МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико – математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии

А. П. Веселов, Е. В. Троицкий

ЛЕКЦИИ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Москва, 2002

Веселов А. П., Троицкий Е. В. Лекции по аналитической геометрии. Учеб. пособие. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико–математическом ф–те МГУ. 2002. – 160 с.

Учебное пособие содержит конспект лекций по обязательному курсу аналитической геометрии, читаемому авторами на протяжении ряда лет для студентов первого курса механико–математического факультета МГУ.

Основной особенностью данного курса, впервые прочитанного первым автором, а затем переработанного вторым, является помещение в центр внимания теории конических сечений, что позволило, наряду с обычными аналитическими конструкциями, более явно представить геометрическую сторону предмета.

Для студентов первого курса.

Содержание

Введение: об истории предмета

Мой тезис состоит в том, что сущность аналитической геометрии состоит в изучении геометрических мест с помощью их уравнений и что это было известно грекам и служило основой их исследования конических сечений.

J.L. Coolidge "A History of Geometrical Methods"

В классической греческой геометрии, относящейся к периоду 350-150 лет до н.э., два труда занимают особое место. Первый — это знаменитые "Начала" Евклида, систематизировавшие многое из того, что было известно математикам того времени, включая то, что мы называем сейчас *элементарной геометрией.* Второй труд, принадлежащий Аполлонию из Перги (около 260 – 170 гг. до н.э.), по сути ознаменовал начало новой, *аналитической геометрии.* Речь идет о "Конических сечениях", трактате из 8 книг, из которых до нас дошли только 7 (известна также реконструкция восьмой книги, предложенная современником И.Ньютона знаменитым астрономом Э.Галлеем). Любопытно, что интерес греков к коническим сечениям возник еще в IV веке до н.э. в связи со знаменитой задачей об удвоении куба, которую можно рассматривать как задачу о нахождении точки пересечения двух парабол: $x^2 = y$ и $y^2 = 2x$. Среди предшественников Аполлония в этом направлении следует упомянуть ученика Евдокса Менехма, Гиппократа Хиосского и Аристея. В частности, Аристей в работе "О пространственных местах" уже рассматривал три различных типа конических сечений: эллипс, гиперболу и параболу.

Аполлоний начинает с описания этих кривых, используя так называемый метод приложения площадей. Если говорить в современных терминах, то он выводит их уравнения в системе координат, оси которой — диаметр кривой и касательная в одной из концевых точек:

$$
\begin{array}{lcll}
y^2 & = & px - \frac{p}{a}x^2 & \text{(эллипс)}, \\
y^2 & = & px & \text{(парабола)}, \\
y^2 & = & px + \frac{p}{a}x^2 & \text{(гипербола)}.
\end{array}
$$

Знаки в этих уравнениях объясняют терминологию: "эллипс" — недостаток, "гипербола" — избыток. В своем фундаментальном труде Аполлоний исследовал основные свойства этих кривых, включая фокусы, сопряженные диаметры, касательные и заложил начала теории поляр.

Единственное, что отделяло его от современной аналитической геометрии коник, — отсутствие удобной системы обозначений, которую принесла в математику значительно позже алгебра, пришедшая с арабского Востока.

Заслуга введения такой системы обозначений (которой мы пользуемся до сих пор!) принадлежит великому Рене Декарту, чья "Геометрия", изданная в 1637 году, по праву считается основополагающей для современной аналитической геометрии. Сама идея использовать алгебру в геометрии высказывалась ранее другим замечательным математиком, современником Декарта, Пьером Ферма, исходившего из работ александрийских математиков, в частности, Аполлония. Именно, Ферма впервые установил, что уравнения первой степени задают прямые, а второй — конические сечения.

Открытие метода координат дало толчок к развитию всей математики, для которой XVII век стал эпохой расцвета. Создание математического анализа стало одной из важнейших вех, а знаменитые "Математические начала натуральной философии" И.Ньютона, появившиеся в 1687 году, ознаменовали появление новой области естествознания — математической физики.

Что касается геометрии, то образовались три ее новые ветви: *алгебраическая, проективная* и *дифференциальная геометрия.* Мы остановимся лишь на одной из них: проективной геометрии, имеющей непосредственное отношение к нашему курсу.

Истоки проективной геометрии берут свое начало в теории перспективы в живописи эпохи Возрождения. Один из первых математических трудов в этом направлении был написан французским архитектором и инженером Жераром Дезаргом в 1639 году. Название его замечательно: "Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью". Новизна точки зрения Дезарга состоит в том, что он рассматривает конические сечения как проекции окружности. Дезарг вводит "бесконечно удаленные точки", гармонические четверки, разрабатывает теорию поляр и доказывает знаменитую теорему о треугольниках, носящую теперь его имя.

В том же году юный Блез Паскаль (в возрасте 16 лет!) пишет “Опыт о конических сечениях”, где он доказывает замечательное свойство шестиугольника, вписанного в коническое сечение (теорема Паскаля о "мистической гексаграмме"), которое тоже естественно отнести к проективной геометрию

Последовавшее бурное развитие анализа бесконечно малых привело к смещению интереса математиков в сторону математического анализа и расцвет проективной геометрии начался лишь в XIX веке.

Офицер наполеоновской армии Жан-Виктор Понселе, находясь в русском плену, начал свой знаменитый “Трактат о проективных свойствах фигур”, опубликованный в 1822 году. Понселе отталкивался от методов Дезарга. После этого труда проективная геометрия стала рассматриваться как самостоятельная область геометрия. Работы Мёбиуса, Плюккера и Шаля окончательно сформировали ее современный облик.

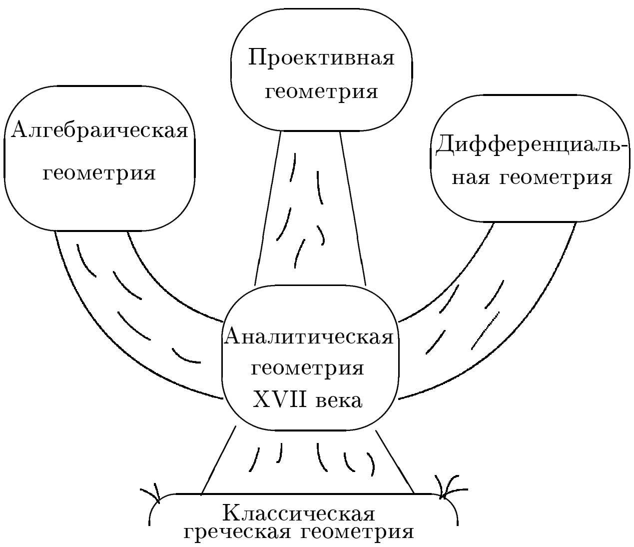


Рис. 1. Геометрическое древо

На рис. 1 изображено (очень условно) древо аналитической геометрии. В нашем курсе мы пройдемся по его стволу, избрав в качестве центрального объекта конические сечения. Элементы алгебраической геометрии появятся лишь эпизодически, дифференциальная и неевклидова геометрия не будут затронуты совсем.

1. Элементы векторной алгебры

1.1. **Векторы в пространстве.** В нашем изложении мы будем следовать наглядно-геометрическим представлениям, хотя возможен и аксиоматический подход.

Закрепленный *вектор* — направленный отрезок, т. е. упорядоченная пара точек. Будем обозначать векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \ldots$ Вектор $\overrightarrow{AA}$ называется *нулевым* и обозначается 0_A. *Длина вектора* — расстояние между его концами: $|\overrightarrow{AB}| := \rho(A, B)$. В частности, длина вектора равна нулю тогда и только тогда, когда он нулевой. Закрепленные векторы *коллинеарны,* если существует прямая, которой они параллельны. Нулевой вектор считается параллельным, а следовательно, и коллинеарным любому вектору. Закрепленные векторы *компланарны,* если существует плоскость, которой они параллельны. Закрепленные векторы *равны,* если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.

Определение 1.1. Напомним, что *отношением эквивалентности* на множестве M называется некоторое множество упорядоченных пар S (т. е. $S \subset M \times M$), причем выполнены аксиомы (условие $(m, n) \in S$ обычно записывается как $m \sim n$):

- $m \sim m$ (тождества)
- из $m \sim n$ следует $n \sim m$ (симметричности)
- из $m \sim n$ и $n \sim k$ следует $m \sim k$ (транзитивности)

для любых $m, n, k \in M$.

В этой ситуации M распадается на непересекающиеся множества, состоящие из всех элементов, эквивалентных одному. Эти множества называются *классами эквивалентности.* Класс эквивалентности, содержащий $m \in M$, обозначается $[m]$.

Лемма 1.2. *Равенство является отношением эквивалентности на множестве закрепленных векторов.*

Доказательство. Очевидно. $\square$

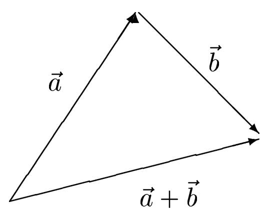
Определение 1.3. *Вектором* (или *свободным вектором*) называется соответствующий класс эквивалентности.

Будем обозначать векторы через $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \dots$ (хотя правильнее $[\overrightarrow{AB}]$, $[\overrightarrow{CD}]$, ...) или $\vec{a}, \vec{b}, \dots$, а вещественные числа — через $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \dots$

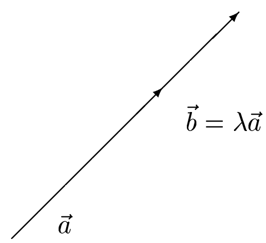
Понятия коллинеарности и компланарности переносятся на (свободные) векторы.

Линейные операции над векторами определяются следующим образом.

(1) *Сложение* по правилу треугольника:



(2) *Умножение* вектора на вещественное число:



по правилу:
1) $\vec{b}$ коллинеарен $\vec{a}$;
2) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;
3) $\vec{b}$ сонаправлен с $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противонаправлен, если $\lambda < 0$.

Эти операции корректно определены на множестве (свободных) векторов.

Свойства линейных операций над векторами :

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность сложения = правило параллелограмма);

2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (ассоциативность сложения = правило четырехугольника);
3. $\vec{a} + 0 = \vec{a}$ (существование нулевого вектора $= [0_A]$);
4. $\vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = 0$ (существование обратного);
5. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ (ассоциативность);

$$\left.\begin{array}{l} 6.\ (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \\ 7.\ \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \end{array}\right\} \text{(дистрибутивность);}$$

8. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (единица).

Определение 1.4. Множество с операцией сложения и операцией умножения на числа, удовлетворяющими этим аксиомам, называется *линейным пространством.*

Заметим, что все основные утверждения про операции над геометрическими векторами могут быть выведены из этих аксиом, без привлечения конкретного описания операций (но, например, это не относится к длинам и т. п.). В этом смысле аксиомы образуют полную систему. Более того, она излишне полна (подумайте, что можно выбросить).

1.2. **Базисы и координаты.**

Определение 1.5. *Линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ *с коэффициентами* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ называется вектор $\alpha_1\vec{a}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n$. Если все α_i равны нулю, то линейная комбинация называется *тривиальной,* а в противном случае — *нетривиальной.*

Определение 1.6. Векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ *линейно зависимы,* если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, т. е. найдутся такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, что $\alpha_1\vec{a}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$. В противном случае векторы *линейно независимы,* т. е. из равенства $\alpha_1\vec{a}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ всегда следует $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Лемма 1.7. *Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией остальных.*

Доказательство. Необходимость. Пусть имеется нетривиальная линейная комбинация векторов, равная нулю: $\alpha_1\vec{a}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$. Один из коэффициентов, скажем, α_i, не равен нулю.

Тогда

$$\vec{a}_i = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\right)\cdot\vec{a}_1 + \dots + \left(-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right)\cdot\vec{a}_{i-1} + \\ + \left(-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\right)\cdot\vec{a}_{i+1} + \dots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_i}\right)\cdot\vec{a}_n.$$

Достаточность. Пусть $\vec{a}_i = \beta_1\vec{a}_1 + \dots + \beta_{i-1}\vec{a}_{i-1} + \beta_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \dots \beta_n\vec{a}_n$. Тогда

$$(-1)\vec{a}_i + \beta_1\vec{a}_1 + \dots + \beta_{i-1}\vec{a}_{i-1} + \beta_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \dots \beta_n\vec{a}_n = 0$$

— нетривиальная (первый коэффициент — ненулевой) линейная комбинация, равная нулю. □

Лемма 1.8. *Пусть $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ — линейно зависимая система векторов. Тогда $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n$ — линейно зависимая система, каковы бы не были векторы $\vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n$.*

Доказательство. Если $\alpha_1\vec{a}_1 + \dots \alpha_k\vec{a}_k = 0$ — нетривиальная комбинация, то $\alpha_1\vec{a}_1 + \dots \alpha_k\vec{a}_k + 0\cdot\vec{a}_{k+1} + \dots + 0\cdot\vec{a}_n = 0$ также нетривиальная комбинация. □

Лемма 1.9. (1) *Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

(2) *Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

(3) *Четыре вектора всегда линейно зависимы.*

Доказательство. 1. По определению операции умножения на число.

2. По лемме 1.7 из линейной зависимости следует, что $c = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, т. е. c компланарен $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Обратно, пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, тогда они линейно зависимы и по лемме 1.8 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы. Если же $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то c можно представить в виде $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, “достроив параллелограмм”.

3. Если какие-либо 3 вектора компланарны, то они линейно зависимы по предыдущему пункту, а по лемме 1.8 зависимы все 4. Если же таких 3 векторов среди $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ нет, то пары $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ неколлинеарны, а следовательно определяют (с точностью до

параллельного переноса) две плоскости, которые не параллельны (иначе все 4 были бы компланарны). Тогда направляющий вектор f прямой пересечения раскладывается, с одной стороны, в линейную комбинацию $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а с другой — $\vec{c}$ и $\vec{d}$ (ср. с доказательством п. 2):

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = f = \gamma\vec{c} + \delta\vec{d}.$$

Если при этом один из коэффициентов, скажем, α, равен 0, то $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ компланарны, что противоречит предположению. Таким образом,

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \gamma\vec{c} - \delta\vec{d} = 0$$

— нетривиальная комбинация. □

Определение 1.10. *Базисом* на прямой (соотв., на плоскости, в пространстве) называется упорядоченный набор из 1 (соотв., 2, 3) линейно независимых векторов.

Замечание 1.11. Для прямой это просто означает, что вектор ненулевой.

Теорема 1.12. *Всякий вектор пространства (соотв., плоскости, прямой) однозначно представляется в виде линейной комбинации векторов данного базиса.*

Доказательство. Докажем существование комбинации. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — данный базис, а $\vec{a}$ — произвольный вектор. По лемме 1.9 (п. 3) векторы $\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно зависимы, так что существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha\vec{a} + \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 = 0$. Пусть $\alpha = 0$. Тогда $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 = 0$ — нетривиальная линейная комбинация, что противоречит линейной независимости векторов базиса. Значит, $\alpha \neq 0$ и искомая комбинация

$$\vec{a} = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha}\right) \cdot \vec{e}_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha}\right) \cdot \vec{e}_2 + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha}\right) \cdot \vec{e}_3.$$

Докажем единственность. Пусть имеются две различные тройки: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, причем

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3.$$

Тогда $0 = (\alpha_1 - \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{e}_2 + (\alpha_3 - \beta_3)\vec{e}_3$ — нетривиальная комбинация, что противоречит линейной независимости базиса.

Аналогично для прямой и плоскости. □

Определение 1.13. *Координатами* (или *компонентами*) вектора $\vec{a}$ *относительно базиса* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называются такие (однозначно определенные) числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, что $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$. Будем записывать также $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Лемма 1.14. *Координаты суммы векторов равны сумме координат. Координаты $\lambda\vec{a}$ равны $\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3$ (в обозначениях определения).*

Доказательство. Пусть $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3$. По свойствам 1, 2, 5, 6, 7:

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3) + (\beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3) =$$

$$= \alpha_1\vec{e}_1 + \beta_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \beta_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 + \beta_3\vec{e}_3 =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{e}_3,$$

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3) = \lambda(\alpha_1\vec{e}_1) + \lambda(\alpha_2\vec{e}_2) + \lambda(\alpha_3\vec{e}_3) =$$
$$= (\lambda\alpha_1)\vec{e}_1 + (\lambda\alpha_2)\vec{e}_2 + (\lambda\alpha_3)\vec{e}_3.$$

□

Определение 1.15. *Аффинная система координат* в пространстве задается выбором *репера* — произвольной точки O и базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Координаты точки X относительно репера $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ определяются как координаты вектора $\overrightarrow{OX}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\overrightarrow{OX} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

(их мы будем обозначать латинскими буквами). Записываем $X(x_1, x_2, x_3)$.

Лемма 1.16. *Пусть $X(x_1, x_2, x_3)$ и $Y(y_1, y_2, y_3)$ — координаты двух точек. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{XY}$ относительно базиса, входящего в данную аффинную систему координат, равны $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$.*

Доказательство. По определению аффинной системы координат $\overrightarrow{OX}(x_1, x_2, x_3)$ и $\overrightarrow{OY}(y_1, y_2, y_3)$, а $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$. По лемме 1.14 получаем требуемый результат. □

Определение 1.17. Базис называется *ортогональным,* если векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ перпендикулярны. Если они к тому же единичной длины, то базис называется *ортонормированным.* Аффинная система координат называется *прямоугольной,* если соответствующий базис ортонормирован.

1.3. **Деление отрезка в данном отношении.** Пусть заданы две точки A и B своими аффинными координатами (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) (в некотором репере) и отношение $\frac{\lambda}{\mu}$. Найдем аффинные координаты (x_1, x_2, x_3) такой точки X отрезка AB, что $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{\lambda}{\mu}$, т. е. делящей отрезок в данном отношении.

Координаты векторов $\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{XB}$ в данном базисе по лемме 1.16 равны, соответственно, $(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3)$ и $(b_1 - x_1, b_2 - x_2, b_3 - x_3)$. По лемме 1.14 условие отношения (поскольку векторы сонаправлены) перейдет в совокупность условий:

$$\begin{aligned} \mu(x_1 - a_1) &= \lambda(b_1 - x_1), \\ \mu(x_2 - a_2) &= \lambda(b_2 - x_2), \\ \mu(x_3 - a_3) &= \lambda(b_3 - x_3), \end{aligned}$$

имеющих единственное решение

$$x_i = \frac{\mu a_i + \lambda b_i}{\mu + \lambda}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Заметим, что можно рассматривать и отрицательные λ или μ, так что условие деления в этой общей форме будет иметь вид

$$\mu\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{XB}.$$

Формулы ответа будут, конечно, теми же, что и выше.

1.4. **Скалярное произведение.**

Определение 1.18. *Скалярным произведением* двух (ненулевых) векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Если один из векторов нулевой, то положим $(\vec{a}, \vec{b}) := 0$.

Лемма 1.19. *Пусть в некотором ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ вектор $\vec{a}$ имеет координаты a_1, a_2, a_3. Тогда*

$$a_i = (\vec{a}, \vec{e}_i), \qquad i = 1, 2, 3.$$

Доказательство. Координаты вектора могут быть найдены путем проекций в прямоугольном параллелепипеде (т. к. единственность доказана). Таким образом,

$$a_i = |\vec{a}| \cdot \cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{e}_i) = |\vec{a}| \cdot |\vec{e}_i| \cdot \cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{e}_i) = (\vec{a}, \vec{e}_i).$$

□

Теорема 1.20. *Скалярное произведение обладает следующими свойствами, определяющими его однозначно:*

(1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ (*симметричность*);
(2) $(\vec{a} + \vec{b}, c) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;
(3) $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda\,(\vec{a}, \vec{b})$ ((2)+(3) *= линейность по первому аргументу*);
(4) $(\vec{a}.\vec{a}) = |\vec{a}|^2 \geqslant 0$*, в частности,* $(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = 0$ (*положительность и связь с длиной*).

Доказательство. Пункты 1, 3 и 4 очевидны. Если $\vec{c} = 0$, то п. 2 выполняется. Если же $\vec{c} \neq 0$, то можно путем деления на $|\vec{c}|$ и применения пп. 1 и 3 свести к случаю $|\vec{c}| = 1$. В этой ситуации рассмотрим ортонормированный базис $\vec{e}_1 = \vec{c}, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Тогда соответствующие скалярные произведения совпадают с первыми координатами:

$$(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{e}_1) = a_1, \qquad (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{e}_1) = b_1.$$

Поскольку координаты суммы равны сумме координат, то

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = a_1 + b_1 = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}).$$

Покажем, что свойства 1-4 однозначно определяют значения скалярного произведения. Свойство 4 определяет $(\vec{a}, \vec{a})$. В силу пп. 1 и 4 имеем

$$(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) + (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{a}) + (\vec{b}, \vec{b}) = 2(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{a}) + (\vec{b}, \vec{b}),$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ (\vec{a}, \vec{a}) + (\vec{b}, \vec{b}) - (\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) \right\}.$$

□

Теорема 1.21. *В произвольном ортонормированном базисе* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ *скалярное произведение имеет вид*

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Доказательство.

$$(\vec a,\vec b)=(a_1\vec e_1+a_2\vec e_2+a_3\vec e_3,\vec b)\overset{2)}{=}\sum_{i=1}^{3}(a_i\vec e_i,\vec b)\overset{3)}{=}\sum_{i=1}^{3}a_i(\vec e_i,\vec b)\overset{1)}{=}$$

$$=\sum_{i=1}^{3}a_i(\vec b,\vec e_i)=\sum_{i=1}^{3}a_i(b_1\vec e_1+b_2\vec e_2+b_3\vec e_3,\vec e_i)\overset{2,3)}{=}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{3}a_ib_j(\vec e_i,\vec e_j)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

□

Следствие 1.22. *В прямоугольной системе координат угол между векторами определяется формулой*

$$\cos(\widehat{\vec a,\vec b})=\frac{(\vec a,\vec b)}{|\vec a|\cdot|\vec b|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

1.5. **Площадь, объем и ориентация.** Вычислим площадь S параллелограмма $\Pi(\vec a,\vec b)$, натянутого на вектора $\vec a$ и $\vec b$ на плоскости. Пусть задан ортонормированный базис $\vec e_1,\vec e_2$ плоскости, так что $\vec a=(a_1,a_2)$, $\vec b=(b_1,b_2)$. Тогда (если угол между $\vec a$ и $\vec b$ равен φ)

$$S=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\varphi=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sqrt{1-\cos^2\varphi}=$$

$$=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sqrt{1-\frac{(a_1b_1+a_2b_2)^2}{(a_1^2+a_2^2)\cdot(b_1^2+b_2^2)}}=$$

$$=\sqrt{(a_1^2+a_2^2)\cdot(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}=$$

$$=\sqrt{(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2-2a_1b_1a_2b_2}=|a_1b_2-a_2b_1|.$$

Напомним, что выражение $a_1b_2-a_2b_1$ называется *определителем* или *детерминантом* матрицы $\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}$ и обозначается $\det\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}$ или просто $\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$.

Определение 1.23. *Ориентированной площадью параллелограмма* $\Pi(\vec{a},\vec{b})$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ называется величина $S_{or}(\vec{a},\vec{b}) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. Ее абсолютная величина совпадает с площадью параллелограмма, а знак (в случае линейно независимых $\vec{a}$ и $\vec{b}$) называется *ориентацией пары* $\vec{a},\vec{b}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Лемма 1.24. *Ориентированная площадь обладает следующими свойствами:*

(1) $S_{or}(\vec{a},\vec{b}) = -S_{or}(\vec{b},\vec{a})$ (*кососимметричность*);
(2) $S_{or}(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = S_{or}(\vec{a},\vec{c}) + S_{or}(\vec{b},\vec{c})$,
(3) $S_{or}(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda S_{or}(\vec{a},\vec{b})$ ((2)+(3) =*линейность по первому аргументу*);
(4) $S_{or}(\vec{a},\vec{a}) = 0$.

Доказательство. Все утверждения следуют немедленно из определения. □

Лемма 1.25. *Ориентация пары* $\vec{a},\vec{b}$ *относительно базиса* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ *положительна, если кратчайший поворот от* $\vec{a}$ *к* $\vec{b}$ *происходит в том же направлении, что и от* $\vec{e}_1$ *к* $\vec{e}_2$.

Доказательство. Будет проведено сразу для трехмерного случая. □

Определение 1.26. *Ориентированным объемом параллелепипеда* $\Pi(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ пространства, относительно ортонормированного базиса $\varepsilon := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ называется определитель

$$V^{\varepsilon}_{or}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} =$$
$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 - c_1b_2a_3.$$

В случае линейно независимых векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ его знак называется *ориентацией тройки* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ относительно ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

После доказательства некоторых свойств мы докажем следующее утверждение, оправдывающее это название.

Теорема 1.27. *Абсолютная величина ориентированного объема параллелепипеда равна объему параллелепипеда.*

Лемма 1.28. *Пусть фиксирован базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и некоторый вектор вращается в плоскости или вокруг оси с постоянной скоростью. Тогда его коэффициенты являются непрерывными функциями времени. Аналогично для растяжения или сжатия вектора.*

Доказательство. Поскольку компоненты вектора относительно одного фиксированного базиса являются линейными функциями коэффициентов относительно другого базиса, то для доказательства теоремы достаточно рассмотреть удобный базис. Для вращения таковым будет $\vec{e}_3$ =ось вращения причем направление вращения видно с конца $\vec{e}_3$ против часовой стрелки, $\vec{e}_1$ =направление проекции начального положения вектора. Тогда (с точностью до выбора скорости вращения) вращающийся вектор будет иметь координаты $(\alpha \cdot \cos t, \alpha \cdot \sin t, \beta)$. Для растяжения же — $(\alpha t, \beta t, \gamma t)$, где t пробегает некоторый отрезок. Эти формулы показывают искомую непрерывную зависимость. □

Лемма 1.29 (из курса алгебры). *Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда одна из его строк является линейной комбинацией других.*

Лемма 1.30. *Ориентированный объем равен нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны.*

Доказательство. Сразу следует из предыдущей леммы. □

Под *непрерывной деформацией* будем понимать такое семейство базисов, каждая координата каждого вектора которых является непрерывной функцией параметра.

Теорема 1.31. *Базис $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеет положительную ориентацию относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ тогда и только тогда, когда непрерывной деформацией в пространстве базисов можно его перевести в $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.*

Доказательство. Допустим, такая деформация существует. Тогда определитель $V^{\varepsilon}_{or}(\vec{a}(t), \vec{b}(t), \vec{c}(t))$ является непрерывной функцией параметра t и принимает все промежуточные значения. В частности, если значение $V^{\varepsilon}_{or}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$, то в какой-то момент должен получиться 0, так как $V_{or}^{\varepsilon}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$. Это противоречит предыдущей лемме.

Обратно, построим по лемме 1.28 непрерывную деформацию: сначала совместим $\vec{a}$ с $\vec{e}_1$ так, чтобы $\vec{b}$ лежал в плоскости $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ с той же стороны, что и $\vec{e}_2$. Затем совместим $\vec{b}$ с $\vec{e}_2$. Раз знак $+$, то $\vec{e}_3$ и c лежат с одной стороны от плоскости и их можно совместить. $\square$

Следствие 1.32 (из доказательства)**.** *Два базиса имеют одинаковую ориентацию тогда и только тогда, когда с конца третьего вектора кратчайшее движение от первого ко второму осуществляется в одну и ту же сторону* (*либо против, либо по часовой стрелке*) *для обоих базисов.*

Следствие 1.33. *Все базисы распадаются на два класса, представителей каждого из которых можно связать непрерывной деформацией.*

Определение 1.34. *Заданием ориентации* называется выбор одного из этих классов. Обычно при движении "против" (см. следствие 1.32) ориентация называется правой, а в другом случае — левой. Пространство с выбранной ориентацией будем называть *ориентированным пространством.*

Замечание 1.35. Можно показать, что матрица из координат третьего базиса в первом равна произведению матриц третьего во втором и второго в первом. Определители при этом перемножаются. Таким образом, все базисы внутри одного класса имеют положительный объем друг относительно друга.

Лемма 1.36. *Ориентация $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ противоположна ориентации $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.*

Доказательство. Повернем тройку $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ как твердое тело так, чтобы $\vec{b}$ совпало с $\vec{a}$, а $\vec{a}$ — с $\vec{b}$. Тогда $\vec{c}$ и образ $\vec{c}$ окажутся с разных сторон от плоскости $\vec{a}, \vec{b}$. $\square$

Определение 1.37. *Ориентированным объемом* параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *ориентированного пространства* называется число $V_{or}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, равное по абсолютной величине объему этого параллелепипеда, и имеющее знак "+", если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ положительно ориентирована, и знак "-" в противном случае. Заметим (как видно из обозначения), что новое определение не связано с конкретным базисом.

Определение 1.38. *Векторным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в ориентированном пространстве называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $[\vec{a}, \vec{b}]$, и определяемый следующим образом.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **неколлинеарны**, то $\vec{c}$ обладает следующими свойствами:

(1) длина $\vec{c}$ равна площади параллелограмма $\Pi(\vec{a}, \vec{b})$;
(2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
(3) тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеет положительную ориентацию.

По определению ориентации такой вектор $\vec{c}$ существует и однозначно определен.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **коллинеарны**, то $\vec{c} := 0$.

Лемма 1.39. *Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — положительно ориентированный ортонормированный базис. Тогда*

$$[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{e}_3, \qquad [\vec{e}_1, \vec{e}_3] = -\vec{e}_2, \qquad [\vec{e}_2, \vec{e}_3] = \vec{e}_1.$$

Доказательство. Очевидно. □

Определение 1.40. Число $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle := ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ называется *смешанным произведением* тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Теорема 1.41. $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle := V_{or}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Доказательство. То, что знаки совпадают, сразу следует из определения ориентации. Проверим совпадение абсолютных величин, т. е. что модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда.

$$|\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle| = |\,[\vec{a}, \vec{b}]\,| \cdot |\vec{c}| \cdot |\cos \measuredangle(\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}])| = S \cdot h = |V_{or}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|,$$

поскольку c перпендикулярно плоскости, натянутой на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Здесь через S обозначена площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а h — соответствующая высота параллелепипеда. □

Теорема 1.42. *Смешанное произведение кососимметрично по любой паре аргументов и линейно по каждому из них:*

(1) $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = -\langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle = -\langle \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\langle \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \rangle$;

(2) $\langle\vec a+\vec b,\vec c,\vec d\rangle=\langle\vec a,\vec c,\vec d\rangle+\langle\vec b,\vec c,\vec d\rangle;\qquad \langle\lambda\vec a,\vec b,\vec c\rangle=\lambda\langle\vec a,\vec b,\vec c\rangle;$
$\langle\vec a,\vec b+\vec c,\vec d\rangle=\langle\vec a,\vec b,\vec d\rangle+\langle\vec a,\vec c,\vec d\rangle;\quad \langle\vec a,\lambda\vec b,\vec c\rangle=\lambda\langle\vec a,\vec b,\vec c\rangle;$
$\langle\vec a,\vec b,\vec c+\vec d\rangle=\langle\vec a,\vec b,\vec c\rangle+\langle\vec a,\vec b,\vec d\rangle;\quad \langle\vec a,\vec b,\lambda\vec c\rangle=\lambda\langle\vec a,\vec b,\vec c\rangle.$

Доказательство. 1) По предыдущему утверждению абсолютная величина (т. е. объем параллелепипеда) не меняется. Утверждение про знаки следует из леммы 1.36.

2) Линейность по третьему аргументу очевидна. Из этого при помощи п. 1 следует линейность по остальным аргументам. □

Теорема 1.43. *Векторное произведение обладает следующими свойствами:*

(1) $[\vec a,\vec b]=-[\vec b,\vec a]$;
(2) $[\lambda\vec a,\vec b]=\lambda[\vec a,\vec b]$;
(3) $[\vec a+\vec b,\vec c]=[\vec a,c]+[\vec b,\vec c]$.

Доказательство. Пп. 1 и 2 сразу вытекают из определения. Для доказательства п. 3 рассмотрим вектор $d=[\vec a+\vec b,\vec c]-[\vec a,\vec c]-[\vec b,\vec c]$. Тогда

$$(\vec d,\vec d)=([\vec a+\vec b,\vec c]-[\vec a,\vec c]-[\vec b,\vec c],\vec d)=\langle\vec a+\vec b,\vec c,\vec d\rangle-\langle\vec a,\vec c,\vec d\rangle-\langle\vec b,\vec c,\vec d\rangle=0.$$

Значит, $d=0$, а это и есть п. 3. □

Введем обозначение $|A|:=\det A$.

Теорема 1.44. *Пусть $\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3$ — ортонормированный базис положительной ориентации. Тогда*

$$[\vec a,\vec b]=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\cdot\vec e_1+\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}\cdot\vec e_2+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\cdot\vec e_3$$

и

$$\langle\vec a,\vec b,\vec c\rangle=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

Первое равенство символически записывают в виде

$$[\vec a,\vec b]=\begin{vmatrix}\vec e_1&\vec e_2&\vec e_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

Доказательство. Воспользуемся предыдущей теоремой и леммой 1.39:

$$[\vec{a},\vec{b}] = [a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3] = a_1b_1\underbrace{[\vec{e}_1,\vec{e}_1]}_{0}+$$

$$+a_1b_2\underbrace{[\vec{e}_1,\vec{e}_2]}_{\vec{e}_3}+a_1b_3\underbrace{[\vec{e}_1,\vec{e}_3]}_{-\vec{e}_2}+a_2b_1\underbrace{[\vec{e}_2,\vec{e}_1]}_{-\vec{e}_3}+a_2b_2\underbrace{[\vec{e}_2,\vec{e}_2]}_{0}+$$

$$+a_2b_3\underbrace{[\vec{e}_2,\vec{e}_3]}_{\vec{e}_1}+a_3b_1\underbrace{[\vec{e}_3,\vec{e}_1]}_{\vec{e}_2}+a_3b_2\underbrace{[\vec{e}_3,\vec{e}_2]}_{-\vec{e}_1}+a_3b_3\underbrace{[\vec{e}_3,\vec{e}_3]}_{0}=$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3.$$

Для доказательства второго соотношения воспользуемся определением смешанного произведения, первым соотношением и записью скалярного произведения в прямоугольных координатах:

$$\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle = ([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \cdot c_2+$$

$$+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

□

Следствие 1.45. *Для любого ортонормированного базиса* $\varepsilon = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$*, имеющего положительную ориентацию в ориентированном пространстве, выполняется*

$$\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle = V_{or}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = V^{\varepsilon}_{or}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

для любых векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$*. В частности, мы доказали теорему* 1.27*, сформулированную в начале параграфа:* $|V^{\varepsilon}_{or}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$ *равняется объему соответствующего параллелепипеда.*

Следствие 1.46. *Площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *пространства записывается в прямоугольных координатах* (*любой ориентации*) *как*

$$S(\Pi(\vec{a},\vec{b})) = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Теорема 1.47. *Имеют место следующие формулы:*

(1) $[\vec a,[\vec b,\vec c]]=\vec b(\vec a,\vec c)-\vec c(\vec a,\vec b)$ (*формула двойного векторного произведения или "бац минус цаб"*);

(2) $[\vec a,[\vec b,\vec c]]+[\vec b,[\vec c,\vec a]]+[\vec c,[\vec a,\vec b]]=0$ (*тождество Якоби*).

Доказательство. 1). Выберем ортонормированный базис $\vec e_1$, $\vec e_2$, $\vec e_3$ положительной ориентации так, что

$$\vec a=(a_1,a_2,a_3),\qquad \vec b=(b_1,b_2,0),\qquad \vec c=(c_1,0,0),$$

т. е. $\vec e_1$ сонаправлен с $\vec c$, $\vec e_2$ лежит в плоскости $\vec b,\vec c$. Тогда

$$[\vec b,\vec c]=\left(\begin{vmatrix} b_2 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix} 0 & b_1\\ 0 & c_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & 0\end{vmatrix}\right)=(0,0,-b_2c_1),$$

$$[\vec a,[\vec b,\vec c]]=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ 0 & -b_2c_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1\\ -b_2c_1 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ 0 & 0\end{vmatrix}\right)=$$
$$=(-a_2b_2c_1,a_1b_2c_1,0).$$

С другой стороны,

$$(\vec a,\vec c)=a_1c_1,\qquad \vec b(\vec a,\vec c)=(a_1c_1b_1,a_1c_1b_2,0),$$

$$(\vec a,\vec b)=a_1b_1+a_2b_2,\qquad \vec c(\vec a,\vec b)=(a_1b_1c_1+a_2b_2c_1,0,0),$$

откуда $\vec b(\vec a,\vec c)-\vec c(\vec a,\vec b)=(-a_2b_2c_1,a_1c_1b_2,0)=[\vec a,[\vec b,\vec c]]$.

2). По п. 1) :

$$\begin{array}{lrcl} & [\vec a,[\vec b,\vec c]] & = & \vec b(\vec a,\vec c)-\vec c(\vec a,\vec b)\\ + & [\vec b,[\vec c,\vec a]] & = & \vec c(\vec a,\vec b)-\vec a(\vec b,\vec c)\\ & [\vec c,[\vec a,\vec b]] & = & \vec a(\vec b,\vec c)-\vec b(\vec a,\vec c)\\ \hline & [\vec a,[\vec b,\vec c]]+[\vec b,[\vec c,\vec a]]+[\vec c,[\vec a,\vec b]] & = & 0\end{array}$$

□

2. Прямые на плоскости

2.1. **Прямые как линии первого порядка.**

Определение 2.1. *Алгебраическая линия (кривая)* на плоскости — множество, задаваемое в некоторой аффинной системе координат уравнением вида $F(x,y)=0$, где F — многочлен:

$$F(x,y)=\sum_{i,j\leqslant n}a_{ij}x^iy^j,\qquad i,j=0,1,2,\dots$$

Число n называется *степенью многочлена* F и *порядком соответствующей кривой,* если хотя бы один из коэффициентов a_{ij} с $i+j=n$ отличен от 0.

Параметрическим уравнением кривой называется задание кривой в виде

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t). \end{cases} \quad \text{или} \quad \vec{r} = \vec{r}\,(t),$$

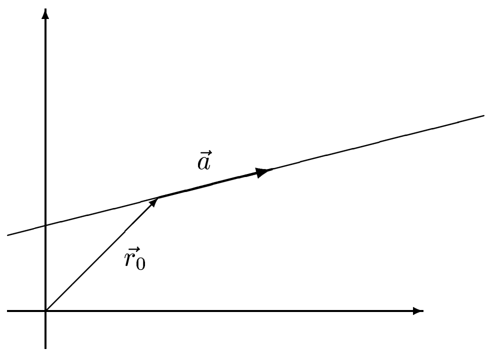
где t — параметр.

Пример 2.2. Окружность $x^2+y^2=1$ может быть задана в виде

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Прямая на плоскости может быть задана параметрически как

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t, \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases}$$



Здесь $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ — некоторая точка на прямой (начальная), а $\vec{a} = (\alpha, \beta)$ — некоторый ненулевой вектор (направляющий). Выражая t, получаем *каноническое уравнение прямой*

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}.$$

Замечание 2.3. В каноническом уравнении допускается равенство нулю некоторых (не всех) знаменателей. При этом соответствующий числитель приравнивается к 0.

Пример 2.4.

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{\beta} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = x_0.$$

Перейдем к *общему уравнению*:

$$\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0, \qquad Ax + By + C = 0,$$

где

$$A = \beta, \qquad B = -\alpha, \qquad C = \alpha y_0 - \beta x_0.$$

Итак, всякая прямая задается уравнением первого порядка. Обратно, всякое уравнение первого порядка задает прямую. Действительно, рассмотрим уравнение $Ax + By + C = 0$. Пусть, например, $A \neq 0$. Возьмем в качестве начальной точки $(x_0, 0)$, где x_0 определим из уравнения

$$Ax_0 + C = 0, \qquad x_0 = -\frac{C}{A}.$$

В качестве направляющего вектора выберем $(-B, A)$. Тогда исходное уравнение равносильно каноническому

$$\frac{x + \frac{C}{A}}{-B} = \frac{y - 0}{A}.$$

Теорема 2.5. *Прямые на плоскости есть в точности алгебраические линии первого порядка. При этом два уравнения*

$$F_1(x, y) := A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

и

$$F_2(x, y) := A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

задают одну и ту же прямую (в заданной системе координат) тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е. существует такое $\lambda \neq 0$, *что* $F_1 = \lambda F_2$, *т.е.* $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$.

Доказательство. Первое утверждение уже было доказано. Достаточность во втором очевидна. Докажем необходимость. Допустим, уравнения задают одну и ту же прямую. Как мы показали, ее направляющий вектор $(-B_1, A_1)$ или $(-B_2, A_2)$. Они коллинеарны, так что найдется такое $\lambda \neq 0$, что

$$A_1 = \lambda A_2, \qquad B_1 = \lambda B_2.$$

Рассмотрим любую точку (x_0, y_0) прямой. Тогда

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 - \lambda(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0,$$

$$C_1 - \lambda C_2 = 0, \qquad C_1 = \lambda C_2.$$

□

Лемма 2.6. *Векторы (α, β), параллельные прямой $Ax + By + C = 0$, определяются соответствующим однородным уравнением $A\alpha + B\beta = 0$.*

Доказательство. В классе любого вектора (α, β), параллельного прямой, имеется представитель $\overrightarrow{PQ}$, где P, а следовательно, и Q, лежит на прямой. Тогда, если $P(x_P, y_P)$, а $Q(x_Q, y_Q)$, то

$$Ax_P + By_P + C = 0, \qquad Ax_Q + By_Q + C = 0,$$

так что

$$A(x_Q - x_P) + B(y_Q - y_P) = 0, \qquad A\alpha + B\beta = 0.$$

Обратно, если $A\alpha + B\beta = 0$, то отложим его от точки (x_P, y_P) на прямой. Тогда другой конец $(x_Q, y_Q) = (x_P + \alpha, y_P + \beta)$ удовлетворяет уравнению

$$Ax_Q + By_Q + C = A(x_P + \alpha) + B(y_P + \beta) + C =$$
$$= (Ax_P + By_P + C) + (A\alpha + B\beta) = 0 + 0 = 0.$$

□

Теорема 2.7. *Две прямые с уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ пересекаются (в одной точке), если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, и параллельны (в т. ч. могут совпадать), если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$.*

Доказательство. Прямые параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы коллинеарны, т. е. $(-B_1, A_1)$ коллинеарен $(-B_2, A_2)$, что означает равенство нулю определителя $\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$. Методом исключения получаем и первое утверждение. □

Определение 2.8. Пусть фиксировано уравнение некоторой прямой $F(x, y) = Ax + By + C = 0$. *Положительная полуплоскость* для F определяется как множество F_+ точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $F(x, y) > 0$. Аналогично определяется *отрицательная полуплоскость* F_- как $F(x, y) < 0$.

Следующий результат показывает, что это определение геометрически оправдано.

Теорема 2.9. *Если точки P и Q лежат в одной полуплоскости, то и весь отрезок PQ лежит в ней. Если P и Q лежат в разных полуплоскостях, то отрезок PQ пересекает данную прямую.*

Доказательство. Пусть $P(x_P, y_P)$, $Q(x_Q, y_Q)$. Координаты точек отрезка PQ имеют вид

$$\begin{cases} x & = & \frac{\mu x_P + \lambda x_Q}{\mu+\lambda} \\ y & = & \frac{\mu y_P + \lambda y_Q}{\mu+\lambda} \end{cases}, \qquad \mu, \lambda > 0.$$

Тогда

$$F(X) = Ax + By + C = A\frac{\mu x_P + \lambda x_Q}{\mu + \lambda} + B\frac{\mu y_P + \lambda y_Q}{\mu + \lambda} + \\ + C\frac{\mu + \lambda}{\mu + \lambda} = \frac{1}{\mu + \lambda} \cdot [\mu F(P) + \lambda F(Q)],$$

причем множитель строго положителен. Значит, если P и Q принадлежат F_+ или F_-, т. е. $F(P)$ и $F(Q)$ одного знака, то $F(X)$ того же знака. Если же $F(P)$ и $F(Q)$ разных знаков, то при $\mu = \frac{1}{|F(P)|}$ и $\lambda = \frac{1}{|F(Q)|}$ соответствующее $F(X)$ обращается в 0. $\square$

Замечание 2.10. Вектор (A, B) при этом “указывает” положительную полуплоскость в следующем смысле. Если отложить его от некоторой точки (x_0, y_0) на прямой, то его конец окажется в F_+. Действительно,

$$A(x_0+A)+B(y_0+B)+C = (Ax_0+By_0+C)+A^2+B^2 = A^2+B^2>0.$$

Определение 2.11. Множество всех прямых на плоскости, проходящих через фиксированную точку, называется *собственным пучком,* а сама фиксированная точка — *центром пучка.*

Множество всех прямых на плоскости, параллельных данной прямой, называется *несобственным пучком.* (Терминология связана с проективной геометрией, где параллельные прямые пересекаются в несобственной точке.)

Теорема 2.12. *Прямая l с уравнением $F = Ax + By + C = 0$ принадлежит (собственному или несобственному) пучку, задаваемому парой несовпадающих прямых l_1 и l_2 с уравнениями $F_1 = A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $F_2 = A_2x + B_2y + C_2 = 0$, тогда и только тогда когда ее уравнение является нетривиальной линейной комбинацией уравнений l_1 и l_2: $F = \alpha F_1 + \beta F_2$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай СОБСТВЕННОГО пучка, т.е. $l_1 \cap l_2 = P_0(x_0, y_0)$. Прямая l принадлежит этому пучку тогда и только тогда, когда $P_0 \in l$.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $P \neq P_0$ — произвольная точка l. Рассмотрим уравнение

$$\widetilde{F} := F_2(P_0) \cdot F_1 - F_1(P_0) \cdot F_2 = 0.$$

Это уравнение не старше первой степени. При этом $F_1(P_0)$ и $F_2(P_0)$ не могут оба равняться 0. Так как (A_1, B_1) и (A_2, B_2) неколлинеарны, то получаем, что $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \neq 0$. Таким образом, это уравнение первой степени и задает прямую. Подставляя P и P_0 в $\widetilde{F}$, убеждаемся, что эта прямая через них проходит, т. е. является l. По теореме 2.5 данное выражение F

$$F = \lambda\widetilde{F} = (\lambda F_2(P_0)) \cdot F_1 + (-\lambda F_1(P_0)) \cdot F_2 = 0, \qquad \lambda \neq 0.$$

ДОСТАТОЧНОСТЬ. $F(P_0) = \alpha F_1(P_0) + \beta F_2(P_0) = 0$, $P_0 \in l$.

Рассмотрим случай НЕСОБСТВЕННОГО пучка: $l_1 \| l_2$, $l_1 \neq l_2$.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть P_0 — произвольная точка l. Рассмотрим уравнение

$$\widetilde{F} := F_2(P_0) \cdot F_1 - F_1(P_0) \cdot F_2 = 0.$$

Это уравнение не старше первой степени. При этом $F_1(P_0)$ и $F_2(P_0)$ не равняются 0. Так как (A_1, B_1) и (A_2, B_2) коллинеарны, то получаем, что либо $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = 0$, либо этот вектор ненулевой и коллинеарен (A_1, B_1) и (A_2, B_2). Поскольку $\widetilde{F} = 0$ имеет решения, например, P_0, то из $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = 0$ должно следовать $\widetilde{C} = 0$, т. е. F_1 и F_2 пропорциональны, а значит, по теореме 2.5

$l_1 = l_2$, что противоречит условиям. Таким образом, это уравнение первого порядка, задающее прямую, проходящую через P_0 и параллельную l_1 и l_2, т. е. l. Доказательство необходимости завершается так же, как и в собственном случае.

Достаточность. $F = \alpha F_1 + \beta F_2$, значит, (A, B) коллинеарен (A_1, B_1) и (A_2, B_2). Раз это уравнение прямой, то $(A, B) \neq 0$. Следовательно, $l \| l_1 \| l_2$. □

Следствие 2.13. *Три прямые $A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, принадлежат одному пучку тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2.2. **Прямая на плоскости в прямоугольных координатах.** Пусть теперь выбрана прямоугольная система координат.

Лемма 2.14. *Вектор $\vec{n}$ с координатами (A, B) перпендикулярен прямой $Ax + By + C = 0$.*

Доказательство. Векторы, параллельные данной прямой, задаются уравнением (см. лемму 2.6) $A\alpha + B\beta = 0$ или (т. к. координаты прямоугольные) $(\vec{n}, (\alpha, \beta)) = 0$. □

Определение 2.15. Вектор $\vec{n} = (A, B)$ называется *нормалью* к прямой $Ax + By + C = 0$. (Прямоугольная система координат и уравнение фиксированы.)

Предложение 2.16. *Расстояние от точки $P(x_0, y_0)$ до прямой l, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$ равно*

$$\rho(P, l) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Доказательство. Пусть $P_1(x_1, y_1)$ — произвольная точка прямой. Тогда $\rho(P, l) = |PP_1| \cdot \left| \cos \measuredangle \left(\overrightarrow{P_1 P}, \vec{n} \right) \right| =$

$$= \frac{|(\overrightarrow{P_1 P}, \vec{n})|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|(Ax_0 + By_0 + C) - (Ax_1 + By_1 + C)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

□

Определение 2.17. Уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ называется *нормальным,* если $A^2 + B^2 = 1$, т. е. вектор нормали $\vec{n} = (A, B)$ имеет единичную длину.

Замечание 2.18. Каждая прямая имеет два нормальных уравнения. Они получаются из произвольного уравнения $Ax + By + C = 0$ как

$$\pm\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = 0.$$

Определение 2.19. Если $F(x, y) = Ax + By + C = 0$ — нормальное уравнение, то величина $F(x, y)$ называется *отклонением* точки (x, y) от прямой.

Имеем (для нормального уравнения)

$$F(x,y) = \varepsilon \cdot \rho((x,y), l), \qquad \varepsilon = \begin{cases} +1, & \text{если} \quad (x,y) \in F_+ \\ -1, & \text{если} \quad (x,y) \in F_- \end{cases}.$$

2.3. **Угол между прямыми на плоскости.** Пусть в прямоугольной системе координат две прямые имеют уравнения $A_1x + B_1y + C = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда

$$\cos\varphi = \left|\frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right| = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Тогда (см. рис. 2) формула

$$\cos\psi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

задает величину угла ψ между прямыми, отвечающего пересечению $F_+^{(1)} \cap F_-^{(2)}$ (или $F_-^{(1)} \cap F_+^{(2)}$).

3. Плоскости и прямые в пространстве

3.1. **Плоскости в пространстве.** Пусть сначала система координат — произвольная аффинная.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два линейно независимых вектора, параллельных плоскости. Это базис плоскости. Поэтому любой вектор однозначно представляется в виде их линейной комбинации. Следовательно, взяв произвольную точку плоскости с радиус-вектором $\vec{r}_0$, получим *параметрические уравнения плоскости*

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a} + s\vec{b},$$

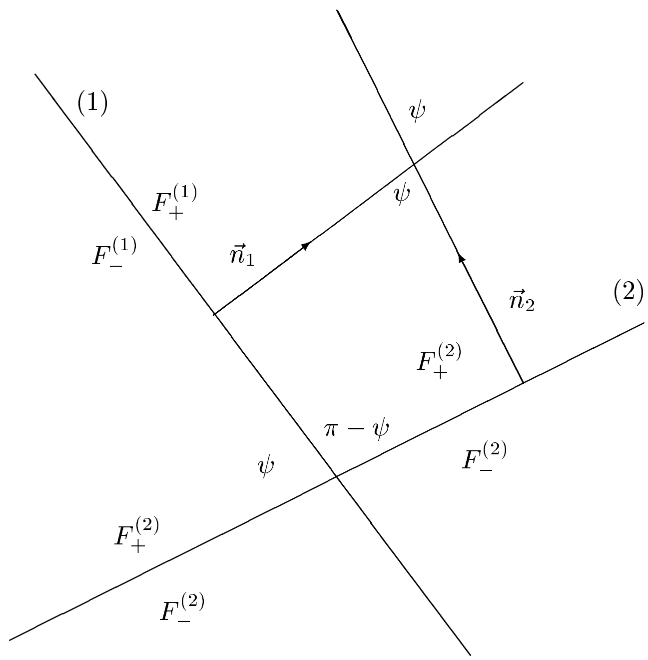


Рис. 2

где s и t — параметры.

Из этих уравнений (или из геометрических соображений) ясно, что точка с радиус-вектором $\vec{r}$ лежит в плоскости тогда и только тогда, когда $\vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны, т. е. линейно зависимы. Переходя к аффинным координатам и вспоминая теорему из алгебры, получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Обозначая

$$A := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad B := \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \qquad C := \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$D := -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = \begin{vmatrix} -x_0 & -y_0 & -z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

преобразуем уравнение к виду

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Поскольку $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то $(A, B, C) \neq 0$. Увидеть это можно, например, из следующего рассуждения. Допустим, a_i и b_j — координаты некоторых векторов $\vec{a}'$ и $\vec{b}'$ относительно прямоугольной системы координат $\varepsilon' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ положительной ориентации. Эти тройки чисел ненулевые непропорциональные, так что $\vec{a}'$ и $\vec{b}'$ неколлинеарны. Значит, $[\vec{a}', \vec{b}'] \neq 0$. Но компоненты этого вектора (в ε') в точности равны (A, B, C).

Итак, $Ax + By + Cz + D = 0$ — уравнение первого порядка. Оно называется *общим уравнением плоскости.*

Обратно, рассмотрим произвольное уравнение первого порядка $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда один из коэффициентов при переменных, например, A, не равен 0. Рассмотрим точку $M(-\frac{D}{A}, 0, 0)$ и векторы $\vec{a} = (-B, A, 0)$ и $\vec{b} = (-C, 0, A)$. Векторы неколлинеарны, поэтому уравнение

$$\begin{vmatrix} x + \frac{D}{A} & y & z \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0$$

задает плоскость, проходящую через точку M параллельно $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Но если мы распишем определитель, то получим в точности исходное уравнение.

Замечание 3.1. В полной аналогии со случаем прямой на плоскости, плоскость в пространстве, заданная общим уравнением $F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0$, разбивает пространство на два полупространства

$$F_+ = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) > 0\}, \quad F_- = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) < 0\}.$$

Вектор (A, B, C) опять указывает на F_+.

Лемма 3.2. *Вектор (α, β, γ) параллелен плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ тогда и только тогда, когда $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$.*

Доказательство. Аналогично прямой на плоскости. □

Теорема 3.3. *Плоскости* π_1 *и* π_2*, заданные уравнениями* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ *и* $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ *параллельны тогда и только тогда, когда векторы* (A_1,B_1,C_1) *и* (A_2,B_2,C_2) *коллинеарны, т. е.* $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$*. Эти плоскости совпадают тогда и только тогда, когда* $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

Доказательство. Достаточность. Из соотношения пропорциональности следует, что множества решений уравнений $A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma=0$ и $A_2\alpha+B_2\beta+C_2\gamma=0$ совпадают, т. е. плоскостям параллельны одни и те же множества векторов, а значит, плоскости параллельны.

Необходимость. (Можно воспользоваться леммой 3.2 и фактом из теории линейных систем, однако приведем полное доказательство). Один из коэффициентов первого уравнения должен быть отличен от нуля. Без ограничения общности, это A_1. Тогда по лемме, неколлинеарные векторы $(-B_1,A_1,0)$ и $(-C_1,0,A_1)$ параллельны плоскости π_1 и, таким образом, образуют базис. Поскольку $\pi_1 \parallel \pi_2$, то

$$A_2\cdot(-B_1)+B_2\cdot A_1+C_2\cdot 0=0, \qquad A_2\cdot(-C_1)+B_2\cdot 0+C_2\cdot A_1=0,$$

откуда

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}, \qquad \frac{A_1}{A_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Перейдем ко второй эквивалентности. Достаточность очевидна.

Необходимость. По первой части $A_2=\lambda A_1$, $B_2=\lambda B_1$ и $C_2=\lambda C_1$. Пусть (x_0,y_0,z_0) — произвольная точка совпадающих плоскостей, так что $0=\lambda(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)-$

$$-(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)=\lambda D_1-D_2.$$

Пропорциональность четверок установлена. □

Следствие 3.4. *Плоскости* π_1 *и* π_2 *(в обозначениях предыдущей теоремы) пересекаются (по прямой) тогда и только тогда, когда векторы* (A_1,B_1,C_1) *и* (A_2,B_2,C_2) *неколлинеарны.*

Определение 3.5. *Собственным пучком плоскостей* называется множество всех плоскостей, проходящих через фиксированную прямую. *Несобственным пучком плоскостей* называется множество всех плоскостей, параллельных данной плоскости.

Теорема 3.6. *Плоскость $F = Ax + By + Cz + D = 0$ принадлежит пучку плоскостей, определяемому двумя несовпадающими плоскостями $F_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $F_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$, где α_1 и α_2 не равны одновременно нулю.*

Доказательство. Полностью аналогично случаю прямых. Напомним основные этапы.

Рассмотрим случай СОБСТВЕННОГО пучка: $\pi_1 \cap \pi_2 = l$. Плоскость π принадлежит этому пучку тогда и только тогда, когда $l \subset \pi$.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $P_0 \notin l$ — произвольная точка π. Рассмотрим уравнение

$$\widetilde{F} := F_2(P_0) \cdot F_1 - F_1(P_0) \cdot F_2 = 0.$$

Это уравнение первой степени так как (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) неколлинеарны (иначе не может быть собственным пучком). Таким образом, это уравнение задает плоскость. При этом l и P_0 в ней содержатся. Значит, это π. Дальше умножаем на константу.

ДОСТАТОЧНОСТЬ очевидна.

Рассмотрим случай НЕСОБСТВЕННОГО пучка: $\pi_1 \| \pi_2$, $\pi_1 \neq \pi_2$.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть P_0 — произвольная точка π, параллельной π_1 и π_2. Рассмотрим уравнение

$$\widetilde{F} := F_2(P_0) \cdot F_1 - F_1(P_0) \cdot F_2 = 0.$$

Это уравнение первой степени. Действительно, (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) коллинеарны, поэтому либо $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}) = 0$, либо этот вектор ненулевой и коллинеарен (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2). Поскольку $\widetilde{F} = 0$ имеет решения, например, P_0, то из $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}) = 0$ должно следовать $\widetilde{D} = 0$, т. е. F_1 и F_2 пропорциональны, а значит, $\pi_1 = \pi_2$, что противоречит условиям. Таким образом, это уравнение первого порядка, задающее плоскость, проходящую через P_0 и параллельную π_1 и π_2, т. е. π. Доказательство необходимости завершается так же, как и в собственном случае.

ДОСТАТОЧНОСТЬ очевидна. □

Определение 3.7. *Собственной связкой плоскостей* называется множество всех плоскостей, проходящих через фиксированную точку. *Несобственной связкой плоскостей* называется множество всех плоскостей, параллельных данной прямой.

Замечание 3.8. Три любые плоскости, не принадлежащие одному пучку, однозначно определяют связку. (см. задачу из задачника о взаимном расположении трех плоскостей)

Теорема 3.9. *Плоскость $F = Ax + By + Cz + D = 0$ принадлежит связке плоскостей, определяемому тремя плоскостями $F_i = A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$, не принадлежащими одному пучку, тогда и только тогда, когда $F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3$ (в предположении, что в результате получилась плоскость, т. е. уравнение первого порядка), или, эквивалентно,*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A & B & C & D \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Прежде всего покажем эквивалентность последних двух условий. В одну сторону очевидно. В другую: допустим, что определитель равен нулю. Тогда строки линейно зависимы. Допустим, что коэффициент при F равен нулю, т. е. зависимы уравнения $F_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$. Легко видеть, что в этом случае соответствующие плоскости принадлежат одному пучку.

Теперь перейдем к доказательству основного утверждения. Рассмотрим отдельно два случая.

Собственный случай. Пусть (x_0, y_0, z_0) — единственная точка пересечения трех плоскостей.

Достаточность. Если имеем линейную комбинацию, то из $F_i(x_0, y_0, z_0) = 0$, $(i = 1, 2, 3)$, следует, что и $F(x_0, y_0, z_0) = \alpha_1 F_1(x_0, y_0, z_0) + \alpha_2 F_2(x_0, y_0, z_0) + \alpha_3 F_3(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Необходимость. Пусть (x_0, y_0, z_0) — единственная точка пересечения всех четырех плоскостей. Тогда в указанной матрице из коэффициентов линейная комбинация столбцов с коэффициентами $(x_0, y_0, z_0, 1)$ нетривиальна и равна нулю. Значит, определитель равен нулю.

Несобственный случай. Пусть (α, β, γ) — направляющий вектор прямой, которой параллельны плоскости связки.

Достаточность. Если имеем линейную комбинацию, то из $A_i\alpha + B_i\beta + C_i\gamma = 0$, $(i = 1, 2, 3)$, следует, что линейная комбинация $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3)\alpha + \ldots$ также равна нулю. Осталось воспользоваться критерием параллельности вектора и плоскости.

Необходимость. Линейная комбинация столбцов с коэффициентами $(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ равна 0, что влечет равенство нулю определителя. $\square$

3.2. **Плоскость в прямоугольной системе координат.** Теперь пусть система координат — прямоугольная.

Предложение 3.10. *Рассмотрим плоскость* $Ax + By + Cz + D = 0$*. Тогда вектор* $\vec{n} := (A, B, C)$ *перпендикулярен плоскости.*

Доказательство. Вектор (α, β, γ) параллелен плоскости тогда и только тогда, когда

$$0 = A\alpha + B\beta + C\gamma = (\vec{n}, (\alpha, \beta, \gamma)),$$

т. е. вектор $\vec{n}$ перпендикулярен любому вектору плоскости π. $\square$

Определение 3.11. Этот вектор $\vec{n}$ (зависящий от системы координат и уравнения) называется *нормалью* к плоскости.

Теорема 3.12. *Пусть плоскость* π *имеет уравнение* $Ax+By+Cz + D = 0$*, а* P_0 *с координатами* (x_0, y_0, z_0) *— произвольная точка. Тогда*

$$\rho(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Доказательство. Пусть $P_1(x_1, y_1, z_1)$ — произвольная точка π. Тогда

$$\rho(P, \pi) = |PP_1| \cdot \left|\cos\measuredangle\left(\overrightarrow{P_1P}, \vec{n}\right)\right| = \frac{|(\overrightarrow{P_1P}, \vec{n})|}{|\vec{n}|} =$$

$$= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) - (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$\square$

Углы между плоскостями, нормальное уравнение и т. д. также определяются и вычисляются полностью аналогично случаю прямых на плоскости.

3.3. **Прямая в пространстве.** Текущий вектор точки на прямой запишется в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t$, где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор начальной точки, а $\vec{a}$ — направляющий вектор прямой (см. рис. 3).

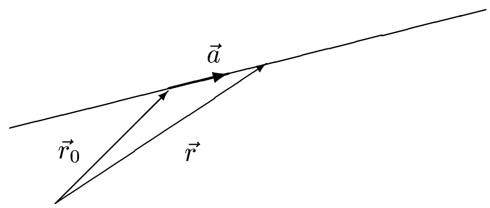


Рис. 3

Если в координатах $\vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$, то получаем *параметрические уравнения*

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$$

Без параметра они могут быть записаны как *канонические уравнения*

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

Заметим, что в пространстве прямая определяется уже двумя линейными уравнениями, иными словами, как пересечение двух плоскостей. Действительно, $\vec{a} \neq 0$, допустим, что $\alpha \neq 0$ и возникают две пересекающиеся плоскости

$$\begin{aligned} \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) &= 0 \\ \gamma(x - x_0) - \alpha(z - z_0) &= 0 \end{aligned}$$

Обратно, пусть имеем пересечение двух плоскостей, т. е. систему

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

причем (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) неколлинеарны.

Предложение 3.13. *В этом случае направляющий вектор прямой пересечения равен*

$$(\alpha, \beta, \gamma) := \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Доказательство. Заметим, что указанный вектор не является векторным произведением (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2), так как система координат не обязана быть прямоугольной.

Надо доказать, что, во-первых, указанный вектор является ненулевым и, во-вторых, он параллелен плоскостям, т. е.

$$\begin{cases} A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma & = & 0 \\ A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma & = & 0 \end{cases}$$

Начнем со второго:

$$A_1 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично, для второго уравнения.

Допустим теперь, что вектор нулевой. Тогда

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \qquad \frac{C_1}{C_2} = \frac{A_1}{A_2}, \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

и векторы (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) коллинеарны. Противоречие. (Можно также доказывать, рассуждая с векторным произведением в другой системе координат.) □

3.4. **Некоторые формулы в прямоугольной системе координат.** Введем обозначения: $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$, $j = 0, 1, 2$, $\vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{a}_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2$.

1. Угол между прямыми, заданными параметрическими уравнениями $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 \cdot t$ и $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 \cdot t$:

$$\cos\varphi = \frac{|(\vec{a}_1, \vec{a}_2)|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{|\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}.$$

2. Угол между прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\sin\varphi = \frac{|A\alpha + B\beta + C\gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

3. Расстояние между скрещивающимися прямыми с параметрическими уравнениями $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 \cdot t$ и $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 \cdot t$. Построим параллелепипед со сторонами $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Тогда искомое расстояние — высота этого параллелепипеда: $\rho = \frac{V}{S} =$

$$= \frac{|\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \rangle|}{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|} = \frac{\left|\det \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

4. Расстояние от точки с радиус-вектором $\vec{r}_1$ до прямой с параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t$. Построим параллелограмм со сторонами $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ и $\vec{a}$. Тогда искомое расстояние — высота этого параллелограмма:

$$\rho = \frac{S}{|\vec{a}\,|} = \frac{|[\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a}\,]|}{|\vec{a}\,|} = \frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}},$$

$$d_1 := \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}, \quad d_2 := \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix},$$

$$d_3 := \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$$

4. Замены координат

4.1. **Замены аффинных координат.** Напомним, что аффинная система координат в пространстве задается выбором репера $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, а точка M приобретает координаты (x, y, z), если $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Рассмотрим также другой репер $O'\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2\vec{e}\,'_3$ и соответствующую систему координат. Разложим новые векторы по старому базису:

$$\begin{cases} \vec{e}\,'_1 &= c_{11}\,\vec{e}_1 + c_{21}\,\vec{e}_2 + c_{31}\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}\,'_2 &= c_{12}\,\vec{e}_1 + c_{22}\,\vec{e}_2 + c_{32}\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}\,'_3 &= c_{13}\,\vec{e}_1 + c_{23}\,\vec{e}_2 + c_{33}\,\vec{e}_3 \end{cases}$$

Определение 4.1. *Матрицей перехода* от репера $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ к $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

т. е. такая матрица, по столбцам которой стоят координаты новых базисных векторов в старом базисе. В частности, она не зависит от O и O'.

Замечание 4.2. Как было показано, например, при определении ориентации, $\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ является базисом тогда и только тогда, когда C невырождена, т. е. $\det C \neq 0$.

Напомним некоторые определения и свойства операций над матрицами. Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — матрица $m \times n$, так что в ней m строк и n столбцов, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Пусть $B = \|b_{kl}\|$ — матрица $n \times p$. *Произведением матриц* A и B (число столбцов A должно совпадать с числом строк B) называется матрица C размера $m \times p$, матричные элементы которой определяются формулой

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

(“умножение i-й строки A на j-й столбец B”).

Транспонированной матрицей к матрице A называется такая матрица $A^T = \|a_{ij}^T\|$ размера $n \times m$, что $a_{ij}^T = a_{ji}$. *Обратной* матрицей A^{-1} для квадратной матрицы A называется такая матрица, что $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица. Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$.

Выполняется следующие свойства (во все пунктах, кроме первого, матрицы квадратные):

(1) $(AB)^T = B^T A^T$,
(2) $\det A^T = \det A$,
(3) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$,
(4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (если обратная матрица существует).

Теорема 4.3. *Координаты точки в старой и новой системе координат связаны соотношениями*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где C — матрица перехода от старого базиса к новому, (x, y, z) и (x', y', z') — координаты данной точки в старой и новой системах координат, соответственно, а (x_0, y_0, z_0) — координаты O' (нового начала координат) в старой системе координат.

Доказательство. Обозначим данную точку через M. Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}, \qquad \overrightarrow{OO'} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3,$$

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}\,'_1 + y'\vec{e}\,'_2 + z'\vec{e}\,'_3 = x'(c_{11}\,\vec{e}_1 + c_{21}\,\vec{e}_2 + c_{31}\,\vec{e}_3) +$$
$$+ y'(c_{12}\,\vec{e}_1 + c_{22}\,\vec{e}_2 + c_{32}\,\vec{e}_3) + z'(c_{13}\,\vec{e}_1 + c_{23}\,\vec{e}_2 + c_{33}\,\vec{e}_3) =$$
$$= (x'c_{11} + y'c_{12} + z'c_{13})\,\vec{e}_1 + (x'c_{21} + y'c_{22} + z'c_{23})\,\vec{e}_2 +$$
$$+ (x'c_{31} + y'c_{32} + z'c_{33})\,\vec{e}_3,$$

$$\overrightarrow{OM} = (x_0 + x'c_{11} + y'c_{12} + z'c_{13})\,\vec{e}_1 +$$
$$+ (y_0 + x'c_{21} + y'c_{22} + z'c_{23})\,\vec{e}_2 + (z_0 + x'c_{31} + y'c_{32} + z'c_{33})\,\vec{e}_3.$$

□

Следствие 4.4. *Координаты векторов в старой и новой системах связаны соотношениями:*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}.$$

Замечание 4.5. Всякое соотношение вида (1) с невырожденной матрицей C может быть проинтерпретировано как переход к некоторой новой системе координат. В частности, применяя к координатам базисных векторов, получаем однозначность.

Теорема 4.6. *Пусть C — матрица перехода от $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ к $O\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2\vec{e}\,'_3$, а D — матрица перехода от $O\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2\vec{e}\,'_3$ к $Oe''_1e''_2e''_3$. Тогда CD — матрица перехода от $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ к $Oe''_1e''_2e''_3$.*

Доказательство. (Фактически это первое свойство транспонирования.)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = CD \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

□

4.2. **Прямоугольные системы координат и ортогональные матрицы.**

Определение 4.7. Квадратная матрица C называется *ортогональной,* если $C^T = C^{-1}$, т. е. $C^TC = E$ и $CC^T = E$. Множество всех ортогональных матриц называется *ортогональной группой* и обозначается $O(n)$.

Теорема 4.8. *Матрица C является ортогональной тогда и только тогда, когда она является матрицей перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному.*

Доказательство. Рассмотрим соотношение $C^TC = E$. В матрице C^T в i-й строке записаны координаты $\vec{e}\,'_i$ в базисе $\vec{e}_j$ (так же, как и в i-м столбце C). Поэтому, если $\vec{e}_j$ — произвольный ортонормированный базис, то правило умножения матриц “строка на столбец” запишется как

$$(\vec{e}\,'_i, \vec{e}\,'_j) = E_{ij} = \delta_{ij},$$

а это и есть условие ортонормированности базиса $\vec{e}\,'_j$. □

Утверждение 4.9. *Ортогональные матрицы 2×2 имеют один из следующих видов:*

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Угол φ можно считать принадлежащим $[0, 2\pi)$.

Доказательство. Рассмотрим ортогональную матрицу как матрицу перехода от ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ к ортонормированному базису $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$. Тогда вектор $\vec{e}\,'_1$ имеет координаты $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ для некоторого φ. Перпендикулярные ему векторы единичной длины (таких два) равны $(\mp\sin\varphi, \pm\cos\varphi)$. □

Замечание 4.10. В первом случае $\det C = 1$, а геометрический смысл соответствующего преобразования — поворот на угол φ. Во втором случае $\det C = -1$, а геометрический смысл — композиция поворота на угол φ и симметрии относительно $\vec{e}_1$, повернутого на угол φ, что, как будет показано позже, сводится к симметрии относительно направления $\left(\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\right)$.

Утверждение 4.11. *Определитель ортогональной матрицы C любого порядка равен ± 1.*

Доказательство. $1 = \det E = \det(C^T C) = \det(C^T)\det C = (\det C)^2$. □

Определение 4.12. Ортогональная матрица с определителем $+1$ называется *специальной ортогональной.* Множество таких матриц размерности $n \times n$ обозначается $SO(n)$ и называется *специальной ортогональной группой.*

Замечание 4.13. Итак, $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \right\}$ является группой вращений плоскости. Можно показать, что $SO(3)$ является группой всевозможных вращений пространство (см. § 7 ниже). Явное описание $SO(3)$ составляет содержание следующих пунктов.

4.3. **Углы Эйлера.** Рассмотрим переход от прямоугольной системы $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ к прямоугольной системе $O\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2\vec{e}\,'_3$. Считаем, что они одинаковой положительной ориентации. Если $\vec{e}\,'_3 = \vec{e}_3$, то все сводится к замене координат на плоскости с определителем, равным $+1$. Если $\vec{e}\,'_3 = -\vec{e}_3$, то все сводится к замене координат на плоскости с определителем, равным -1. Таким образом, можем считать, что векторы $\vec{e}_3$ и $\vec{e}\,'_3$ неколлинеарны. Это нормальные векторы к плоскостям $\pi = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и $\pi' = 0\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2$. Тогда $\vec{f} := \frac{[\vec{e}_3, \vec{e}\,'_3]}{\|\,[\vec{e}_3, \vec{e}\,'_3]\,\|}$ является направляющим вектором прямой d пересечения этих плоскостей (называемой в механике *линией узлов*).

Углы Эйлера определяются следующим образом: угол φ — это угол от $\vec{e}_1$ к $\vec{f}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, угол θ — это угол от $\vec{e}_3$ к $\vec{e}\,'_3$, $\theta \in [0, \pi]$, угол ψ — это угол от $\vec{f}$ к $\vec{e}\,'_1$, $\psi \in [0, 2\pi)$.

Произведем переход от репера $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ к $O\vec{f}\vec{g}\vec{e}_3$, сохраняя ориентацию. Это вращение вокруг $\vec{e}_3$ на некоторый угол φ (угол от $\vec{e}_1$ к $\vec{f}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$). Таким образом, соответствующая матрица перехода

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь проведем вращение вокруг $\vec{f}$ так, чтобы $\vec{e}_3$ совместился с $\vec{e}\,'_3$. В силу выбора направления $\vec{f}$ это вращение на угол $\theta \in [0, \pi]$. Получаем переход к некоторому реперу $O\vec{f}\vec{h}\vec{e}\,'_3$, причем плоскость Ofh совпадает с $O\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2$, а матрица его равна

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Осталось осуществить вращение вокруг $\vec{e}\,'_3$ (т. е. в плоскости $O\vec{f}\vec{h} = O\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2$), чтобы совместить $\vec{f}$ с $\vec{e}\,'_1$. При этом, в силу согласованности ориентаций, образ $\vec{e}_2$ перейдет в $\vec{e}\,'_2$. Соответствующая матрица перехода

$$F = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \psi \in [0.2\pi).$$

В силу теоремы 4.6, результирующая матрица перехода от базиса $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ к $\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2\vec{e}\,'_3$ равна $CDF =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Эта формула задает параметризацию $SO(3)$ углами Эйлера, широко используемую в классической механике тведого тела. В следующем пункте мы получим другую параметризацию этой группы, более изящную с математической точки зрения.

4.4. $SO(3)$ **и кватернионы.** Рассмотрим пространство H *кватернионов*, т.е. четверок натуральных чисел (которые можно представлять себе как прямоугольные координаты векторов четырехмерного пространства) (a, b, c, d), записываемые (с целью удобного введения умножения этих четверок) в виде $q = a + bi + cj + dk$ (т.е. 1, i, j, k можно рассматривать как обозначение для векторов стандартного базиса). Определим умножение следующими формулами на базисных элементах и продолжим по дистрибутивности на все кватернионы:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} ij & = & -ji & = & k, & & jk & = & -kj & = & i, & & \\ ki & = & -ik & = & j, & & i^2 & = & j^2 & = & k^2 & = & -1. \end{array}$$

Это умножение не является коммутативным (вообще говоря, $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$) но является ассоциативным: $(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3)$ (проверьте эти утверждения !).

Определение 4.14. *Сопряженный кватернион* $\bar{q}$ *для* q задается формулой $\bar{q} = a - bi - cj - dk$.

Тогда $q\bar{q} = |q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ и $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$ (порядок важен), так что $|q_1 q_2| = |q_1| \cdot |q_2|$ (проведите выкладки !). Здесь длина рассматривается в смысле четырехмерного пространства, как указано выше.

Реализуем пространство $\mathbf{R}^3$ как пространство чисто мнимых кватернионов ($a = 0$, или, что то же самое, удовлетворяющих условию $\bar{q} = -q$) с базисом $\vec{e}_1 = i$, $\vec{e}_2 = j$, $\vec{e}_3 = k$:

$$H \supset \mathbf{R}^3 = \{p \in H : p = xi + yj + zk\}.$$

Теорема 4.15. *Векторы* $\vec{f}_s := q\vec{e}_s\bar{q}$ $(s = 1, 2, 3)$, *где* q — *произвольный кватернион единичной длины* $(|q| = 1)$, *образуют ортонормированный базис в* $\mathbf{R}^3$.

Доказательство. Во-первых, $\vec{f}_s$ снова лежат в $\mathbf{R}^3$, т.е. являются чисто мнимыми кватернионами. Действительно, для любого чисто мнимого кватерниона p имеем $\overline{qp\bar{q}} = q\bar{p}\bar{q} = -qp\bar{q}$.

Во-вторых, покажем, что линейное отображение $p \mapsto qp\bar{q}$ сохраняет скалярное произведение. Достаточно показать, что оно сохраняет длину вектора, поскольку $(p, q) = \frac{1}{2}(|p+q|^2 - |p|^2 - |q|^2)$ (ср. предл. 7.13 ниже). Имеем: $|qp\bar{q}| = |q|^2 |p| = |p|$, так как $|q|^2 = 1$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 4.16. *Для любого вектора* (a, b, c, d) *в* $\mathbf{R}^4$ *единичной длины* $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1)$ *матрица*

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 2(ad + bc) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

является матрицей из $SO(3)$.

Замечание 4.17. Можно показать, что, сопоставляя единичному кватерниону q матрицу перехода от базиса $\vec{e}_n$ к $\vec{f}_s$, мы получаем гомоморфизм группы единичных кватернионов (единичной сферы S^3 в $\mathbf{R}^3$) на всю группу $SO(3)$. Это отображение называется *параметризацией Кэли-Клейна.* Очевидно, что кватернионам q и $-q$ отвечает одна и та же матрица из $SO(3)$. Можно показать, что других отождествлений при этом отображении нет.

4.5. **Полярные, сферические и цилиндрические координаты.**

Определение 4.18. *Полярная система координат* на ориентированной плоскости задается выбором точки O, называемой *началом* или *полюсом,* и луча, выходящего из точки O, называемого *полярной осью.*

Полярные координаты точки M — это *радиус,* равный расстоянию от M до полюса: $r = |OM|$, и *угол* φ, равный углу между полярной осью и лучом OM, причем угол измеряется в соответствии с ориентацией (таким образом φ является вещественным числом, определенным с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$). Для точки O угол φ не определяется, так что полярные координаты в этой точке не определены.

Если у нас имеется положительный прямоугольный репер, начало координат которого совпадает с полюсом, а вектор $\vec{e}_1$ направлен по полярной оси, то говорят, что данные прямоугольная и полярная системы координат *естественно связаны.*

Непосредственно из определения получаем следующее утверждение.

Утверждение 4.19. *Для естественно связанных прямоугольной и полярной систем координат имеют место следующие* *формулы, выражающие одни через другие:*

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi. \end{cases}$$

Обратно, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, *а* φ *(с точностью до угла* $2\pi k$ *) определяется формулами*

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

или

$$\varphi=\begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & \textit{при}\quad x>0,\\ \pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & \textit{при}\quad x<0,\\ \pi/2, & \textit{при}\quad x=0,\ y>0,\\ -\pi/2, & \textit{при}\quad x=0,\ y<0. \end{cases}$$

В пространстве имеются два естественных обобщения полярной системы координат: цилиндрические и сферические координаты. Выберем в пространстве

(1) ориентированную плоскость π (*экваториальная плоскость*),
(2) точку O на ней (*полюс*),
(3) луч Ox на плоскости (*полярная ось*),
(4) перпендикулярную к π ось Oz (*зенитная ось*).

Для произвольной точки M пространства обозначим через M' ее ортогональную проекцию на π, а через M'' — ее ортогональную проекцию на Oz.

Цилиндрические координаты (ρ,φ,z) точки M определяются следующим образом: ρ,φ — полярные координаты M' на плоскости π (т. е. $\rho=|OM'|$, φ — угол от Ox к OM'), а z — координата M'' на оси Oz (см. рис. 4). Для точек зенитной оси $\rho=0$, а координата φ не определена.

Сферические координаты (r,φ,θ) точки M определяются следующим образом (см. рис. 4):

- $r=|OM|$ (*радиус*),
- φ — угол от Ox к OM' (*долгота*),
- θ — угол от OM' к OM (со знаком соответствия направлению Oz) (*широта*), $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$.

Для точек зенитной оси $\theta=\pm\pi/2$, а координата φ не определена. Для точки O: $r=0$, а φ и θ не определены. Рассмотрим

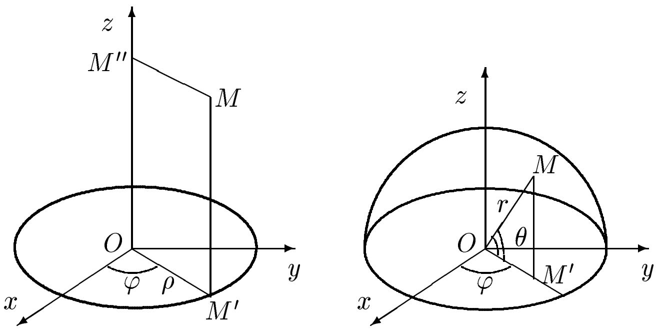


Рис. 4. Цилиндрические и сферические координаты

прямоугольную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, где $\vec{e}_1$ имеет направление Ox, $\vec{e}_2 \in \pi$, причем ориентация $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ положительна для плоскости π, а $\vec{e}_3$ имеет направление оси Oz. Говорят, что данная прямоугольная система координат естественно связана с указанными выше сферической и цилиндрической.

Тогда прямоугольные и цилиндрические координаты связаны формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\varphi, \\ y = \rho\,\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = z, \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Прямоугольные и сферические координаты связаны формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\theta\,\cos\varphi, \\ y = \rho\,\cos\theta\,\sin\varphi, \\ z = \rho\,\sin\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \theta = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{cases}$$

(поскольку $r\cos\theta = \sqrt{x^2+y^2}$).

5. Конические сечения: эллипс, гипербола и парабола

5.1. Геометрические определения эллипса, гиперболы и параболы.

Определение 5.1. *Эллипсом* называется геометрическое место точек (ГМТ) X на плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 равна заданному числу (см. рис. 5):

$$|F_1X| + |F_2X| = 2a.$$

Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* (терминология объясняется оптическими свойствами, см. ниже).

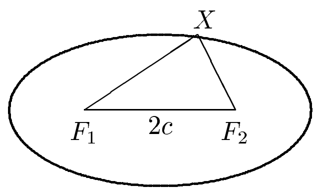


Рис. 5

Предполагается, что $a > c \geqslant 0$, где $2c = |F_1F_2|$. В случае $a = c$ получаем отрезок, а в случае $c = 0$ — окружность.

Определение 5.2. *Гиперболой* называется ГМТ X на плоскости, модуль разности расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 равен заданному числу (см. рис. 6):

$$\Big| |F_1X| - |F_2X| \Big| = 2a.$$

Точки F_1 и F_2 называются *фокусами*.

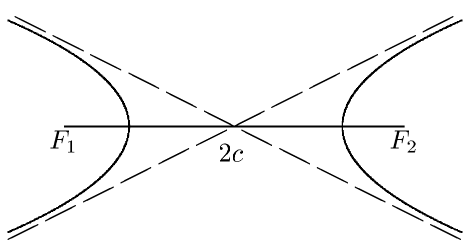


Рис. 6

Предполагается, что $c > a > 0$, где $2c = |F_1F_2|$. В случае $a = c$ получаем два противонаправленных луча, выходящих из фокусов.

Определение 5.3. *Параболой* называется ГМТ X на плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой *фокусом,* и прямой d, называемой *директрисой* (см. рис. 7). Предполага-

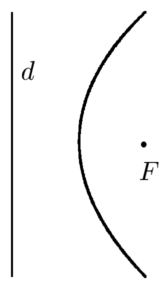


Рис. 7

ется, что $F \notin d$.

5.2. **Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения.**

Теорема 5.4. *Сечение прямого кругового (бесконечного в обе стороны) конуса плоскостью, не проходящей через вершину, является либо эллипсом, либо гиперболой, либо параболой.*

Доказательство. Данная плоскость может располагаться тремя способами:

(1) пересекать одну половинку конуса;
(2) пересекать обе половинки конуса;
(3) быть параллельной образующей конуса.

На рисунке 8 изображены различные типы сечений (рассматривается проекция на перпендикулярную плоскость, так что плоскость сечения изображается прямой):

Мы докажем, что в случае 1 получается эллипс, в случае 2 — гипербола, а в случае 3 — парабола. Основным геометрическим

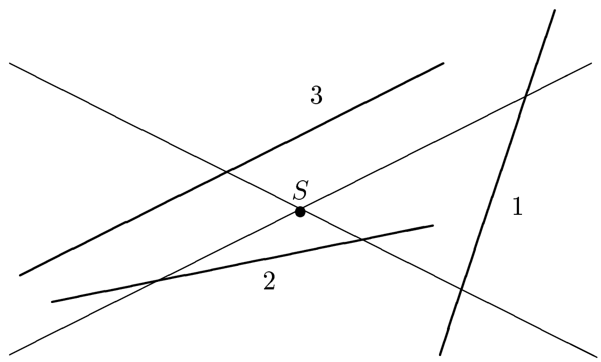


Рис. 8

инструментом будут шары Данделена[1] — шары, вписанные в конус и касающиеся данной плоскости.

Первый случай. Пусть c — интересующее нас сечение конуса плоскостью П. Обозначим через F_1 и F_2 точки касания шаров Данделена и плоскости П, а через c_1 и c_2 — окружности касания шаров с конусом (рис. 9). Пусть X — произвольная точка на сечении c. Пусть X_1 и X_2 — точки пересечения SX с c_1 и c_2 соответственно.

Тогда (равны касательные, проведенные к шару из одной точки)

$$|XF_1| = |XX_1|, \qquad |XF_2| = |XX_2|,$$
$$|XF_1| + |XF_2| = |XX_1| + |XX_2| = |X_1X_2| = \mathrm{const}.$$

Второй случай. Сохраним прежние обозначения (см. рис. 10).

Тогда (равны касательные, проведенные к шару из одной точки)

$$|XF_1| = |XX_1|, \qquad |XF_2| = |XX_2|,$$
$$\Big|\,|XF_1| - |XF_2|\,\Big| = \Big|\,|XX_1| - |XX_2|\,\Big| = |X_1X_2| = \mathrm{const}.$$

Третий случай. В этом случае шар Данделена только 1 (рис. 11).

[1] Ж. П. Данделен (1794–1847) — бельгийский геометр.

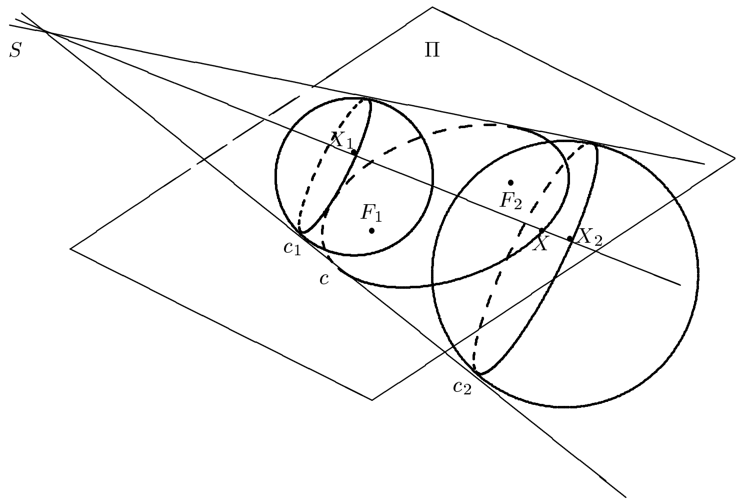


Рис. 9

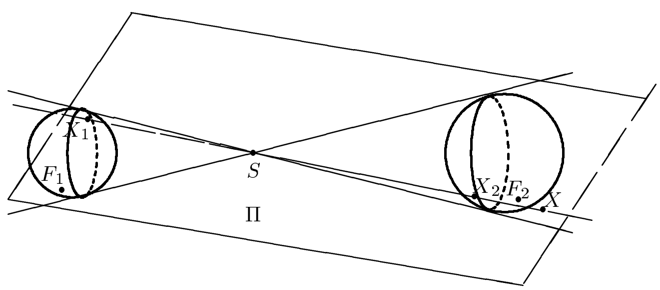


Рис. 10

Пусть c_1 — окружность касания шара с конусом, Π_1 — плоскость, содержащая эту окружность, прямая $d = \Pi \cap \Pi_1$, Y — проекция произвольной точки X исследуемого сечения на d, Y_1

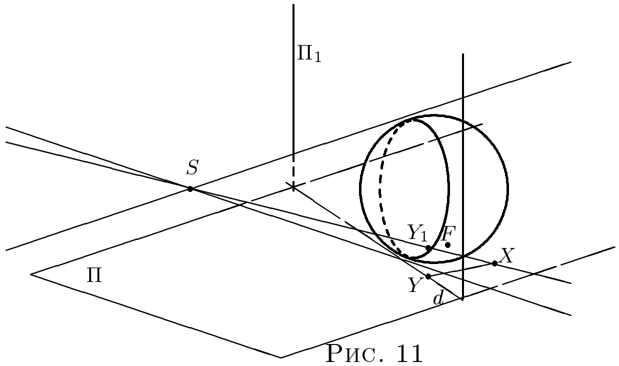


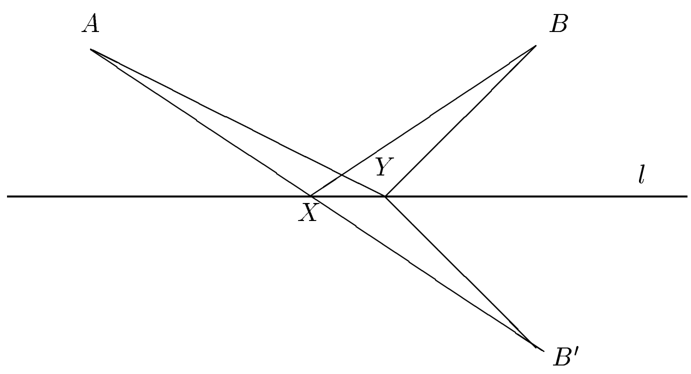
Рис. 11

— точка пересечения SX с c_1. Как касательные к шару, проведенные из одной точки, равны $|XF| = |XY_1|$. Далее, SY_1, а следовательно, и XY_1 наклонена к плоскости Π_1 под углом $\pi/2 - \alpha$, где α — угол между образующей конуса и его осью. С другой стороны, YX параллельна той единственной образующей конуса, которой параллельна плоскость Π. Значит, она образует с Π_1 также угол $\pi/2-\alpha$. Следовательно, $|XY_1| = |XY|$ как наклонные к плоскости Π_1 из одной точки под одним углом. Таким образом, $|XF| = |XY|$. □

Определение 5.5. В соответствии с этой теоремой эллипс, гиперболу и параболу называют *кониками.*

Замечание 5.6. Позже мы докажем теорему более общего характера: сечение поверхности второго порядка плоскостью является кривой второго порядка.

5.3. **Оптические (фокальные) свойства коник.** Начнем со следующей вспомогательной задачи: для данной прямой l и двух точек A и B, лежащих по одну сторону от нее, найти такую точку $X \in l$, что сумма расстояний $|XA| + |XB|$ минимальна. Построим точку B', симметричную B относительно l.



Ясно, что $|AY| + |YB'|$ минимально при $Y = X = (AB') \cap l$. Но $|YB| = |YB'|$, так что минимум достигается в такой точке X, что равны острые углы, образуемые AX и BX с l.

В оптике это отвечает знаменитому правилу “угол падения равен углу отражения”, поскольку согласно принципу Ферма свет минимизирует время, а следовательно, (в однородной среде) и расстояние. То же правило действует и для “кривых” зеркал: в этом случае надо рассматривать углы с касательной к кривой в точке отражения (подробное обсуждение касательных для конических сечений см. ниже).

Коники обладают следующими замечательными оптическими свойствами.

Теорема 5.7.
- *Лучи, выходящие из одного фокуса* **эллипса,** *после отражения попадают в другой фокус.*
- *Лучи, выходящие из одного фокуса* **гиперболы,** *после отражения от нее “исходят” из другого, т. е. продолжение отраженного луча за точку отражения попадает в другой фокус.*
- *Лучи, выходящие из фокуса* **параболы,** *после отражения от нее становятся параллельными друг другу.*

(см. рис. 12)

Доказательство. **Эллипс.** Пусть луч вышел из фокуса A и, отразившись от точки X эллипса, не попал в другой фокус B. Значит, если l — касательная в точке X, то угол падения на l

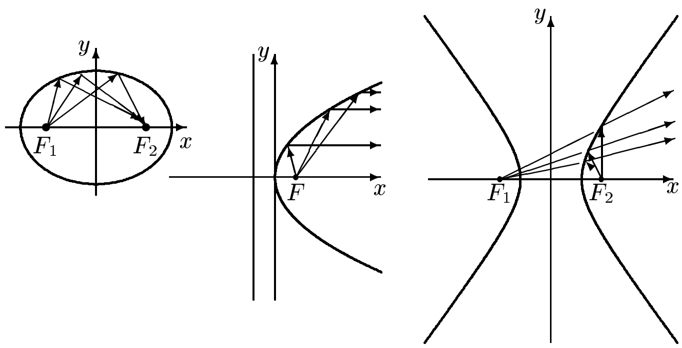


Рис. 12

не равен углу отражения по замечанию. Значит, $|AX|+|BX|$ не минимально при пробегании X по l. Но это противоречит геометрическому определению эллипса, так как остальные точки касательной лежат вне его.

Гипербола. Аналогично эллипсу.

Парабола. Рассмотрим параболу с фокусом F и директрисой d. Пусть луч, выпущенный из фокуса F встретился с параболой в точке X. Пусть l — серединный перпендикуляр к YF, где Y — проекция X на директрису. По определению параболы, треугольник YXF — равнобедренный и l проходит через X. Докажем, что l является касательной к параболе в точке X. Предположим противное, тогда имеется еще одна точка пересечения l с параболой — $X' \neq X$, и пусть Y' — ее проекция на директрису d. Тогда (по свойству серединного перпендикуляра) $|YX'| = |X'F|$, а так как X' — точка параболы, то $|Y'X'| = |X'F|$. Значит, $|X'Y'| = |X'Y|$, но длина наклонной должна быть больше длины перпендикуляра. Таким образом, l является касательной (см. рис. 13).

При этом углы между YX и l и между FX и l равны, так что отраженный луч лежит на продолжении $YX \perp d$. □

Следствие 5.8. *Эллипс и гипербола с общими фокусами пересекаются под прямым углом.*

Доказательство. Пусть l_e и l_h — касательные в точке пересечения к эллипсу и гиперболе, соответственно. По доказанной теореме, углы будут такими, как обозначено на рис. 14.

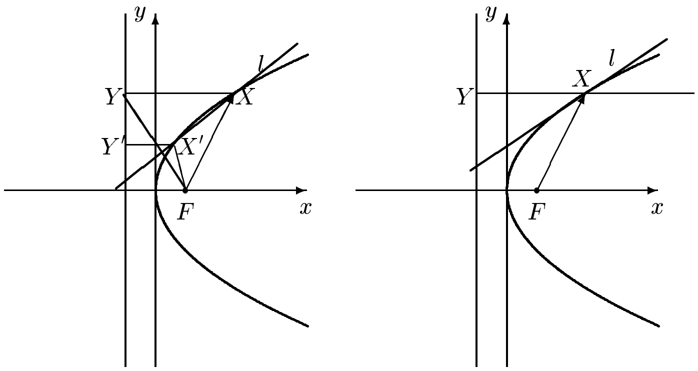


Рис. 13

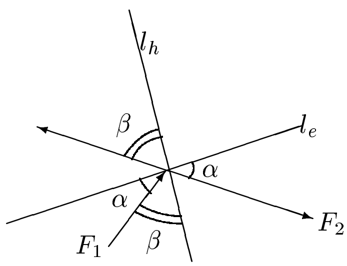


Рис. 14

Следовательно, $2\alpha + 2\beta = \pi$ и $\alpha + \beta = \pi/2$. □

Коники с общими фокусами называются *конфокальными.* С ними связана замечательная система координат (эллиптические координаты), обобщающие полярную и прямоугольную системы и играющие важнейшую роль в механике (Эйлер, Якоби).

5.4. **Аналитические определения коник.**

Определение 5.9. (аналитическое определение коник) *Эллипсом* называется кривая второго порядка, задаваемая в некоторой прямоугольной системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (a \geqslant b); \tag{2}$$

гиперболой —

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \tag{3}$$

параболой —

$$y^2 = 2px, \qquad (p > 0). \tag{4}$$

Теорема 5.10. *Аналитические и геометрические определения коник эквивалентны.*

Доказательство. **Эллипс.** Введем прямоугольную систему координат, как показано на рис. 15. Тогда геометрическое определение $\{X \mid |XF_1| + |XF_2| = 2a\}$ перепишется в виде

$$r_1 + r_2 = 2a, \qquad r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2y^2,$$

$$a^4 - a^2c^2 = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad b^2 := a^2 - c^2. \tag{5}$$

Непосредственно из уравнения видно, что эллипс заключен в прямоугольник, причем на границе его лежат лишь точки пересечения с осями (см. рис. 16).

Этот прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется *основным прямоугольником* эллипса.

Обратно, пусть точка (x, y) удовлетворяет уравнению (5), т. е.

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

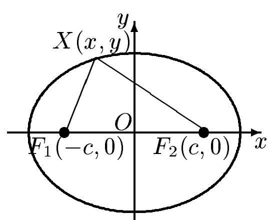


Рис. 15

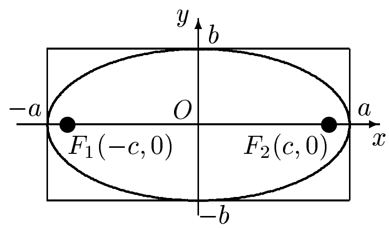


Рис. 16

Тогда

$$r_1 := \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2+2cx+c^2+b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+c^2+b^2} =$$
$$= \left|\frac{c}{a}\,x+a\right| = a+\frac{c}{a}\,x,$$

где выражение под знаком модуля положительно, так как $|x| < a$, $\left|\frac{c}{a}\,x\right| < c$. Аналогично,

$$r_2 = a - \frac{c}{a}\,x.$$

Таким образом, для любой точки, удовлетворяющей уравнению (5) выполняется $r_1 + r_2 = 2a$, т. е. она принадлежит геометрическому эллипсу.

Прежде, чем перейти к случаю гиперболы, дадим следующее определение.

Определение 5.11. Отношение

$$e := \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

называется *эксцентриситетом* эллипса.

Гипербола. Введем прямоугольную систему координат, как показано на рис. 17.

Аналогично эллипсу, упрощая соотношение $|r_1 - r_2| = 2a$ из определения гиперболы, приходим к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad b^2 := c^2 - a^2. \tag{6}$$

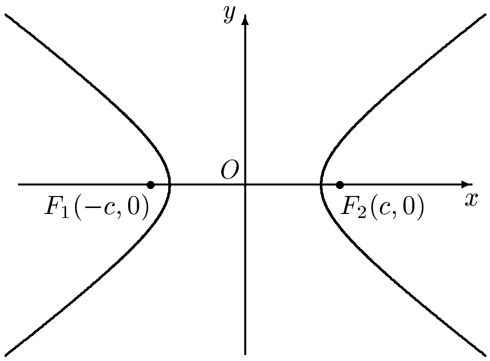


Рис. 17

Для гиперболы положим *эксцентриситет* равным

$$e := \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Таким образом, для эллипса $e < 1$, а для гиперболы $e > 1$.

Обратные вычисления проводим так же, как и для эллипса, и получаем

$$r_1 = |a + ex|, \qquad r_2 = |a - ex|,$$

причем для правой ветви гиперболы (т. е. при $x > 0$)

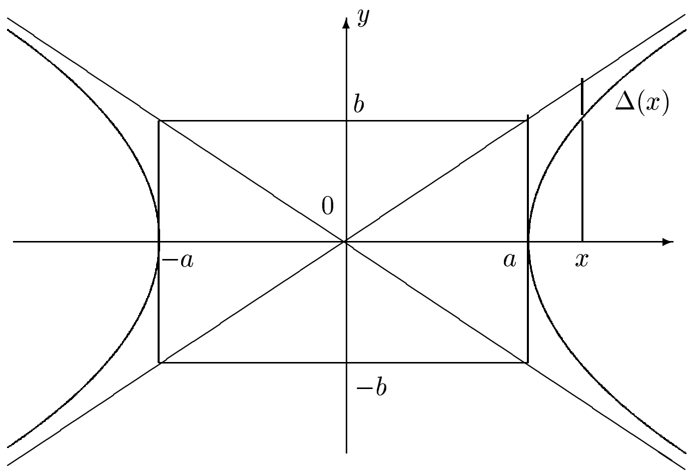
$$r_1 = a + ex, \qquad r_2 = -a + ex,$$

а для левой ветви гиперболы (т. е. при $x < 0$)

$$r_1 = -a - ex, \qquad r_2 = a - ex,$$

что и завершает обратное рассуждение.

Основной прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ для гиперболы имеет вид



Его диагонали имеют уравнения

$$y = \pm \frac{b}{a}\, x$$

и являются асимптотами гиперболы. Докажем это, например, для $y = \frac{b}{a}\, x$. Имеем (см. рис.)

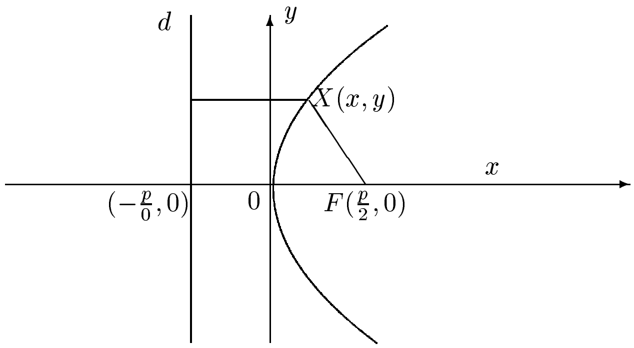
$$\Delta(x) = \frac{b}{a}\, x - b\,\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1},$$

$$\lim_{x\to\infty} \Delta(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a}\,(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a}\,\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

Парабола. Для параболы положим по определению *эксцентриситет* равным единице: $e = 1$.

Заметим, что в школе обычно рассматривают параболу $y = a\,x^2$. В аналитической геометрии мы меняем оси и переобозначаем параметр: $a = 1/2p$. Получаем $y^2 = 2px$. Число p называется *фокальным параметром.* Его геометрический смысл — это расстояние между директрисой и фокусом.

Выберем систему координат, как показано на рисунке.



Тогда соотношение из геометрического определения параболы примет вид:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2},$$

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

$$y^2=2px.$$

Обратно, для кривой, определяемой уравнением $y^2 = 2px$, обозначим через d прямую $y = -p/2$, а через F — точку $(p/2, 0)$. Заметим, что для точек этой кривой всегда $x \geqslant 0$, так что для произвольной ее точки $X(x, y)$ имеем $\rho(X, d) = p/2 + x$, а

$$\rho(X,F)=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)+y^2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+2px}=\left|x+\frac{p}{2}\right|=x+\frac{p}{2},$$

что отвечает геометрическому определению параболы.

5.5. **Директориальные свойства коник.** Составим следующую таблицу (где новым будет только определение директрис эллипса и гиперболы).

	уравнение	c	фокусы	эксц.	директрисы
эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\sqrt{a^2-b^2}$	$(\pm c, 0)$	$\frac{c}{a}<1$	$x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$
гиперб.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\sqrt{a^2+b^2}$	$(\pm c, 0)$	$\frac{c}{a}>1$	$x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$
параб.	$y^2=2px$	—	$(\frac{p}{2}, 0)$	1	$x=\frac{a}{e}$

Заметим, что для эллипса с $a = b$ (т. е. окружности) эксцентриситет e равен нулю, а директрисы не определены.

Теорема 5.12. *Отношение расстояния от точки коники (отличной от окружности) до фокуса к расстоянию до соответствующей (ближайшей) директрисы постоянно и равно эксцентриситету.*

Доказательство. Для параболы это определение.

Рассмотрим случай эллипса. Тогда (для левого фокуса, в обозначениях предыдущей теоремы) $|F_1X| = r_1 = a + ex$, а $\rho(X, d_1) = \left|x + \frac{a}{e}\right| = x + \frac{a}{e}$, так что

$$\frac{|F_1X|}{\rho(X,d)} = e.$$

Для гиперболы надо лишь в двух местах поменять знаки. □

Задача 5.13. Докажите обратное утверждение. Именно, пусть дана прямая d и точка $F \notin d$. Доказать, что ГМТ X, удовлетворяющих $\dfrac{|FX|}{\rho(X,d)} = e > 0$, является эллипсом (при $e < 1$), гиперболой (при $e > 1$) или параболой (при $e = 1$).

Задача 5.14. Дайте геометрическое доказательство директориального свойства, используя шары Данделена. *Подсказка:* директрисы являются прямыми пересечения секущей плоскости с плоскостями, содержащими окружности касания шаров Данделена и конуса.

5.6. **Фокальный параметр. Полярные уравнения коник.**

Определение 5.15. *Фокальный параметр p* коники, соответствующий уравнению (2), (3) или (4), это число p из уравнения в случае параболы, и число

$$p := \frac{b^2}{a}$$

в двух других случаях.

Таким образом, на первый взгляд, p зависит от уравнения. Однако, фокальный параметр имеет простой геометрический смысл (см. теорему 5.17)

Определение 5.16. *Фокальной хордой* называется хорда (т. е. отрезок, соединяющий две точки кривой), проходящий через фокус перпендикулярно *фокальной оси* — оси симметрии, содержащей один фокус (а значит, и второй, если их два).

Теорема 5.17. *Фокальный параметр p равен половине длины фокальной хорды.*

Доказательство. Половина длины фокальной хорды равна для эллипса, гиперболы и параболы, соответственно:

$$\sqrt{b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)} = b\sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{b^2}{a},$$

$$\sqrt{b^2\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)} = b\sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{b^2}{a},$$

$$\sqrt{2p\frac{p}{2}} = p.$$

□

Введем полярную систему координат, поместив полюс в случае эллипса в один из фокусов и направив полярную ось в сторону другого, поместив полюс в случае гиперболы в один из фокусов и направив полярную ось в сторону другого, а в случае параболы поместив полюс в фокус и направив полярную ось от директрисы (см. рис. 18).

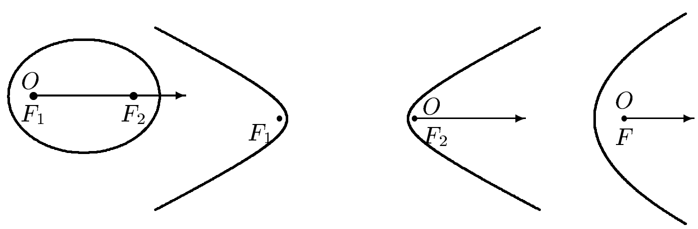


Рис. 18

Ориентация здесь не важна, так как интересующие нас коники симметричны относительно указанной полярной оси. Введенная полярная система координат не является естественно связанной с прямоугольной системой, в которой мы выписывали уравнения. Поэтому мы будем называть ее *фокальной полярной системой координат.*

Теорема 5.18. *В фокальной полярной системе координат уравнения эллипса, параболы и ветви гиперболы, ближайшей к полюсу, имеют вид*

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}.$$

Другая ветвь гиперболы задается формулой

$$r = -\frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Доказательство. Проведем для эллипса. Пусть X — произвольная точка эллипса, OR — половина фокальной хорды, Q — точка пересечения ее продолжения с перпендикуляром к директрисе, проведенным через точку X (см. рис. 19).

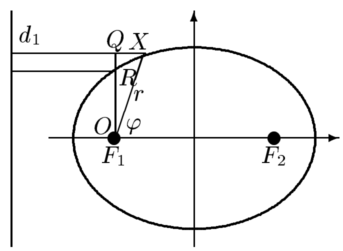


Рис. 19

Пусть (r, φ) — полярные координаты точки X. Воспользуемся директориальным свойством. Имеем:

$$|OR| = p, \qquad |QX| = r\cos\varphi, \qquad \frac{|OR|}{\rho(R, d_1)} = e,$$

$$\rho(Q, d_1) = \rho(R, d_1) = \frac{|OR|}{e} = \frac{p}{e},$$

$$e = \frac{r}{\rho(X, d_1)} = \frac{r}{|XQ| + \rho(Q, d_1)} = \frac{r}{|XQ| + \frac{p}{e}} = \frac{r}{r\cos\varphi + \frac{p}{e}},$$

$$r = er\cos\varphi + p, \qquad r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{7}$$

Чтобы показать, что мы не приобрели лишних точек, заметим, что это уравнение дает для каждого $\varphi \in [0, 2\pi)$ ровно одно положительное значение r. Таким образом, любая прямая, проходящая через фокус, пересечет множество решений уравнения (7) ровно в двух точках. Осталось показать, что тем же свойством обладает и эллипс. Действительно, пусть прямая проходит через фокус $(-c, 0)$, так что ее параметрические уравнения

$$x = -c + \alpha t, \qquad y = \beta t.$$

Точки пересечения этой прямой с эллипсом находятся из квадратного уравнения от t:

$$\frac{(-c+\alpha t)^2}{a^2} + \frac{(\beta t)^2}{b^2} = 1,$$

$$(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)t^2 - 2c\alpha b^2 t + (c^2 - a^2)b^2 = 0.$$

Для дискриминанта D имеем (так как $c^2 = a^2 - b^2$):

$$D/4 = c^2\alpha^2 b^4 - (c^2 - a^2)b^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2) =$$

$$= c^2\alpha^2 b^4 - c^2 b^4\alpha^2 - c^2 b^2 a^2\beta^2 + a^2 b^4\alpha^2 + a^4 b^2\beta^2 =$$

$$= -a^4 b^2\beta^2 + b^4 a^2\beta^2 + a^2 b^4\alpha^2 + a^4 b^2\beta^2 = b^4 a^2(\alpha^2 + \beta^2) > 0.$$

Таким образом, решений два. □

Задача 5.19. Проведите доказательство в остальных случаях.

6. Общая теория кривых второго порядка

6.1. **Канонические уравнения.** Согласно общему определению кривые второго порядка задаются в некоторой аффинной системе координат на плоскости уравнением второй степени $F(x, y) = 0$, где

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = \qquad (8)$$

$$= (x,y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_1, a_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_0 =$$

$$= X^T Q X + 2LX + a_0 = \qquad (9)$$

$$= (x,y,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x,y,1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

и хотя бы один из коэффициентов a_{ij} отличен от нуля. Матрица Q размера 2×2 называется матрицей *квадратичной части,* а матрица L размера 1×2 называется матрицей *линейной части,*

Замечание 6.1. Заметим, что указанные матрицы однозначно определяются уравнением, т. е. если например,

$$F(x,y) = (x,y,1)\,A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x,y,1)\,B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

то $A = B$.

Предложение 6.2. *При замене координат $(x,y) \to (x',y')$ уравнение второй степени $F(x,y) = 0$ переходит в уравнение второй степени*

$$F'(x',y') := F(x(x',y'), y(x',y')) = 0.$$

Доказательство. Замена координат осуществляется по формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\deg F' \leqslant 2$. Если $\deg F' \leqslant 1$, то проделав обратную замену координат, получим, что $\deg F \leqslant 1$. Пришли к противоречию. □

Замечание 6.3. Для кривых первого порядка, т. е. прямых, было получено, что два уравнения $F = 0$ и $G = 0$ задают одну и ту же кривую тогда и только тогда, когда $F = \lambda G$ для некоторого ненулевого множителя λ. Для кривых второго порядка это не так.

Определение 6.4. *Квадрикой* будем называть класс эквивалентности уравнений 2-ой степени относительно умножения на некоторый ненулевой множитель:

$$(F = 0) \sim (G = 0) \qquad \Leftrightarrow \qquad F = \lambda G, \quad \lambda \neq 0.$$

При замене координат $(x,y) \to (x',y')$ квадрика $F(x,y) = 0$ переходит в квадрику $F'(x',y') := F(x(x',y'), y(x',y')) = 0$.

Далее будет доказано, что два уравнения второго порядка задают одну и ту же кривую, тогда и только тогда, когда они пропорциональны, при условии, что кривая состоит более, чем из одной точки. Таким образом, для таких кривых соответствие квадрика $\leftrightarrow$ кривая является взаимно однозначным.

Пример 6.5. *Мнимый эллипс* — квадрика, имеющая в некоторой прямоугольной системе координат уравнение вида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$. *Мнимые параллельные прямые* отвечают уравнению $y^2 + a^2 = 0$, $a \neq 0$. Оба уравнения задают на вещественной плоскости пустое множество точек, но комплексные решения у них образуют разные множества.

Теорема 6.6. *Для любой квадрики существует прямоугольная система координат, в которой она имеет один из следующих видов (называемых* **каноническими уравнениями данной квадрики** *):*

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a \geqslant b > 0)$, *эллипс;*
(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, $(a \geqslant b > 0)$, *мнимый эллипс;*
(3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, $(a \geqslant b > 0)$, *пара пересекающихся мнимых прямых;*
(4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > 0,\ b > 0)$, *гипербола;*
(5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ $(a \geqslant b > 0)$, *пара пересекающихся прямых;*
(6) $y^2 = 2px$, $(p > 0)$, *парабола;*
(7) $y^2 - a^2 = 0$, $(a > 0)$, *пара параллельных прямых;*
(8) $y^2 + a^2 = 0$, $(a > 0)$, *пара мнимых параллельных прямых;*
(9) $y^2 = 0$, *пара совпадающих прямых.*

(*уравнения 3 и 5 определены с точностью до ненулевого множителя*).

Доказательство. Рассмотрим произвольную систему прямоугольных координат и уравнение квадрики в ней (см. формулы (8), (9) на стр. 65). Основная часть доказательства состоит из следующих двух лемм, соответствующих двум заменам координат, или двум шагам так называемого *приведения кривой к каноническому виду.*

Лемма 6.7. *Подходящим поворотом осей координат можно добиться того, что $a'_{12} = 0$, где штрих означает соответствующий коэффициент уравнения квадрики в новой системе координат.*

Доказательство леммы. Рассмотрим произвольный поворот:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$F'(x', y') := F(x(x', y'), y(x', y')) = a_{11}(\cos\varphi\, x' - \sin\varphi\, y')^2 +$$

$$+2a_{12}(\cos\varphi\, x' - \sin\varphi\, y')\,(\sin\varphi\, x' + \cos\varphi\, y') + a_{22}(\sin\varphi\, x' + \cos\varphi\, y')^2 +$$

$$+\boxed{\text{линейная часть}}.$$

Коэффициент при $2x'y'$, т. е. a'_{12}, равен

$$-a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\cos\varphi\sin\varphi =$$

$$= (a_{22} - a_{11})\frac{\sin 2\varphi}{2} + a_{12}\cos 2\varphi.$$

Мы хотим найти такое φ, чтобы $a'_{12} = 0$, т. е.

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2\, a_{12}}.$$

Задача разрешима, так как если бы $a_{12} = 0$, то не требовалось бы никакого поворота. В повернутой (штрихованной) системе координат многочлен F примет вид

$$F'(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_0 = 0. \tag{11}$$

□

Лемма 6.8. *Многочлен вида* (11) *параллельным переносом приводится к одному из следующих видов:*

(1) $F'' = \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + \tau \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \neq 0)$;
(2) $F'' = \lambda_2 (y'')^2 + 2b_1 x'' \qquad (\lambda_2, b_1 \neq 0)$;
(3) $F'' = \lambda_2 (y'')^2 + \tau \qquad (\lambda_2 \neq 0)$.

Доказательство. **1:** $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Тогда выделяем полные квадраты:

$$F'(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_0 =$$

$$= \lambda_1 \left(x' + \frac{b_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + \left(b_0 - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} \right) =$$
$$= \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + \tau,$$

где

$$x'' := x' + \frac{b_1}{\lambda_1}, \qquad y'' := y' + \frac{b_2}{\lambda_2},$$

— формулы замены координат, обратной к искомой.

2: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ (если $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, то поменяем координаты местами). Возможны два случая.

а) Если $b_1 \neq 0$, то

$$F'(x', y') = \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_0 =$$
$$= \lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + 2b_1 x' + \left(b_0 - \frac{b_2^2}{\lambda_2} \right) =$$
$$= \lambda_2 (y'')^2 + 2b_1 x'',$$

где

$$x'' := x' + \frac{1}{2\,b_1} \left(b_0 - \frac{b_2^2}{\lambda_2} \right), \qquad y'' := y' + \frac{b_2}{\lambda_2},$$

— формулы замены координат, обратной к искомой.

б) Если $b_1 = 0$, то

$$F'(x', y') = \lambda_2 y'^2 + 2b_2 y' + b_0 =$$
$$= \lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + \left(b_0 - \frac{b_2^2}{\lambda_2} \right) = \lambda_2 (y'')^2 + \tau,$$

где

$$x'' := x', \qquad y'' := y' + \frac{b_2}{\lambda_2},$$

— формулы замены координат, обратной к искомой. Лемма доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы и разберем различные случаи уравнений из предыдущей леммы. Мы не будем оговаривать очевидные операции, когда умножаем уравнение на ненулевой множитель или меняем названия координат.

1). 1. λ_1 и λ_2 — одного знака, τ — противоположного. Получаем уравнение эллипса.

2. $\lambda_1, \lambda_2, \tau$ — одного знака. Получаем уравнение мнимого эллипса.

3. λ_1 и λ_2 — одного знака, $\tau = 0$. Пара пересекающихся мнимых прямых.

4. λ_1 и λ_2 — разных знаков, $\tau \neq 0$. Гипербола.

5. λ_1 и λ_2 — разных знаков, $\tau = 0$. Пара пересекающихся прямых.

2). 6. Парабола.

3). 7. $\tau < 0$. Пара параллельных прямых.

8. $\tau > 0$. Пара мнимых параллельных прямых.

9. $\tau = 0$. Пара совпадающих прямых. $\square$

Следствие 6.9. *Уравнение второй степени на плоскости задает одну из следующих кривых (как множество точек) : эллипс; гипербола; парабола; пара пересекающихся прямых; пара параллельных прямых; пара совпадающих прямых; точка; пустое множество.*

6.2. **Инварианты многочлена второй степени.** Очевидно, что коэффициенты уравнения второго порядка зависят от выбора системы координат. Важную роль для нас будут играть такие алгебраические выражения от коэффициентов, которые не зависят от этого выбора. Задача описания таких выражений (в самой общей постановке) исследуется в специальном разделе математики, называемом *теорией инвариантов.* Мы опишем результаты этой теории в нашем конкретном случае и применим их к распознаванию геометрии квадрик.

Определение 6.10. Функция J от коэффициентов многочлена F называется *ортогональным инвариантом,* если она не меняется при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой, т. е.

$$J(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0) = J(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_1, a'_2, a'_0).$$

Определение 6.11. Сумма диагональных элементов матрицы A называется *следом матрицы* A:

$$\operatorname{tr} A := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Теорема 6.12. *Следующие три функции:*

$$S := \operatorname{tr} Q, \qquad \delta := \det Q, \qquad \Delta := \det A$$

являются ортогональными инвариантами.

Доказательство. Рассмотрим переход от (x, y) к другой прямоугольной системе координат (x', y'):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

где $C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ — произвольная ортогональная матрица. Наряду с C рассмотрим еще 3×3-матрицу

$$D := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & x_0 \\ c_{21} & c_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда выполняется соотношение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & x_0 \\ c_{21} & c_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 6.13. *Матрицы A' и Q', отвечающие многочлену*

$$F'(x', y') := F(x(x', y'), y(x', y')),$$

связаны с матрицами A и Q соотношениями

$$A' = D^T A D, \qquad Q' = C^T Q C.$$

Доказательство.

$$F'(x', y') = (x, y, 1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \right)^T A D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (x', y', 1) D^T A D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В силу замечания 6.1 это означает, что $A' = D^T A D$. Аналогично доказывается и второе утверждение. □

Продолжим доказательство теоремы. Из леммы, ортогональности C и явного вида D получаем

$$\det Q' = \det(C^T Q C) = \det C^T \det Q \det C = (\det C)^2 \det Q = \det Q,$$

$$\det A' = \det(D^T Q D) = \det D^T \det A \det D = (\det D)^2 \det A = \det A,$$

так как $\det C = 1$, а $\det A = \det C$. Инвариантность δ и Δ установлена.

По лемме

$$Q' = C^T Q C,$$

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11}a_{11} + c_{21}a_{12} & c_{11}a_{12} + c_{21}a_{22} \\ c_{12}a_{11} + c_{22}a_{12} & c_{12}a_{12} + c_{22}a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

$$a'_{11} = c_{11}^2 a_{11} + c_{21}c_{11}a_{12} + c_{11}c_{21}a_{12} + c_{21}^2 a_{22},$$

$$a'_{22} = c_{12}^2 a_{11} + c_{22}c_{12}a_{12} + c_{12}c_{22}a_{12} + c_{22}^2 a_{22},$$

$$a'_{11} + a'_{22} = a_{11}(c_{11}^2 + c_{12}^2) + 2a_{12}(c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22}) + a_{22}(c_{21}^2 + c_{22}^2).$$

Вспомним явный вид двумерных ортогональных матриц:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Так что

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{12}^2 &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1, \\ c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} &= \cos\varphi(\pm\sin\varphi) \mp \sin\varphi\cos\varphi = 0, \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 &= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1. \end{aligned}$$

Значит, $a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}$. □

Замечание 6.14. Указанные инварианты **не** являются инвариантами относительно умножения уравнения на ненулевое λ. Эта операция не отвечает никакой замене прямоугольных координат.

Инвариантность S и δ можно получить из некоторой более общей теоремы, которую мы сейчас докажем.

Определение 6.15. *Характеристическим многочленом матрицы Q* называется $\chi_Q := \det(Q - \lambda E)$, где E — единичная матрица.

Теорема 6.16. *Коэффициенты характеристического многочлена матрицы Q являются ортогональными инвариантами.*

Доказательство. $\chi_{Q'}(\lambda) = \det(Q' - \lambda E) =$

$$= \det(C^T QC - \lambda E) = \det(C^T QC - \lambda C^T C) =$$

$$= \det(C^T (Q - \lambda E)C) = (\det C)^2 \det(Q - \lambda E) = \chi_Q(\lambda).$$

□

6.3. **Определение канонического уравнения по инвариантам.** Как было показано при доказательстве теоремы о приведении к каноническому виду, любое уравнение второго порядка заменой прямоугольных координат приводится к одному из следующих видов

(1) $F = \lambda_1(x)^2 + \lambda_2(y)^2 + \tau \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \neq 0)$;
(2) $F = \lambda_2(y)^2 + 2b_1x \qquad (\lambda_2, b_1 \neq 0)$;
(3) $F = \lambda_2(y)^2 + \tau \qquad (\lambda_2 \neq 0)$.

На этом этапе были проведены только замены прямоугольных координат (никаких умножений на ненулевые множители еще не производилось), поэтому все инварианты сохранились. Значит, если мы сможем по инвариантам в этом виде найти уравнение, то и в исходном тоже.

Составим таблицу

Случай	A	S	δ	Δ
1	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}$	$\lambda_1 + \lambda_2$	$\lambda_1\lambda_2$	$\lambda_1\lambda_2\tau$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	λ_2	0	$-\lambda_2 b_1^2$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}$	λ_2	0	0

Очевидно следующее утверждение.

Предложение 6.17. *Типы квадрик* $1-3$ *однозначно определяются значениями инвариантов*

(1) $\delta \neq 0$;
(2) $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$;
(3) $\delta = 0$, $\Delta = 0$, $S \neq 0$.

Рассмотрим каждый случай отдельно.

1. $F = \lambda_1(x)^2 + \lambda_2(y)^2 + \tau \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \neq 0)$.

Предложение 6.18. *Коэффициенты λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического многочлена матрицы Q.*

Доказательство. $\chi_Q = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)$. □

Итак, в первом случае ответ следующий: λ_1 и λ_2 находятся как корни характеристического многочлена $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$, а $\tau = \Delta/\delta$.

Следствие 6.19. *Характеристический многочлен имеет вещественные корни.*

2. $F = \lambda_2(y)^2 + 2b_1 x \qquad (\lambda_2, b_1 \neq 0)$.

В этом случае $\lambda_2 = S$, $b_1 = \pm\sqrt{-\dfrac{\Delta}{S}}$. Это парабола с фокальным параметром $p = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{S^3}}$.

3. $F = \lambda_2(y)^2 + \tau \qquad (\lambda_2 \neq 0)$.

Тут $\lambda_2 = S$, но вычислить τ через S, δ и Δ невозможно. Необходим еще “почти инвариант”.

Определим функцию K формулой

$$K := \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Лемма 6.20. *Корни характеристического многочлена матрицы A не меняются при заменах прямоугольных координат с общим началом.*

Доказательство. В этом случае матрица $D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ортогональна. Дальше дословно как в теореме 6.16. □

Теорема 6.21. *Если $\delta = \Delta = 0$, то функция K является ортогональным инвариантом.*

Доказательство. Заметим, что характеристический многочлен A имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a_0 + a_{11} + a_{22})\lambda^2 -$$

$$- \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \right) \lambda + \Delta =$$

$$= -\lambda^3 + (a_0 + S)\lambda^2 - (K + \delta)\ \lambda + \Delta.$$

В силу предыдущей леммы K инвариантен при прямоугольных заменах, сохраняющих начало. В общем случае требуем $\delta = \Delta = 0$. Поскольку добиться $a_{12} = 0$ можно одним и тем же поворотом для систем, отличающихся на сдвиг, то можно считать, что уже $a_{12} = 0$ у исходного уравнения. Поскольку в этом случае $\delta = a_{11}a_{22} = 0$, то без ограничения общности можно считать, что $a_{11} = 0$, а $a_{22} \neq 0$. Из $\Delta = -a_1^2 a_{22} = 0$ получаем $a_1 = 0$. Тогда F принимает вид $F = a_{22}y^2 + 2a_2 y + a_0$. Рассмотрим сдвиг

$$x = x' + x_0, \qquad y = y' + y_0.$$

Тогда

$$F' = a_{22}(y' + y_0)^2 + 2a_2(y' + y_0) + a_0 =$$
$$= a_{22}(y')^2 + 2(a_{22}y_0 + a_2)y' + (a_{22}y_0^2 + 2a_2 y_0 + a_0),$$

$$a'_{22} = a_{22}, \qquad a'_2 = a_{22}y_0 + a_2, \qquad a'_0 = a_{22}y_0^2 + 2a_2 y_0 + a_0.$$

При этом

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_2 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_2 \\ 0 & a'_2 & a'_0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $K = a_{22}a_0 - a_2^2$, а

$$K' = a_{22}(a_{22}y_0^2 + 2a_2 y_0 + a_0) - (a_{22}y_0 + a_2)^2 = a_{22}a_0 - a_2^2 = K.$$

□

Функция K по этой причине называется *семиинвариантом* (или *относительным инвариантом*).

Вернемся к третьему случаю: $F = \lambda_2 y^2 + \tau$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}, \qquad S = \lambda_2, \qquad \delta = \Delta = 0,$$

$$K = \lambda_2 \tau, \qquad \tau = \frac{K}{S}.$$

Теорема 6.22. *Следующая таблица дает необходимые и достаточные условия принадлежности кривой второго порядка к одному из девяти видов в терминах инвариантов:*

1. Эллипс	$\delta > 0$	$S\Delta < 0$
2. Мнимый эллипс	$\delta > 0$	$S\Delta > 0$
3. Пара мнимых пересек-ся прямых	$\delta > 0$	$\Delta = 0$
4. Гипербола	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$
5. Пара пересекающихся прямых	$\delta < 0$	$\Delta = 0$
6. Парабола	$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$
7. Пара параллельных прямых	$\delta = \Delta = 0$	$K < 0$
8. Пара мнимых парал-ных прямых	$\delta = \Delta = 0$	$K > 0$
9. Пара совпадающих прямых	$\delta = \Delta = 0$	$K = 0$

Доказательство. Проведем для эллипса.

$$F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\delta = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} > 0, \quad S = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > 0, \quad \Delta = -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} < 0.$$

При переходе к другой системе координат инварианты не изменятся. Если умножим F на положительную константу, то знаки инвариантов останутся прежними, а если умножим F на отрицательную константу, то знак δ не изменится, а знаки S и Δ изменятся, значит, знак $S\Delta$ останется прежним.

Обратно, рассмотрим квадрику с $\delta > 0$ и $S\Delta < 0$. Так как $\delta \neq 0$, то она приведется к первому типу:

$$F = \lambda_1 (x)^2 + \lambda_2 (y)^2 + \tau \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \neq 0),$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}, \quad S = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \delta = \lambda_1 \lambda_2 \quad \Delta = \lambda_1 \lambda_2 \tau.$$

Так как $\delta > 0$, то λ_1 и λ_2 одного знака, значит, и S того же знака. Так как $S\Delta < 0$, то Δ другого знака, и $\tau = \Delta/\delta$ тоже. Поэтому после деления на $-\tau$ приходим к уравнению эллипса. □

Следствие 6.23. *Так как коэффициенты канонического уравнения выражаются через инварианты и семиинвариант, то уравнения определены однозначно.*

Пример 6.24. Определить тип кривой $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1/2 \\ -5/2 & 4 & 1 \\ 1/2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$S = 5, \quad \delta = 4 - \frac{25}{4} = -\frac{9}{4}, \quad \Delta = -8 - \frac{5}{4} - \frac{5}{4} - 1 - 1 + \frac{25}{2} = 0,$$

таким образом, это пара пересекающихся прямых.

Пример 6.25. Определить тип кривой $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -11 \\ 6 & 0 & -6 \\ -11 & -6 & -19 \end{pmatrix},$$

$$S = 5, \quad \delta = -36, \quad \Delta = 2\cdot 36\cdot 11 + 36\cdot 19 - 36\cdot 5 = 792 + 504 = 1296,$$

таким образом, это гипербола.

Задача 6.26. Найдите (с помощью инвариантов) канонические уравнения этих кривых.

6.4. **Распадающиеся кривые.**

Определение 6.27. Алгебраическая кривая $F(x, y) = 0$ называется *распадающейся,* если $F = F_1 \cdot F_2$, где F_1 и F_2 — многочлены ненулевой степени.

Предложение 6.28. *Если алгебраическая кривая произвольного порядка $F = 0$ содержит прямую $f = Ax + By + C = 0$, то $F = f \cdot F_1$, т. е. многочлен F делится на f без остатка.*

Доказательство. Пусть $A \neq 0$ (для $B \neq 0$ аналогично). Разделим многочлен F на f как многочлены от x с остатком $r(y)$. Предположим, что $r \neq 0$, т. е. найдется такая точка y_0, что $r(y_0) \neq 0$. Выберем x_0 так, чтобы

$$f(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C = 0, \qquad \text{т.е.} \qquad x_0 = -\frac{1}{A} \cdot (By_0 + C).$$

Тогда $(x_0, y_0) \in \{f = 0\} \subset \{F = 0\}$ и $0 = F(x_0, y_0) =$ $f(x_0, y_0) \cdot F_1(x_0, y_0) + r(y_0) = 0 \cdot F_1(x_0, y_0) + r(y_0) = r(y_0)$. Противоречие. $\square$

Следствие 6.29. *Если кривая второго порядка $F(x, y) = 0$ содержит прямую $Ax + By + C = 0$, то $F = (Ax + By + C) \cdot (A_1x + B_1y + C_1)$. Это возможно тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$.*

Доказательство. Первое утверждение получается непосредственно из предыдущего предложения, а второе — из первого и теоремы об определении вида кривой по инвариантам. $\square$

Пример 6.30.

$$F(x, y) = x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = x^2 - (5y - 1)x + (4y^2 + 2y - 2),$$

$$x_{1,2} = \frac{5y - 1 \pm (3y - 3)}{2}, \quad x_1 = 4y - 2, \quad x_2 = y + 1,$$

$$F(x, y) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = (x - 4y + 2) \cdot (x - y - 1).$$

Задача 6.31. Доказать, что если $a_{11} \neq 0$, то квадратное уравнение $F(x, y) = 0$ относительно x имеет своим дискриминантом квадратный трехчлен относительно y, дискриминант которого в свою очередь равен $a_{11}\Delta$. В частности, корень извлекается точно при $\Delta = 0$.

Теорема 6.32 (Полнота системы инвариантов)**.** *Произвольный ортогональный инвариант J многочлена второй степени, полиномиально зависящий от его коэффициентов, является многочленом от S, δ и Δ.*

Идея доказательства. Рассмотрим множество многочленов F с условием $\delta \neq 0$. В некоторых прямоугольных системах координат они имеют вид $F' = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \tau$, так что

$$J(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0) = J(\lambda_1, 0, \lambda_2, 0, 0, \tau) = P(\lambda_1, \lambda_2, \tau).$$

Поскольку перестановка осей x' и y' является изометрией, то $P(\lambda_1, \lambda_2, \tau) = P(\lambda_2, \lambda_1, \tau)$, т.е. многочлен P симметричен по λ_1 и λ_2. Из курса алгебры известно, что любой такой многочлен полиномиально выражается через $S = \lambda_1 + \lambda_2$ и $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, так что $J = P(\lambda_1, \lambda_2, \tau) = Q(S, \varepsilon, \tau) = Q(S, \delta, \Delta/\delta)$, и $J = R(S, \delta, \Delta)$. □

Задача 6.33. * Восполните пробелы в доказательстве.

6.5. **Теоремы единственности для кривых второго порядка.** Напомним, что квадрика — это алгебраическое уравнение второго порядка с точностью до умножения на ненулевой множитель. Допуская вольность речи, мы будем называть квадрикой и соответствующую кривую решений этого уравнения.

Теорема 6.34. *Существует и единственна квадрика, проходящая через данные различные пять точек, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой.*

Доказательство. Пусть $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, 5$, — эти точки в некоторой прямоугольной системе координат. Для нахождения коэффициентов уравнения искомой квадрики возникает система из 5 линейных уравнений:

$$a_{11}x_i^2 + 2a_{12}x_iy_i + a_{22}y_i^2 + 2a_1x_i + 2a_2y_i + a_0 = 0, \qquad i = 1, \ldots 2,$$

от 6 неизвестных с точностью до умножения на ненулевой множитель. Такая система всегда имеет решение. Оно однозначно с точностью до умножения на ненулевой множитель, если уравнения линейно независимы. Допустим противное. Пусть, например, пятое уравнение является линейной комбинацией первых четырех, так что любая квадрика, проходящая через $P_1, \ldots, P_4$, проходит и через P_5. Рассмотрим два случая.

1: Три точки из $P_1, \ldots, P_4$, например, P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой, которую обозначим l (рис. 20).

Проведем прямую m, содержащую P_4 и не содержащую P_5. Так как 4 точки не лежат на одной прямой, то $m \neq l$ и $m \cup l$ — квадрика, не содержащая P_5. Противоречие.

2: Никакие три точки из $P_1, \ldots, P_4$ не лежат на одной прямой. Тогда определены две квадрики: $q_1 := (P_1P_2) \cup (P_3P_4)$ и $q_2 := (P_1P_4) \cup (P_2P_3)$ (рис. 21).

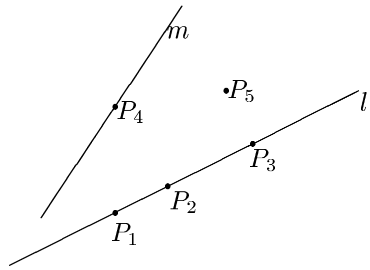


Рис. 20

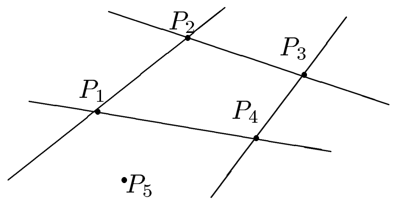


Рис. 21

По предположению, $P_5 \in q_1$, $P_5 \in q_2$. Но пересечение $q_1 \cap q_2$ равно $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. Противоречие. $\square$

Определение 6.35. Назовем кривую второго порядка *содержательной,* если она состоит более, чем из одной точки.

Содержательные кривые — это коники и пары прямых (возможно, совпадающих).

Теорема 6.36. *Если два уравнения второй степени $F = 0$ и $G = 0$ задают одну и ту же содержательную кривую, то $F = \lambda G$, $\lambda \neq 0$.*

Доказательство. У всех содержательных кривых, кроме совпадающих прямых, существуют принадлежащие им 4 точки, не лежащие на одной прямой. Поэтому утверждение теоремы для них следует из предыдущей теоремы. Остался случай двух совпадающих прямых. Пусть $F = 0$ и $G = 0$ содержат $Ax+Bx+C =$

0. Тогда по предложению о распадающихся кривых,

$$\begin{aligned} F &= (Ax + By + C) \cdot (A_1x + B_1y + C_1), \\ G &= (Ax + By + C) \cdot (A_2x + B_2y + C_2). \end{aligned}$$

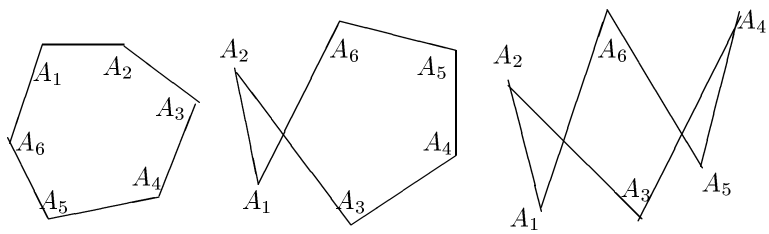
Когда речь идет о совпавших прямых, то вторые сомножители должны определять ту же прямую $Ax + Bx + C = 0$, а значит, по теореме об уравнениях первого порядка, задающих одну и ту же кривую,

$$A_1x+B_1y+C_1=\lambda\,(Ax+Bx+C),\ A_2x+B_2y+C_2=\mu\,(Ax+Bx+C),$$

так что $G = \dfrac{\lambda}{\mu}F$. □

6.6. **Теорема Паскаля и построение кривой второго порядка по пяти заданным точкам.**

Определение 6.37. *Шестивершинником* называется упорядоченный набор $A_1, \ldots, A_6$ шести точек на плоскости, находящихся в общем положении, т. е. никакие 3 точки не лежат на одной прямой. Его *стороны*: A_1A_2, A_2A_3, ... A_6A_1. *Противоположные стороны*: A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1.



Следующий классический результат демонстрирует еще одно замечательное свойство коник.

Теорема 6.38 (Паскаля)**.** *Точки пересечения противоположных сторон шестивершинника, вписанного в конику, лежат на одной прямой* (*см. рис.* 22).

Доказательство. Будем обозначать через (AB) прямую, проходящую через A и B. Пусть $P_1 = (A_1A_2) \cap (A_4A_5)$, $P_2 = (A_2A_3) \cap (A_5A_6)$, $P_3 = (A_3A_4) \cap (A_6A_1)$. Докажем, что $P_3 \in (P_1P_2)$.

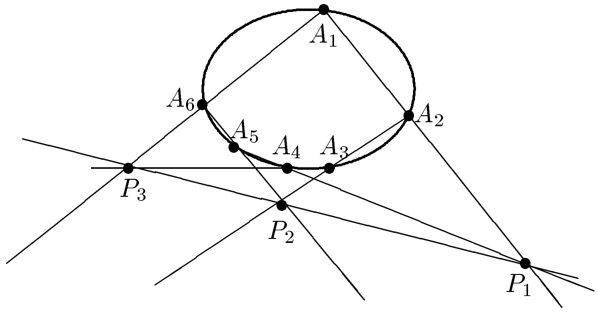


Рис. 22

Рассмотрим уравнения кривых третьей степени

$$P(x,y) = a_{111}x^3 + a_{112}x^2y + a_{122}xy^2 + a_{222}y^3 + \\ + a_{011}x^2 + a_{012}xy + a_{022}y^2 + a_{001}x + a_{002}y + a_{000} = 0,$$

проходящих через 8 точек: $A_1, \ldots, A_6, P_1, P_2$. Возникает однородная система из 8 уравнений на 10 коэффициентов a_{ijk}. Покажем, что эти 8 уравнений линейно независимы. Предположим, что это не так, т. е. одно из уравнений линейно выражается через остальные. Это означает, что любая кубическая кривая, проходящая через 7 точек, проходит и через восьмую.

Допустим, что уравнение, отвечающее P_2, выражается через остальные. Рассмотрим кубическое уравнение, равное произведению уравнения нашей квадрики на уравнение прямой, проходящей через P_1, но не через P_2. Противоречие.

Аналогично для P_1.

Пусть теперь "зависимая" точка — A_1. Тогда противоречие получается из рассмотрения кубики $(A_4A_5) \cup (A_2A_3) \cup (A_5A_6)$. Аналогично, для остальных A_i.

Итак 8 уравнений линейно независимы и любое решение является линейной комбинацией двух линейно независимых решений. Два решения, определяющие различные ГМТ будут линейно независимы (от противного). В частности, кубические уравнения ГМТ $(A_1A_2) \cup (A_3A_4) \cup (A_5A_6)$ и $(A_2A_3) \cup (A_4A_5) \cup (A_6A_1)$ линейно независимы. Значит, уравнение $Q \cup (P_1P_2)$, где Q — исходная коника, выражается в виде их линейной комбинации.

Значит, P_3 принадлежит

$$\Big((A_1A_2)\cup(A_3A_4)\cup(A_5A_6)\Big)\cap\Big((A_2A_3)\cup(A_4A_5)\cup(A_6A_1)\Big)\subset Q\cup(P_1P_2).$$

Поскольку никакие три точки коники не лежат на одной прямой (см. следующий § для доказательства этого наглядного факта), то P_3 не может лежать на Q. Значит, $P_3 \in (P_1P_2)$. $\square$

Замечание 6.39. В этой теореме мы неявно предполагали, что противоположные стороны пересекаются. Это предположение автоматически выполняется на проективной плоскости, где теорема Паскаля выглядит более естественной.

Внимательно проанализировав доказательство теоремы Паскаля, можно убедиться, что верны также

Теорема 6.40 (обратная теорема Паскаля)*. *Если точки пересечения противоположных сторон шестивершинника лежат на одной прямой, то вокруг него можно описать конику.*

Теорема 6.41 (Паппа). * *Теорема Паскаля верна и в случае двух несовпадающих прямых, если потребовать, чтобы вершины вписанного шестивершинника лежали через одну на каждой из прямых, т. е. A_1, A_3, A_4 — на одной, а остальные — на другой.*

Задача 6.42. Восстановите доказательства теоремы Паппа и обратной теоремы Паскаля.

Теорема Паскаля (точнее, ее обратная) позволяет построить сколь угодно много точек коники по ее 5 точкам, используя только линейку. Действительно, допустим, что нам известны 5 точек $A_1, \ldots, A_5$, лежащие на конике. Рассмотрим точку $P_1 = (A_1A_2)\cap(A_4A_5)$ и прямые $l_2 = (A_2A_3)$ и $l_3 = (A_3A_4)$. Тогда по каждой точке P_2 на прямой l_2 мы можем построить точку A_6 на конике по следующему правилу. Проведем прямую (P_2P_1) до пересечения с l_3 в точке P_3. Тогда $A_6 = (P_2A_5) \cap (P_3A_1)$ по обратной теореме Паскаля лежит на конике. Выбирая различные P_2, получаем различные точки на конике.

В предельном случае, когда $A_6 \to A_5$, мы приходим к следующему построению касательной к конике, заданной пятью точками. Допустим, нам известны 5 точек $A_1, \ldots, A_5$, лежащие на конике. Мы хотим построить касательную в точке A_5. Построим точки $P_1 = (A_1A_2) \cap (A_4A_5)$, $P_3 = (A_3A_4) \cap (A_5A_1)$. Пусть $P_2 = (P_1P_3) \cap (A_2A_3)$. Тогда (P_2A_5) — искомая касательная.

6.7. **Пересечение кривой второго порядка с прямой.** Рассмотрим кривую второго порядка Γ, заданную в некоторой аффинной системе координат уравнением

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

и прямую l, заданную параметрически

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \alpha t \\ y & = & y_0 + \beta t \end{array} \right. .$$

Для нахождения точек пересечения Γ и l подставим параметрические уравнения в $F = 0$:

$$a_{11}(x_0 + \alpha t)^2 + 2a_{12}(x_0 + \alpha t)(y_0 + \beta t) + a_{22}(y_0 + \beta t)^2 + \\ + 2a_1(x_0 + \alpha t) + 2a_2(y_0 + \beta t) + a_0 = 0,$$

или

$$F_2t^2 + 2F_1t + F_0 = 0,$$

где

$$\begin{array}{lcl} F_2 & = & a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = q(\alpha,\beta), \\ F_1 & = & \alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2), \\ F_0 & = & F(x_0,y_0). \end{array}$$

Определение 6.43. Ненулевой вектор (α,β) имеет *асимптотическое направление* по отношению к кривой второго порядка Γ, если $F_2 = q(\alpha,\beta) = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$.

Легко видеть, что это свойство не меняется при умножении уравнения на ненулевой множитель, т. е. является свойством квадрики, а не уравнения.

Предложение 6.44. *Определение асимптотического направления корректно, т. е. не зависит от выбора системы координат.*

Доказательство. Фактически необходимые выкладки уже проводились: если имеется замена координат (так как имеем дело только с квадратичной частью, то можно считать, что сдвига нет) с матрицей C, то

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}, \quad Q' = C^T Q C, \text{ где } Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$q(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta) Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} =$$

$$= \left(C \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} \right)^T QC \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} \right)^T C^T Q C \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} \right)^T Q' \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = q'(\alpha',\beta').$$

Таким образом, результат подстановки вектора в квадратичную часть не зависит от выбора системы координат. □

Следующий результат проясняет геометрический смысл понятия асимптотического направления.

Теорема 6.45. *Прямая l неасимптотического направления по отношению к кривой второго порядка Γ либо имеет с ней 2 общие точки (различные или совпавшие) либо не пересекается с ней. Прямая l асимптотического направления по отношению к кривой второго порядка Γ либо содержится в Γ, либо имеет с ней одну общую точку, либо не пересекается с ней.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $F_2 t^2 + F_1 t + F_0 = 0$, где $F_2 = q(\alpha,\beta)$, а (α,β) — направляющий вектор l.

Если направление неасимптотическое, то $F_2 = q(\alpha,\beta) \neq 0$ и квадратное уравнение невырождено. Оно может иметь 2, 1 или 0 решений. При этом 1 решение отвечает случаю полного квадрата, т.е. корни (точки) совпали.

Если же направление асимптотическое, то $F_2 = 0$ и уравнение принимает вид $2F_1 t + F_0 = 0$. Если $F_1 \neq 0$, то имеется единственная точка пересечения. Если $F_1 = 0$, а $F_0 \neq 0$, то пересечение пусто. Если $F_1 = F_0 = 0$, то пересечение l и Γ совпадает с l. □

Следствие 6.46. *Никакие три точки коники не лежат на одной прямой.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда прямая, содержащая эти три точки, имеет асимптотическое направление и целиком содержится в кривой. Значит, кривая распадается на две прямые и не является коникой. □

6.8. **Нахождение асимптотических направлений.** Напомним, что уравнение для асимптотических направлений имеет вид

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0.$$

Если $a_{11} \neq 0$, то $\beta \neq 0$, так как иначе и $\alpha = 0$. Делим на β^2:

$$a_{11}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + a_{22} = 0,$$

или $a_{11}k^2 + 2a_{12}k + a_{22} = 0$, где $k = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Тогда

$$k = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-\delta}}{a_{11}}.$$

Определение 6.47. Квадрика $F = 0$ имеет *эллиптический, гиперболический или параболический тип,* если, соответственно, $\delta > 0$, $\delta < 0$ или $\delta = 0$.

Лемма 6.48. *Это определение корректно, т. е. знак δ не зависит от выбора системы координат и умножения уравнения на ненулевой множитель.*

Доказательство. Заметим, что δ — инвариант только ортогональных замен, но при произвольной замене

$$\operatorname{sgn}\delta' = \operatorname{sgn}\,\det Q' = \operatorname{sgn}\,\det(C^T QC) = \operatorname{sgn}(\det C)^2 \det Q = \operatorname{sgn}\delta.$$

При переходе от F к $\lambda \cdot F$, сходным образом, δ переходит в $\lambda^2 \cdot \delta$. □

Теорема 6.49. *Кривые эллиптического типа не имеют асимптотических направлений; гиперболического типа имеют два асимптотических направления; параболического типа — одно асимптотическое направление.*

Доказательство. Если $a_{11} \neq 0$, то была получена формула $k = \dfrac{-a_{12} \pm \sqrt{-\delta}}{a_{11}}$, из которой утверждение следует очевидным образом. Аналогично для случая $a_{22} \neq 0$. Если же $a_{11} = a_{22} = 0$, то $\delta = -a_{12}^2 < 0$ и уравнение для асимптотических направлений примет вид

$$q(\alpha, \beta) = 2a_{12}\alpha\beta = 0,$$

дающий два асимптотических направления: $(0, 1)$ и $(1, 0)$. $\square$

Пример 6.50. Асимптотические направления гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

должны удовлетворять

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 0, \qquad k = \frac{\alpha}{\beta} = \pm\frac{a}{b}.$$

Таким образом, асимптотические направления гиперболы — это направления ее асимптот.

Пример 6.51. У эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

нет асимптотических направлений:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 0, \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = \beta = 0.$$

Пример 6.52. Парабола имеет одно асимптотическое направление — направление ее оси. Действительно, из уравнения $y^2 - 2px = 0$ получаем $q(\alpha, \beta) = \beta^2 = 0$, что дает направление $(1, 0)$.

Задача 6.53. Покажите, что асимптотические направления пары пересекающихся прямых — направления этих прямых (аналитически и через теорему о числе точек пересечения), и что асимптотические направления пары параллельных или совпавших прямых — направления этих прямых.

Следствие 6.54 (из теоремы 6.45, примеров и задачи)**.** *Для содержательных кривых, за исключением совпавших прямых, можно определить неасимптотическое направление геометрически: прямая l имеет неасимптотическое направление тогда и только тогда, когда найдется параллельная ей прямая, пересекающая кривую ровно в двух точках.*

6.9. **Диаметры и центры кривых второго порядка.** Рассмотрим непустую кривую второго порядка Γ, заданную в некоторой аффинной системе координат уравнением

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \quad (12)$$

и прямую l неасимптотического направления, заданную параметрически

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \alpha t \\ y & = & y_0 + \beta t \end{array} \right. .$$

Пусть l пересекает Γ в двух (возможно совпавших) точках, и (x_0, y_0) — середина соответствующего отрезка (хорды). Поскольку для нахождения t_1 и t_2, соответствующих точкам пересечения, мы имели уравнение

$$F_2t^2 + 2F_1t + F_0 = 0,$$

где

$$\begin{array}{rcl} F_2 & = & a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = q(\alpha,\beta), \\ F_1 & = & \alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2), \\ F_0 & = & F(x_0, y_0), \end{array}$$

причем в нашем случае $F_2 \neq 0$. По теореме Виета для $t_0 = 0$, отвечающего (x_0, y_0), условие середины хорды примет вид

$$0 = t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2} = -\frac{F_1}{F_2}, \qquad F_1 = 0.$$

Теорема 6.55. *Середины хорд кривой Γ данного неасимптотического направления (α, β) лежат на прямой*

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0.$$

Доказательство. В силу рассуждения перед теоремой, осталось доказать, что данное уравнение задает прямую, т. е. это уравнение первой степени, а не нулевой. Перепишем:

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)y + (a_1\alpha + a_2\beta) = 0$$

Если бы коэффициенты при переменных равнялись оба нулю, то

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}\alpha + a_{12}\beta & = & 0, \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta & = & 0, \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \times\alpha \\ \times\beta \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}\alpha^2 + a_{12}\alpha\beta & = & 0, \\ a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 & = & 0, \end{array} \right| +$$

и $a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$, что противоречит неасимптотичности направления. $\square$

Определение 6.56. Прямая $\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0$ называется *диаметром* кривой второго порядка (12), *сопряженным данному неасимптотическому направлению* (α, β).

Определение 6.57. *Центр кривой* Γ — такая точка $M(x_0, y_0)$, что вместе с любой точкой P содержит и точку P', симметричную P относительно M. Таким образом, M — центр симметрии Γ.

Лемма 6.58. *Пусть $M(x_0, y_0)$ — центр кривой Γ. Существуют две различных прямых неасимптотических направлений, проходящие через M и пересекающие Γ.*

Доказательство. Для точки и прямых утверждение очевидно. Для коник рассмотрим две точки P и Q, отличные от M, несимметричные относительно M и лежащие на Γ. Тогда $(PM) \cap \Gamma \supset \{P, P'\}$, $(QM) \cap \Gamma \supset \{Q, Q'\}$, где P' и Q' — соответствующие симметричные точки. Более того, третьих точек в пересечениях нет, так как это противоречит следствию 6.46. Таким образом, это нужные прямые. $\square$

Теорема 6.59. *Точка $M(x_0, y_0)$ является центром непустой кривой второго порядка*

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0 \end{cases} \qquad \textit{(уравнения центра)}$$

В терминах частных производных эти уравнения запишутся в виде

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Доказательство. $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть (α_i, β_i), $i = 1, 2$, — направляющие векторы прямых, определенных по предыдущей лемме. Тогда

(x_0, y_0), как середина соответствующих хорд, принадлежит соответствующим диаметрам, т. е. удовлетворяет уравнениям

$$\alpha_i(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta_i(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Обозначив выражения в скобках через u и v соответственно, получим, что u и v удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 v &= 0 \\ \alpha_2 u + \beta_2 v &= 0 \end{cases}$$

Векторы (α_i, β_i) неколлинеарны, поэтому уравнения линейно независимы. Значит, единственная возможность: $u = v = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть точка $M(x_0, y_0)$ удовлетворяет "уравнениям центра". Перейдем к новой системе координат (x', y'):

$$x' = x - x_0, \qquad y' = y - y_0,$$

так что

$$x = x' + x_0, \qquad y = y' + y_0.$$

Тогда

$$F'(x', y') = a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + a_{22}(y' + y_0)^2 +$$
$$+ 2a_1(x' + x_0) + 2a_2(y' + y_0) + a_0 = a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 +$$
$$+ 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x' + 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y' + F(x_0, y_0) =$$
$$= a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + a_0' = 0.$$

Очевидно, что если точка (x', y') удовлетворяет этому уравнению, то и $(-x', -y')$ — тоже, а координаты M в новой системе: $(0, 0)$. □

Следствие 6.60. *Непустая кривая второго порядка* Γ, *задаваемая уравнением* (12)

(1) *имеет единственный центр* $\Leftrightarrow$ $\delta = 0$*;*
(2) *не имеет центра* $\Leftrightarrow$ $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$, *т. е.* Γ *— парабола;*
(3) *имеет целую прямую центров* $\Leftrightarrow$ $\delta = \Delta = 0$.

Доказательство. Действительно, уравнения центра

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 &= 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 &= 0 \end{cases}$$

имеют единственное решение в том и только том случае, когда $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \delta \neq 0$. Если мы обозначим через r ранг матрицы

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \end{pmatrix}$$

то при $\delta = 0$ система не имеет решений тогда и только тогда, когда $r = 2$, и имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $r = 1$ (нулевым ранг быть не может). Очевидно, что $\Delta \neq 0$ влечет $r = 2$, а $r = 1$ влечет $\Delta = 0$. Докажем обратные импликации. Итак, пусть $\delta = \Delta = 0$ и предположим противное требуемому, т. е. $r = 2$. Значит, третья строка матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

(определителем которой является Δ) выражается через первые. В частности, $a_1 = \lambda a_{11} + \mu a_{12}$, $a_2 = \lambda a_{12} + \mu a_{22}$ при некоторых λ и μ. Это означает, что последний столбец матрицы B выражается через два первых, которые, в свою очередь, линейно зависимы (так как $\delta = 0$). Значит, $r = 1$. Противоречие. Методом логического исключения получаем вторую обратную импликацию. □

Следствие 6.61. *Любой диаметр проходит через все центры кривой.*

Доказательство. Прямо следует из теорем 6.55 и 6.59. □

6.10. Сопряженные диаметры и направления.

Теорема 6.62. *Если непустая кривая второго порядка имеет единственный центр, т. е. $\delta \neq 0$, то диаметр, сопряженный неасимптотическому направлению (α, β), имеет направление (α^*, β^*), также являющееся неасимптотическим. При этом диаметр, сопряженный направлению (α^*, β^*), имеет направление (α, β).*

Доказательство. Сопряженный к (α, β) диаметр имеет уравнение

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0.$$

Направление (u, v) прямой $ax+by+c = 0$, как мы знаем, должно обнулять однородную часть: $au + bv = 0$. В нашем случае:

$$\alpha(a_{11}\alpha^* + a_{12}\beta^*) + \beta(a_{12}\alpha^* + a_{22}\beta^*) = (\alpha, \beta)A \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} = 0. \quad (13)$$

Предположим, что (α^*, β^*) — асимптотическое направление. Тогда

$$\alpha^* \underbrace{(a_{11}\alpha^* + a_{12}\beta^*)}_{V} + \beta^* \underbrace{(a_{12}\alpha^* + a_{22}\beta^*)}_{W} = 0.$$

Вместе с (13) получаем систему

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha V + \beta W & = & 0, \\ \alpha^* V + \beta^* W & = & 0. \end{array} \right.$$

Если V и W не обращаются одновременно в ноль, то (α, β) и (α^*, β^*) коллинеарны, в частности, (α^*, β^*) неасимптотическое (или (α, β) асимптотическое) — противоречие (не говоря о том, что по геометрическим соображениям они не могут быть коллинеарны). Значит, $V = W = 0$, т. е.

$$\begin{array}{rcl} a_{11}\alpha^* + a_{12}\beta^* & = & 0 \\ a_{12}\alpha^* + a_{22}\beta^* & = & 0. \end{array}$$

Но $\delta \neq 0$, и эта система имеет только тривиальное решение $\alpha^* = \beta^* = 0$, что не может быть направляющим вектором диаметра.

Вторая часть теоремы получается из условия сопряженности (13) путем транспонирования. $\square$

Следствие 6.63. *Для кривой с единственным центром любая прямая неасимптотического направления, проходящая через центр, является диаметром.*

Доказательство. Эта прямая — диаметр, сопряженный к направлению сопряженного диаметра. $\square$

Определение 6.64. Два диаметра кривой с единственным центром, делящие пополам хорды, параллельные другому диаметру, называются *сопряженными диаметрами.*

Определение 6.65. Два направления (α, β) и (α^*, β^*) называются *сопряженными направлениями* (относительно данной кривой), если они удовлетворяют уравнению (13).

Замечание 6.66. Из доказанного ясно, что сопряженные диаметры всегда имеют сопряженные направления. Обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема 6.67. *Если кривая является параболой, т. е. $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$, то все ее диаметры имеют асимптотическое направление.*

Доказательство. Рассмотрим направление (α, β). Тогда сопряженный диаметр будет иметь направление (α^*, β^*), удовлетворяющее

$$\alpha^*(a_{11}\alpha + a_{12}\beta) + \beta^*(a_{12}\alpha + a_{22}\beta) = 0,$$

откуда, с точностью до множителя,

$$\alpha^* = -(a_{12}\alpha + a_{22}\beta), \qquad \beta^* = a_{11}\alpha + a_{12}\beta.$$

Имеем (поскольку $\delta = 0$):

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\alpha^* + a_{12}\beta^* & = & -\delta\beta = 0, \\ a_{12}\alpha^* + a_{22}\beta^* & = & \delta\alpha = 0, \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \alpha^* \\ \beta^* \end{array}\right. +$$

$$a_{11}(\alpha^*)^2 + 2a_{12}\alpha^*\beta^* + a_{22}(\beta^*)^2 = 0,$$

т. е. направление асимптотическое. □

Задача 6.68. Докажите, что любая прямая асимптотического направления по отношению к параболе является диаметром.

Задача 6.69. Убедитесь, что теорема 6.67 верна для содержательных кривых параболического типа, а не только для параболы.

Задача 6.70. Найдите уравнение эллипса в системе координат, осями которой служат два сопряженных диаметра, а базисными векторами — половины хорд этих диаметров.

6.11. **Главные диаметры и оси симметрии.** В этом параграфе система координат предполагается прямоугольной. Пусть l — *ось симметрии* содержательной кривой второго порядка Γ, т. е. Γ вместе с любой точкой P содержит и P', симметричную P относительно l. Пусть Γ задается уравнением (12).

Возможны два случая:

Первый случай: перпендикулярное к l направление является асимптотическим. Если у Γ нет точек вне l, то $\Gamma = l$. Если же такая точка P имеется, то симметричная ей относительно l точка

P' также принадлежит Γ. Поскольку направление $\overrightarrow{PP'}$ — асимптотическое, то и вся прямая (PP') должна содержаться в Γ. Итак, Γ в этом случае распалась на (PP') и некоторую прямую m, которая также должна быть симметричной относительно l. Возможны три случая: $m = (PP')$, $m \| (PP')$ и $m = l$. Итак, если одна из осей симметрии перпендикулярна асимптотическому направлению, то возможны следующие варианты:

(1) Γ — совпавшие прямые. Осью симметрии может быть сама эта прямая и любая прямая, ей перпендикулярная.
(2) Γ — параллельные прямые. Тогда осью симметрии может быть равноудаленная от них прямая и любая прямая, ей перпендикулярная.
(3) Γ — перпендикулярные прямые. Имеется четыре оси симметрии (прямые и биссектрисы углов).

Второй случай: перпендикулярное к l направление является неасимптотическим.

Определение 6.71. Неасимптотическое направление, перпендикулярное сопряженному ему диаметру называется *главным направлением* кривой Γ, а диаметр называется *главным диаметром.*

Теорема 6.72. *Главный диаметр является осью симметрии кривой* Γ*. Обратно, для содержательных кривых второго порядка, отличных от пары параллельных, совпадающих или перпендикулярных прямых (т. е. получившихся в первом случае), ось симметрии является главным диаметром.*

Доказательство. В этом случае диаметр состоит из середин перпендикулярных хорд, т. е. является осью симметрии.

Обратно, по рассуждению про первый случай, мы исключили те случаи, когда ось симметрии может быть перпендикулярна асимптотическому направлению. Поэтому перпендикулярное оси направление — неасимптотическое. Как ось симметрии, она делит хорды этого направления пополам, и таким образом, является диаметром, а в силу перпендикулярности — главным. □

Определение 6.73. *Собственным вектором* матрицы Q, отвечающим *собственному значению* λ называется такой ненулевой вектор (α, β), что

$$Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы Q удовлетворяют *характеристическому уравнению*

$$\det(Q - \lambda E) = 0.$$

Действительно, перепишем:

$$(Q - \lambda E) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эта система имеет ненулевое решение (α, β). Для этого определитель ее должен равняться нулю: $\det(Q - \lambda E) = \chi_Q(\lambda) = 0$.

Теорема 6.74. *Вектор* (α, β) *задает главное направление кривой* (12)*, тогда и только тогда, когда он является собственным вектором матрицы*

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

отвечающим ненулевому собственному значению, т.е. ненулевому корню уравнения

$$\det(Q - \lambda E) = \lambda^2 - S\lambda + \delta = 0.$$

Доказательство. Пусть (α, β) — главное направление. Тогда уравнение соответствующего сопряженного диаметра

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0,$$

причем его нормаль n по условию коллинеарна (α, β), т. е.

$$n = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha + a_{12}\beta \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

или

$$Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

т.е. (α, β) является собственным вектором. Рассмотрим соответствующий корень λ. Если $\lambda = 0$, то система перепишется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{rcl|cc} a_{11}\alpha + a_{12}\beta & = & 0 & \alpha & + \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta & = & 0 & \beta & \end{array} \right.$$

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0,$$

т. е. (α, β) — асимптотическое направление.

Обратно, если $\lambda \neq 0$, то

$$\left\{ \begin{array}{rcl|c} a_{11}\alpha + a_{12}\beta & = & \lambda\alpha & \alpha \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta & = & \lambda\beta & \beta \end{array} \right. +$$

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = \lambda(\alpha^2 + \beta^2) \neq 0.$$

Таким образом, направление, определяемое собственным вектором Q, отвечающим $\lambda \neq 0$, неасимптотическое, а следовательно, главное, так как условие коллинеарности (α, β) и нормали к сопряженному диаметру, как мы показали, эквивалентны условию

$$(Q - \lambda E) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Лемма 6.75. *Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — корни характеристического уравнения. Тогда соответствующие собственные векторы (α_1, β_1) и (α_2, β_2) неколлинеарны.*

Доказательство. В противном случае можно считать векторы равными одному и тому же вектору (α, β). Имеем

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

что возможно только при нулевом векторе (α, β). $\square$

Следствие 6.76. *Эллипс с различными полуосями (т. е. отличный от окружности) и гипербола имеют ровно две оси симметрии, которые тем самым совпадают с осями канонической системы координат. Парабола имеет ровно одну ось симметрии, совпадающую с осью Ox канонической системы координат.*

Доказательство. Пусть λ_1 и λ_2 — корни характеристического многочлена. Если они различные и ненулевые, то имеем по лемме два разных главных направления. Для параболы $\lambda_2 = 0$ и главное направление — одно. $\square$

Замечание 6.77. Для окружности, когда $\lambda_1 = \lambda_2$, любое направление является главным.

6.12. **Вид и расположение кривых второго порядка.** Вид канонического уравнения мы умеем вычислять с помощью инвариантов. Кроме того, мы умеем приводить к каноническому виду с помощью подбора угла φ, и т. д. Сейчас мы обсудим другой алгоритм, более универсального характера (например, аналогичный алгоритм будет работать для поверхностей).

1. Решаем уравнения центра:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} &= a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} &= a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0, \end{cases}$$

Пусть (x_0, y_0) — решение (возможно не единственное). Случай параболы рассмотрим отдельно.

2. Производим сдвиг:

$$\begin{cases} x' &= x - x_0, \\ y' &= y - y_0, \end{cases}$$

$$F'(x', y') = a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + \tau = 0, \qquad \tau = F(x_0, y_0)$$

(коэффициенты квадратичной части остались прежними).

3. Ищем корни λ_1, λ_2 характеристического многочлена

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0, \qquad \text{или} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

и соответствующие им собственные вектора (α_1, β_1), (α_2, β_2). Если λ_1 и λ_2 различные ненулевые, то положим

$$e_i'' := \frac{1}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}(\alpha_i, \beta_i), \qquad i = 1, 2.$$

Если они совпадающие (ненулевые), то матрица квадратичной части уже диагональна ($a_{12} = 0$). В новой системе координат

$$F''(x'', y'') = \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + \tau = 0.$$

Таким образом действуем в случае эллипса или гиперболы.

Если в F' имеем $\tau = 0$ или оказалось $\lambda_1 = 0$, то кривая — распадающаяся и надо раскладывать на множители.

Остался случай параболы. В этом случае сначала находим асимптотическое направление (α, β) из

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0.$$

Диаметр, соответствующий перпендикулярному направлению,

$$-\beta\cdot\frac{\partial F}{\partial x}+\alpha\cdot\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

является осью. Заметим, что уравнение параболы теперь может быть переписано в виде

$$(\beta x-\alpha y)^2+Ax+By+C=0. \tag{14}$$

Вершина (x_0,y_0) находится из системы

$$\begin{array}{rcl} -\beta\cdot\frac{\partial F}{\partial x}+\alpha\cdot\frac{\partial F}{\partial y} & = & 0,\\ F(x,y) & = & 0.\end{array}$$

Каноническая система:

$$\vec{e}_1=\varepsilon\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\alpha,\beta),\qquad \vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(-\beta,\alpha),$$

$\varepsilon=\pm1$. Знак у $\vec{e}_1$ выбирается из следующих соображений. Уравнение (14) показывает, что парабола лежит в отрицательной полуплоскости прямой $Ax+By+C=0$. Значит, направление ее ветвей, точнее, правильное направление $\vec{e}_1$, образует тупой угол с (A,B). Таким образом, знак выбирается из условия $\varepsilon(A\alpha+B\beta)<0$.

Каноническое уравнение проще всего найти, непосредственно осуществив переход к канонической системе координат.

Пример 6.78. Определить вид и расположение кривой $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$.

1. Центр:

$$\left\{\begin{array}{rcl}10x+12y-22 & = & 0,\\ 12x-12 & = & 0,\end{array}\right.\qquad\Rightarrow\qquad\left\{\begin{array}{rcl}x_0 & = & 1,\\ y_0 & = & 1.\end{array}\right.$$

2. Замена:

$$\left\{\begin{array}{rcl}x & = & x'+1\\ y & = & y'+1\end{array}\right.$$

Промежуточное уравнение:

$$F'(x',y')=5(x')^2+12x'y'+F(1,1)=5(x')^2+12x'y'-36=0.$$

3. $Q=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 6 & 0\end{pmatrix}$, $Q-\lambda E=\begin{pmatrix}5-\lambda & 6\\ 6 & -\lambda\end{pmatrix}$, $\chi_Q(\lambda)=\lambda^2-5\lambda-36=0$, $\lambda_1=9$, $\lambda_2=-4$. Таким образом, в канонической

системе (x'', y''):

$$F''(x'', y'') = 9(x'')^2 - 4(y'')^2 - 36 = 0, \qquad \boxed{\frac{(x'')^2}{4} - \frac{(y'')^2}{9} = 1}$$

— канонический вид.

4. Для нахождения $\vec{e}_1^{\,\prime\prime}$:
$(Q - \lambda_1 E)\binom{\alpha}{\beta} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}\binom{\alpha}{\beta} = \binom{0}{0}$, частное решение: $\alpha = 3$, $\beta = 2$. Из него e_1'' получается нормированием, а e_2'' ему ортогонален:

$$e_1'' = \frac{1}{\sqrt{13}}(3,2), \qquad e_2'' = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2,3).$$

Окончательно получаем: кривая является гиперболой с указанным каноническим видом и канонической системой с началом $(1,1)$ и базисными векторами e_1'' и e_2'' найденными в п.4.

Пример 6.79. Определить вид и расположение кривой $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$.

1. Центр:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4 &= 0, \\ -4x + 8y - 3 &= 0, \end{cases} \text{ система несовместна} \Rightarrow \text{парабола.}$$

2. Асимптотическое направление:

$$\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2 = 0, \quad (\alpha - 2\beta)^2, \quad \text{частное решение: } \alpha = 2, \beta = 1.$$

3. Ось симметрии:

$$-\beta\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha\frac{\partial F}{\partial y} = (-1)\cdot(2x - 4y + 4) + 2\cdot(-4x + 8y - 3) = 0,$$

$$-10x + 20y - 10 = 0, \qquad x - 2y + 1 = 0$$

— ось.

4. Вершина:

$$\begin{cases} x - 2y &= -1 \\ (x-2y)^2 + 4x - 3y - 7 &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y &= -1 \\ 4x - 3y &= 6 \end{cases},$$

откуда вершина: $(3,2)$.

5. Канонический базис:

$$\vec{e}_1^{\,\prime} = \varepsilon\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1), \qquad \vec{e}_2^{\,\prime} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2),$$

причем $\varepsilon = \pm 1$ находится из условия $\varepsilon(4 \cdot 2 - 3 \cdot 1) < 0$, так что $\varepsilon = -1$.

Таким образом, замена координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Канонический вид:

$$(x-2y)^2 + 4x - 3y - 7 = (-\sqrt{5}y' - 1)^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}(2x' + y') + 12 +$$

$$+ \frac{3}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - 6 - 7 = 5(y')^2 + 2\sqrt{5}y' + 1 - \frac{5}{\sqrt{5}}x' - \frac{10}{\sqrt{5}}y' -$$

$$-1 = 5(y')^2 - \sqrt{5}x' = 0, \quad \boxed{(y')^2 = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}}x'.}$$

6.13. Касательные к кривым второго порядка.

Определение 6.80. Точка (x_0, y_0) алгебраической кривой с уравнением $F(x,y) = 0$ называется *особой,* если в ней выполнены условия $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Для кривой второго порядка — это центр, принадлежащий кривой (точка пересечения пересекающихся прямых, все точки пары совпадающих прямых и единственная точка пары мнимых пересекающихся прямых).

Определение 6.81. *Касательной* к кривой второго порядка Γ в неособой точке (x_0, y_0) называется прямая, проходящая через эту точку и пересекающая Γ в двух совпавших точках, либо содержащаяся в Γ.

Теорема 6.82. *Касательная к кривой*

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

в неособой точке (x_0, y_0) *имеет уравнение*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

или, более явно,

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y + \\ + (a_1x_0 + a_2y_0 + a_0) = 0. \quad (15)$$

Доказательство. Прямая

$$\begin{cases} x &= x_0 + \alpha t \\ y &= y_0 + \beta t \end{cases}$$

пересекает кривую в точках, соответствующих решениям уравнения

$$F_2 t^2 + 2F_1 t + F_0 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} F_2 &= a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = q(\alpha,\beta), \\ F_1 &= \alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) \\ &= \alpha\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) + \beta\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0), \\ F_0 &= F(x_0,y_0) = 0, \end{aligned}$$

поскольку точка лежит на кривой. Условие касания: $F_1 = 0$, т. е.

$$\alpha\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) + \beta\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 0,$$

так что частное решение (направление)

$$\alpha = -\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0), \qquad \beta = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Поскольку точка неособая, то это ненулевой вектор. Получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$$

или

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)(x-x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)(y-y_0) = 0.$$

С учетом $F(x_0,y_0)=0$ это дает

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)x+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_2)y+(a_1x_0+a_2y_0+a_0) = 0.$$

□

6.14. **Поляра точки относительно коники.** Пусть коника Γ задана уравнением (12) в произвольной аффинной системе координат. Тогда уравнение касательной (15) в точке $(x_0,y_0) \in$ Γ может быть записано в виде

$$(x_0,y_0,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \tag{16}$$

где A — матрица F. Рассмотрим теперь любую точку $P(x_0, y_0)$ плоскости, отличную от центра кривой.

Определение 6.83. Прямая с уравнением (16) называется *полярой точки P относительно коники* Γ.

Отметим, что условие отличия P от центра гарантирует, что получаем прямую, т. е. уравнение первого, а не нулевого порядка.

Очевидно, что если точка $P(x_0, y_0)$ принадлежит Γ, то получаем, что поляра такой точки является касательной к Γ в точке P.

Предложение 6.84. *Если из точки P можно провести к конике* Γ *две касательных с точками касания M и N, то MN является полярой P.*

Доказательство. Если (x_k, y_k) — координаты точки касания касательной, проведенной из точки $P(x_0, y_0)$, то уравнение этой касательной имеет вид $(x_k, y_k, 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Поскольку P ей принадлежит, то $(x_k, y_k, 1)A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Транспонируя, получаем, что (x_k, y_k) должна удовлетворять системе

$$\left\{\begin{array}{rcll} F(x_k, y_k) & = & 0, & \text{— уравнение } \Gamma \\ (x_0, y_0, 1)A\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ 1 \end{pmatrix} & = & 0, & \text{— уравнение поляры т. } P \end{array}\right.$$

Таким образом, (x_k, y_k) — точка пересечения поляры с коникой, и предложение доказано. □

Замечание 6.85. Пока определение поляры формально зависит от выбора системы координат. Из предыдущего предложения вытекает независимость поляры от системы координат в случае, когда точка лежит вне кривой, т.е. когда из нее можно провести две касательные к кривой. Подобное геометрическое доказательство возможно и в общем случае, но мы докажем это утверждение непосредственно.

Предложение 6.86. *Поляра не зависит от выбора системы координат.*

Доказательство. Напомним (см. § 6.2), что матрица A и компоненты $(x, y, 1)$ меняются по законам $A' = D^T AD$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & x_0 \\ c_{21} & c_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя это в (16), получаем требуемый результат. □

Теорема 6.87. *Пусть A, B и C, D — точки пересечения двух секущих, проведенных из P к конике, точки E и F — точки пересечения AD с BC и AC с BD, соответственно. Тогда прямая (EF) является полярой P.*

Доказательство. Рассмотрим аффинную систему координат, у

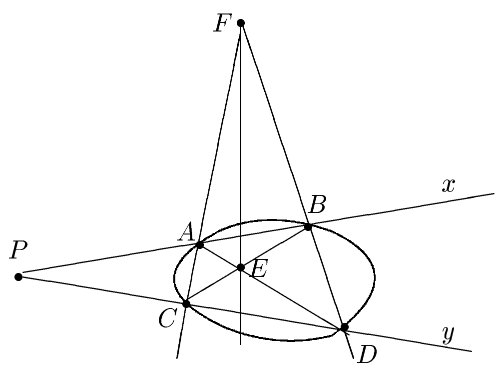


Рис. 23

которой прямые AB и CD являются осями, а точка P — началом (см. рис.23). Таким образом, A и B удовлетворяют $y = 0$, а значит, A и B имеют координаты $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ соответственно, где x_1 и x_2 — корни уравнения

$$a_{11}x^2 + 2a_1 x + a_0 = 0. \tag{17}$$

Аналогично, C и D имеют координаты y_1 и y_2, причем

$$a_{22}y^2 + 2a_2y + a_0 = 0. \tag{18}$$

Получаем уравнения соответствующих прямых “в отрезках”:

$$\begin{aligned}
(AD):&\qquad \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_2} = 1,\\
(BC):&\qquad \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_1} = 1,\\
(AC):&\qquad \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1,\\
(BD):&\qquad \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_2} = 1.
\end{aligned}$$

При этом $(AD) \cap (BC) = E$ и $(AC) \cap (BD) = F$. Уравнение EF имеет вид

$$\frac{x}{x_1} + \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_1} + \frac{y}{y_2} = 2,$$

поскольку E и F ему удовлетворяют (как удовлетворяющие соответственно первой и второй паре уравнений из четырех, записанных выше). Следовательно,

$$(EF): \qquad \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} \cdot x + \frac{y_1 + y_2}{y_1y_2} \cdot y = 2.$$

Из уравнений (17) и (18) по теореме Виета получаем

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a_1}{a_{11}}, \quad x_1x_2 = \frac{a_0}{a_{11}}, \quad y_1 + y_2 = -\frac{2a_2}{a_{22}}, \quad y_1y_2 = \frac{a_0}{a_{22}},$$

откуда

$$(EF): \qquad \frac{-2a_1}{a_0} \cdot x + \frac{-2a_2}{a_0} \cdot y = 2,$$

или

$$a_1x + a_2y + a_0 = 0.$$

Как легко видеть, это уравнение поляры точки P, имеющей координаты $(0, 0)$ в используемой системе. $\square$

Следствие 6.88. *Точки пересечения диагоналей любых четырехугольников, образованных секущими, проведенными из одной точки к данной конике, лежат на одной прямой — поляре этой точки (см. рис. 24).*

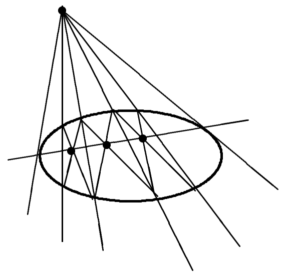


Рис. 24

Следствие 6.89. *В условиях теоремы треугольник PEF является автополярным, т. е. для каждой вершины противоположная сторона является ее полярой.*

Теорема 6.90. *Точка P принадлежит поляре точки Q тогда и только тогда, когда Q принадлежит поляре P.*

Доказательство. Сразу вытекает из симметрии уравнения поляры (16). Одно соотношение переходит в другое при транспонировании. □

Определение 6.91. Точка, для которой строится поляра, называется *полюсом* этой поляры.

Замечание 6.92. Для внешних точек полюс определен однозначно по предложению 6.84. Для внутренних это следует из двойственности: проведем две хорды и т. д. (см. способ построения ниже).

Замечание 6.93. В обычной геометрии не всякая точка имеет поляру (например, центр не имеет) и не всякая прямая имеет полюс, т. е. является полярой (например, диаметр центральной кривой). В проективной геометрии этот дефект исправляется (см. ниже).

Сейчас мы обсудим еще один способ построения поляры, который применим к внутренним точкам. Пусть P — такая точка. Проведем через нее две секущие (хорды), а через их концы — пары касательных (см. рис. 25). Если P не является центром, то прямые внутри хотя бы одной пары не параллельны. Так что

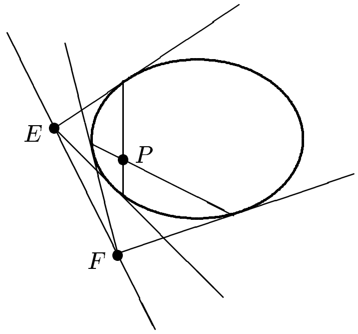


Рис. 25

получаем либо две точки пересечения, либо точку и направление. Можно провести рассуждение и во второй ситуации, но мы просто выберем другую хорду. Итак, имеем две точки пересечения: E и F. Утверждается, что EF — поляра P. Действительно, по предложению 6.84, точка P принадлежит полярам и E и F, значит, по предыдущей теореме, E и F принадлежат поляре P.

В качестве применения этих конструкций докажем следующее утверждение.

Теорема 6.94 (Брианшона[2]). *Диагонали шестиугольника, описанного около коники, пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Стороны описанного шестиугольника являются полярами точек касания, а вершины его — полюсы сторон соответствующего вписанного шестиугольника, образованного точками касания. Поэтому диагонали являются полярами точек пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника (см. рис. 26). А эти точки пересечения по теореме Паскаля лежат на одной прямой. Искомая точка пересечения — ее полюс. □

Опять в этой теореме мы должны ограничивать себя условиями существования всех рассматриваемых точек пересечения до тех пор, пока мы не перейдем на проективную плоскость.

[2]Ш.-Ж. Брианшон (1783–1864) — известный французский геометр

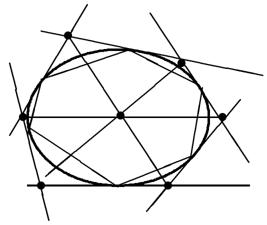


Рис. 26

Ниже мы дадим более геометрическое доказательство этого результата (см. теорему 8.44).

7. Аффинные и изометрические преобразования

7.1. Аффинные преобразования.

Определение 7.1. *Преобразованием* называется взаимно-однозначное отображение множества на себя.

Определение 7.2. Отображение плоскости (пространства) в себя называется *аффинным преобразованием,* если найдутся такие две аффинные системы координат, что координаты любой точки в одной из них являются координатами ее образа в другой.

Очевидно, что аффинное преобразование является преобразованием.

Замечание 7.3. Допустим, первая из фигурирующих в определении аффинного преобразования f систем координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ фиксирована. Пусть M_i — концы векторов $\vec{e}_i$, отложенных от точки O. Тогда вторая система обязательно имеет вид $O' = f(O)$, $\vec{e}\,'_i = \overrightarrow{f(O)f(M_i)}$ $(i = 1, 2, 3,)$. Это сразу следует из определения координат. Таким образом, в определении можно брать одну систему координат, и говорить, что преобразование аффинно относительно этой системы координат.

Определение 7.4. Назовем *матрицей аффинного преобразования f относительно репера $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$* такую матрица C, по столбцам которой выписаны координаты векторов второго базиса $\vec{e}\,'_i$ в первом базисе $\vec{e}_i$ (см. определение).

Теорема 7.5. *Пусть f — аффинное преобразование пространства, $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и $O'\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2\vec{e}\,'_3$ — система координат, фигурирующая в определении. Пусть (x_0, y_0, z_0) — координаты O' в первом репере. Рассмотрим произвольную точку P и ее образ $P' = f(P)$. Тогда их координаты (x, y, z) и (x', y', z') в первом репере связаны формулами*

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где C — матрица преобразования f относительно $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

Обратно, если фиксирована аффинная система координат, то любая формула вида (19) с невырожденной матрицей C задает некоторое аффинное преобразование.

Аналогичное утверждение верно и для плоскости.

Доказательство. Таким образом, матрица C — это матрица перехода от базиса $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ к базису $\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2\vec{e}\,'_3$:

$$\begin{aligned} \vec{e}\,'_1 &= c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3, \\ \vec{e}\,'_2 &= c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3, \\ \vec{e}\,'_3 &= c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Для произвольной точки $P(x, y, z)$ и ее образа $\widetilde{P}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ (все координаты в первоначальном репере) имеем

$$\overrightarrow{O\widetilde{P}} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'\widetilde{P}},\ \overrightarrow{OO'} = x_0\,\vec{e}_1 + y_0\,\vec{e}_2 + z_0\,\vec{e}_3,\ \overrightarrow{O'\widetilde{P}} = x\,\vec{e}\,'_1 + y\,\vec{e}\,'_2 + z\,\vec{e}\,'_3,$$

$$\overrightarrow{O\widetilde{P}} = \widetilde{x}\,\vec{e}_1 + \widetilde{y}\,\vec{e}_2 + \widetilde{z}\,\vec{e}_3 = x_0\,\vec{e}_1 + y_0\,\vec{e}_2 + z_0\,\vec{e}_3 + x\,\vec{e}\,'_1 + y\,\vec{e}\,'_2 + z\,\vec{e}\,'_3 =$$

$$= x_0\,\vec{e}_1 + y_0\,\vec{e}_2 + z_0\,\vec{e}_3 + x\,(c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3) +$$

$$+ y\,(c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3) + z\,(c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3),$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\,c_{11} + y\,c_{12} + z\,c_{13} + x_0 \\ x\,c_{21} + y\,c_{22} + z\,c_{23} + y_0 \\ x\,c_{31} + y\,c_{32} + z\,c_{33} + z_0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Те же выкладки, проведенные в обратном порядке, показывают, что верно обратное утверждение. При этом условие невырожденности матрицы C гарантирует, что штрихованная система является репером. $\square$

Следствие 7.6. *Если преобразование f является аффинным относительно одного репера, то и относительно любого (см. замечание 7.3). При этом его матрица относительно нового репера равна $D^{-1}CD$, где D — матрица перехода.*

Доказательство. Пусть f является аффинным относительно репера $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, тогда по теореме имеют место формулы (19). Пусть $O^*e_1^*e_2^*e_3^*$ — произвольный репер. Пусть D — матрица перехода от $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ к $O^*e_1^*e_2^*e_3^*$, так что

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ z* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0^* \\ y_0^* \\ z_0^* \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ z_* \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^* \\ y_1^* \\ z_1^* \end{pmatrix}.$$

Тогда координаты $(\widetilde{x}_*, \widetilde{y}_*, \widetilde{z}_*)$ образа $\widetilde{P} = f(P)$ и координаты (x_*, y_*, z_*) точки P в репере $O^*e_1^*e_2^*e_3^*$ связаны формулами

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}_* \\ \widetilde{y}_* \\ \widetilde{z}_* \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^* \\ y_1^* \\ z_1^* \end{pmatrix} = D^{-1}\, C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} +$$

$$+D^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^* \\ y_1^* \\ z_1^* \end{pmatrix} = D^{-1}\, C\, D \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ z* \end{pmatrix} +$$

$$\underbrace{+\, D^{-1}\, C \begin{pmatrix} x_0^* \\ y_0^* \\ z_0^* \end{pmatrix} + D^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^* \\ y_1^* \\ z_1^* \end{pmatrix}}_{\text{постоянный вектор}}.$$

Применяя обратное утверждение теоремы, получаем требуемое утверждение. $\square$

Определим действие аффинного преобразования f на представителях векторов формулой $f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

Следствие 7.7. *Действие f на векторах корректно определено в координатах формулой*

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha} \\ \widetilde{\beta} \\ \widetilde{\gamma} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

где (α, β, γ) — координаты вектора v, а $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ — координаты вектора $f(v)$. В частности, для линейных комбинаций векторов

$$f\left(\sum_i \lambda_i v_i\right) = \sum_i \lambda_i f(v_i).$$

Теорема 7.8. *Всякое аффинное преобразование*

1) *переводит прямые в прямые, плоскости — в плоскости, сохраняя свойство параллельности,*

2) *сохраняет отношение длин отрезков, лежащих на параллельных прямых.*

Доказательство. Уравнения прямых и плоскостей в первой системе координат совпадают с уравнениями их образов относительно второй системы координат. Это доказывает пункт 1).

Пункт 2) получается из следствия про отображение векторов. □

Задача 7.9. Докажите обратное: всякое преобразование плоскости или пространства с условиями 1) и 2) является аффинным.

Замечание 7.10. На самом деле в утверждении задачи условие 2) можно отбросить, но тогда она станет значительно сложнее.

7.2. Изометрические преобразования.

Определение 7.11. Аффинное преобразование f называется *изометрическим* (или *изометрией*), если оно сохраняет расстояния между точками:

$$\rho(f(P), f(Q)) = \rho(P, Q).$$

Задача 7.12. Доказать, что аффинности можно не требовать, т. е. из сохранения расстояния аффинность следует всегда.

Предложение 7.13. *Изометрия сохраняет углы между прямыми.*

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы косинусов. □

Теорема 7.14. *Рассмотрим аффинное преобразование f и любую прямоугольную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *f — изометрия;*
2) *отображенный репер $O'\vec{e}'_1\vec{e}'_2\vec{e}'_3 = f(O)f(\vec{e}_1)f(\vec{e}_2)f(\vec{e}_3)$ является прямоугольным;*
3) *в соответствующей координатной записи f матрица C является ортогональной.*

Доказательство. Второй и третий пункт эквивалентны по теореме 4.8.

Из 1) следует 2) так как изометрия сохраняет длины, а по предложению, и углы. Обратно, пусть произвольные точки P и Q имеют координаты (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) соответственно, относительно прямоугольной системы $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Тогда их образы $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ имеют те же координаты в прямоугольной системе $O'\vec{e}'_1\vec{e}'_2\vec{e}'_3$. По формуле для нахождения расстояния в прямоугольной системе координат имеем в первой и второй системах соответственно:

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

$$\rho(\widetilde{P}, \widetilde{Q}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

□

Для геометрического описания всех изометрических преобразований плоскости нам понадобится следующее понятие.

Определение 7.15. Изометрия плоскости, заданная в некоторой прямоугольной системе координат формулами

$$\widetilde{x} = x + a, \qquad \widetilde{y} = -y,$$

называется *скользящей симметрией.* Это композиция симметрии относительно некоторой прямой и сдвига вдоль нее.

Теорема 7.16 (Шаля[3]). *Всякая изометрия плоскости является либо параллельным переносом, либо поворотом относительно некоторой точки, либо скользящей симметрией относительно некоторой прямой.*

Доказательство. Напомним, что ортогональные матрицы 2×2 имеют один из следующих видов:

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сначала изометрии с $\det C = 1$ (изометрии первого рода). Если $\varphi = 0$, то $C = E$ и f является параллельным переносом:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Если $\varphi \neq 0$ (с точностью до $2\pi k$), то найдем неподвижные точки отображения f, т. е. такие P_*, что $f(P_*) = P_*$. Имеем для координат (x_*, y_*) точки P_* уравнения

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} \widetilde{x}_* & = & x_*\cos\varphi - y_*\sin\varphi + x_0 & = & x_* \\ \widetilde{y}_* & = & x_*\sin\varphi + y_*\cos\varphi + y_0 & = & y_* \end{array} \right.,$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_*(\cos\varphi - 1) - y_*\sin\varphi & = & -x_0 \\ x_*\sin\varphi + y_*(\cos\varphi - 1) & = & -y_0 \end{array} \right..$$

Поскольку $\varphi \neq 0$, то $\cos\varphi \neq 1$ и определитель системы

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - 1 & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - 1 \end{vmatrix} = (\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi \neq 0.$$

Поэтому неподвижная точка $P_*(x_*, y_*)$ существует и единственна. Рассмотрим новую систему координат (x', y'), заданную соотношениями

$$x' = x - x_*, \qquad y' = y - y_*$$

(т. е. сдвинем начало координат в точку P_*). В новой системе координат формулы преобразования f будут иметь вид

$$\begin{array}{lcl} \widetilde{x'} & = & x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ \widetilde{y'} & = & x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \end{array}$$

т. е. преобразование является поворотом на угол φ вокруг точки P_* .

[3] М.Шаль (1793–1880)— известный французский геометр.

Рассмотрим теперь изометрию второго рода: $\det C = -1$. Покажем, что в этом случае существует неподвижный (свободный) вектор. Имеем для его координат (α, β) систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos\varphi\,\alpha + \sin\varphi\beta & = & \alpha \\ \sin\varphi\,\alpha - \cos\varphi\beta & = & \beta \end{array} \right. ,$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi - 1 & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -(\cos\varphi + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - 1 & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -(\cos\varphi + 1) \end{vmatrix} = 1 - \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 0$$

для любого угла φ. Поэтому ненулевое решение (α, β) существует. Рассмотрим систему координат с тем же началом, что и исходная, и базисными векторами

$$\vec{e}\,'_1 := \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}(\alpha, \beta), \qquad \vec{e}\,'_2 := \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}(-\beta, \alpha).$$

Поскольку $f(\vec{e}\,'_1) = \vec{e}\,'_1$, то $C' = \begin{pmatrix} 1 & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix}$. Так как C' ортогональна и $\det C' = -1$, то $C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Значит, в штрихованной системе координат f имеет формулы

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{x'} & = & x' + a, \\ \widetilde{y'} & = & -y' + b, \end{array}$$

где a и b — некоторые константы. Перейдем к новой системе координат (x'', y''), положив

$$x'' = x', \qquad y'' = y' - \frac{b}{2}.$$

Тогда для образа $(\widetilde{x''}, \widetilde{y''})$ точки (x'', y'') имеем

$$\widetilde{x''} = x'' + a, \qquad \widetilde{y''} = \widetilde{y'} - \frac{b}{2} = -y' + b - \frac{b}{2} = -y'' - \frac{b}{2} + b - \frac{b}{2} = -y'',$$

т. е. наше преобразование есть скользящая симметрия относительно оси $O''x''$. $\square$

Для описания изометрий пространства введем следующие понятия.

Определение 7.17. *Винтовое вращение* — композиция поворота относительно некоторой прямой и сдвига вдоль нее;

скользящая симметрия — композиция симметрии относительно некоторой плоскости и сдвига параллельно ей;

зеркальное вращение — композиция поворота относительно некоторой прямой и симметрии относительно перпендикулярной ей плоскости.

Прежде, чем перейти к пространственному аналогу предыдущей теоремы, докажем вспомогательную лемму.

Лемма 7.18. *Любая ортогональная 3×3 матрица имеет собственный вектор с собственным значением $+1$ или -1.*

Доказательство. Поскольку мы имеем дело с изометриями, то собственный вектор, если таковой существует, не может изменить длину. Поэтому собственное значение может быть равным только ± 1.

С другой стороны, характеристический многочлен имеет в случае пространства степень 3, а его корни вещественны или попарно комплексно сопряжены. Значит, хотя бы один из них вещественен, и следовательно, равен ± 1. $\square$

Теорема 7.19. *Всякая изометрия пространства является одним из следующих преобразований:*

1) *винтовое вращение (частным случаем которого является параллельный перенос);*
2) *скользящая симметрия;*
3) *зеркальное вращение.*

Доказательство. Выберем ортонормированный базис, взяв в качестве $\vec{e}_1$ собственный вектор из леммы. Тогда в этом базисе матрица f будет иметь вид:

$$C = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0\,0 \\ 0 & \\ & G \\ 0 & \end{pmatrix},$$

где G — ортогональная 2×2-матрица.

Пусть $\det G = -1$, тогда из доказательства теоремы 7.16 следует, что $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ можно выбрать таким образом, что $G =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а для матрицы f мы имеем две возможности:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

По тем координатам, где (-1), произведем сдвиг, как в теореме 7.16. В результате получим в новой системе координат два варианта формул f:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{x'} & = & x' + a \\ \widetilde{y'} & = & y' + b \\ \widetilde{(z')} & = & -z' \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} \widetilde{x'} & = & -x' \\ \widetilde{y'} & = & y' + b \\ \widetilde{(z')} & = & -z' \end{array}.$$

В первом случае имеем скользящую симметрию, а во втором — винтовое вращение на угол π.

Пусть теперь $\det G = 1$. Тогда $G = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Если $\varphi = 0$, то получаем либо параллельный перенос (частный случай винтового вращения), либо, если в левом верхнем углу стоит (-1), сделав опять сдвиг "на половину свободного члена", отображение с формулами

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{x'} & = & -x' \\ \widetilde{y'} & = & y' + b \\ \widetilde{z'} & = & z' + c \end{array},$$

т. е. скользящую симметрию. Если $\varphi \neq 0$, то так же как в соответствующей части доказательства теоремы 7.16, найдем точку (y_*, z_*) и произведем соответствующий сдвиг таким образом, что в новой системе координат (x', y', z') формулы f будут

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{x'} & = & \pm x' + a \\ \widetilde{y'} & = & y' \cos\varphi - z' \sin\varphi \\ \widetilde{z'} & = & y' \sin\varphi + z' \cos\varphi. \end{array}$$

В случае (+) получили винтовое вращение. В случае (−), сделав опять сдвиг “на половину свободного члена”, получим отображение с формулами

$$\begin{aligned} \widetilde{x'} &= -x' \\ \widetilde{y'} &= y'\cos\varphi - z'\sin\varphi \\ \widetilde{z'} &= y'\sin\varphi + z'\cos\varphi, \end{aligned}$$

т. е. зеркальное вращение. □

Следствие 7.20. *Любая ортогональная* 3×3 *матрица с определителем* $+1$ *задает вращение вокруг некоторой оси.*

7.3. **Аффинная и метрическая классификация квадрик.** Рассмотрим следующую задачу: даны две кривые второго порядка Γ_1 и Γ_2; когда одна из них может быть переведена в другую аффинным (соответственно, изометрическим) преобразованием (как множество точек)?

Для решения этой задачи рассмотрим близкую задачу об аффинной (метрической) классификации квадрик.

Определение 7.21. Две квадрики *аффинно* (соотв., *метрически*) *эквивалентны*, если одна из них может быть переведена в другую аффинным (соотв., изометрическим) преобразованием, т.е. уравнение первой кривой в некоторой системе координат совпадает (с точностью до ненулевого множителя) с уравнением второй кривой в соответствующей отображенной системе для некоторого аффинного (сотв., изометрического) преобразования.

Замечание 7.22. Отметим два момента.

Во-первых, если соответствующие двум квадрикам кривые нельзя перевести друг в друга аффинным (изометрическим) преобразованием (как множества точек), то квадрики аффинно (метрически) неэквивалентны.

Во-вторых, для содержательных квадрик мы установили биекцию с кривыми. Таким образом для таких квадрик аффинная (метрическая) эквивалентность равносильна положительному разрешению поставленного в начале этого параграфа вопроса.

Теорема 7.23. *Две квадрики метрически эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый канонический вид.*

Доказательство. Достаточность. Всякая квадрика имеет в некоторой прямоугольной (канонической) системе координат каноническое уравнение одного из девяти типов, причем однозначно определенное (в отличие от канонической системы), как показывает теория инвариантов и семиинварианта. Пусть две квадрики имеют одинаковые канонические уравнения в системах $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и $O'\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2$ соответственно. Тогда изометрия, переводящая первый репер во второй, переводит первую квадрику во вторую.

Необходимость. Рассмотрим две метрически эквивалентные квадрики. Рассмотрим каноническую систему Oxy для первой из них и ее образ $O'x'y'$ при данной изометрии. В первой системе квадрики имеют уравнения $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$, причем F_1 — каноническое. Тогда вторая квадрика имеет два уравнения в новой системе координат: то же, что первая кривая имела в исходной системе, т. е. $F_1(x',y')=0$ и то, что получается заменой координат, т. е. $F_2'(x',y')=F_2(x(x',y'),y(x',y'))=0$. Таким образом, $F_1(x',y')=0$ — каноническое уравнение и для второй квадрики (с точностью до умножения на множитель.. □

Лемма 7.24. *Для любой квадрики существует аффинная система координат, в которой она имеет одно из следующих уравнений:*

(1) $x^2+y^2=1$, *эллипс;*
(2) $x^2+y^2=-1$, *мнимый эллипс;*
(3) $x^2+y^2=0$, *пара пересекающихся мнимых прямых;*
(4) $x^2-y^2=1$, *гипербола;*
(5) $x^2-y^2=0$, *пара пересекающихся прямых;*
(6) $y^2-2x=0$, *парабола;*
(7) $y^2-1=0$, *пара параллельных прямых;*
(8) $y^2+1=0$, *пара мнимых параллельных прямых;*
(9) $y^2=0$, *пара совпадающих прямых.*

Доказательство. Берем каноническое уравнение и растягиваем оси. □

Теорема 7.25. *Две квадрики аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые названия.*

Доказательство. По лемме, аналогично теореме о метрической классификации, получаем, что квадрики одного названия аффинно эквивалентны.

Обратно, докажем, что квадрики с различными названиями аффинно неэквивалентны.

У коник никакие три точки не лежат на одной прямой, в отличие от остальных квадрик.

Поскольку при аффинных преобразованиях сохраняется условие числа точек пересечения и деления в данном отношении, то центр переходит в центр, а асимптотическое направление — в асимптотическое.

Так как у параболы нет центра, а у эллипса и гиперболы — есть, причем у эллипса нет асимптотических направлений, а у гиперболы — есть, то эллипс, гипербола и парабола аффинно неэквивалентны.

Пары прямых различаются геометрически.

Наконец, у мнимого эллипса нет асимптотических направлений, а у пары мнимых параллельных прямых — есть. □

Следствие 7.26. *Две содержательные кривые переводятся друг в друга изометрическим преобразованием тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые канонические уравнения.*

Две содержательные кривые переводятся друг в друга аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые названия.

Доказательство. Утверждения вытекают сразу из теорем 7.23 и 7.25 и замечания 7.22. □

Для определения названия (типа) квадрики применяют **метод Лагранжа** выделения полных квадратов.

Пример 7.27. Определить тип кривой

$$x^2 - 4xy + 6y^2 + 2x + 4y - 10 = 0,$$

Решение: Преобразуем уравнение, выделяя полный квадрат.

$$(x - 2y + 1)^2 - 4y^2 + 4y - 1 + 6y^2 + 4y - 10 = 0,$$

$$(x - 2y + 1)^2 + 2y^2 + 8y - 11 = 0,$$

$$(x-2y+1)^2+(\sqrt{2}y+2\sqrt{2})^2-8-11=0,$$

$$\left(\frac{x-2y+1}{\sqrt{19}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}y+2\sqrt{2}}{\sqrt{19}}\right)^2-1=0,$$

$$(x')^2+(y')^2-1=0.$$

Таким образом, тип кривой — эллипс. Заметим, что при такой процедуре всегда получается преобразование с треугольной матрицей с ненулевой диагональю, а следовательно — невырожденное.

8. Поверхности второго порядка

8.1. **Приведение уравнения к каноническому виду.** Поверхности второго порядка задаются в некоторой аффинной системе координат уравнением

$$F(x,y,z)=\underbrace{a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz}_{\substack{q(x,y,z)\\ \text{квадратичная часть}}}+$$

$$+\quad \underbrace{2a_1x+2a_2y+2a_3z}_{\substack{l(x,y,z)\\ \text{однородная линейная часть}}}\quad +a_0=0. \tag{20}$$

При этом требуется, чтобы квадратичная часть была отлична от нуля. Если ввести обозначения

$$Q:=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix},\qquad A:=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0\end{pmatrix},$$

$$L:=(a_1,a_2,a_3),\qquad X:=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix},$$

то уравнение примет вид

$$X^TQX+LX+a_0=(x,y,z,1)A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix}=0. \tag{21}$$

Как и раньше будем называть *квадрикой* многочлен второй степени с точностью до умножения на ненулевой множитель.

Пока будем считать систему координат прямоугольной.

Теорема 8.1 (из курса линейной алгебры)**.** *Пусть в некоторой прямоугольной системе координат задана квадратичная часть $q(x, y, z)$. Тогда найдется другая прямоугольная система координат с тем же началом, в которой квадратичная часть примет диагональный вид*

$$q'(x', y', z') = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — собственные значения Q, т. е. корни характеристического многочлена

$$\chi_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda E) = 0,$$

а новые базисные вектора $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3$ являются соответствующими собственными векторами. В частности, все собственные значения вещественны, а собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Лемма 8.2. *Для любого многочлена второй степени в пространстве существует прямоугольная система координат, в которой он принимает один из следующих пяти видов:*

(i) $F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \tau \qquad (\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0)$;
(ii) $F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z \qquad (\lambda_1\lambda_2 b_3 \neq 0)$;
(iii) $F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \tau \qquad (\lambda_1\lambda_2 \neq 0)$;
(iv) $F = \lambda_1 x^2 + 2c_2 y \qquad (\lambda_1 c_2 \neq 0)$;
(v) $F = \lambda_1 x^2 + \tau \qquad (\lambda_1 \neq 0)$.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы можем найти такую прямоугольную систему, в которой квадратичная часть диагональна, т. е.

$$F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + 2b_3 z + b_0 = 0.$$

Рассмотрим все возможные случаи.

(i) При $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ имеем

$$F = \lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_1 \left(y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3 \left(x + \frac{b_3}{\lambda_3}\right)^2 +$$
$$+ \left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(b_2)^2}{\lambda_2} - \frac{(b_3)^2}{\lambda_3}\right) = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + \tau.$$

(ii) При $\lambda_3 = 0$ и $\lambda_1\lambda_2\beta_3 \neq 0$ имеем

$$F = \lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_1 \left(y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b_3 z + \left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(b_2)^2}{\lambda_2}\right) =$$
$$= \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2b_3 z + \tau = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 \left(z + \frac{\tau}{2b_3}\right) =$$
$$= \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z'.$$

(iii) При $\lambda_3 = \beta_3 = 0$ и $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ имеем

$$F = \lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_1 \left(y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + \left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(b_2)^2}{\lambda_2}\right) =$$
$$= \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \tau.$$

(iv) Пусть $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ и хотя бы один из b_2 и b_3 не равен нулю. Тогда имеем

$$F = \lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2b_2 y + 2b_3 z + \left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1}\right) = \lambda_1(x')^2 + 2c_2 y',$$

где

$$\begin{aligned}
x' &= x + \frac{b_1}{\lambda_1}, \qquad\qquad c_2 = \sqrt{(b_2)^2 + (b_3)^2} \\
y' &= \frac{1}{\sqrt{(b_2)^2 + (b_3)^2}} \left(b_2 y + b_3 z + \frac{1}{2}\left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1}\right)\right) \\
z' &= \frac{1}{\sqrt{(b_2)^2 + (b_3)^2}} \left(-b_3 y + b_2 z\right).
\end{aligned}$$

Такая “нормировка” функций перехода гарантирует ортогональность соответствующей матрицы и, тем самым, что замена прямоугольная.

Если же $b_2 = b_3 = 0$, то мы сразу имеем выражение конечного вида.

(v) Пусть $\lambda_3 = \lambda_2 = b_2 = b_3 = 0$ и $\lambda_1 \neq 0$. Тогда имеем

$$F = \lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1} \right)^2 + \left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} \right) = \lambda_1 (x')^2 + \tau.$$

Лемма доказана. □

Теорема 8.3. *Для любой квадрики существует прямоугольная система координат, в которой она имеет один из следующих 17 видов:*

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $(a \geqslant b \geqslant c > 0)$ (*эллипсоид*);

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$, $(a \geqslant b \geqslant c > 0)$ (*мнимый эллипсоид*);

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $(a \geqslant b > 0)$ (*однополостный гиперболоид*);

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, $(a \geqslant b > 0)$ (*двуполостный гиперболоид*);

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, $(a \geqslant b > 0)$ (*конус* (*второго порядка*));

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$, $(a \geqslant b > 0)$ (*мнимый конус* (*второго порядка*));

7) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, $(p \geqslant q > 0)$ (*эллиптический параболоид*);

8) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$, $(p \geqslant q > 0)$ (*гиперболический параболоид*);

9) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a \geqslant b > 0)$ (*эллиптический цилиндр*);

10) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, $(a \geqslant b > 0)$ (*мнимый эллиптический цилиндр*);

11) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, $(a \geqslant b > 0)$ (*две мнимые пересекающиеся плоскости*);

12) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a \geqslant b > 0)$ (*гиперболический цилиндр*);

13) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, $(a \geqslant b > 0)$ (*две пересекающиеся плоскости*);

14) $y^2 = 2px$, $(p > 0)$ (*параболический цилиндр*);

15) $y^2 = a^2$, $(a > 0)$ (*две параллельных плоскости*);

16) $y^2 = -a^2$, $(a > 0)$ (*две мнимых параллельных плоскости*);
17) $y^2 = 0$, (*две совпадающих плоскости*).

Доказательство. Сначала применяем лемму, а потом для каждого из типов (i)–(v) рассматриваем все случаи. Например, возьмем (i). Возможны случаи:

Если все λ_i одного знака, а τ — противоположного, то делением на $-t$ и переменой осей уравнение приводится к виду 1) (эллипсоид).

Если все λ_i и τ одного знака, то делением на t и переменой осей уравнение приводится к виду 2) (мнимый эллипсоид).

Если все λ_i одного знака, а $\tau = 0$, то переменой осей уравнение приводится к виду 6) (мнимый конус).

Если λ_i разных знаков, а $\tau = 0$, то переменой осей уравнение приводится к виду 5) (конус).

Если λ_i разных знаков, причем у одного тот же знак, что и у τ, то переменой осей и делением на $-t$ уравнение приводится к виду 3) (однополостный гиперболоид).

Если λ_i разных знаков, причем у двух тот же знак, что и у τ, то переменой осей и делением на $-t$ уравнение приводится к виду 4) (однополостный гиперболоид).

Таким образом, случай (i) дает 1)–6). Аналогично с другими:

(i)	1, 2, 3, 4, 5, 6
(ii)	7, 8
(iii)	9, 10, 11, 12, 13
(iv)	14
(v)	15, 16, 17

□

Теорема 8.4. *Каноническое уравнение определено однозначно (для видов* $5, 6, 11, 13$ *— с точностью до множителя).*

Доказательство. Так же, как и в случае кривых, доказывается, что коэффициенты (в частности, определитель δ и след S) и корни λ_i характеристического многочлена матрицы Q являются ортогональными инвариантами, а также определитель Δ матрицы A. Также инвариантны ранги r и R матриц Q и A.

Тогда поверхность однозначно относится к одному из типов (i)–(v), так как

(i)	$r = 3$; $R = 3$ или $R = 4$
(ii)	$r = 2$, $R = 4$
(iii)	$r = 2$, $R = 2$ или $R = 3$
(iv)	$r = 1$, $R = 3$
(v)	$r = 1$, $R = 1$ или $R = 2$

Внутри типа (i) λ_i — инварианты, а $\tau = \Delta/\delta$. Внутри типа (ii) λ_1, λ_2 — инварианты, а $(b_3)^2 = -\dfrac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2}$.

Остальные поверхности, являясь цилиндрическими, имеют канонические уравнения, не содержащие z. Допустим, имеется замена прямоугольных координат, переводящая одно из таких уравнений в другое. Тогда x и y не зависят от z' (и поэтому доказательство сводится к доказанному двумерному случаю). Покажем это, например, для уравнения вида $\lambda x^2 + \mu y^2 + \tau = 0$. Пусть $x = c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z' + c_1$ и $y = c_{12}x' + c_{22}y' + c_{32}z' + c_2$, а результирующее выражение не зависит от z'. Тогда

$$\begin{array}{rcl} \lambda c_{11}c_{31} & = & -\mu c_{12}c_{32} \\ \lambda c_{21}c_{31} & = & -\mu c_{22}c_{32} \\ \lambda c_{31}c_{31} & = & -\mu c_{32}c_{32} \\ \lambda c_{1}c_{31} & = & -\mu c_{2}c_{32}, \end{array}$$

в частности, если хотя бы одно из c_{31} и c_{32} отлично от 0, то две первые строки матрицы перехода линейно зависимы и получаем противоречие.

Уравнения распадающихся поверхностей (11, 13, 15, 16, 17) определяются однозначно также из геометрических соображений (теория плоскостей). $\square$

8.2. **Основные виды поверхностей второго порядка и их геометрические свойства.**

Эллипсоид. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Поскольку $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, $|z| \leqslant c$, то эллипсоид ограничен.

Теорема 8.5. *Плоское сечение поверхности второго порядка есть кривая порядка не выше двух.*

Доказательство. Выберем систему координат, в которой уравнение плоскости: $z = 0$. Тогда уравнение сечения $G(x, y) := F(x, y, 0) = 0$. $\square$

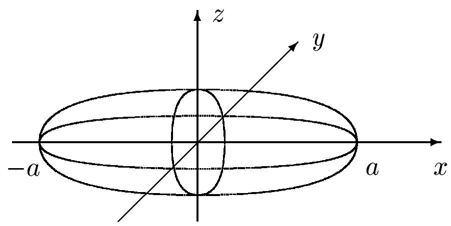
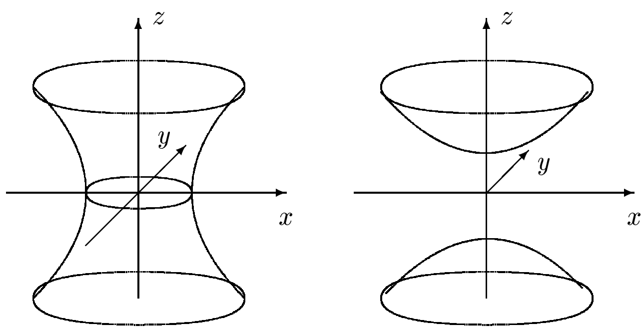


Рис. 27. Эллипсоид

Следствие 8.6. *Непустое плоское сечение эллипсоида — эллипс или точка.*

Доказательство. Этими двумя кривыми исчерпываются непустые ограниченные кривые 0, 1 или 2-го порядка. ☐

Однополостный гиперболоид (рис. 28 а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$



а) б)

Рис. 28. Однополостный и двуполостный гиперболоиды

В сечении плоскостью $z=0$ получается эллипс $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, называемый *горловым.*

Однополостный гиперболоид обладает следующим замечательным свойством.

Определение 8.7. Назовем *прямолинейной образующей* поверхности прямую, целиком в ней содержащуюся. Как правило, это понятие не применяется к распадающимся поверхностям.

Теорема 8.8. *Однополостный гиперболоид имеет два семейства прямолинейных образующих. Через каждую точку проходит ровно одна прямая каждого семейства, и эти две прямые пересекаются ровно по этой точке. Две различные прямые из одного семейства скрещиваются, а из разных — пересекаются или параллельны.*

Доказательство. Заметим, что указанные свойства являются аффинными, а не метрическими, поэтому достаточно доказать теорему для гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Перепишем это уравнение в виде

$$x^2 - z^2 = 1 - y^2, \qquad (x - z)(x + z) = (1 - y)(1 + y).$$

Отсюда сразу видим два семейства прямолинейных образующих:

$$\text{I:} \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda(x - z) & = & \mu(1 - y) \\ \mu(x + z) & = & \lambda(1 + y) \end{array} \right. \qquad \text{II:} \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda(x - z) & = & \mu(1 + y) \\ \mu(x + z) & = & \lambda(1 - y) \end{array} \right. ,$$

где λ и μ — произвольные вещественные числа, не обращающиеся в нуль одновременно. Тогда

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - \mu^2 < 0, \qquad \begin{vmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \mu^2 > 0,$$

так что пары плоскостей в пересечении действительно дают прямую.

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) принадлежит гиперболоиду. Тогда, взяв для I семейства $\lambda = x_0 + z_0$ и $\mu = 1 + y_0$, а для II — $\lambda = x_0 + z_0$ и $\mu = 1 - y_0$, получим прямые, проходящие через данную точку. Поскольку одно из чисел $1 - y_0$ или $1 + y_0$ отлично от 0, то пара (λ, μ) определена по точке (x_0, y_0, z_0) однозначно (с точностью до множителя) для каждого семейства. Итак, через каждую точку проходит ровно одна прямая каждого семейства.

Покажем, что других образующих нет. Допустим, что образующая параллельна плоскости $z = 0$, т. е. содержится в плоскости $z = z_0$. Тогда она должна содержаться в окружности $x^2 + y^2 = 1 + z_0^2$, что невозможно. Итак, всякая образующая пересекает $z = 0$, а значит, и горловой эллипс (окружность).

В силу вращательной симметрии достаточно исследовать одну его точку, например, $(1,0,0)$. Пусть через нее проходит прямолинейная образующая с некоторым направляющим вектором (α,β,γ):

$$\begin{cases} x &= 1+\alpha t \\ y &= \beta t \\ z &= \gamma t \end{cases}$$

так что уравнение (результат подстановки в уравнение гиперболоида)

$$(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)t^2+2\alpha t=0$$

должно иметь решением любое t, откуда

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2-\gamma^2 &= 0 \\ 2\alpha &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta^2-\gamma^2 &= 0 \end{cases}$$

Значит, направляющий вектор (с точностью до ненулевого множителя) равен $(0,1,\pm1)$, т. е. имеются две возможности, а их мы уже нашли — это прямая первого семейства и прямая второго. Итак, других образующих нет.

Из аналогичного соображения получаем, что прямые одного семейства не могут пересекаться. Пусть они параллельны одному вектору (α,β,γ). Значит, он параллелен каждой из 4-х плоскостей, фигурирующих в записи двух прямых семейства. Тогда он является ненулевым решением системы 4-х линейных уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu & -\lambda \\ \mu & -\lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' & -\lambda' \\ \mu' & -\lambda' & \mu' \end{pmatrix}$$

Если $\mu=\mu'=0$, то прямые совпадают. Если $\mu=0$ и $\mu'\neq0$, т. е. можно считать $\lambda=\mu'=1$, то ранг не меньше трех (поскольку должно быть $\mu'=u\lambda$ и $\mu'=-u\lambda$). Аналогично в обратной ситуации. Значит, можно считать, что $\mu=\mu'=1$, а λ и λ' — ненулевые. Тогда для условия $\mathrm{rk}<3$ необходимо

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & -\lambda \\ \mu & -\lambda & \mu \\ \mu' & -\lambda' & \mu' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda' & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^2+1+\lambda\lambda'-\lambda^2-1+\lambda\lambda' =$$

$= 2\lambda(\lambda' - \lambda) = 0$, что в данной ситуации возможно только если $\lambda = \lambda'$ и прямые совпадают. Итак, две прямые одного семейства скрещиваются.

Семейства не пересекаются, так как отображение $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ переводит прямые одного семейства в прямые другого, параллельные своим прообразам. Действительно, если бы прямая принадлежала обоим семействам, то ее образ — также, и тем самым, мы имели бы две параллельные прямые из одного семейства.

Теперь рассмотрим две прямые l_1 и l_2 из разных семейств. Пусть π — плоскость, проходящая через l_1 и некоторую точку $P \in l_2$, $P \notin l_1$. Поэтому соответствующее плоское сечение гиперболоида, являясь по теореме 8.5 кривой порядка не старше 2, должно быть парой параллельных или пересекающихся прямых. Одна из них — l_1, а другая — некоторая прямолинейная образующая $l \ni P$. Она не совпадает и не скрещивается с l_1, поэтому, по доказанному, не может принадлежать первому семейству, а значит, принадлежит второму, и в силу единственности прямой второго семейства, проходящей через P, совпадает с l_2. □

Двуполостный гиперболоид (рис. 28 б) $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Теорема 8.9. *Двуполостный гиперболоид не имеет прямолинейных образующих.*

Доказательство. Прямолинейная образующая не может пересекать плоскость $z = 0$, поскольку эта плоскость имеет пустое пересечение с поверхностью. Значит, она лежит в плоскости $z = z_0$. Но соответствующее плоское сечение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2} - 1$$

ограничено (эллипс, точка или $\emptyset$) и не может содержать прямую. □

Конус второго порядка (рис. 29 а)) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$

Заметим, что уравнение однородно (второго порядка):

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^2 F(x, y, z),$$

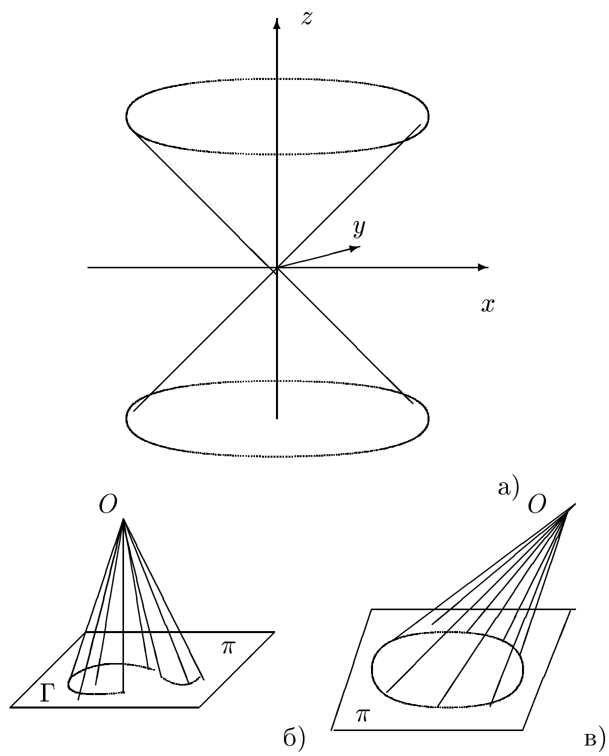


Рис. 29

и таким образом, любая прямая, содержащая O и некоторую другую точку конуса, является прямолинейной образующей.

Определение 8.10. Пусть Γ — произвольная кривая, лежащая в плоскости π, а точка O не принадлежит π. *Конической поверхностью* над Γ с центром в O называется объединение всех прямых вида OX, $X \in \Gamma$ (рис. 29 б)). Прямые OX называются *образующими,* а кривая Γ — *направляющей* конической поверхности.

Теорема 8.11. *Коническая поверхность над эллипсом является конусом второго порядка.*

Доказательство. Выберем такую систему координат с центром в O, что плоскость π задается уравнением $z = h \neq 0$ (рис. 29 в)). Если мы выберем направления осей Ox и Oy параллельно главным осям эллипса Γ, то уравнение эллипса в плоскости π примет вид:

$$F(x,y) = a_{11}(x-x_0)^2 + a_{22}(y-y_0)^2 - 1 = 0,$$

где $0 < a_{11} \leqslant a_{22}$. Тогда уравнение конической поверхности над ним:

$$\Phi(x,y,z) = z^2\, F\left(\frac{x}{z}\,h, \frac{y}{z}\,h\right) = 0.$$

Действительно, точка (x,y,z), $z \neq 0$, принадлежит поверхности тогда и только тогда, когда точка $\left(\frac{x}{z}\,h, \frac{y}{z}\,h, h\right)$ принадлежит кривой, т. е. $F\left(\frac{x}{z}\,h, \frac{y}{z}\,h\right) = 0$. Но при сделанном предположении $z \neq 0$ данное уравнение равносильно выводимому. Осталось доказать, что при $z = 0$ выводимое уравнение определено и его множество решений совпадает с O. Определенность следует из того, что во втором сомножителе степень $1/z$ равна 2 и при умножении пропадает. После умножения уравнение превращается (при $z = 0$) в $h^2\, q(x,y) = 0$. Поскольку асимптотических направлений у эллипса нет, то $x = y = 0$.

Итак,

$$\Phi(x,y,z) = z^2 \left(a_{11}\left(\frac{x-x_0}{z}\,h\right)^2 + a_{22}\left(\frac{y-y_0}{z}\,h\right)^2 - 1\right) = 0.$$

После замены $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, $z' = z$ получаем

$$\Phi(x',y',z') = a_{11}h^2(x')^2 + a_{22}h^2(y')^2 - (z')^2 = 0,$$

т. е. конус. □

Задача 8.12. Что представляют собой конические поверхности над гиперболой и параболой ? Ответ: обычный конус без двух или одной прямой.

Эллиптический параболоид (рис. 30 а)) $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$

Теорема 8.13. *Эллиптический параболоид не имеет прямолинейных образующих.*

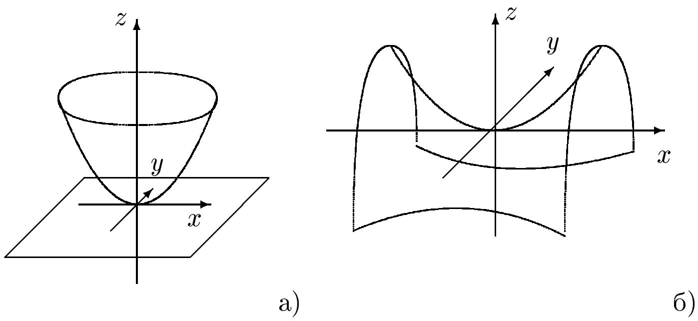


Рис. 30. Эллиптический и гиперболический параболоиды

Доказательство. Дословно как с двуполостным гиперболоидом. □

Гиперболический параболоид (рис. 30 б)) $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$

Прежде, чем обсуждать его прямолинейные образующие, введем по аналогии со случаем кривых следующее определение.

Определение 8.14. Ненулевой вектор (α, β, γ) задает *асимптотическое направление для поверхности* $F = 0$, если он обнуляет квадратичную форму уравнения

$$q(\alpha, \beta, \gamma) = a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{13}\alpha\gamma + 2a_{23}\beta\gamma = 0.$$

Теорема 8.15. *Асимптотические направления не зависят от выбора системы координат.*

Доказательство. Дословно, как для кривых. □

Теорема 8.16. *Прямолинейные образующие любой поверхности имеют асимптотическое направление.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} x &= x_0 + \alpha t \\ y &= y_0 + \beta t \\ z &= z_0 + \gamma t \end{cases}$$

— прямолинейная образующая. Подставив в уравнение $F = 0$, получим $F_2 t^2 + 2F_1 t + F_0 = 0$ для любого t. Значит, $F_2 = q(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. □

Теорема 8.17. *Гиперболический параболоид имеет два семейства образующих, проходящих через каждую точку. Образующие одного семейства попарно скрещиваются и параллельны одной плоскости, а разных — пересекаются.*

Доказательство. Асимптотические направления (α,β,γ) (в канонических координатах) гиперболического параболоида находятся из уравнения $\dfrac{\alpha^2}{p}-\dfrac{\beta^2}{q}=0$, т. е. лежат в плоскостях

$$\pi_1: \quad \frac{\alpha}{\sqrt{p}}-\frac{\beta}{\sqrt{q}}=0, \qquad \pi_1: \quad \frac{\alpha}{\sqrt{p}}+\frac{\beta}{\sqrt{q}}=0.$$

С учетом уравнения параболоида

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\,z$$

это означает, что имеются два семейства прямолинейных образующих

$$\text{I:}\ \left\{\begin{array}{rcl} \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}} & = & k \\ k\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right) & = & 2\,z \end{array}\right. ; \quad \text{II:}\ \left\{\begin{array}{rcl} \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}} & = & k \\ k\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right) & = & 2\,z \end{array}\right. .$$

Действительно, если имеется образующую, параллельную, скажем, π_1, то расстояние (со знаком) от любой ее точки до π_1 постоянно, т. е. с некоторой константой k мы имеем $\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}=k$, откуда из уравнения поверхности получаем второе уравнение (I). Таким образом, других образующих нет.

Через каждую точку параболоида проходит ровно по одной образующей каждого семейства, так как k определяется однозначно.

Заметим, что никакая вертикальная прямая не может быть прямолинейной образующей. Действительно, в этом случае $x=const$, $y=const$, откуда и $z=const$.

Два семейства не пересекаются. Действительно, предположим, что общая прямая имеет направляющий вектор (α,β,γ). Тогда он должен удовлетворять однородной части первых уравнений обеих систем:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\alpha}{\sqrt{p}}-\frac{\beta}{\sqrt{q}} & = & 0, \\ \frac{\alpha}{\sqrt{p}}+\frac{\beta}{\sqrt{q}} & = & 0, \end{array}\right.$$

откуда $\alpha = \beta = 0$ и прямая вертикальна, что невозможно.

Образующие из одного семейства не могут пересекаться, так как это противоречило бы единственности. Они не могут быть параллельны, так как их направляющие вектора — $(\sqrt{p}, \sqrt{q}, k)$ с различными k. Значит, они скрещиваются, причем (по определению) параллельны фиксированной плоскости.

Пусть теперь l_1 и l_2 — образующие из разных семейств. Покажем, что они пересекаются. Рассмотрим плоское сечение параболоида, проходящее через l_1 и $P \in l_2$, $P \notin l_1$. Это кривая, порядка не выше 2, значит состоящая из двух прямых l_1 и l. Предположим $l \neq l_2$, причем они пересекаются (в точке P). Значит, l не принадлежит второму семейству, т. е. принадлежит первому. Но тогда она должна скрещиваться с l_1 и не может лежать с ней в одной плоскости. Значит, $l = l_2$. Допустим, $l_1 \| l_2$. Тогда координаты (α, β, γ) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\alpha}{\sqrt{p}} - \frac{\beta}{\sqrt{q}} = 0, \qquad \frac{\alpha}{\sqrt{p}} + \frac{\beta}{\sqrt{q}} = 0,$$

откуда $\alpha = \beta = 0$ и образующая вертикальна, что невозможно. □

Вернемся к **гиперболоидам**. Их *асимптотический конус* определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{22}$$

Покажем, что на бесконечности гиперболоиды стремятся к своему асимптотическому конусу. Действительно, из уравнения однополостного гиперболоида имеем для положительных z:

$$z_1 = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1},$$

а из уравнения (22) —

$$z_2 = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}},$$

откуда

$$z_2 - z_1 = \frac{c}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}} \longrightarrow 0 \qquad (x^2 + y^2 \to 0).$$

Аналогичные рассуждения имеют место и для двуполостного гиперболоида.

Предложение 8.18. *Асимптотические направления* (α, β, γ) *однополостного гиперболоида совпадают с направлениями образующих его асимптотического конуса и являются решениями* (22).

Доказательство. По определению асимптотических направлений. □

Теорема 8.19. *Никакие три различных прямолинейных образующих однополостного гиперболоида из одного семейства не параллельны одной плоскости. Любые три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости, являются прямолинейными образующими некоторого однополостного гиперболоида.*

Доказательство. Возьмем три прямолинейных образующие из одного семейства. Допустим, они параллельны одной плоскости. Так как центральное плоское сечение (асимптотического) конуса состоит из двух пересекающихся или одной прямой, то две из трех прямых должны быть параллельны. Противоречие.

Рассмотрим три попарно скрещивающиеся прямые и некоторую аффинную систему координат, в которой они имеют вид:

$$l_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_1 \\ y & = & y_1 \end{array} \right. \quad l_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_2 \\ z & = & z_2 \end{array} \right. \quad l_3 : \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & y_3 \\ z & = & z_3 \end{array} \right.$$

Следующая квадрика содержит все эти прямые:

$$(x - x_1)(y - y_3)(z - z_2) - (x - x_2)(y - y_1)(z - z_3) = 0.$$

Это действительно квадрика, так как коэффициент при x^3 равен нулю, а, скажем при xy равен $-z_2 + z_3 \neq 0$, так как прямые скрещиваются. Из классификации квадрик и доказанных свойств следует, что это — однополостный гиперболоид (у цилиндров таких образующих не может быть, это мы докажем в следующем предложении 8.20). □

Рассмотрим теперь нераспадающиеся цилиндры

Эллиптический цилиндр $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Гиперболический цилиндр $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Параболический цилиндр $y^2 = 2px$

Предложение 8.20. *Все прямолинейные образующие нераспадающихся цилиндров являются их образующими, т.е. параллельны оси Oz канонической системы, и следовательно, параллельны между собой.*

Доказательство. Рассмотрим проекцию произвольной прямолинейной образующей на плоскость $z = 0$. Тогда результат проекции должен целиком принадлежать направляющей (конике), что возможно только тогда, когда проекция — точка, т. е. прямолинейная образующая параллельна оси Oz, т. е. образующим. □

8.3. **Общая теория поверхностей второго порядка.** Рассмотрев уравнение (20), введем обозначения (частные производные):

$$\begin{aligned} F_x &= 2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1), \\ F_y &= 2(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2), \\ F_z &= 2(a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_3). \end{aligned}$$

Пересечение прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \tag{23}$$

с данной плоскостью описывается уравнением

$$F_2 t^2 + 2F_1 t + F_0 = 0, \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned} F_2 &= q(\alpha, \beta, \gamma), \\ 2F_1 &= (\alpha F_x + \beta F_y + \gamma F_z)|_{(x_0, y_0, z_0)}, \\ F_0 &= F(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Теорема 8.21. *Прямая неасимптотического направления либо имеет с поверхностью две общие точки (возможно, совпавшие), либо не пересекает поверхности.*

Прямая асимптотического направления либо лежит на поверхности, либо имеет с ней единственную общую точку, либо не пересекает ее.

Доказательство. Рассмотрим уравнение $F_2t^2 + F_1t + F_0 = 0$, где $F_2 = q(\alpha, \beta, \gamma)$, а (α, β, γ) — направляющий вектор l.

Если направление неасимптотическое, то $F_2 = q(\alpha, \beta, \beta) \neq 0$ и квадратное уравнение невырождено. Оно может иметь 2, 1 (точнее, 2 совпавших) или 0 решений.

Если же направление асимптотическое, то $F_2 = 0$ и уравнение принимает вид $2F_1t + F_0 = 0$. Если $F_1 \neq 0$, то имеется единственная точка пересечения. Если $F_1 = 0$, а $F_0 \neq 0$, то пересечение пусто. Если $F_1 = F_0 = 0$, то пересечение l и Γ совпадает с l. □

Теорема 8.22. *Середины хорд данного неасимптотического направления* (α, β, γ) *лежат в одной плоскости*

$$\alpha F_x + \beta F_y + \gamma F_z = 0. \tag{25}$$

Определение 8.23. Плоскость (25) называется *диаметральной плоскостью, сопряженной неасимптотическому направлению* (α, β, γ).

Доказательство. Пусть l, заданная параметрически (23), пересекает поверхность в двух (возможно совпавших) точках, и (x_0, y_0, z_0) — середина соответствующего отрезка (хорды). Для нахождения t_1 и t_2, соответствующих точкам пересечения, мы имели уравнение (24), причем в нашем случае $F_2 \neq 0$. По теореме Виета для $t_0 = 0$, отвечающего (x_0, y_0), условие середины хорды примет вид

$$0 = t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2} = -\frac{F_1}{F_2}, \qquad F_1 = 0.$$

Докажем, что данное уравнение задает плоскость, т. е. это уравнение первой степени, а не нулевой. Перепишем:

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma)x + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23})y + \\ + (a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma)z + (a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma) = 0$$

Если все коэффициенты при переменных обнуляются, то

$$\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma = 0, \end{cases} \left| \begin{matrix} \times\alpha \\ \times\beta \\ \times\gamma \end{matrix} \right. \quad \begin{cases} a_{11}\alpha^2 + a_{12}\alpha\beta + a_{13}\alpha\gamma = 0, \\ a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + a_{23}\beta\gamma = 0, \\ a_{13}\alpha\gamma + a_{23}\beta\gamma + a_{33}\gamma^2 = 0, \end{cases} \Bigg| +$$

и $q(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, что противоречит неасимптотичности направления. □

Лемма 8.24. *Для всякой поверхности второго порядка существуют три некомпланарных неасимптотических направления.*

Доказательство. Уравнение для нахождения асимптотических направлений $q(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ определяет, как видно после диагонализации, конус, мнимый конус или пару пересекающихся (быть может, мнимых) плоскостей. Для них всегда можно найти три направления, им не принадлежащих. $\square$

Определение 8.25. *Центром поверхности второго порядка* называется ее центр симметрии.

Теорема 8.26. *Центры непустой поверхности второго порядка находятся из системы*

$$\begin{cases} F_x &= 0 \\ F_y &= 0 \\ F_z &= 0. \end{cases} \tag{26}$$

Доказательство. $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть точка (x_0, y_0, z_0) — центр. Пусть $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2, 3$, — направляющие векторы прямых, определенных по предыдущей лемме, причем для этих направлений выберем прямые, пересекающие поверхность. Тогда (x_0, y_0, z_0), как середина соответствующих хорд, принадлежит соответствующим диаметральным плоскостям, т. е. удовлетворяет уравнениям

$$\alpha_i(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1) + \beta_i(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2) +$$

$$+\gamma_i(a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_3) = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Обозначив выражения в скобках через u, v и w соответственно, получим, что u, v и w удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w &= 0 \\ \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w &= 0 \\ \alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 w &= 0. \end{cases}$$

При этом уравнения линейно независимы в силу неколлинеарности векторов $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$. Значит, единственная возможность: $u = v = w = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть точка $M(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяет (26) — "уравнениям центра". Перейдем к новой системе координат (x', y', z'):

$$x' = x - x_0, \qquad y' = y - y_0, \qquad z' = z - z_0,$$

так что

$$x = x' + x_0, \qquad y = y' + y_0, \qquad z = z' + z_0.$$

Тогда

$$F'(x', y', z') = a_{11}(x'+x_0)^2 + 2a_{12}(x'+x_0)(y'+y_0) + a_{22}(y'+y_0)^2 +$$
$$+a_{33}(z'+z_0)^2 + 2a_{13}(x'+x_0)(z'+z_0)+$$
$$+2a_{23}(y'+y_0)(z'+z_0) + 2a_1(x'+x_0) + 2a_2(y'+y_0) + 2a_3(z'+z_0) + a_0 =$$
$$= a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + a_{33}(z')^2 +$$
$$+2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1)x' + 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2)y' +$$
$$+2(a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_1)z' + F(x_0, y_0, z_0) =$$
$$= a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + a_{33}(z')^2 = 0.$$

Очевидно, что если точка (x', y', z') удовлетворяет этому уравнению, то и $(-x', -y', -z')$ — тоже, а координаты M в новой системе: $(0, 0, 0)$. $\square$

Определение 8.27. Поверхность называется *центральной,* если она имеет единственный центр.

Теорема 8.28. *Поверхность является центральной тогда и только тогда, когда* $\delta = \det Q \neq 0$.

Доказательство. Матрица системы уравнений центра совпадает с Q. $\square$

Определение 8.29. Неасимптотическое направление называется *главным,* если сопряженная ему диаметральная плоскость перпендикулярна ему.

Следующие два утверждения мы приводим без доказательства, аналогичного случаю кривых.

Теорема 8.30. *Главные направления поверхности совпадают с собственными векторами матрицы Q квадратичной части ее уравнения.*

Теорема 8.31. *Плоскость, сопряженная главному направлению, является плоскостью симметрии поверхности.*

Определение 8.32. Точка $P(x_0, y_0, z_0)$ поверхности $F = 0$ называется *особой,* если

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = F_y(x_0, y_0, z_0) = F_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Таким образом, особые точки — это центры, принадлежащие поверхности.

Поверхность называется *неособой,* если она не имеет особых точек.

Неособые поверхности: эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, цилиндры, пара параллельных плоскостей.

Особые поверхности: конусы, пара пересекающихся плоскостей, пара совпадающих плоскостей.

Определение 8.33. Поверхность называется *невырожденной,* если $\det A \neq 0$.

Невырожденные поверхности: эллипсоиды, гиперболоиды и параболоиды.

Определение 8.34. *Касательная прямая к поверхности $F = 0$ в неособой точке P* — прямая, имеющая с поверхностью две общие точки, совпадающие с P, либо принадлежащая поверхности.

Теорема 8.35. *Касательные прямые к поверхности в неособой точке P образуют плоскость*

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \\ + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \quad (27)$$

или

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1)x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2)y + \\ +(a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_3)z + (a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0) = 0. \quad (28)$$

Определение 8.36. Плоскость (27) называется *касательной плоскостью к поверхности в неособой точке.*

Доказательство. Пусть $P = (x_0, y_0, z_0)$, тогда для прямой (23) $F_0 = F(P) = 0$ и точки пересечения находятся из $F_2t^2 + 2F_1t = 0$, так что касание имеет место в случае $F_1 = 0$, т. е.

$$\alpha F_x(P) + \beta F_y(P) + \gamma F_z(P) = 0.$$

Это условие является необходимым и достаточным. Аналогично теории кривых доказывается, что получаются совпавшие точки при $F_2 \neq 0$ и прямолинейная образующая при $F_2 = 0$. $\square$

Теорема 8.37. *Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида, проходящие через данную точку образуют сечение поверхности касательной плоскостью в данной точке.*

Доказательство. Прямолинейные образующие являются касательными и, следовательно, лежат в касательной плоскости. Других точек пересечения нет, так как плоское сечение — кривая порядка не выше двух. $\square$

Теорема 8.38. *Множество касательных прямых к неособой поверхности второго порядка, параллельных данному неасимптотическому направлению, является либо пустым множеством, либо плоскостью, либо парой плоскостей, либо нераспадающимся цилиндром второго порядка.*

Доказательство. Множество точек касания таких прямых является пересечением поверхности с диаметральной плоскостью, сопряженной данному направлению. Это пересечение — кривая порядка не выше двух. $\square$

Следствие 8.39. *Проекция неособой поверхности второго порядка на плоскость вдоль неасимптотического направления ограничивается кривой порядка не выше двух.*

Следствие 8.40. *Проекция эллипсоида на плоскость — эллипс и его внутренние точки.*

8.4. **Аффинная и метрическая классификация поверхностей второго порядка.** Определение аффинной и метрической эквивалентности квадрик в пространстве полностью аналогично случаю плоскости (см. § 7.3).

Теорема 8.41. *Две квадрики в пространстве метрически эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый канонический вид.*

Теорема 8.42. *Две квадрики в пространстве аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые названия.*

Доказательство теорем дословно повторяет случай кривых, за исключением доказательства аффинной неэквивалентности поверхностей с разными названиями. Проведем его.

Прежде всего заметим, что ранги r и R являются аффинными, а не только ортогональными инвариантами. Поэтому надо доказать неэквивалентность лишь в пределах каждого из классов (i)–(v).

Точка (мнимый конус), прямая (пара мнимых пересекающихся плоскостей), пара параллельных, пересекающихся или совпадающих плоскостей, очевидно, аффинно неэквивалентны ни друг другу, ни другим поверхностям. Для пустых множеств: мнимый эллиптический цилиндр имеет 1 асимптотическое направление, мнимый эллипсоид не имеет асимптотических направлений, пара мнимых параллельных плоскостей имеет целую плоскость асимптотических направлений.

Кроме того, эллипсоид ограничен в отличие от других нерассмотренных поверхностей. В типе (ii) остался один конус. Для оставшихся имеем

Тип	Название	Наличие центров	Прямолин. образующие
(i)	однополостный гиперболоид	1	есть
	двуполостный гиперболоид	1	нет
	эллиптический параболоид	нет	нет
	гиперболический параболоид	нет	есть

Тип	Название	Наличие центров	Асимптот. направления
(iii)	эллиптический цилиндр	прямая	одно
	гиперболический цилиндр	прямая	две плоскости
	параболический цилиндр	нет	

Теорема доказана. □

8.5. **Некоторые применения теории поверхностей второго порядка.**

Теорема 8.43 (о структуре аффинного преобразования)**.** *Любое аффинное преобразование пространства можно представить как композицию изометрического преобразования и трех сжатий-растяжений по направлениям трех взаимно перпендикулярных осей.*

Доказательство. Достаточно доказать, что у любого аффинного преобразования найдутся три взаимно перпендикулярные прямые, переходящие в три взаимно перпендикулярные прямые. Рассмотрим единичную сферу и ее образ при данном аффинном преобразовании. По теореме классификации это — эллипсоид. Рассмотрим каноническую систему координат для этого эллипсоида и ее прообраз при данном преобразовании. Утверждается, что оси прообраза и есть искомые прямые, т.е. они взаимно перпендикулярны. Действительно, при аффинном преобразовании диаметральная плоскость, сопряженная данному неасимптотическому направлению, переходит в диаметральную плоскость, сопряженную отображенному направлению, так как условие деления хорд пополам сохраняется. Но у сферы диаметральная плоскость всегда перпендикулярна соответствующему направлению. □

Другое применение — геометрическое доказательство теоремы Брианшона, принадлежащее Данделену.

Теорема 8.44 (Брианшона)**.** *Диагонали шестиугольника, описанного около коники, пересекаются в одной точке.*

Эскиз доказательства. Рассмотрим случай эллипса. Он является горловым эллипсом некоторого однополостного гиперболоида. Поскольку касательные плоскости к гиперболоиду в точках горлового эллипса перпендикулярны его плоскости, то касательные к эллипсу (в частности, стороны нашего шестиугольника $ABCDEF$) являются проекциями прямолинейных образующих. Так как семейств два, то мы можем выбрать шесть прямолинейных образующих, определяющих некоторый шестиугольник $A'B'C'D'E'F'$ (пространственную ломаную), проектирующийся на исходный шестиугольник. При этом его противоположные стороны, скажем, $B'C'$ и $E'F'$ принадлежат разным семействам, и, следовательно, лежат в одной плоскости (они параллельны или пересекаются). Пересечение плоскостей $B'C'E'F'$ и $A'B'D'E'$ — прямая $B'E'$. Аналогично — для других, так что точка пересечения трех плоскостей проектируется в точку пересечения диагоналей исходного шестиугольника, доказывая существование последней. □

Еще одно неожиданное применение теории поверхностей второго порядка предлагается найти при решении следующей задачи.

Задача 8.45. В пространстве даны 4 попарно скрещивающиеся прямые. Сколько существует прямых, пересекающих одновременно все эти четыре прямые? (Подсказка: как устроены общие секущие трех таких прямых?)

9. Элементы проективной геометрии

9.1. **Пополнение плоскости.** *Пополненная плоскость* — это плоскость, к которой присоединены некоторые "бесконечно удаленные" элементы (точки). Именно, каждому несобственному пучку ставится в соответствие *несобственная точка.* При этом считается, что собственный пучок пересекается в собственной точке, а несобственный — в несобственной. Объединение всех несобственных точек называется *несобственной прямой.*

Таким образом, на пополненной плоскости выполнены следующие **аксиомы**:

AI. Через две любые различные точки проходит единственная прямая.

AII. Две любые различные прямые пересекаются в единственной точке.

Если мы забываем про то, что некоторые точки были несобственными, т. е. присоединенными, то приходим к понятию *проективной* плоскости.

Для того, чтобы эти аксиомы записать в более симметричном виде, вводится следующее понятие инцидентности.

Определение 9.1. Точка называется *инцидентной* прямой, если точка лежит на этой прямой. Прямая называется *инцидентной* точке, если прямая проходит через эту точку.

Аксиомы принимают вид:

AI. Для любых двух различных точек существует единственная прямая, инцидентная им.

AII. Для любых двух различных прямых существует единственная точка, инцидентная им.

Сформулируем следующий

Принцип двойственности: Если верно какое-то общее утверждение о точках, прямых и инцидентности между ними на проективной плоскости, то верно и двойственное утверждение, в котором точки и прямые меняются местами.

Аксиомы AI и AII представляют пример двух двойственных друг другу утверждений. Отметим, что на обычной плоскости принцип двойственности не выполняется: аксиома AI верна, а AII — нет.

Мы не будем обсуждать полный набор аксиом, а также непротиворечивость и так далее. Мы просто построим естественную модель проективной плоскости, для которой будут выполнены указанные аксиомы и принцип двойственности.

9.2. **Связка как модель проективной плоскости.**

Определение 9.2. *Связкой* прямых и плоскостей с центром O в трехмерном пространстве называется множество всех прямых и плоскостей, проходящих через данную точку O. Обозначаться связка будет той же буквой O. Прямая связки *инцидентна* плоскости, если она в ней содержится, плоскость связки *инцидентна* прямой, если она через нее проходит.

Определение 9.3. *Перспективное соответствие* осуществляет взаимно однозначное отображение пополненной плоскости на связку, т. е. отображение точек пополненной плоскости на множество прямых связки, определяемое следующим образом. Рассмотрим пополняемую плоскость π как лежащую в трехмерном пространстве. Пусть точка O не принадлежит π и определяет связку. Каждой собственной точке π поставим в соответствие единственную прямую связки, проходящую через нее.

Каждой несобственной точке π, т. е. направлению или несобственному пучку на π, поставим в соответствие единственную прямую связки, имеющую то же направление.

Очевидно, что при перспективном соответствии прямые переходят в плоскости и сохраняется отношение инцидентности. Поэтому прямые связки называют "точками", а плоскости — "прямыми" данной модели проективной плоскости.

Замечание 9.4. При перспективном соответствии несобственная прямая переходит в плоскость связки, параллельную π. Таким образом, пополненная плоскость соответствует связке с выделенной плоскостью, а проективная плоскость — просто связке.

Пусть теперь $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ — произвольный репер с центром в O. Рассмотрим направляющий вектор прямой l из связки O. Допустим, что он имеет координаты (x_1, x_2, x_3). Координаты другого направляющего вектора l будут отличаться от них ненулевым множителем. Тройка чисел $(x_1 : x_2 : x_3)$, определенная с точностью до ненулевого множителя называется *однородными координатами* l относительно указанного репера.

Заметим, что все три числа x_1, x_2, x_3 не могут быть нулевыми одновременно.

Рассмотрим плоскость $\pi : x_3 = 1$ и репер $E\vec{e}_1\vec{e}_2$ в ней, где E имеет в $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ координаты $(0, 0, 1)$ (см рис. 31).

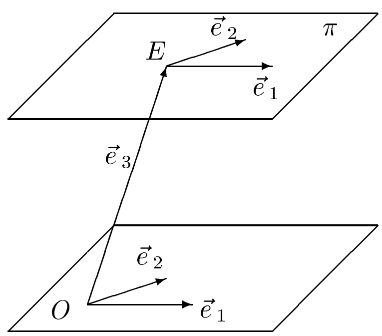


Рис. 31

При соответствии, обратном к перспективному, точке $(x_1 : x_2 : x_3)$ с $x_3 \neq 0$ отвечает точка плоскости π с координатами

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Остальным точкам соответствуют несобственные точки пополненной плоскости π.

Уравнение прямой в однородных координатах имеет вид

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

где тройка (a_1, a_2, a_3) определена с точностью до ненулевого множителя, а a_1, a_2, a_3 не обращаются в нуль одновременно. Таким образом, прямая также приобретает "однородные координаты" $(a_1 : a_2 : a_3)$.

Если a_1 или a_2 не обращаются в нуль, то это обычная прямая, пополненная несобственной точкой. Если же $a_1 = a_2 = 0, a_3 \neq 0$, то это несобственная прямая $x_3 = 0$.

Предложение 9.5. *Три точки X, Y и Z проективной плоскости с однородными координатами $(x_1 : x_2 : x_3)$, $(y_1 : y_2 : y_3)$ и $(z_1 : z_2 : z_3)$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Равенство нулю определителя есть условие компланарности соответствующих векторов. □

Теорема 9.6. *Для проективной плоскости в модели связки выполнен принцип двойственности.*

Доказательство. Условие инцидентности в координатах записывается в виде $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, симметричном по двум объектам. □

Следующий классический результат , демонстрирующий эффективность принципа двойственности, является одним из важнейших в проективной геометрии.

Теорема 9.7 (Дезарга). *Пусть на проективной плоскости заданы два треугольника ABC и $A'B'C'$, причем одноименные вершины и стороны, точнее, прямые, их содержащие, не совпадают. Тогда три прямые AA', BB' и CC' пересекаются в* *одной точке в том и только в том случае, если точки пересечения прямых AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, AC и $A'C'$ лежат на одной прямой.*

Доказательство. Обозначим указанные точки пересечения через P, Q и R (см. рис. 32).

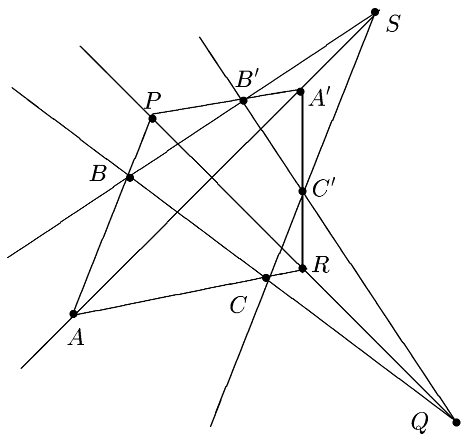


Рис. 32

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть S — точка пересечения прямых AA', BB' и CC'. Пусть $a, b, c, a', b', c', p, q, r, s$ — некоторые представители (тройки) однородных координат точек $A, B, C, A', B', C', P, Q, R, S$: $a = (a_1, a_2, a_3), \ldots$ Тогда для некоторых $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$

$$\begin{cases} s &= \alpha a + \alpha' a' \\ s &= \beta b + \beta' b' \\ s &= \gamma c + \gamma' c' \end{cases}$$

Заметим, что для этого необходимо было несовпадение a и a' и т. д. Тогда

$$\begin{cases} u &:= \beta b - \gamma c = \gamma' c' - \beta' b' \\ v &:= \gamma c - \alpha a = \alpha' a' - \gamma' c' \\ w &:= \alpha a - \beta b = \beta' b' - \alpha' a' \end{cases}$$

Таким образом, u отвечает точке лежащей и на прямой BC и на $B'C'$, т. е. Q. Аналогично, v — некоторый представитель координат R, а w — P. Сложив почленно равенства, определяющие

u, v и w, получим $u+v+w=(0,0,0)$, т. е. точки лежат на одной прямой (плоскости связки).

$\boxed{\Leftarrow}$ Переформулируем доказанное утверждение в следующем виде.

Пусть на проективной плоскости заданы две тройки точек ABC и $A'B'C'$, ни одна из которых не инцидентна одной прямой, обозначим через $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ *прямые, инцидентные B и C, A и C, A и B, B' и C', A' и C', A' и B', и пусть* $A \neq A'$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}'$, $B \neq B'$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{B}'$, $C \neq C'$, $\mathbf{C} \neq \mathbf{C}'$. *Обозначим через* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *прямые, инцидентные точкам A и A', B и B', C и C' соответственно. Обозначим через $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ точки, инцидентные прямым* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}$ *и* $\mathbf{C}'$ *соответственно. Пусть три прямые* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *инцидентны одной точке. Тогда три точки $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ инцидентны одной прямой.*

По принципу двойственности, мы доказали тем самым следующее двойственное утверждение.

Пусть на проективной плоскости заданы две тройки прямых $\mathbf{ABC}$ *и* $\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}'$, *ни одна из которых не инцидентна одной точке, обозначим через A, B, C, A', B', C' точки, инцидентные* $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$ *и* $\mathbf{C}'$, $\mathbf{A}'$ *и* $\mathbf{C}'$, $\mathbf{A}'$ *и* $\mathbf{B}'$, *и пусть* $A \neq A'$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}'$, $B \neq B'$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{B}'$, $C \neq C'$, $\mathbf{C} \neq \mathbf{C}'$. *Обозначим через $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ точки, инцидентные прямым* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}$ *и* $\mathbf{C}'$ *соответственно. Обозначим через* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *прямые, инцидентные точкам A и A', B и B', C и C' соответственно. Пусть три точки $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ инцидентны одной прямой. Тогда три прямые* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *инцидентны одной точке.*

Но это и есть обратное утверждение. $\square$

9.3. **Проективные преобразования.**

Определение 9.8. Если аффинное преобразование пространства оставляет центр связки O на месте, то оно отображает прямые, проходящие через O, в некоторые другие прямые, проходящие через O. Возникающее таким образом отображение связки в себя называется *проективным.*

Из определения сразу следует, что проективное преобразование переводит прямые проективной плоскости в прямые, сохраняя отношение инцидентности.

Если C — матрица аффинного преобразования относительно репера $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, то в соответствующих однородных координатах проективное преобразование запишется в виде

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{x_1} \\ \widetilde{x_2} \\ \widetilde{x_3} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

где λ — произвольный ненулевой множитель. В соответствующих аффинных координатах на плоскости:

$$\widetilde{x} = \frac{\widetilde{x_1}}{\widetilde{x_3}} = \frac{c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3}{c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3} = \frac{c_{11}x + c_{12}y + c_{13}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}}, \tag{29}$$

$$\widetilde{y} = \frac{\widetilde{x_2}}{\widetilde{x_3}} = \frac{c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3}{c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3} = \frac{c_{21}x + c_{22}y + c_{23}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}}. \tag{30}$$

Определение 9.9. *Фундаментальной четверкой* называется четверка точек $X_1X_2X_3E$ точек проективной плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

В модели связки это четыре прямые, никакие три из которых не лежат на одной плоскости. Всякая система однородных координат определяет фундаментальную четверку $X_1 = (1 : 0 : 0)$, $X_2 = (0 : 1 : 0)$, $X_3 = (0 : 0 : 1)$, $E = (1 : 1 : 1)$. Обратно, каждая четверка тем же способом определяет с точностью до коэффициента пропорциональности однозначно тройку векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Но пропорциональность не влияет на тройку однородных координат, которая определена с точностью до коэффициента. Таким образом, фундаментальная четверка определяет систему однородных координат.

Задача 9.10. Пусть $X_1X_2X_3E$ и $X_1'X_2'X_3'E'$ — две фундаментальные четверки. Тогда существует ровно одно проективное преобразование, переводящее одну в другую.

Задача 9.11. Как следствие, для любой прямой существует проективное преобразование, переводящее ее в несобственную.

Основной пример проективного преобразования дает следующая теорема.

Теорема 9.12. *Центральная проекция* (*рис.* 33) *одной плоскости на другую является проективным преобразованием.*

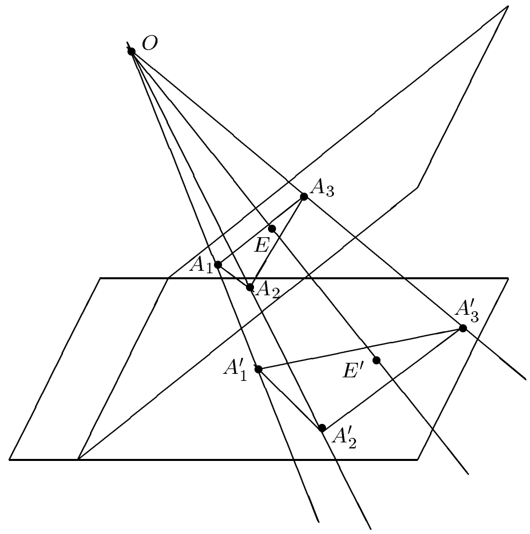


Рис. 33

Замечание 9.13. Здесь формально мы имеем отображение плоскости на другую плоскость, а не на себя. Определение проективного (как и аффинного) преобразования легко обобщается на этот случай — фундаментальные четверки (реперы — для аффинного) надо брать на разных плоскостях. Чтобы получить преобразование плоскости в себя, надо еще взять композицию с некоторым аффинным отождествлением двух плоскостей. Можно показать, что любое проективное преобразование получается таким образом из центральной проекции.

Доказательство. Выберем фундаментальные четверки как показано на рис. 33. Очевидно, что координаты образа при проекции (относительно $E'A'_1A'_2A'_3$) — те же, что и у прообраза (относительно $EA_1A_2A_3$). □

9.4. **Проективно-аффинные преобразования.**

Определение 9.14. Проективное преобразование φ пополненной плоскости (т. е. проективной плоскости, у которой выделена несобственная прямая), переводящее эту выделенную прямую в себя, называется *проективно-аффинным.*

Очевидно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы две различные несобственные точки перешли в несобственные. Поскольку прямая переходит в прямую, в частности, несобственная, то никакая собственная точка не может отобразиться в несобственную. Поэтому можно дать следующее определение.

Определение 9.15. Обозначим через f_0 ограничение f на собственные точки, т. е. непополненную плоскость. Тогда f_0 отображает непополненную плоскость на себя.

Предложение 9.16. *Отображение f_0 является аффинным.*

Доказательство. Введем естественные однородные координаты так, что $x_3 = 0$ — несобственная прямая. Пусть f имеет матричную запись

$$\begin{array}{rcl} \lambda\widetilde{x_1} & = & c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \lambda\widetilde{x_2} & = & c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \lambda\widetilde{x_3} & = & c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{array}$$

Если при любых x_1 и x_2 из $x_3 = 0$ следует $\widetilde{x_3} = 0$, то $c_{31} = c_{32} = 0$ и из (29) и (30) получаем

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{x} & = & \dfrac{c_{11}}{c_{33}}x + \dfrac{c_{12}}{c_{33}}y + \dfrac{c_{13}}{c_{33}}, \\ \widetilde{y} & = & \dfrac{c_{21}}{c_{33}}x + \dfrac{c_{22}}{c_{33}}y + \dfrac{c_{23}}{c_{33}}. \end{array}$$

□

9.5. **Проективная прямая. Двойное отношение и гармонические четверки.** Проективная прямая – прямая, пополненная одной точкой – определяется аналогично проективной плоскости. Роль модели связки теперь играет собственный пучок прямых на плоскости, так что его прямая, параллельная пополняемой прямой, соответствует бесконечно удаленной точке. Проективное преобразование в однородных координатах записывается формулами

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda\widetilde{x_1} & = & c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ \lambda\widetilde{x_2} & = & c_{12}x_1 + c_{22}x_2 \end{array} \right. , \qquad \det C = \det \|c_{ij}\| \neq 0.$$

Простое отношение трех различных точек A_1, A_2 *и* A_3 *на прямой* — это такое число λ, что $\overrightarrow{A_1A_3} = \lambda \cdot \overrightarrow{A_2A_3}$. Обозначение: $\lambda = \dfrac{A_1A_3}{A_2A_3}$.

Двойное (или сложное) отношение четырех различных точек A_1, A_2, A_3 *и* A_4 *на прямой* — это

$$(A_1A_2A_3A_4) := \frac{A_1A_3}{A_2A_3} : \frac{A_1A_4}{A_2A_4}.$$

В аффинных координатах

$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}.$$

Очевидны свойства двойного отношения:

1) $\quad (A_1A_2A_3A_4) = (A_3A_4A_1A_2)$,

2) $\quad (A_1A_2A_4A_3) = \dfrac{1}{(A_1A_2A_3A_4)}$.

Доопределим двойное отношение

$$(A_1A_2A_3\infty) := \frac{A_1A_3}{A_2A_3} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}.$$

Лемма 9.17. *В соответствующих однородных координатах* $(x : y)$ *двойное отношение имеет вид*

$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ y_2 & y_4 \end{vmatrix}}.$$

Доказательство. Правая часть определена корректно, т. е. не меняется при заменах $(x_i, y_i) \to (\lambda x_i, \lambda y_i)$ и совпадает с формулой в аффинных координатах при $y_i = 1$, причем, если $y_4 = 0$, то имеем формулу для $(A_1A_2A_3\infty)$. $\square$

Теорема 9.18. *Двойное отношение четырех точек на проективной прямой не зависит от выбора однородных координат.*

Доказательство. При замене вида $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ имеем

$$\lambda_i\lambda_j \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_i & x'_j \\ y'_i & y'_j \end{pmatrix},$$

$$\lambda_i\lambda_j \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} = \det C \cdot \begin{vmatrix} x'_i & x'_j \\ y'_i & y'_j \end{vmatrix}.$$

Подставляя, видим, что λ_i и $\det C$ сокращаются. □

Следствие 9.19. *Двойное отношение не меняется при проективных преобразованиях прямой.*

Простое отношение не сохраняется при проективных преобразованиях (в отличие от аффинных). Более полный ответ дает следующая теорема.

Теорема 9.20. *Для любых двух троек различных точек A_1, A_2, A_3 и A'_1, A'_2, A'_3 на прямой существует и единственно такое проективное преобразование f, что $f(A_i) = A'_i$, $i = 1, 2, 3$.*

Доказательство. В модели пучка прямых выберем на прямых вектора так, что $\vec{e}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}'_1 + \vec{e}'_3$ (см. рис. 34). Проективное преобразование отвечает паре реперов $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ и

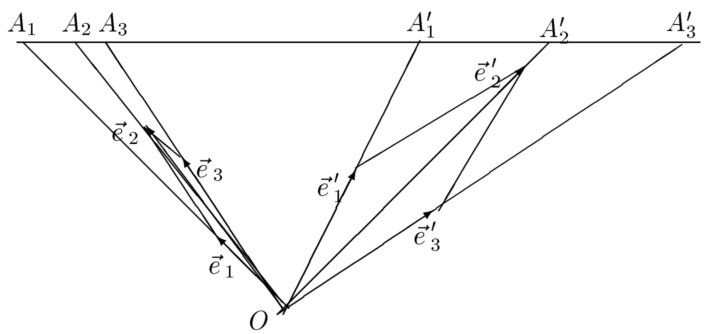


Рис. 34

$O'\vec{e}'_1\vec{e}'_3$.

Докажем единственность. Пусть имеется наряду с построенным преобразованием φ и другое — ψ. Тогда имеется точка A_4, такая, что $\varphi(A_4) \neq \psi(A_4)$. Но положение образа точки A_4 полностью определяется двойным отношением A_4 с A_1, A_2, A_3, так как двойное отношение инвариантно при замене координат, а следовательно, и при преобразовании. □

Лемма 9.21. *Пусть l_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — четыре прямые из одного пучка на проективной плоскости, а прямая l этому пучку* *не принадлежит. Обозначим точки пересечения* l *с* l_i *через* A_i $(i = 1,2,3,4)$*. Тогда двойное отношение* $(A_1A_2A_3A_4)$ *зависит лишь от* l_i *и не зависит от* l.

Доказательство. Если рассмотреть другую прямую, то лучи пучка осуществляют проективное преобразование (центральная проекция), переводящее точки пересечения с l в точки пересечения с другой прямой. По теореме 9.18 двойное отношение сохраняется. □

Определение 9.22. Возникающее в соответствии с предыдущей леммой двойное отношение $(A_1A_2A_3A_4)$ называется *двойным отношением четверки прямых* и обозначается $(l_1l_2l_3l_4)$.

Из доказанного вытекает следующее утверждение.

Теорема 9.23. *Проективное преобразование плоскости переводит прямые в прямые с сохранением двойного отношения точек и прямых.*

Задача 9.24. Доказать, что верно и обратное утверждение.

Определение 9.25. Четверка точек на прямой A_1, A_2, A_3, A_4 называется *гармонической,* если $(A_1A_2A_3A_4) = -1$. Говорят также, что точка A_3 гармонически сопряжена A_4 относительно A_1 и A_2.

Аналогично определяется *гармоническая четверка прямых* (принадлежащих одному пучку): $(l_1l_2l_3l_4) = -1$.

Определение 9.26. *Полный четырехсторонник* — это конфигурация, образованная четырьмя прямыми на проективной плоскости, никакие три из которых не принадлежат одному пучку. При этом возникают 6 вершин (точек пересечения) и 3 диагонали. На рис. 35 A, B, C, D, E, F — вершины, AC, BD, EF — диагонали.

Теорема 9.27. *Точки пересечения любой диагонали полного четырехсторонника с двумя другими его диагоналями гармонически сопряжены относительно соответствующих вершин четырехсторонника.*

Доказательство. Более аккуратно утверждение теоремы говорит, что $(BDKL) = (ACKM) = (EFLM) = -1$ в обозначениях рис. 35. Переведем прямую EF в несобственную прямую при

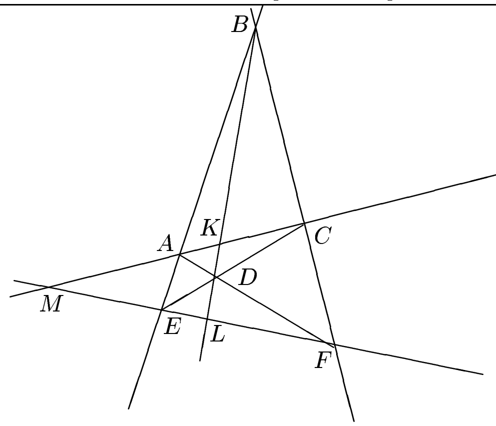


Рис. 35

помощи проективного преобразования. При этом двойные отношения сохранятся, а для отображенных точек (см. рис. 36) $(E'D'K'L') = (A'C'K'M') = -1$. $\square$

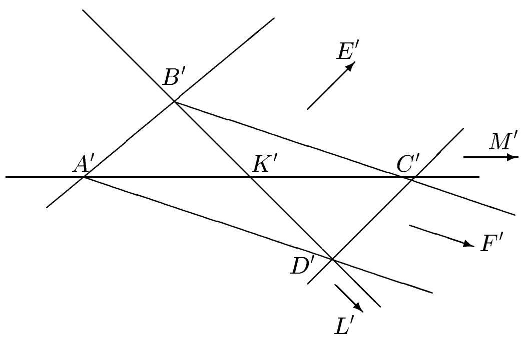


Рис. 36

Это рассуждение, являющееся типичным для задач, носящих проективный характер, демонстрирует эффективность проективных преобразований в таких задачах.

9.6. Кривые второго порядка на проективной плоскости. *Кривая второго порядка* на проективной плоскости определяется как однородное уравнение второго порядка в некоторой однородной системе координат:

$$q(x) = a_{11}(x_1)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}(x_2)^2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}(x_3)^2 = 0.$$

Очевидно, что при проективном преобразовании она перейдет в кривую второго порядка, и что определение корректно, т. е. не зависит от умножения тройки однородных координат на ненулевой множитель.

По той же теореме из линейной алгебры, которой мы пользовались, когда говорили о поверхностях, существует такая проективная замена координат, что в новой системе уравнение примет вид

$$q'(x') = \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2 + \lambda_3(x'_3)^2 = 0.$$

В зависимости от знаков λ_i возможны пять случаев:

$\boxed{1}$ λ_1 и λ_2 одного знака, а λ_3 — противоположного, заменой базиса уравнение приводится к виду $(x''_1)^2 + (x''_2)^2 - (x''_3)^2 = 0$.

$\boxed{2}$ все λ_i одного знака, уравнение приводится к виду

$$(x''_1)^2 + (x''_2)^2 + (x''_3)^2 = 0.$$

$\boxed{3}$ $\lambda_3 = 0$, а λ_1 и λ_2 разных знаков, тогда $(x''_1)^2 - (x''_2)^2 = 0$.

$\boxed{4}$ $\lambda_3 = 0$, а λ_1 и λ_2 одного знака, тогда $(x''_1)^2 + (x''_2)^2 = 0$.

$\boxed{5}$ $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, тогда $(x''_1)^2 = 0$.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 9.28. *Существует система однородных координат, в которой данная кривая второго порядка имеет один из следующих видов:*

$\boxed{1}$	$(x_1)^2 + (x_2)^2 - (x_3)^2 = 0$	(овал)
$\boxed{2}$	$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 0$	(мнимый овал)
$\boxed{3}$	$(x_1)^2 - (x_2)^2 = 0$	(пара различных прямых)
$\boxed{4}$	$(x_1)^2 + (x_2)^2 = 0$	(пара мнимых прямых)
$\boxed{5}$	$(x_1)^2 = 0$	(пара совпавших прямых)

Теорема 9.29. *Существует ровно пять указанных классов эквивалентности кривых второго порядка относительно проективных преобразований.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы нужно только показать, что кривые из разных классов неэквивалентны. Это следует сразу из того, что прямые переходят в прямые и что ранг матрицы сохраняется. □

Замечание 9.30. Как мы уже видели, аффинное преобразование — это проективное, переводящее несобственную прямую в несобственную, и ограниченное на собственные точки. Таким образом, проективные классы могут содержать несколько аффинных. Именно, овал — это эллипс, гипербола и парабола, мнимый овал — мнимый эллипс, различные прямые — параллельные или пересекающиеся прямые, аналогично для мнимых. При этом эллипс — овал, не пересекающий несобственную прямую, гипербола — овал, пересекающий несобственную прямую, парабола — овал, касающийся несобственной прямой.

9.7. **Поляритет на проективной плоскости.** Несмотря на то, что на проективной плоскости имеет место принцип двойственности, канонического соответствия между прямыми и точками не существует. Мы покажем, что если на проективной плоскости задана невырожденная квадрика, то такое отождествление возможно.

Пусть $q(x) = x^T Ax$ в некоторой системе координат, где

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x^T = (x_1, x_2, x_3), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Проективная квадрика называется *невырожденной,* если выполнено $\det A \neq 0$. В других координатах $x = Cx'$, где C — матрица замены координат,

$$q(x) = x^T Ax = x'^T C^T ACx', \quad A' = C^T AC,$$

так что определители A и A' обращаются или не обращаются в ноль одновременно. Как видно из классификации, невырожденные квадрики — действительные и мнимые овалы.

Определение 9.31. Определим *поляру точки* X с однородными координатами $(X_1 : X_2 : X_3)$ *относительно невырожденной квадрики* q как прямую с уравнением

$$x^T AX = 0, \quad X := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \quad x^T = (x_1, x_2, x_3). \tag{31}$$

Иными словами, однородные координаты $(a_1 : a_2 : a_3)$ соответствующей прямой $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ имеют вид $a = AX$, а уравнение —

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Точка X при этом называется *полюсом.*

Теорема 9.32. *Соответствие "полюс-поляра"зависит только от квадрики, и не зависит от выбора системы координат.*

Доказательство. При замене координат $X = CX'$ уравнение (31) переходит в уравнение:

$$x^T AX = x'^T C^T ACX' = x'^T A'X' = 0.$$ □

Пример 9.33. Для мнимого овала $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ имеем $A = E$ и координаты поляры $a_1 = X_1$, $a_2 = X_2$, $a_3 = X_3$, так что ее уравнение: $X_1x_1 + X_2x_2 + X_3x_3 = 0$. Таким образом, в этом случае поляра точки задается плоскостью связки, перпендикулярной прямой связки, соответствующей полюсу.

Следующая теорема дает геометрическое описание поляры.

Теорема 9.34. *Рассмотрим овал и точку X, не лежащую на нем. Для каждой секущей овала, проведенной из X, с точками пересечения A и B, рассмотрим точку $Y = Y(A, B)$, гармонически сопряженную X относительно A и B. Множество указанных точек Y лежит на одной прямой, а именно, на поляре, соответствующей полюсу X.*

Доказательство. Рассмотрим проективное преобразование, переводящее X в несобственную точку. После этого утверждение теоремы становится очевидным, поскольку точка, гармонически сопряженная бесконечно удаленной относительно концов отрезка, есть его середина. □

Поляра точки относительно коники на аффинной плоскости — частный случай проективной поляры. Чтобы в этом убедиться, вспомним уравнение $(x, y, 1)A\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ и связь между однородными и аффинными координатами. При этом несобственной точке соответствует диаметр, сопряженный соответствующему направлению (ухода на бесконечность), а центру соответствует несобственная прямая.

Таким образом, на проективной плоскости все дефекты соответствия "полюс — поляра"исчезают, и формулировки утверждений значительно упрощаются. Классический пример — это двойственность теорем Паскаля и Брианшона, которая на проективной плоскости выполняется без всяких оговорок типа условия непараллельности прямых (как, впрочем, и сами эти теоремы).

Учебное издание

Веселов Александр Петрович, Троицкий Евгений Вадимович

Лекции по аналитической геометрии

М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико–математическом факультете МГУ. 2002. – 160 с.

Подписано в печать 21.02.2002.
Формат 60×90 1/16. Объем 10 п.л.
Заказ 14. Тираж 300 экз.

Издательство ЦПИ при механико–математическом факультете МГУ
г. Москва, Воробьевы горы.
Лицензия на издательскую деятельность ИД N^o 04059
от 20.02.2001 г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета и Франко-русского центра им. А. М. Ляпунова