разложение N входить не может. Итак, при $k_1 \geq 2$ подходят только числа $N = 8$, $N = 9$, $N = 12$ и $N = 18$.

Рассмотрим теперь случай, когда $k_1 = 1$. В этом случае получаем множитель $\frac{p_1}{2}$. Следовательно, произведение остальных множителей равно 2. Так как все множители не меньше 1, то все они не больше 2. Допустим, что число N имеет простой делитель не меньше 5. Тогда соответствующий ему множитель больше 2, что невозможно. Следовательно, $N = p_1 \cdot 2^s \cdot 3^r$ и при этом $r \leq 1$ (ибо иначе $\frac{3^r}{r+1} > 2$) и $s \leq 3$ (иначе $\frac{2^s}{s+1} > 2$). Перебрав все эти варианты, получаем, что подходят числа $N = 8p$, $N = 12p$ и $N = 18p$.

3. Проведём серединные перпендикуляры к сторонам квадратов, противолежащих сторонам треугольника. С одной стороны, они должны пересекаться в центре описанной окружности. С другой стороны, они пересекаются в середине гипотенузы. Поэтому нужно выяснить, в каком случае расстояния от середины гипотенузы до вершин квадратов, лежащих на описанной окружности, равны. Если катеты прямоугольного треугольника равны $2a$ и $2b$, то эти расстояния равны $\sqrt{5(a^2 + b^2)}$, $\sqrt{(a + 2b)^2 + b^2}$ и $\sqrt{(2a + b)^2 + a^2}$. Они равны тогда и только тогда, когда $a = b$, т. е. треугольник равнобедренный.

4. Предположим, что ладьи ходят так, что королю не удаётся встать под бой одной из них. Передвинем за несколько ходов короля на поле, соседнее по диагонали с левым нижним полем (на рисунке 99 это поле отмечено чёрным кружком). Перед следующим ходом короля все ладьи должны находиться в заштрихованном квадрате размером 997×997 , потому что иначе король сможет встать под бой ладьи, находящейся вне этого квадрата.

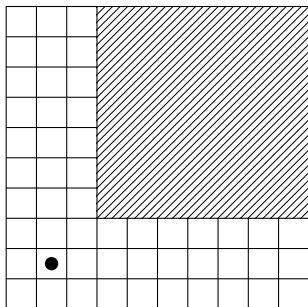


Рис. 99

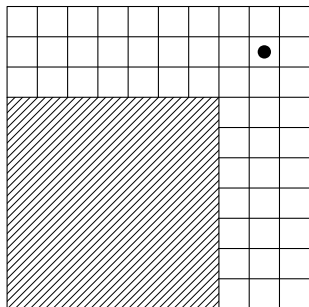


Рис. 100

Пусть король движется по диагонали пока не дойдёт до поля, соседнего с правым верхним полем (рис. 100). На это ему потребуется 997 ходов. После следующего хода все ладьи должны находиться в квадрате, заштрихованном на рисунке 100; с учётом этого хода за время движения короля по диагонали ладьи сделают тоже 997 ходов. Следовательно, одна из ладей всё это время оставалась либо на одной горизонтали, либо на одной вертикали, потому что иначе ладьи должны были бы сделать $2 \cdot 499 = 998$ ходов. Учитывая, где находятся ладьи в начале и в конце, мы видим, что король должен пересечь эту горизонталь или вертикаль, т. е. оказаться под боем. Получено противоречие.

5. Предположим противное: пусть в некотором кинотеатре на каждом сеансе был хотя бы один из этих школьников. Тогда во время каждого сеанса одна из групп (один человек или шесть человек) сидела в этом кинотеатре, а другая группа — в одном из оставшихся. Таким образом, всего в других кинотеатрах они посетили не более 8 сеансов. С другой стороны, в каждом из кинотеатров группа школьников должна побывать не менее двух раз (так как за один раз все школьники посетить кинотеатр не могут, а каждый школьник посетил в каждом кинотеатре хотя бы один сеанс). Следовательно, общее число

посещений других кинотеатров не меньше, чем $6 \cdot 2 = 12$. Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно, поэтому в каждом кинотеатре был сеанс, на котором не побывал ни один из этих школьников.

9 класс

1. Пусть число B получается из натурального числа A перестановкой его цифр, причём $A + B = 1000 \dots 00$ (некоторое число нулей). Докажем, что тогда последние цифры чисел A и B одинаковые (и равны либо 0, либо 5). Ясно, что если последняя цифра одного из чисел равна 0, то последняя цифра другого числа тоже равна 0. Пусть последние цифры чисел A и B равны a и b , причём $a \neq 0$. Тогда $b = 10 - a$. Ясно также, что если a_k и b_k — цифры чисел A и B , стоящие на одном и том же месте, причём это место не последнее, то $a_k + b_k = 9$. Вычеркнем в числах A и B пары цифр (a_i, b_i) и (a_j, b_j) , если $a_i = b_j$ и $b_i = a_j$. После этих вычёркиваний обязательно останется пара последних цифр $(a, 10 - a)$. Предположим, что $a \neq 5$. Тогда должны остаться ещё пары $(a - 1, 10 - a)$ и $(a, 9 - a)$. Но после всех возможных вычёркиваний никаких других пар остаться не может. Таким образом, в числе A цифр $a - 1$ больше, чем в числе B , чего не может быть. Полученное противоречие показывает, что $a = 5$.

Перейдём непосредственно к решению задачи. Если число X не делится на 50, то одна из двух последних цифр этого числа отлична от нуля. Если последняя цифра числа X не равна нулю, то она равна 5, а значит, и последняя цифра числа Y равна 5. Следовательно, обозначив через \tilde{X} и \tilde{Y} числа, получающиеся из X и Y отбрасыванием последней цифры, получим $\tilde{X} + \tilde{Y} = \underbrace{9 \dots 9}_{199 \text{ девяток}}$, что невозможно

199 девяток

согласно задаче 4 для 7 класса (которая верна для любого нечётного числа девяток). Следовательно, число X делится на 10. Применяя доказанное в начале утверждение для чисел \tilde{X} и \tilde{Y} , получаем, что X делится на 50.

2. Ответ зависит только от целой части числа M , поэтому в дальнейшем, чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что M — целое число.

Найдём сначала длину $L_1(M)$ последовательности, для которой $X_1 = 1$, $X_2 = M$. Для этой последовательности получаем $X_3 = M - 1$, $X_4 = 1$, $X_5 = M - 2$, а значит, $L_1(M) = L_1(M - 2) + 3$ при $M \geq 3$, $L_1(1) = 2$, $L_1(2) = 4$. Таким образом, $L_1(2n + 1) = 3n + 2$ и $L_1(2n) = 3n + 1$.

Найдём теперь длину последовательности, для которой $X_1 = M - 1$, $X_2 = M$. Для этой последовательности $X_3 = 1$, $X_4 = M - 1$, т. е. эта длина равна $L_1(M - 1) + 2 = L(M)$ при $M > 1$. Положим $L(1) = 2$ и $L(M) = L_1(M - 1) + 2$ при $M > 1$, т. е. $L(2n + 1) = 3n + 3$ при $n > 0$ и $L(2n) = 3n + 1$.

Мы построили последовательность, длина которой равна $L(M)$. Докажем теперь, что более длинной последовательности не существует, индукцией по M . База индукции, когда $M \leq 3$, доказывается несложным перебором; при $M = 2$ и при $M = 3$ самые длинные последовательности начинаются с 1, 2 и 2, 3. Пусть теперь $M \geq 4$. Заметим сначала, что если $X_1 < M$ и $X_2 < M$, то все члены последовательности не превосходят $M - 1$, а значит, её длина не превосходит $L(M - 1) < L(M)$. Если $X_1 = M = X_2$, то длина последовательности равна 2, а значит, не больше $L(M)$. Если $X_1 = M$, $X_2 < M$, то $X_3 < M$, а значит, длина последовательности не превосходит $L(M - 1) + 1 \leq L(M)$. Таким образом, остался случай $X_1 < M$, $X_2 = M$. При $X_1 = 1$ и $X_1 = M - 1$ длина последовательности уже вычислена ранее и не превосходит $L(M)$. Если же $1 < X_1 < M - 1$, то $X_3 < M - 1$ и $X_4 < M - 1$, а значит, длина последовательности не превосходит $2 + L(M - 2) < L(M)$.

3. Предположим, что на сторонах треугольника ABC внешним образом построены квадраты ABB_1A_1 , BCC_2B_2 , ACC_3A_3 и вершины A_1 , B_1 , B_2 , C_2 , C_3 , A_3 лежат на одной окружности S . Серединные перпендикуляры к отрезкам A_1B_1 , B_2C_2 , A_3C_3 проходят через центр окружности S .

Ясно, что серединные перпендикуляры к отрезкам A_1B_1 , B_2C_2 , A_3C_3 совпадают с серединными перпендикулярами к сторонам треугольника ABC , поэтому центр окружности S совпадает с центром описанной окружности треугольника.

Обозначим центр описанной окружности треугольника ABC через O . Расстояние от точки O до прямой B_2C_2 равно $R \cos A + 2R \sin A$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC . Поэтому

$$\begin{aligned} OB_2^2 &= (R \sin A)^2 + (R \cos A + 2R \sin A)^2 = \\ &= R^2(3 + 2(\sin 2A - \cos 2A)) = R^2(3 - 2\sqrt{2} \cos(45^\circ + 2\angle A)). \end{aligned}$$

Треугольник обладает требуемым свойством тогда и только тогда, когда $OB_2^2 = OC_3^2 = OA_1^2$, т. е.

$$\cos(45^\circ + 2\angle A) = \cos(45^\circ + 2\angle B) = \cos(45^\circ + 2\angle C).$$

Это равенство выполняется при $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$. Если же $\angle A \neq \angle B$, то $(45^\circ + 2\angle A) + (45^\circ + 2\angle B) = 360^\circ$, т. е. $\angle A + \angle B = 135^\circ$. Тогда $\angle C = 45^\circ$ и $\angle A = \angle C = 45^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ (или $\angle B = 45^\circ$, $\angle A = 90^\circ$). Мы видим, что треугольник должен быть либо равносторонним, либо равнобедренным прямоугольным.

4. Прежде всего заметим, что число A не делится на 10. Действительно, если $N = K \cdot 10^t$ делится на A , причём число K не делится на 10, то, по условию задачи, числа \overleftarrow{N} и $\overleftarrow{N} = K$ делятся на A .

Выберем число $N = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}$ так, что оно делится на A и $a_n \neq 0$. Вычитая из $N \cdot 10^{n+2}$ число \overleftarrow{N} «в столбик», получим разность

$$M = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} (a_n - 1) 99 (9 - a_n) (9 - a_{n-1}) \dots (9 - a_2) (10 - a_1)}.$$

Сложив теперь M с \overline{M} , получим число

$$Y = 10 \underbrace{999 \dots 99}_{n-1} 989 \underbrace{00 \dots 00}_n, \text{ делящееся на } A.$$

Если бы мы проделали те же действия, отправляясь от чисел $N \cdot 10^{n+3}$ и \overline{N} , то получили бы число

$$X = 10 \underbrace{999 \dots 99}_{n-1} 9989 \underbrace{00 \dots 000}_{n-1},$$

также делящееся на A . Следовательно, число

$$X - Y = 99 \underbrace{00 \dots 000}_{n-1}$$

делится на A , поэтому число $\overline{(X - Y)} = 99$ тоже делится на A , что и требовалось доказать.

5. Занумеруем портреты королей по порядку их царствования: 1, 2, ..., n . Покажем, как королю из любого исходного расположения портретов получить порядок 1, 2, ..., n (назовём такой порядок стандартным). Подгоним сначала первый портрет ко второму (двигая первый против часовой стрелки). Мы сможем это сделать, так как первый портрет можно менять с любым портретом, кроме второго. После этого будем двигать против часовой стрелки портреты 1 и 2 вместе (т. е. сначала меняем местами портрет 2 и соседний с ним, а затем этот соседний с 2 портрет меняем местами с портретом 1, и т. д.), пока не подгоним их к третьему, и т. д. В результате получим стандартный порядок.

Заметим, что мы заодно научились получать из стандартного порядка любой другой порядок. Действительно, для этого достаточно проделать перевешивания, приводящие конечный порядок к стандартному, но в обратном порядке. Теперь уже несложно получить из любого порядка любой другой: надо сначала из исходного порядка получить стандартный, а потом из него получить конечный порядок.

10 класс

1. Будем рассматривать не таблицу, а указанные преобразования строк. Достаточно доказать, что никакое число не может оказаться в том же самом положении на строке после менее чем n преобразований. Действительно, тогда мы получим, что во всех n строках таблицы ни в одном столбце не будет повтора, поэтому в каждом столбце будут записаны все числа от 1 до n .

Назовём номером позиции номер числа в строке. Если номер позиции числа в некоторой строке принимает значение от 1 до k , то при преобразовании к номеру позиции этого числа прибавляется $n - k$, если от $m + 1$ до n , то из номера позиции вычитается m , если от $k + 1$ до m , то номер позиции изменяется на $n - k - m$, т. е. к нему одновременно прибавляется $n - k$ и вычитается m .

Предположим, что некоторое число после нескольких преобразований вернулось на то же место, на котором оно было раньше, причём это число преобразований наименьшее. Тогда $a \cdot (n - k) = b \cdot m$, где a и b — количество увеличений и уменьшений номера позиции соответственно (если номер позиции принимает значение от $k + 1$ до m , то мы будем считать, что одновременно произошло и увеличение и уменьшение номера). Так как числа $n - k$ и m взаимно простые, то $a \geq m$ и $b \geq (n - k)$. Но всего есть ровно m позиций, на которых происходит увеличение номера позиции, и $n - k$ позиций, на которых происходит уменьшение номера позиции, причём число не могло оказаться дважды на одной и той же позиции. Следовательно, $a = m$ и $b = n - k$, поэтому число вернулось на ту же самую позицию после не менее чем n преобразований.

3. Предположим, что числа 1, 2...12 удалось расставить требуемым образом. Тогда никакие два из чисел 1, 2, 3, 10, 11, 12 не стоят рядом. А так как всего есть 12 позиций, эти числа стоят через один. Действительно, 6 оставшихся чисел занимают 6 промежутков между этими

числами, поэтому если в одном из промежутков окажутся два числа, то на какой-то промежуток чисел не хватит. Таким образом, число 4 стоит между двумя из чисел 1, 2, 3, 10, 11, 12. Получено противоречие, поскольку число 4 не может стоять рядом с числами 2, 3, 10, 11, 12.

4. Введём в пространстве систему координат $Oxyz$ и выберем из данных точек 4 точки с наибольшей координатой z . Рассмотрим проекции данных точек на плоскость Oxy и с помощью прямых углов в полученных точках осветим эту плоскость (см. решение задачи 5 для 7 класса). Октанты в исходных точках направим по сторонам этих прямых углов и в отрицательном направлении оси Oz . Для оставшихся четырёх точек сделаем то же самое, только теперь направим октанты в положительном направлении оси Oz .

5. Предположим, что ко всем числам, в записи которых участвует лишь одна единица, приписывается не единица. Рассмотрим $(n-1)$ -значные числа i , a и b , где i состоит из одних единиц, а a и b состоят из двоек и троек, так что никакие два разряда не совпадают. Рассмотрим также девять n -значных чисел: $1i$, $2a$, $3b$, $1a$, $2i$, $3i$, $1b$, $2b$, $3a$. Пусть в конце числа $1i$ приписывается цифра x , т. е. из этого числа получается $1ix$, из числа $2a$ получается $2ay$, а из числа $3b$ — $3bz$. По условию цифры x , y и z разные.

Рассмотрим число $1a$. У этого числа и числа $3b$ во всех разрядах стоят разные цифры, поэтому в конце числа $1a$ может быть приписана цифра x или цифра y . Легко проверить, что после того как эта цифра приписана, к остальным рассматриваемым числам цифры приписываются однозначно, и мы получаем два варианта:

1-й вариант. $1ix$, $2ay$, $3bz$, $1ay$, $2ix$, $3ix$, $1bz$, $2bz$, $3ay$.

2-й вариант. $1ix$, $2ay$, $3bz$, $1ax$, $2iy$, $3iz$, $1bx$, $2by$, $3ay$.

Обратим внимание, что здесь мы фиксировали первый разряд, но аналогичные два варианта мы получили бы, фиксируя любой другой разряд.

Если $x \neq 1$, то $y = 1$ или $z = 1$, поэтому в записи одного из чисел $(1a)y$ и $(1b)z$ участвует лишь одна единица и к нему приписана единица. Таким образом, в этом случае первый вариант невозможен, а во втором варианте к любому числу, содержащему лишь одну единицу, в конце приписывается x . Но числа $3 \dots 31$ и $12 \dots 2$ не имеют общих разрядов, поэтому получаем противоречие.

Если же $x = 1$, то в записи каждого из чисел $(1a)x$ и $(1b)x$ участвует лишь одна единица и к нему приписана единица. Таким образом, в этом случае второй вариант невозможен, а в первом варианте в любом числе, состоящем только из двоек и троек, дописываемая цифра не зависит от фиксированного нами разряда, поэтому она не зависит ни от какого разряда, т. е. постоянна. Но к числам $2 \dots 2$ и $3 \dots 3$ должны быть приписаны разные цифры, поэтому и в этом случае получаем противоречие.

Полученное противоречие показывает, что найдётся число, в записи которого участвует лишь одна единица и к которому приписывается единица.

Основные факты

В настоящий раздел собраны понятия и теоремы, которые наиболее часто встречались в решениях задач данной книги. Эти понятия и теоремы мы для краткости называли *фактами*. Мы старались не включать факты, имеющиеся в большинстве школьных учебников.

Этот раздел не претендует на полноту и не заменяет систематических учебных пособий (см. список литературы).

Комбинаторика

1°. Число комбинаций

Пусть нужно выбрать k предметов, причём первый предмет можно выбрать из n_1 предметов a_1, \dots, a_{n_1} , второй — из n_2 предметов b_1, \dots, b_{n_2} , k -й — из n_k предметов x_1, \dots, x_{n_k} . Тогда общее число всех разных способов выбрать эти предметы равно $n_1 n_2 \dots n_k$. Действительно, рассмотрим сначала случай $k = 2$. Составим из пар выбранных элементов прямоугольную таблицу с n_1 строками и n_2 столбцами, расположив пару (a_i, b_j) на пересечении i -й строки и j -го столбца. Каждая пара встречается в этой таблице ровно один раз, поэтому мы получаем $n_1 n_2$ пар. При $k = 3$ будем рассматривать пару (a_i, b_j) как элемент нового типа. Тогда каждую тройку (a_i, b_j, c_l) можно рассматривать как пару, состоящую из элемента (a_i, b_j) и элемента c_l . Следовательно, количество всех троек равно $n_1 n_2 n_3$. Для произвольно-го k требуемое утверждение доказывается по индукции.

В этой книге встречается только тот случай, когда $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 2$, т.е. когда выбирается k предметов, причём каждый предмет выбирается из двух предметов. В этом случае получается 2^k разных способов выбрать предметы. Эквивалентные формулировки этого утверждения таковы: 1) существует ровно 2^k наборов длины k из нулей

и единиц; 2) k ответов с двумя исходами дают 2^k различных вариантов ответов.

Задачи: 62.2.9.5, 66.2.9—11.3.

2°. Число сочетаний

Пусть есть n разных предметов, из которых нужно выбрать k предметов, причём две выборки считаются разными, если они состоят из разных предметов (т. е. порядок, в котором выбираются элементы, не учитывается). Тогда количество всех возможных выборок равно

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \dots\cdot (k-1)k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Действительно, если мы будем выбирать предметы с учётом порядка, то получим $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ различных выборок, поскольку первый предмет выбирается из n предметов, второй — из оставшихся $n-1$, третий — из оставшихся $n-2$ и т. д. Если теперь забыть про порядок, в котором выбирались предметы, то каждая выборка встретится у нас $1\cdot 2\cdot \dots\cdot (k-1)k$ раз. Действительно, первый выбранный предмет может быть любым из k предметов, второй — любым из оставшихся $k-1$ предметов, третий — любым из оставшихся $k-2$ предметов и т. д.

Количество способов выбрать k элементов из n обозначается C_n^k .

Наиболее часто используется тот факт, что $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Он используется, например, при решении задач 60.2.10.3, 66.2.9—11.3.

Задачи: 58.2.10.3, 60.2.10.3, 60.2.10.5, 66.2.9—11.3.

3°. Число перестановок

Пусть есть n различных предметов. Их нужно расставить по порядку: какой-то предмет поставить первым, какой-то вторым и т. д. Выясним, сколько всего возможно таких различных перестановок данных предметов. В качестве первого можно выбрать любой из n предметов, в качестве второго — любой из $n-1$ оставшихся, в качестве

третьего — любой из $n - 2$ оставшихся и т. д. Всего получаем $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ различных перестановок.

Можно также рассматривать *перестановки с повторениями*, когда не все данные предметы различны, а среди них могут быть одна или несколько групп одинаковых предметов. Пусть среди данных n предметов есть группы, состоящие из n_1, \dots, n_k одинаковых предметов. Перестановки одинаковых предметов не меняют перестановку, поэтому количество различных перестановок с повторениями равно $\frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$. Перестановки с повторениями используются при решении задачи 60.2.10.5.

Задачи: 58.2.10.3, 60.2.10.5, 63.1.11.4, 63.2.10.2.

4°. Бином Ньютона

Для вычисления $(a + b)^n$, где n — натуральное число, можно воспользоваться формулой бинома Ньютона

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ — количество способов выбрать k элементов из n . Действительно, каждое слагаемое $a^k b^{n-k}$ получается, когда при раскрытии скобок мы выбираем k из n сомножителей $a + b$ и берём в них a , а в остальных сомножителях берём b .

Из формулы бинома Ньютона следует, что $(a + b)^n > a^n + b^n$ при $a, b > 0$ и $n > 1$. Этот факт используется при решении задач 63.1.10.4 и 63.2.10.1.

Задачи: 58.2.10.1, 59.1.10.1, 63.1.10.4, 63.2.10.1

5°. Формула включений и исключений

Формула включений и исключений для двух множеств позволяет вычислить количество элементов множества $A \cup B$, если известны количества элементов множеств A , B и $A \cap B$. Другими словами, она позволяет найти количество предметов, которые обладают по крайней мере одним из некоторых двух свойств, если известно количество предметов, обладающих первым свойством, вторым свой-

ством и двумя свойствами одновременно. Если обозначить через $|X|$ количество элементов в множестве X , то эта формула выглядит следующим образом:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Действительно, если мы возьмём сумму $|A| + |B|$, то все элементы множества $A \cap B$ посчитаем дважды.

Для n множеств A_1, \dots, A_n тоже есть формула включений и исключений:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} N_k,$$

где $N_k = \sum |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$. Эта формула используется при решении задачи 64.2.10.5.

Задачи: 64.2.7.2, 64.2.10.5.

Литература: [6, гл. 14], задача 14.35.

6°. Принцип Дирихле

В простейшем виде его выражают так: «Если десять кроликов сидят в девяти клетках, то в некоторой клетке сидит не меньше двух кроликов». Более общая форма принципа Дирихле: *если рассадить более чем kd кроликов по k клеткам, то обязательно найдётся клетка, в которой будет по крайней мере $d + 1$ кролик*. Для непрерывных величин принцип Дирихле выглядит так: если кашу объёма v разделить между n людьми, то кто-то получит не меньше v/n и кто-то получит не больше v/n .

Задачи: 63.2.11.2, 64.2.11.5,

Теория чисел

7°. Делимость

Говорят, что целое число a *делится* на целое число b (или *кратно* числу b), если найдётся такое целое число c , что $a = bc$. В этом случае также говорят, что b *делит* a . (Например, «2 делит 6» или «6 делится на 2», «−1 делит −5».) Обозначение: $b \mid a$.

Свойства:

а) Любое число делится на ± 1 и на себя; 0 делится на любое число, но никакое ненулевое число не делится на 0.

б) Если $d \mid a$ и $d \mid b$, то $d \mid a \pm b$; кроме того, $d \mid ac$ для любого целого c ; если $c \mid b$ и $b \mid a$, то $c \mid a$.

в) Если $b \mid a$, то $|b| \leq |a|$ или $a = 0$.

г) Если $d \mid a$ и $d \mid b$, k и l — целые числа, то $d \mid ka + lb$; более общо, если каждое из чисел a_1, a_2, \dots, a_n делится на d , а k_i — целые числа, то $d \mid k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_na_n$.

Наибольший общий делитель чисел a и b мы обозначаем НОД(a, b). Числа a и b называются *взаимно простыми*, если НОД(a, b) = 1 (иначе говоря, числа взаимно просты, если из того, что $d \mid a$ и $d \mid b$, следует, что $d = \pm 1$).

Для вычисления наибольшего общего делителя двух чисел можно применить так называемый *алгоритм Евклида*. Он заключается в следующем. Пусть a_0 и a_1 — натуральные числа, причём $a_0 \geq a_1$. Поделим a_0 на a_1 с остатком: $a_0 = q_1a_1 + a_2$; затем поделим a_1 на a_2 с остатком $a_1 = q_2a_2 + a_3$, и т. д. В конце концов получим $a_{k-1} = q_k a_k$. Все числа a_0, a_1, \dots, a_k имеют вид $ta_0 + na_1$, где t и n — целые числа. Поэтому, в частности, a_k делится на любой общий делитель чисел a_0 и a_1 . С другой стороны, $a_{k-2} = q_{k-1}a_{k-1} + a_k = (q_{k-1}q_k + 1)a_k$, и т. д., поэтому числа a_0 и a_1 делятся на a_k . Это означает, что a_k — наибольший общий делитель чисел a_0 и a_1 . В частности, наибольший общий делитель чисел a_0 и a_1 можно представить в виде $ta_0 + na_1$, где t и n — целые числа. Этот факт используется при решении задачи 66.1.8.2.

Задачи: 66.1.8.2.

Литература: [1, гл. 1].

8°. Деление с остатком

Пусть a и b — целые числа, причём $b \neq 0$. Тогда найдутся единственные целые q и r , для которых: а) $a = qb + r$; б) $0 \leq r < |b|$. При этом q и r называются *частным* и *остатком* от деления a на b соответственно.

Пусть $b > 0$. Остатками при делении на b могут быть числа $0, 1, \dots, b-1$. Число даёт остаток r при делении на b тогда и только тогда, когда оно имеет вид $qb+r$, где q целое. При этом все числа разбиваются на b (бесконечных) арифметических прогрессий. Например, при $b=2$ это прогрессии $2n$ и $2n+1$, при $b=3$ — прогрессии $3n$, $3n+1$ и $3n+2$ и т. д.

Число делится на b тогда и только тогда, когда его остаток от деления на b равен нулю.

Остатки суммы (произведения) однозначно определяются остатками слагаемых (сомножителей). Например, если числа a и b дают остатки 3 и 6 при делении на 7, то $a+b$ даёт остаток $2=3+6-7$, число $a-b$ — остаток $4=3-6+7$, а ab — остаток $4=3 \cdot 6-14$ при делении на 7.

Точное утверждение таково: если остаток от деления a_1 на b равен r_1 , а остаток от деления a_2 на b равен r_2 , то остаток от деления a_1+a_2 на b равен остатку от деления r_1+r_2 на b , а остаток от деления a_1a_2 на b равен остатку от деления r_1r_2 на b .

Квадрат любого целого числа при делении на 3 или на 4 даёт в остатке 0 или 1. Этот факт используется при решении задач 64.1.7.3, 64.2.9.5.

Равенство $(3n \pm 1)^3 = 27n^3 \pm 27n^2 + 9n \pm 1$ показывает, что куб целого числа при делении на 9 даёт остаток 0 или ± 1 . Этот факт используется при решении задач 59.2.9.4, 67.1.10.3.

Задачи: 58.1.7.5, 59.2.9.4, 60.2.10.2, 61.1.10.1,
61.2.7.3, 63.2.7.4, 64.1.7.3, 64.1.7.5, 64.2.9.5,
65.1.8.2, 65.2.11.2, 66.1.9—11.4, 67.1.8.1,
67.1.9.5, 67.1.10.3.

Литература: [1, гл. 1] и [3, § 2].

9°. Разложение на простые множители

Число $p > 1$ называется *простым*, если оно делится лишь на $\pm p$ и ± 1 . Остальные натуральные числа, бóльшие единицы, называются *составными*. Каждое составное число может быть представлено в виде произведения простых.

Иногда бывает удобно сгруппировать одинаковые простые и записать это произведение в виде

$$p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k},$$

где p_1, p_2, \dots, p_k — различные простые числа, n_1, n_2, \dots, n_k — натуральные числа.

Основная теорема арифметики. *Разложение числа на простые множители единственно (с точностью до порядка множителей).*

Задачи: 67.1.10.5, 67.2.8.2.

Литература: [1, гл. 1], [3].

10°. *Представление числа в виде $a + \sqrt{b}$, где числа a и b рациональные, а число \sqrt{b} иррациональное, единственно.*

Доказательство. Предположим, что существуют такие рациональные числа a_1, a_2, b_1 и b_2 , что $a_1 + \sqrt{b_1} = a_2 + \sqrt{b_2}$, $a_1 \neq a_2$ и числа $\sqrt{b_1}$ и $\sqrt{b_2}$ иррациональны. Тогда $\sqrt{b_1} = a + \sqrt{b_2}$, где $a = a_2 - a_1 \neq 0$. Следовательно, $b_1 = a^2 + 2a\sqrt{b_2} + b_2$, т. е. $\sqrt{b_2} = \frac{b_1 - a^2 - b_2}{2a}$ — рациональное число. Полученное противоречие показывает, что представление числа в виде $a + \sqrt{b}$, где числа a и b рациональные, а число \sqrt{b} иррациональное, единственно.

Из доказанного утверждения, в частности, следует, что число $a + b\sqrt{2}$, где числа a и b целые и $b \neq 0$, иррационально. Этот факт используется при решении задачи 59.1.8.1.

Задачи: 58.1.8.2, 59.1.8.1.

Геометрия

11°. *Сумма векторов, идущих из точки пересечения медиан треугольника в его вершины, равна нулю.*

Доказательство. Пусть $\vec{a} = \vec{BC}$, $\vec{b} = \vec{CA}$ и $\vec{c} = \vec{AB}$ — векторы сторон треугольника ABC , AA_1 , BB_1 и CC_1 — медианы треугольника. Тогда $\vec{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$, $\vec{BB_1} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c})$ и $\vec{CC_1} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$, поэтому $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$. Следовательно,

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = -\frac{2}{3}(\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1}) = \vec{0}.$$

Задачи: 63.2.7.3.

12°. Точка M , в которой пересекаются медианы треугольника, лежит на отрезке OH , где O — центр описанной окружности и H — точка пересечения высот, причём $OM : MH = 1 : 2$.

Доказательство. Пусть A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , CA и AB данного треугольника ABC . При гомотетии с центром M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$, поэтому при этой гомотетии точка пересечения высот треугольника ABC переходит в точку пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$, т. е. точка H переходит в точку O . Следовательно, точка M лежит на отрезке OH и $OM : MH = 1 : 2$.

Задачи: 63.2.8.3.

13°. Отрезок MN , расположенный в треугольнике ABC , не превосходит наибольшей стороны этого треугольника.

Доказательство. Пусть прямая MN пересекает стороны треугольника в точках M_1 и N_1 . Ясно, что $MN \leq M_1N_1$. Пусть точка M_1 лежит на стороне AB , а точка N_1 — на BC . Так как $\angle AM_1N_1 + \angle BM_1N_1 = 180^\circ$, то один из этих углов не меньше 90° . Пусть для определённости $\angle AM_1N_1 \geq 90^\circ$. Тогда $AN_1 \geq M_1N_1$, так как против большего угла лежит бо́льшая сторона. Аналогично доказывается, что либо $AN_1 \leq AB$, либо $AN_1 \leq AC$. Следовательно, длина отрезка MN не превосходит длины отрезка с концами в вершинах треугольника.

Задачи: 66.1.9—11.3, 67.1.10.2.

14°. Ориентированные углы

Величины вписанных углов, опирающихся на одну хорду, могут быть равны, а могут составлять в сумме 180° . Для того чтобы не рассматривать различные варианты расположения точек на окружности, введём понятие ориентированного угла между прямыми. *Величиной ориентированного угла между прямыми AB и CD* (обозначение: $\angle(AB, CD)$) будем называть величину угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую AB так, чтобы она стала параллельна прямой CD . При этом углы, отличающиеся на $n \cdot 180^\circ$, считаются равными. Следует отметить, что ориентированный угол между прямыми CD и AB не равен ориентированному углу между прямыми AB

и CD (они составляют в сумме 180° или, что по нашему соглашению то же самое, 0°).

Легко проверить следующие свойства ориентированных углов:

а) $\angle(AB, BC) = -\angle(BC, AB)$;

б) $\angle(AB, CD) + \angle(CD, EF) = \angle(AB, EF)$;

в) точки A, B, C, D , не лежащие на одной прямой, принадлежат одной окружности тогда и только тогда, когда $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC)$ (для доказательства этого свойства нужно рассмотреть два случая: точки B и D лежат по одну сторону от AC ; B и D лежат по разные стороны от AC).

Задачи: 58.2.8.3, 59.2.7.1, 64.2.8.2, 65.2.9.5,

Литература: [5, гл. 2].

15°. Выпуклая оболочка

Пересечение двух выпуклых многоугольников является выпуклым многоугольником, поэтому для любого конечного набора точек на плоскости можно рассмотреть наименьший выпуклый многоугольник, содержащий эти точки. Его называют *выпуклой оболочкой* данных точек.

Задачи: 61.1.9.5, 63.1.10.2, 64.2.7.3.

16°. Невыпуклые многоугольники

Многоугольник на плоскости — это фигура, составленная из звеньев замкнутой несамопересекающейся ломаной. Многоугольник разбивает плоскость на две части — внутреннюю и внешнюю.

Обычно в курсе геометрии считается, что угол не превосходит 180° . Но при работе с невыпуклыми многоугольниками удобнее считать, что величина угла может принимать значения от 0° до 360° . Тогда можно определить углы многоугольника как те углы, образованные сторонами многоугольника, достаточно малые части которых лежат во внутренней области многоугольника. У выпуклого многоугольника все углы меньше 180° , а у невыпуклого многоугольника хотя бы один из углов больше 180° . При та-

ком определении углов многоугольника можно доказать, что сумма углов невыпуклого n -угольника равна сумме углов выпуклого n -угольника. (При обычном школьном определении угла можно лишь сказать, что сумма углов невыпуклого n -угольника меньше суммы углов выпуклого n -угольника.)

Все диагонали выпуклого многоугольника лежат внутри его. Докажем, что у невыпуклого многоугольника найдётся диагональ, лежащая внутри его. Пусть угол при вершине A невыпуклого многоугольника больше 180° . Тогда из этой вершины видны части по крайней мере двух сторон многоугольника, потому что никакая сторона (или её часть) не может быть видна под углом больше 180° . Следовательно, существует хотя бы один луч, выходящий из точки A , на котором происходит смена сторон, которые видны из точки A (на рис. 101 изображены все такие лучи). На каждом из таких лучей расположена диагональ, целиком лежащая внутри многоугольника.

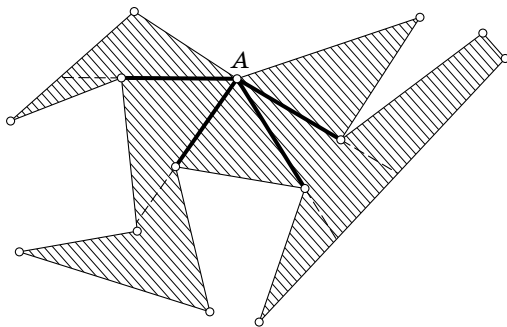


Рис. 101

Сумма углов невыпуклого n -угольника равна $(n - 2) \times 180^\circ$. Это легко доказать по индукции, воспользовавшись тем, что невыпуклый многоугольник можно разрезать некоторой диагональю на два многоугольника.

Задачи: 59.2.9.3, 60.2.7.3, 65.2.11.4.

17°. Центр масс

Пусть на плоскости задана система точек с приписанными им массами, т. е. имеется набор пар (X_i, m_i) , где X_i — точка плоскости, а m_i — положительное число. *Центром масс* системы точек X_1, \dots, X_n с массами m_1, \dots, m_n называют точку O , для которой выполняется равенство

$$m_1 \overrightarrow{OX_1} + \dots + m_n \overrightarrow{OX_n} = \vec{0}.$$

Центр масс любой системы точек существует, причём только один.

Важнейшим свойством центра масс, на котором основаны почти все его применения, является **теорема о группировке масс**: *центр масс системы точек останется прежним, если часть точек заменить одной точкой, которая расположена в их центре масс и которой приписана масса, равная сумме их масс.*

Задачи: 59.2.10.2, 64.2.10.2.

Литература: [5, гл. 14].

18°. Отношение площадей проекций

Площадь ортогональной проекции фигуры равна площади исходной фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостью, в которой расположена фигура, и плоскостью проекции.

Задачи: 62.2.10.4.

Литература: [7, гл. 2].

19°. Плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух остальных его плоских углов.

Задачи: 63.2.11.5.

Литература: [7, гл. 6, задача 6.5].

20°. Векторное произведение

Векторным произведением двух векторов a и b называют вектор c , длина которого равна площади параллелограмма, натянутого на векторы a и b , а направлен он перпендикулярно к a и b , причём так, что векторы a , b и c об-

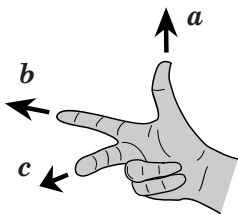


Рис. 102

разуют правую тройку, т. е. имеют такую же ориентацию, как большой (a), указательный (b) и средний (c) пальцы правой руки (рис. 102). Обозначение: $c = a \times b$; другое обозначение: $c = [a, b]$.

Задачи: 61.1.8.1.

Литература: [7, гл. 11, § 6].

Геометрические преобразования

21°. Осевая симметрия

Симметрией относительно прямой l (обозначение: S_l) называют преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X' , что l — серединный перпендикуляр к отрезку XX' . Это преобразование называют также *осевой симметрией*, а l — осью симметрии.

Задачи: 64.2.10.2.

Литература: [5, гл. 17].

22°. Поворот

Поворот относительно точки O на угол φ — это преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X' , что:

а) $OX' = OX$;

б) угол поворота от вектора \overrightarrow{OX} к вектору $\overrightarrow{OX'}$ равен φ .

Задачи: 64.2.10.2, 61.2.10.4 (поворот на 60°).

Литература: [5, гл. 18].

23°. Движение плоскости, имеющее неподвижную точку O , — осевая симметрия или поворот.

Доказательство. Выберем точки A и B так, чтобы точки A , B и O не лежали на одной прямой. Образ A' точки A лежит на окружности радиуса OA . Образ точки B лежит на окружности радиуса OB с центром O и на окружности радиуса AB с центром A' . Эти окружности пересекаются в двух точках, которые соответствует двум указанным движениям.

Задачи: 64.2.10.2.

Многочлены

24°. Деление многочленов и теорема Безу

Многочлены с рациональными коэффициентами можно делить с остатком, как и целые числа:

Теорема. Пусть f и g — многочлены, причём $g \neq 0$. Тогда найдутся единственные многочлены q и r , для которых а) $f = qg + r$; б) степень r меньше степени g .

При этом q и r называются частным и остатком от деления f на g соответственно. Аналогичная теорема верна для многочленов с действительными коэффициентами. Мы считаем, что степень нулевого многочлена меньше степени любого ненулевого многочлена.

Например, частное от деления $x^4 + 1$ на $x^2 + x$ равно $x^2 - x + 1$, а остаток равен $1 - x$.

Теорема Безу. а) Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - a$ равен $f(a)$.

б) многочлен $f(x)$ делится на $x - a$ тогда и только тогда, когда a — корень многочлена $f(x)$.

Задачи: 63.2.11.3 (теорема Безу).

Литература: [8].

25°. Корни многочлена

Теорема. Многочлен степени n имеет не более n корней.

Эта теорема используется при решении задачи 53.2.10.1.

Литература: [8].

26°. Рациональные корни многочлена

Теорема. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен степени n с целыми коэффициентами, имеющий рациональный корень $x_0 = p/q$, причём дробь p/q несократимая. Тогда числитель p этой дроби делит a_0 , а знаменатель q делит a_n .

Доказательство. По условию $a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} = 0$, т. е. $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$. Следовательно, $a_n p^n$ делится на q , а $a_0 q^n$ делится на p . По условию числа p и q взаимно простые, поэтому a_n делится на q , а a_0 делится на p .

В частности, если старший коэффициент a_n равен 1, то x_0 — целое число. Этот факт используется при решении задачи 58.1.8.2.

27°. Если в произведении двух многочленов с целыми коэффициентами каждый коэффициент заменить на его остаток от деления на 2, то результат будет такой же, как если бы мы сначала в каждом из двух исходных многочленов заменили коэффициенты на их остатки от деления на 2, а затем в полученном произведении снова заменили коэффициенты на остатки от деления на 2.

Действительно, коэффициент при x^k в произведении многочленов

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad \text{и} \quad b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

равен

$$a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \dots + a_0 b_k,$$

поэтому достаточно заметить, что при вычислении остатка от деления на 2 как суммы, так и произведения двух (а значит, и нескольких) целых чисел можно сложить или перемножить их остатки, а потом взять остаток полученного числа.

Разные факты

28°. Индукция, полная индукция

Математическая индукция — это метод доказательства утверждений типа: «Для каждого натурального n верно, что...». Такое утверждение можно рассматривать как цепочку утверждений: «Для $n = 1$ верно, что...», «Для $n = 2$ верно, что...» и т. д.

Первое утверждение цепочки называется *базой* (или *основанием*) индукции. Его обычно легко проверить. Затем доказывается *индуктивный переход* (или *шаг индукции*): «Если верно утверждение с номером n , то верно утверждение с номером $n + 1$ ». Индуктивный переход также можно

рассматривать как цепочку переходов: «Если верно утверждение 1, то верно утверждение 2», «Если верно утверждение 2, то верно утверждение 3» и т. д.

Если верна база индукции и верен индуктивный переход, то все утверждения верны (это и есть *принцип математической индукции*).

Иногда для доказательства очередного утверждения цепочки надо опираться на *все* предыдущие утверждения. Тогда индуктивный переход звучит так: «Если верны все утверждения с номерами от 1 до n , то верно и утверждение с номером $n + 1$ ».

Иногда удобен *индуктивный спуск*, или *обратная индукция*: если утверждение с номером $n > 1$ можно свести к одному или нескольким утверждениям с меньшими номерами и утверждение 1 верно, то все утверждения верны.

Часто спуск оформляется следующим образом: рассуждают от противного, рассматривают наименьшее n , для которого утверждение с номером n неверно, и доказывают, что найдётся такое $m < n$, что утверждение с номером m неверно.

Метод математической индукции применяется в весьма различных ситуациях. Для доказательства неравенств он применяется в задаче 67.2.8.2; для доказательства делимости — в задачах 61.1.10.1, 61.2.9.4. Метод математической индукции применяется также и в геометрии: см. задачи 58.2.9.2, 61.1.7.3, 61.2.9.3, 62.2.8.1, 65.2.11.4, 67.1.10.1.

Задачи: 58.2.9.2, 60.1.9.1, 61.1.7.3, 61.1.7.5, 61.1.10.1, 61.2.9.3, 61.2.9.4, 61.2.10.5, 62.1.10.3, 62.2.8.1, 62.2.10.5, 63.2.10.5, 65.2.10.5, 65.2.11.4, 67.1.10.1, 67.2.8.2.

Литература: [4].

29°. Правило крайнего

При решении некоторых задач бывает полезно рассмотреть наибольшее или наименьшее число, наибольшее или

наименьшее расстояние и т. п. Основанный на этом способ решения задач часто называют правилом крайнего.

Задачи: 59.1.9.5, 59.2.10.3, 60.1.10.5, 61.1.7.4, 65.1.9.5.

30°. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

В задачах часто используют неравенства $2ab \leq a^2 + b^2$ (верное для всех a и b), а также $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (верное для неотрицательных a и b). Иногда используют более общее неравенство, утверждающее что для неотрицательных a_1, a_2, \dots, a_n выполняется неравенство:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Задачи: 62.2.9.5, 63.1.8.3.

Литература: [6].

31°. Для любого натурального n сумма $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Доказательство. Применим индукцию по n . При $n=1$ требуемое равенство очевидно. Шаг индукции состоит в доказательстве тождества

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Это тождество легко проверяется.

Задачи: 58.1.7.3.

32°. Для любого натурального n выполняется неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Доказательство. Согласно формуле бинома Ньютона

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1) \dots \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

Воспользовавшись неравенствами $\frac{n-1}{2n} < \frac{1}{2}$, $\frac{n-2}{3n} < \frac{1}{2}$, $\frac{n-3}{4n} < \frac{1}{2}$ и т. д., получаем

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

что и требовалось.

Задачи: 58.1.10.2.

33°. Двоичная запись числа

Для записи натуральных чисел обычно используется десятичная запись. Для этого число n записывают в виде

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \dots + a_k \cdot 10^k,$$

где a_0, \dots, a_k — целые числа от 0 до 9, причём $a_k \neq 0$. Тогда десятичная запись числа n — это $a_k \dots a_3 a_2 a_1 a_0$.

Но иногда бывает полезна двоичная запись числа. Для этого число n записывают в виде

$$n = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + b_3 \cdot 2^3 + \dots + b_l \cdot 2^l,$$

где каждое из чисел b_0, \dots, b_l — это 0 или 1, причём $b_l \neq 0$. Тогда двоичная запись числа n — это $b_l \dots b_3 b_2 b_1 b_0$. Например, двоичная запись числа $6 = 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2$ — это 110.

Задачи: 59.1.7.1.

34°. Предел последовательностей

Говорят, что бесконечная последовательность a_n имеет *предел* L (*стремится к L* , когда n стремится к бесконечности), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое k , что для всякого $n > k$ выполняется неравенство $|a_n - L| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Это определение есть формализация утверждения « a_n очень близко к L , если n очень велико». Равносильное определение: каждый интервал, содержащий L , содержит все члены последовательности a_n за исключением, быть может, конечного числа.

При решении задачи 60.1.10.5 используется тот факт, что $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$. Этот же предел позволяет найти сумму бесконечной геометрической прогрессии $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$ при $|q| < 1$. Действительно,

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

поэтому при $|q| < 1$ сумма бесконечной геометрической прогрессии равна $\frac{1}{1 - q}$.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии используется при решении задачи 59.1.10.5.

Задачи: 59.1.10.5, 60.1.10.5.

Литература: [2, гл. 3].

Список литературы

- [1] Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981.
- [2] Зорич В. А. Математический анализ: в 2 т. — М.: МЦНМО, 2002.
- [3] Калужин Л. А. Основная теорема арифметики. — М.: Наука, 1969. — (Популярные лекции по математике, вып. 47).
- [4] Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. — М.: МЦНМО, 2004.
- [5] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2006.
- [6] Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. — М.: МЦНМО, 2007.
- [7] Прасолов В. В. Задачи по стереометрии. — М.: МЦНМО, 2010.
- [8] Табачников С. Л. Многочлены. — М.: Фазис, 1996.
- [9] Холл М., Комбинаторика, М.: Мир, 1970.
- [10] Шень А. Программирование: теоремы и задачи. — М.: МЦНМО, 2004.

Оглавление

Предисловие	• 3
Условия задач	• 7
Ответы	• 63
Указания	• 71
Решения	• 103
Основные факты	• 305
Список литературы	• 323