Интернет-журнал «Науковедение» ISSN 2223-5167 http://naukovedenie.ru/

Том 8, №5 (2016) http://naukovedenie.ru/index.php?p=vol8-5

URL статьи: http://naukovedenie.ru/PDF/73TVN516.pdf

Статья опубликована 17.11.2016.

Ссылка для цитирования этой статьи:
Талалай В.В., Кочетков А.В., Федотов П.В., Талалай М.В. Определение периода больших колебаний маятника (до 90^o) // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 8, №5 (2016) http://naukovedenie.ru/PDF/73TVN516.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 681.2.087

Талалай Виктор Вячеславович
ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Россия, Саратов
Аспирант
E-mail: talalay@bk.ru

Кочетков Андрей Викторович[1]
ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Россия, Пермь
Доктор технических наук, профессор
E-mail: soni.81@mail.ru

Федотов Петр Викторович
ООО «Научно-исследовательский центр технического регулирования», Россия, Саратов
Инженер
E-mail: klk50@mail.ru

Талалай Мария Викторовна
ООО Центр Сертификации Аккредитации (Аттестации) «Межотраслевые системы качества», Россия, Москва
Лаборант
E-mail: talalay@mail.ru

Определение периода больших колебаний маятника (до 90^o)

Аннотация. Задача определения периода больших колебаний маятника (более 20 градусов) остается еще в рамках дискуссии. В настоящей статье получено аналитическое точное решение периода колебаний физического маятника для больших угловых отклонений. Вывод уравнения величины средней скорости прохождения от положения максимального отклонения до точки равновесия был произведен авторами настоящей статьи несколькими способами. Метод решения, использованный для решения больших колебаний маятника, может быть расширен на любые нелинейные колебательные системы. В отличие от приближенных методов, приводимых в современной литературе, предлагаемый метод, при наличии исходной информации, позволяет получить точные решения нелинейных колебаний любого вида.

Ключевые слова: физический маятник; период больших колебаний; решения нелинейных колебаний общего вида; длина маятника; задача Гюйгенса; эллиптические интегралы; вывод уравнения; элементарные функции; определение гравитационной постоянной; метод итераций

---

[1] 410022, г. Саратов, ул. Азина, д. 38 «В», кв. 4

Введение. Маятник как элемент средств измерения времени известен уже на протяжении нескольких веков. До изобретения кварцевых часов маятники использовались при изготовлении самых точных астрономических часов и хронометров.

До сих пор маятник применяется как средство измерений при геофизических испытаниях. Задача определения местной силы тяжести (ускорения свободного падения) очень важна в самых различных областях деятельности человека.

Причем, законы колебаний маятника, в проведении подобных экспериментов применятся двояко. Дело в том, что эксперименты по механическому[2] определению гравитационной постоянной проводятся двумя способами: статическим и динамическом.

При статическом методе (классический метод Кавендиша) измеряют статичесое притяжение малых шаров на крутильных весах, к неподвижым большим телам. Но, для вычисления необходимо знать жесткость подвески крутильных весов. А эти сведения получают, измеряя периоды колебаний крутильных весов [7, с. 44].

При динамическом методе измеряют периоды колебаний крутильных весов при двух различных расположениях притягивающих масс [7, с. 45].

Но в обоих случаях необходимы точные знания о законах колебаний маятника.

Между тем задача определения периода больших колебаний маятника (более 20 градусов) остается еще в рамках дискуссии. Библиография по аналитическому решению этой задачи касается в основном работ [1-4].

Постановка задачи. Систематическое изучение вопроса о периоде колебаний маятника начинается с работ Гюйгенса, описанных в его мемуаре «Маятниковые часы» [1] в 1673 г. В этом мемуаре Х. Гюйгенс приводит простые методы расчета длины маятника для получения необходимых периодов. Если для малых колебаний маятника Гюйгенс обосновывает свои выводы периодов колебаний, чему посвящена целая глава мемуара Гюйгенса, то для больших углов отклонения Гюйгенс только выражается, что «С другой стороны, можно вычислить отношение периодов при разных дугах размаха, на основании строгих принципов и с любой точностью. Можно, например, показать, что время, в течение которого маятник проходит четверть окружности, относится ко времени падения по очень малой дуге, как 34:29. Это различие периодов колебаний ни в коем случае не объясняется сопротивлением воздуха, как думают некоторые, но вытекает из самой природы движения и свойств круга» [1, с. 19]. При этом Гюйгенс дает очень точное соотношение: «Это определение очень точно 34:29 = 1,172. Истинное значение равно 1,180, т.е. ошибка равна всего 0,8%. Немецкие комментаторы Гюйгенса Гекшер и Еттинген, отмечают, что Гюйгенс не указывает, как он нашел свой результат, и что полное аналитическое решение вопроса удалось только Эльвиусу в 1734 г. при помощи эллиптического интеграла» [1, с. 317].

Гюйгенс только упоминает, что он знает, как рассчитать период больших колебаний маятника, но не раскрывает своих знаний по данному вопросу. Только через 60 лет ученым удалось найти метод решения этой задачи и проверить расчеты Гюйгенса.

Характерно, что Эльвиусу (первому ученому после Гюйгенса, которому удалось решить задачу) удалось решить задачу только через эллиптические интегралы, которых Гюйгенс знать не мог. В этом состоит одна из загадок науки. Можно говорить, что, либо

[2] С недавних пор существуют атомно-интерферометрические методы измерения, но их точность пока уступают механическим методам [6] (прим. авт).

Гюйгенс предвосхитил научные знания об эллиптических интегралах, либо он знал другое решение задачи без таковых.

Полное исследование эллиптических функций и их приложение в механике предпринял Поль Аппель, результаты которого опубликованы (совместно с Е. Лакуром) [2] в 1897 г. В монографии 1897 г. П. Аппель строго доказывает, что решение дифференциального уравнения движения маятника для больших углов сводится к эллиптическим интегралам. Решение задачи определения периода больших колебаний маятника П. Аппель приводит в трехтомном издании «Traite mecanique rationnelle» [2][3], выдержавшее несколько изданий на французском, неоднократно переводившимся на другие языки в т.ч., и на русский. На русский язык труд П. Аппеля переводился дважды в 1911 и 1960 гг.

Издание 1960 г. в переводе И.Г. Малкина, под редакцией С.М. Тарга, содержит два тома П. Аппеля. В этом труде дано решение больших колебаний маятника [3, с. 515], которое в том или ином виде приводится в современной литературе.

По утверждению Semjon Adlaj многие (если не все) авторитетные источники по механике в настоящее время ссылаются на эллиптические решения данной задачи [4]. Т.о. метод решения задачи определения периода колебаний маятника при больших отклонениях путем интегрирования дифференциального уравнения движения приводит к эллиптическим интегралам. Как известно, эллиптические интегралы не позволяют получить решение в элементарных функциях, а допускают только приближенное решение методом итераций.

Обсуждение альтернативных способов решения задачи

Предлагается другой метод решения этой задачи. Если интегрирование дифференциального уравнения движения второго порядка не позволяет найти конечное решение в элементарных функциях, то интересно решить задачу в обход применения дифференциальных уравнений.

Такой способ есть. Дифференциальное уравнение дает мгновенное значение скорости в каждый период времени, но на практике в метрологических задачах часто достаточно найти полный период колебаний маятника. Если отказаться от необходимости иметь точное значение мгновенной скорости маятника и пользоваться средним значением скорости маятника за период, то необходимость в дифференциальных уравнениях отпадает.

Если нужно знать за какой период времени маятник пройдет расстояние от начальной точки *a*, до конечной точки *b*, совсем не обязательно знать с какой скоростью маятник проходил, отдельные участки внутри промежутка *ab* и какая была мгновенная скорость в каждый конкретный момент времени.

По теореме о среднем значении в интегральном исчислении, если функция *f(x)* интегрируема на участке *ab*, причем на данном участке функция сохраняет знак, то существует такое значение *f(c)*, что:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \quad . \qquad (1)$$

Следствием этой теоремы является формула (2) среднеинтегрального значения функции:

[3] Том I - 1885 год, том II - 1897 год, том III - 1901 год (прим. авт.).

$$c = \overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad , \tag{2}$$

где $c = \overline{f}$ - среднее интегральное значение функции.

Если функция на участке ab, всюду положительна, то независимо от вида функции, имея среднее значение можно вычислить значение интеграла, не прибегая к интегрированию. Если будем знать среднюю скорость за период колебаний и путь, пройденный маятником за тот же период, то можно вычислить период колебаний без необходимости интегрирования дифференциальных уравнений движения простыми алгебраическими действиями.

Условием теоремы об интегральном среднем является неизменность знака функции. Значение скорости маятника меняет знак, в первом полупериоде знак положительный, маятник движется в одну сторону, а во втором – знак скорости отрицательный, маятник движется в обратном направлении. Применять теорему о среднеинтегральном значении можно применительно к половине периода качания маятника.

Скорость в каждом полупериоде сначала нарастает, доходя до максимума при прохождении точки равновесия, т.е. ускорение положительно. Во второй четверти периода скорость уменьшается, достигая нуля в противоположной точке максимального отклонения, т.е. ускорение отрицательно. Колебания маятника делятся на четыре четверти периода, в каждой из которых закон изменения идентичен, за исключением знаков скорости и ускорения. Достаточно найти среднюю скорость маятника за одну четверть периода, а полное значение периода получить, умножая длительность одной четверти на четыре.

Метод нахождения периода маятника в элементарных функциях

Направим ось ординат вниз и сопоставим начальной точке нулевое значение ординаты. Запишем закон сохранения энергии для физического маятника (см. рис):

$$\frac{mv^2}{2} = mgh \quad , \tag{3}$$

где: m - масса тела; g - ускорение свободного падения; h - высота подъема ц.м. над положением равновесия; v - скорость движения центра масс:

Получаем:

$$v = \sqrt{2gh} \, . \tag{4}$$

Подставим в (4) $h = R(1 - \cos\alpha)$, получим формулу мгновенного значения скорости центра масс:

$$v(\alpha) = \sqrt{2gR(1 - \cos\alpha)} \, . \tag{5}$$

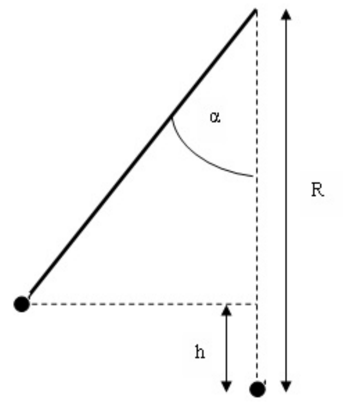

Рисунок. *Физический маятник (рис. авторов)*

Между тем в пределах $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ функция cos(α) монотонно уменьшается в пределах от 1 при $\alpha = 0$, т.к. $cos(0)=1$, до 0 при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т.к. $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Согласно формуле (5) максимум скорости должен быть в начальной точке α_{max}, а в точке равновесия $\alpha = 0$ будет абсолютный минимум. Чтобы привести ситуацию в соответствие с краевыми условиями необходимо применить операцию нормировки, чтобы максимум скорости соответствовал точке равновесия. Операция, которая приведет к желаемым результатам – это сдвиг точки отсчета угла отклонения на $\frac{\pi}{2}$. В этом случае уравнение (5) перепишется в виде:

$$v(\alpha) = \sqrt{2gR\left(1 - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)} = \sqrt{2gR\left(1 - \sin(\alpha)\right)}.$$

Найдем среднее интегральное значение скорости на участке первой четверти периода качания маятника от начального положения при максимальном отклонении до точки равновесия (см. рис.).

$$v_{cp} = \int_0^{a_{\max}} v(\alpha)\,d\alpha, \qquad (6)$$

где: $v(\alpha)$ - мгновенное значение скорости центра масс; α - угол отклонения центра масс маятника.

Подставим (5) в (6):

$$v_{cp} = \int_{a_{\max}}^{0} \sqrt{2gR(1 - \sin\alpha)}\,d\alpha = \sqrt{2gR}\int_{a_{\max}}^{0} \sqrt{1 - \sin\alpha}\,d\alpha. \qquad (7)$$

Найдем интеграл:

$$\int \sqrt{1 - \sin\alpha}\,d\alpha. \qquad (8)$$

Заменой:

$$t = 1 - \sin\alpha \text{ и } \alpha = \arcsin(1 - t), \tag{9}$$

получим:

$$d\alpha = -\frac{1}{\sqrt{t(2-t)}}dt. \tag{10}$$

Подставим (9) и (10) в (8):

$$\int\sqrt{1-\sin\alpha}\,d\alpha = \int\frac{-\sqrt{t}}{\sqrt{t(2-t)}}dt = \int\frac{-1}{\sqrt{2-t}}dt.$$

Заменой $z = 2 - t$ или $t = 2 - z$ задача сводится к табличному интегралу:

$$\int\frac{-1}{\sqrt{2-t}}dt = 2\sqrt{2-t} + C.$$

Подставляя пс t из (8) получим:

$$\int\sqrt{1-\sin\alpha}\,d\alpha = 2\sqrt{2-1+\sin\alpha} = 2\sqrt{1+\sin\alpha} + C. \tag{11}$$

Используя первообразную интеграла, найдем среднюю скорость в первой четверти периода качания маятника. Из (7) и (11) имеем:

$$\sqrt{2gR}\int_0^{\alpha_{\max}}\sqrt{1-\sin\alpha}\,d\alpha = 2\sqrt{2gR}*\sqrt{1+\sin\alpha}\Big|_0^{\alpha_{\max}} = 2\sqrt{2gR}\left(\sqrt{1+\sin\alpha_{\max}}-1\right).$$

Тогда:

$$v_{cp} = 2\sqrt{2gR}\left(\sqrt{1+\sin\alpha_{\max}}-1\right). \tag{12}$$

Вывод этого уравнения величины средней скорости прохождения от положения максимального отклонения до точки равновесия был произведен авторами настоящей статьи несколькими способами [8].

Скорости после точки равновесия до противоположного положения максимума будут зеркальными, т.е. если в первой четверти колебания маятник разгоняется от 0 до v_{max}, то следующую четверть периода скорость уменьшается зеркально, от v_{max} до 0. При достижении второй точки максимума отклонения закончится вторая четверть колебаний.

В силу изотропности пространства вторая половина колебания (третья и четвертая четверти) полностью повторяет первую половину периода колебаний. Полученное выражение (12) позволяет определить период колебаний маятника:

$$T = \frac{S}{v_{cp}}, \tag{13}$$

где: T – период колебаний; S – пройденный путь; v_{cp} – средняя скорость за период.

Длина дуги центрального угла φ определяется по формуле:

$$S = R\varphi \tag{14}$$

Т.е. время прохождения маятником дуги с углом φ равно:

$$T = \frac{S}{v_{cp}} = \frac{R\varphi}{2\sqrt{2gR}\left(\sqrt{1+\sin\varphi}-1\right)} = \frac{\varphi\sqrt{R}}{2\sqrt{2g}\left(\sqrt{1+\sin\varphi}-1\right)}. \quad (15)$$

Путь, пройденный за полный период, определяется по формуле:

$$S = 4R\alpha_{\max}, \quad (16)$$

здесь: R – радиус центра масс маятника; $\alpha_{\max}$ – максимальный угол отклонения маятника, рад; 4 – коэффициент, присутствующий в связи с тем, что произведение $R\alpha_{\max}$ определяет путь, пройденный за ¼ периода колебаний маятника.

Подставив в (13) уравнения (12) и (16) получим:

$$T = \frac{S}{v_{cp}} = \frac{\alpha_{\max}\sqrt{2R}}{\sqrt{g}\left(\sqrt{1+\sin\alpha_{\max}}-1\right)}. \quad (17)$$

Это период полных колебаний физического маятника при условии, что $0 \le \alpha_{\max} \le \frac{\pi}{2}$.

В последней формуле вместо радиуса качания маятника стоит приводить длину маятника, как это принято в современной литературе.

Обсуждение полученных результатов. Гюйгенс в своем трактате не приводит методику решения задачи для больших колебаний маятника, однако он приводит конкретную цифру.

По утверждению Гюйгенса отношение времени падения маятника, начиная с угла $\frac{\pi}{2}$, ко времени падения от малого угла соотносится как 34:29 [1, с. 19] или 1:1,1724. В примечании к трактату Гюйгенса сказано, что значение, полученное из решения эллиптических интегралов, равно 1,180 [1, с. 317].

Сравним с нашим решением. Согласно современным источникам период малых колебаний маятника:

$$T^{м} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Отсюда можно определить время падения маятника, начиная с малого угла отклонения оно будет равно одной четверти периода маятника, или: $T^{м}_{1/4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Согласно уравнению (18) время падения маятника, начиная с угла $\frac{\pi}{2}$ равно

$$T^{б}_{1/4} = \frac{\pi\sqrt{L}}{4\sqrt{2g}\left(\sqrt{2}-1\right)}.$$

Найдем отношение:

$$\frac{\pi\sqrt{L}}{4\sqrt{2g}\left(\sqrt{2}-1\right)} : \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)} \approx 1:1{,}1716.$$

Полученное значение отличается от значения, указанного Гюйгенсом на 0,07%, а от решения эллиптических интегралов - на 0,72%.

Полученное решение на порядок ближе к численному значению, указанному Гюйгенсом, чем к решению эллиптических интегралов, которое в настоящее время считается точным.

Общий метод решения задач нелинейных колебаний

Предложенный метод не ограничивается решением задачи колебаний маятника. Дело в том, что колебания физического маятника являются нелинейными, именно в этом и состояла сложность решения этой задачи. Предложенный «метод средних значений за период» позволяет решать аналогичные задачи для любых колебательных систем, совершающих свободные нелинейные колебания.

Проблема состоит в том, что крайне редки системы, совершающие линейные гармонические колебания. Необходимо помнить, что закон Гука, описывающий линейную зависимость отклонения системы от равновесного положения от внешней силы, является не всеобщим законом природы, а упрощенным приближением.

В реальности, например, в законе Гука:

$$F = k*x;$$

где: F – возмущающая сила; k – коэффициент пропорциональности, коэффициент жесткости; x – отклонение от равновесного положения.

Коэффициент жесткости k, является не постоянной величиной, а переменной зависящей от нелинейных свойств системы. Только для малых отклонений можно условно считать коэффициент жесткости постоянной величиной. Т.е. ситуация полностью повторяет картину с колебаниями физического маятника, когда для малых отклонений маятника можно приближенно считать гармоническими и получать решения колебаний физического маятника, но только для малых колебаний.

Поэтому простые решения гармонических колебаний, приводимые во всех учебниках по элементарной физике, являются упрощенными и выполняются только при обязательном условии малости колебаний. Предлагаемый же метод позволяет уйти от упрощения (линеаризации) решения и получать решения для любых колебаний и, главное, для нелинейных (не гармонических).

Кратко опишем сущность метода.

Если для какой-то нелинейной колебательной системы известна амплитуда колебаний и энергия колебания, то всегда можно определить пиковую (максимальную) скорость за время колебания и период колебаний (частоту). Свободные колебания любой механической системы определяются законом сохранения механической энергии. Т.е., максимум кинетической энергии всегда будет наблюдаться в точке минимума потенциальной энергии. А минимум кинетической энергии будет наблюдаться в точке максимума потенциальной энергии. Тем самым максимум скорости будет наблюдаться в точке равновесия и определяться разностью максимальной и минимальной потенциальной энергии. Так как потенциальная энергия определяется силами, отклоняющими систему от положения равновесия, то, зная величину силы, можно определить потенциальную энергию колебаний. Величина потенциальной энергии определяет максимальную величину кинетической энергии, а значит и величину максимальной скорости. Знание амплитуды максимального отклонения системы от положения равновесия позволит определить период колебаний (частоту) по методике, изложенной выше.

В современной литературе частоту колебаний определяют сложными методами решения нелинейных дифференциальных уравнений, не имеющих строго аналитических решений, поэтому решения получаются приближенными [5, с. 256]. Т.к., решения получаются неточными, другими они не могут получаться, то применяются методы статистики «Метод статистической линеаризации является одним из наиболее распространенных способов приближенного исследования нелинейных систем» [5, с. 261].

Предлагаемый метод при наличии исходной информации позволяет получить точные решения нелинейных колебаний любого вида.

Выводы. Областью применения настоящей статьи является теоретическое решение задач определения параметров нелинейных колебаний в общем виде, безотносительно вида нелинейностей.

В частном случае этот метод позволяет определить период больших колебаний маятника в тех случаях, когда ограничение амплитуды малыми колебаниями либо методически невозможно, например, в экспериментах по определению гравитационной постоянной, либо технологически сложно.

В последнем случае имеется в виду следующее: для обеспечения больших периодов колебаний при условии обеспечения «малых колебаний» необходимо увеличивать длину маятника, так как это сделано для маятника Фуко в Исакиевском соборе (и аналогичных). Снятие ограничения на угол отклонения маятника позволит существенно уменьшить размеры устройства.

В общем случае изложенный метод позволит решать задачи определения параметров свободных колебаний системы любой сложности. Безусловно, имеются решения определения периода больших колебаний с применением эллиптических интегралов, но эти методы требуют повышенных вычислительных мощностей, а предлагаемое аналитическое решение этого не требует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гюйгенс Х. Три мемуара по механике. - М.: АН СССР, 1951.
2. Appell P. and Lacour E. Principes de la Theorie des Fonctions Elliptiques et Applications, Gauthier-Villars, Paris, 1897.
3. Аппель П. Теоретическая механика. В 2-х томах. Т. 1. - М.: Физматгиз. 1960.
4. Adlaj S. An eloquent formula for the perimeter of an ellipse / Notices of the AMS 59(8), pp. 1096-1097.
5. Динамический расчет зданий и сооружений (Справочник проектировщика) / М.Ф. Барштейн, В.А. Ильичев, Б.Г. Коренев и др.; под ред. Б.Г. Коренева, И.М. Рабиновича. – М.: Стройиздат. 1984. 303 с.
6. Иванов И. Новые измерения гравитационной постоянной еще сильнее запутывают ситуацию // Интернет-ресурс http://elementy.ru/news?newsid=432079.
7. Сагитов М.У. Постоянная тяготения и масса Земли. – М.: Наука. 1969. 188 с.
8. Кочетков А.В., Челпанов И.Б., Федотов П.В. Определение периода больших колебаний маятника в элементарных функциях // Измерительная техника. 2016. №6. С. 39-41.

Talalai Victor Vyacheslavovich
Saratov state technical university of Gagarin Yu.A., Russia, Saratov
E-mail: talalay@bk.ru

Kochetkov Andrey Viktorovich
Perm national research polytechnical university, Russia, Perm
E-mail: soni.81@mail.ru

Fedotov Petr Viktorovich
JSC research center of technical regulation, Russia, Saratov
E-mail: klk50@mail.ru

Talalai Mariya Viktorovna
Centr Certification Accreditation (Assessment) «Intersectoral system quality», Russia, Moskva
E-mail: talalay@mail.ru

Definition of the period of big fluctuations of the pendulum (to 90^{O})

Abstract. The problem of definition of the period of big fluctuations of a pendulum (more than 20 degrees) remains even within discussion. In the present article the analytical exact solution of the period of fluctuations of a physical pendulum for big angular deviations is received. The conclusion of the equation of size of average speed of passing from the provision of the maximum deviation to a point of balance was made by authors of the present article in several ways.

The decision method used for the solution of big fluctuations of a pendulum can be expanded on any nonlinear oscillatory systems. Unlike the approximate methods given in modern literature, the offered method in the presence of initial information, allows to receive exact solutions of nonlinear fluctuations of any kind.

Keywords: physical pendulum; period of big fluctuations; solutions of nonlinear fluctuations of a general view; pendulum length; Huygens's task; elliptic integrals; equation conclusion; elementary functions; definition of a gravitational constant; method of iterations