Альфред С. Позаментье
Роберт Геретшлегер

ЖЕМЧУЖИНЫ ГЕОМЕТРИИ



ОКРУЖНОСТИ

ДМК ПРЕСС
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Альфред С. Позаментье, Роберт Геретшлегер

Жемчужины геометрии

Окружности

GEOMETRIC GEMS

Volume III: The Wonders of Circles

Alfred S. Posamentier,
Robert Geretschläger

World Scientific

NEW JERSEY • LONDON • SINGAPORE • BEIJING • SHANGHAI • HONG KONG • TAIPEI • CHENNAI • TOKYO

ЖЕМЧУЖИНЫ ГЕОМЕТРИИ

Окружности

Альфред С. Позаментье,
Роберт Геретшлегер

ДМК Пресс
издательство
Москва, 2026

УДК 514.112.4
ББК 22.151.0
П47

Позаментье А. С., Геретшлегер Р.
П47 Жемчужины геометрии. Окружности / пер. с англ. В. И. Бахура. – М.: ДМК Пресс, 2026. – 240 с.: ил.

ISBN 978-5-93700-446-8

Планарная геометрия полна чудес, о которых нам почти не рассказывают на уроках в школе. Даже такая простая фигура, как окружность, способна удивить нас неожиданными фактами и закономерностями и дать богатую пищу для размышлений. В этой книге собрана одна из самых больших коллекций любопытных фактов и курьезов, связанных с окружностями. Исследуя многочисленные неожиданные взаимосвязи, читатели еще больше полюбят геометрию.

Книга рассчитана на широкую аудиторию читателей и будет полезна преподавателям математики. Для понимания доказательств и пояснений достаточно знания основ школьной геометрии.

УДК 514.112.4
ББК 22.151.0

All rights reserved. This book, or parts thereof, may not be reproduced in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or any information storage and retrieval system now known or to be invented, without written permission from the Publisher.

Russian translation arranged with World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-9-81129-413-6 (англ.)

ISBN 978-5-93700-446-8 (рус.)

© Copyright © 2025 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
© Перевод, оформление, издание, ДМК Пресс, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

https://t.me/it_boooks/2

От издательства 14
Об авторах 15
Благодарности 19
Введение 20

Часть 1. Любопытные факты об окружности: введение в тему 22
Пример 1. Треугольник определяет окружность 23
Пример 2. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу в точке касания 24
Пример 3. Касательные к окружности, проходящие через одну и ту же точку, имеют одинаковую длину 24
Пример 4. Угол между касательными к окружности, проходящими через одну и ту же точку, дополняет угол между пересекающимися дугами 25
Пример 5. Угол между касательной к окружности и хордой 26
Пример 6. Угол, образованный двумя хордами окружности 26
Пример 7. Неожиданные дополнительные углы 27
Пример 8. Угол, образованный касательной и секущей 27
Пример 9. Угол, образованный двумя секущими 28
Пример 10. Деление угла на три равные части с помощью окружности 28
Пример 11. Весьма удивительное равенство 29
Пример 12. Необычное положение параллельных линий 30
Пример 13. Неожиданные взаимно дополняющие углы в окружности 30
Пример 14. Удивительное равенство квадратов в окружности 31
Пример 15. Удивительная окружность, образующая знакомый треугольник 32
Пример 16. Удивительная перпендикулярность 32
Пример 17. Неожиданные конциклические точки 33
Пример 18. Хорды окружности образуют постоянную сумму углов 33
Пример 19. Окружность помогает разделить отрезок на две равные части 34
Пример 20. Знаменитое соотношение «бабочки» 35

Пример 21. Окружность неожиданно образует параллельные прямые 36
Пример 22. Неожиданная константа для любой точки на окружности 36
Пример 23. Касательные к окружности образуют перпендикулярные линии и пропорциональные отрезки 37
Пример 24. Неожиданный диаметр окружности 38
Пример 25. Неожиданный прямоугольник в окружности 38
Пример 26. Параллельные биссектрисы углов 39
Пример 27. Интересные перпендикуляры на полуокружности 40
Пример 28. Неожиданная биссектриса угла на полуокружности 40
Пример 29. Касательные окружности к полуокружности 40
Пример 30. Точка на описанной окружности равнобедренного треугольника 41
Пример 31. Точка на описанной окружности квадрата 42
Пример 32. Точка на описанной окружности правильного пятиугольника 42
Пример 33. Точка на окружности, описываемой правильным шестиугольником 43
Пример 34. Касательная к описанной окружности равностороннего треугольника 43
Пример 35. Удивительные конциклические точки 44
Пример 36. Середины дуг окружности образуют неожиданные параллели 45
Пример 37. Описанная окружность и высоты треугольника выражают необычное равенство 46
Пример 38. Неожиданная связь между серединой стороны остроугольного треугольника, его центром описанной окружности и ортоцентром 46
Пример 39. Неожиданное совпадение с описанной окружностью треугольника 47
Пример 40. Неожиданная биссектриса угла, скрытая вписанной окружностью 48
Пример 41. Удивительные конциклические точки, образуемые треугольником и его описанной окружностью 48
Пример 42. Неожиданные точки, лежащие на одной окружности 49
Пример 43. Ортоцентр и две вершины треугольника образуют окружность, равную описанной окружности 50
Пример 44. Образование неожиданного равнобедренного треугольника 50
Пример 45. Неожиданные параллели, проходящие через точки на окружности 51
Пример 46. Касательные к описанной окружности треугольника 52
Пример 47. Касательные к окружности с девятью точками 52
Пример 48. Чудеса вписанной окружности треугольника и особой описанной окружности 53
Пример 49. Чудеса с описанными и вписанными окружностями треугольника 54
Пример 50. Другие чудеса с описанными и вписанными окружностями треугольника 55
Пример 51. Как четыре центра треугольника образуют необычный циклический четырехугольник 56
Пример 52. Радиусы вписанной и описанной окружностей определяют площадь прямоугольника 57

Пример 53. Описанная и вписанная окружности образуют три отрезка равной длины 58
Пример 54. Три окружности с неожиданной общей точкой 58
Пример 55. Знаменитая окружность Конвея 59
Пример 56. Удивительная коллинеарность с центром внутренней окружности треугольника: лемма Саваямы 60
Пример 57. Удивительная взаимосвязь между четырьмя касательными окружностями треугольника 60
Пример 58. Две касательные окружности образуют неожиданный прямой угол 61
Пример 59. Неожиданный диаметр окружности 62
Пример 60. Удвоение расстояния между центрами 62
Пример 61. Касательные окружности образуют окружность касательно оси центров 63
Пример 62. Неожиданная биссектриса угла, построенная внешними касательными окружностями 63
Пример 63. Неожиданные параллельные хорды внешних касательных окружностей 64
Пример 64. Удивительная параллельность касательных к внешне касательным окружностям 64
Пример 65. Две внешне касательные окружности образуют отрезок, равный половине длины отрезка между их центрами 65
Пример 66. Необычайно удивительная постоянная длина касательной 66
Пример 67. Две окружности неожиданно образуют параллельные прямые 66
Пример 68. Две окружности образуют биссектрису угла 67
Пример 69. Касательные окружности образуют необычные произведения линий 68
Пример 70. Равные углы на внутренних касательных окружностях 68
Пример 71. Невероятные длины касательных на касательных окружностях 69
Пример 72. Симметричные равные углы 69
Пример 73. Удивительный результат перемещения 70
Пример 74. Полуокружности – арбелос 71
Пример 75. Биссектриса арбелоса 71
Пример 76. Подробнее о точке равного деления арбелоса 72
Пример 77. И еще об арбелосе 72
Пример 78. Еще один сюрприз арбелоса 73
Пример 79. Дополнительные забавы с арбелосом 73
Пример 80. Удивительное равенство площадей, созданное с помощью полуокружностей 74
Пример 81. Еще одно удивительное равенство площадей, созданное полуокружностями 74
Пример 82. Удивительное деление кривой на две равные части 75
Пример 83. Неожиданное деление пополам 76
Пример 84. Двойная функция точки, связанной с окружностью 76
Пример 85. Три окружности с двумя общими точками образуют неожиданную окружность 77
Пример 86. Пересекающиеся окружности создают пять конциклических точек 78

Пример 87. Конциклические центры трех связанных окружностей 78
Пример 88. Две неравные окружности, вопреки логике,
образуют две равные окружности 79
Пример 89. Свойство угла точки Микеля треугольника 80
Пример 90. Еще несколько слов о соотношении Микеля 81
Пример 91. Три пересекающиеся окружности образуют
подобные треугольники и не только 82
Пример 92. Равные окружности, построенные
из трех равных окружностей с общей точкой 83
Пример 93. Построение конгруэнтных фигур с помощью
трех равных окружностей с общей точкой 83
Пример 94. Интересные свойства пересекающихся окружностей 84
Пример 95. Четыре равные окружности образуют четырехугольник,
описываемый окружностью 85
Пример 96. Треугольник Рело 85
Пример 97. Еще несколько фигур с постоянной шириной 86
Пример 98. Определение радикальной оси пересекающихся окружностей 87
Пример 99. Радикальная ось касательных окружностей 88
Пример 100. Радикальная ось внешних непересекающихся окружностей 88
Пример 101. Радикальная ось внутренних непересекающихся окружностей 89
Пример 102. Совпадение пересекающихся окружностей 90
Пример 103. Радикальный центр трех окружностей 90
Пример 104. Удивительный результат для случайно
выбранной точки вне окружности 91
Пример 105. Неожиданные точки на касательной к окружности 92
Пример 106. Точки на секущей определяют точки
на особой вписанной окружности 92
Пример 107. Внешняя окружность образует внутреннюю окружность 93
Пример 108. Две окружности образуют конциклические точки 94
Пример 109. Построение полуокружностей на сторонах квадрата 94
Пример 110. Две окружности образуют неожиданный
равносторонний треугольник 95
Пример 111. Две равные окружности образуют
равнобедренный треугольник 96
Пример 112. Две одинаковые окружности образуют
другой равнобедренный треугольник 96
Пример 113. Неожиданная биссектриса угла 97
Пример 114. Удивительное равенство углов в пересекающихся окружностях 97
Пример 115. Циклический четырехугольник образует
две окружности с перпендикулярными радиусами 98
Пример 116. Окружности, образующие равенство,
казалось бы, несвязанных отрезков 98
Пример 117. Связанные равносторонние треугольники,
вписанные в концентрические окружности 99
Пример 118. Пересекающиеся окружности удивительным
образом формируют равные отрезки 100
Пример 119. Две пересекающиеся окружности образуют
неожиданное соотношение отрезков 100

Пример 120. Четырехугольник с двумя пересекающимися окружностями образует еще одну окружность ... 101
Пример 121. Прерванная хорда ... 102
Пример 122. Касательные образуют равные отрезки ... 102
Пример 123. Четвертый угол прямоугольника находится на особой окружности ... 103
Пример 124. Построение равных хорд на двух окружностях ... 103
Пример 125. Необычное построение биссектрисы угла ... 104
Пример 126. Квадрат из двух окружностей с неожиданной площадью ... 105
Пример 127. Неожиданный центр описанной окружности ... 105
Пример 128. Хорды постоянной длины ... 106
Пример 129. Неожиданное равенство двух особенных хорд ... 107
Пример 130. Удивительная общая точка трех окружностей ... 107
Пример 131. Перпендикулярные окружности образуют диаметр ... 108

Часть 2. Доказательства примеров ... 110

Пример 1. Треугольник определяет окружность ... 110
Пример 2. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу в точке касания ... 111
Пример 3. Касательные к окружности, проходящие через одну и ту же точку, имеют одинаковую длину ... 112
Пример 4. Угол между касательными к окружности, проходящими через одну и ту же точку, дополняет угол между пересекающимися дугами ... 112
Пример 5. Угол между касательной к окружности и хордой ... 113
Пример 6. Угол, образованный двумя хордами окружности ... 114
Пример 7. Неожиданные дополнительные углы ... 114
Пример 8. Угол, образованный касательной и секущей ... 115
Пример 9. Угол, образованный двумя секущими ... 116
Пример 10. Деление угла на три равные части с помощью окружности ... 116
Пример 11. Весьма удивительное равенство ... 117
Пример 12. Необычное положение параллельных линий ... 118
Пример 13. Неожиданные взаимно дополняющие углы в окружности ... 118
Пример 14. Удивительное равенство квадратов в окружности ... 119
Пример 15. Удивительная окружность, образующая знакомый треугольник ... 120
Пример 16. Удивительная перпендикулярность ... 121
Пример 17. Неожиданные конциклические точки ... 121
Пример 18. Хорды окружности образуют постоянную сумму углов ... 122
Пример 19. Окружность помогает разделить отрезок на две равные части ... 122
Пример 20. Знаменитое соотношение «бабочки» ... 123
Пример 21. Окружность неожиданно образует параллельные прямые ... 124
Пример 22. Неожиданная константа для любой точки на окружности ... 125
Пример 23. Касательные к окружности образуют перпендикулярные линии и пропорциональные отрезки ... 126
Пример 24. Неожиданный диаметр окружности ... 127
Пример 25. Неожиданный прямоугольник в окружности ... 127
Пример 26. Параллельные биссектрисы углов ... 128
Пример 27. Интересные перпендикуляры на полуокружности ... 129

Пример 28. Неожиданная биссектриса угла на полуокружности 130
Пример 29. Касательные окружности к полуокружности 130
Пример 30. Точка на описанной окружности
равнобедренного треугольника 131
Пример 31. Точка на описанной окружности квадрата 132
Пример 32. Точка на описанной окружности
правильного пятиугольника 132
Пример 33. Точка на окружности, описываемой правильным
шестиугольником 133
Пример 34. Касательная к описанной окружности равностороннего
треугольника 134
Пример 35. Удивительные концикличесские точки 135
Пример 36. Середины дуг окружности образуют неожиданные параллели 136
Пример 37. Описанная окружность и высоты
треугольника выражают необычное равенство 137
Пример 38. Неожиданная связь между серединой стороны
остроугольного треугольника, его центром описанной
окружности и ортоцентром 138
Пример 39. Неожиданное совпадение с описанной
окружностью треугольника 139
Пример 40. Неожиданная биссектриса угла,
скрытая вписанной окружностью 140
Пример 41. Удивительные концикличесские точки,
образуемые треугольником и его описанной окружностью 141
Пример 42. Неожиданные точки, лежащие на одной окружности 142
Пример 43. Ортоцентр и две вершины треугольника образуют
окружность, равную описанной окружности 143
Пример 44. Образование неожиданного равнобедренного треугольника 144
Пример 45. Неожиданные параллели, проходящие
через точки на окружности 145
Пример 46. Касательные к описанной окружности треугольника 146
Пример 47. Касательные к окружности с девятью точками 146
Пример 48. Чудеса вписанной окружности треугольника
и особой описанной окружности 148
Пример 49. Чудеса с описанными и вписанными
окружностями треугольника 148
Пример 50. Другие чудеса с описанными и вписанными
окружностями треугольника 149
Пример 51. Как четыре центра треугольника образуют
необычный циклический четырехугольник 150
Пример 52. Радиусы вписанной и описанной окружностей
определяют площадь прямоугольника 152
Пример 53. Описанная и вписанная окружности образуют
три отрезка равной длины 153
Пример 54. Три окружности с неожиданной общей точкой 153
Пример 55. Знаменитая окружность Конвея 155
Пример 56. Удивительная коллинеарность с центром
внутренней окружности треугольника: лемма Саваямы 156

Пример 57. Удивительная взаимосвязь между
четырьмя касательными окружностями треугольника 157
Пример 58. Две касательные окружности образуют
неожиданный прямой угол 158
Пример 59. Неожиданный диаметр окружности 159
Пример 60. Удвоение расстояния между центрами 159
Пример 61. Касательные окружности образуют окружность
касательно оси центров 160
Пример 62. Неожиданная биссектриса угла, построенная
внешними касательными окружностями 161
Пример 63. Неожиданные параллельные хорды внешних
касательных окружностей 162
Пример 64. Удивительная параллельность касательных
к внешне касательным окружностям 162
Пример 65. Две внешне касательные окружности образуют отрезок,
равный половине длины отрезка между их центрами 163
Пример 66. Необычайно удивительная постоянная длина касательной 164
Пример 67. Две окружности неожиданно образуют
параллельные прямые 165
Пример 68. Две окружности образуют биссектрису угла 166
Пример 69. Касательные окружности образуют
необычные произведения линий 166
Пример 70. Равные углы на внутренних касательных окружностях 167
Пример 71. Невероятные длины касательных на касательных окружностях 168
Пример 72. Симметричные равные углы 170
Пример 73. Удивительный результат перемещения 171
Пример 74. Полуокружности – арбелос 172
Пример 75. Биссектриса арбелоса 172
Пример 76. Подробнее о точке равного деления арбелоса 173
Пример 77. И еще об арбелосе 174
Пример 78. Еще один сюрприз арбелоса 174
Пример 79. Дополнительные забавы с арбелосом 175
Пример 80. Удивительное равенство площадей, созданное
с помощью полуокружностей 176
Пример 81. Еще одно удивительное равенство площадей,
созданное полуокружностями 177
Пример 82. Удивительное деление кривой на две равные части 178
Пример 83. Неожиданное деление пополам 179
Пример 84. Двойная функция точки, связанной с окружностью 180
Пример 85. Три окружности с двумя общими точками
образуют неожиданную окружность 180
Пример 86. Пересекающиеся окружности создают пять
конциклических точек 182
Пример 87. Конциклические центры трех связанных окружностей 182
Пример 88. Две неравные окружности, вопреки логике,
образуют две равные окружности 183
Пример 89. Свойство угла точки Микеля треугольника 185
Пример 90. Еще несколько слов о соотношении Микеля 186

Пример 91. Три пересекающиеся окружности образуют подобные треугольники и не только 188
Пример 92. Равные окружности, построенные из трех равных окружностей с общей точкой 189
Пример 93. Построение конгруэнтных фигур с помощью трех равных окружностей с общей точкой 190
Пример 94. Интересные свойства пересекающихся окружностей 191
Пример 95. Четыре равные окружности образуют четырехугольник, описываемый окружностью 192
Пример 96. Треугольник Рело 193
Пример 97. Еще несколько фигур с постоянной шириной 193
Пример 98. Определение радикальной оси пересекающихся окружностей 194
Пример 99. Радикальная ось касательных окружностей 195
Пример 100. Радикальная ось внешних непересекающихся окружностей 197
Пример 101. Радикальная ось внутренних непересекающихся окружностей 198
Пример 102. Совпадение пересекающихся окружностей 198
Пример 103. Радикальный центр трех окружностей 199
Пример 104. Удивительный результат для случайно выбранной точки вне окружности 200
Пример 105. Неожиданные точки на касательной к окружности 201
Пример 106. Точки на секущей определяют точки на особой вписанной окружности 201
Пример 107. Внешняя окружность образует внутреннюю окружность 202
Пример 108. Две окружности образуют конциклические точки 202
Пример 109. Построение полуокружностей на сторонах квадрата 203
Пример 110. Две окружности образуют неожиданный равносторонний треугольник 204
Пример 111. Две равные окружности образуют равнобедренный треугольник 205
Пример 112. Две одинаковые окружности образуют другой равнобедренный треугольник 205
Пример 113. Неожиданная биссектриса угла 206
Пример 114. Удивительное равенство углов в пересекающихся окружностях 206
Пример 115. Циклический четырехугольник образует две окружности с перпендикулярными радиусами 207
Пример 116. Окружности, образующие равенство, казалось бы, несвязанных отрезков 209
Пример 117. Связанные равносторонние треугольники, вписанные в концентрические окружности 210
Пример 118. Пересекающиеся окружности удивительным образом формируют равные отрезки 211
Пример 119. Две пересекающиеся окружности образуют неожиданное соотношение отрезков 212
Пример 120. Четырехугольник с двумя пересекающимися окружностями образует еще одну окружность 213
Пример 121. Прерванная хорда 214
Пример 122. Касательные образуют равные отрезки 215

Пример 123. Четвертый угол прямоугольника
находится на особой окружности 216
Пример 124. Построение равных хорд на двух окружностях 217
Пример 125. Необычное построение биссектрисы угла 218
Пример 126. Квадрат из двух окружностей с неожиданной площадью 219
Пример 127. Неожиданный центр описанной окружности 220
Пример 128. Хорды постоянной длины 221
Пример 129. Неожиданное равенство двух особенных хорд 222
Пример 130. Удивительная общая точка трех окружностей 223
Пример 131. Перпендикулярные окружности образуют диаметр 224

Часть 3. Инструментарий 225

Введение: набор геометрических инструментов 225
A. Инструменты, с которыми вы, вероятно,
знакомы из школьного курса геометрии 226
B. Полезные и увлекательные инструменты, но менее привычные 230

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте *www.dmkpress.com*, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу *dmkpress@gmail.com*; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу *http://dmkpress.com/authors/publish_book/* или напишите в издательство по адресу *dmkpress@gmail.com*.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг, мы будем очень благодарны, если вы сообщите о ней главному редактору по адресу *dmkpress@gmail.com*. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Нарушение авторских прав

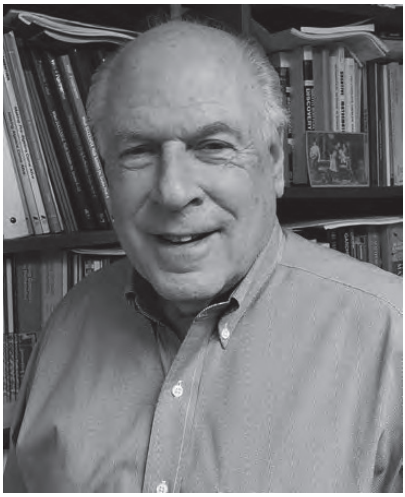
Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты *dmkpress@gmail.com*.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

ОБ АВТОРАХ

Альфред С. Позаментье



Альфред С. Позаментье (Alfred S. Posamentier) в настоящее время является заслуженным лектором в Нью-Йоркском городском колледже технологий Городского университета Нью-Йорка (New York City College of Technology of the City University of New York).

До этого он занимал должность исполнительного директора по интернационализации и финансируемым программам в Университете Лонг-Айленда, Нью-Йорк.

Ранее пять лет проработал деканом Школы образования и профессором математики в Университете Мерси, Нью-Йорк. А еще он 40 лет проработал в Городском колледже Городского университета Нью-Йорка, где в настоящее время является почетным профессором математики и почетным деканом Школы образования. Он является автором и соавтором более 80 книг по математике для учителей, учащихся средних и начальных школ, а также для широкой читательской аудитории. Доктор Позаментье также часто вы-

ступает в качестве комментатора в газетах и журналах по темам, связанным с образованием.

После получения степени бакалавра математики в Хантер-колледже Городского университета Нью-Йорка он занял должность учителя математики в средней школе имени Теодора Рузвельта (Бронкс, Нью-Йорк), где сосредоточил свое внимание на улучшении навыков решения задач у учащихся и одновременно на обогащении их обучения, выходящем далеко за рамки традиционных учебников. За шесть лет работы там он также создал первые в школе математические команды (как на младшем, так и на старшем уровнях). Он до сих пор сотрудничает с учителями математики и руководителями на национальном и международном уровнях, помогая им максимально повысить свою эффективность.

Сразу после поступления на факультет Городского колледжа Нью-Йорка в 1970 году (после получения там степени магистра в 1966 году) он начал разрабатывать курсы повышения квалификации для учителей математики средних школ, включая такие специализированные области, как занимательная математика и решение задач в математике. В качестве декана педагогического факультета Городского колледжа в течение 10 лет его интересы в области образовательных вопросов охватывали весь спектр образовательных проблем. За время своего пребывания на посту декана он вывел педагогический факультет из числа худших в рейтинге штата Нью-Йорк на первое место, получив в 2009 году безупречную аккредитацию NCATE. Он также привлек более 12 миллионов долларов от частного сектора на инновационные образовательные программы. Позаментье повторил этот успешный опыт в колледже Мерси, что позволило ему стать единственным колледжем, получившим одновременно аккредитацию NCATE и TEAC. В 1973 году Альфред Позаментье получил докторскую степень в области математического образования в Фордхэмском университете (Нью-Йорк) и с тех пор стал известен как специалист в области математического образования по Европе. Он был приглашенным профессором в нескольких европейских университетах в Австрии, Англии, Германии, Чехии, Турции и Польше.

В 1990 году он занимал должность профессора по программе Фулбрайта в Венском университете.

В 1989 году ему была присвоена почетная должность научного сотрудника в Южном университете (Лондон, Англия). В знак признания его выдающихся преподавательских заслуг Ассоциация выпускников Городского колледжа назвала его педагогом года в 1994 и 2009 годах. В Нью-Йорке 1 мая 1994 года был учрежден день в его честь президентом городского совета Нью-Йорка. В 1994 году он также был награжден Большой почетной медалью Республики Австрия, а в 1999 году, с одобрения парламента, президент Республики Австрия присвоил ему звание университетского профессора Австрии. В 2003 году ему было присвоено звание почетного члена Венского технического университета, а в 2004 году он был награжден Австрийским почетным крестом за достижения в области искусств и наук от президента Республики Австрия. В 2005 году он был включен в Зал славы выпускников Хантер-колледжа, а в 2006 году был награжден престижной

медалью Таунсенда Харриса Ассоциацией выпускников Городского колледжа. В 2009 году он был включен в Зал славы преподавателей математики штата Нью-Йорк, а в 2010 году был удостоен престижной премии Кристиана Питера Бойта от Технического университета Берлина. В 2017 году Позаментье был удостоен высшей оценки (Summa Cum Laude) от Фонда Себастьяна А. К., Мехико, Мексика.

Он занимал многочисленные важные руководящие должности в сфере математического образования на местном уровне. Был членом экспертной комиссии по экзаменам Math-A Regents при Управлении образования штата Нью-Йорк и Комитета по стандартам математики при Управлении, который пересмотрел стандарты математики для штата Нью-Йорк, а также входил в состав Консультативного совета по математике при канцлере школ Нью-Йорка.

Доктор Позаментье по-прежнему является ведущим комментатором по вопросам образования и продолжает свою давнюю страсть к поиску способов сделать математику интересной для учителей, учеников и широкой общественности, как видно из некоторых его последних книг.

Для получения дополнительной информации и списка его публикаций см.: *https://en.wikipedia.org/wiki/Alfred_S._Posamentier*.

Роберт Геретшлегер



Роберт Геретшлегер (Robert Geretschläger) в настоящее время является преподавателем в Университете Граца, Австрия (University of Graz, Austria). Он преподавал математику и геометрию, проживая в Граце, Австрия. После почти 40 лет работы в должности преподавателя в Федеральной реальной гимназии Кеплерштрассе в Граце он в 2022 году вышел на пенсию.

В настоящее время продолжает преподавать геометрию в рамках педагогического образования в Университете Граца, Австрия.

Родился в Торонто, Канада, в 1957 году, переехал в Австрию в 1972 году, где завершил образование, получив степень магистра в качестве учителя ма-

тематики средней школы со специализацией в геометрии, а затем защитил докторскую диссертацию по математике в Университете Граца.

На протяжении большей части своей карьеры он активно участвовал в организации математических соревнований всех возрастов и уровней сложности.

Среди прочих ролей в этом контексте он был руководителем австрийской команды на Международной математической олимпиаде с 2007 года и ведущим организатором Математического конкурса «Кенгуру» в Австрии с момента его основания в середине 1990-х годов. Он также отвечал за внедрение в Австрии Международного математического турнира городов и Средиземноморского математического конкурса.

На международном уровне, начиная с 2008 года, является членом Исполнительного комитета Всемирной федерации математических соревнований (WFNMC), занимая должность старшего вице-президента с 2018 по 2022 год и президента с 2022 года. Он также является давним членом международного совета Ассоциации «Кенгуру без границ» (AKSF), где в настоящее время занимает должность казначея. Читал лекции на многих международных площадках, будучи приглашенным лектором в Канаде, Австралии, Чехии, Швейцарии, Колумбии и Германии, среди прочих стран.

Он также принимал участие в ряде проектов по математическому образованию на протяжении многих лет. А еще много лет был членом Дидактической комиссии Австрийского математического общества (ÖMG) и ведущим редактором серии учебников по математике для старших классов. Роберт активно участвовал в разработке учебных программ для австрийских средних школ и сыграл активную роль на начальном этапе внедрения исследования PISA в Австрии.

Он является редактором и соавтором многочисленных книг по популярной математике, математике для решения задач (конкурсной математике) и своей особой области исследований – геометрии оригами.

Более подробная информация доступна на его веб-сайте по адресу: *www.rgeretschlaeger.com*.

БЛАГОДАРНОСТИ

Хорошо известно, что математические задачи часто имеют альтернативные пути решения. Наша цель в этой книге заключается в выборе самых элегантных и эффективных решений некоторых сложных геометрических проблем. Несколько математиков предоставили нам свои замечательные идеи. Мы благодарим Дэвида Ханкина, Морица Хиблера, Ханса Хьюминбергера и Роберта Серки за то, что поделились с нами своим опытом.

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то что все мы приобщаемся к изучению геометрических законов еще в начальной школе, не у всех из нас была возможность по-настоящему оценить всю мощь и красоту геометрии. Будь то с чисто эстетической точки зрения или как предмет, основанный на логике, геометрия может служить ключом к пониманию математики. Возможность изучать геометрию в течение целого года в средней школе в США, безусловно, расширяет кругозор учащихся. Тем не менее поскольку большая часть времени уходит на освоение базовых концепций и работу с основными принципами геометрии, на истинное понимание некоторых чудес, которые открывает этот предмет, остается не так много времени. В некоторых странах объем изучения элементарной геометрии в последние десятилетия был радикально сокращен, что соответственно сказалось на восприятии ее красоты. Даже в странах с сильной традицией преподавания геометрии в школе акцент, как правило, делается больше на технических аспектах и логике, что нередко отрицательно сказывается на признании ее визуального великолепия.

При изучении геометрических закономерностей можно обнаружить множество поразительных и удивительных явлений. Многие из них совершенно не соответствуют логике, но при этом поражают воображение. Простой пример, который иногда приводят на уроках геометрии в средней школе: если соединить последовательно середины сторон любого произвольно нарисованного четырехугольника, то всегда получится параллелограмм. Существует бесчисленное множество таких неожиданных особенностей, которые являются результатом довольно простых геометрических построений. Эта книга откроет для заинтересованных читателей мир ранее неизведанных взаимосвязей, которые вызовут у них истинное восхищение. Для просвещения читателей ко всем этим удивительным результатам добавлены евклидовы доказательства. Эти доказательства изложены максимально доступно для читателя. Безусловно, многим читателям вполне достаточно просто восхищаться результатами, не углубляясь в доказательства. Это нормально, ведь понимание доказательств ни в коей мере не требуется для восприятия этих прекрасных свойств.

Это третья и заключительная книга из трехтомной серии о великолепии геометрии, посвященная взаимосвязям в мире окружностей. Первая книга се-

рии посвящена треугольникам, а вторая – четырехугольникам. Чтобы извлечь максимальную пользу из чтения данной книги, читателю следует иметь некоторое представление об основных геометрических принципах, изучаемых в средней школе. В тех случаях, когда в доказательствах используются геометрические теоремы за пределами программы средней школы, они представлены в разделе «Инструментарий», где дается их разъяснение для большинства читателей. Не следует думать, что все эти элементы «Инструментария» выходят за рамки школьной программы, поскольку значительная часть этого раздела также повторяет многие основы курсов школьной геометрии. Одним словом, «Инструментарий» предоставляет все необходимое, что понадобится читателю для понимания доказательств из второго раздела этой книги.

Чтобы сделать ваше путешествие по книге максимально приятным и увлекательным, порядок расположения отдельных примеров довольно хаотичен, хотя есть несколько связанных между собой последовательностей, намеренно сгруппированных для демонстрации развития определенных концепций. Некоторые из этих последовательных разделов посвящены коллинеарности точек, пересечению прямых, конциклическим точкам и другим темам, на которых обычно не акцентируется внимание в школьной программе по геометрии.

Примеры, отобранные для этой книги, довольно необычны и либо были придуманы нами самими, либо встречаются в учебниках по геометрии последних двух столетий. Читателям рекомендуется сначала ознакомиться с этими примерами и по-настоящему оценить удивительные связи, которые они раскрывают. На следующем этапе заинтересованный читатель может сосредоточиться на доказательстве этих поразительных фактов, особенно после того, как он по-настоящему проникнется их чудесами. Чтобы облегчить понимание, мы постарались изложить все доказательства и дополнительные материалы в удобной для читателя форме.

Теперь мы приглашаем вас отправиться в это удивительное путешествие по многим скрытым особенностям геометрии, связанной с окружностями, которые раскрывают силу и красоту геометрии, а также логику, лежащую в ее основе. Приятного чтения!

1

ЛЮБОПЫТНЫЕ ФАКТЫ ОБ ОКРУЖНОСТИ: ВВЕДЕНИЕ В ТЕМУ

https://t.me/it_boooks/2

Чтобы начать наше исследование бесчисленных геометрических сюрпризов, которые таит в себе окружность, нам следует кратко повторить некоторые из ее самых основных свойств. Первые несколько любопытных фактов, представленных здесь, будут знакомы большинству читателей, но тем не менее они увлекательны, и очень важно понять их универсальную природу.

Без сомнения, основополагающим аспектом окружности является ее определение. Окружность *c* состоит из всех точек *P* (на плоскости), расстояние от которых до заданной точки *O* (называемой *центром окружности*) равно заданному значению *r* (называемому *радиусом окружности*), как показано на рис. А.

Это определение сразу же приводит нас к первому примеру, и вам стоит подумать о том, почему он является непосредственным следствием определения.

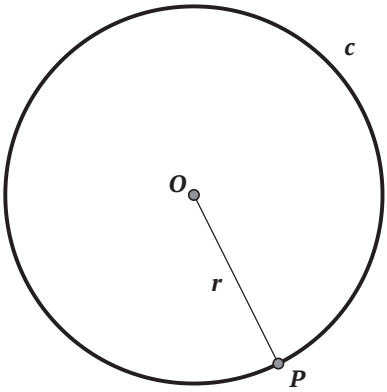


Рисунок A

Пример 1. Треугольник определяет окружность

Любые три неколлинеарные (линейно независимые) точки определяют единственную окружность. На рис. 1 мы видим три точки *A*, *B* и *C*. Независимо от того, где мы расположим эти точки, если они не лежат на одной прямой, существует единственная окружность *c*, касающаяся всех трех точек.

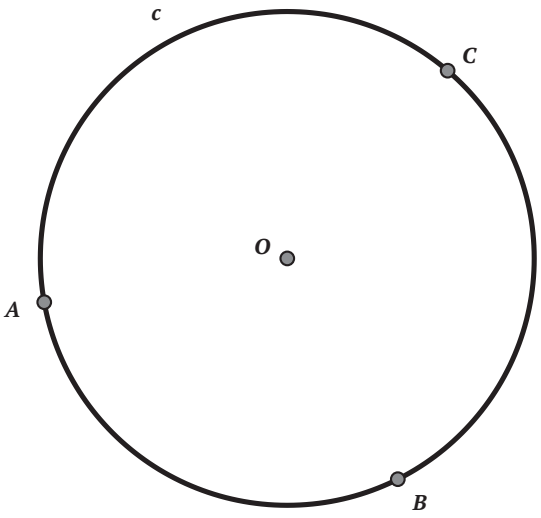


Рисунок 1

Пример 2. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу в точке касания

Касательная к окружности – это прямая, имеющая только одну общую точку с окружностью. Как показано на рис. 2, радиус, проведенный к точке *A* касания касательной к окружности *c*, перпендикулярен касательной в точке *A*.

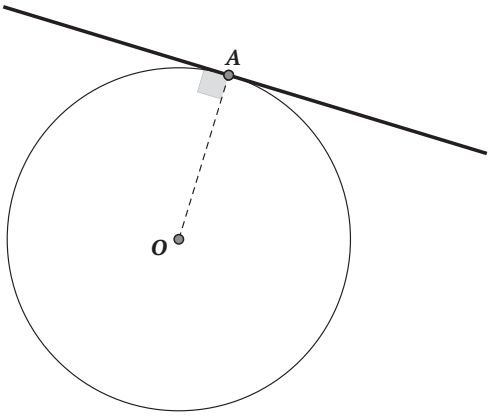


Рисунок 2

Пример 3. Касательные к окружности, проходящие через одну и ту же точку, имеют одинаковую длину

Две касательные, проведенные из одной и той же внешней точки к одной и той же окружности, имеют одинаковую длину. На рис. 3 мы видим касательные *PA* и *PB* к окружности *c* и видим, что *PA* = *PB*.

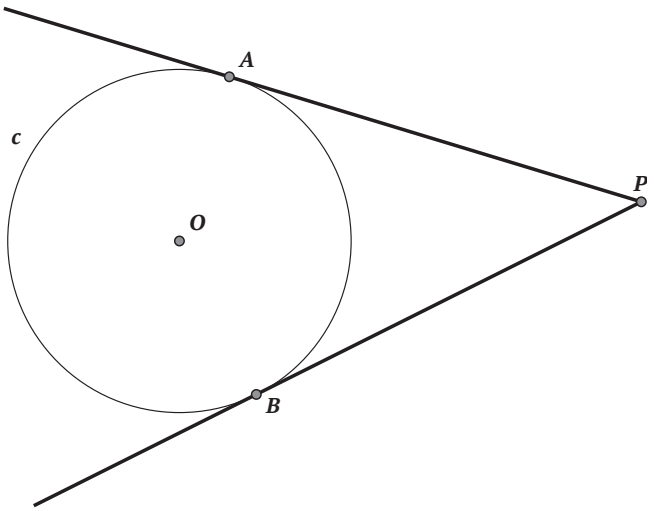


Рисунок 3

Пример 4. Угол между касательными к окружности, проходящими через одну и ту же точку, дополняет угол между пересекающимися дугами

Угол, образованный двумя касательными к окружности, проходящими через одну и ту же внешнюю точку, равен половине разности углов, образованных пересекающимися дугами. Это означает, как показано на рис. 4, что $\angle P = \frac{1}{2}$ (бóльшая $\overset{\frown}{AB}$ – малая $\overset{\frown}{AB}$). Также величина угла, образованного двумя касательными из внешней точки, дополняет величину ближайшей пересекаемой дуги, или $\angle P = 180° -$ малая $\overset{\frown}{AB}$. Это можно записать еще как $\angle APB = \frac{1}{2}((360° - \angle BOA) - \angle BOA) = 180° - \angle BOA$.

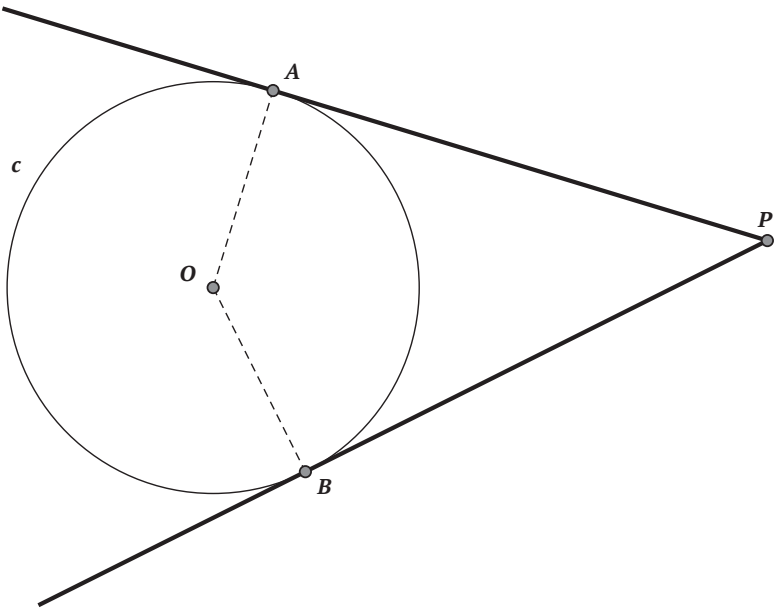


Рисунок 4

Пример 5. Угол между касательной к окружности и хордой

Угол, образованный касательной и хордой окружности, равен половине угла, образованного пересекаемой дугой. Это означает, что на рис. 5, где точка P лежит на касательной окружности c в точке B, имеем $\angle PBA = \frac{1}{2} \cdot \angle BOA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$.

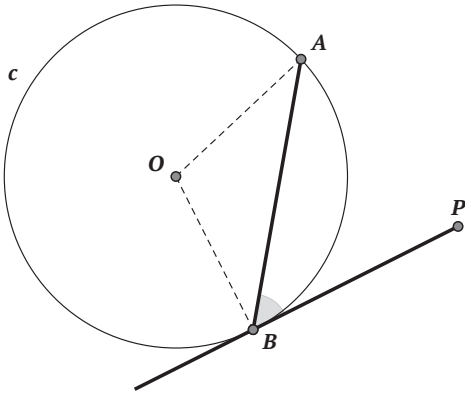


Рисунок 5

Пример 6. Угол, образованный двумя хордами окружности

Если две хорды пересекаются внутри окружности, то произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды. Для двух хорд AB и CD, пересекающихся в точке P на рис. 6, справедливо следующее: $AP \cdot BP = CP \cdot DP$. Кроме того, величина угла между двумя хордами, пересекающимися в точке внутри окружности, равна половине суммы величин дуг, пересекаемых этим углом и его вертикальным углом. Это можно записать как $\angle CPA = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$, или $\angle CPA = \frac{1}{2}(\angle COA + \angle DOB)$.

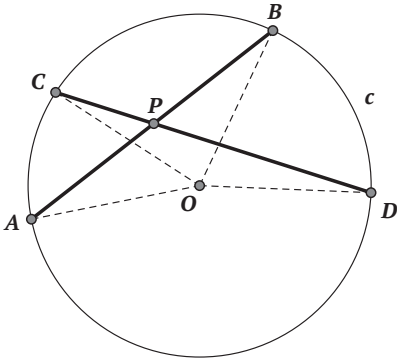


Рисунок 6

Пример 7. Неожиданные дополнительные углы

На рис. 7 окружность с центром O имеет хорды AB и CD, перпендикулярные в точке P. Примечательно, что углы $\angle AOD$ и $\angle BOC$ являются дополнительными, то есть $\angle AOD + \angle BOC = 180°$.

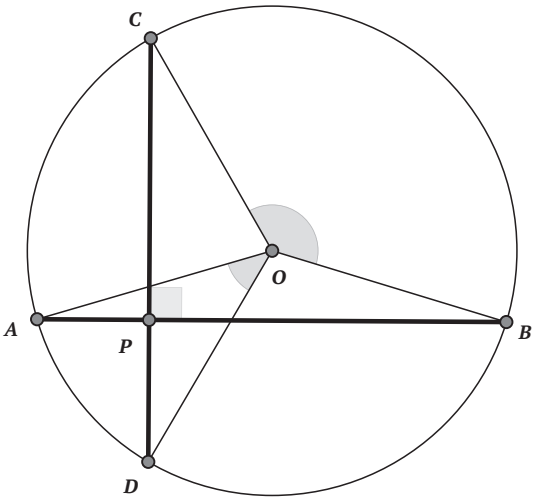


Рисунок 7

Пример 8. Угол, образованный касательной и секущей

Если из внешней точки к одной и той же окружности провести секущую линию и касательную линию, то длина касательной равна среднему пропорциональному между секущей и ее внешним отрезком. На рис. 8 касательная PA является средним пропорциональным между PB и PC, так что $\frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PC}$. Угол, образованный секущей и касательной к окружности из внешней точки, равен половине разности величин пересекаемых дуг. Это можно записать как $\angle APC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB})$, или $\angle APC = \frac{1}{2}(\angle AOC - \angle BOA)$.

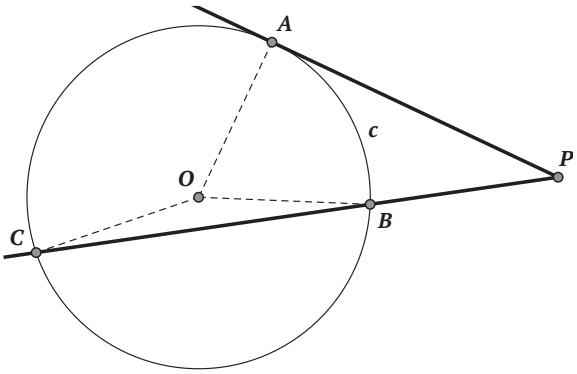


Рисунок 8

Пример 9. Угол, образованный двумя секущими

Если из внешней точки к одной и той же окружности провести две секущие, то произведение длины одной из секущих и ее внешнего отрезка равно произведению длины другой секущей и ее внешнего отрезка. На рис. 9 для двух секущих *PBA* и *PDC* выполняется следующее равенство: $AP \cdot BP = CP \cdot DP$. Угол, образованный двумя секущими линии окружности, равен половине разности углов, образованных пересекаемыми дугами. Это можно записать как $\angle CPA = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DB})$, или $\angle CPA = \frac{1}{2} \cdot (\angle COA - \angle BOD)$.

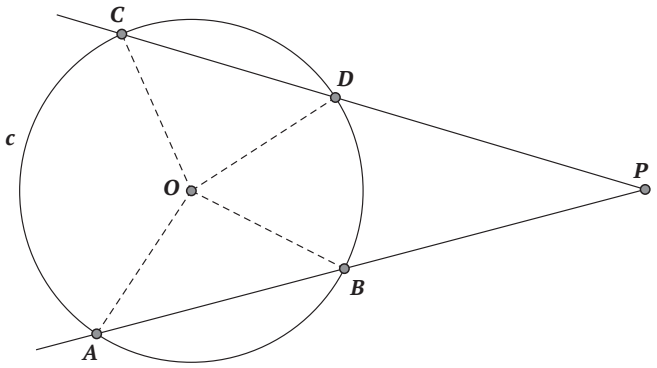


Рисунок 9

Пример 10. Деление угла на три равные части с помощью окружности

Одна из трех известных неразрешимых задач древности – деление любого угла на три равные части с помощью только линейки и циркуля. Однако мы можем делить угол на три равные части следующим образом. На рис. 10 задачей является деление угла $\angle ADE$ на три равные части, и в результате получится, что угол $\angle ABE$ равен ровно одной трети. Чтобы найти точку *B*, сначала построим окружность с центром *D* и радиусом *CD*. Затем построим отрезок *CB*, пересекающий продолжение *AD* в точке *B*, так чтобы $CD = BC$. Кроме того, продолжение *BC* должно пересекать окружность в точке *E*. В результате получается желаемое свойство: $\angle ABE = \frac{1}{3} \cdot \angle ADE$.

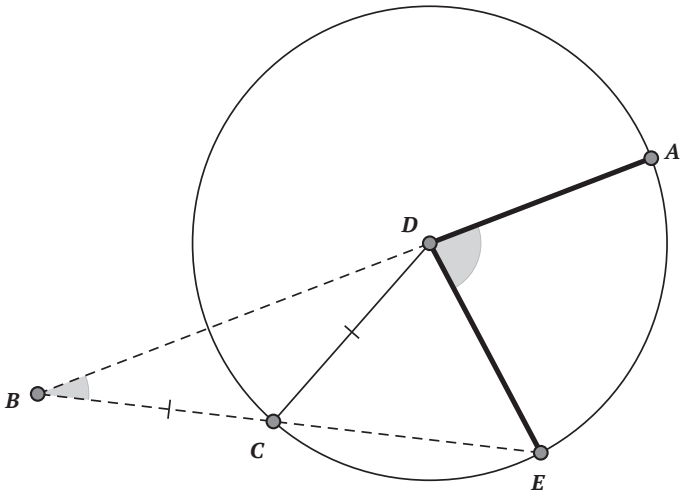


Рисунок 10

Пример 11. Весьма удивительное равенство

Перед нами очень простая и в то же время удивительная ситуация! Точки *A* и *B* лежат на окружности *O*. В точках *A* и *B* построены касательные одинаковой длины, как показано на рис. 11, где *AL* = *BK*. Если продлить *AB* таким образом, чтобы она пересекла *LK* в точке *P*, то получится неожиданный результат: *KP* = *LP*.

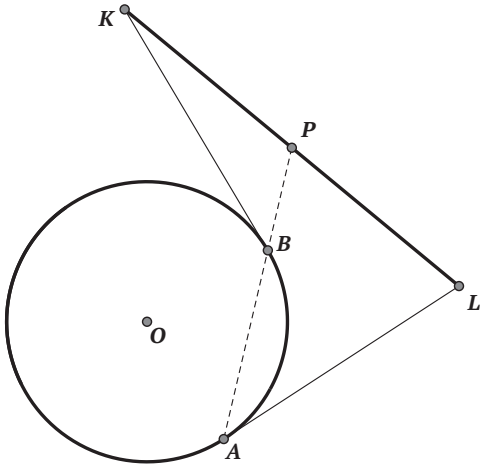


Рисунок 11

Пример 12. Необычное положение параллельных линий

На рис. 12 линия t является касательной к окружности c в точке A. Случайно выбранная линия l пересекает окружность c в точках B и C, а касательная t пересекает окружность c в точке T. Точка D является серединой дуги BC, не содержащей точку A. Когда перпендикуляр к AD, пересекающий AD в точке X, продлевается до точки R таким образом, что $TX = RX$, неожиданно оказывается, что прямая AR параллельна произвольно выбранной прямой l.

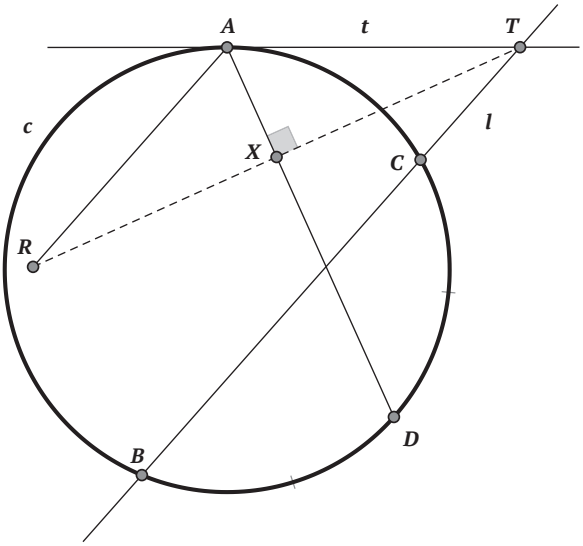


Рисунок 12

Пример 13. Неожиданные взаимно дополняющие углы в окружности

На рис. 13 точки D и C лежат на окружности O по одну сторону от диаметра AOB. Точка E лежит по другую сторону от диаметра AOB. Неожиданно оказывается, что углы в точках D и C взаимно дополняют друг друга, то есть $\angle ADE + \angle ECB = 90°$.

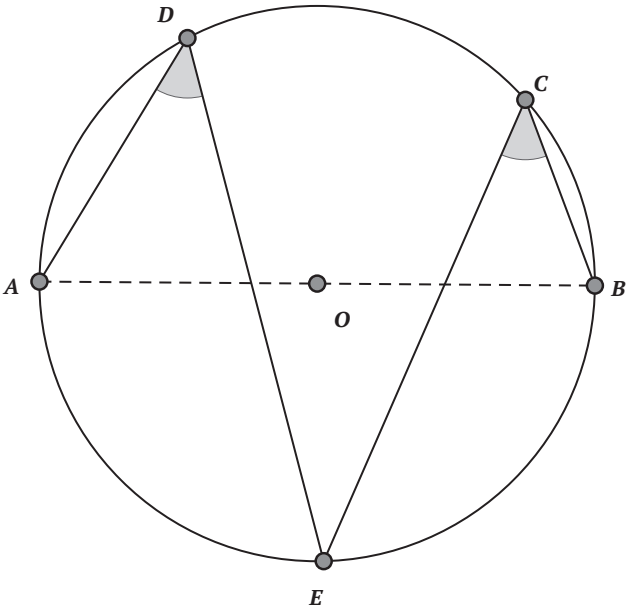


Рисунок 13

Пример 14. Удивительное равенство квадратов в окружности

На рис. 14 в окружности построены четыре хорды AB, BC, CD и DE таким образом, что $\angle ABC = \angle DCB = \angle \mathrm{CDE} = 45°$. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$.

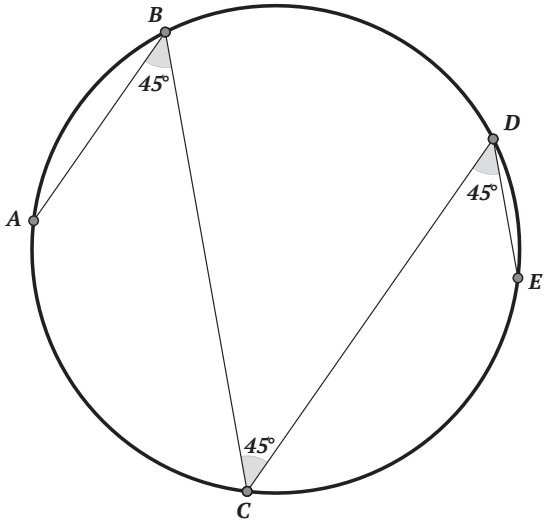


Рисунок 14

Пример 15. Удивительная окружность, образующая знакомый треугольник

Проведя хорду, равную половине диаметра окружности и параллельную ему, мы можем построить треугольник, в котором самая длинная сторона в два раза длиннее самой короткой. На рис. 15 представлена окружность с центром O и диаметром AB. Если провести хорду DE, параллельную диаметру AB, где $DE = \frac{1}{2} \cdot AB$, то получим точку C, в которой AD пересекает касательную в точке B. На удивление, в этом случае получаем $AC = 2AB$.

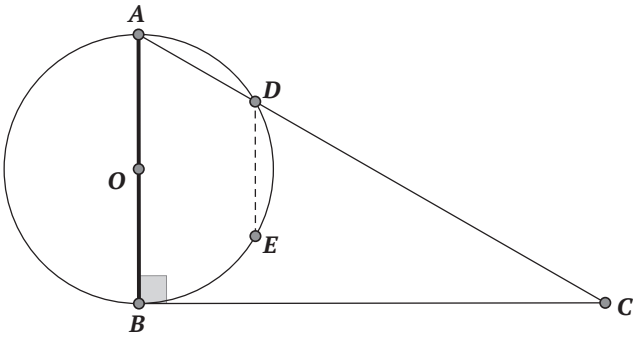


Рисунок 15

Пример 16. Удивительная перпендикулярность

На рис. 16 отрезок AC является хордой окружности O, диаметром которой является угол AOB. Отрезок AT делит угол $\angle CAB$ пополам и пересекает окружность O в точке T. На удивление оказывается, что касательная к окружности O в точке T перпендикулярна продолжению отрезка AC.

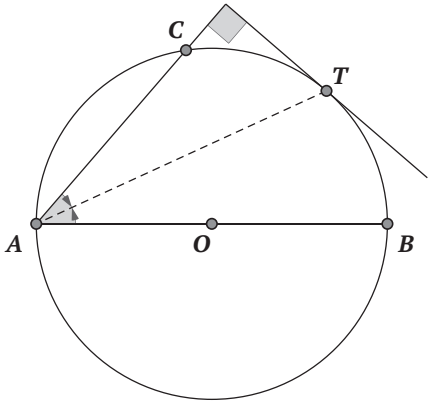


Рисунок 16

Пример 17. Неожиданные концикличские точки

Когда на окружности *c* с центром *O* проводится произвольно выбранная хорда *AB*, как показано на рис. 17, середина дуги *AB* образует четыре концикличские точки весьма упорядоченным образом. Если провести две произвольные прямые через точку *P*, они пересекают *AB* в точках *G* и *H* и пересекают окружность *c* в точках *C* и *D* соответственно. Независимо от того, где проходят эти хорды, точки *C*, *D*, *H* и *G* всегда будут концикличскими.

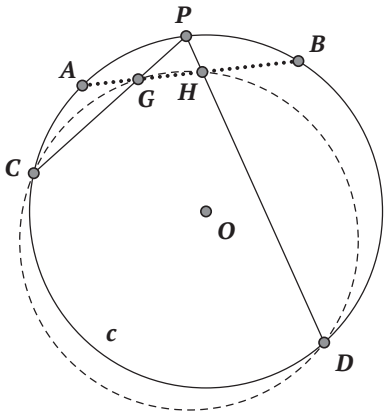


Рисунок 17

Пример 18. Хорды окружности образуют постоянную сумму углов

На рис. 18 показана окружность с центром *O* и двумя точками *A* и *B* на ней. Точка *C* выбирается произвольно на дуге *AB*. Когда точки *D* и *E* выбираются случайным образом, а точка *D* лежит на дуге *AC* (которая не содержит точку *B*), и точка *E* – на дуге *CB* (которая не содержит точку *A*), мы обнаруживаем, что сумма $\angle CDA + \angle BEC$ остается неизменной независимо от расположения точек *C*, *D* и *E* на соответствующих дугах.

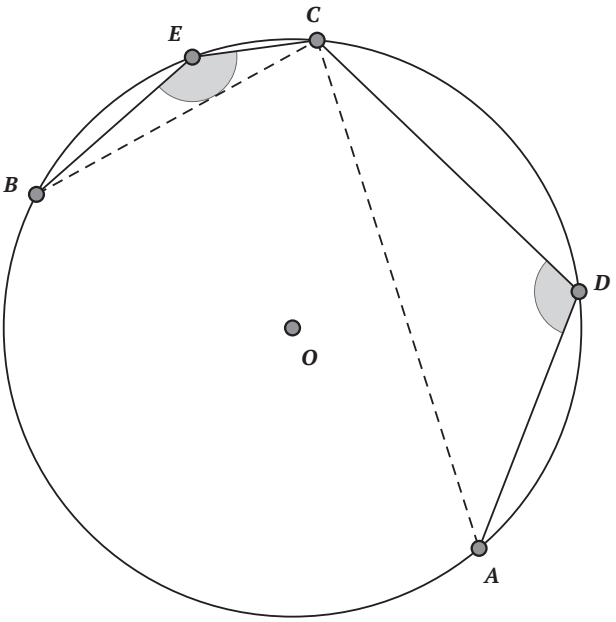


Рисунок 18

Пример 19. Окружность помогает разделить отрезок на две равные части

На рис. 19 точка *E* – это любая точка на диаметре *AB* окружности *O*. В точке *E* проводится перпендикуляр к диаметру, который пересекает окружность *O* в точке *D*. Проводим перпендикуляр к диаметру *AB* в точке *B* и продлеваем *AD* до пересечения с этим перпендикуляром в точке *F*. Из центра окружности *O* проводим параллель к *AF*, которая пересекает *FB* в точке *C*. Линия *AC* делит *DE* на две равные части таким образом, что *DP* = *EP*.

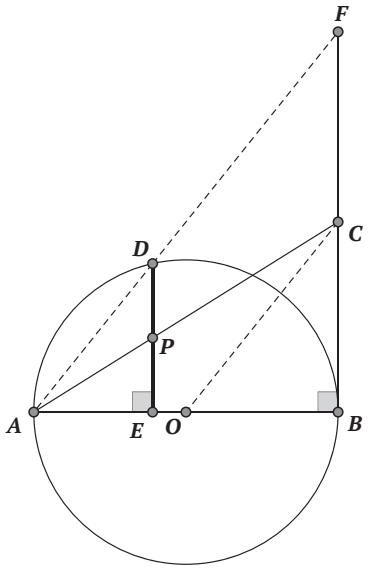


Рисунок 19

Пример 20. Знаменитое соотношение «бабочки»

Четыре правильно расположенные хорды могут разделить пятую хорду окружности на равные части. На рис. 20 точка *M* является серединой хорды *AB* данной окружности. Хорды *CD* и *EF* выбраны произвольно и пересекаются в точке *M*. Точка *P* является точкой пересечения *AB* и *CF*, а точка *Q* является точкой пересечения *AB* и *DE*. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что *MP* = *MQ*. Эту любопытную особенность зачастую называют *соотношением «бабочки»*, или *эффектом «бабочки»*, из-за формы фигуры, которую образуют четыре хорды.

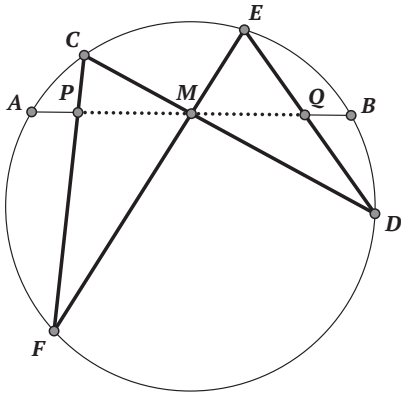


Рисунок 20

Пример 21. Окружность неожиданно образует параллельные прямые

На рис. 21 окружность *O* имеет диаметр *AOB*, а точка *C* лежит собственно на окружности. Точка *P* является точкой пересечения касательных к окружности, проходящих через точки *B* и *C*. Как ни странно, оказывается, что отрезок *AC* параллелен отрезку *OP*.

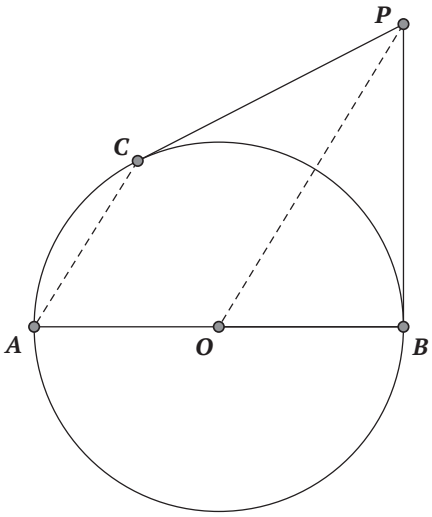


Рисунок 21

Пример 22. Неожиданная константа для любой точки на окружности

Две точки на диаметре окружности, равноудаленные от центра, обладают интересным свойством: сумма квадратов их расстояний до любой точки на окружности одинакова. Например, на рис. 22 точки *C* и *D* на диаметре *AOB* равноудалены от центра *O*, так что $OC = OD$. Когда точка *P* выбирается в любой точке окружности, значение $PC^2 + PD^2$ не зависит от выбора точки *P*.

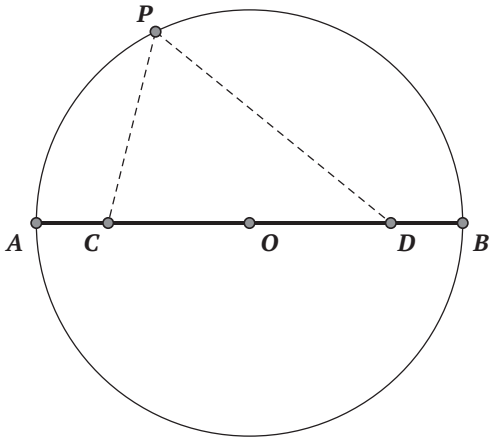


Рисунок 22

Пример 23. Касательные к окружности образуют перпендикулярные линии и пропорциональные отрезки

На рис. 23 представлена окружность с центром O и диаметром AB. Касательные к окружности AD и BC параллельны и пересекаются в точках D и C соответственно касательной к окружности в точке E. Тогда получаем, что $\angle COD = 90°$. Кроме того, радиус окружности является средним пропорциональным между двумя параллельными отрезками касательных, что дает нам пропорцию $\frac{OE}{BC} = \frac{AD}{OE}$.

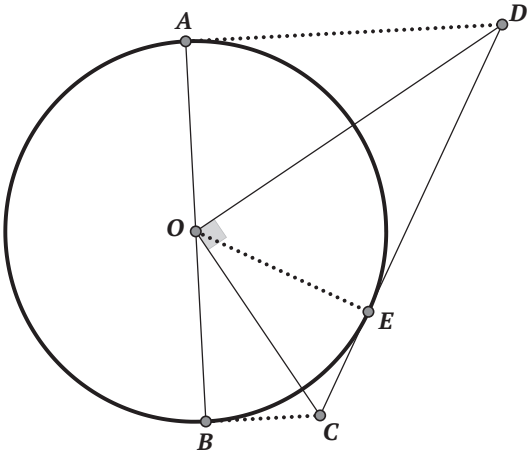


Рисунок 23

Пример 24. Неожиданный диаметр окружности

На рис. 24 указаны точки A, B, C и D, лежащие на окружности с центром O. Биссектриса угла $\angle ABC$ пересекает окружность во второй раз в точке X, а биссектриса угла $\angle CDA$ пересекает окружность во второй раз в точке Y. Неожиданно выясняется, что отрезок XY является диаметром исходной окружности O.

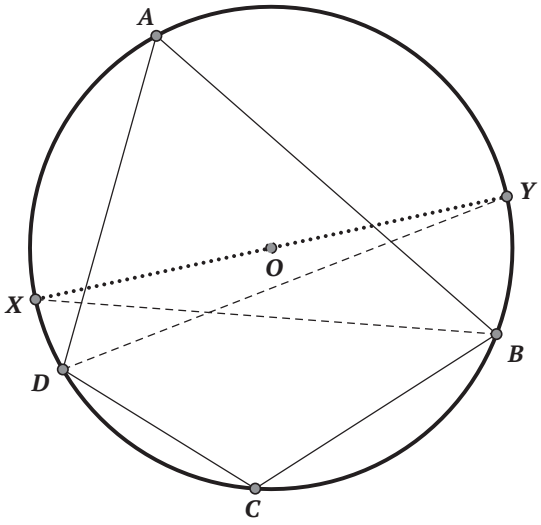


Рисунок 24

Пример 25. Неожиданный прямоугольник в окружности

Задана окружность с центром O и четыре точки A, B, C и D, расположенные, как показано на рис. 25, где AC – это диаметр окружности. Точка E также лежит на окружности, так что $BE \perp AC$, а точка F – это точка пересечения BE и AC. Прямая, параллельная BD и проходящая через точку F, пересекает продолжение CD в точке P и пересекает прямую AD в точке Q. На удивление, мы обнаруживаем, что четырехугольник $EQDB$ является прямоугольником.

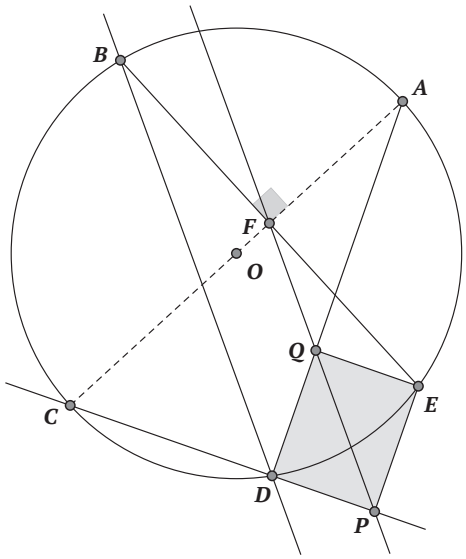


Рисунок 25

Пример 26. Параллельные биссектрисы углов

Четыре точки A, B, C и D лежат на окружности, как показано на рис. 26. Точка E является точкой пересечения диагоналей AC и BD, а точка F является точкой пересечения продолжений AB и DC. Мы с удивлением обнаруживаем, что биссектрисы углов $\angle DEA$ и $\angle DFA$ параллельны.

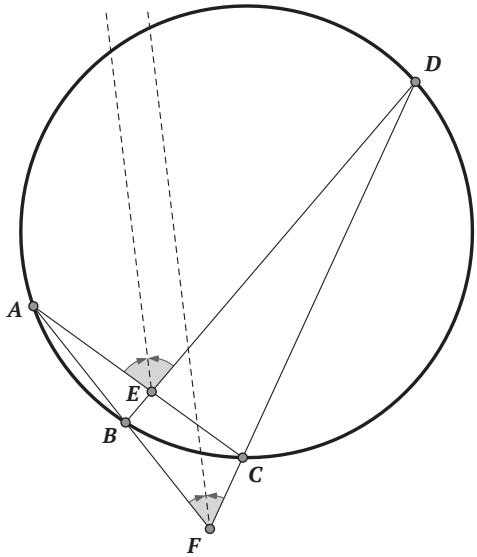


Рисунок 26

Пример 27. Интересные перпендикуляры на полуокружности

На рис. 27 представлены две точки P и Q на полуокружности диаметром AB. Точка M является серединой отрезка PQ. Если определить точку C на продолжении отрезка AM таким образом, чтобы $MA = MC$, то получится, что прямые PQ и BC перпендикулярны.

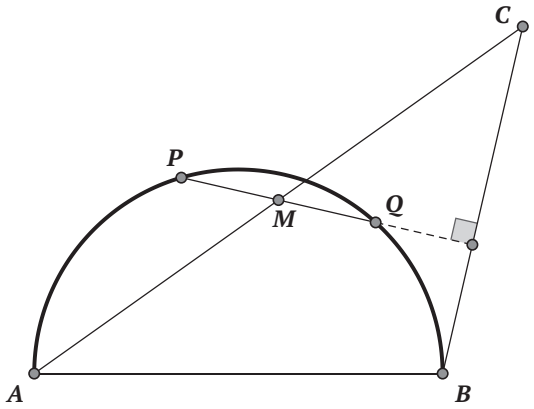


Рисунок 27

Пример 28. Неожиданная биссектриса угла на полуокружности

На рис. 28 заданы две точки P и Q на полуокружности диаметром AB. Линии AQ и BP пересекаются в точке R, а точка S лежит на AB таким образом, что $RS \perp AB$. При этом оказывается, что RS является биссектрисой $\angle QSP$.

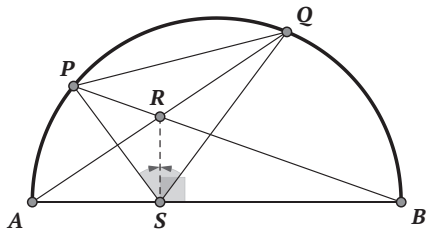


Рисунок 28

Пример 29. Касательные окружности к полуокружности

На рис. 29 задана точка P на полуокружности диаметром AB, а также точка Q внутри полуокружности. Продолжение прямой AQ пересекает полуокружность в точке C и пересекает BP в точке E, а продолжение прямой BQ пересекает полуокружность в точке D и пересекает AP в точке F.

Совершенно неожиданно выясняется, что описанные окружности треугольников PDF и PEC соприкасаются в точке P.

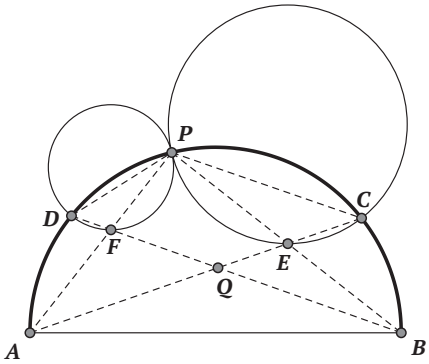


Рисунок 29

Пример 30. Точка на описанной окружности равнобедренного треугольника

Точки на окружности предоставляют нам возможность наблюдать некоторые весьма интересные соотношения. Рассмотрим, например, точку P на описанной окружности равнобедренного треугольника ABC, как показано на рис. 30. Пусть $AB = AC$, и точка P лежит на дуге BC описанной окружности, не включающей точку A. Тогда будет справедливо следующее соотношение: $\frac{AC}{BC} = \frac{PA}{PB + PC}$.

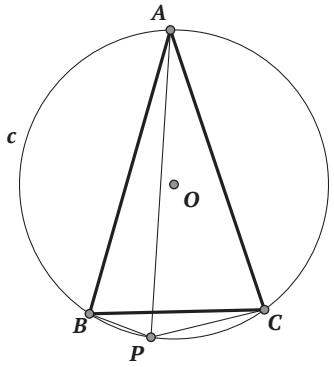


Рисунок 30

Пример 31. Точка на описанной окружности квадрата

Пример 30 можно применить к описанной окружности квадрата. На рис. 31 мы имеем окружность, описанную вокруг квадрата $ABCD$, и точку P на дуге BC этой окружности, не содержащей A и D. В этом случае выполняется соотношение $\frac{PA+PC}{PB+PD}=\frac{PD}{PA}$.

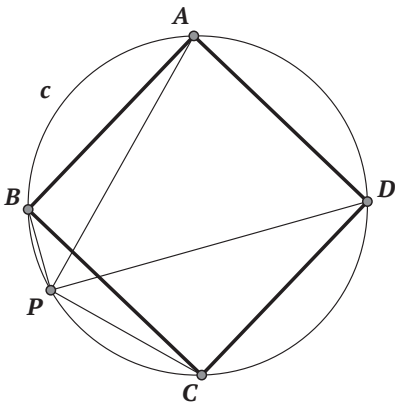


Рисунок 31

Пример 32. Точка на описанной окружности правильного пятиугольника

Когда точка P лежит на описанной окружности c правильного пятиугольника $ABCDE$, как показано на рис. 32, появляется еще одно неожиданное соотношение. Здесь точка P лежит на небольшой дуге BC окружности c, и тогда выполняется соотношение $PA + PD = PB + PC + PE$.

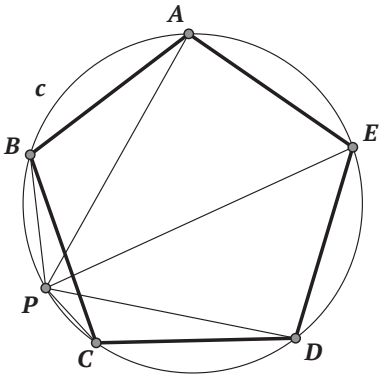


Рисунок 32

Пример 33. Точка на окружности, описываемой правильным шестиугольником

Мы можем расширить пример 32, заменив пятиугольник шестиугольником. Если выбрать точку P на небольшой дуге BC окружности, описываемой правильным шестиугольником $ABCDEF$, как показано на рис. 33, то можно увидеть, что $PE + PF = PA + PB + PC + PD$.

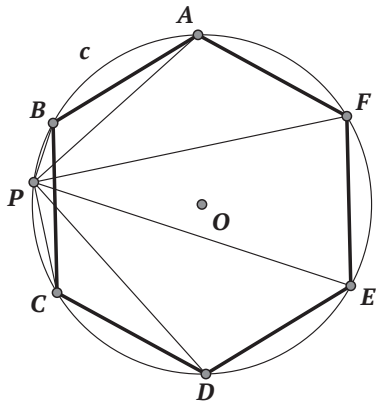


Рисунок 33

Пример 34. Касательная к описанной окружности равностороннего треугольника

Касательная, произвольно проведенная к описанной окружности равностороннего треугольника, дает довольно необычное соотношение. На рис. 34 точка P произвольно выбрана на описанной окружности равностороннего треугольника ABC. Из каждой вершины треугольника проводится перпендикуляр к касательной окружности в точке P. Выясняется, что сумма этих трех перпендикуляров, а именно AD, BE и CF, равна удвоенной длине высоты треугольника AM. В символическом виде это можно записать как $AD + BE + CF = 2AM$.

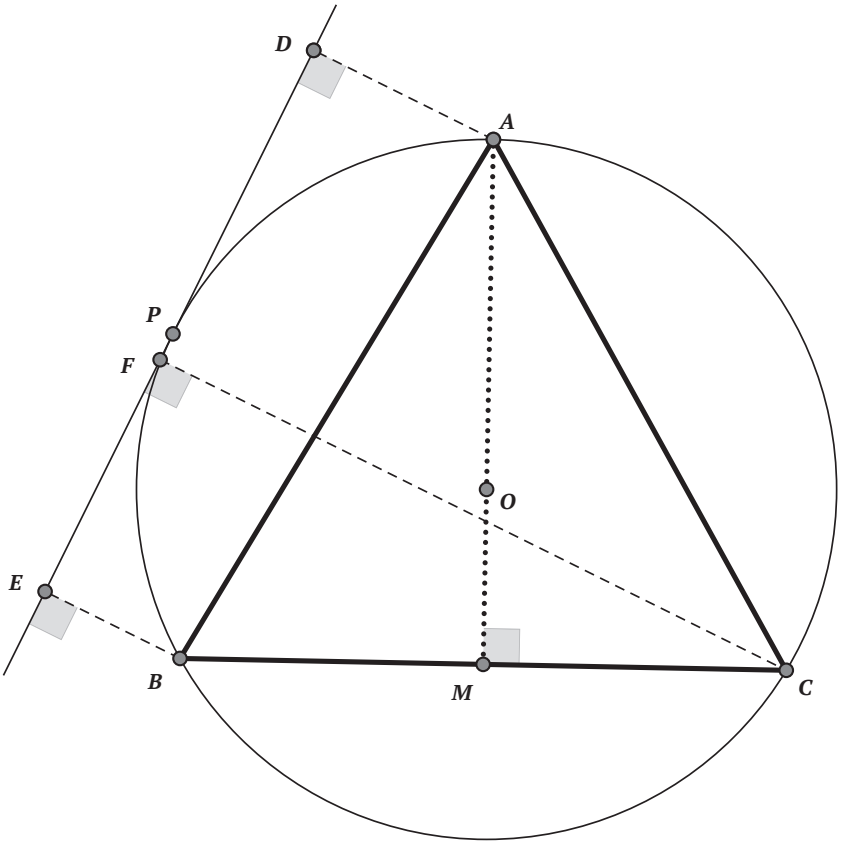


Рисунок 34

Пример 35. Удивительные концикличские точки

На рис. 35 представлен треугольник ABC с точками D и E, лежащими соответственно на сторонах AB и AC, при этом $DE \parallel AB$. Через точки D и E проведена окружность c, касающаяся AC в точке E, и эта окружность пересекает сторону BC во второй раз в точке F. Неожиданно оказывается, что точки A, B, F и E лежат на одной окружности.

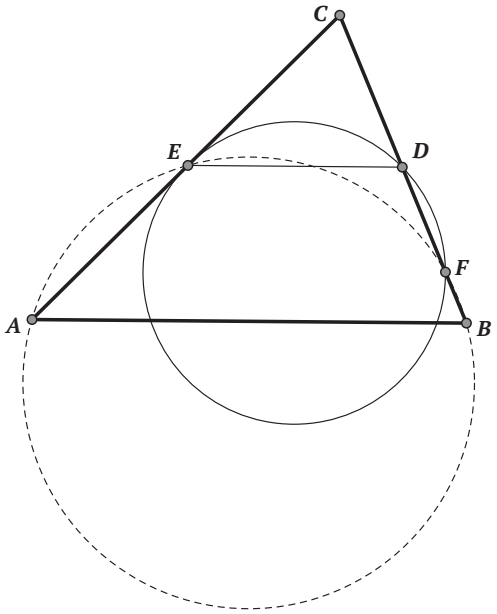


Рисунок 35

Пример 36. Середины дуг окружности образуют неожиданные параллели

На рис. 36 рассмотрим три точки *A*, *B* и *C*, произвольно расположенные на окружности. Точки *P*, *Q* и *R* являются серединами дуг *BC*, *CA* и *AB* соответственно. Прямые *AB* и *PR* пересекаются в точке *D*, а прямые *AC* и *PQ* – в точке *E*. При этом оказывается, что прямая *DE* параллельна прямой *BC*.

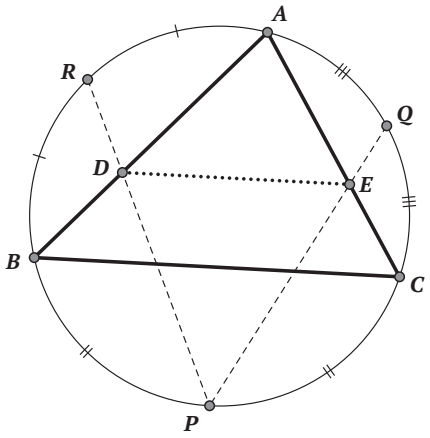


Рисунок 36

Пример 37. Описанная окружность и высоты треугольника выражают необычное равенство

Точки основания высот произвольно выбранного остроугольного треугольника и его описанной окружности неожиданно определяют две линии равной длины. На рис. 37 точки *E* и *F* являются точками основания высот из вершин *B* и *C* треугольника *ABC*. Продолжение линии *EF* пересекает описанную окружность в точках *P* и *Q*. Совершенно неожиданно выясняется, что *AP* = *AQ*.

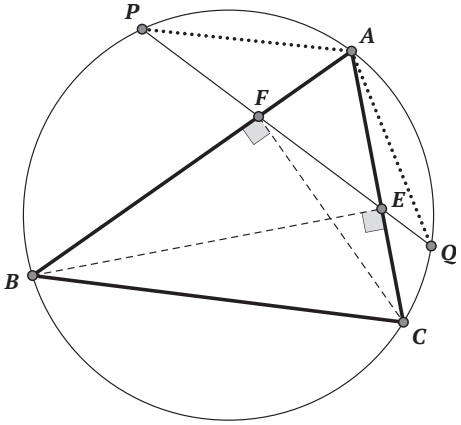


Рисунок 37

Пример 38. Неожиданная связь между серединой стороны остроугольного треугольника, его центром описанной окружности и ортоцентром

Расстояние от центра *O* описанной окружности треугольника до стороны треугольника имеет неожиданную связь с расстоянием между ортоцентром треугольника и противоположной вершиной. Это показано на рис. 38, где представлен треугольник *ABC* с центром окружности *O* и ортоцентром *H*. Точка *M* является точкой пересечения перпендикуляра, опущенного из точки *O* на сторону *BC* треугольника *ABC*. Примечательно, что *AH* = 2*OM*.

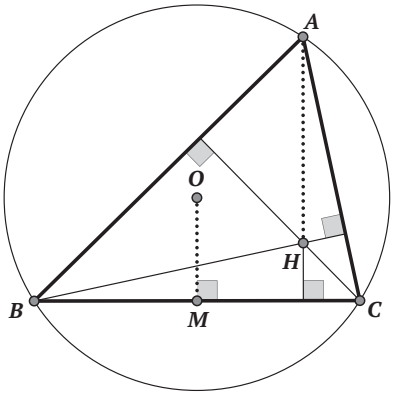


Рисунок 38

Пример 39. Неожиданное совпадение с описанной окружностью треугольника

Отрезок, проходящий через ортоцентр и середину одной из сторон заданного треугольника, пересекает описанную окружность треугольника в конце диаметра, проходящего через противоположную вершину. Это видно на рис. 39, где представлен треугольник *ABC*, его описанная окружность с центром в точке *O* и его ортоцентр *H*. Точка *N* представляет собой середину стороны *AB*, а продолжение отрезка *HN* пересекает описанную окружность в точке *P*. Из этого следует, что *CP* является диаметром описанной окружности.

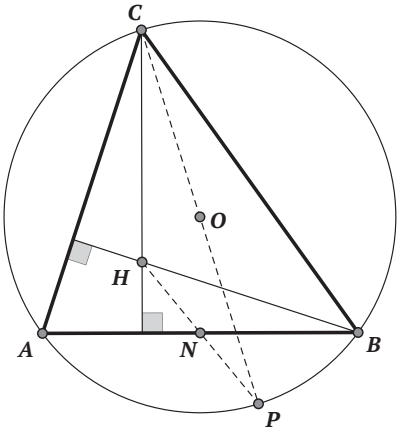


Рисунок 39

Пример 40. Неожиданная биссектриса угла, скрытая вписанной окружностью

На рис. 40 вписанная окружность треугольника *ABC* имеет касательные *AN*, *NBM* и *CM*. Кроме того, *BP* перпендикулярна *AC* в точке *P*. Удивительно, но *BP* делит угол *NPM* пополам.

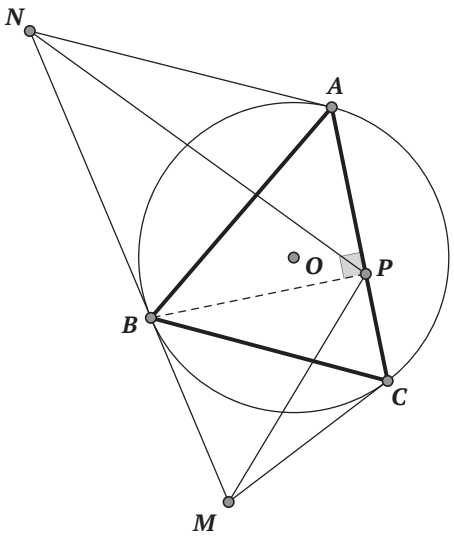


Рисунок 40

Пример 41. Удивительные концикличские точки, образуемые треугольником и его описанной окружностью

На рис. 41 точка *P* является случайно выбранной точкой внутри треугольника *ABC*. Линии *AP*, *BP* и *CP* пересекают описанную окружность *ABC* в точках *Q*, *R* и *S* соответственно. Точка *D* лежит на *AQ*, а точка *F* находится на *BR*, так что *DE* || *AB*. Кроме того, точка *F* лежит на *CS*, так что *DF* || *AC*. Совершенно неожиданно выясняется, что точки *S*, *F*, *E* и *R* лежат на одной окружности.

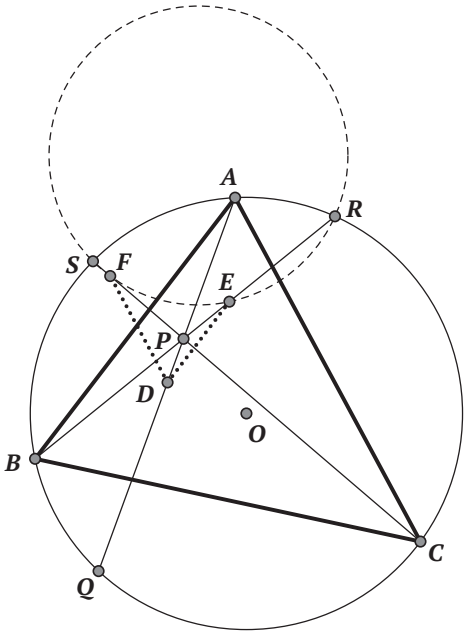


Рисунок 41

Пример 42. Неожиданные точки, лежащие на одной окружности

Рассмотрим треугольник *ABC*, представленный на рис. 42, где *O* – это центр описанной окружности треугольника *ABC*, а *H* – это ортоцентр треугольника. Отрезок *AD* представляет собой высоту к стороне *BC*. Перпендикулярная биссектриса отрезка *AO* пересекает продолжение *BC* в точке *E*. На удивление, окружность, содержащая точки *A*, *D* и *E*, также содержит середину *M* отрезка *HO*.

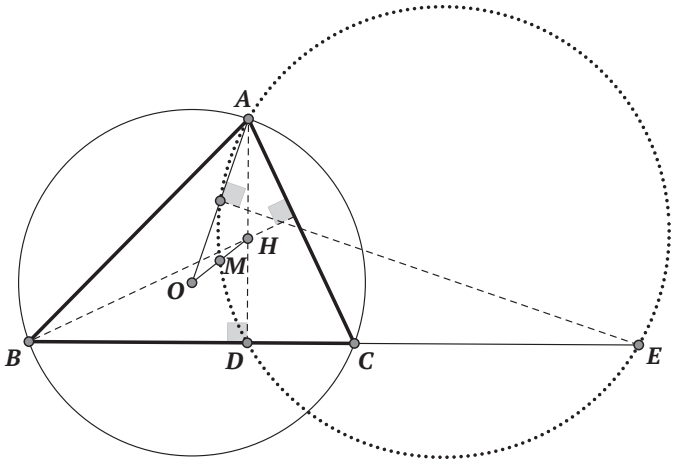


Рисунок 42

Пример 43. Ортоцентр и две вершины треугольника образуют окружность, равную описанной окружности

На рис. 43 точка H – это ортоцентр треугольника ABC, а точка O – центр описанной окружности. На удивление оказывается, что любая окружность, содержащая две вершины треугольника ABC и точку H, равна по размеру описанной окружности треугольника ABC. На рисунке это иллюстрируется окружностью треугольника BCH с центром Q, площадь которой равна площади описанной окружности треугольника ABC.

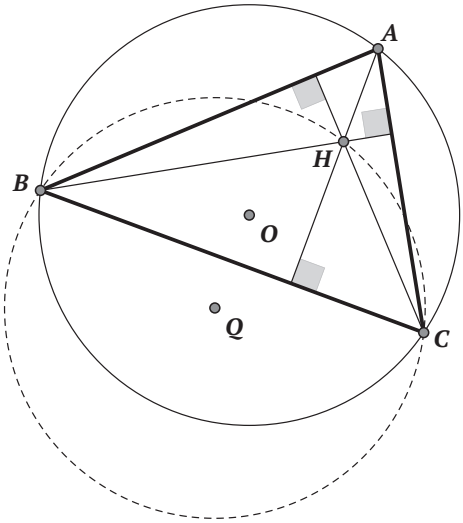


Рисунок 43

Пример 44. Образование неожиданного равнобедренного треугольника

Пусть задан треугольник ABC, как показано на рис. 44. Касательные из точки P к описанной окружности O треугольника ABC пересекают окружность в точках A и C. Прямая, проходящая через точку P и параллельная стороне AB, пересекает сторону BC в точке Q. Выясняется, что треугольник ABQ является равнобедренным, при этом $AQ = BQ$.

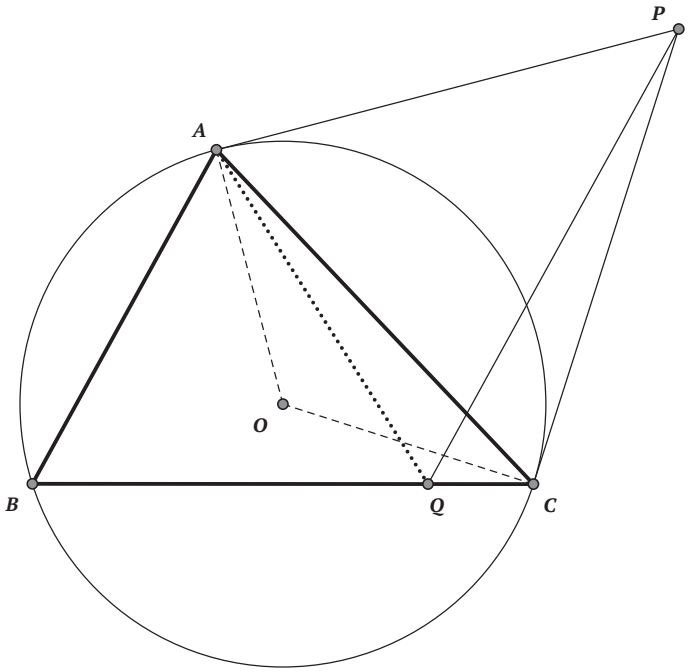


Рисунок 44

Пример 45. Неожиданные параллели, проходящие через точки на окружности

Точки A, B, C, D и E лежат на окружности с центром O, при этом $AB = AE$, как показано на рис. 45. Точка X находится на пересечении отрезков AD и CE, а точка Y лежит на пересечении отрезков AC и BD. Неожиданно оказывается, что отрезки BE и XY параллельны.

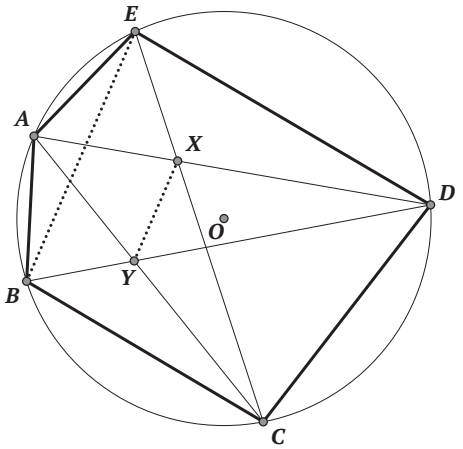


Рисунок 45

Пример 46. Касательные к описанной окружности треугольника

На рис. 46 основания высот *AD*, *BE* и *CF* треугольника *ABC* определяют ортоцентрический треугольник *DEF*. Существует интересная связь между сторонами ортоцентрического треугольника и описанной окружностью *ABC*. Касательные к описанной окружности в вершинах треугольника параллельны сторонам ортоцентрического треугольника. Как показано на рисунке, касательная в вершине *A* параллельна *EF*, касательная в вершине *B* параллельна *FD*, а касательная в вершине *C* параллельна *DE*.

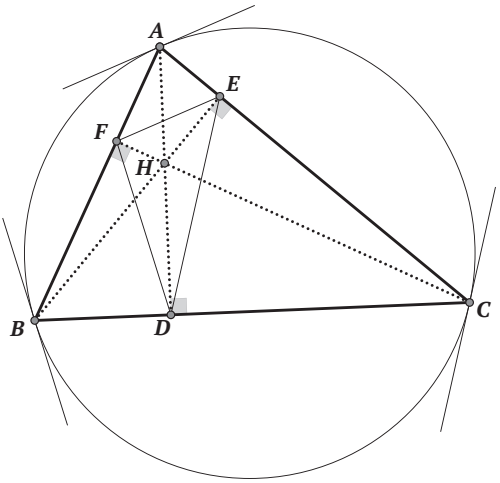


Рисунок 46

Пример 47. Касательные к окружности с девятью точками

В этом примере рассматривается интересное свойство хорошо известной девятиточечной окружности треугольника (см. «Инструментарий»), тесно связанное с примером 46. На рис. 47 представлены треугольник *ABC*, его ортоцентр *H* и девятиточечная окружность с центром *R*. Напомним, что девять точек, давших название девятиточечной окружности, представляют собой середины *K M* и *N* сторон треугольника, основания *D*, *E* и *F* высот треугольника, а также середины *X*, *Y* и *Z* отрезков *AH*, *BH* и *CH* соответственно.

Кроме того, как и в примере 46, нам известны высоты *AD*, *BE* и *CF* треугольника *ABC*, которые определяют ортоцентрический треугольник *DEF*. Примечательно, что касательные к девятиточечной окружности, проходящие через середины сторон треугольника, параллельны сторонам ортоцентрического треугольника. На рис. 47 видны касательные в точке *K*, параллельные *EF*, в точке *M*, параллельные *FD*, и в точке *N*, параллельные *DE*. Если скомбинировать любопытные факты примеров 46 и 47, то становится очевидным, что касательные к описанной окружности треугольника *ABC* в его вершинах также параллельны касательным к девятиточечной окружности в серединах противоположных сторон.

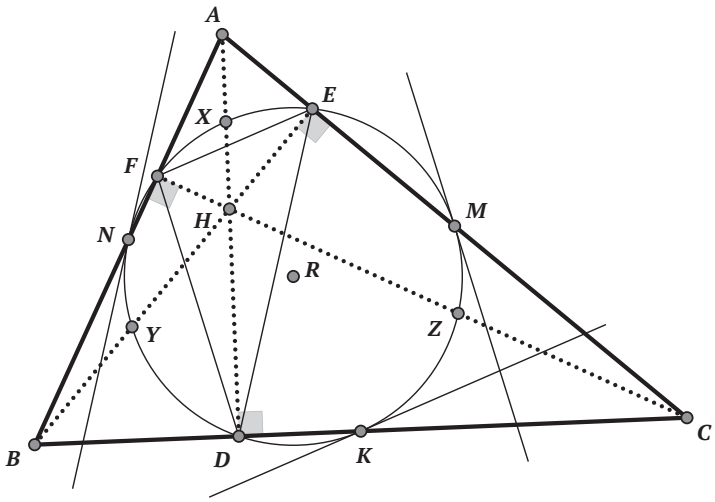


Рисунок 47

Пример 48. Чудеса вписанной окружности треугольника и особой описанной окружности

На рис. 48 произвольно начерченный треугольник ABC содержит точку I, которая является центром его вписанной окружности. Описанная окружность треугольника BIC пересекает AC и AB (продленную) в точках E и D соответственно. Неожиданно выясняется, что $AB = AE$ и что $AC = AD$.

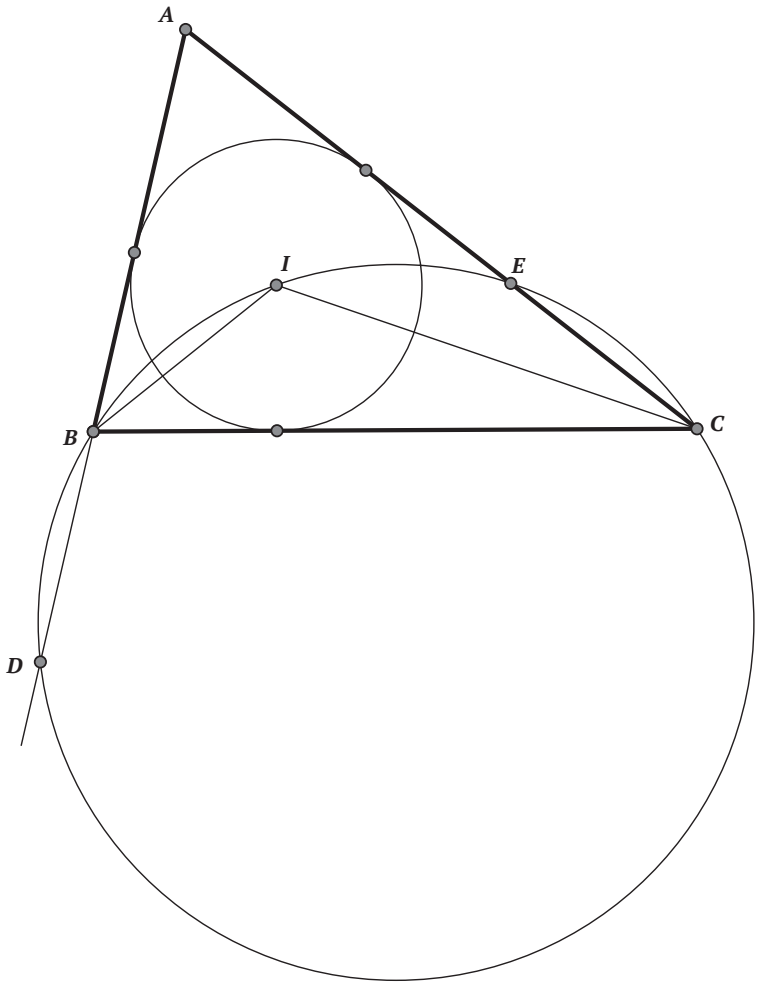


Рисунок 48

Пример 49. Чудеса с описанными и вписанными окружностями треугольника

На рис. 49 точка *I* является центром вписанной окружности треугольника *ABC*. Точки *P*, *Q* и *R* являются центрами описанных окружностей треугольников *BCI*, *CAI* и *ABI* соответственно. Что удивительно, выясняется, что *P*, *Q* и *R* лежат на описанной окружности треугольника *ABC*.

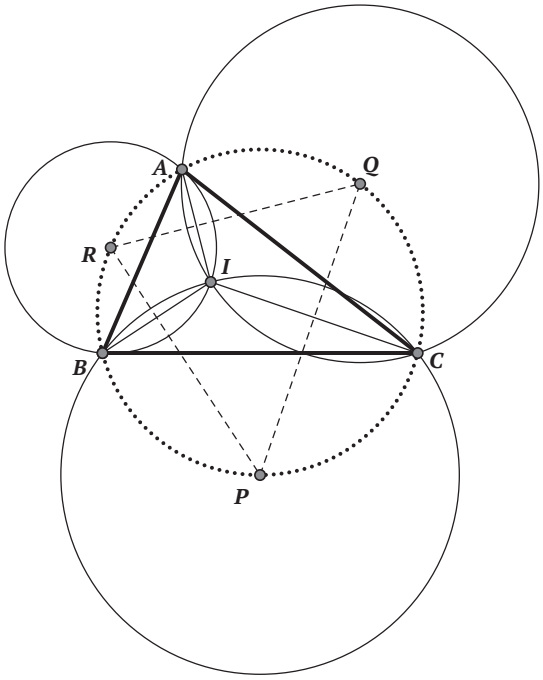


Рисунок 49

Пример 50. Другие чудеса с описанными и вписанными окружностями треугольника

Конфигурация из примера 49 имеет еще одну удивительную особенность. На рис. 50 точка *I* по-прежнему является центром вписанной окружности треугольника *ABC*, а точки *P*, *Q* и *R* вновь являются центрами описанных окружностей треугольников *BCI*, *CAI* и *ABI* соответственно. Как оказывается, точка *I* является ортоцентром (то есть точкой пересечения высот) треугольника *PRQ*.

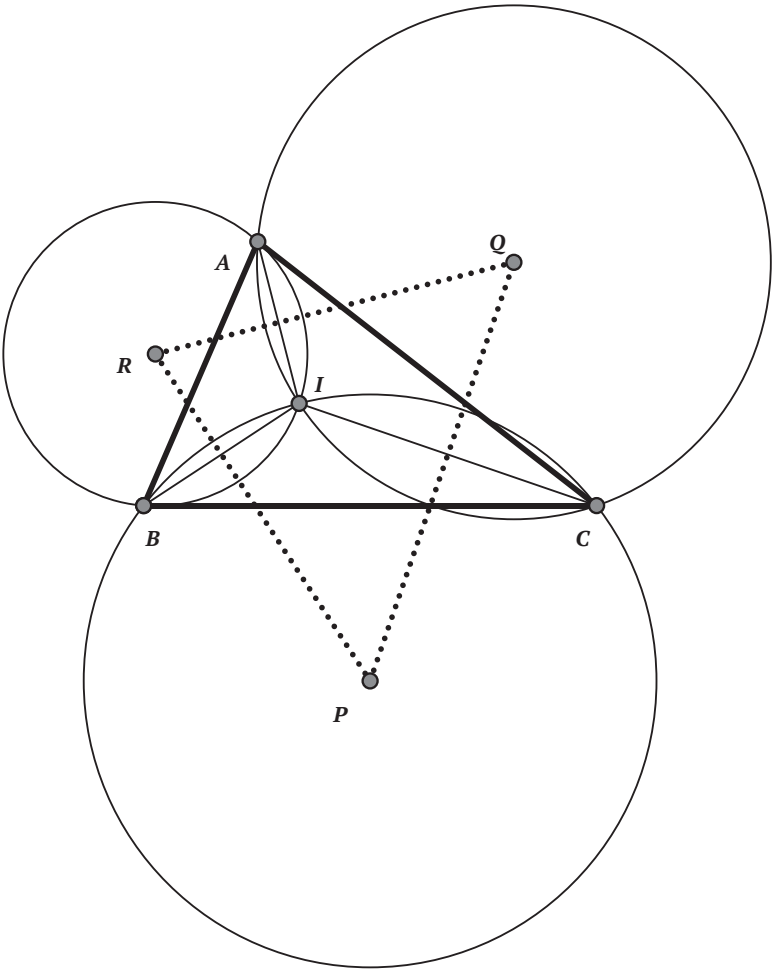


Рисунок 50

Пример 51. Как четыре центра треугольника образуют необычный циклический четырехугольник

На рис. 51 у треугольника *ABC* угол вершины $\angle BAC = 60°$. Точка *H* является ортоцентром треугольника *ABC*, точка *O* является центром его описанной окружности, точка *I* является центром вписанной окружности, а точка *D* – центром его описанной окружности (окружности, касающейся двух внешних и одной внутренней стороны треугольника), которая касается стороны *BC*. На удивление, четырехугольник *DOIH* является циклическим четырехугольником с *DO* = *DH*, при этом точки *B* и *C* лежат на его описанной окружности *c*.

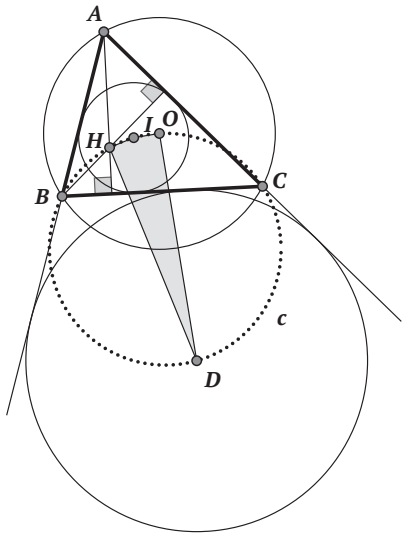


Рисунок 51

Пример 52. Радиусы вписанной и описанной окружностей определяют площадь прямоугольника

На рис. 52 в треугольнике ABC вписанная окружность с центром I касается стороны BC в точке X. Описанная окружность с центром D касается стороны BC в точке Y. Получается интересная зависимость: $CX \cdot BX = CY \cdot BY$, что также равно площади прямоугольника, стороны которого являются радиусами этих двух окружностей.

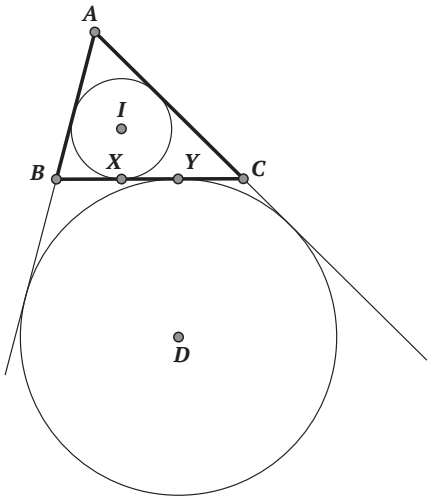


Рисунок 52

Пример 53. Описанная и вписанная окружности образуют три отрезка равной длины

На рис. 53 точка *I* является центром окружности, вписанной в треугольник *ABC*, а точка *O* представляет собой центр описанной окружности треугольника *ABC*. Если продлить отрезок *BI* до пересечения с описанной окружностью в точке *P*, то можно определить три отрезка равной длины: *PA* = *PC* = *PI*.

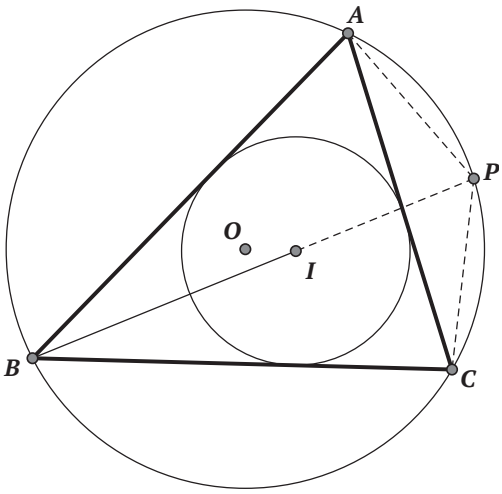


Рисунок 53

Пример 54. Три окружности с неожиданной общей точкой

На рис. 54 точки *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *F* расположены на окружности *c* с центром *O* таким образом, что *AB* = *AF*, *CD* = *CB* и *EF* = ED. Если начертить окружность с центром *A*, содержащую точки *F* и *B*, окружность с центром *C*, содержащую точки *B* и *D*, и окружность с центром *E*, содержащую точки *D* и *F*, неожиданно оказывается, что эти три окружности имеют общую точку *H*.

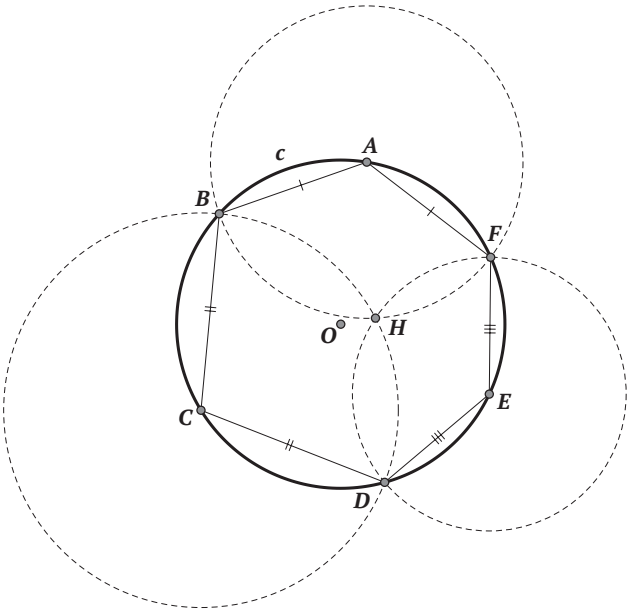


Рисунок 54

Пример 55. Знаменитая окружность Конвея

Если продлить стороны треугольника *ABC*, как показано на рис. 55, то *AD* = *AE* = *BC*, *BF* = *BG* = *CA* и *CH* = *CJ* = *AB*. Что удивительно, точки *D*, *E*, *F*, *G*, *H* и *J* лежат на одной окружности, центр *I* которой является центром вписанной окружности треугольника *ABC*. Эта окружность обычно называется *окружностью Конвея*, в честь английского математика Джона Х. Конвея (1937–2020).

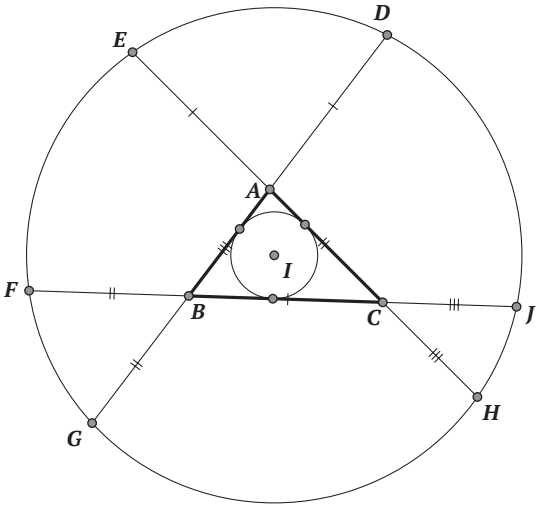


Рисунок 55

Пример 56. Удивительная коллинеарность с центром внутренней окружности треугольника: лемма Саваямы

Пусть задан треугольник *ABC* и точка *P* на стороне *BC*, как показано на рис. 56. Окружность с центром *M* касается вписанной окружности треугольника *ABC* в точке *D*, касается стороны *BC* в точке *E* и касается отрезка *AP* в точке *F*. Выясняется, что точки *E* и *F* лежат на одной прямой с инцентром (центром вписанной в треугольник окружности) *I* треугольника *ABC*. Этот интересный результат широко известен как *лемма Саваямы*.

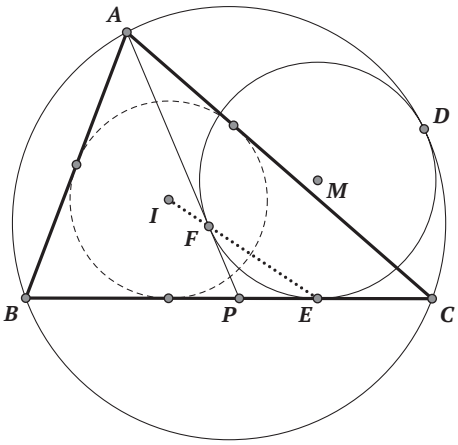


Рисунок 56

Пример 57. Удивительная взаимосвязь между четырьмя касательными окружностями треугольника

На рис. 57 треугольник *ABC* имеет вписанную окружность и три описанные окружности. Точка *I* является центром вписанной окружности *ABC*, а точки *D*, *E* и *F* представляют собой центры описанных окружностей на сторонах *AB*, *BC* и *CA* соответственно. Квадрат расстояния между центрами двух из этих окружностей равен квадрату расстояния между центрами двух других окружностей. Кроме того, это равняется квадрату диаметра окружности, проходящей через центры *D*, *E* и *F*. На рис. 57 это соотношение выражается как $DE^2 + FI^2 = DF^2 + EI^2 = DN^2$, где *DN* – это диаметр окружности *M*, содержащей точки *D*, *E* и *F*.

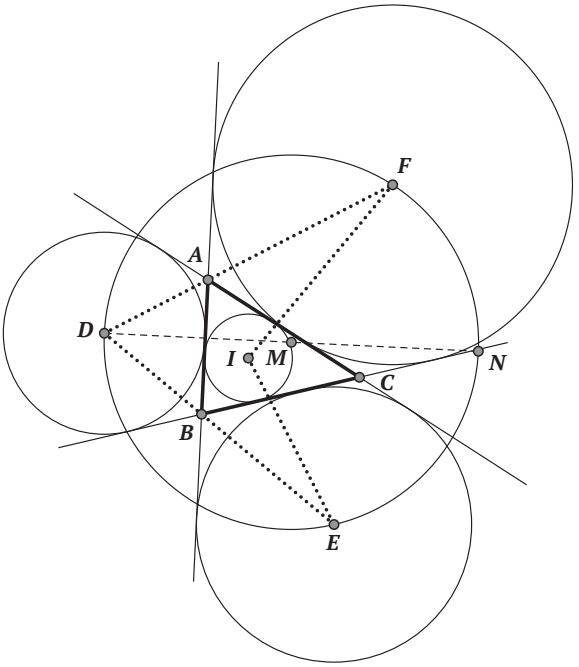


Рисунок 57

Пример 58. Две касательные окружности образуют неожиданный прямой угол

Окружности с центрами O и Q касаются друг друга в точке P, как показано на рис. 58. Общая касательная RS касается окружности O в точке R, а окружности Q – в точке S. Проведенная через точку P произвольная линия пересекает окружности O и Q соответственно в точках A и B. На удивление, когда продленная линия AR пересекает продленную линию BS в точке H, $\angle AHB$ оказывается прямым.

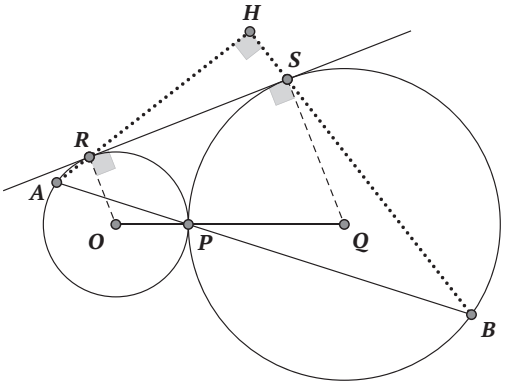


Рисунок 58

Пример 59. Неожиданный диаметр окружности

Диаметр двух одинаковых окружностей, касающихся друг друга, определяется весьма неожиданным образом. На рис. 59 одинаковые окружности с центрами O и Q касаются друг друга в точке P. В окружности Q произвольно проводится хорда PB. Линия AP проводится перпендикулярно PB в точке P и пересекает окружность O в точке A. Совершенно неожиданно выясняется, что AB равно сумме радиусов двух окружностей, то есть $AB = OQ$.

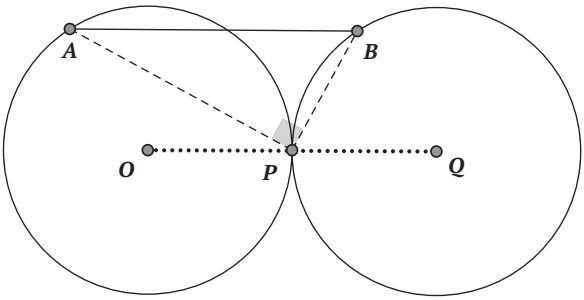


Рисунок 59

Пример 60. Удвоение расстояния между центрами

Две окружности с центрами O и Q пересекаются в точках A и B, как показано на рис. 60. Прямая, проходящая через точку A и параллельная OQ, пересекает окружность O в точке X и окружность Q в точке Y, что приводит к любопытному результату: $XY = 2 \cdot OQ$.

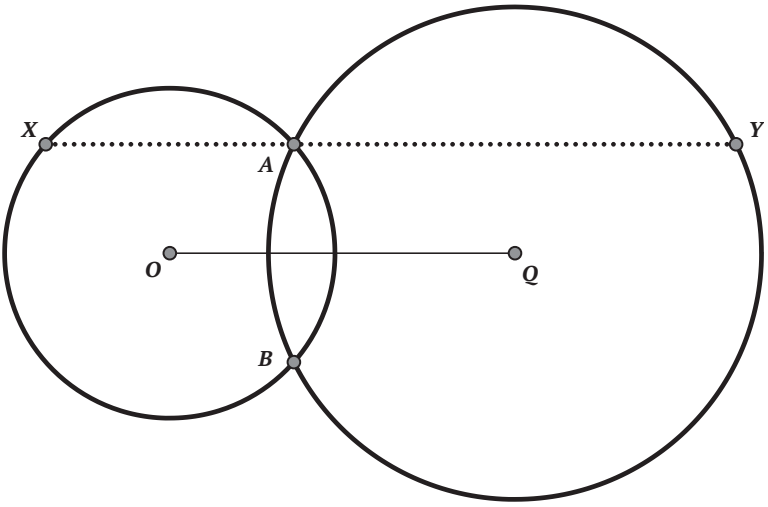


Рисунок 60

Пример 61. Касательные окружности образуют окружность касательно оси центров

Если общая внешняя касательная двух внешне соприкасающихся окружностей является диаметром третьей окружности, то эта третья окружность касается оси, соединяющей центры двух первых окружностей в их общей точке. Это наглядно показано на рис. 61, где AB – это общая внешняя касательная к двум касательным окружностям с центрами O и Q, которые соприкасаются в точке P. Удивительно, но окружность с диаметром AB касается прямой OQ в точке P.

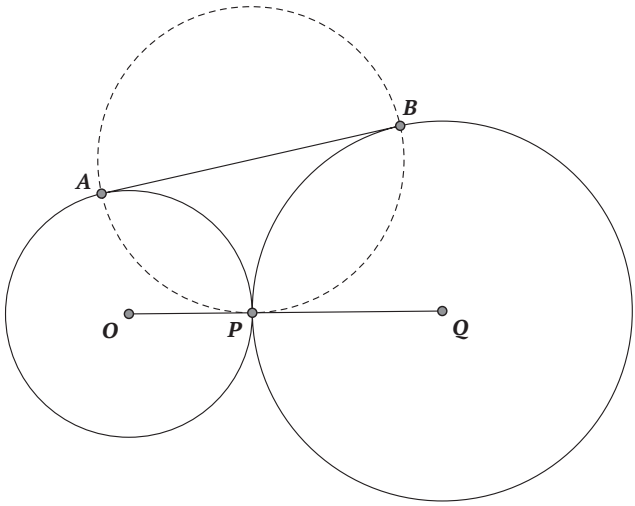


Рисунок 61

Пример 62. Неожиданная биссектриса угла, построенная внешними касательными окружностями

На рис. 62 внешне соприкасающиеся окружности с центрами O и Q имеют общую точку P. Касательная к окружности Q в произвольной точке A пересекает окружность O в точках X и Y, а продленная линия YP пересекает окружность Q во второй раз в точке B. Удивительно, но выясняется, что линия PA является биссектрисой $\angle XPB$.

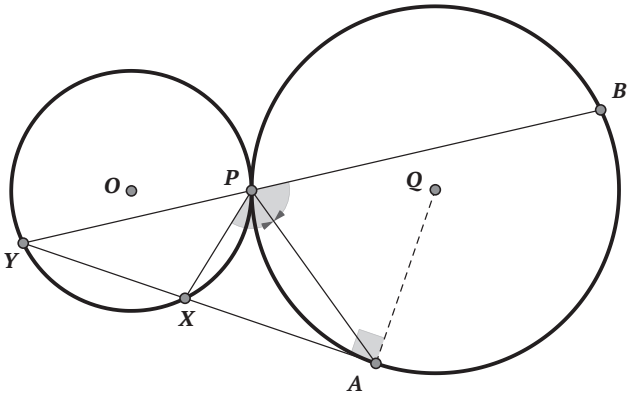


Рисунок 62

Пример 63. Неожиданные параллельные хорды внешних касательных окружностей

На рис. 63 представлены окружности с центрами *O* и *Q*, которые касаются друг друга по внешней стороне в точке *P*. Касательная к окружности *Q* в произвольной точке *A* пересекает окружность *O* в точках *X* и *Y*. Продолжение линии *YP* пересекает окружность *Q* во второй раз в точке *B*, а продолжение линии *AP* пересекает окружность *O* во второй раз в точке *C*. Совершенно неожиданно выясняется, что линии *AB* и *YC* параллельны.

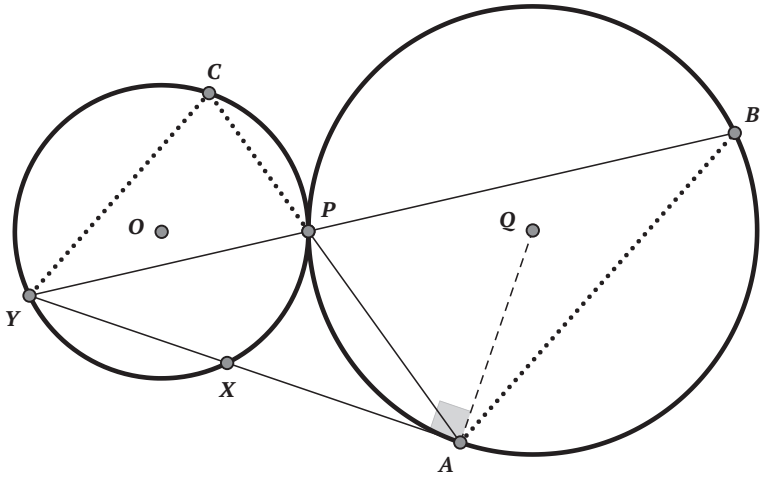


Рисунок 63

Пример 64. Удивительная параллельность касательных к внешне касательным окружностям

На рис. 64 представлены две окружности, внешне касающиеся в точке *P*, с центрами *O* и *Q*. Произвольная линия, проходящая через точку *P*, пере-

секает окружность O во второй раз в точке A и окружность Q во второй раз в точке B. Примечательно, что касательные линии в точках A и B оказываются параллельными.

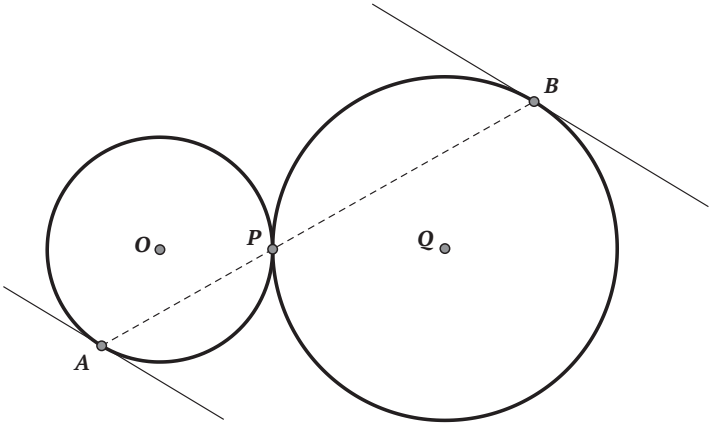


Рисунок 64

Пример 65. Две внешне касательные окружности образуют отрезок, равный половине длины отрезка между их центрами

Две внешне касательные окружности с центрами O и Q имеют общую точку A, как показано на рис. 65. Точки B и C выбираются на окружностях O и Q соответственно таким образом, чтобы отрезок BC был общей касательной к этим окружностям. Прямая, перпендикулярная BC и проходящая через A, и биссектриса OQ пересекаются в точке P. При этом оказывается, что $OQ = 2AP$.

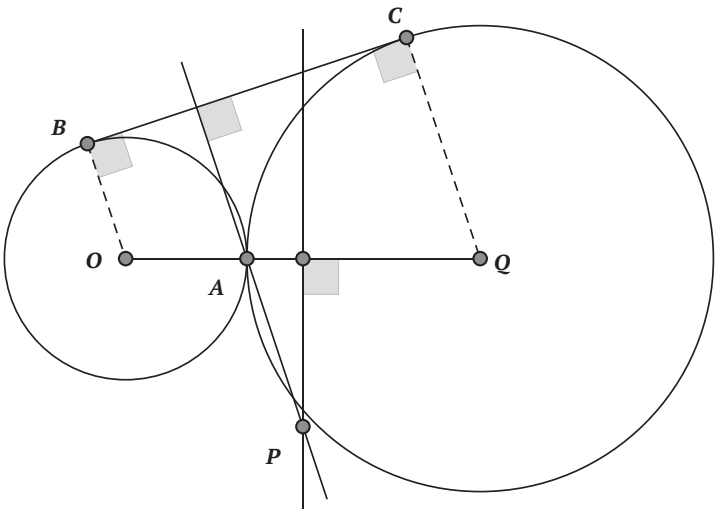


Рисунок 65

Пример 66. Необычайно удивительная постоянная длина касательной

Среди множества поразительных соотношений, встречающихся в нашей работе, этот пример является особенно необычным. На рис. 66 показана окружность с центром *O*, пересекаемая секущей в точках *A* и *B*. Точка *M* является серединой дуги *AB* на окружности *O*. Нарисуем любую окружность *Q* на той же стороне линии *AB*, что и точка *M*, касающуюся окружности *O* снаружи и касательную к линии *AB*. Длина касательной от *M* к окружности *Q* всегда равна постоянной величине *t*. Другими словами, значение *t* зависит только от выбора окружности *O* и секущей *AB* и совершенно не зависит от выбора окружности *Q*.

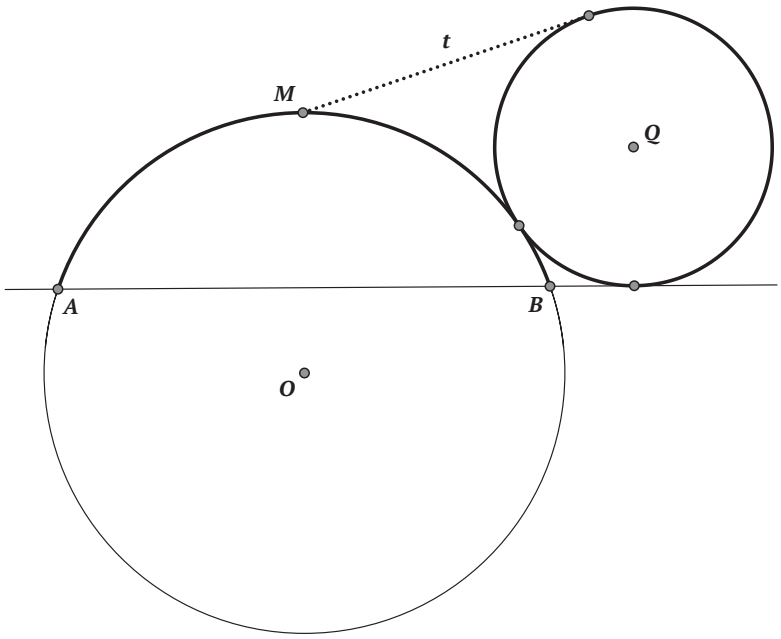


Рисунок 66

Пример 67. Две окружности неожиданно образуют параллельные прямые

Если провести две пересекающиеся прямые через точку касания двух касающихся друг друга окружностей, то точки пересечения этих прямых с окружностями определяют пару параллельных прямых. На рис. 67 прямые *APB* и *DPC* проходят через точку касания *P* двух окружностей с центрами *O* и *Q*. Точки пересечения этих двух прямых с окружностями определяют параллельные прямые *AD* и *BC*.

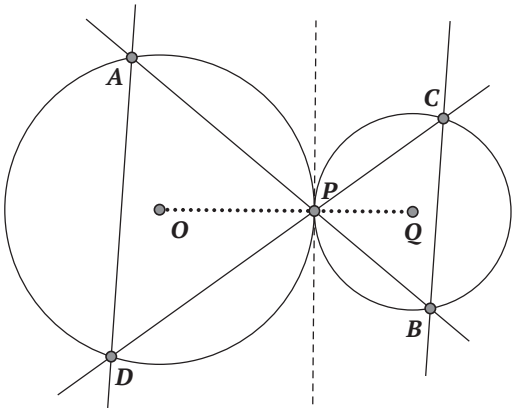


Рисунок 67

Пример 68. Две окружности образуют биссектрису угла

На рис. 68 две окружности с центрами O и Q касаются друг друга в точке A. Хорда BC окружности O касается окружности Q в точке D. Совершенно неожиданно выясняется, что $\angle BAD = \angle DAC$.

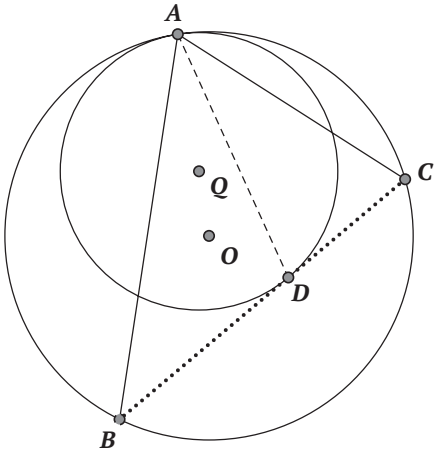


Рисунок 68

Пример 69. Касательные окружности образуют необычные произведения линий

На рис. 69 окружности с центрами O и Q внутренне соприкасаются в точке C. Хорда AB окружности O касается окружности Q в точке D, а продленная линия CD пересекает окружность O во второй раз в точке G. Выясняется, что $AC \cdot BC = CD \cdot CG$.

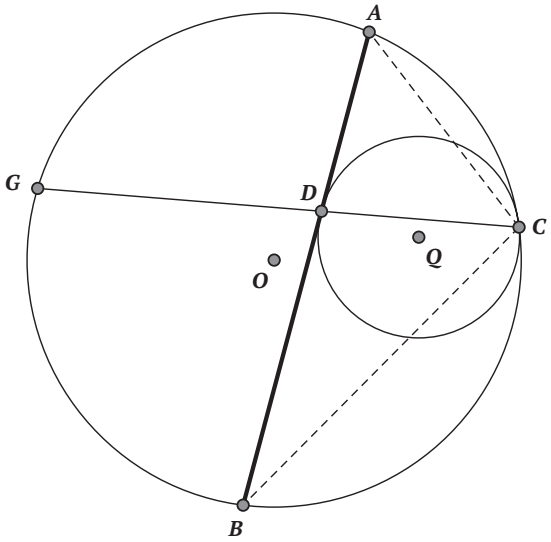


Рисунок 69

Пример 70. Равные углы на внутренних касательных окружностях

На рис. 70 две внутренне соприкасающиеся окружности с центрами O и Q имеют общую точку касания P. Произвольная прямая пересекает большую окружность в точках A и B, а меньшую – в точках C и D. Независимо от выбора прямой получается, что $\angle CPA = \angle BPD$.

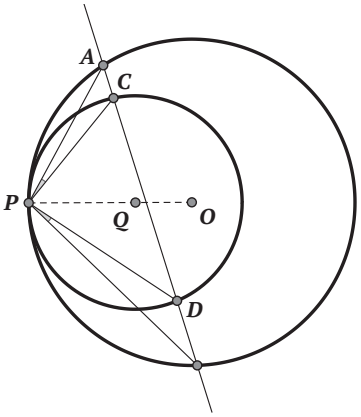


Рисунок 70

Пример 71. Невероятные длины касательных на касательных окружностях

На рис. 71 представлены окружности с центрами O и Q, которые соприкасаются внутри в точке P. Вершины A, B и C равностороннего треугольника выбираются произвольно на большей из двух окружностей. Если провести касательные из вершин этого равностороннего треугольника к меньшей окружности, то можно с удивлением обнаружить, что сумма длин двух более коротких касательных равна длине более длинной касательной. В данном конкретном случае имеет место равенство $BE = AD = CF$.

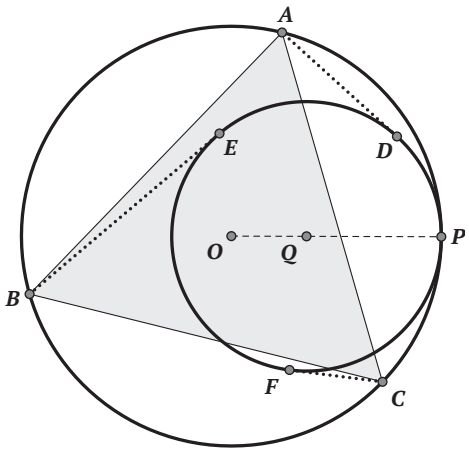


Рисунок 71

Пример 72. Симметричные равные углы

На рис. 72 две окружности с центрами O и Q соприкасаются внутри в точке A. Точка P выбрана случайно и не лежит ни на прямой OQ, ни на одной из окружностей. Точки E и R лежат на окружности O таким образом, что E является точкой окружности, расположенной дальше всего от P, а R – это точка окружности, расположенная ближе всего к P. Точно так же точки F и S лежат на окружности Q таким образом, что F – это точка окружности, расположенная дальше всего от P, а S – это точка окружности, расположенная ближе всего к P. При этом интересно обнаружить, что $\angle EAF = \angle RAS$.

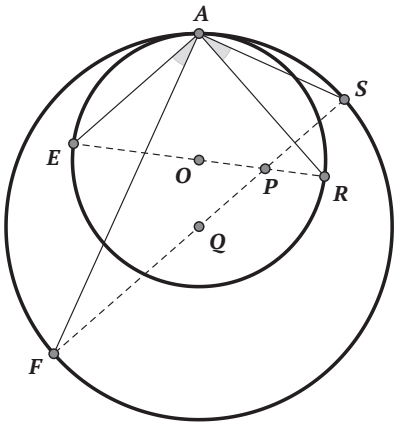


Рисунок 72

Пример 73. Удивительный результат перемещения

В левой части рис. 73 окружности с центрами *O* и *Q* соприкасаются внутренне в точке *A*. Радиус окружности *O* в два раза больше радиуса окружности *Q*, поэтому точка *O* лежит на окружности *Q*. Проведем радиусы *OB* и *OC* окружности *O*, которые пересекают окружность *Q* в точках *D* и *E* соответственно. Тогда окажется, что дуги *AB* на окружности *O* и *AD* на окружности *Q* равны по длине. То же самое верно и для дуги *BC* на окружности *O* и дуги *DE* на окружности *Q*.

Воистину поразительное следствие этого показано в правой части рис. 73. Если прокатить окружность *Q* без скольжения по внутренней стороне окружности *O* до совпадения точек *B* и *D*, то окажется, что точка *X* на окружности *Q*, которая в исходном положении совпадала с точкой *O*, оказывается на диаметре окружности *O*, перпендикулярном *OA*. В действительности если окружность *Q* совершит полный оборот по внутренней стороне окружности *O*, точка *X* пройдет по всему этому диаметру окружности *O*.

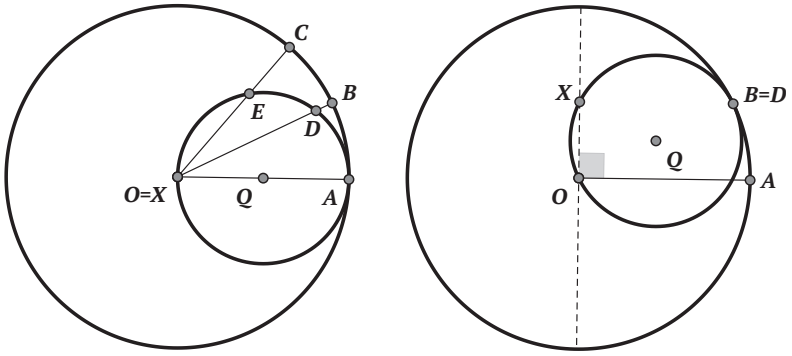


Рисунок 73

Пример 74. Полуокружности – арбелос

Полуокружность также обладает некоторыми удивительными свойствами. Одним из примеров является фигура *арбелос*, которую также называют «*ножом сапожника*». Эта интересная фигура, обозначенная на рис. 74 более светлым оттенком, образуется тремя касательными полуокружностями, диаметры которых лежат на одной прямой. Это означает, что сумма диаметров двух меньших полуокружностей равна диаметру большей полуокружности. Несмотря на то что это может быть не совсем очевидно на первый взгляд, сумма длин двух меньших полуокружностей равна длине большей полуокружности.

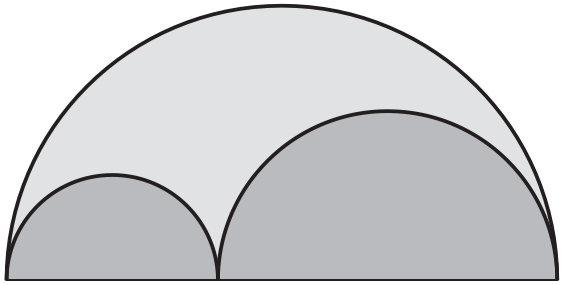


Рисунок 74

Пример 75. Биссектриса арбелоса

На рис. 75 к арбелосу дополнительно добавлено несколько линий, что приводит к появлению интересной особенности. Точки A и B являются конечными точками большой полуокружности, а точка C представляет собой точку касания двух меньших дуг. Построим перпендикуляр к отрезку AB в точке C, пересекающий большую полуокружность в точке H. Затем проведем общую касательную к двум меньшим полуокружностям с точками касания F и G соответственно, пересекающую отрезок HC в точке S. Выясняется, что отрезки CH и FG делят друг друга пополам в точке S, так что $SF = SG$ и $SC = SH$.

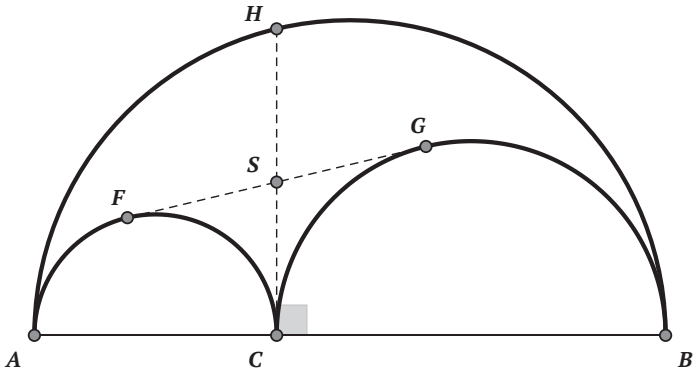


Рисунок 75

Пример 76. Подробнее о точке равного деления арбелоса

Конфигурация из примера 75 позволяет получить еще более удивительные результаты. Определив точки на рис. 76 таким же образом, как в примере 75, можно обнаружить, что $HC = FG$, а это значит, что точка S является центром окружности, содержащей точки F, C, G и H. Еще более неожиданным является тот факт, что площадь этой окружности равна площади арбелоса – области, ограниченной тремя полуокружностями.

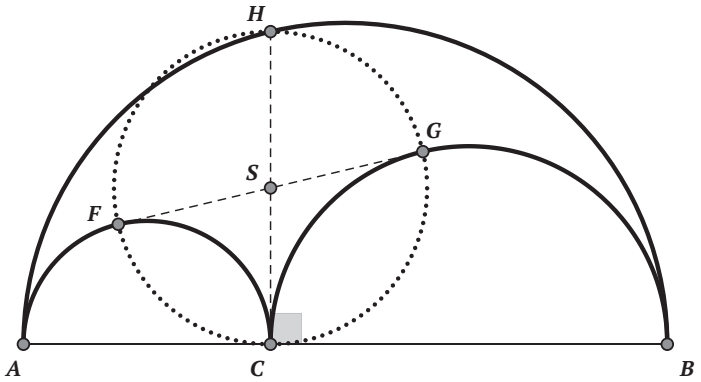


Рисунок 76

Пример 77. И еще об арбелосе

Если продолжить исследование арбелоса на рис. 77, можно обнаружить еще одно неожиданное геометрическое чудо. Снова обозначив все точки, как в примере 75, можно обнаружить, что отрезки AH и BH содержат точки касания общей касательной линии F и G соответственно, что дает нам еще одну удивительную коллинеарность для AFH и BGH.

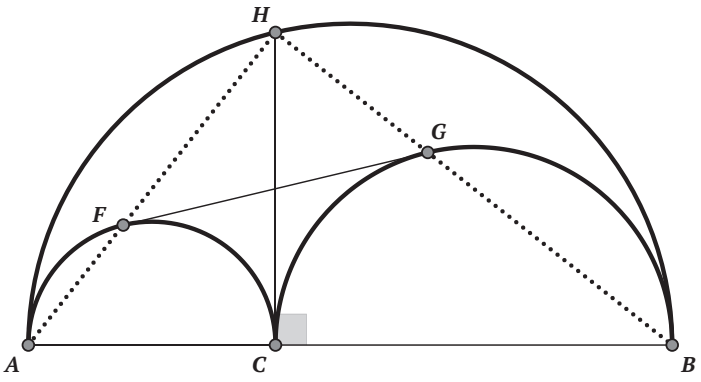


Рисунок 77

Пример 78. Еще один сюрприз арбелоса

Существует множество неожиданных соотношений, связанных с арбелосом. Еще одно показано на рис. 78, где точки *A*, *B* и *C* вновь определены, как в примере 75. Здесь точки *S* и *T* являются серединами двух меньших полуокружностей, а точка *R* представляет собой середину отражения большей полуокружности относительно *AB*. Удивительно, но площадь четырехугольника *CSRT* равна сумме квадратов радиусов двух меньших полуокружностей.

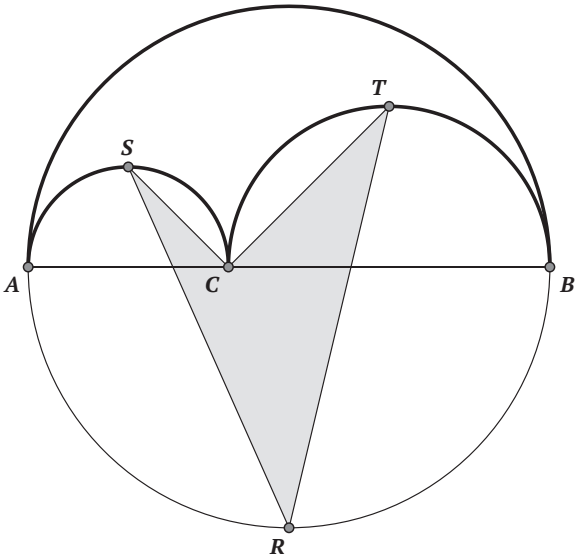


Рисунок 78

Пример 79. Дополнительные забавы с арбелосом

В примере 76 была представлена окружность, площадь которой равна площади арбелоса. Что удивительно, можно найти еще одну окружность с аналогичным свойством. На рис. 79 точки *A*, *B* и *C* вновь определены так же, как в примере 75. Дуга *AC* арбелоса отражается по оси *AC*, в результате чего получается фигура, граница которой состоит из трех полуокружностей: *AB*, *BC* и нижней дуги *AC*, как показано на рисунке. Затем из точки *A* проводится касательная к полуокружности *BC* в точке *T*. Наконец, строится окружность с центром *R*, диаметром которой является отрезок *AT*. Неожиданным результатом является то, что площадь фигуры, ограниченной тремя дугами, равна площади окружности с центром *R*.

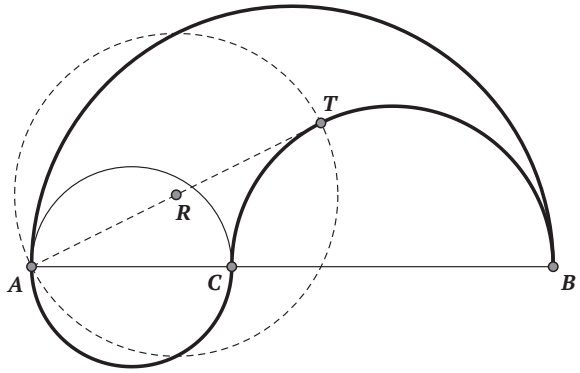


Рисунок 79

Пример 80. Удивительное равенство площадей, созданное с помощью полуокружностей

Рассмотрим прямоугольный треугольник *ABC* с полуокружностями на каждой из его сторон, как показано на рис. 80. Точка *D* на стороне *AB* является пересечением двух полуокружностей на сторонах *AC* и *BC*. Затем добавляется линия *CD*. Площади ограниченных областей *x*, *y* и *s*, как показано на рис. 80, позволяют установить, что *s* – *x* – *y* = площадь [*ABC*].

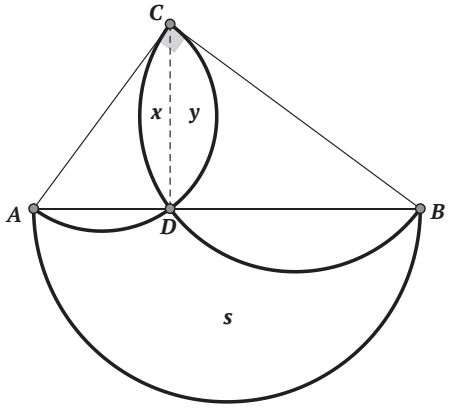


Рисунок 80

Пример 81. Еще одно удивительное равенство площадей, созданное полуокружностями

На рис. 81 представлена ситуация, аналогичная примеру 80. Вновь начерчен прямоугольный треугольник *ABC* с полуокружностями на сторонах, как показано на рисунке. Как и ранее, точка *D* является точкой пересечения полуокружностей на стороне *AB* треугольника *ABC*, и добавляется линия *CD*. Затем

прочерчивается окружность с диаметром CD, а также полуокружности с диаметрами AD и BD. Эти окружности ограничивают области j, k, p и q, как показано на рис. 81. Что удивительно, получается, что $j + k + p + q$ = площадь $[ABC]$.

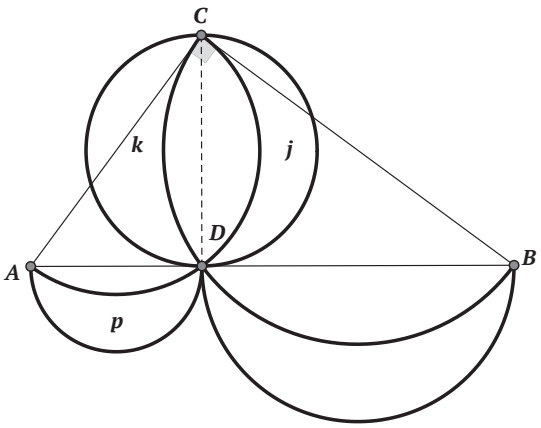


Рисунок 81

Пример 82. Удивительное деление кривой на две равные части

Рассмотрим полуокружность диаметром AB, как показано на рис. 82. Точка M является серединой отрезка AB. Если добавить к большой полуокружности две полуокружности с диаметрами AM и MB, расположенные снаружи, то получим замкнутую кривую, состоящую из трех полуокружностей. Примечательно, что если провести любую прямую через точку M, пересекающую замкнутую кривую в точках P и Q, то эти точки делят замкнутую кривую на два отрезка равной длины.

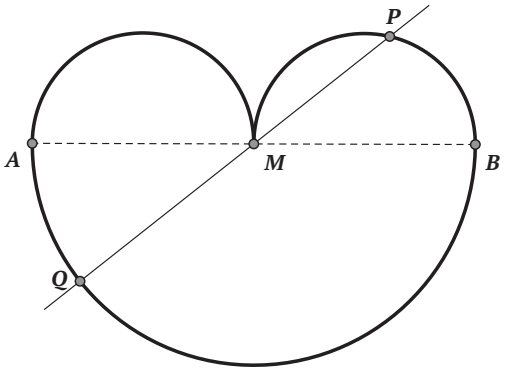


Рисунок 82

Пример 83. Неожиданное деление пополам

На рис. 83, начиная с отрезка *AB* со средней точкой *M*, на одной стороне отрезка *AB* прочерчены дуги окружности с диаметрами *AB* и *MB*. На меньшей из этих полуокружностей выбраны точки *P*, *Q* и *R* таким образом, что дуги $\overset{\frown}{BR}$, $\overset{\frown}{RQ}$ и $\overset{\frown}{PQ}$ равны. Отрезок *MQ* пересекает больший полукруг в точке *C*, а *MQ* пересекает отрезок *PB* в точке *D*. Что удивительно, выясняется, что *Q* является серединой отрезка *CD*.

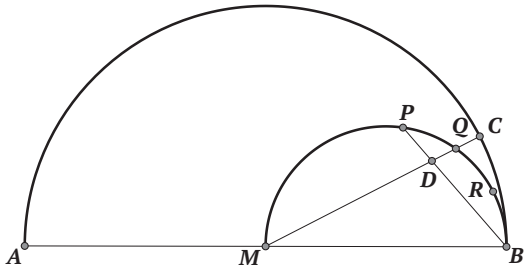


Рисунок 83

Пример 84. Двойная функция точки, связанной с окружностью

Три взаимно соприкасающиеся окружности определяют особую точку, которая одновременно является центром описанной окружности одного треугольника и центром вписанной окружности другого. Это показано на рис. 84, где окружности с центрами *R*, *S* и *T* соприкасаются в точках *A*, *B* и *C*, образуя два треугольника: Δ*RST* и Δ*ABC*. Центр окружности *P* треугольника *ABC* является также центром вписанной окружности треугольника *RST*.

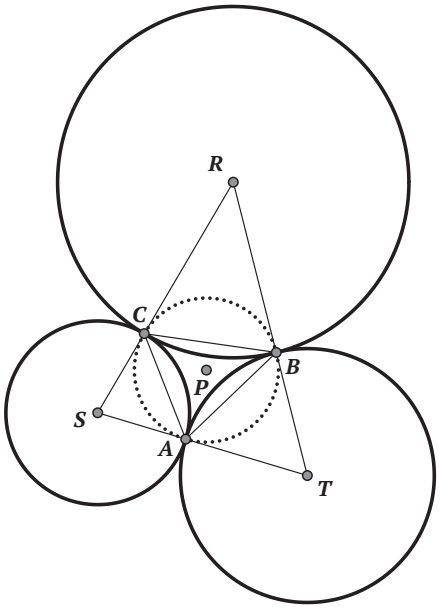


Рисунок 84

Пример 85. Три окружности с двумя общими точками образуют неожиданную окружность

Когда три окружности имеют две общие точки, их касательные могут образовать четвертую окружность. На рис. 85 три окружности с центрами *X*, *Y* и *Z* соответственно имеют общие точки *A* и *B*. Линия, проходящая через точку *A*, пересекает эти три окружности в точках *D*, *E* и *F* соответственно. Касательные в точках *D* и *E* пересекаются в точке *P*, касательные в точках *E* и *F* пересекаются в точке *Q*, а касательные в точках *D* и *F* пересекаются в точке *R*. Совершенно неожиданно выясняется, что точки *P*, *B*, *Q* и *R* лежат на одной окружности, что делает четырехугольник *PBQR* циклическим.

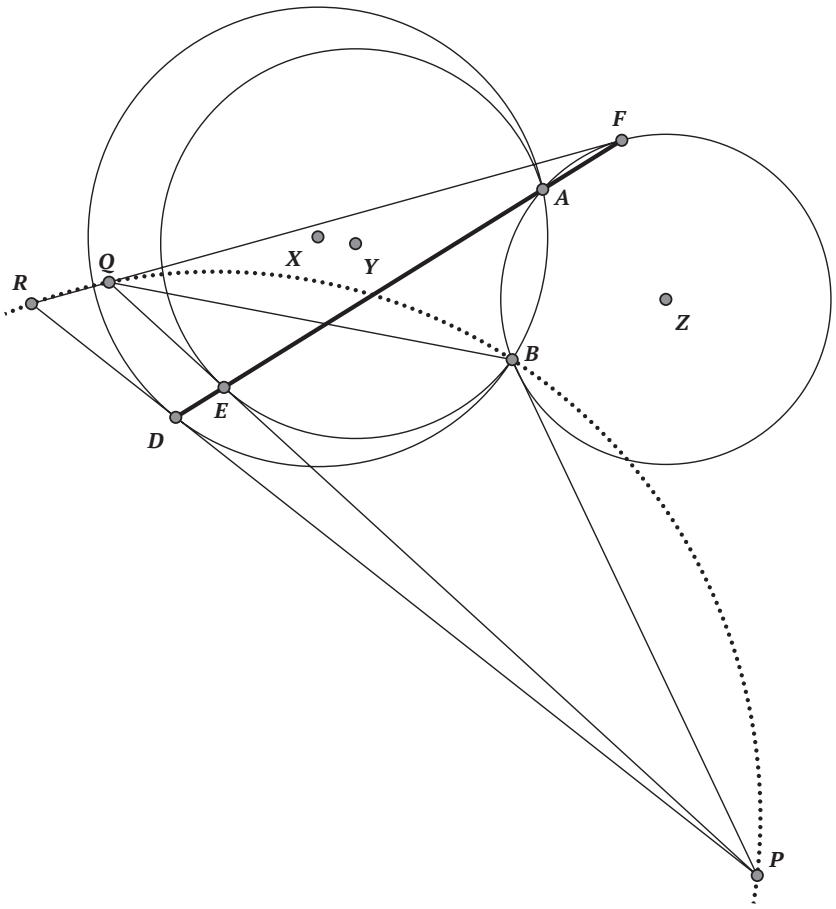


Рисунок 85

Пример 86. Пересекающиеся окружности создают пять конциклических точек

Всегда интересно получить более четырех точек на одной окружности. Рассмотрим окружности *O* и *Q*, пересекающиеся в точках *P* и *R*, как показано на рис. 86. Если продлить отрезок *PQ* таким образом, чтобы он пересекал окружность *O* в точке *A*, а отрезок *OP* – окружность *Q* в точке *B*, то получается, что точки *A*, *O*, *R*, *Q* и *B* лежат на одной окружности.

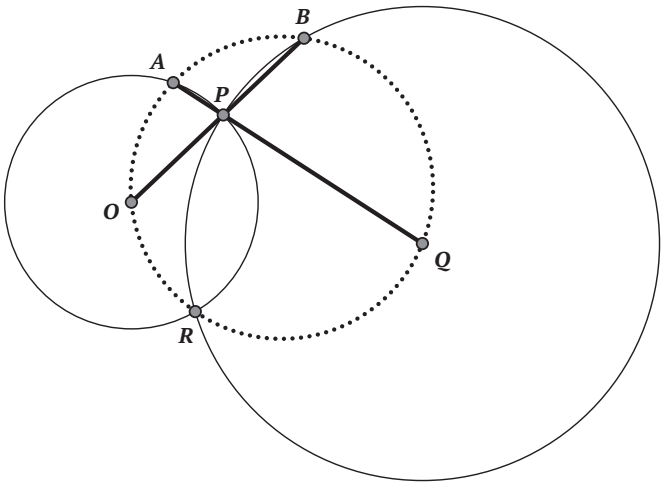


Рисунок 86

Пример 87. Конциклические центры трех связанных окружностей

На рис. 87 заданы три коллинеарные точки *A*, *B* и *C*, а также точка *P*, не лежащая на их общей прямой. Точки *R*, *S* и *T* являются центрами окружностей треугольников *PAB*, *PBC* и *PAC* соответственно. В этой относительно простой конфигурации можно заметить, что три центра окружностей лежат на одной окружности с точкой *P*.

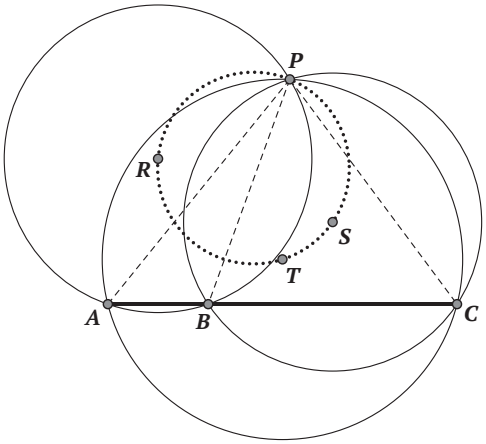


Рисунок 87

Пример 88. Две неравные окружности, вопреки логике, образуют две равные окружности

Рассмотрим две неравные окружности с центрами в точках O и Q, пересекающиеся в точках P и R. Общая касательная соприкасается с окружностями в точках A и B соответственно. Вопреки ожиданиям, описанные окружности треугольников APB и ARB имеют одинаковый размер, как показано на рис. 88.

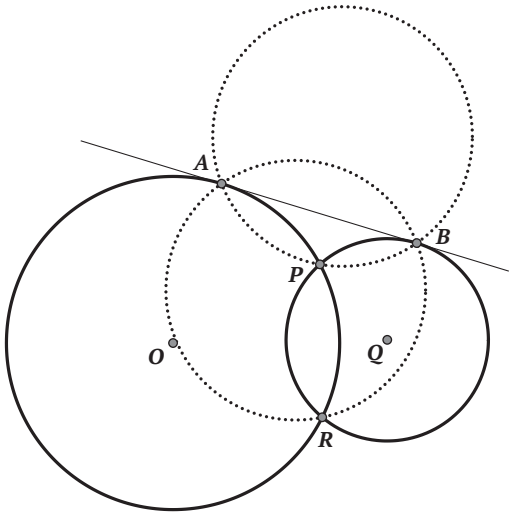


Рисунок 88

Пример 89. Свойство угла точки Микеля треугольника

Если задан треугольник *ABC* и выбраны точки *D*, *E* и *F* на отрезках *BC*, *CA* и *AB* соответственно, то окружности треугольников *AFE*, *BDF* и *CED* содержат общую точку *M*. Эта точка известна как *точка Микеля*. Это свойство не зависит от расположения точек. На рис. 89a все точки выбраны на сторонах треугольника, тогда как на рис. 89b только точка *E* находится на стороне треугольника, а точки *D* и *F* выбраны на продолжениях сторон *BC* и *AB*. В обоих случаях каждая из окружностей содержит две точки на сторонах треугольника *ABC* (или их продолжениях) и вершину между этими сторонами. Это приводит к неожиданному факту, что три окружности всегда будут содержать общую точку *M*.

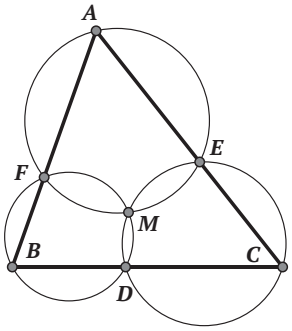


Рисунок 89a

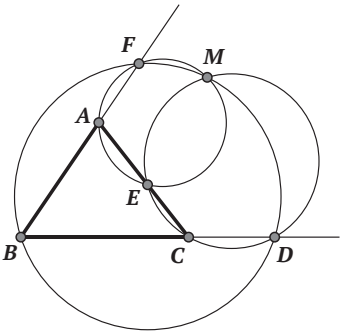


Рисунок 89b

Отрезки, соединяющие точку Микеля *M* треугольника с точками *D*, *E* и *F*, выбранными на сторонах треугольника, образуют равные углы с соответствующими сторонами треугольника. На рис. 89c имеет место $\angle AEM = \angle BFM = \angle CDM$, а на рис. 89d, где выбрана точка *X* на продлении *BA*, имеет место $\angle MEA = \angle MDB = \angle MFX$.

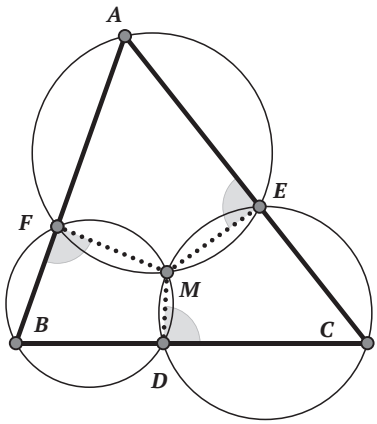


Рисунок 89c

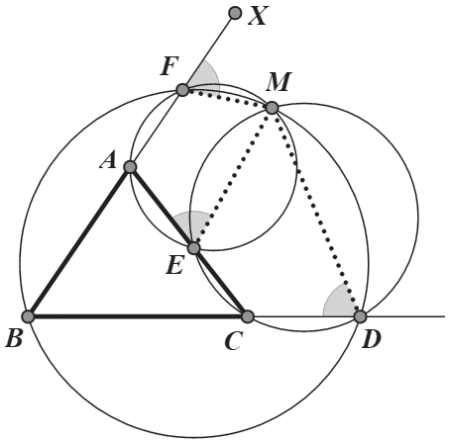


Рисунок 89d

Пример 90. Еще несколько слов о соотношении Микеля

На рис. 90 изображены четыре отрезка, пересекающихся в шести точках *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *F*. Эти отрезки образуют четыре треугольника *ADB*, *BEF*, *CDE* и *ACF*. Если начертить описанные окружности для каждого из этих треугольников, то неожиданно выясняется, что все они содержат общую точку *M*, которую мы назовем *точкой Микеля*. Кроме того, все центры четырех окружностей *P*, *Q*, *R* и *S* лежат на одной окружности вместе с точкой *M*, образуя пять неожиданных конциклических точек.

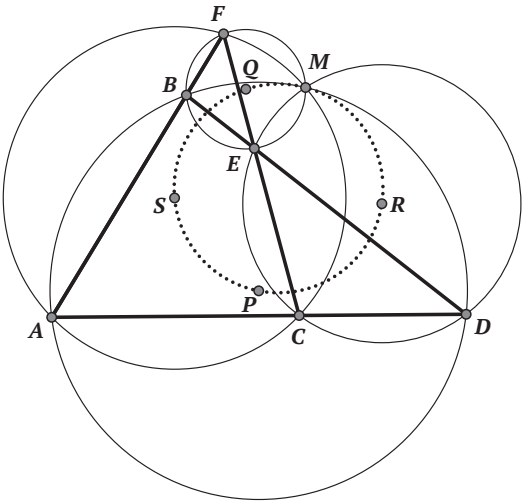


Рисунок 90

Пример 91. Три пересекающиеся окружности образуют подобные треугольники и не только

Три пересекающиеся окружности, показанные на рис. 91, имеют общую точку *O*. Треугольник *ABC* образуется при соединении центров этих трех окружностей. Линии, соединяющие точку *O* с каждым из центров окружностей, пересекают соответствующие окружности в точках *D*, *E* и *F*. При этом оказывается, что треугольники *ABC* и *DEF* имеют параллельные стороны. Кроме того, можно заметить, что стороны треугольника *DEF* содержат точки пересечения *P*, *Q* и *R* пар окружностей, как показано на рисунке.

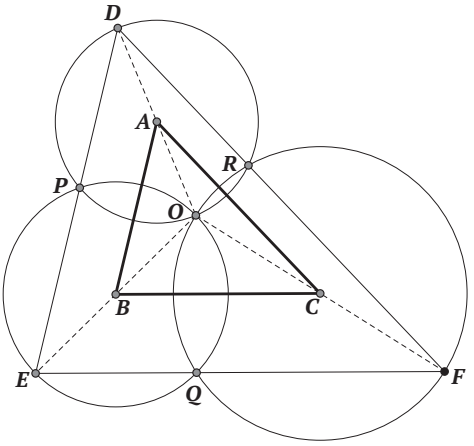


Рисунок 91

Пример 92. Равные окружности, построенные из трех равных окружностей с общей точкой

Когда три одинаковые по размеру окружности проходят через общую точку P, как показано на рис. 92, окружность, проходящая через их центры, имеет тот же размер, что и исходные три окружности. На рисунке представлены окружности с центрами Q, R и S и общей точкой P. На удивление выясняется, что другие точки A, B и C, в которых эти окружности пересекаются, определяют еще одну окружность того же размера.

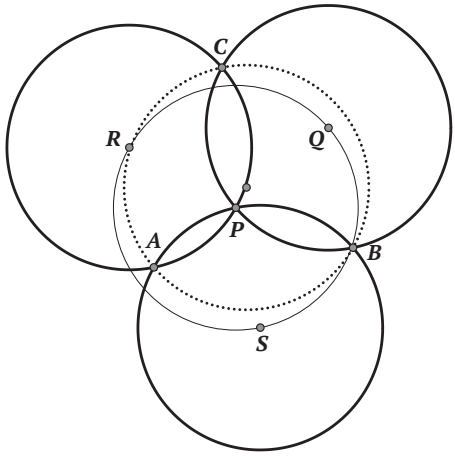


Рисунок 92

Пример 93. Построение конгруэнтных фигур с помощью трех равных окружностей с общей точкой

В конфигурации из примера 92 есть еще один интересный аспект. Как видно на рис. 93, если точка D является центром описанной окружности треугольника ABC, то четырехугольники $APBC$ и $QDRS$ являются конгруэнтными. Более того, в любом из этих конгруэнтных четырехугольников линия, соединяющая любые две точки, перпендикулярна линии, соединяющей остальные две точки. Например, имеет место $AP \perp BC$ и $BP \perp CA$.

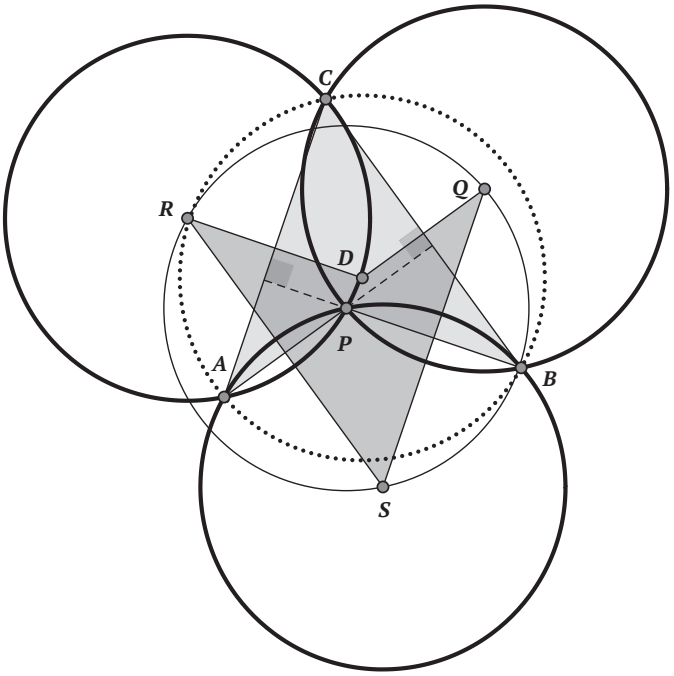


Рисунок 93

Пример 94. Интересные свойства пересекающихся окружностей

Удивительное свойство имеет место при выборе четырех точек *A*, *B*, *C* и *D* на окружности, как показано на рис. 94. Если начертить окружности, содержащие каждую пару последовательно расположенных точек, и обозначить другие точки, в которых пересекаются пары этих последовательных окружностей, соответственно как *K*, *L*, *M* и *N*, то окажется, что эти точки также лежат на одной общей окружности.

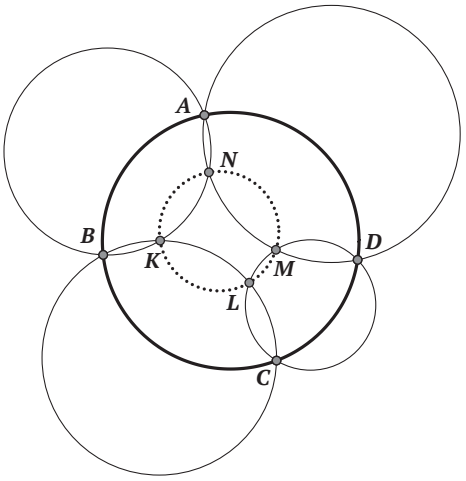


Рисунок 94

Пример 95. Четыре равные окружности образуют четырехугольник, описываемый окружностью

На рис. 95 представлены четыре равные окружности с центрами *A*, *B*, *C* и *D*. Все четыре окружности содержат общую точку *P*. Общие касательные этих четырех окружностей образуют четырехугольник *EFGH*, как показано на рисунке. Примечательно, что четырехугольник *EFGH* может быть описан окружностью, то есть четыре точки *E*, *F*, *G* и *H* расположены на одной окружности.

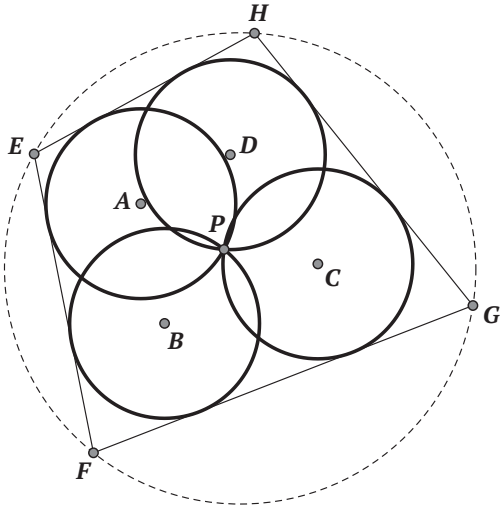


Рисунок 95

Пример 96. Треугольник Рело

На рис. 96 представлена довольно необычная фигура под названием *треугольник Рело*, получившая свое название в честь немецкого инженера Франца Рело (1829–1905). Треугольник Рело образован тремя дугами окружностей, радиус которых равен длине сторон равностороннего треугольника *ABC*, а центры дуг находятся в вершинах треугольника *ABC*. Где бы мы ни проложили пару параллельных касательных, расстояние между ними всегда будет одинаковым. Это расстояние *b* назовем шириной треугольника Рело. На рисунке это постоянное расстояние показано отрезками $AP = CQ = b$. Что удивительно, периметр треугольника Рело шириной *b* равен периметру окружности диаметром *b*.

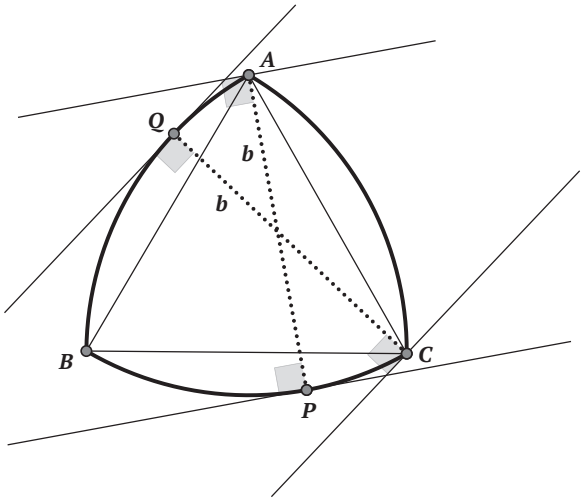


Рисунок 96

Пример 97. Еще несколько фигур с постоянной шириной

Треугольник Рело, с которым мы познакомились в примере 96, и окружность не являются единственными фигурами с постоянной шириной. На рис. 97 приведены еще два примера таких фигур. Слева в качестве исходной фигуры взят правильный пятиугольник *ABCDE*. При этом рассматривается фигура, образованная пятью дугами окружности, центры которых находятся в пяти вершинах, содержащих конечные точки соответствующих противоположных сторон. Точно так же справа представлена фигура, построенная аналогичным образом, но исходя из правильного семиугольника *FGHIJKL*. Обе эти фигуры также имеют постоянную ширину b и периметр, равный периметру окружности с диаметром b. В действительности можно построить фигуру с постоянной шириной, начертив дуги подобным образом на любом правильном многоугольнике с нечетным числом сторон.

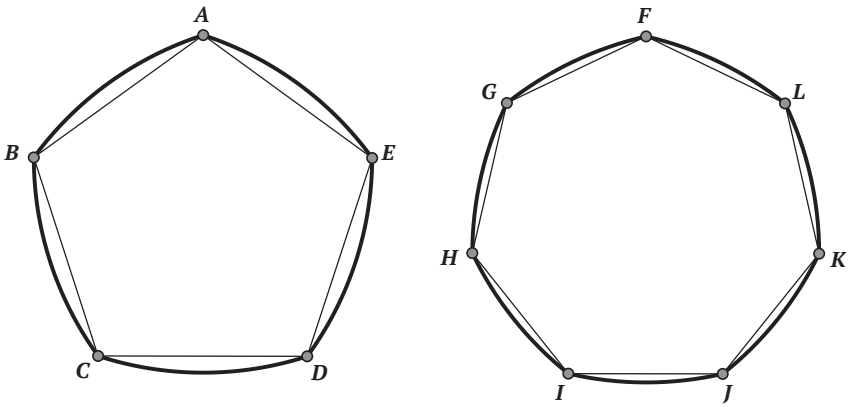


Рисунок 97

Пример 98. Определение радикальной оси пересекающихся окружностей

Рассмотрим две окружности с центрами *O* и *Q*, как показано на рис. 98, которые пересекаются в точках *A* и *B*. Требуется найти точки *P*, обладающие таким свойством, что касательные из P к обеим окружностям имеют одинаковую длину. Этими точками являются как раз точки на прямой *AB*, лежащие вне окружностей. Эту прямую *AB* назовем *радикальной (основной) осью* двух окружностей. Все точки *T* на радикальной оси обладают свойством, что равенство $TU \cdot TV = TW \cdot TX$ выполняется для всех секущих *TUV* окружности *O* и всех секущих *TWX* окружности *Q*.

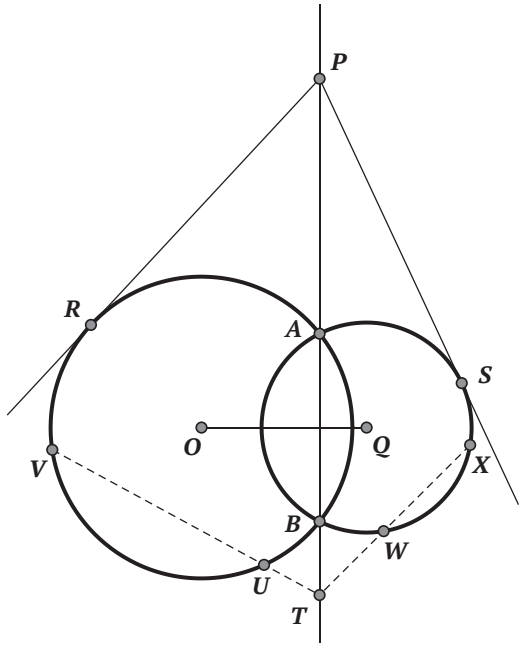


Рисунок 98

Пример 99. Радикальная ось касательных окружностей

На рис. 99 две окружности с центрами O и Q соприкасаются в точке Z. На рис. 99a окружности соприкасаются снаружи, а на рис. 99b – внутри. В каждом случае радикальной осью двух окружностей является их общая касательная в точке Z. Как и в случае пересечения, рассмотренном в примере 98, точки P на этой прямой обладают таким свойством, что касательные из P к двум окружностям имеют одинаковую длину. Кроме того, все точки T на радикальной оси вновь обладают свойством $TU \cdot TV = TW \cdot TX$, независимо от места расположения точки T на радикальной оси, точки U на окружности O или точки W на окружности Q.

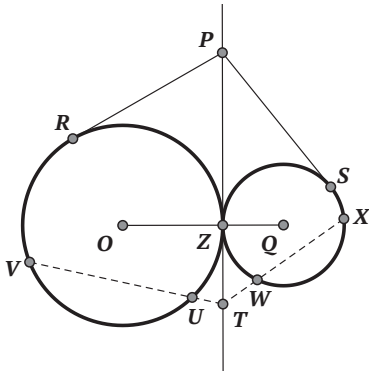


Рисунок 99a

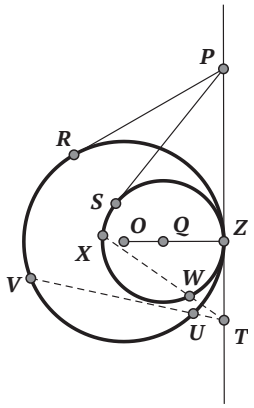


Рисунок 99b

Пример 100. Радикальная ось внешних непересекающихся окружностей

На рис. 100 представлены две окружности с центрами O и Q, которые не пересекаются и лежат вне друг друга. Все точки P, для которых касательные из P к двум окружностям имеют одинаковую длину, лежат на прямой, которая является *радикальной осью* этих двух окружностей. Эта прямая лежит между

двумя окружностями и перпендикулярна отрезку OQ. Кроме того, точки T на радикальной оси обладают таким свойством, что равенство $TU \cdot TV = TW \cdot TX$ выполняется для всех секущих TUV окружности O и всех секущих TWX окружности Q. Это не показано здесь, чтобы не усложнять рисунок, но на рис. 98 и 99a, b это свойство отображено.

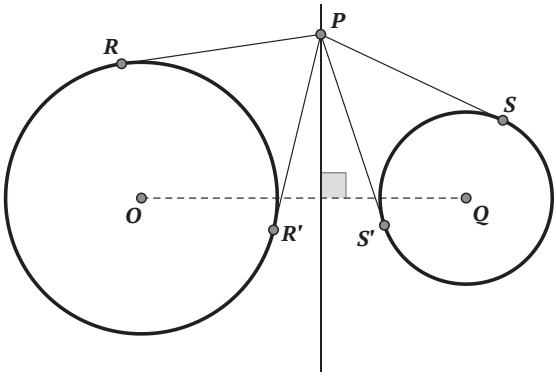


Рисунок 100

Пример 101. Радикальная ось внутренних непересекающихся окружностей

На рис. 101 представлена еще одна возможная конфигурация двух окружностей с центрами O и Q. В данном случае окружности не пересекаются и одна из них находится внутри другой: окружность Q расположена внутри окружности O. Все свойства аналогичны свойствам из примера 100. Точки P, обладающие тем свойством, что касательные из P к двум окружностям имеют одинаковую длину, лежат на *радикальной оси* двух окружностей. Как и ранее, точки T на радикальной оси также обладают тем свойством, что равенство $TU \cdot TV = TW \cdot TX$ выполняется для секущих TUV окружности O и всех секущих TWX окружности Q. Опять же, это не показано здесь, чтобы не усложнять рисунок.

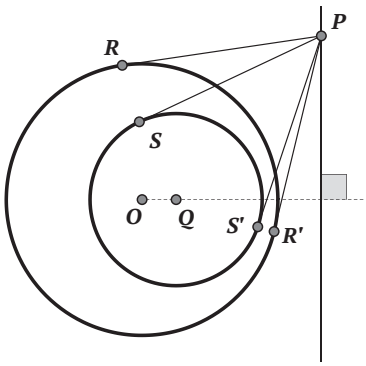


Рисунок 101

Пример 102. Совпадение пересекающихся окружностей

Как было показано в примере 98, прямая, соединяющая точки пересечения двух пересекающихся окружностей, называется их радикальной осью. Что удивительно, можно найти взаимосвязь между радикальной осью двух окружностей, построенных в треугольнике, и ортоцентром треугольника. Это видно на рис. 102, где точки *F* и *G* лежат соответственно на сторонах *BC* и *CA* треугольника *ABC*. Линии *AF* и *BG* являются диаметрами окружностей с центрами *O* и *Q* соответственно, и эти окружности пересекаются в точках *K* и *L*. Примечательно, что радикальная ось *KL* этих окружностей проходит через ортоцентр *H* треугольника *ABC*.

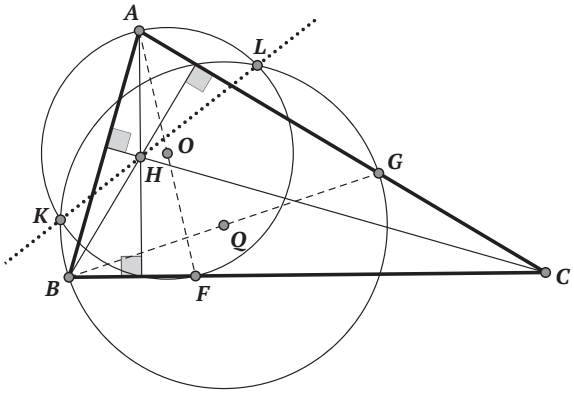


Рисунок 102

Пример 103. Радикальный центр трех окружностей

Радикальные оси трех заданных окружностей, центры которых не лежат на одной прямой, сходятся в одной точке. Это проиллюстрировано на рис. 103, где окружности с центрами *O*, *Q* и *R* определяют три радикальные оси, пересекающиеся в точке *P*. Эта точка *P* является центром окружности *c*, которая пересекает все три окружности под прямым углом, что решает математическую задачу, широко известную как *задача Монжа*.

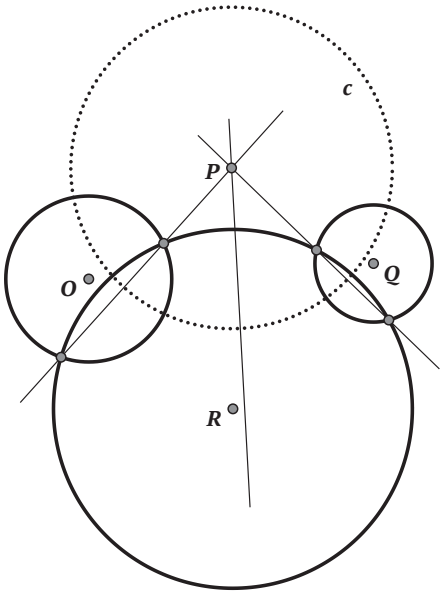


Рисунок 103

Пример 104. Удивительный результат для случайно выбранной точки вне окружности

Точка P на продолжении радиуса окружности O выбирается случайным образом вне окружности, как показано на рис. 104. Затем выбирается точка P' вдоль OP таким образом, чтобы $OP \cdot OP' = r^2$, где r – это радиус окружности. Точка A выбирается случайным образом на окружности O. Поразительно, но при этом оказывается, что треугольники OAP и OAP' подобны.

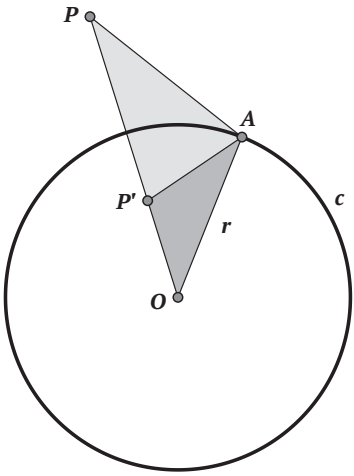


Рисунок 104

Пример 105. Неожиданные точки на касательной к окружности

На рис. 105 представлена окружность c с центром O, радиусом r и точкой A на ней. Если выбрать любую точку P на окружности, имеющей диаметр OA, то можно определить точку P' на продолжении OP за пределы окружности таким образом, что $OP \cdot P' = r^2$. Тогда неожиданно оказывается, что точка P' всегда лежит на касательной t к окружности c в точке A.

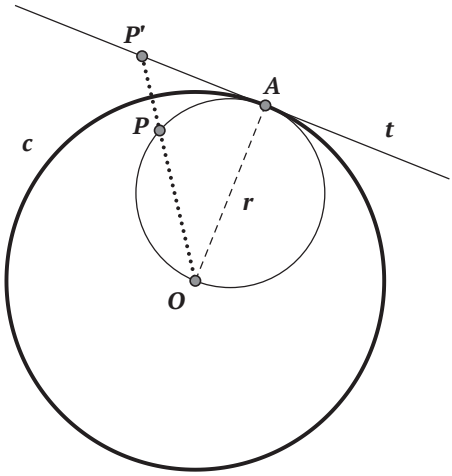


Рисунок 105

Пример 106. Точки на секущей определяют точки на особой вписанной окружности

На рис. 106 окружность c имеет центр O, радиус r и секущую s, пересекающую ее в точках A и B. Если выбрать любую точку P на прямой s, то можно определить точку P' на продолжении OP таким образом, что $OP \cdot P' = r^2$. При этом выясняется, что точка P' всегда лежит на описанной окружности треугольника OBA.

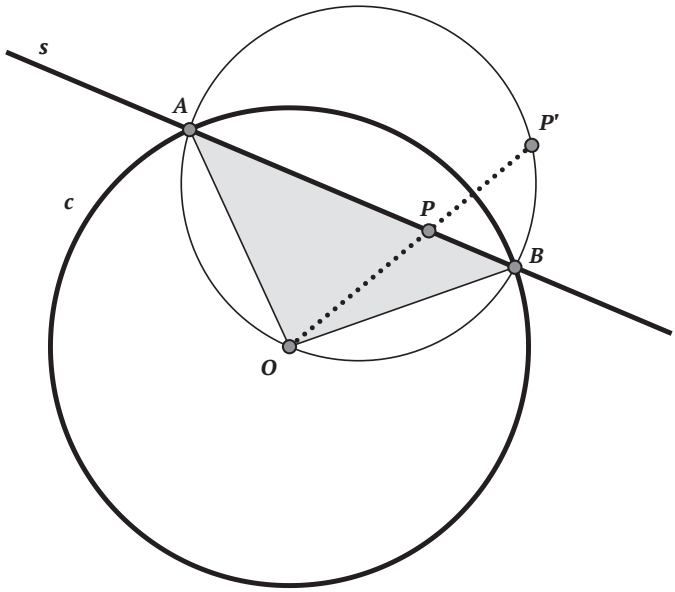


Рисунок 106

Пример 107. Внешняя окружность образует внутреннюю окружность

На рис. 107 представлены окружность c с центром O и радиусом r, а также другая окружность d, лежащая снаружи окружности c. Примечательно, что если произвольные точки P окружности d соотносятся с точками P' на OP таким образом, что выполняется соотношение $OP \cdot OP' = r^2$, то все полученные точки P' лежат на общей окружности d', находящейся внутри окружности c.

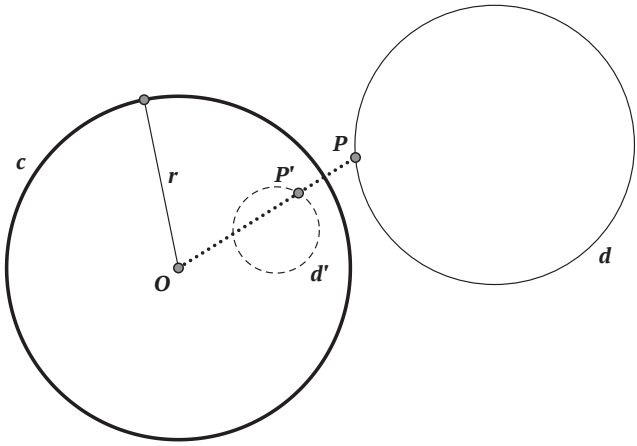


Рисунок 107

Пример 108. Две окружности образуют концикличские точки

На рис. 108 представлена окружность c с центром O и радиусом r. Внутри окружности c находится другая окружность d, которая содержит точку O внутри себя. Когда произвольные точки P окружности d соотносятся с точками P' на OP таким образом, что выполняется соотношение $OP \cdot OP' = r^2$, тогда все полученные точки P' лежат на общей окружности d', которая содержит окружность c внутри себя.

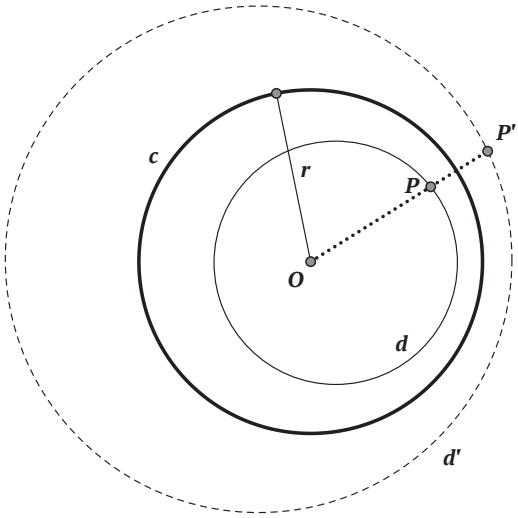


Рисунок 108

Пример 109. Построение полуокружностей на сторонах квадрата

На рис. 109 квадрат $ABCD$ вписан в окружность c с центром O и радиусом r. Выберем произвольную точку P на одной из сторон квадрата $ABCD$. Затем выбираем точку P' на продолжении OP за пределы окружности таким образом, чтобы выполнялось соотношение $OP \cdot P' = r^2$. Для всех точек P, лежащих на сторонах квадрата $ABCD$, точки P' определяют четыре полуокружности с диаметрами AB, BC, CD и DA, как показано на рисунке.

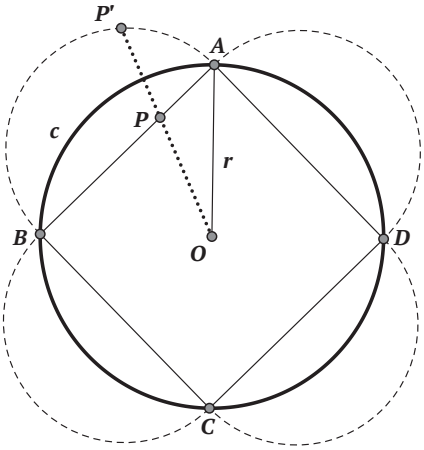


Рисунок 109

Пример 110. Две окружности образуют неожиданный равносторонний треугольник

Когда две окружности одинакового размера включают в себя центры друг друга, линия, проведенная из одной точки пересечения этих двух окружностей, всегда образует равносторонний треугольник. Это видно на рис. 110, где представлены две одинаковые по размеру окружности с центрами *O* и *Q*. Точка *O* лежит на окружности *Q*, а точка *Q* находится на окружности *O*, и окружности пересекаются в точках *A* и *D*. От точки пересечения *D* проводится прямая, которая пересекает окружности *Q* и *O* в точках *B* и *C* соответственно. Оказывается, что *ABC* представляет собой равносторонний треугольник.

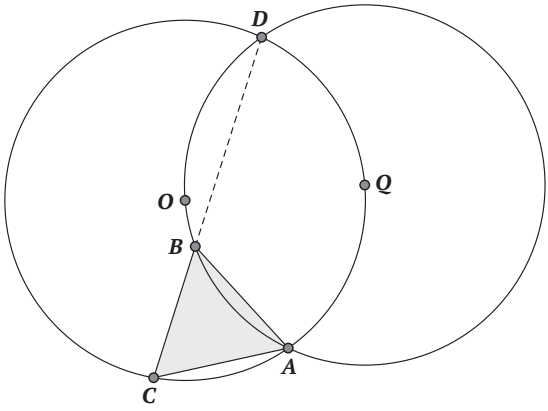


Рисунок 110

Пример 111. Две равные окружности образуют равнобедренный треугольник

На рис. 111 две одинаковые окружности с центрами *O* и *Q* пересекаются в точках *A* и *B*. Линия, проходящая через точку *A*, пересекает окружность *O* в точке *X*, лежащей вне окружности *Q*, и пересекает окружность *Q* в точке *Y*, лежащей вне окружности *O*. Примечательно, что треугольник *BYX* всегда оказывается равнобедренным, вне зависимости от того, как мы проводим линию через точку *A*.

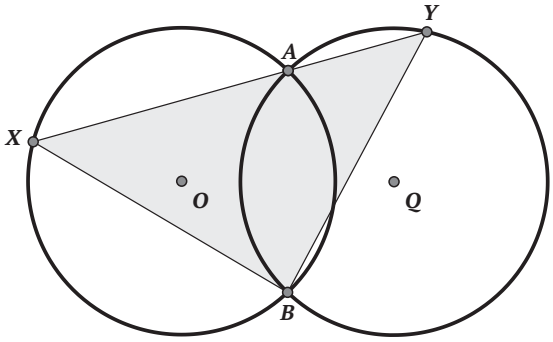


Рисунок 111

Пример 112. Две одинаковые окружности образуют другой равнобедренный треугольник

На рис. 112 две равные окружности с центрами *O* и *Q* пересекаются в точках *A* и *B*. Линия, проходящая через точку *A*, пересекает окружность *O* в точке *X* (внутри окружности *Q*) и пересекает окружность *Q* в точке *Y*, лежащей снаружи окружности *O*. В этой конфигурации можно также заметить, что треугольник *BYX* является равнобедренным, вне зависимости от выбора прямой, проходящей через *A*.

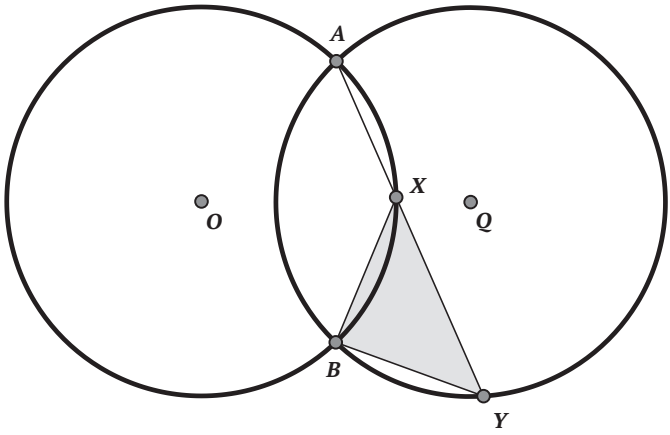


Рисунок 112

Пример 113. Неожиданная биссектриса угла

Окружности с центрами O и Q пересекаются в точках A и B, как показано на рис. 113. На окружности O выбирается точка C, а на окружности Q выбирается точка D таким образом, чтобы точки C, B и D лежали на одной прямой. Линия AD пересекает окружность O в точке E, а линия CE пересекает окружность Q в точках X и Y. На удивление, AD является биссектрисой угла $\angle XAY$.

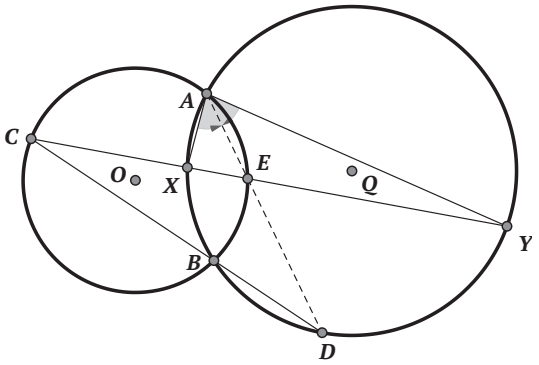


Рисунок 113

Пример 114. Удивительное равенство углов в пересекающихся окружностях

Две окружности с центрами O и Q пересекаются в точках X и Y, как показано на рис. 114. Любая произвольная прямая пересекает окружность O в точках A и B, а окружность Q – в точках C и D. Что удивительно, вне зависимости от выбора этой прямой имеет место равенство $\angle AXC = \angle DYB$.

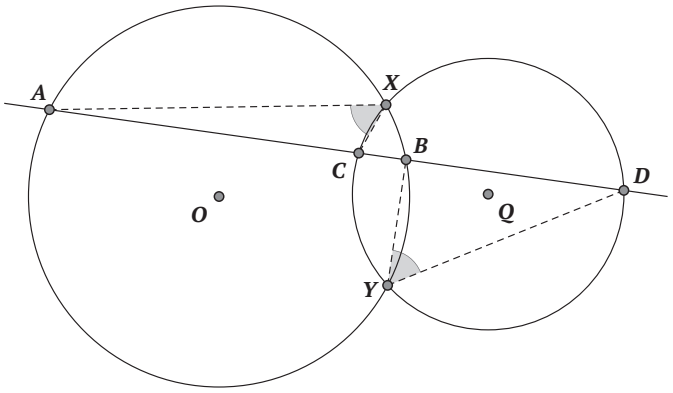


Рисунок 114

Пример 115. Циклический четырехугольник образует две окружности с перпендикулярными радиусами

На рис. 115 циклический четырехугольник *ABCD* вписан в окружность с центром *O*, а его продолженные стороны пересекаются в точках *E* и *F*, как показано на рисунке. Отрезок *EF* является диаметром окружности с центром *M*, которая пересекает окружность *O* в точке *N*. Как ни удивительно, но радиусы *NO* и *NM* этих двух окружностей перпендикулярны.

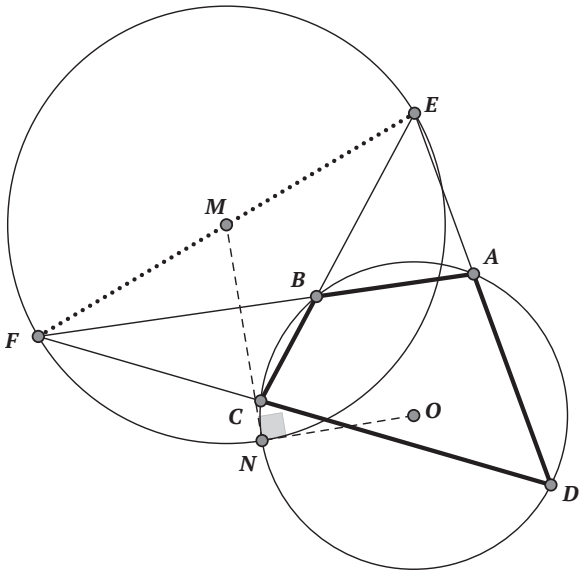


Рисунок 115

Пример 116. Окружности, образующие равенство, казалось бы, несвязанных отрезков

На рис. 116 в качестве диаметра для окружности *O* выступает отрезок *CD*. Точка *D* является серединой дуги *AB*. Продолжение хорды *CE* пересекает продолжение хорды *AB* в точке *F*. Окружность с центром *C* содержит середину *H* отрезка *EF* и пересекает *BD* в точке *G*. Совершенно неожиданно выясняется, что $BG = HE = HF$.

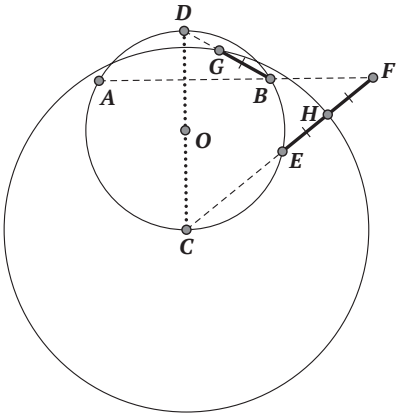


Рисунок 116

Пример 117. Связанные равносторонние треугольники, вписанные в концентрические окружности

Интересная зависимость возникает в случае, когда два равносторонних треугольника вписаны в концентрические окружности. На рис. 117 треугольник ABC вписан в большую окружность O, а треугольник $A'B'C'$ вписан в меньшую окружность O. Точка P лежит на большой окружности, а точка P' находится на меньшей окружности. Сумма квадратов PA', PB' и PC' равна сумме квадратов $P'A$, $P'B$ и $P'C$. Символически это можно записать следующим образом: $(PA')^2 + (PB')^2 + (PC')^2 = (P'A)^2 + (P'B)^2 + (P'C)^2$.

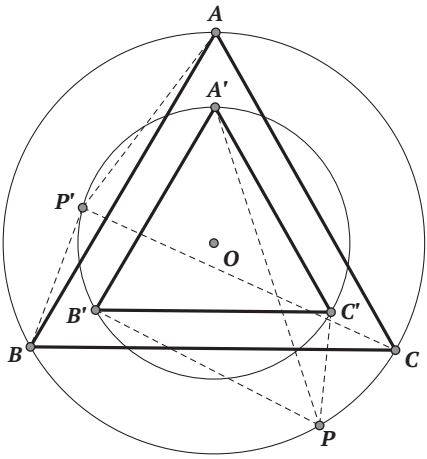


Рисунок 117

Пример 118. Пересекающиеся окружности удивительным образом формируют равные отрезки

Перед нами стоит любопытная задача, связанная с двумя пересекающимися окружностями, одна из которых включает в себя центр другой. Такие окружности, как можно убедиться на практике, образуют два пересекающихся отрезка, которые всегда оказываются равными по длине. Это можно увидеть на рис. 118, где окружность с центром A включает в себя центр окружности B. Окружности пересекаются в точках C и D. Если начертить две хорды CE и DF в окружности с центром B таким образом, чтобы они пересекались в общей точке P на окружности A, то неожиданным результатом будет тот факт, что $CE = DF$.

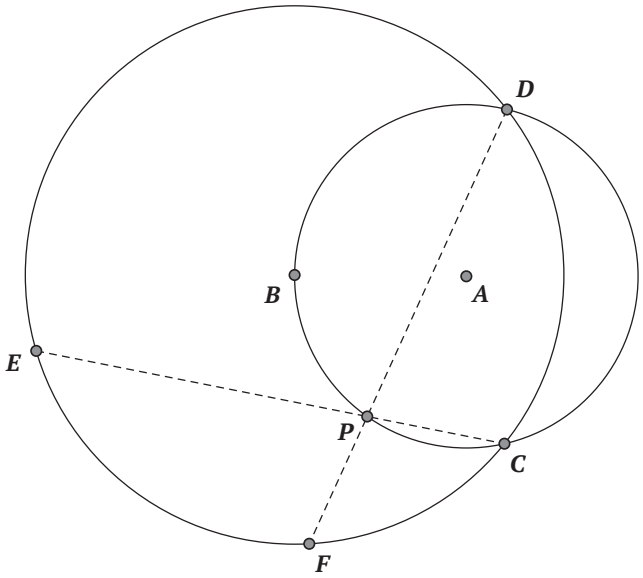


Рисунок 118

Пример 119. Две пересекающиеся окружности образуют неожиданное соотношение отрезков

На рис. 119 окружность с центром Q включает в себя центр O второй окружности. Точка A является точкой пересечения двух окружностей, а диаметр AQB окружности Q пересекает окружность O в точке C. Как ни странно, но оказывается, что $2OC^2 = AB \cdot AC$.

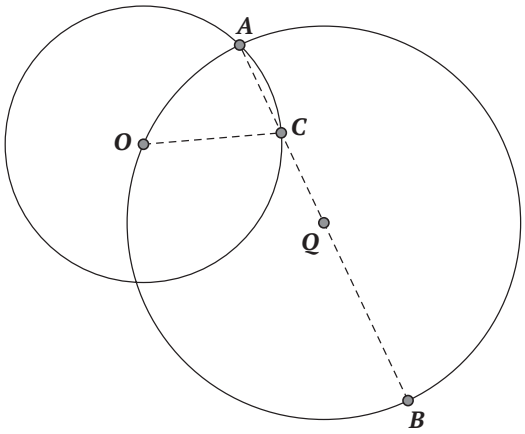


Рисунок 119

Пример 120. Четырехугольник с двумя пересекающимися окружностями образует еще одну окружность

На рис. 120 четырехугольник *ABCD* разбит на два треугольника *ABC* и *ACD*, каждый из которых описывается окружностью. Описанная окружность треугольника *ABC* пересекает *DC* и *DA* в точках *E* и *F* соответственно, а описанная окружность треугольника *ACD* пересекает *BA* и *BC* в точках *P* и *Q* соответственно. Линии *BF* и *BE* пересекают *PQ* в точках *R* и *S* соответственно. На удивление, точки *E*, *F*, *R* и *S* также оказываются лежащими на одной окружности.

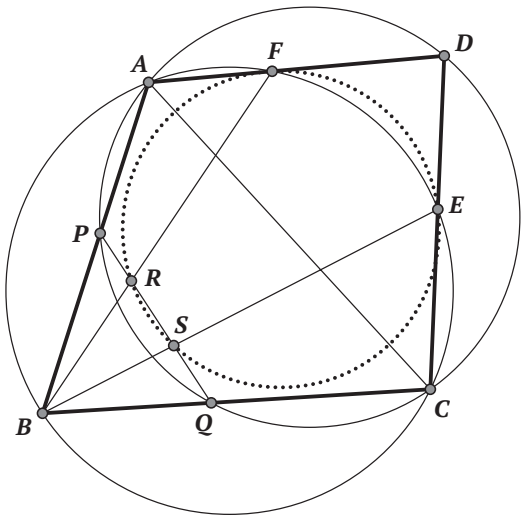


Рисунок 120

Пример 121. Прерванная хорда

На рис. 121 представлен треугольник *ABC*, вписанный в окружность *O*. Точка *M* представляет собой середину дуги *BAC*, а перпендикуляр из точки *M* к отрезку *AB* пересекает его в точке *E*. Примечательно, что *BE* = *AE* + *AC*.

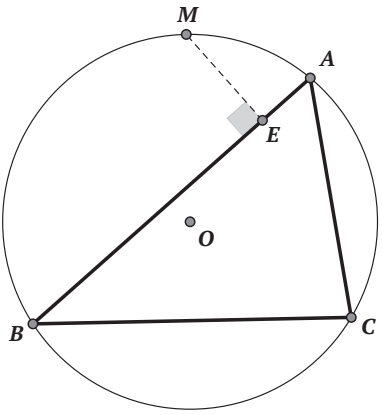


Рисунок 121

Пример 122. Касательные образуют равные отрезки

Окружности с центрами *O* и *Q* пересекаются в точках *A* и *B*, как показано на рис. 122. Точка *C* является точкой пересечения окружности *O* с касательной к окружности *Q* в точке *A*, а точка *D* представляет собой точку пересечения окружности *Q* с касательной к окружности *O* в точке *A*. Точка *P* является точкой пересечения продолжения отрезка *CB* с окружностью *Q*. Удивительно, но получается, что *AD* = *AP*.

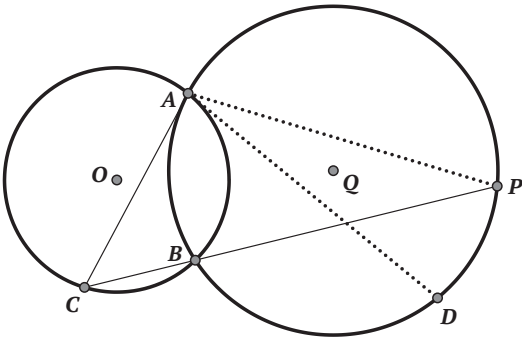


Рисунок 122

Пример 123. Четвертый угол прямоугольника находится на особой окружности

На рис. 123 две окружности с центрами *O* и *Q* пересекаются в точках *A* и *B*. Линия, проходящая через *B* и параллельная *OQ*, пересекает окружности *O* и *Q* в точках *X* и *Y* соответственно. Если начертить любой прямоугольник *ADEF* с вершиной *D* на окружности *O* и вершиной *F* на окружности *Q*, то окажется, что точка *E* обязательно будет находиться на окружности с диаметром *XY*.

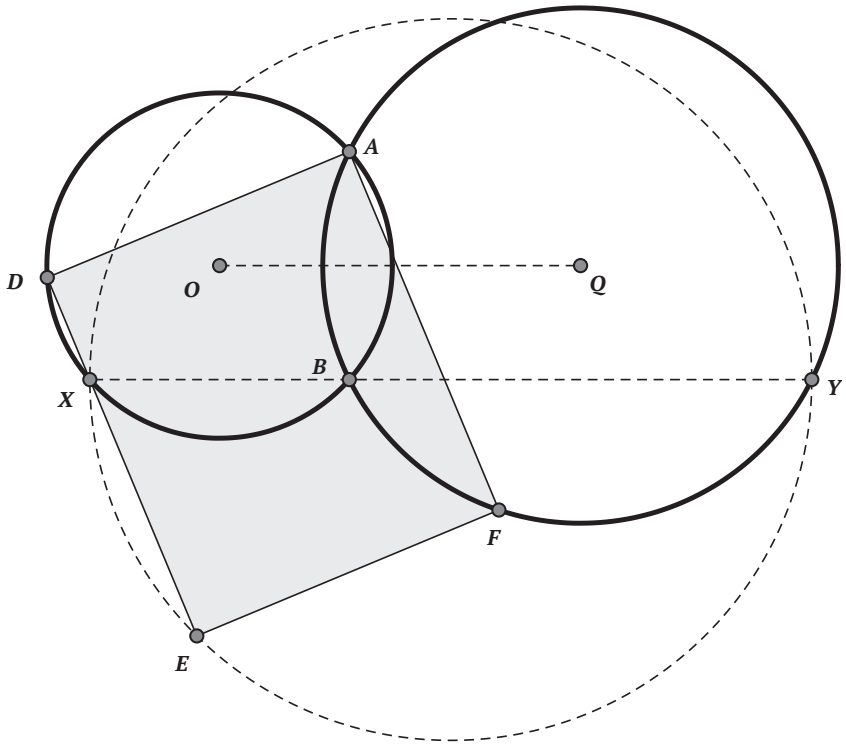


Рисунок 123

Пример 124. Построение равных хорд на двух окружностях

На рис. 124 представлены две непересекающиеся окружности с центрами *O* и *Q*. Точка *M* является серединой отрезка *OQ* и, следовательно, центром окружности с диаметром *OQ*. Эта окружность пересекает окружность *O* в точке *A* и окружность *Q* в точке *B*, при этом точки *A* и *B* лежат по одну сторону от прямой *OQ*. Продолжение отрезка *AB* пересекает окружность *O* во второй раз в точке *C* и пересекает окружность *Q* во второй раз в точке *D*. Неожиданно выясняется, что $AC = BD$.

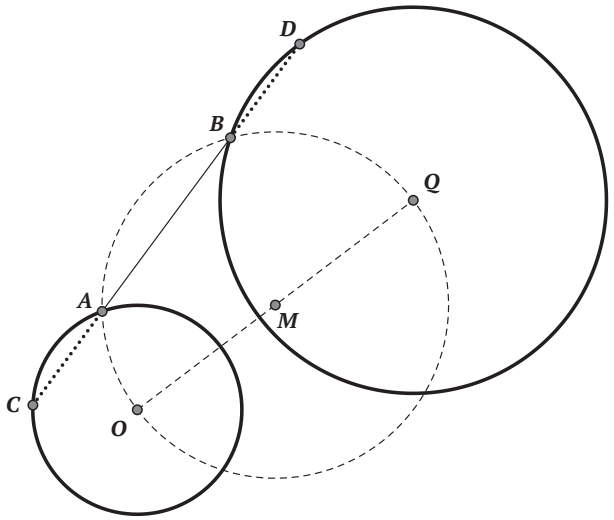


Рисунок 124

Пример 125. Необычное построение биссектрисы угла

В этом примере мы встречаемся с необычным методом построения биссектрисы угла в треугольнике. На рис. 125 представлен треугольник ABC с точками D и E на сторонах BC и AC соответственно, так что $BD = AE$. Описанные окружности треугольников ADC и BCE пересекаются во внешней точке P. Что удивительно, CP является биссектрисой $\angle ACB$.

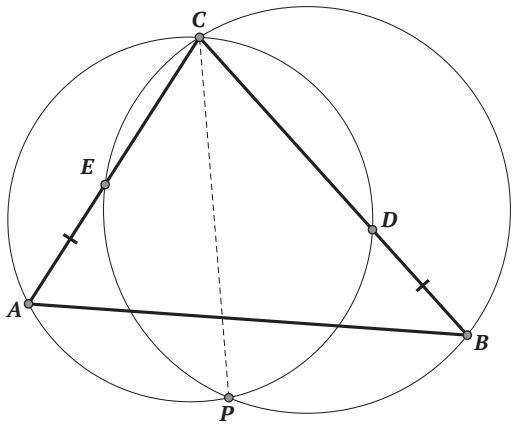


Рисунок 125

Пример 126. Квадрат из двух окружностей с неожиданной площадью

Даны две точки A и B, как показано на рис. 126. Окружность с центром O и радиусом r касается прямой AB в точке A, а окружность с центром Q и радиусом s касается прямой AB в точке B. Другой точкой пересечения этих двух окружностей является точка C. Точка M является центром окружности, описываемой треугольником ABC. Если начертить квадрат со стороной CM, то его площадь равна произведению радиусов окружностей O и Q, то есть $r \cdot s$.

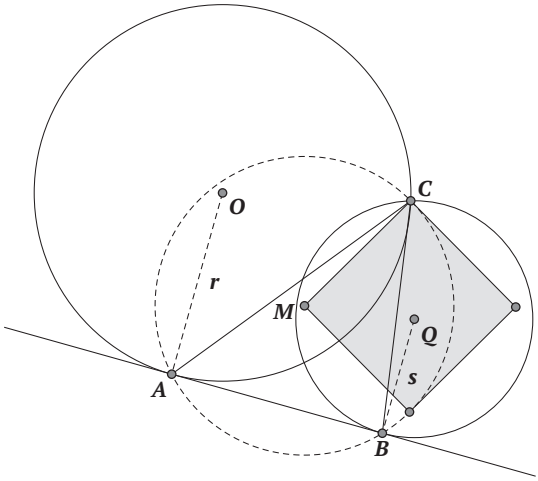


Рисунок 126

Пример 127. Неожиданный центр описанной окружности

Окружность с центром O содержит четыре точки A, B, C и D, как показано на рис. 127, где AC является диаметром окружности. Окружность с центром B и радиусом AD пересекает окружность с центром D и радиусом AB в точке P. Окружность B пересекает окружность O в точке Q, а окружность D пересекает окружность O в точке R. Точки P, Q и R лежат на стороне отрезка BC, противоположной точке A. Получается, что точка C является центром окружности, содержащей точки P, Q и R, и имеет место соотношение $CP = CQ = CR$.

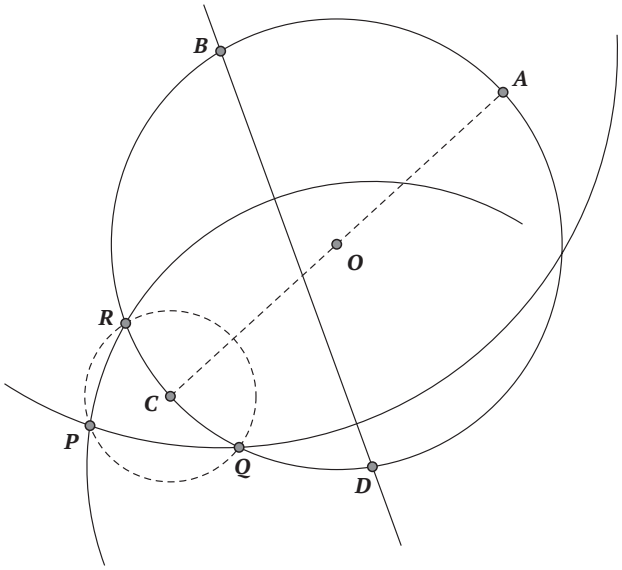


Рисунок 127

Пример 128. Хорды постоянной длины

На рис. 128 представлены окружности с центрами *O* и *Q*, которые пересекаются в точках *A* и *B*. Выберем произвольную точку *P* на окружности *Q*. *PA* пересекает окружность *O* во второй раз в точке *X*, а линия *PB* пересекает окружность *O* во второй раз в точке *Y*. Удивительно, но оказывается, что длина отрезка *XY* имеет постоянное значение, не зависящее от выбора точки *P*.

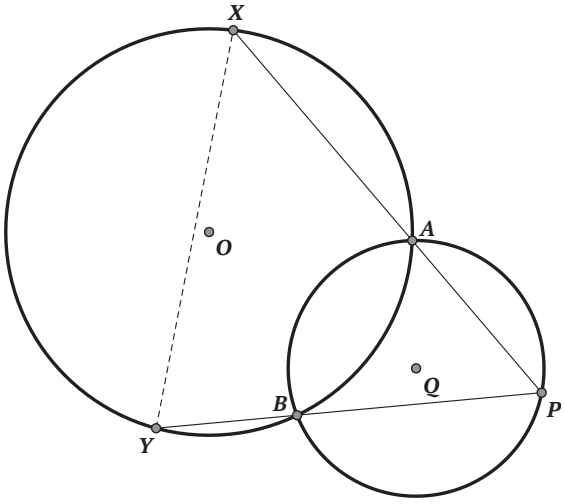


Рисунок 128

Пример 129. Неожиданное равенство двух особенных хорд

На рис. 129 представлены окружности с центрами O и Q, при этом точка Q лежит на окружности O. Эти окружности пересекаются в точках A и B. Касательная к окружности O в точке A пересекает окружность Q в точке C. Выясняется, что общая хорда AB имеет ту же длину, что и отрезок касательной AC; другими словами, $AB = AC$.

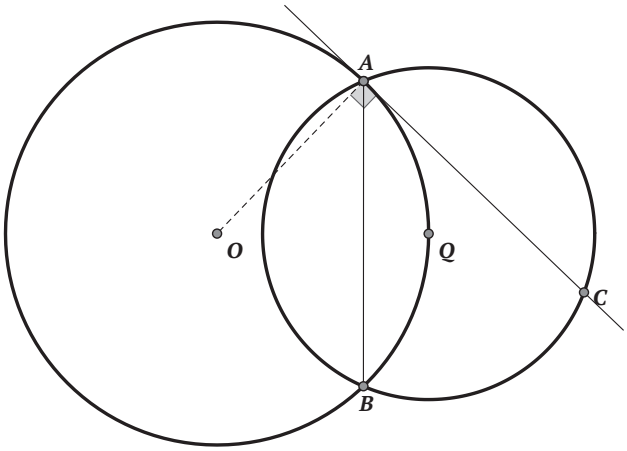


Рисунок 129

Пример 130. Удивительная общая точка трех окружностей

На рис. 130 изображены три внешне не пересекающиеся окружности с центрами O, P и Q. Общие внутренние касательные окружностей P и Q пересекаются в точке A, общие внутренние касательные окружностей Q и O пересекаются в точке B, а общие внутренние касательные окружностей O и P пересекаются в точке C. Оказывается, что прямые OA, PB и QC сходятся в точке E.

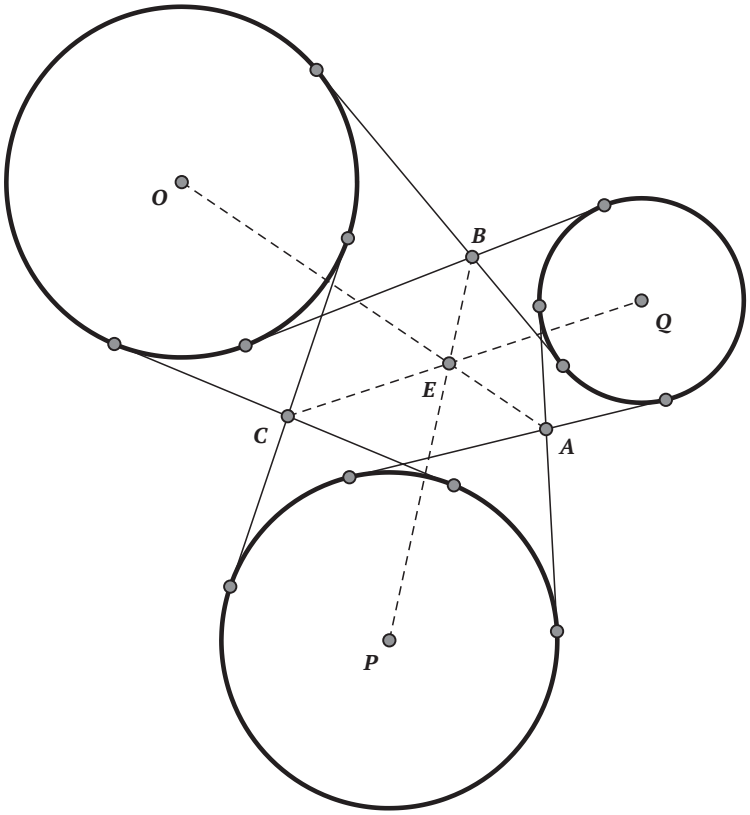


Рисунок 130

Пример 131. Перпендикулярные окружности образуют диаметр

На рис. 131 две окружности с центрами O и Q пересекаются под прямым углом в точках A и B. Точка P выбирается в любом месте на окружности Q внутри окружности O. Точка X является точкой пересечения AP с окружностью O, а точка Y является точкой пересечения BP с окружностью O. Выясняется, что XY является диаметром окружности O.

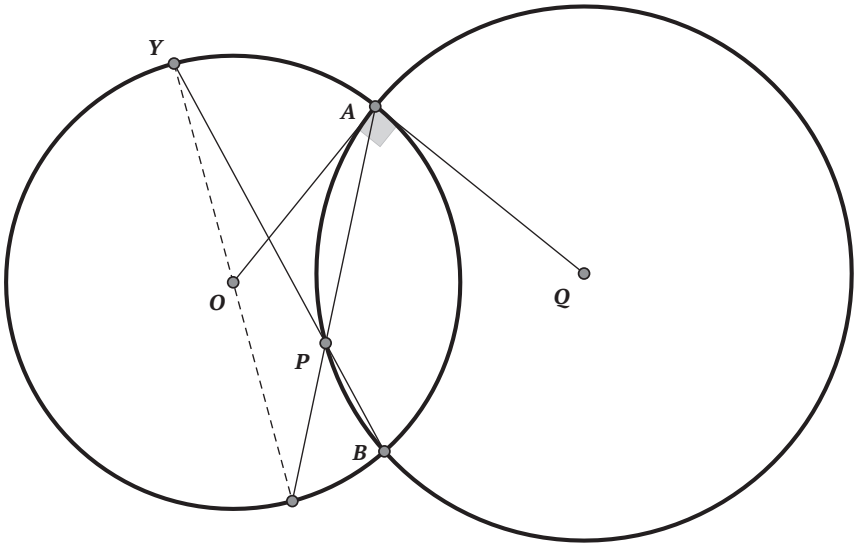


Рисунок 131

2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРИМЕРОВ

Пример 1. Треугольник определяет окружность

Считается общеизвестным фактом, что три вершины треугольника однозначно определяют центр описанной окружности, но стоит напомнить причину этого. Как видно на рис. 1-Р, все точки, расположенные на одинаковом расстоянии от вершин *A* и *B*, лежат на биссектрисе *f* отрезка *AB*, которая проходит через середину *F* отрезка *AB*. Точно так же все точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от вершин *B* и *C*, лежат на биссектрисе *d* отрезка *BC*, которая содержит середину *D* отрезка *BC*. Прямые *f* и *d* пересекаются в единственной точке *O*, которая имеет свойство *OA* = *OB* (поскольку это точка на *f*) и *OB* = *OC* (поскольку это точка на *d*). Таким образом, *OA* = *OB* = *OC*.

Обратим внимание на то, что поскольку *OC* = *OA*, точка *O* лежит также на биссектрисе *e* отрезка *CA*. Точка *O*, таким образом, является общей точкой биссектрис всех трех сторон треугольника *ABC*, а это значит, что она является центром описанной окружности треугольника *ABC*.

Стоит повторить некоторые элементарные принципы школьной геометрии, поскольку «почему» зачастую бывает столь же увлекательным, как и «что»!

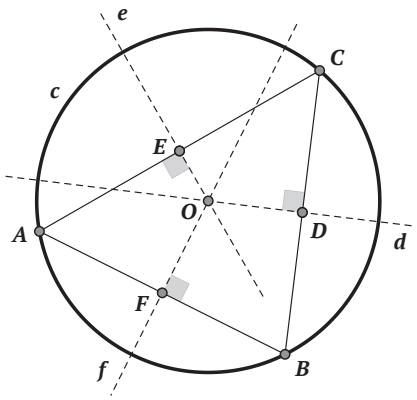


Рисунок 1-Р

Пример 2. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу в точке касания

Почему именно линия, перпендикулярная радиусу в точке A окружности, имеет с окружностью только одну общую точку? На рис. 2-Р мы предполагаем существование второй точки $B \neq A$, лежащей как на окружности, так и на прямой, проходящей через A и перпендикулярной OA. Если такая точка B существует, то треугольник OBA является прямоугольным с гипотенузой OB. Согласно теореме Пифагора, имеет место $OB^2 = OA^2 + AB^2$. Поскольку $AB > 0$, тогда $OB > OA = r$, что противоречит предположению о том, что точка B лежит на окружности с центром O и радиусом r. Из этого следует, что такой второй точки существовать не может, и, следовательно, прямая, перпендикулярная OA, является касательной к окружности в точке A.

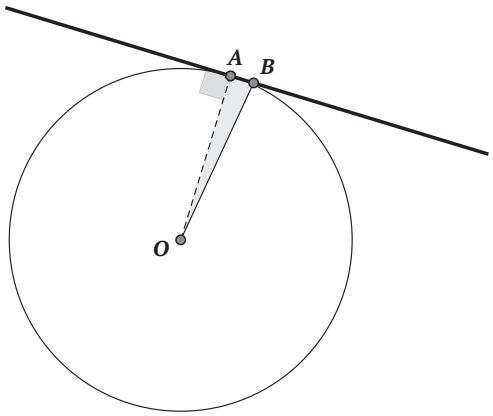


Рисунок 2-Р

Пример 3. Касательные к окружности, проходящие через одну и ту же точку, имеют одинаковую длину

Этот пример является всего лишь следствием симметрии конфигурации относительно прямой *OP*. Если нам нужно дать более конкретное доказательство равенства касательных, рассмотрим треугольники *PAO* и *POB*, как показано на рис. 3-P. Отметив, что $\angle OAP = \angle PBO = 90°$ следует из примера 2, а $OA = OB = r$, мы видим, что оба этих треугольника являются прямоугольными с общей гипотенузой *OP* и стороной длиной *r*. Следовательно, они конгруэнтны, и мы имеем $PA = PB$.

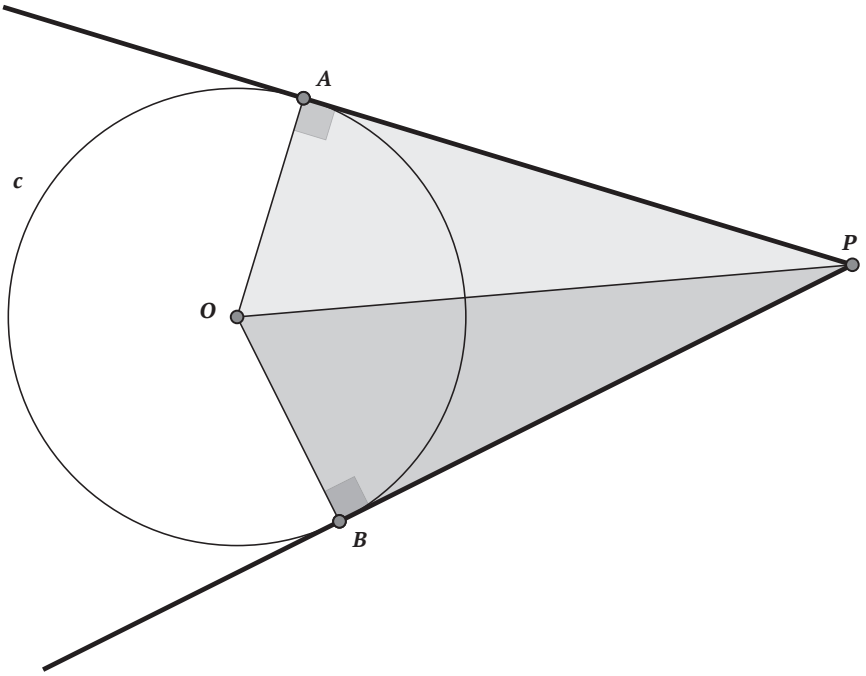


Рисунок 3-P

Пример 4. Угол между касательными к окружности, проходящими через одну и ту же точку, дополняет угол между пересекающимися дугами

На рис. 4-P можно заметить, что мы можем записать следующее: $\angle APB = \angle = \angle P = ½$ (большая $\overset{\frown}{AB}$ − малая $\overset{\frown}{AB}$) = ½ ((360° − ∠BOA) − $\angle BOA$) = 180° − $\angle BOA$. Это доказывает эквивалентность двух обозначений. Из примера 3 известно, что $\angle OAP = \angle PBO = 90°$, а если рассматривать четырехугольник *OBPA*, то получим $\angle APB = 360° - \angle OAP - \angle BOA - \angle PBO = 360° - 90° - \angle BOA - 90° = 180° - \angle BOA$.

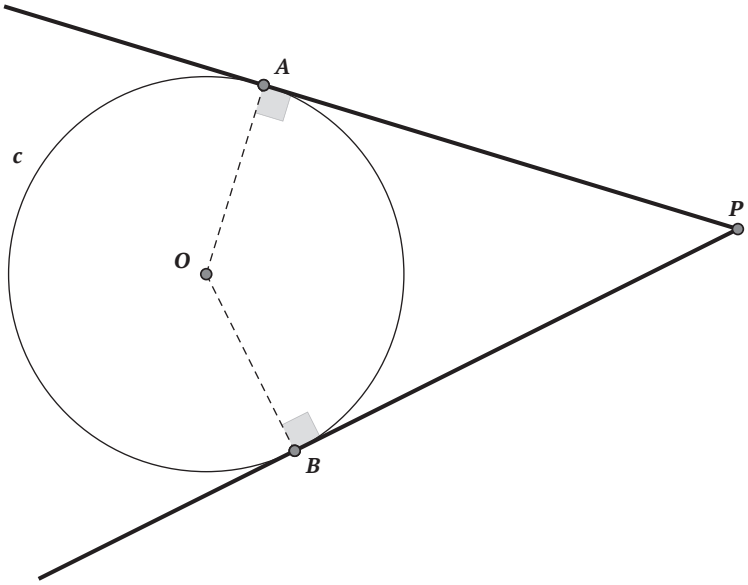


Рисунок 4-P

Пример 5. Угол между касательной к окружности и хордой

Этот результат является непосредственным следствием того, что треугольник *OBA* является равнобедренным. На рис. 5-P можно видеть, что *OA* и *OB* являются радиусами окружности *c*. Это означает, что $\angle OAB = \angle ABO$, и поскольку известно, что $\angle PBO = 90°$, получаем $\angle PBA = 90° - \angle ABO = \frac{1}{2}(180° - 2\angle ABO) = \frac{1}{2}\angle BOA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$.

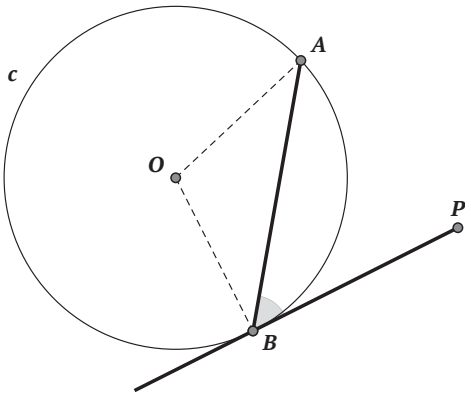


Рисунок 5-P

Пример 6. Угол, образованный двумя хордами окружности

На рис. 6-Р нанесены хорды *AC*, *CB* и *BD*. Поскольку углы $\angle BAC$ и $\angle BDC$ образуются на хорде *BC*, они являются равными. Так как вертикальные углы $\angle CPA$ и $\angle DPB$ также равны, можно заключить, что треугольники *PCA* и *PDB* подобны. Отсюда получаем $\frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP}$, что эквивалентно $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.

Теперь, обратив внимание на треугольник *PBC*, мы видим, что внешний угол $\angle CPA = \angle CBP + \angle PCB$. Таким образом, поскольку $\angle CBP = \angle CBA = \frac{1}{2}\angle COA$ $\angle PCB = \angle DCB = \frac{1}{2}\angle DOB$, можно получить $\angle CPA = \frac{1}{2}\angle COA + \frac{1}{2}\angle DOB = \frac{1}{2}(\angle COA + \angle DOB)$, или $\angle CPA = (\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$.

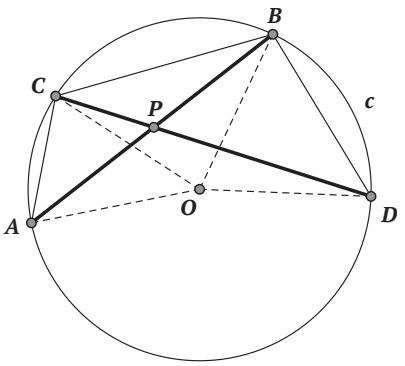


Рисунок 6-Р

Пример 7. Неожиданные дополнительные углы

На рис. 7-Р сначала начертим хорды *AD*, *DB* и *BC*. На хорде *AD* имеет место $\angle AOD = 2\angle ABD$, поскольку оба угла измеряются дугой *AD*. Точно так же на хорде *BC* имеет место $\angle BOC = 2\angle BDC$. Кроме того, в прямоугольном треугольнике *PDB* имеет место $\angle PBD = 90° - \angle BDP$. Таким образом, в итоге получаем

$$\begin{aligned}\angle AOD &= 2 \cdot \angle ABD \\ &= 2 \cdot \angle PBD \\ &= 2 \cdot (90° - \angle BDP) \\ &= 180° - 2 \cdot \angle BDC \\ &= 180° - 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \angle BOC \\ &= 180° - \angle BOC.\end{aligned}$$

Как и предполагалось, углы $\angle AOD$ и $\angle BOC$ являются дополнительными.

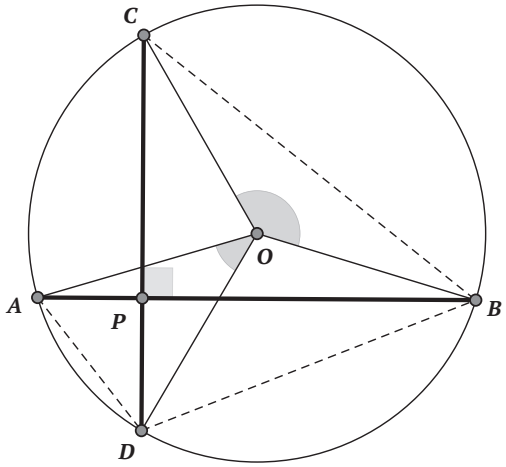


Рисунок 7-P

Пример 8. Угол, образованный касательной и секущей

На рис. 8-P мы добавляем хорды *AB* и *AC*. Поскольку $\angle BCA$, опирающийся на хорду *AB*, равен углу $\angle BAP$, можно видеть, что треугольники *PCA* и *PDB* подобны, и, следовательно, $\frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PC}$.

Теперь, обратив внимание на треугольник *PAB*, можно заметить, что $\angle APC = \angle ABC - \angle BAP$. Поскольку $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$ и $\angle BAP = \angle BCA = \frac{1}{2}\angle BOA$, получаем $\angle APC = \frac{1}{2}\angle AOC - \frac{1}{2}\angle BOA = \frac{1}{2}(\angle AOC - \angle BOA)$, или $\angle APC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB})$.

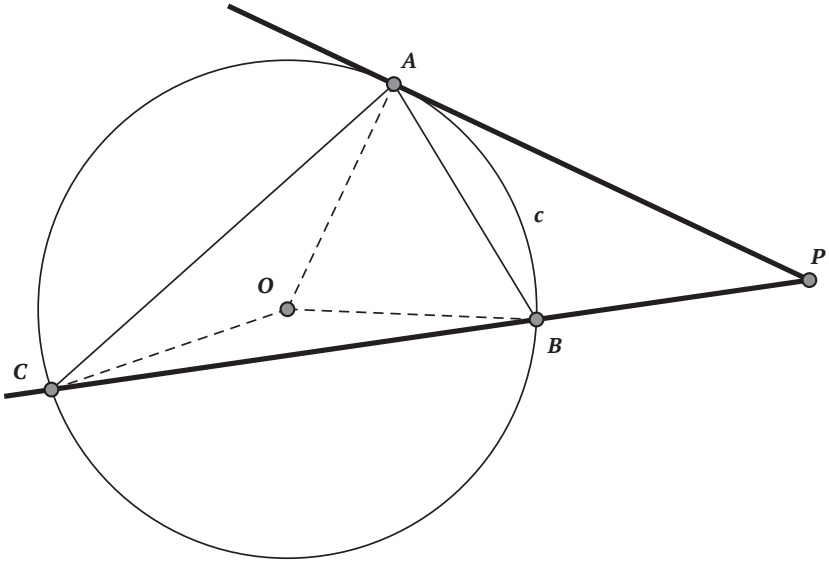


Рисунок 8-P

Пример 9. Угол, образованный двумя секущими

На рис. 9-Р мы добавляем хорды AD и BC. Поскольку оба угла $\angle BCP = \angle BCD$ и $\angle BAD = \angle PAD$ опираются на дугу BD, они являются равными. Следовательно, треугольники PDA и PCB подобны. Отсюда получаем $\frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP}$, что эквивалентно $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.

Теперь, если рассмотреть треугольник PDA, можно увидеть, что $\angle CPA = \angle DPA = \angle CDA - \angle PAD = \angle CDA - \angle BAD$. Поскольку $\angle CDA = \frac{1}{2}\angle COA$ и $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$, получаем $\angle CPA = \frac{1}{2}\angle COA - \frac{1}{2}\angle BOD = \frac{1}{2}(\angle COA - \angle BOD)$, или $\angle CPA = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DB})$.

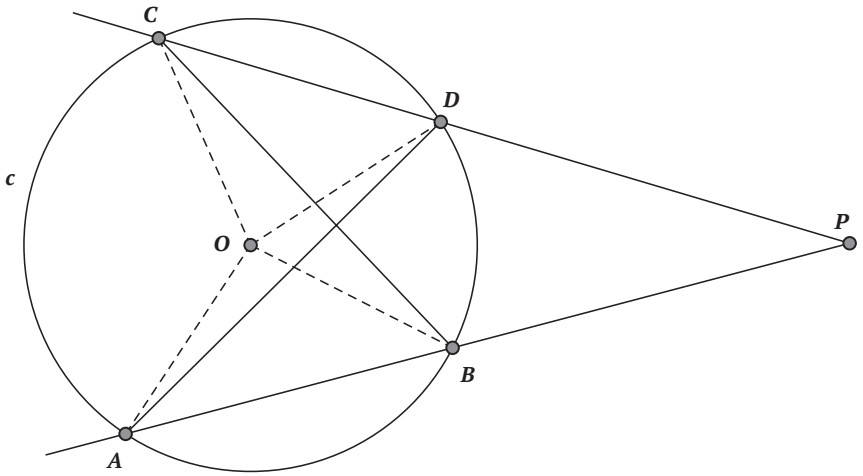


Рисунок 9-Р

Пример 10. Деление угла на три равные части с помощью окружности

Посмотрев на рис. 10-Р, можно увидеть, что треугольник CDB является равнобедренным, при этом $BC = DC$ и $\angle CBD = \angle BDC$. В треугольнике CDB внешний угол дает нам $\angle ECD = \angle CBD + \angle BDC = 2\angle CBD$. Поскольку радиусы $DC = DE$, треугольник DCE также равнобедренный, и мы имеем $\angle DEC = \angle ECD = 2\angle CBD$. Таким образом, в треугольнике DBE получаем $\angle EDA = \angle DEB + \angle EBD = 2\angle CBD + \angle CBD = 3\angle CBD$, или $\angle CBD = \frac{1}{3}\angle EDA$, и таким образом мы разделили угол $\angle EDA$ на три равные части.

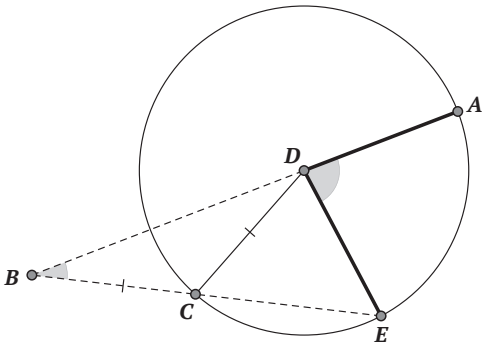


Рисунок 10-Р

Пример 11. Весьма удивительное равенство

На рис. 11-Р продлим касательную KB до пересечения с LA в точке S, а LA продлим на расстояние, равное ее длине, за точку A до точки R. Имеем касательные $SB = SA$, а поскольку $AL = BK$, то получается, что $SR = SA + AR = SB + AL = SB + BK = SK$. В результате получаем равнобедренные треугольники SKR и SBA. Поскольку $\frac{SB}{SK} = \frac{SA}{SR}$, то $RK \parallel AB$. Для треугольника KRL получаем $RK \parallel AP$. Так как A является серединой RL, то точка P должна быть серединой KL.

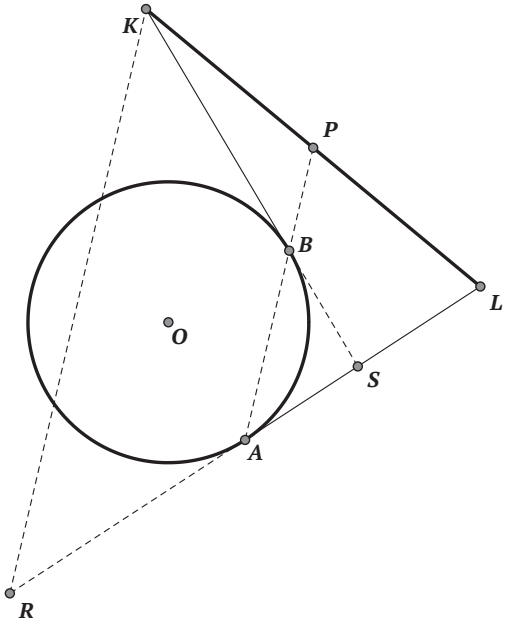


Рисунок 11-Р

Пример 12. Необычное положение параллельных линий

На рис. 12-P точка Y является точкой пересечения прямой $l = BCT$ с DA, и мы добавляем линии BA, CA и CD. Поскольку прямоугольные треугольники ΔAXT и ΔARX имеют общую сторону AX и у нас $XR = XT$, они конгруэнтны, и, следовательно, $\angle XRA = \angle ATX$. Теперь рассмотрим некоторые полезные равенства углов. Заметим, что из $DB = DC$ следует $\angle BAD = \angle DAC$. Следовательно, $\angle BAD = \angle BCD$, так как оба этих вписанных угла измеряются дугой BD. Кроме того, поскольку t является касательной к окружности c в одной из конечных точек хорды CA, имеем $\angle CAT = \angle CDA$, так как оба угла измеряются дугой CA. Тогда получаем

$$\angle YAT = \angle DAT = \angle DAC + \angle CAT = \angle BAD + \angle CDA =$$

$$\angle BCD + \angle CDA = \angle YCD + \angle CDY = \angle TYA.$$

Таким образом, прямоугольные треугольники ΔAXT и ΔTXY конгруэнтны, поскольку у них общая сторона TX, и мы имеем $\angle YAT = \angle TYA$. Отсюда следует, что $\angle ATX = \angle XTY$. Подводя итог, мы доказали, что $\angle TRA = \angle XRA = \angle ATX = \angle XTY = \angle RTY$, и поскольку $\angle TRA = \angle RTY$, мы видим, что $AR \parallel TY$ или $AR \parallel l$.

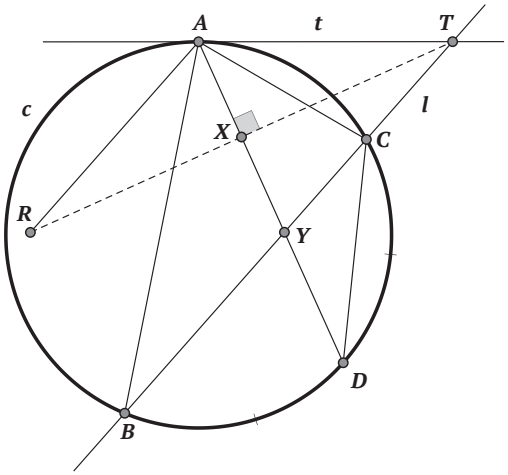


Рисунок 12-P

Пример 13. Неожиданные взаимно дополняющие углы в окружности

Проведя отрезок AC, как показано на рис. 13-P, мы получаем прямоугольный треугольник ABC, поскольку угол ACB вписан в полуокружность. Далее примем во внимание, что $\angle ADE = \angle ACE$, так как оба угла измеряются половиной дуги AE. Поскольку $\angle ACE + \angle BCE = 90°$, получаем $\angle ADE + \angle BCE = \angle ACE + \angle BCE = 90°$, что и требовалось доказать.

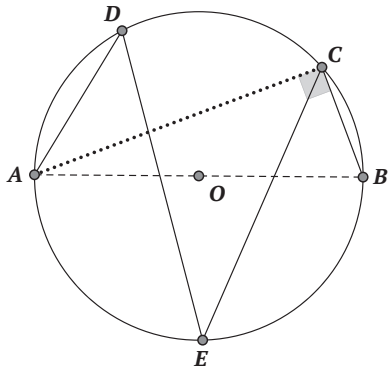


Рисунок 13-P

Пример 14. Удивительное равенство квадратов в окружности

На рис. 14-P, где точка O является центром заданной окружности и нам известно, что $\angle ABC = \angle DCB = \angle CDE = 45°$, имеет место $\angle AOC = \angle DOB = \angle COE = 90°$. Отсюда следует, что $\angle BOC = \angle AOC + \angle BOA = 90° + \angle BOA$, $\angle COD = 360° - \angle AOC - \angle BOA - \angle DOB = 360° - 90° - \angle BOA - 90° = 180° - \angle BOA$ и $\angle EOD = 180° - \angle BOA - \angle DOB = 180° - \angle BOA - 90° = 90° - \angle BOA$. Поскольку все радиусы окружности O равны, имеем $OA = OB = OC = OD = OE = r$. Теперь мы можем применить закон косинусов (см. «Инструменты») к различным треугольникам, чтобы получить следующее.

Для треугольника ΔOBA:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\angle BOA = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos\angle BOA.$$

Для треугольника ΔOCD:

$$CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2 \cdot OC \cdot OD \cdot \cos\angle COD =$$

$$2r^2 - 2r^2 \cdot \cos(180° - \angle BOA) = 2r^2 + 2r2 \cdot \cos\angle BOA.$$

Для треугольника ΔOBC:

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos\angle BOC =$$

$$2r^2 - 2r^2 \cdot \cos(90° + \angle BOA) = 2r^2 + 2r^2 \cdot \sin\angle BOA.$$

Для треугольника ΔODE:

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2 \cdot OD \cdot OE \cdot \cos\angle DOE =$$

$$2r^2 - 2r^2 \cdot \cos(90° - \angle BOA) = 2r^2 + 2r^2 \cdot \sin\angle BOA.$$

Сложив первые два уравнения, а затем вторые два уравнения, получаем $AB^2 + CD^2 = 4r^2 = BC^2 + DE^2$, и, следовательно, $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$.

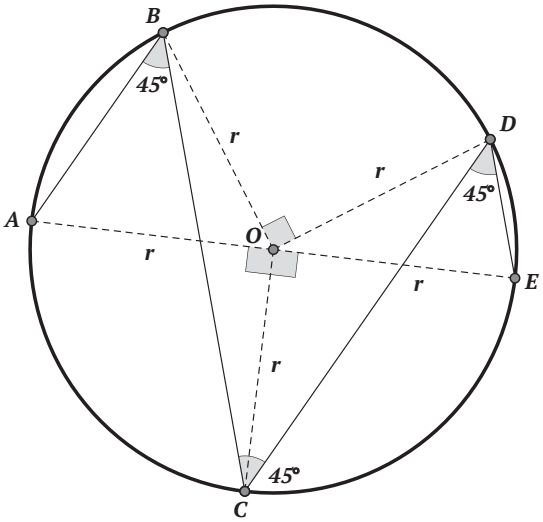


Рисунок 14-Р

Пример 15. Удивительная окружность, образующая знакомый треугольник

На рис. 15-Р сначала добавим отрезки *OD* и *OE*. Из того, что $DE = ½ \cdot AB = AO$ и $OD = OE = OA$, поскольку все эти отрезки являются радиусами окружности *O*, получаем, что треугольник *DOE* является равносторонним, а $\angle ODE = 60°$. Из условия известно, что *DE* располагается параллельно *AB*, а также *AO*, откуда следует, что $\angle DOA = \angle ODA = 60°$. Это позволяет утверждать, что треугольник *AOD* является равносторонним, поскольку $OA = OD$ и $\angle DOA = 60°$. Это означает, что также выполняется равенство $\angle OAD = \angle BAC = 60°$. Таким образом, прямоугольный треугольник *ABC* является обычным треугольником 30° – 60° – 90°, где гипотенуза *AC* равна удвоенной длине меньшего катета *AB*.

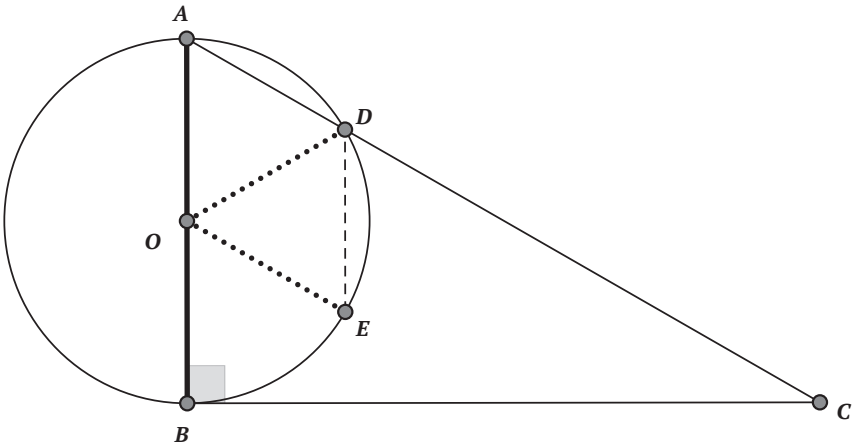


Рисунок 15-Р

Пример 16. Удивительная перпендикулярность

Все сразу становится ясно, если начертить радиус OT, как показано на рис. 16-P. Радиус OT перпендикулярен касательной в точке T. Поскольку $\angle BOT$ является внешним углом равнобедренного треугольника AOT, то в окружности O имеем $\angle BOT = \frac{1}{2}\angle BAT$. Кроме того, $\angle BAT = \frac{1}{2} \cdot \angle BAC$, откуда получаем $\angle BOT = \angle BAC$; следовательно, $AC \parallel OT$. Поскольку OT является перпендикулярным к касательной в точке T, AC также должен быть перпендикулярным к этой касательной.

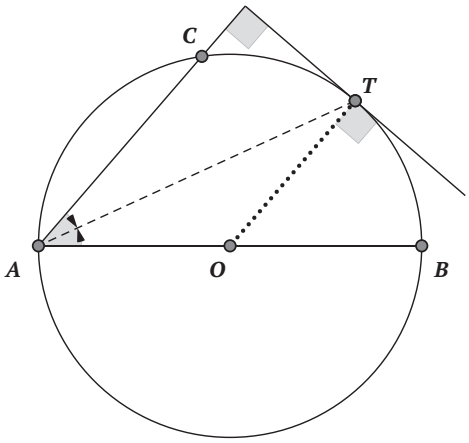


Рисунок 16-P

Пример 17. Неожиданные концикличские точки

Как известно из теоремы примера 6, угол, образованный двумя пересекающимися хордами в окружности, равен половине суммы пересекаемых дуг. На рис. 17-P это приводит нас к $\angle AGC = \frac{1}{2} \cdot (\angle AOC + \angle BOP)$. Отметив, что точка P является серединой дуги AB, получаем $\angle BOP = \angle POA$. Следовательно, имеет место $\angle AGC = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOP) = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle POA) = \frac{1}{2}\angle POC = \angle PDC$, что позволяет сделать вывод о цикличности четырехугольника $CDHG$.

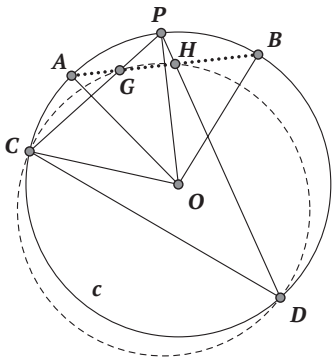


Рисунок 17-P

Пример 18. Хорды окружности образуют постоянную сумму углов

На рис. 18-P сначала обратим внимание, что $\angle CDA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABC} = \frac{1}{2}(360° - \overset{\frown}{ADC}) = 180° - \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC} = 180° - \frac{1}{2}\angle AOC$. Точно так же мы можем получить $\angle BEC = 180° - \frac{1}{2} \cdot \angle COB$. Точка P является серединой дуги AB, содержащей точки C и D. Тогда получаем

$$\angle CDA + \angle BEC = (180° - \frac{1}{2} \cdot \angle AOC) + (180° - \frac{1}{2} \cdot \angle COB) =$$

$$360° - \frac{1}{2} \cdot (\angle AOC + \angle COB) = ° 360 - \frac{1}{2} \cdot \angle AOP.$$

Таким образом, можно видеть, что величина $\angle CDA + \angle BEC$ не зависит от положения точек C, D и E.

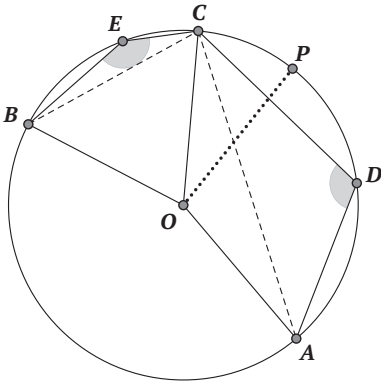


Рисунок 18-P

Пример 19. Окружность помогает разделить отрезок на две равные части

Как видно на рис. 19-P, две перпендикулярные DE и BF параллельны, поэтому $\frac{DP}{CF} = \frac{EP}{BC}$. Кроме того, также имеет место $\frac{DP}{CF} = \frac{AP}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{EP}{BC}$. Рассмотрим теперь треугольник ABF, где $OC \parallel AF$. Поскольку O является серединой AB, из этого следует, что C должна быть серединой BF, и, следовательно, $CF = BC$. Подставляя в $\frac{DP}{CF} = \frac{EP}{BC}$, получаем $DP = EP$.

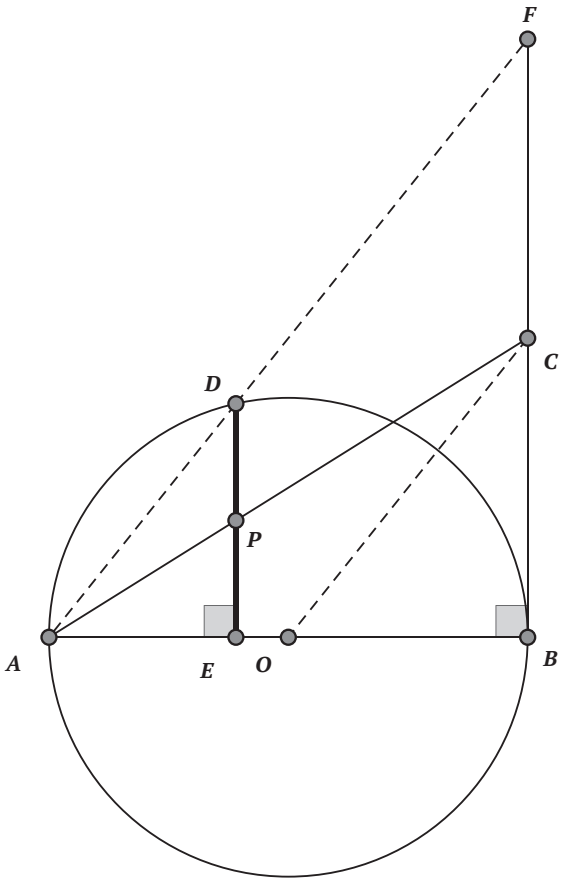


Рисунок 19-P

Пример 20. Знаменитое соотношение «бабочки»

Начнем с построения вспомогательных линий $FG \parallel AB$ и $MN \perp FG$, а также линий GM, GQ и GD, как показано на рис. 20-P. Поскольку $MN \perp AB$, то MN проходит через центр O окружности. Так как MN также является биссектрисой FG, а $MF = MG$, из этого следует, что $\Delta MFN \cong \Delta MNG$ и $\angle FMN = \angle NMG$. Кроме того, $\angle AMF = \angle GMB$, ибо они являются дополнениями равных углов $\angle FMN = \angle NMG$. Поскольку $FG \parallel AB$, можно сделать вывод, что $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{GB}$. Из примера 6 известно, что угол, образованный двумя пересекающимися хордами, равен половине суммы пересекаемых дуг, и мы можем применить это, чтобы получить $\angle GMB = \angle AMF = \frac{1}{2} \cdot (\overset{\frown}{AF} + \overset{\frown}{BE}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{GB} + \overset{\frown}{BE})$. Известно, что $\angle EDG = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EAG}$, и путем сложения получаем $\angle GMB + \angle EDG = \frac{1}{2} \cdot (\overset{\frown}{GB} + \overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{EAG}) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$. Поскольку это означает, что $\angle GMQ + \angle QDG = 180°$, мы видим, что четырехугольник $MGDQ$ является циклическим, и получаем $\angle QDM = \angle QGM$. Затем получаем $\angle QGM = \angle QDM = \angle EDC = \angle EFC = \angle MFP$ (заметим, что $\angle EDC = \angle EFC$, так как оба измеряются половиной дуги FGD), и это позволяет установить, что $DMPF \cong \Delta MGQ$ (ASA). Следовательно, $MP = MQ$.

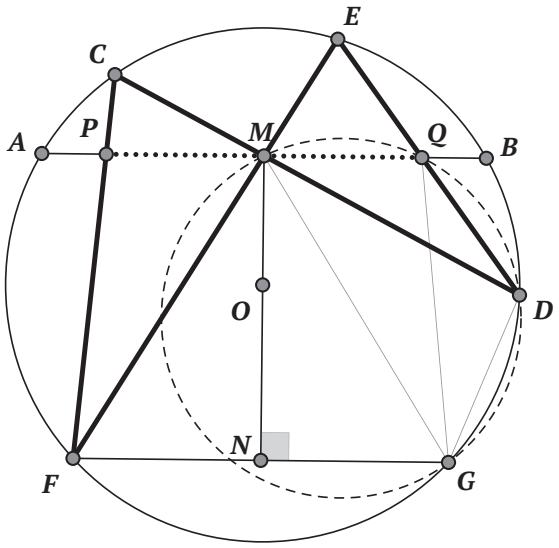


Рисунок 20-Р

Пример 21. Окружность неожиданно образует параллельные прямые

Для начала нарисуем отрезок *CB* на рис. 21-Р. Поскольку отрезок *PB* касается окружности *O*, получаем два угла, величины которых равны половине длины дуги *BC*, при этом $\angle PBC = \angle BAC$. Так как касательные из *P* к окружности равны по длине *PC* = *PB*, треугольник *PCB* является равнобедренным, а биссектриса угла $\angle CPB$ проходит через точку *O*. Поскольку биссектриса, проходящая через вершину *P*, также является высотой равнобедренного треугольника *PCB*, то линия *PO* перпендикулярна хорде *BC* и пересекает *BC* в ее середине *F*. В прямоугольном треугольнике *PFB* получаем $\angle PBF + \angle FPB = 90°$, а в прямоугольном треугольнике *BPO* получаем $\angle BOP + \angle OPB = 90°$. Таким образом, $\angle PBF = 90° - \angle FPB = 90° - \angle OPB = \angle BOP$, а это значит, что $\angle BAC = \angle PBC = \angle PBF = \angle BOP$, из чего следует, что *AC* параллельна *OP*.

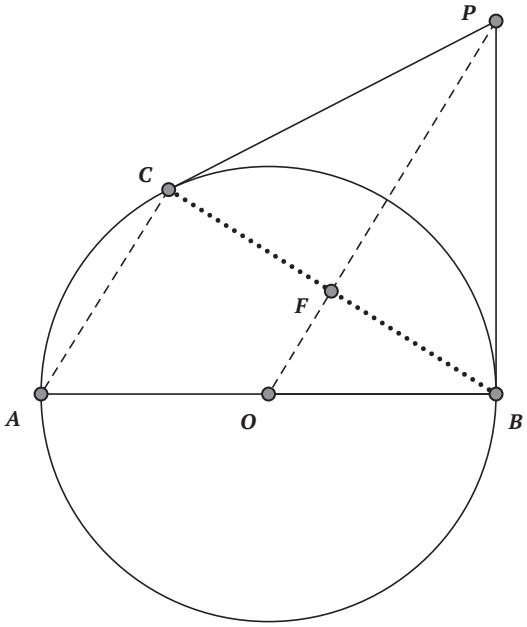


Рисунок 21-Р

Пример 22. Неожиданная константа для любой точки на окружности

На рис. 22-Р задано условие $CO = DO$, и мы наносим точку R на диаметр AB таким образом, чтобы $PR \perp AOB$. Кроме того, проводим радиус OP. Применяем теорему Пифагора к треугольнику PCR, чтобы получить $PC^2 = PR^2 + CR^2$, и применяем теорему Пифагора к треугольнику PRD, чтобы получить $PD^2 = PR^2 + DR^2$. При сложении это дает нам $PC^2 + PD^2 = 2PR^2 + CR^2 + DR^2$. Кроме того, применяя теорему Пифагора к треугольнику PRO, получаем $PR^2 = PO^2 - RO^2$. Поскольку $CR = CO - RO$, получаем $CR^2 = (CO - RO)^2$. По аналогии, поскольку $DR = RO + DO$, получаем $DR^2 = (RO + DO)^2$. Теперь, подставляя соответствующие выражения в предыдущее уравнение, получаем

$$PC^2 + PD^2 = 2 \cdot (PO^2 - RO^2) + (CO - RO)^2 + (RO + DO)^2$$

$$= 2PO^2 - 2RO^2 + CO^2 - 2 \cdot CO \cdot RO + RO^2 + RO^2 + 2 \cdot RO \cdot DO + DO^2$$

$$= 2PO^2 + CO^2 + DO^2 = 2PO^2 + 2CO^2,$$

так как $CO = DO$. Таким образом, получаем $PC^2 + PD^2 = 2PO^2 + 2CO^2$. Поскольку PO и DO являются постоянными величинами, не зависящими от положения точки P на окружности, то и сумма $PC^2 + PD^2$ также является постоянной.

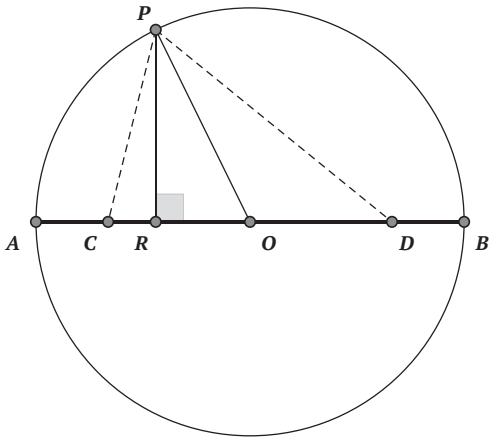


Рисунок 22-P

Пример 23. Касательные к окружности образуют перпендикулярные линии и пропорциональные отрезки

Поскольку радиус, проходящий через точку касания, перпендикулярен касательной, углы $\angle OAD$, $\angle CBO$, $\angle OEC$ и $\angle DEO$ являются прямыми, как показано на рис. 23-P. Кроме того, так как OD делит $\angle EOA$ пополам, а CO делит $\angle BOE$ пополам, получаем $\angle COD = \angle COE + \angle EOD = \frac{1}{2}\angle BOE \frac{1}{2} \angle EOA = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Итак, OE является высотой в прямоугольном треугольнике OCD, так что $\angle COE = 90° = - \angle ECO = 90° - \angle DCO = \angle ODC$. Из этого получаем $\Delta EOC \sim \Delta EDO$, из чего следует, что $\frac{OE}{CE} = \frac{DE}{OE}$. Но поскольку $EC = BC$, а $AD = DE$, то $\frac{OE}{BC} = \frac{AD}{OE}$.

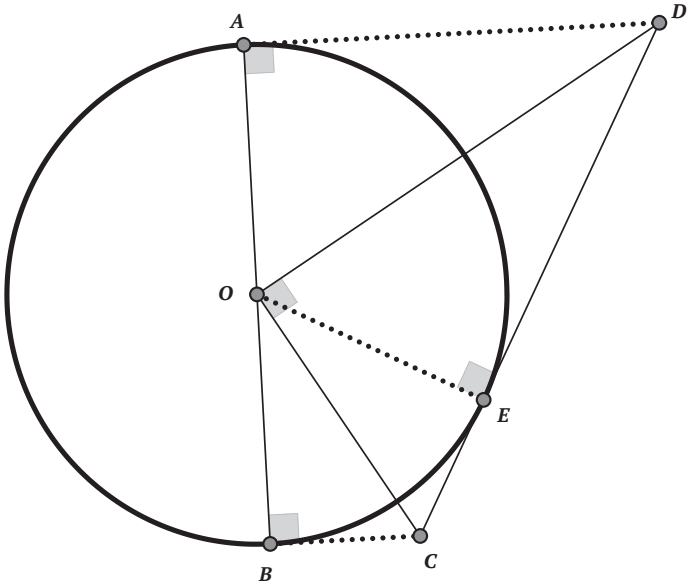


Рисунок 23-P

Пример 24. Неожиданный диаметр окружности

На рис. 24-P проведем отрезки AC, CX и CY, после чего обратим внимание, что $\angle YCA = \frac{1}{2}\,\widehat{AY} = \angle YDA$ и $\angle ACX = \widehat{AX} = \angle ABX$. Это позволяет нам вывести $\angle YCX = \angle YCA + \angle ACX = \angle YDA + \angle ABX$. Поскольку DY и BX являются биссектрисами углов $\angle CDA$ и $\angle ABC$ соответственно, это дает нам $\angle YCX = \angle YDA + \angle ABX = \frac{1}{2}\angle CDA + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle CDA + \angle ABC)$. Нам известно, что четырехугольник $ABCD$ циклический, а противоположные углы дополняют друг друга, так что $\angle CDA + \angle ABC = 180°$. Следовательно, $\angle YCX = \frac{1}{2} \cdot (\angle CDA + \angle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$, и XY, таким образом, является диаметром данной окружности.

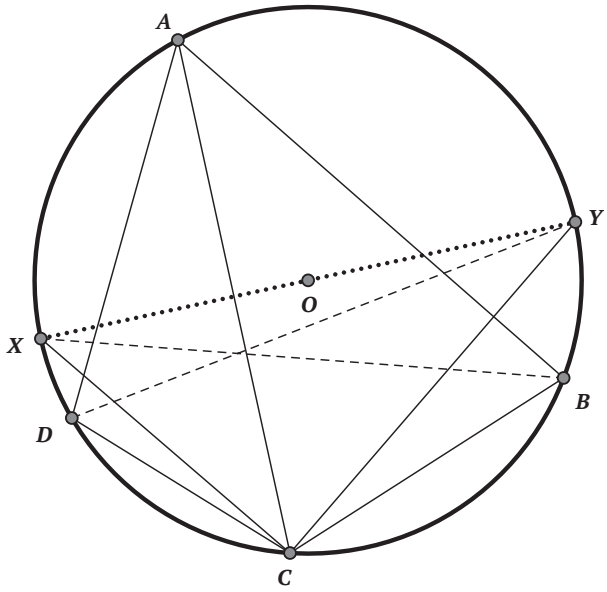


Рисунок 24-P

Пример 25. Неожиданный прямоугольник в окружности

На рис. 25-P сначала проведем линии CE и AE. Поскольку $FP \parallel BD$, также имеем соответствующие углы $\angle PFE = \angle DBE$. В окружности O имеет место $\angle PFE = \angle DBE = \angle DCE = \angle PCE$, и это доказывает, что четырехугольник $CPEF$ является циклическим, а его противоположные углы дополняют друг друга. Таким образом, получаем $\angle CFE = 90°$, так что $\angle EPD = \angle EPC = 90°$. Аналогично в окружности O также имеет место $\angle QAE = \angle DAE = \angle DBE = \angle PFE = \angle QFE$, и четырехугольник $AFQE$ тоже циклический. Поскольку $\angle EFA = 90°$, AE является диаметром описанной окружности $AFQE$, и мы получаем $\angle EQA = 90°$. Таким образом, мы доказали, что $\angle EQA = \angle DQE = \angle EPD = 90°$, а так как $\angle BDQ = 180° - \angle ADC = 180° - 90° = 90°$, у четырехугольника $EQDB$ три прямых угла, что делает его прямоугольником.

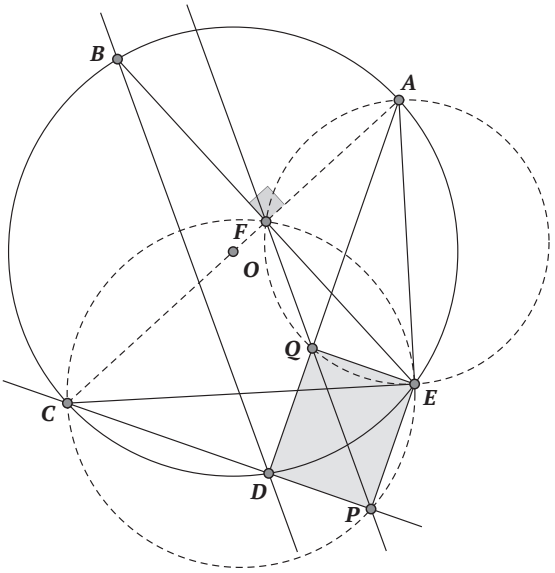


Рисунок 25-Р

Пример 26. Параллельные биссектрисы углов

Начнем с того, что на рис. 26-Р начертим точки X и Y таким образом, чтобы луч EX был биссектрисой угла $\angle DEA$, а луч FY был биссектрисой угла $\angle DFA$. Кроме того, обозначим точку пересечения G линий FY и BD. В треугольнике ABE отметим, что $\angle DEA = \angle BAE + \angle EBA = \angle FAC + \angle DBA$, и поскольку EX является биссектрисой угла $\angle DEA$, то $\angle DEX = \angle FAC + \angle DBA$. Теперь рассмотрим треугольник BFD. Поскольку углы, измеряемые одной и той же дугой BC, равны, получаем $\angle BDF = \angle BDC = \angle BAC = \angle FAC$. Кроме того, так как $\angle FBD = 180° - \angle DBA$, получаем $\angle DFB = 180° - \angle BDF - \angle FBD = 180° - \angle FAC - (180° - \angle DBA) = \angle DBA - \angle FAC$. Поскольку FY является биссектрисой $\angle DFA$, получаем $\angle DFY = \frac{1}{2}(\angle DBA - \angle FAC)$. Рассматривая треугольник GFD, получаем следующее:

$$\begin{aligned}\angle DGY &= \angle DFG + \angle GDF \\ &= \angle DFY + \angle BDF \\ &= \tfrac{1}{2}(\angle DBA - \angle FAC) + \angle FAC \\ &= \tfrac{1}{2}(\angle FAC + \angle DBA).\end{aligned}$$

Так как и $\angle DEX$, и $\angle DGY$ равны $\frac{1}{2}(\angle FAC + \angle DBA)$, биссектрисы углов EX и FY параллельны.

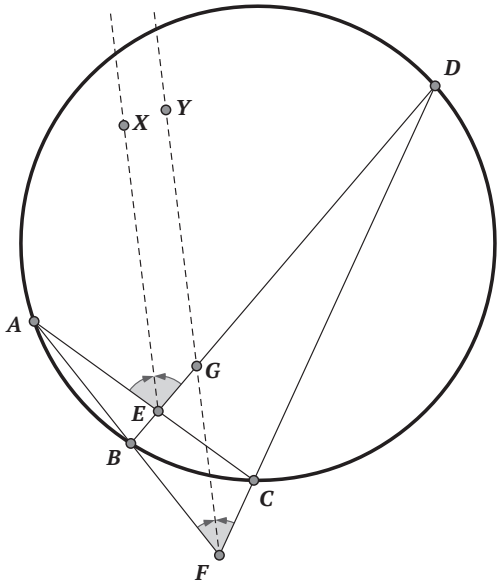


Рисунок 26-P

Пример 27. Интересные перпендикуляры на полуокружности

На рис. 27-P точка *O* является центром диаметра полуокружности. Поскольку *OP* = *OQ*, треугольник *OQP* является равнобедренным, а так как *M* является серединой его основания *PQ*, то *OM* ⊥ *PQ*. Теперь примем во внимание, что *M* является серединой *AC*, а *O* является серединой *AB*. Это дает нам *BC* || *OM*, и, следовательно, *BC* ⊥ *PQ*.

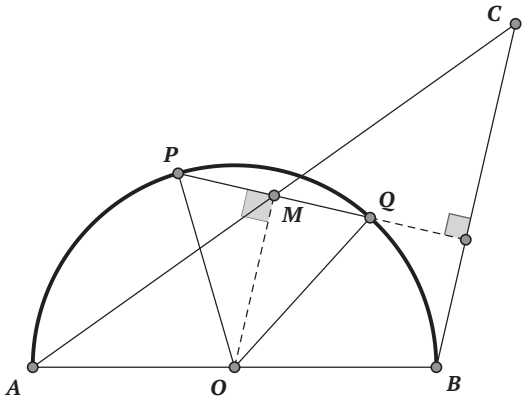


Рисунок 27-P

Пример 28. Неожиданная биссектриса угла на полуокружности

На рис. 28-Р проведем отрезки *AP* и *BQ*. Поскольку точка *P* лежит на полуокружности с диаметром *AB*, получаем $\angle APB = 90°$. Кроме того, $\angle RSA = 90°$, отчего четырехугольник *ASRP* является циклическим, а *AR* составляет диаметр его описанной окружности. Следовательно, $\angle RSP = \angle RAP$, так как оба угла измеряются половиной дуги *PR*. Таким же образом $\angle AQB = 90°$. Поскольку $\angle BSR = 90°$, четырехугольник *BQRS* является циклическим, а *BR* является диаметром его окружности, и мы получаем $\angle QSR = \angle QBR$. В данной полуокружности имеет место $\angle QAP = \angle QBP$, так как оба угла равны половине дуги *PQ*. Из приведенной выше информации можно получить, что $\angle RSP = \angle RAP = \angle QAP = \angle QBP = \angle QSR$, и, следовательно, $\angle RSP = \angle QSR$, а это означает, что *RS* является биссектрисой угла $\angle QSP$.

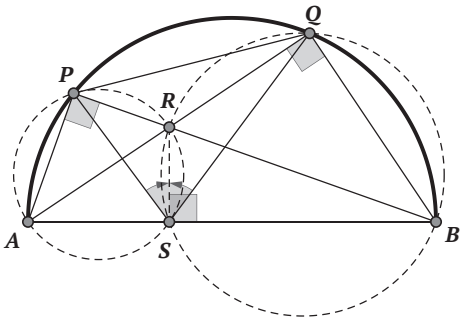


Рисунок 28-Р

Пример 29. Касательные окружности к полуокружности

Определим середину *O* отрезка *AB* и проведем линию *OP*, как показано на рис. 29-Р. Точка *O* является центром полуокружности, а *OP* является радиусом полуокружности. Поскольку *OA* и *OP* являются радиусами, треугольник *OPA* будет равнобедренным, и имеет место $\angle APO = \angle OAP$. Кроме того, в окружности *O* имеются углы, ограниченные дугой *PCB*, при этом $\angle OAP = \angle PAB = \angle BDP = \angle FDP$. Так как *FP* является хордой в окружности треугольника *PDF*, а равные углы *FDP* и *FPO* составляют по половине длины дуги *PF*, можно сделать вывод, что *OP* касается этой окружности в точке *P*. Аналогичным образом можно также доказать, что *OP* касается окружности треугольника *PEC* в точке *P*, и, следовательно, эти две окружности также касаются друг друга в точке *P*.

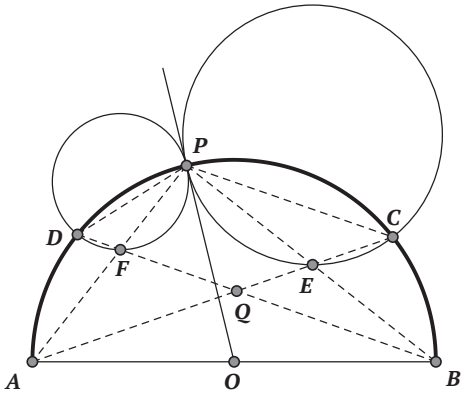


Рисунок 29-P

Пример 30. Точка на описанной окружности равнобедренного треугольника

Применив теорему Птолемея (см. раздел «Инструменты») к четырехугольнику *ABPC*, как показано на рис. 30-P, получаем: $PA \cdot BC = PB \cdot AC + PC \cdot AB$. Поскольку $AB = AC$, то $PA \cdot BC = AC\,(PB + PC)$, и, следовательно, получаем $\frac{AC}{BC} = \frac{PA}{PB + PC}$.

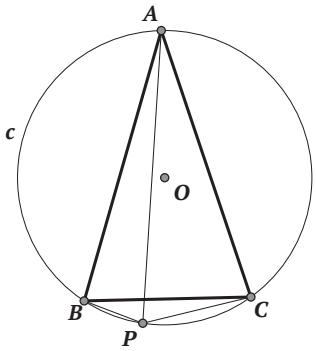


Рисунок 30-P

Пример 31. Точка на описанной окружности квадрата

На рис. 31-Р мы прочертили диагонали AC и BD квадрата $ABCD$. Применив результат из примера 30 к равнобедренному треугольнику ABD, в котором $AB = AD$, получаем $\frac{AD}{BD} = \frac{PA}{PB + PD}$. Повторив это с равнобедренным треугольником ADC, имеем $\frac{DC}{AC} = \frac{PD}{PA + PC}$. Поскольку $AD = DC$, а $BD = AC$, получаем $\frac{PA}{PB + PD} = \frac{PD}{PA + PC}$, или $\frac{PA + PC}{PB + PD} = \frac{PD}{PA}$.

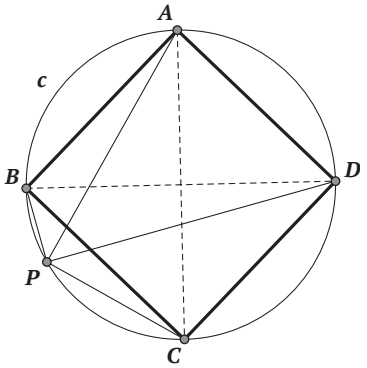


Рисунок 31-Р

Пример 32. Точка на описанной окружности правильного пятиугольника

На рис. 32-Р первоначально добавлены диагонали пятиугольника $ABCDE$. Как и в двух предыдущих примерах, снова окажется полезным применить теорему Птолемея к нескольким четырехугольникам на рисунке. Рассмотрев сначала четырехугольник $ABPC$, получаем

$$PA \cdot BC = AB \cdot PC + PB \cdot AC. \text{ (I)}$$

Точно так же для четырехугольника $BPCD$ получаем

$$PD \cdot BC = PB \cdot CD + PC \cdot BD. \text{ (II)}$$

Поскольку $BA = CD$ и $AC = BD$, сложив (I) и (II), получаем

$$BC\,(PA + PD) = BA\,(PB + PC) + AC\,(PB + PC). \text{ (III)}$$

Так как $DBCE$ – это равнобедренный треугольник, из примера 30 известно, что

$$\frac{CE}{BC} = \frac{PE}{PB + PC}, \text{ или } \frac{PE \cdot BC}{PB + PC} = CE = AC. \quad \text{(IV)}$$

Подставляя (IV) в (III), получаем

$$BC \cdot (PA + PD) = BA \cdot (PB + PC) + \frac{PE \cdot BC}{PB + PC} \cdot (PB + PC),$$

и поскольку $BC = BA$, это сводится к $PA + PD = PB + PC + PE$.

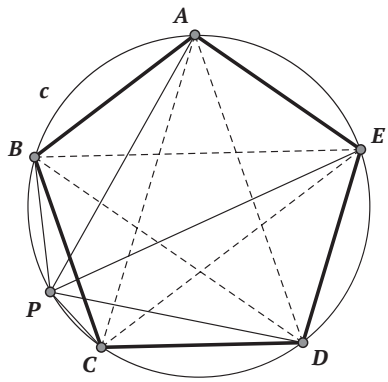


Рисунок 32-Р

Пример 33. Точка на окружности, описываемой правильным шестиугольником

Это непосредственное следствие из примера 30. Как видно на рис. 33-Р, поскольку *ABCDEF* является правильным шестиугольником, треугольники *ACE* и *BDF* являются равносторонними. Рассматривая треугольник *ACE*, из примера 30 следует, что $\frac{CE}{AC} = \frac{PE}{PA + PC}$, и поскольку $CE = AC$, это равносильно тому, что $PE = PA + PC$. Аналогичным образом из равностороннего треугольника *BDF* получаем $PF = PB + PD$, и, сложив эти два равенства, получаем $PE + PF = PA + PB + PC + PD$.

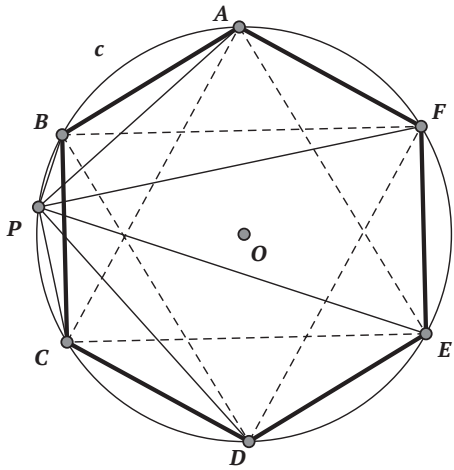


Рисунок 33-Р

Пример 34. Касательная к описанной окружности равностороннего треугольника

Начнем доказательство с того, что продлим высоту AM до пересечения с описанной окружностью в точке N, как показано на рис. 34-P. Затем проведем вспомогательные линии OP, MK и NL, каждая из которых перпендикулярна касательной DF окружности O. Поскольку треугольник ABC равносторонний, точка O является точкой пересечения высот, а также медиан и, следовательно, точкой деления высоты AM на три равные части. Так как длина OM равна половине длины AO, она также равна половине длины ON, а точка M является серединой ON. Это делает MK серединой трапеции $BCFE$, и мы получаем $BE + CF = 2MK$. Поскольку MK также является серединой трапеции $NOPL$, мы также получаем $OP + NL = 2MK$, что приводит к равенству $BE + CF = OP + NL$. Точно так же трапеция $ADLN$ дает нам $AD + NL = 2OP$, что равносильно $AD + NL + OP = 3OP$. Подставляя $BE + CF$ вместо $OP + NL$ в это уравнение, получаем $AD + BE + CF = 3OP$, а поскольку $OP = \frac{2}{3} AM$, получаем $AD + BE + CF = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot OP = 2AM$.

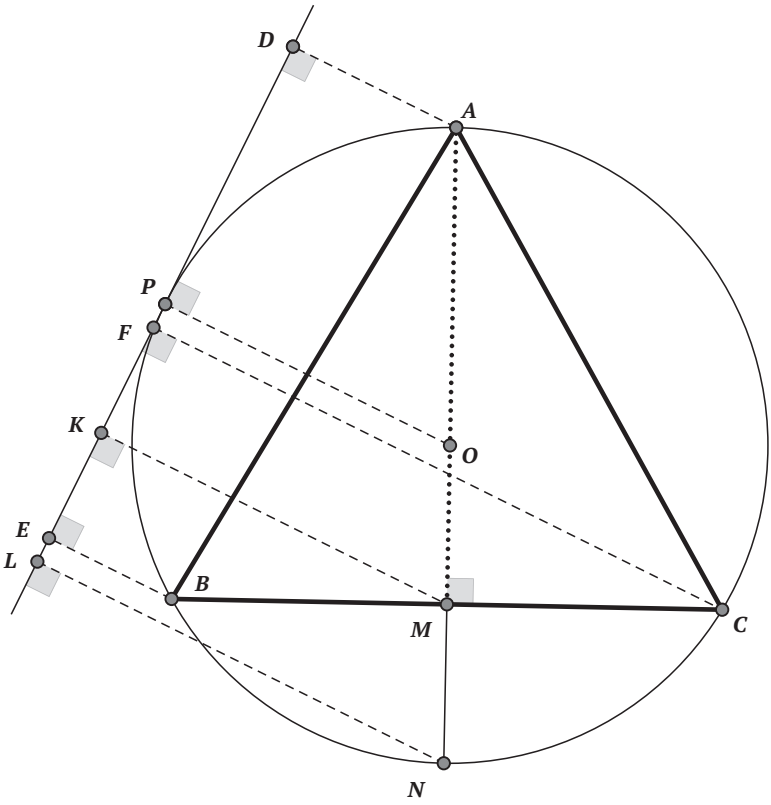


Рисунок 34-P

Пример 35. Удивительные концикличские точки

В качестве первого шага на рис. 35-Р проводим отрезки OD, OE и EF, где точка O является центром окружности. Обращаем внимание, что поскольку $AB \parallel ED$, то $\angle DEC = \angle BAC$, а поскольку окружность касается AC в точке E, то $\angle OED = \angle OEC - \angle DEC = 90° - \angle BAC$. Для равнобедренного треугольника ODE имеет место $\angle DOE = 180° - 2\angle ODE = 180° - 2(90° - \angle BAC) = 2\angle BAC$. Так как точка F лежит на окружности, $\angle DFE = ½\,\angle DOE = \angle BAC$, следовательно, $\angle EFB = 180° - \angle DFE = 180° - \angle BAC$. Мы видим, что четырехугольник $ABFE$ является циклическим, поскольку противоположные углы дополняют друг друга, то есть $\angle EFB = 180° - \angle BAC$.

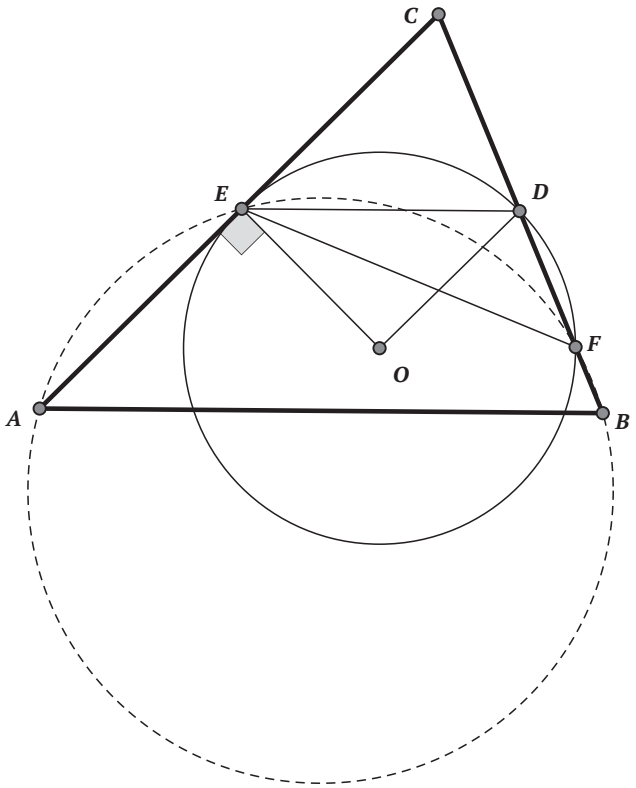


Рисунок 35-Р

Пример 36. Середины дуг окружности образуют неожиданные параллели

На рис. 36-P сначала обратим внимание, что $\angle BAP = \angle PAC$, поскольку P является серединой дуги BC, так что AP является биссектрисой угла $\angle BAC$. Точно так же BQ и CR также являются биссектрисами углов $\angle CBA$ и $\angle ACB$ соответственно. Таким образом, отрезки AP, BQ и CR являются биссектрисами углов треугольника ABC, и их точка пересечения I, соответственно, является центром вписанной окружности ABC. Кроме того, примем во внимание, что углы, вписанные в дугу PC, равны, откуда следует, что $\angle PAC = \angle PRC$. Таким образом, получаем $\angle DAI = \angle BAP = \angle PAC = \angle PRC = \angle DRI$, и четырехугольник $ARDI$ оказывается циклическим. В описанной окружности четырехугольника $ARDI$ получаем $\angle IRA = \angle IDA$, а в исходной окружности имеет место $\angle CRA = \angle CBA$. Подводя итог, получаем $\angle IDA = \angle IRA = \angle CRA = \angle CBA$, и, следовательно, ID располагается параллельно BC. Так как аналогичное утверждение можно сделать и для четырехугольника $AIEQ$, что дает $IE \parallel BC$, можно видеть, что точки D, I и E лежат на одной прямой, а $DIE \parallel BC$.

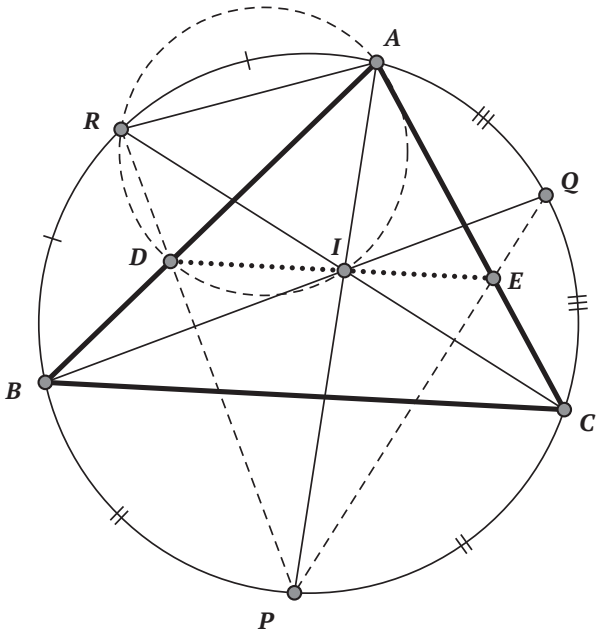


Рисунок 36-P

Пример 37. Описанная окружность и высоты треугольника выражают необычное равенство

На рис. 37-P прежде всего обратим внимание на то, что точки B, C, E и F лежат на одной окружности, так как $\angle BEC = 90° = \angle BFC$. Поскольку противоположные углы циклического четырехугольника дополняют друг друга, получаем $\angle ECB = 180° - \angle BFE$, а из $\angle EFA = 180° - \angle BFE$ получаем $\angle ECB = \angle EFA$. Кроме того, в треугольнике APF имеет место $\angle QPA = \angle FPA = \angle QFA - \angle PAF = \angle QFA - \angle PAB$. Теперь примем во внимание, что $\angle PAB = \angle PQB$, поскольку оба угла измеряются половиной дуги PB, и $\angle AQB = \angle ACB$, так как оба угла измеряются половиной дуги AB. Тогда получаем $\angle AQP = \angle AQB - \angle PQB = \angle ACB - \angle PAB = \angle ECB - \angle PAF = \angle EFA - \angle PAF = \angle EPA$. Поскольку это приводит нас к $\angle AQP = \angle FPA = \angle QPA$, треугольник APQ является равнобедренным, и имеет место $AP = AQ$.

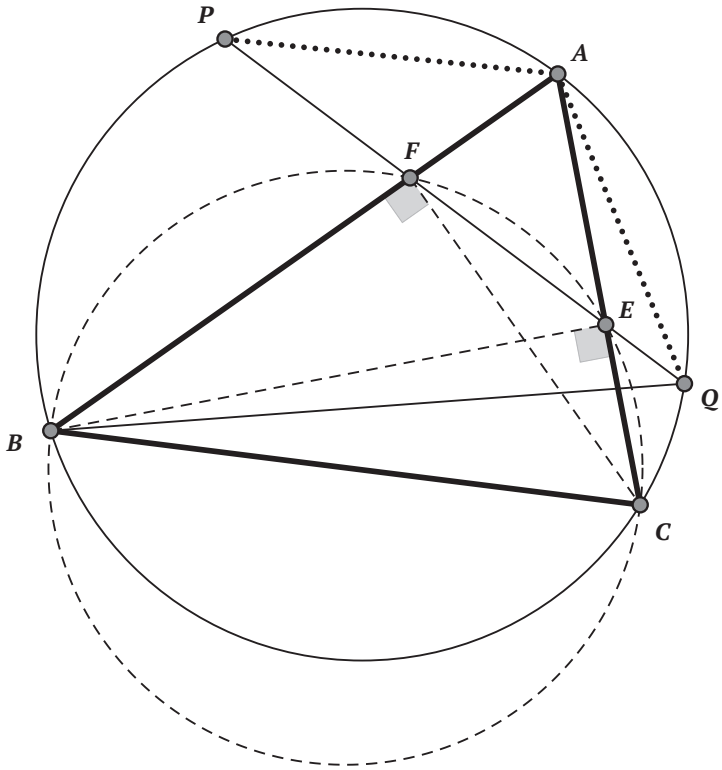


Рисунок 37-P

Пример 38. Неожиданная связь между серединой стороны остроугольного треугольника, его центром описанной окружности и ортоцентром

На рис. 38-P отрезки *AD*, *BE* и *CF* являются высотами треугольника *ABC*, где точка *D* лежит на *BC*, точка *E* лежит на *CA*, а точка *F* лежит на *AB*. Точка *P* находится в диаметрально противоположной точке от *B* на описанной окружности треугольника ΔABC. Поскольку *BP* является диаметром окружности *O*, получаем $PC \perp BC$ и $PA \perp AB$. Так как *AD* и *CF* являются высотами в треугольнике *ABC*, получаем также $AH \perp BC$ и $CH \perp AB$, что дает нам $AH \parallel PC$ и $CH \parallel PA$. Мы видим, что *AHCP* является параллелограммом, и, следовательно, $AH = PC$. Перпендикуляр из точки *O* к *BC* пересекает *BC* в его средней точке *M*. В треугольнике *PBC* линия *OM* соединяет средние точки сторон *PB* и *BC* и, следовательно, равна половине длины *PC*, поэтому $OM = \frac{1}{2} AH$.

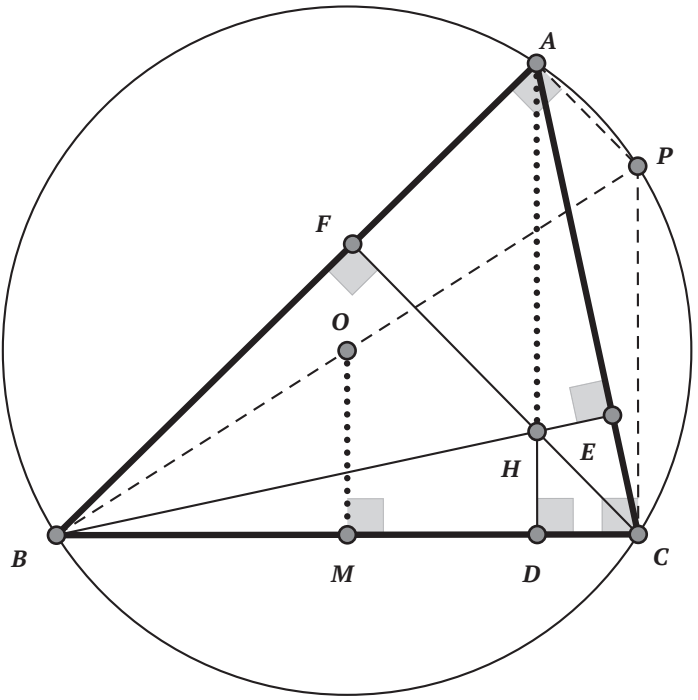


Рисунок 38-P

Пример 39. Неожиданное совпадение с описанной окружностью треугольника

На рис. 39-P отрезок COQ является диаметром описанной окружности треугольника ABC. Наша первоначальная задача состоит в том, чтобы доказать, что четырехугольник $HAQB$ является параллелограммом. Поскольку CQ является диаметром окружности O, получаем $\angle BQA = 180° - \angle ACB$. Кроме того, так как BH является высотой треугольника ABC, а углы, противолежащие дугам окружности, равны, получаем

$$\begin{aligned}\angle HBQ &= \angle HBA + \angle ABQ \\ &= (90° - \angle BAC) + \angle ACQ \\ &= (90° - \angle BAC) + (90° - \angle CQA) \\ &= (90° - \angle BAC) + (90° - \angle CBA) \\ &= 180° - \angle BAC - \angle CBA \\ &= \angle ACB.\end{aligned}$$

Аналогичным образом можно определить, что $\angle QAH = \angle ACB$. Поскольку $\angle HBQ = \angle QAH = \angle ACB$, а противоположные углы циклического четырехугольника $AQBC$ дополняют друг друга, получаем $\angle BQA = 180° - \angle ACB$. Следовательно, угол HBQ дополняет угол BQA, и, таким образом, $AQ \parallel HB$, так что четырехугольник $HAQB$ является параллелограммом. Это означает, что его диагонали AB и HQ пересекаются в середине N отрезка AB. Точка Q, соответственно, также является точкой P, в которой HN пересекает окружность O, что и требовалось доказать.

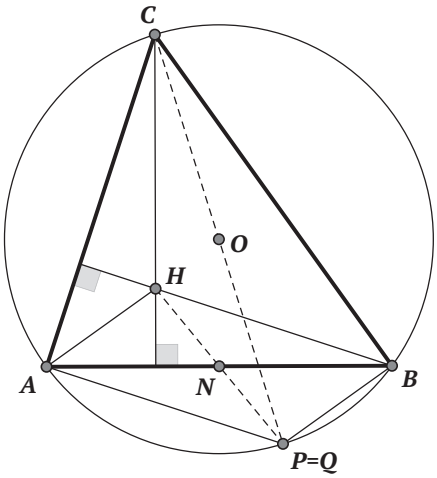


Рисунок 39-P

Пример 40. Неожиданная биссектриса угла, скрытая вписанной окружностью

На рис. 40-P начертим линии OM, ON и OB. Поскольку OB является радиусом окружности, а NB является касательной к окружности O, эти линии перпендикулярны. Так как две касательные NA и NB равны, ON является биссектрисой основания AB треугольника NBA. Также получаем $\angle NOB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADB} = \angle ABN$ и $\angle ABN = \angle ACB$, поскольку оба угла равны половине угла $\overset{\frown}{ADB}$, откуда следует, что $\angle NOB = \angle ABN = \angle ACB$. Это означает, что прямоугольные треугольники BON и PBC тоже подобны, и, следовательно, $\frac{PN}{PB} = \frac{BO}{PC}$, или $PC = \frac{BO \cdot PB}{BN}$. Точно так же мы можем доказать, что $\Delta BMO \sim \Delta PAB$, что дает нам $\frac{BM}{PB} = \frac{BO}{PA}$, или $PA = \frac{BO \cdot PB}{PM}$. Из этого получаем

$$\frac{PA}{PC} = \frac{\frac{BO \cdot PB}{BM}}{\frac{BO \cdot PB}{BN}} = \frac{BN}{PB}.$$

Поскольку две касательные к окружности из внешней точки равны, имеем $AN = BN$ и $BM = CM$, таким образом, получаем $\frac{PA}{PC} = \frac{BN}{BM} = \frac{AN}{CM}$. Таким образом, $\Delta ANP \sim \Delta CPM$ и $\angle APN = \angle MPC$. Следовательно, мы получаем $\angle NPB = \angle APB - \angle APN = 90° - \angle APN = 90° - \angle MPC = \angle BPC - \angle MPC = \angle BPM$, и PB делит $\angle NPM$ пополам.

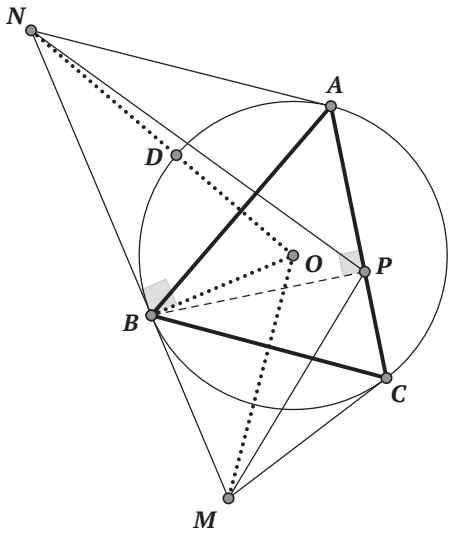


Рисунок 40-P

Пример 41. Удивительные концикличские точки, образуемые треугольником и его описанной окружностью

На рис. 41-P прежде всего добавим линию QR. Поскольку $DE \parallel AB$, то $\angle PED = \angle RBA$, а поскольку углы, ограниченные общей дугой RA, равны, имеет место $\angle RBA = \angle RQA$. Следовательно, получаем $\angle PED = \angle RQA$. Поскольку $\angle DER$ дополняет $\angle PED$, из этого следует, что $\angle DER$ также дополняет $\angle RQD$, что делает точки D, Q, R и E концикличскими, так как противоположные углы четырехугольника $DQRE$ дополняют друг друга. Поскольку отрезки PQ и PR являются секущими к описанной окружности циклического четырехугольника $DQRE$, получаем $PE \cdot PR = PD \cdot PQ$. Точно так же можно доказать, что точки D, F, S и Q тоже лежат на одной окружности, при этом $PF \cdot PS = PD \cdot PQ$. Таким образом, получаем $PE \cdot PR = PF \cdot PS$, что позволяет сделать вывод о том, что точки S, F, E и R лежат на одной и той же окружности.

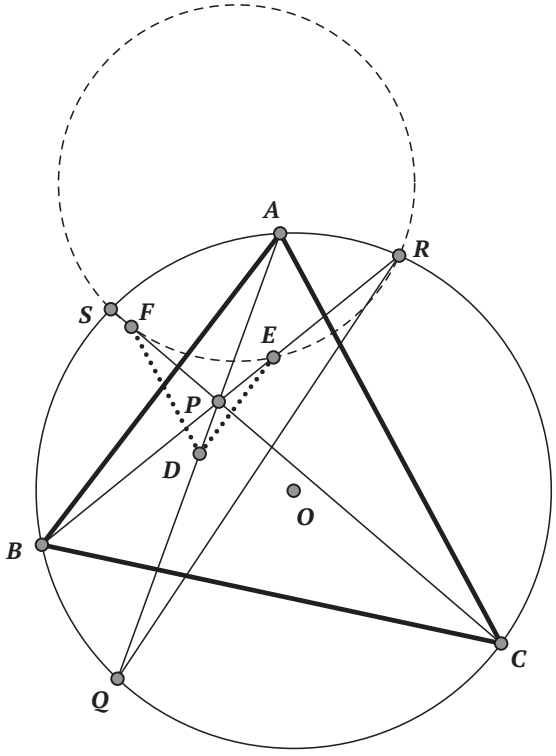


Рисунок 41-P

Пример 42. Неожиданные точки, лежащие на одной окружности

Начнем с того, что обозначим точку N как середину отрезка OA, как показано на рис. 42-Р. Поскольку углы $\angle ENA$ и $\angle EDA$ являются прямыми, можно сказать, что точки A, N, D и E лежат на окружности с диаметром AE. В треугольнике AOH линия MN параллельна AH, поскольку она соединяет середины двух сторон треугольника. Мы также знаем, что при продлении AD до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точке K получаем $HD = KD$. Таким образом, в треугольнике OKH линия MD, соединяющая середины сторон MK и MO, параллельна OK. Кроме того, в треугольнике OKH имеет место $\angle HDM = \angle HKO$, а поскольку треугольник AOK равнобедренный, то $\angle ADM = \angle HDM = \angle HKO = \angle AKO = \angle KAO = \angle DAN$. Получается, что четырехугольник $ANMD$ является равнобедренной трапецией, а окружность треугольника ANE содержит точку M, что и требовалось доказать.

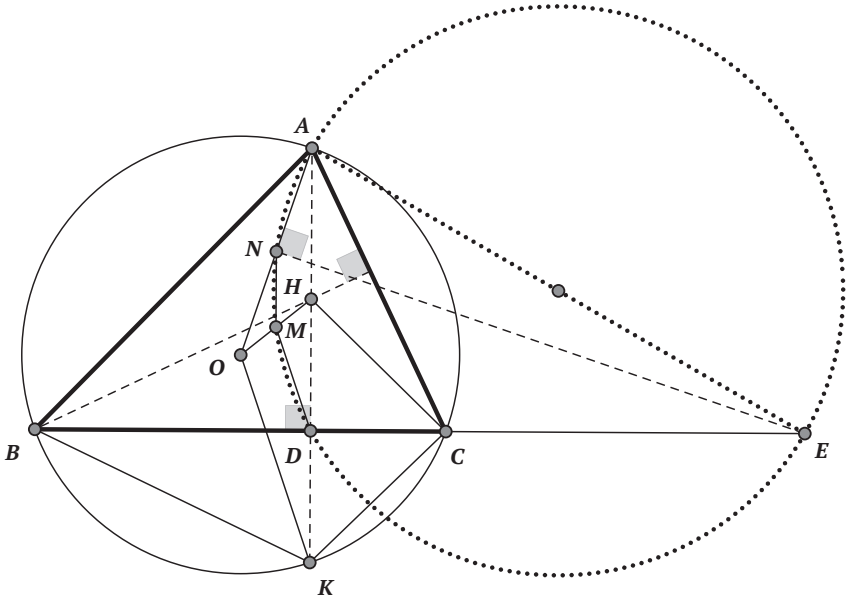


Рисунок 42-Р

Пример 43. Ортоцентр и две вершины треугольника образуют окружность, равную описанной окружности

На рис. 43-Р продлим высоту AH таким образом, чтобы она пересекла сторону BC в точке E, а описанную окружность в точке D. В циклическом четырехугольнике $ABDC$ противоположные углы дополняют друг друга, поэтому $\angle CDB = 180° - \angle BAC$. Кроме того, если S и T являются основаниями высот, опущенных соответственно на стороны CA и AB, то треугольники BCS и BCT являются прямоугольными, так что имеем

$$\begin{aligned}\angle BHC &= 180° - \angle CBH - \angle HCB \\ &= 180° - \angle CBS - \angle TCB \\ &= 180° - (90° - \angle SCB) - (90° - \angle CBT) \\ &= \angle ACB + \angle CBA \\ &= 180° - \angle BAC.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем $\angle BHC = \angle CDB$, а поскольку BC является общей хордой окружностей O и Q и углы, противолежащие этой общей хорде в обеих окружностях, равны, окружности O и Q имеют одинаковый размер.

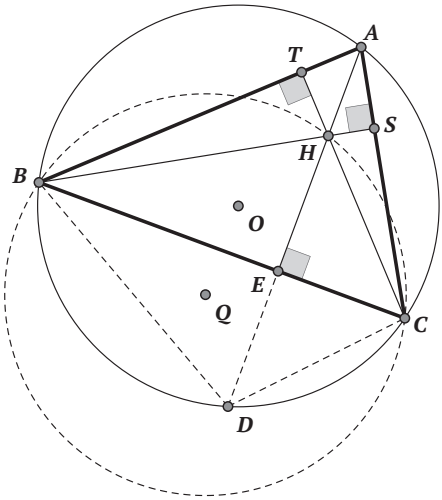


Рисунок 43-Р

Пример 44. Образование неожиданного равнобедренного треугольника

На рис. 44-P, так как прямые AB и PQ параллельны, имеет место выражение $\angle CBA = \angle CQP$. Поскольку PA и PC являются касательными к окружности O в конечных точках хорды AC, получаем $\angle CBA = \angle CAP = \angle PCA$. Отсюда следует, что $\angle CQP = \angle CAP$, и, таким образом, четырехугольник $AQCP$ является циклическим, поскольку оба угла равны половине дуги AP описанной окружности четырехугольника $AQCP$. В этом четырехугольнике имеет место $\angle PCA = \angle PQA$, и, следовательно, $\angle CQA = \angle CQP + \angle PQA = \angle CBA + \angle PCA = 2\angle CBA$. В треугольнике ABQ из этого следует, что $\angle BAQ = \angle CQA - \angle QBA = 2\angle CBA - \angle QBA = 2\angle QBA = 2\angle QBA - \angle QBA = \angle QBA$. Поскольку $\angle BAQ = \angle QBA$, треугольник ABQ является равнобедренным, при этом $AQ = BQ$.

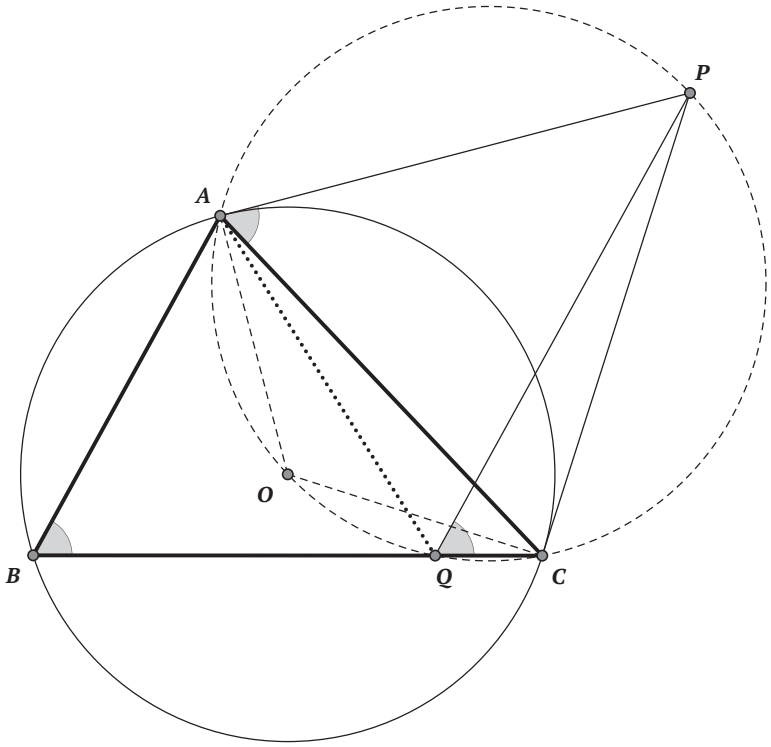


Рисунок 44-P

Пример 45. Неожиданные параллели, проходящие через точки на окружности

На рис. 45-Р, поскольку $AB = AE$, можно заметить, что $\angle EBA = \angle ECA = \angle EDA = \angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$, так как все эти углы измеряются равными дугами окружности O. Отсюда получаем $\angle XDY = \angle ADB = \angle ECA = \angle XCY$, так что имеет место циклический четырехугольник $CDXY$. В исходной окружности у нас $\angle DBE = \angle DCE$, а в описанной окружности четырехугольника $CDXY$ у нас $\angle DCE = \angle DCX = \angle DYX$. Отсюда следует, что $\angle DBE = \angle DCE = \angle DYX$, и, следовательно, $BE \parallel XY$.

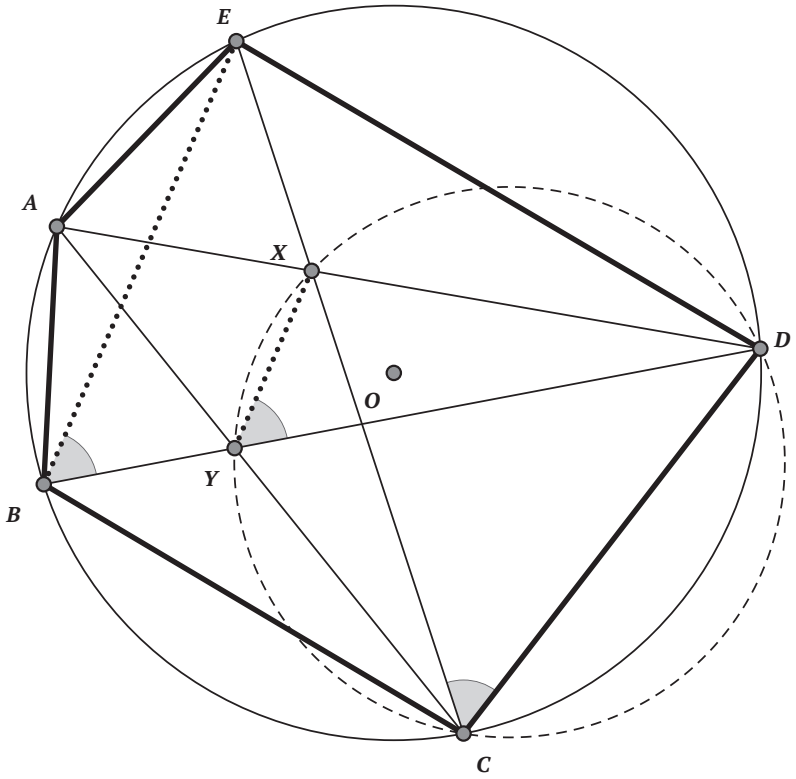


Рисунок 45-Р

Пример 46. Касательные к описанной окружности треугольника

На рис. 46-P касательная к окружности в точке A перпендикулярна радиусу OA. Если удастся показать, что OA также перпендикулярна EF, то это докажет, что касательная в точке A параллельна EF. Для этого сначала обратим внимание, что четырехугольник $AFHE$ является циклическим, поскольку $\angle AEH = \angle HFA = 90°$. В прямоугольном треугольнике ABD выполняется $\angle BAD = 90° - \angle DAB = 90° - \angle CBA$, а из циклического четырехугольника $AFHE$ получаем $\angle FEH = \angle FAH = \angle BAD = 90° - \angle CBA$. Рассмотрим равнобедренный треугольник OCA: $\angle OAC = \frac{1}{2}(180° - 2\angle CBA) = 90° - \angle CBA$, из чего видно, что $\angle OPC = \angle FEH = 90° - \angle CBA$. Точка Q является точкой пересечения OA и EF, а точка P является точкой пересечения OA и BE. В прямоугольном треугольнике AQE имеет место $\angle EPA = 90° - \angle PAE = 90° - \angle OAC = 90° - (90° - \angle CBA) = \angle CBA$, а в треугольнике PEQ имеет место $\angle PQE = 180° - \angle EPQ - \angle QEP = 180° - \angle EPA - \angle FEB = 180° - \angle CBA - (90° - \angle CBA) = 90°$. Как можно видеть, $\angle PQE = 90°$, что приводит нас к $OA \perp EF$, и поскольку известно, что касательная в точке A также перпендикулярна OA, то касательная в точке A параллельна EF. Таким же образом можно прийти к выводу, что касательная в точке B параллельна FD, а касательная в точке C параллельна DE.

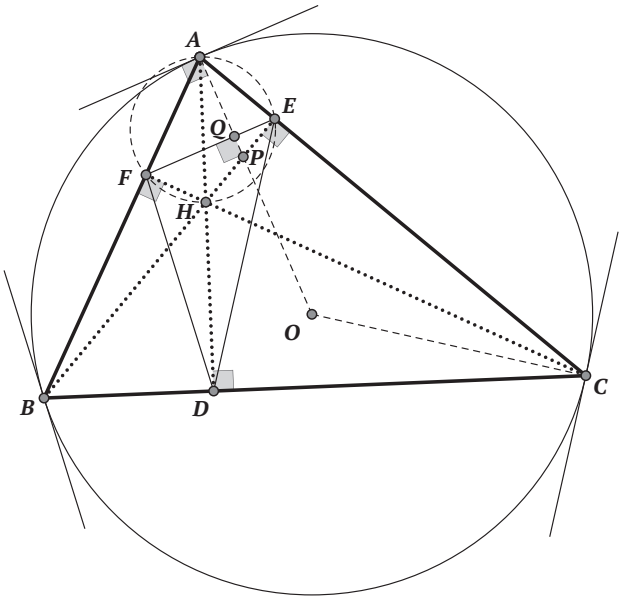


Рисунок 46-P

Пример 47. Касательные к окружности с девятью точками

На рис. 47-P радиус RK девятиточечной окружности перпендикулярен касательной в точке K. Теперь нам нужно показать, что RK перпендикулярен EF. Для этого рассмотрим четырехугольник $KMXY$. Поскольку точки K и M

являются, соответственно, серединами отрезков *CB* и *CA*, составляющих стороны треугольника *ABC*, отрезок *KM* параллелен *BA* и равен половине его длины. Кроме того, поскольку точки *Y* и *X* являются, соответственно, серединами отрезков *HB* и *HA*, составляющих стороны треугольника *HAB*, отрезок *YX* также параллелен *BA* и равен половине его длины. Следовательно, четырехугольник *KMXY* является параллелограммом, поскольку одна из его пар противоположных сторон равна другой и параллельна ей. Кроме того, так как точки *M* и *X* являются соответственно серединами отрезков *AC* и *AH*, отрезок *MX* параллелен высоте *CH*. Теперь получаем $MX \parallel CH$, $XY \parallel AB$ и $CH \perp AB$, из чего следует, что *MX* перпендикулярен *XY*. Таким образом, четырехугольник *KMXY* является прямоугольником. Диагональ *XK* этого прямоугольника является диаметром его вписанной окружности, а центр окружности *R* является серединой отрезка *XK*. В доказательстве примера 46 мы обратили внимание на то, что четырехугольник *AFHE* является циклическим, поскольку $\angle HFA = \angle AEH = 90°$. Середина *X* диаметра *AH* его вписанной окружности находится на равном расстоянии от точек *E* и *F*, и поэтому *XE* = *XF*. Поскольку *EF* является хордой окружности *R*, то высотой равнобедренного треугольника является линия *XR*, а линия *XRK* перпендикулярна *EF*. Так как касательная к окружности *R* в точке *K* также перпендикулярна *XRK*, эта касательная параллельна *EF*.

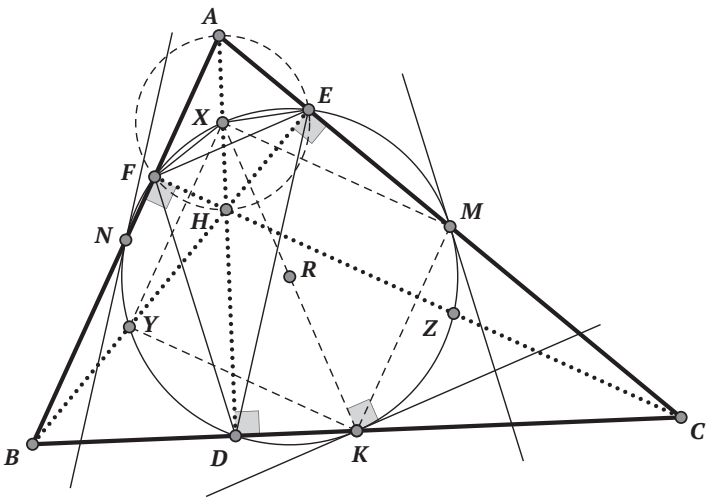


Рисунок 47-P

То же самое можно повторить для двух других касательных, чтобы доказать, что касательная в точке *M* параллельна отрезку *FD*, а касательная в точке *N* параллельна отрезку *DE*. Сопоставив этот результат с примером 46, можно увидеть, что касательные к описанной окружности треугольника *ABC* в его вершинах также параллельны касательным к девятиточечной окружности в серединах противоположных сторон.

Пример 48. Чудеса вписанной окружности треугольника и особой описанной окружности

Точка пересечения биссектрис углов треугольника ABC является центром вписанной окружности I, как видно на рис. 48-Р, так что для биссектрисы CI имеем $\angle ECI = \angle ICB$. Кроме того, $\angle ICB = \angle IDB$, поскольку оба угла измеряются дугой BI. Отсюда получаем $\angle ACI = \angle ECI = \angle IDB = \angle IDA$, а поскольку $\angle DAI = \angle IAC$ и треугольники DAI и IAC имеют общую сторону AI, получаем $\Delta ADI \cong \Delta AIC$, так что $AC = AD$ и $IC = ID$. Из равенства углов $\angle IDB = \angle ECI$ имеем $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EI}$. Кроме того, поскольку $IC = ID$, мы также имеем $\angle CDI = \angle ICD$, и, следовательно, $\overset{\frown}{DI} = \overset{\frown}{CI}$. Затем, путем вычитания, получаем $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DI} - \overset{\frown}{BI} = \overset{\frown}{CI} - \overset{\frown}{EI} = \overset{\frown}{CE}$, или $DB = CE$. Поскольку уже установлено, что $AD = AC$, в итоге получаем $AB = AD - BD = AC - EC = AE$.

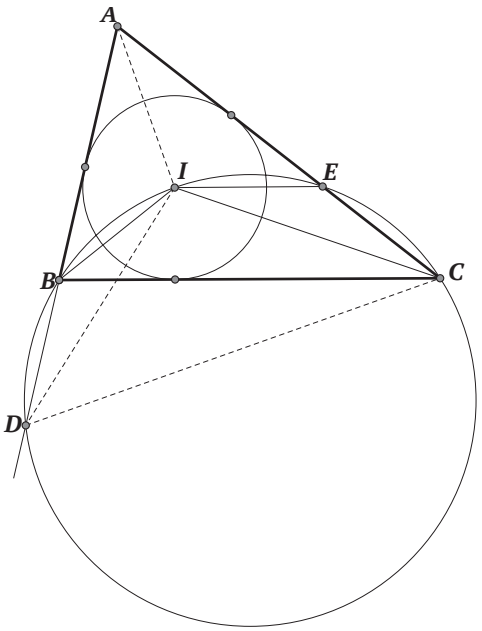


Рисунок 48-Р

Пример 49. Чудеса с описанными и вписанными окружностями треугольника

На рис. 49-Р прежде всего необходимо отметить, что центр внутренних углов I треугольника ABC является общей точкой биссектрис внутренних углов. Следовательно, имеем $\angle BCI = \frac{1}{2}\angle CBA$ и $\angle ICB = \frac{1}{2}\angle ACB$. Рассматривая треугольник IBC, получаем, что

$$\angle BIC = 180° - \angle CIB - \angle ICB = 180° - \tfrac{1}{2}\angle CBA - \tfrac{1}{2}\angle ACB.$$

Теперь, рассматривая треугольник ABC, имеем

$$\angle BIC = 180° - ½\angle CBA - ½\angle ACB - = 180° - ½(\angle CBA + \angle ACB).$$
$$= 180° - ½(180° - \angle BAC) = 90° + ½\angle BAC.$$

Поскольку точка *P* является центром описанной окружности треугольника *BCI*, находим, что $\angle CPB = 2 \cdot (180° - \angle BIC) = 180° - \angle BAC$, и получаем, что *ABPC* является циклическим четырехугольником. Аналогичным образом можно доказать, что четырехугольники *BCQA* и *RARB* также являются циклическими. Таким образом, точки *P*, *Q* и *R* лежат на описанной окружности треугольника *ABC*.

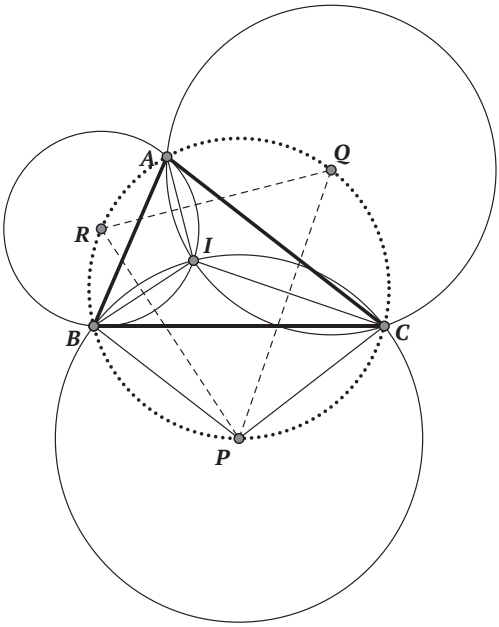


Рисунок 49-P

Пример 50. Другие чудеса с описанными и вписанными окружностями треугольника

Чтобы приступить к доказательству, сначала продлим отрезки *IP*, *IQ* и *IR* таким образом, чтобы они пересекали описанные окружности треугольников *BCI*, *CAI* и *ABI* в точках *D*, *E* и *F* соответственно, как показано на рис. 50-P. Затем проведем отрезки *DE*, *EF*, *FD*, *ID*, *IE* и *IF*. Поскольку *IF* является диаметром описанной окружности треугольника *ABI*, тогда $\angle IBF = 90°$. Точно так же описанная окружность треугольника *BCI* дает $\angle DBI = 90°$, и, следовательно, *FBD* также является прямой линией. Аналогичным образом можно доказать, что *DCE* и *EAF* также являются прямыми линиями.

Из примера 49 известно, что точка *P* лежит на описанной окружности треугольника *ABC*. Поскольку *PC* = *PB*, тогда $\angle BAP = \angle PAC$ на описанной окружности *ABC*, а точка *P* лежит на биссектрисе угла $\angle BAC$. То же самое верно и для центра вписанной окружности *I*, так что точки *A*, *I* и *P* лежат на одной прямой,

а поскольку точки *I*, *P* и *D* также лежат на одной прямой, *AIPD* является прямой линией. Аналогичным образом *BIQE* и *CIRF* также являются прямыми линиями.

Теперь обратим внимание, что точки *P*, *Q* и *R* являются серединами отрезков *ID*, *IE* и *IF* соответственно. Следовательно, стороны треугольника *PQR* параллельны сторонам треугольника *DEF*. Поскольку мы уже установили, что $IB \perp DF$ и *BIQE* является прямой линией, эта линия *BIQF* является высотой треугольника *DEF*, а также треугольника *PQR*. Точно так же линии *AIPD* и *CIRF* являются высотами треугольника *PQR*, и, следовательно, точка *I* является ортоцентром треугольника *PQR*.

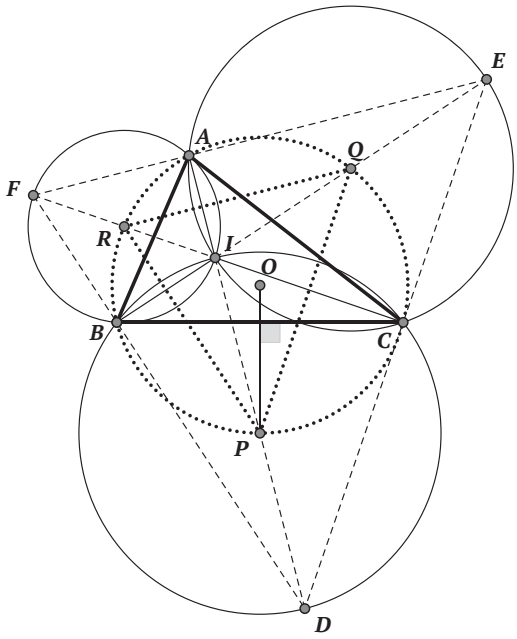


Рисунок 50-P

Пример 51. Как четыре центра треугольника образуют необычный циклический четырехугольник

На рис. 51-P начнем с построения биссектрисы *AID* угла $\angle BAC$, которая пересекает окружность *O* в точке *P*. Затем построим отрезок *OP*, пересекающий сторону *BC* в точке *Q*. Обратим внимание, что $\angle BAP = \angle PAC$, поскольку точка *P* лежит на биссектрисе угла, и, следовательно, $\overset{\frown}{BP} = \overset{\frown}{PC}$. Кроме того, так как *OP* является биссектрисой *BC*, точка *Q* является серединой *BC*. Далее прочерчиваем отрезки *AO*, *BO*, *CO*, *CI*, *CP*, *PH*, *PB* и *CD*. Для окружности *O* имеем $\angle POC = 2 \cdot \angle PAC$, а поскольку *AIP* делит угол *BAC* в 60° пополам, то $\angle POC = \angle BAC = 60°$. Так как $OC = OP$, треугольник *OPC* равносторонний, и $PC = OP$.

В треугольнике *AIC* внешний угол *PIC* равен сумме $\angle IAC + \angle ACI$. Кроме того, $\angle IAC = \angle BAI$ и $\angle ACI = \angle ICB$. Таким образом, поскольку $\angle BAI = \angle BAP = \angle BCP$

в окружности O, $\angle IAC + \angle ACI = \angle BAI + \angle ICB = \angle BCP + \angle ICB = \angle ICP$. Отсюда следует, что $\angle PIC = \angle ICP$, что делает треугольник PCI равнобедренным, так что $PC = PI = PO$.

Далее обратим внимание на то, что CI и CD являются внутренней и внешней биссектрисами угла $\angle ACB$, что делает их перпендикулярными. В результате треугольник IDC является прямоугольным, при этом $\angle ICD = 90°$ и $PC = PI$, что дает нам $PC = PI = PD$. Поскольку Q является серединой BC, а $OP \perp BC$, треугольники QBP и QPC являются конгруэнтными, и $PB = PC$.

Наконец, перейдем к четырехугольнику $AHPO$. Линии AH и OP перпендикулярны BC и, следовательно, параллельны. Кроме того, поскольку точки A и P лежат на окружности O, имеет место равенство $OA = OP$. Отметим, что $BQ = \frac{1}{2} BC$, а $\angle BOQ = \frac{1}{2}\angle BAC = 60°$, из чего следует, что $OQ = \dfrac{BC}{2\sqrt{3}}$. Кроме того, обозначив точку пересечения AC и высоты BH как точку E, получаем, что $\angle HAC = 90° - \angle ACB$ и $\angle EHA = 90° - \angle HAC = \angle ACB$. Отсюда получаем $BE = BC \cdot \sin \angle ACB$, а также $AE = \dfrac{BE}{\sqrt{3}} = \dfrac{BC \cdot \sin \angle ACB}{\sqrt{3}}$, и, следовательно, $AH = \dfrac{AE}{\sin \angle EHA} = \dfrac{AE}{\sin \angle ACB} = \dfrac{BC}{\sqrt{3}}$. Выходит, что $AH = 2 \cdot OQ = OP$, а многоугольник $AHPO$ является ромбом, из чего следует, что $PO = PH$.

Таким образом, мы доказали, что $PD = PC = PO = PI = PH = PB$, а точка P является центром окружности, содержащей все точки D, C, O, I, H и B.

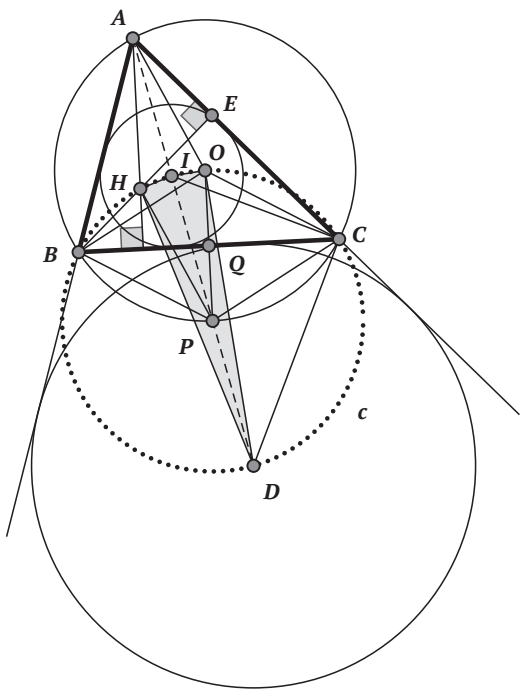


Рисунок 51-P

Пример 52. Радиусы вписанной и описанной окружностей определяют площадь прямоугольника

Начнем с добавления различных линий на рис. 52-P. Сначала вспомним, что в доказательстве примера 50 биссектриса $\angle BAC$ пересекает описанную окружность треугольника ABC в центре P окружности, содержащей точки B, D, C и I. Добавим на рисунок линию $AIPD$ и окружность, проходящую через точку P.

Поскольку вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AB в точке X, а описанная окружность касается стороны AB в точке Y, мы также добавляем линии BI, CI, BD и CD. Продолжение IX пересекает окружность P в точке F, а продолжение DY пересекает окружность P в точке G. Затем мы также добавляем FD и GI. Биссектрисами внутреннего и внешнего углов треугольника ABC в точке B являются BI и BD соответственно. Точно так же биссектрисами внутреннего и внешнего углов в точке C являются CI и CD соответственно. Таким образом, CI и CD перпендикулярны, так что $\angle DBI = \angle ICD = 90°$, а ID является диаметром окружности P. Поскольку точки F и G также лежат на этой окружности, $\angle DFI = \angle IGD = 90°$, поэтому $IFDG$ является прямоугольником.

В прямоугольнике $IFDG$ имеют место равенства $IX = GY$ и $FX = DY$. Поскольку точки C, G, I, B, F и D лежат на окружности P, получаем произведения хорд $CX \cdot BX = IX \cdot XF = IX \cdot DY = GY \cdot DY = CY \cdot BY$. Как можно убедиться, $CX \cdot BX = CY \cdot BY$, при этом оба выражения равны $IX \cdot DY$, что является площадью прямоугольника со сторонами IX и DY.

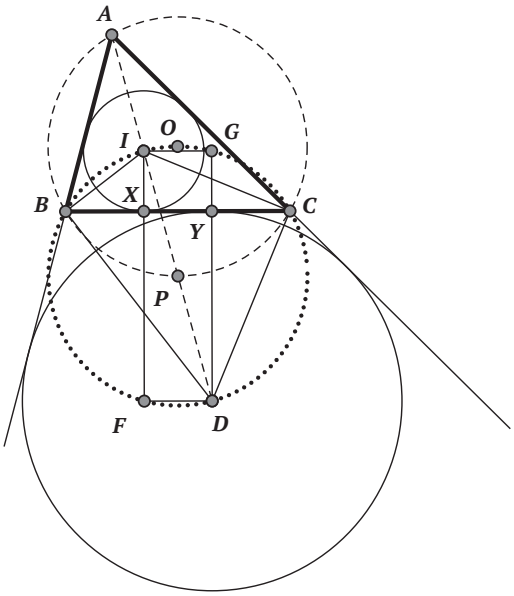


Рисунок 52-P

Пример 53. Описанная и вписанная окружности образуют три отрезка равной длины

На рис. 53-P сначала обращаем внимание на то, что центр вписанной окружности I лежит на отрезке BP, а это означает, что BP является биссектрисой угла $\angle CAB$. Отсюда получаем, что $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{CP}$, а это значит, что $PA = PC$. Таким образом $\angle BAI = \angle IAC$, поскольку AI делит угол $\angle BAC$ пополам; $\angle PIA$ является углом снаружи треугольника ABI, и $\angle PIA = \angle IBA + \angle BAI$. Кроме того, имеет место $\angle IAP = \angle CAP + \angle IAC$ и $\angle IBA = \angle PBA = \angle CBP = \angle CAP$, поскольку эти углы вписаны в одну и ту же дугу PC. Таким образом, получаем $\angle PIA = \angle IBA + \angle BAI = \angle CAP + \angle IAC = \angle IAP$, из чего следует, что треугольник AIP равнобедренный и $PA = PI$. Таким образом, мы пришли к желаемому итогу: $PA = PI = PC$.

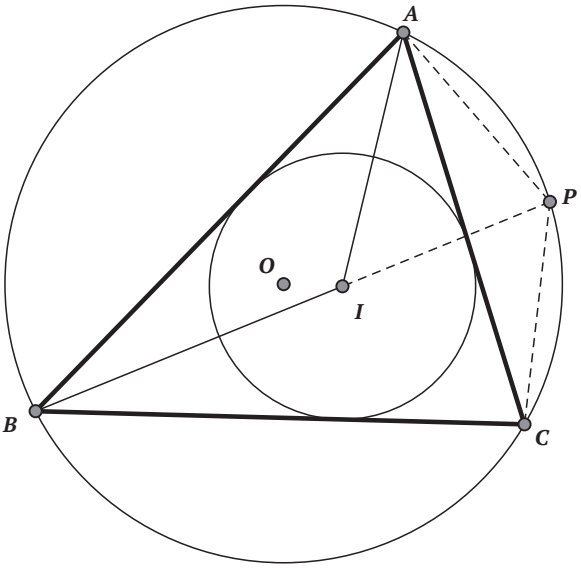


Рисунок 53-P

Пример 54. Три окружности с неожиданной общей точкой

На рис. 54-P начертим линии OB, OD, OF, HB, HD и HF. Определим точку H как одну из точек пересечения окружностей A и C, а точку B как их вторую точку пересечения. Наша цель состоит в том, чтобы показать, что точка H в этом случае также будет лежать на окружности с центром E. Сначала обратим внимание на то, что на окружности c выполняется $\angle BAF = 180° - \frac{1}{2}\angle FOB$, а также $\angle DCB = 180° - \frac{1}{2}\angle BOD$. Это позволяет нам вычислить следующее:

Для окружности A имеет место

$$\angle FHB = 180° - \tfrac{1}{2} \cdot \angle BAF = 180° - \tfrac{1}{2}(180° - \tfrac{1}{2}\angle FOB) = 90° + \tfrac{1}{4}\angle FOB.$$

Для окружности C имеет место

$$\angle BHD = 180° - \tfrac{1}{2} \cdot \angle DCB = 180° - \tfrac{1}{2}(180° - \tfrac{1}{2}\angle BOD) = 90° + \tfrac{1}{4}\angle BOD.$$

Следовательно,

$$\angle DHF = 360° - \angle FHB - \angle BHD$$
$$= 360° - (90° + \tfrac{1}{4}\angle FOB) - (90° + \tfrac{1}{4}\angle BOD)$$
$$= 180° - \tfrac{1}{4}\angle FOB - \tfrac{1}{4}\angle BOD.$$

Поскольку $\angle DOF = 360° - \angle FOB - \angle BOD$, получаем:

$$\angle FED = 180° - \tfrac{1}{2}\angle DOF$$
$$= 180° - \tfrac{1}{2}(360° - \angle FOB - \angle BOD)$$
$$= \tfrac{1}{2}\angle FOB + \tfrac{1}{2}\angle BOD.$$

Это дает нам

$$180° - \tfrac{1}{2}\angle FED = 180° - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\angle FOB + \tfrac{1}{2}\angle BOD)$$
$$= 180° - \tfrac{1}{4}\angle FOB + \tfrac{1}{4}\angle BOD = \angle DHF.$$

Поскольку теперь нам известно, что $\angle DHF = 180° - \tfrac{1}{2} \cdot \angle FED$, можно считать доказанным, что точка H лежит на окружности E, и все три окружности A, C и E имеют общую точку H.

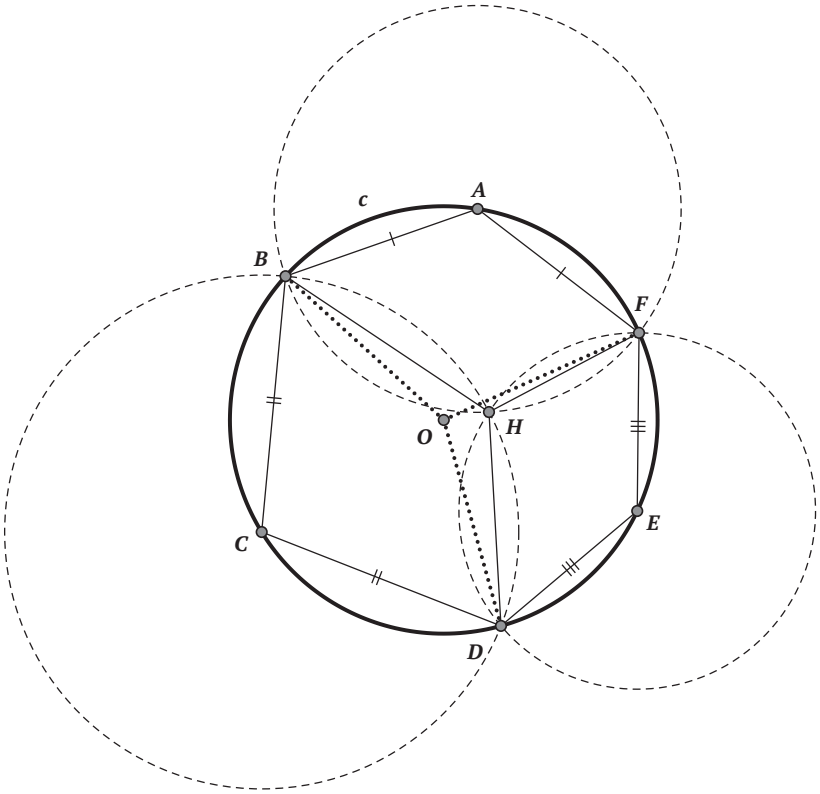


Рисунок 54-Р

Пример 55. Знаменитая окружность Конвея

На рис. 55-P обозначены точки, в которых вписанная окружность касается сторон *BC*, *CA* и *BP*, как *P*, *Q* и *R* соответственно. Поскольку касательные к окружности из внешней точки равны, обозначим $AQ = AR = x$, $BR = BP = y$ и $CP = CQ = z$. Кроме того, *r* обозначает радиус вписанной окружности *I*. У треугольника *IFP* радиус *IP* перпендикулярен стороне *BC* в точке *P*. Поскольку точка *F* была определена как $BF = CA$, получаем $PF = BF + BP = AC + BP = (x + z) + y = x + y + z$, и, следовательно, $IF = \sqrt{IP^2 + PF^2} = \sqrt{r^2 + (x + y + z)^2}$. Точно так же мы можем найти $IJ = \sqrt{IP^2 + PJ^2} = \sqrt{r^2 + (x + y + z)^2}$, и по аналогичному рассуждению получаем те же значения $IE = IH = ID = IG = \sqrt{IP^2 + PJ^2} = \sqrt{r^2 + (x + y + z)^2}$ на продлениях двух других сторон треугольника *ABC*. Можно заметить, что все шесть точек *D*, *E*, *F*, *G*, *H* и *J* находятся на расстоянии $\sqrt{r^2 + (x + y + z)^2}$ от точки *I* и, следовательно, лежат на общей окружности с центром *I*.

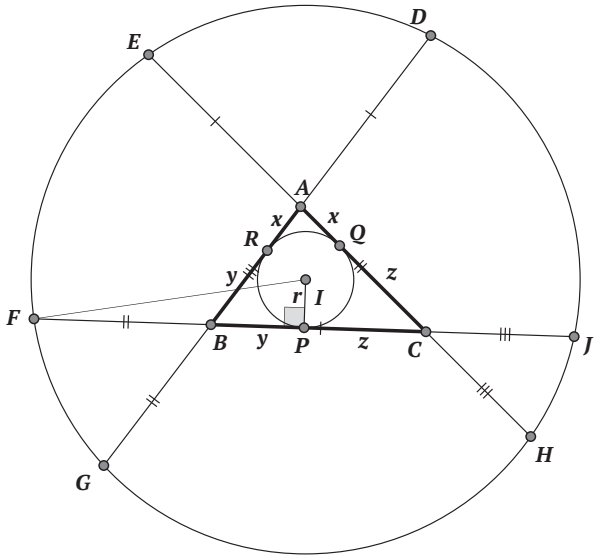


Рисунок 55-P

Пример 56. Удивительная коллинеарность с центром внутренней окружности треугольника: лемма Саваямы

Это сложное доказательство состоит из нескольких шагов. В качестве первого шага на рис. 56-P продлеваем линию E таким образом, чтобы она пересекала описанную окружность O треугольника ABC в точке N. Используем гомотетию (см. «Инструментарий») с центром D для отображения окружности M на окружность O таким образом, чтобы касательная окружности M в точке E отображалась на касательную окружности O в точке N. Получается, что касательная окружности O в точке N параллельна стороне BC. Точка N является средней точкой дуги BC. Отсюда следует, что $NB = NC$ и $\angle BAN = \angle NAC$, а AN является биссектрисой $\angle BAC$. Кроме того, поскольку гомотетия отображает ΔDME на ΔDON, получаем $\angle EMD = \angle NOD$.

После сбора этой предварительной информации определим точку F' как второе пересечение линии EI с окружностью M. Попробуем доказать, что линия AF' является касательной к окружности M и, следовательно, $F' = F$.

Нам известно, что $\angle EF'D = \frac{1}{2}\angle EMD$ в окружности M и $\angle NAD = \frac{1}{2}\angle NOD$ в окружности O. Поскольку $\angle EMD = \angle NOD$, получаем $\angle IAD = \angle NAD = \angle EF'D$. Таким образом, $\angle DF'I = 180° - \angle EF'D = 180° - \angle IAD$, и четырехугольник $AIF'D$ является циклическим.

Далее примем во внимание, что треугольник NCB равнобедренный, а четырехугольник $BNCD$ циклический, и тогда получим $\angle ECN = \angle BCN = \angle NBC = \angle NDC$. Это доказывает, что $\Delta NCE \sim \Delta NCD$ при равенстве $\frac{NC}{NE} = \frac{ND}{NC}$.

Теперь будет полезно обратить внимание на то, что $NC = NB = NI$. Это можно проверить, обратив внимание на треугольник NIB. В окружности O получаем $\angle INB = \angle ANB = \angle ACB$ и $\angle NBC = \angle NAC = \frac{1}{2}\angle BAC$. Кроме того, известно, что $\angle CBI = \frac{1}{2}\angle CBA$. Это означает, что $\angle NBA = \angle NBC + \angle CBI = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle CBA$, и в треугольнике NIB мы можем вычислить

$$\angle BIN = 180° - \angle INB - \angle NBI$$

$$= 180° - \angle ACB - (\tfrac{1}{2}\angle BAC + \tfrac{1}{2}\angle CBA)$$

$$= \tfrac{1}{2}\angle BAC + \tfrac{1}{2}\angle CBA$$

$$= \angle NBI.$$

Таким образом, треугольник NIB является равнобедренным с $NI = NB$, при этом $NC = NB = NI$. Подставляя это в $\frac{NC}{NE} = \frac{ND}{NC}$, получаем $\frac{NI}{NE} = \frac{ND}{NI}$. Получается, что $\Delta NEI \sim \Delta NDI$, так что $\angle DEF' = \angle DEI = \angle DIA = \angle DF'A$. Из этого следует, что линия AF' является касательной к окружности M, так что $F' = F$. Таким образом, можно сделать вывод, что точки E и F лежат на одной прямой с центром вписанной окружности I.

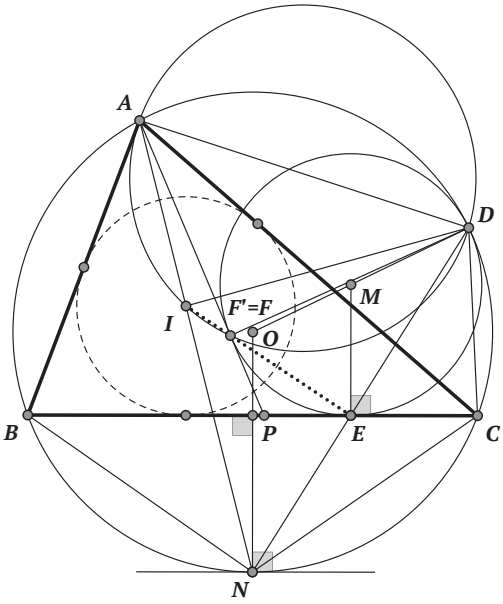


Рисунок 56-P

Пример 57. Удивительная взаимосвязь между четырьмя касательными окружностями треугольника

На рис. 57-P прежде всего обращаем внимание на то, что *AIE* и *BIF* являются линиями, которые делят внутренние углы треугольника *ABC* пополам в точках *A* и *B* соответственно. Пусть *DN* является диаметром окружности *M*, описываемой вокруг треугольника *DEF*; прочертим линии *NF* и *NE*. Также обращаем внимание на то, что *FAD*, *DBE* и *ECF* тоже являются прямыми и биссектрисами наружных углов треугольника *ABC* в точках *A*, *B* и *C* соответственно. Поскольку биссектрисы наружных углов перпендикулярны биссектрисам соответствующих внутренних углов, получаем $AIE \perp DAF$ и $BIF \perp DBE$, и, следовательно, *I* является ортоцентром треугольника *DEF*. Так как $\angle NED$ вписан в полуокружность, $\angle NED = 90° = \angle FBD$. Это означает, что $NE \parallel FI$, и поскольку по аналогии мы получаем $NF \parallel EI$, из этого следует, что *NFIE* является параллелограммом со сторонами $FI = NE$. В прямоугольном треугольнике *NDE* получаем $DE^2 + FI^2 = DE^2 + NE^2 = DN^2$. Точно так же получаем $DF^2 + EI^2 = DN^2$, и, следовательно, $DE^2 + FI^2 = DF^2 + EI^2 = DN^2$.

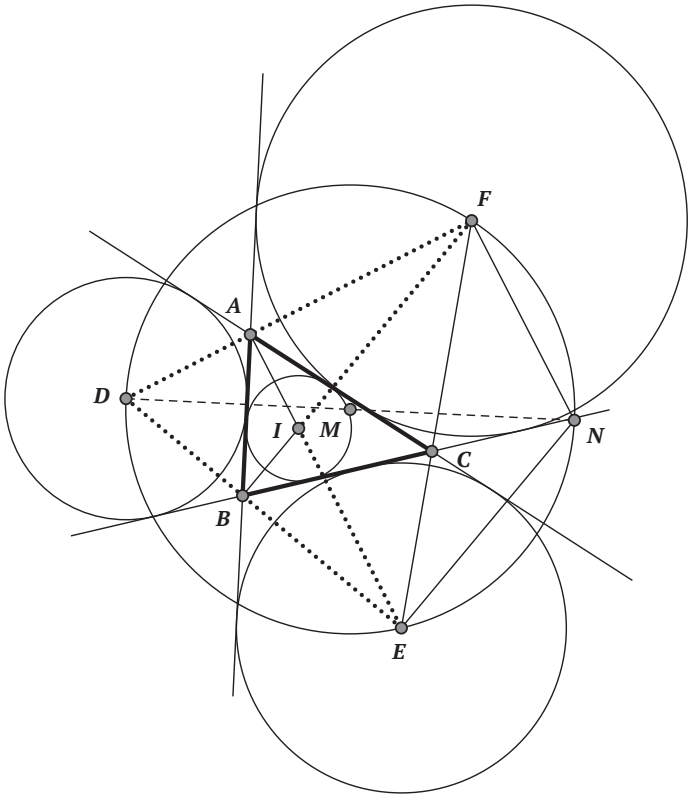


Рисунок 57-Р

Пример 58. Две касательные окружности образуют неожиданный прямой угол

Как известно, радиусы окружности, проведенные к точкам касания, всегда перпендикулярны этой касательной. На рис. 58-Р из этого следует, что $OR \perp RS$ и $QS \perp RS$. Поскольку сумма углов четырехугольника равна 360°, тогда $\angle QOR + \angle SQO = 180°$. Так как $\angle QOR = \angle POR = 2\angle PAR$ в окружности O и $\angle SQO = \angle SQP = 2\angle SBP$ в окружности Q, мы можем рассмотреть треугольник HAB, чтобы получить следующее:

$$\angle AHB = 180° - (\angle BAH + \angle HBA) = 180° - (\angle PAR + \angle SBP)$$
$$= 180° - \tfrac{1}{2}(\angle QOR + \angle SQO) = 180° - 90° = 90°,$$

и, следовательно, $\angle AHB = 90°$.

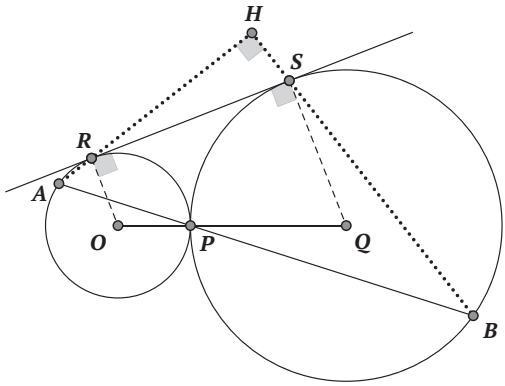


Рисунок 58-P

Пример 59. Неожиданный диаметр окружности

Начнем доказательство с построения на рис. 59-P двух радиусов OA и QB. Общая касательная к двум окружностям в точке P пересекает AB в точке C. Поскольку угол, образованный хордой и касательной, равен половине пересеченной дуги, получаем $\angle CPA = \frac{1}{2}\angle POA$ и $\angle BPC = \frac{1}{2}\angle BQP$. Путем сложения получаем $90° = \angle BPA + \angle CPA + \angle BPC = \frac{1}{2}(\angle POA + \angle BPC)$, и, следовательно, $\angle POA + \angle BPC = 180°$, или $AO \parallel BQ$. Поскольку $AO = BQ$, можно сделать вывод, что $AOQB$ является параллелограммом со сторонами $AB = OQ$. Таким образом, отрезок AB равен по длине сумме радиусов двух окружностей.

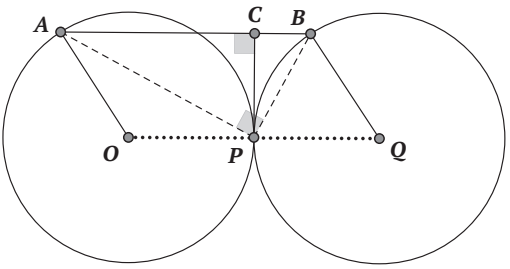


Рисунок 59-P

Пример 60. Удвоение расстояния между центрами

На рис. 60-P начертим отрезки OM, OA, QA и QY, отмечая, что треугольники OAX и QYA являются равнобедренными, поскольку у каждого из них две стороны являются радиусами соответствующих окружностей. Это означает, что основания M и N высот OM и QN являются, соответственно, серединами их оснований AX и AY. Следует также обратить внимание, что четырехугольник $OQNM$ является прямоугольником, и поэтому $OQ = MN$. Таким образом, получаем $XY = XA + AY = 2 \cdot MA + 2 \cdot AN = 2 \cdot (MA + AN) = 2 \cdot MN = 2 \cdot OQ$, или $XY = 2 \cdot OQ$.

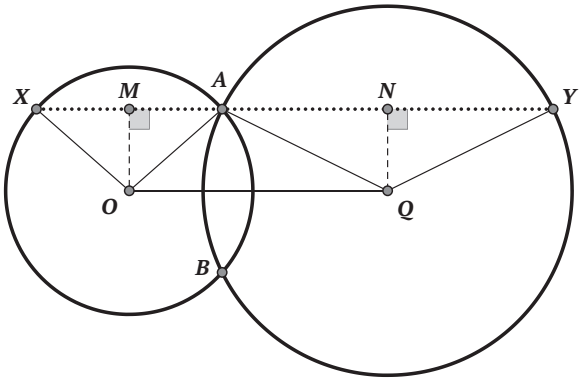


Рисунок 60-Р

Пример 61. Касательные окружности образуют окружность касательно оси центров

Начнем с того, что нарисуем линии *AP*, *BP*, *AO* и *BO* на рис. 61-Р. Затем начертим общую касательную к двум окружностям в точке *P*, которая пересекает *AB* в точке *R*. Обратим внимание, что *RA* = *RP*, поскольку обе линии касаются окружности *O*. Точно так же *RB* = *RP*, так как обе они касаются окружности *Q*. Отсюда получаем *RA* = *RP* = *RB*, а это означает, что *R* является серединой отрезка *AB* и, следовательно, центром окружности с диаметром *AB*, которая также содержит точку *P*. Теперь нам нужно доказать, что эта окружность касается линии *OPQ*. Для этого рассмотрим треугольник *OPA*. Поскольку *OA* = *OP*, этот треугольник равнобедренный, и ∠*OAP* = ∠*APO*. Так как радиус *OA* окружности *O* перпендикулярен касательной окружности *AB*, он является касательной окружности с диаметром *AB*. Таким образом, ∠*OAP* = ∠*ABP*, поскольку оба угла равны половине дуги *AP* на окружности *R*. Это означает, что также выполняется отношение ∠*APO* = ∠*OAP* = ∠*ABP*, и, следовательно, окружность с диаметром *AB* касается прямой *OPQ* в точке *P*.

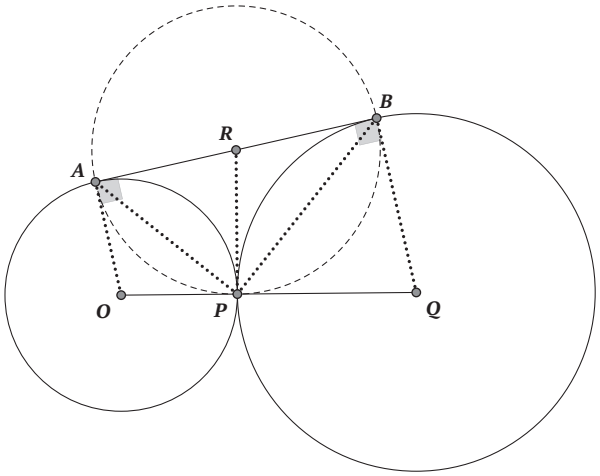


Рисунок 61-Р

Пример 62. Неожиданная биссектриса угла, построенная внешними касательными окружностями

Для начала начертим хорду AB и линию CP, которая является общей касательной к двум окружностям в точке P, как показано на рис. 62-P. Поскольку угол $\angle XPC$ между хордой окружности и касательной в одной из ее конечных точек равен половине длины пересеченной дуги PX, то в окружности O получаем $\angle XPC = \angle XYP$, и аналогично в окружности Q, то есть $\angle CPA = \angle PBA$. Таким образом, $\angle XPA = \angle XPC + \angle CPA = \angle XYP + \angle PBA$. Точно так же получаем, что $\angle PAX = \angle PBA$. С учетом углов в треугольнике ΔABY получаем $\angle BAP = 180° - \angle PAX - \angle AYB - \angle YBA = 180° - 2 \cdot \angle PBA - \angle XYP$. Теперь, принимая во внимание треугольник ABP, получаем:

$$\angle APB = 180° - \angle BAP - \angle PBA = 180° - (180° - 2 \cdot \angle PBA - \angle XYP) - \angle PBA = \angle XYP + \angle PBA.$$

Отсюда следует, что $\angle APB = \angle XYP + \angle PBA = \angle XPA$. Это означает, что PA является биссектрисой $\angle XPB$.

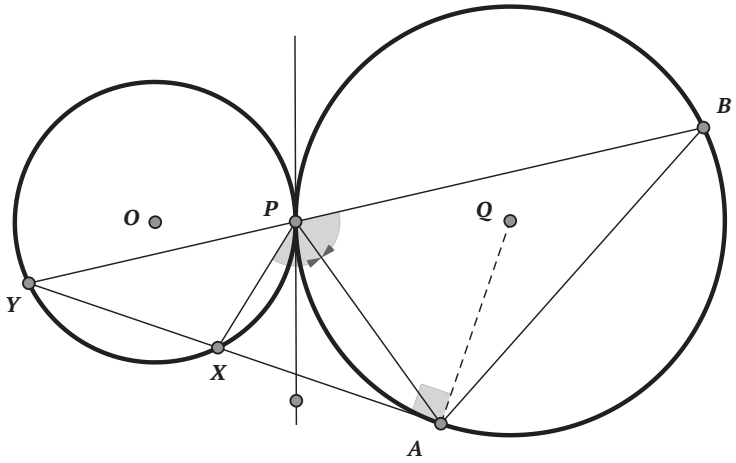


Рисунок 62-P

Пример 63. Неожиданные параллельные хорды внешних касательных окружностей

Это доказательство начнем с построения общей касательной *EP* на рис. 63-P, а также линий *PX*, *PA*, *OQ* и *BQ*. Поскольку *PE* и *AX* являются касательными, а углы ∠*EPA*, ∠*PAX* и ∠*PBA* равны половине дуги *AP*, в окружности *Q* получаем ∠*EPA* = ∠*PAX* = ∠*PBA*. Точно так же в окружности *O* выполняется равенство ∠*XYP* = ∠*XPE*, поскольку эти углы равны половине дуги *PX*. Далее рассмотрим *PX* в треугольнике *ABY*. Как уже было установлено, ∠*AYB* = ∠*XYP* = ∠*XPE* и ∠*YBE* = ∠*PBE* = ∠*EPA*, откуда получаем ∠*BAY* = 180° − ∠*AYB* − ∠*YBE* = 180° − ∠*XPE* − ∠*EPA* = 180° − ∠*XPA*. Поскольку ∠*QAY* = 90°, получаем ∠*BAQ* = ∠*BAY* − ∠QAY = 180° − ∠*XPA* − 90° = 90° − ∠*XPA*. В равнобедренном треугольнике *QAB* получаем ∠*QAB* = 180° − 2 · ∠*BAQ* = 180° − 2 · (90° − ∠*XPA*) = 2 · ∠*XPA*, откуда следует, что ∠*APB* = ½ ·∠*AQB* = ∠*XPA* в окружности *Q*. Поскольку ∠*CPX* и ∠*APB* являются вертикальными углами, получаем ∠*CPY* = ∠*APB* = ∠*XPA*, а так как четырехугольник *PCYX* циклический, то его противоположные углы равновелики: ∠*YCP* = ∠*AXP*. Следовательно, треугольники Δ*APX* и Δ*YPC* подобны, а также имеет место равенство ∠*PYC* = ∠*PAX*. Таким образом, получаем ∠*BYC* = ∠*PYC* = ∠*PAX* = ∠*PBA* = ∠*YBA*, при этом линии *AB* и *YC* являются параллельными.

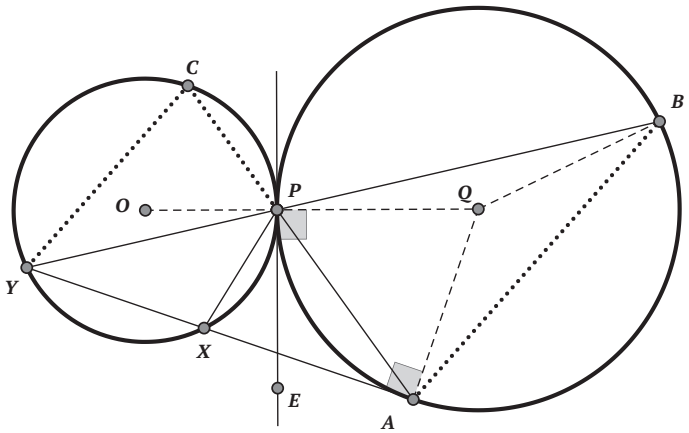


Рисунок 63-P

Пример 64. Удивительная параллельность касательных к внешне касательным окружностям

На рис. 64-P для начала добавим общую касательную *XY* к двум окружностям в точке *P*, а также расположим точки *C* и *D* на касательных *A* и *B* соответственно. Для окружности *O* получаем ∠*CAP* = ∠*APY*, поскольку оба угла равны половине длины дуги *AP*. Точно так же для окружности *Q* получаем ∠*DBP* = ∠*BPX*. Вертикальные углы ∠*APY* и ∠*BPX* равны, поэтому получаем ∠*CAP* = ∠*DBP*. Поскольку это внутренние перекрестные углы для касательных в точках *A* и *B*, из этого следует, что они параллельны.

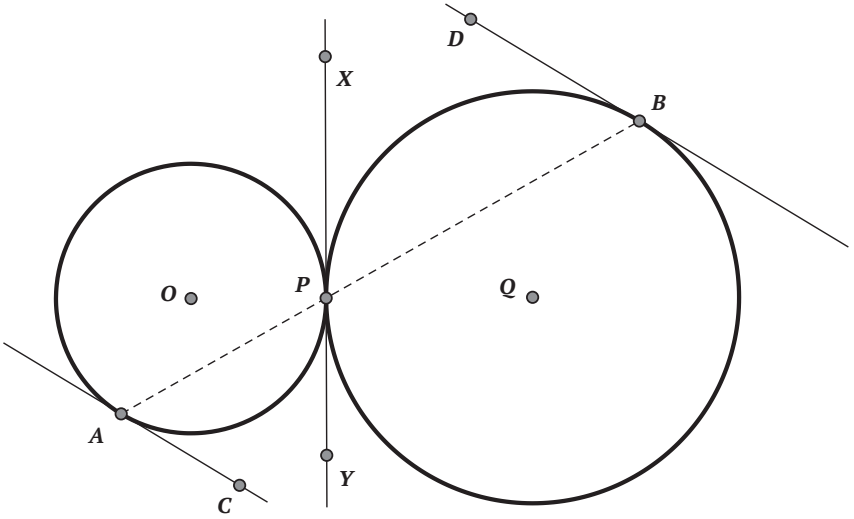


Рисунок 64-P

Пример 65. Две внешне касательные окружности образуют отрезок, равный половине длины отрезка между их центрами

Обозначим M как середину OQ, как показано на рис. 65-P, а D будет серединой BC. Поскольку M является серединой OQ, а D является серединой BC, то прямоугольная трапеция $OQCB$ определяет нам $OB \parallel MD \parallel QC$, и $MD = \frac{1}{2}(OB + QC) = \frac{1}{2}(OA + QA) = \frac{1}{2}OQ$. Поскольку $OB \parallel MD \parallel QC$, получаем $MD \perp BC$, а так как также имеет место $AP \perp BC$, из этого следует, что $MD \parallel AP$. Теперь примем во внимание, что точка D тоже является точкой пересечения BC с общей касательной двух окружностей в точке A, так как $DA = DB = DC$. Следовательно, $DA \perp OQ$ и $MP \perp OQ$, а это значит, что $DA \parallel MP$. Получается, что четырехугольник $APMD$ является параллелограммом, и, следовательно, $AP = MD = OQ$, или $OQ = 2AP$.

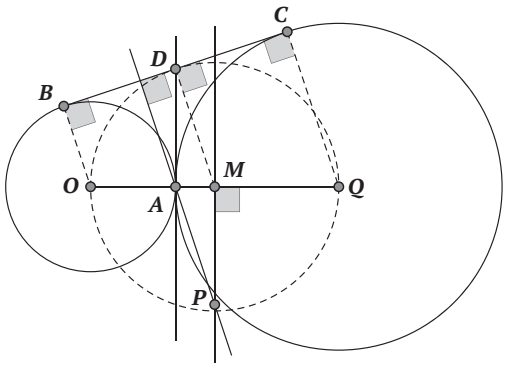


Рисунок 65-P

Пример 66. Необычайно удивительная постоянная длина касательной

В этой необычной конфигурации нам потребуется несколько дополнительных точек и линий, как показано на рис. 66-P. Поскольку точка M является серединой дуги AB, линия, соединяющая центр O заданной окружности с точкой M, перпендикулярна хорде AB. Точка N является точкой пересечения MO с AB, и пусть R обозначает длину радиуса OM, а x обозначает длину NM. Поскольку окружность Q касается AB в точке C, то также справедливо $QC \perp AB$, и поэтому мы можем завершить прямоугольник $OYZM$ точками Y и Z на продолжении QC. Обозначим r как длину радиуса QC касательной окружности, и поскольку окружности касаются в точке D на OQ, получаем $OQ = OD + DQ = R + r$. Наконец, также добавим линии MQ и QE, где точка E является точкой касания окружности Q с касательной из точки M и где получаем $ME = t$.

Отметив, что $YQ = YZ - ZC + CQ = OM - MN + CQ = R - x + r$, мы можем применить теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику OYQ, чтобы получить следующее:

$$\begin{aligned} OY^2 &= OQ^2 - YQ^2 \\ &= (R + r)^2 - ((R + r) - x)^2 \\ &= (R + r)^2 - (R + r)^2 + 2x\,(R + r) - x^2 \\ &= 2x\,(R + r) - x^2. \end{aligned}$$

Поскольку $MZ = OY$ в прямоугольнике $OYZM$, то теперь можно применить теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику ZMQ, что дает следующее:

$$\begin{aligned} MQ^2 &= MZ^2 + ZQ^2 \\ &= 2x\,(R + r) - x^2 + (x - r)^2 \\ &= 2xR + 2xr - x^2 + x^2 - 2xr + r^2 \\ &= 2xR + r^2. \end{aligned}$$

На последнем шаге мы применяем теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику EMQ, получая $ME^2 = MQ^2 - QE^2 = 2xR + r^2 - r^2 = 2xR$. Как можно убедиться, значение ME^2 и, следовательно, значение $t = ME$ зависят только от значений R и x, но не от значения r. Другими словами, значение t зависит только от выбора окружности O и секущей AB и не зависит от выбора окружности Q.

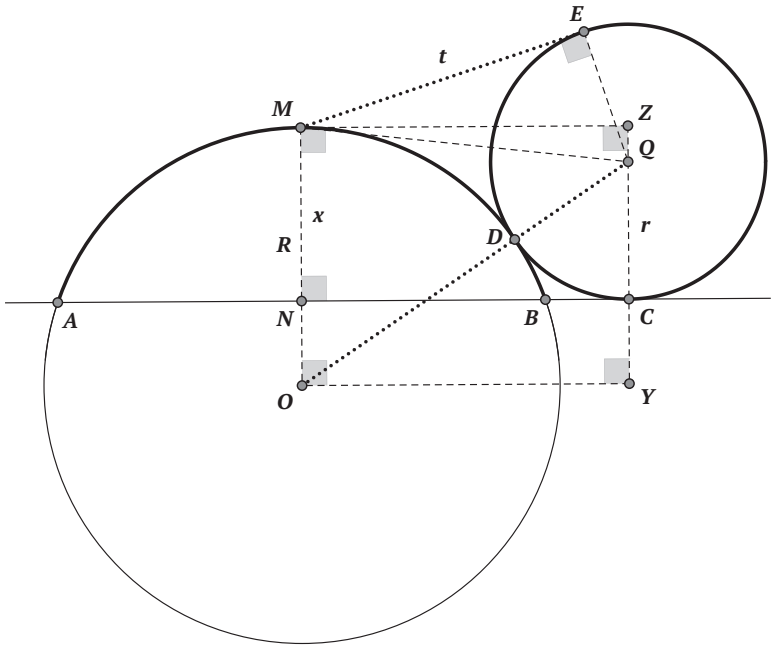


Рисунок 66-P

Пример 67. Две окружности неожиданно образуют параллельные прямые

На рис. 67-P добавлены точки *M* и *N* на общей касательной к двум окружностям, проходящей через точку *P*, чтобы определить соответствующие углы. Поскольку *AP* является хордой окружности *O*, а *PM* является ее касательной в точке *P*, выполняется $\angle MPA = \angle PDA$. Точно так же выполняется равенство $\angle NPB = \angle PCB$, ибо *BP* является хордой окружности *Q*, а *PN* является ее касательной в точке *P*. Теперь нам нужно только обратить внимание, что вертикальные углы $\angle MPA$ и $\angle NPB$ равны, чтобы убедиться, что $\angle CDA = \angle PDA = \angle MPA = \angle NPB = \angle PCB = \angle DCB$. Из этого следует, что прямые *AD* и *BC* параллельны.

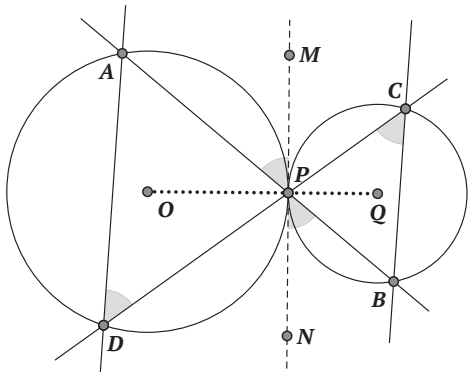


Рисунок 67-P

Пример 68. Две окружности образуют биссектрису угла

На рис. 68-Р проведем общую касательную *EAF* к двум окружностям в точке *A*, обозначим точку пересечения *AB* с окружностью *Q* точкой *G* и начертим линию *GD*. Поскольку *AB* является хордой окружности *O*, а *AE* является ее касательной в точке *A*, получаем $\angle EAB = \angle ACB$, так как оба угла измеряются половиной дуги *AB*. Точно так же получаем $\angle EAG = \angle ADG$, так как *AG* является хордой окружности *Q*, а *AE* является касательной к окружности *Q* в точке *A*. Поскольку $\angle EAB = \angle EAG$, это приводит нас к $\angle ACB = \angle ADG$ или $\angle ACD = \angle ADG$, так как каждый из них равен половине $\overset{\frown}{AG} = \overset{\frown}{AB}$.

Теперь примем во внимание, что *AD* является хордой окружности *Q*, а *DC* является ее касательной в точке *D*. В этом случае получаем $\angle CDA = \angle DGA$, поскольку оба угла равны половине длины $\overset{\frown}{AD}$. Таким образом, мы установили, что $\Delta ADC \sim \Delta AGD$, так что третьи углы в каждом из этих двух треугольников также должны быть равны, а именно $\angle CAD = \angle DAG$. Отсюда следует, что *AD* делит $\angle BAC$ пополам.

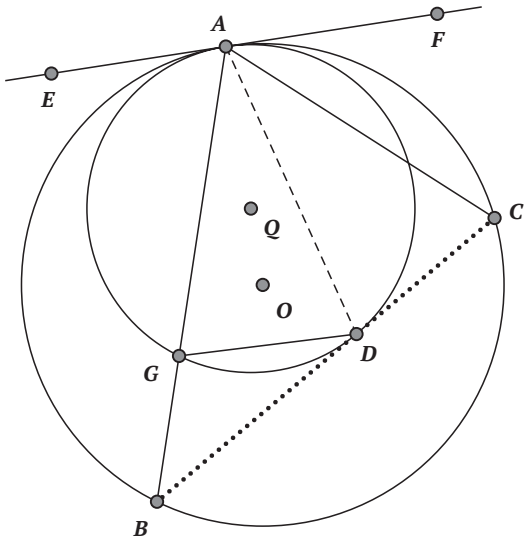


Рисунок 68-Р

Пример 69. Касательные окружности образуют необычные произведения линий

На рис. 69-Р для начала отметим точку *E* как второе пересечение отрезка *AC* с окружностью *Q*. Далее добавляем отрезки *GA* и *DE*, а также общую касательную *PC* к двум окружностям в их общей точке касания *C*. Поскольку *PC* является общей касательной двух окружностей, получаем $\angle CGA = \angle PCA = \angle PCE$, так как эти углы равны половине длины дуги *AC* окружности *O*. Также получаем $\angle PCE = \angle CDE$, так как их величина равна половине дуги *EC* окружности *Q*. Таким образом, поскольку $\angle CGA = \angle CDE$, отрезки *GA* и *DE* параллельны, и $\angle GAC = \angle DEC$. Так как *ADB* является касательной к окружности *Q*, то также выполняется $\angle DEC = \angle BDC$, и, сле-

довательно, $\angle GAC = \angle BDC$. Кроме того, поскольку оба угла измеряются дугой CA в окружности O, то также выполняется $\angle CBD = \angle CBA = \angle CGA$. Следовательно, треугольники AGC и DBC подобны, поэтому $\frac{AC}{CD} = \frac{CG}{BC}$, или $AC \cdot BC = CD \cdot CG$.

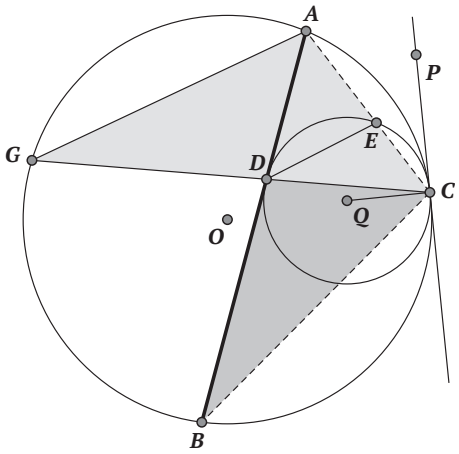


Рисунок 69-P

Пример 70. Равные углы на внутренних касательных окружностях

Добавим общую касательную XY двух окружностей в точке P, как показано на рис. 70-P. Теперь примем во внимание, что $\angle CPA = \angle CPX - \angle APX$. Так как оба угла измеряются половиной длины дуги PC, получаем $\angle CPX = \angle CDP$. По аналогии $\angle APX = \angle ABP$ для окружности O. Следовательно, $\angle CPA = \angle CPX - \angle APX = \angle CDP - \angle ABP$. А теперь, анализируя треугольник PBD, получаем, что $\angle CPA = \angle CDP - \angle ABP = (180° - \angle PDB) - \angle DBP = \angle BPD$, и, таким образом, $\angle CPA = \angle BPD$.

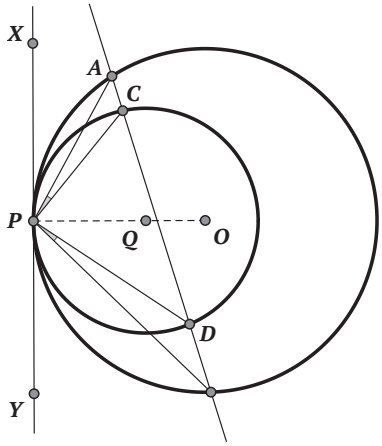


Рисунок 70-P

Пример 71. Невероятные длины касательных на касательных окружностях

На рис. 71-Р сначала продлим линию PO таким образом, чтобы она пересекла окружность O во второй раз в точке P'. Обозначим радиус окружности O через R, радиус окружности Q через r, а угол $\angle P'OB$ через x, при этом $x < 60°$. Прежде чем приступить к вычислениям, также отметим, что $OQ = R - r$, $\angle QOA = 180° - \angle AOP' = 180° - (120° - x) = 60° + x$, $\angle BOQ = 180° - \angle P'OB = 180° - x$, и $\angle COQ = 180° - \angle P'OB - \angle BOC = 180° - x - 120° = 60° - x$.

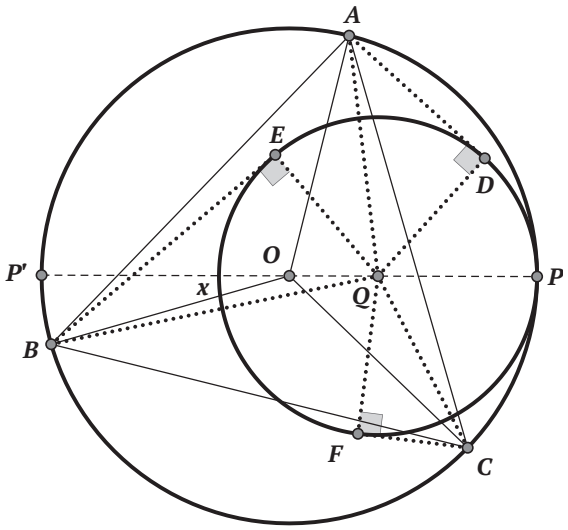


Рисунок 71-Р

Применим закон косинусов (см. «Инструментарий») к треугольнику OBQ, чтобы получить $BQ^2 = OB^2 + OQ^2 - 2 \cdot OB \cdot OQ \cdot \cos \angle BOQ$, или выражая в единицах длины: $BQ^2 = R^2 + (R - r)^2 - 2R(R - r) \cdot \cos(180° - x) = R^2 + R^2 - 2Rr + r^2 + 2R(R - r) \cdot \cos x = 2R(R - r)(1 + \cos x) + r^2$.

Применение теоремы Пифагора к прямоугольному треугольнику BQE приводит нас к выражению $BE^2 = BQ^2 - QE^2 = (2R(R - r)(1 + \cos x) + r^2) - r^2 = 2R(R - r)(1 + \cos x)$.

Таким же образом, снова применив закон косинусов к треугольнику OQA, получаем $AQ^2 = OA^2 + OQ^2 - 2 \cdot OA \cdot OQ \cdot \cos \angle QOA$, или $AQ^2 = R^2 + (R - r)^2 - 2R(R - r) \cdot \cos(60°+ x) = 2R(R - r)(1 - \cos(60°+ x)) + r^2$.

Применение теоремы Пифагора к прямоугольному треугольнику AQD позволяет получить выражение $AD^2 = AQ^2 - QD^2 = (2R(R - r)(1 - \cos(60°+ x)) + r^2) - r^2 = 2R(R - r)(1 - \cos(60°+ x))$.

Кроме того, применение закона косинусов к треугольнику OCQ позволяет получить соотношение $CQ^2 = OC^2 + OQ^2 - 2 \cdot OC \cdot OQ \cdot \cos\angle COQ$, или $CQ^2 = R^2 + (R - r)^2 - 2R(R - r) \cdot \cos(60° - x) = 2R(R - r)(1 - \cos(60° - x)) + r^2$.

Применение теоремы Пифагора в прямоугольном треугольнике CQF приводит нас к формуле $CF^2 = CQ^2 - QF^2 = (2R(R - r)(1 - \cos(60° - x)) + r^2) - r^2 = 2R(R - r)(1 - \cos(60° - x)$.

Нам необходимо доказать, что $BE = AD + CF$, что можно записать в виде

$$\sqrt{2R(R-r)(1+\cos x)} = \sqrt{2R(R-r)(1-\cos(60°+x))} + \sqrt{2R(R-r)(1-\cos(60°-x))}.$$

Поделив на множитель $\sqrt{2R(R-r)}$, получаем

$$\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{1-\cos(60°+x)} + \sqrt{1-\cos(60°-x)}.$$

Чтобы показать, что это верно для любого значения x при $0 \leqslant x \leqslant 60°$, нам понадобятся некоторые элементарные правила сложения для косинусной функции (см. «Инструментарий»): $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ и $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$. Подставляя 60° вместо a и x вместо b, эти правила приводят нас к $\cos(60° + x) = \cos 60° \cdot \cos x - \sin 60° \text{ x} \cdot \sin x = ½ \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 60°$ x и $\cos(60° - x) = \cos 60° \cdot \cos x + \sin 60° \cdot x = ½ \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$.

Равенство

$$\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{1-\cos(60°+x)} + \sqrt{1-\cos(60°-x)},$$

которое мы хотим доказать, можно также записать в виде

$$\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cdot\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x\right)} + \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\cdot\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x\right)},$$

или

$$\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\cdot\cos x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x} + \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\cdot\cos x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x}.$$

Поскольку выражения в обеих частях уравнения положительны, мы можем возвести обе части в квадрат, чтобы получить соответствующее уравнение

$$
\begin{aligned}
&1+\cos x = \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\cdot\cos x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x+\left(1-\frac{1}{2}\cdot\cos x\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x+ \\
&2\cdot\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\cdot\cos x\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x\right)^2} \\
&= 2-\cos x+2\cdot\sqrt{1-\cos x+\frac{1}{4}\cdot\cos^2 x-\frac{3}{4}\sin^2 x} \\
&= 2-\cos x+2\cdot\sqrt{1-\cos x+\frac{1}{4}\cdot\cos^2 x-\frac{3}{4}\left(1-\cos^2 x\right)} \\
&= 2-\cos x+2\cdot\sqrt{\frac{1}{4}-\cos x+\cos^2 x} \\
&= 2-\cos x+2\cdot\left(\cos x-\frac{1}{2}\right) \\
&= 1+\cos x.
\end{aligned}
$$

Это верно для значений x при $0 \leqslant x \leqslant 60°$, и, следовательно, мы доказали, что $\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{1-\cos(60°+x)} + \sqrt{1-\cos(60°-x)}$ верно, из чего следует, что $BE = AD + CF$.

Пример 72. Симметричные равные углы

Поскольку центр O лежит на отрезке ER, как показано на рис. 72-P, имеет место $\angle EAR = 90°$. Точно так же, поскольку центр Q лежит на отрезке ER, имеет место $\angle FAS = 90°$. Отсюда получаем $\angle EAF = \angle EAR - \angle FAR = 90° - \angle FAR = \angle FAS - \angle FAR = \angle RAS$, и тогда $\angle EAF = \angle RAS$.

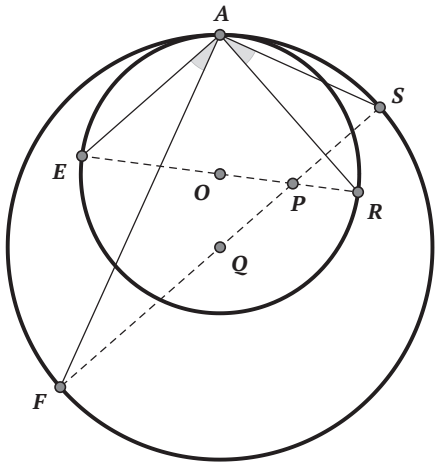


Рисунок 72-P

Пример 73. Удивительный результат перемещения

Слева на рис. 73-Р добавим радиусы QD и QE окружности Q, так что получим $\overset{\frown}{AB} = 2\pi OA\dfrac{\angle AOB}{360^\circ}$ и $\overset{\frown}{AD} = 2\pi QA\dfrac{\angle AQD}{360^\circ}$. Поскольку $QA = \frac{1}{2}OA$ и $\angle AQD = 2\angle AOD = 2\angle AOB$ в окружности Q, то получаем

$$\overset{\frown}{AD} = 2\pi OA\frac{\angle AQD}{360^\circ} = 2\pi\frac{1}{2}OA\frac{2\angle AOB}{360^\circ} = 2\pi OA\frac{\angle AOB}{360^\circ} = \overset{\frown}{AB},$$

откуда следует, что $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AB}$. Аналогичным образом можно доказать, что $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AC}$, и, следовательно, $\overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$, или $\overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{BC}$.

Рассмотрим теперь правую часть рис. 73-Р. Когда окружность Q катится таким образом, что точки B и D совпадают, касательные к двум окружностям таковы, что точки $B = D$ совпадают, и оба радиуса OB и QD перпендикулярны этой общей касательной. С учетом точки Y на касательной в точке D окружности Q мы также обращаем внимание, что $\angle YDX$ одинаков в обеих частях фигуры, и обозначим этот угол как x.

В прямоугольном треугольнике DXA, изображенном в левой части рисунка, получаем $XD = OA \cdot \cos \angle AXD$. Поскольку треугольник QDO равнобедренный и $QD = QO$, получаем $x = \angle YDO = \angle YDQ - \angle ODQ = 90^\circ - \angle QOD = 90^\circ - AXD$; следовательно, $XD = OA \cdot \cos(90^\circ - x)$. Теперь на рисунке справа получаем треугольник XOD с $\angle XDO = 90^\circ - \angle YDX = 90^\circ - x$, $OD = OA$ и $XD = OA \cdot \cos(90^\circ - x)$. Это означает, что ΔXOD является прямоугольным треугольником. Поскольку мы уже установили, что $\angle AOB = \angle XDO = 90^\circ - x$, получаем $XB \parallel OA$, и, следовательно, точка X лежит на диаметре окружности O, перпендикулярном OA.

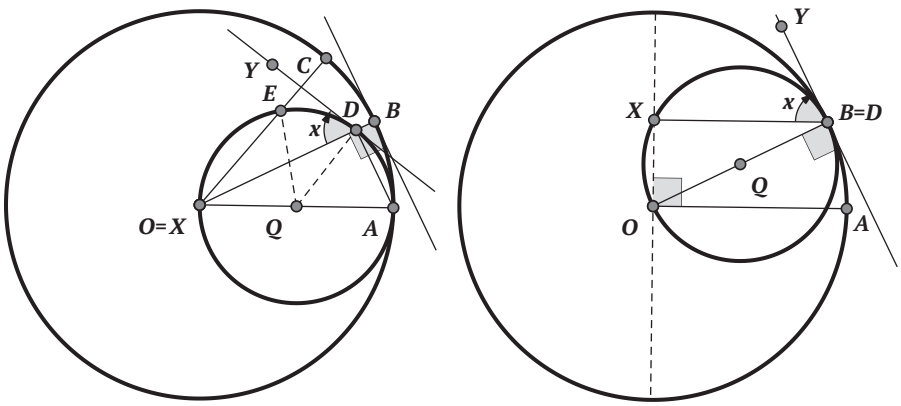


Рисунок 73-Р

Пример 74. Полуокружности – арбелос

На рис. 74-Р точки A и B являются конечными точками большой дуги, а точка C является общей внутренней конечной точкой двух меньших дуг. Точка O является серединой отрезка AB, точка P является серединой отрезка AC, а точка Q является серединой отрезка BC. Радиус полуокружности с центром в точке P равен r_1, а радиус полуокружности с центром в точке Q равен r_2. Таким образом, получаем $AB = AC + CB = 2 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2 = 2 \cdot (r_1 + r_2)$, а радиус окружности O равен $r_1 + r_2$. Как известно, длина дуги полуокружности равна π-кратному радиусу окружности. Следовательно, длина дуги AC равна πr_1, длина дуги BC равна πr_2, а длина дуги AB равна $\pi (r_1 + r_2)$. Поскольку $\pi \cdot (r_1 + r_2) = \pi \cdot r_1 + \pi \cdot r_2$, получаем $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC}$.

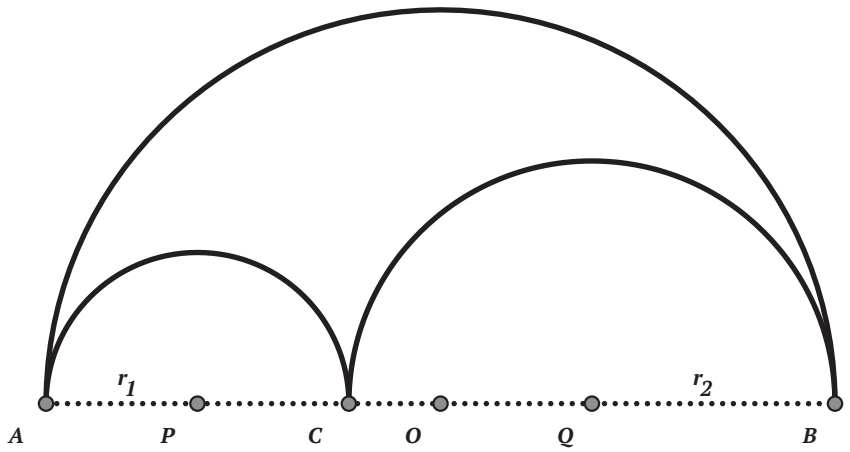


Рисунок 74-Р

Пример 75. Биссектриса арбелоса

На рис. 75-Р точка S является точкой пересечения касательных FG и HC двух меньших полуокружностей. Поскольку касательные к окружности из любой внешней точки всегда равны по длине, для окружности P получаем $SC = SF$, а для окружности Q получаем $SC = SG$, откуда следует, что $SC = SF = SG$. Далее рассмотрим треугольник AHB. Поскольку точка H лежит на окружности с диаметром AC, из этого следует, что ΔAHB является прямоугольным треугольником с высотой HC, что дает нам $HC^2 = AC \cdot BC = 2r_1 \cdot 2r_2 = 4r_1r_2$. Теперь рассмотрим четырехугольник $FPJG$ с точкой J на радиусе QG таким образом, что $PJ \perp PF$. Поскольку касательная FG перпендикулярна радиусам PF и GJ, из этого следует, что $FPJG$ является прямоугольником; следовательно, $FG = PJ$. Нам также известно, что $JQ = r_2 - r_1$ и $PQ = r_2 + r_1$. Если применить теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику PQJ, то получим $PJ^2 = (r^2 + r^1)^2 - (r^2 - r^1)^2 = 4r_1r_2$, а это означает, что $FG^2 = 4r_1r_2$. Таким образом, $HC = FG$, и вместе с тем, что $SC = SF = SG$, получаем, что $SC = SH$.

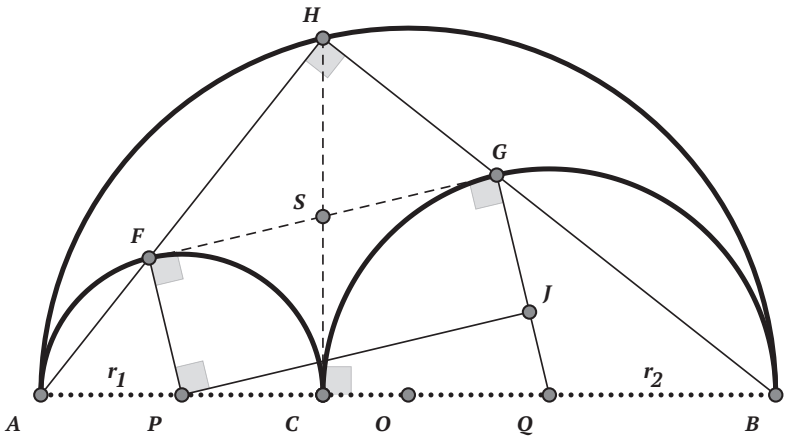


Рисунок 75-P

Пример 76. Подробнее о точке равного деления арбелоса

В доказательстве примера 75 было показано, что $SC = SF = SG = SH$. Следовательно, точка S является центром окружности, содержащей четыре точки F, C, G и H, как показано на рис. 76-P.

Площадь арбелоса можно определить путем вычитания площадей двух меньших полуокружностей из площади самой большой полуокружности. Поскольку мы имеем $AB = 2r_1 + 2r_2$, радиус большой полуокружности равен $r_1 + r_2$, и площадь арбелоса в этом случае равна

$$\frac{\pi(r_1+r_2)^2}{2} - \left(\frac{\pi r_1^2}{2} + \frac{\pi r_2^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\left((r_1+r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2\right) = \frac{\pi}{2}\cdot 2r_1r_2 = \pi r_1 r.$$

Как было показано в доказательстве примера 75, диаметр FG окружности с центром S равен $2\sqrt{r_1r_2}$, и, следовательно, ее площадь равна $\pi\, r_1r_2$, что совпадает с площадью арбелоса.

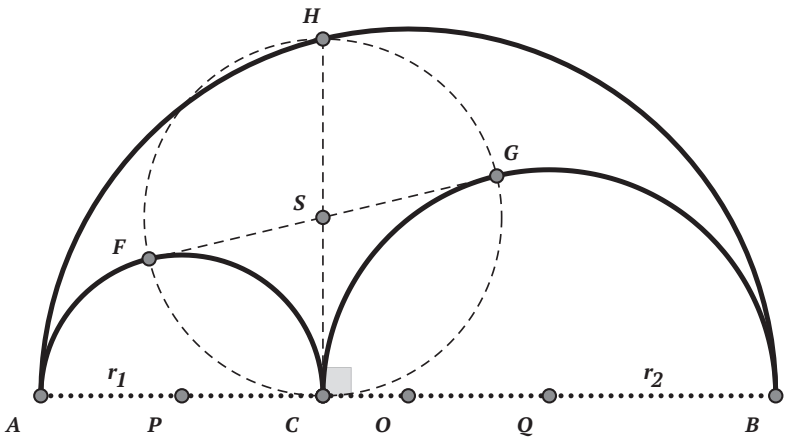


Рисунок 76-P

Пример 77. И еще об арбелосе

На рис. 77-Р обозначим точку пересечения отрезка AH с окружностью P точкой F', а точку пересечения отрезка BH с окружностью Q точкой G'. Затем проведем отрезки $F'C$ и $G'C$. Поскольку углы, вписанные в полуокружность, являются прямыми, получаем $\angle AF'C = \angle AHB = \angle CG'B = 90°$. Следовательно, четырехугольник $HF'CG'$ является прямоугольником, а диагональ CH представляет собой диаметр описанной окружности этого прямоугольника. Как уже было установлено в доказательстве примера 75, эта окружность содержит точки F и G, и поскольку они должны быть точками пересечения описанной окружности $HF'CG'$ с окружностями P и Q соответственно, получаем $F = F'$ и $G = G'$. Это является доказательством того, что линии AFH и BGH являются коллинеарными.

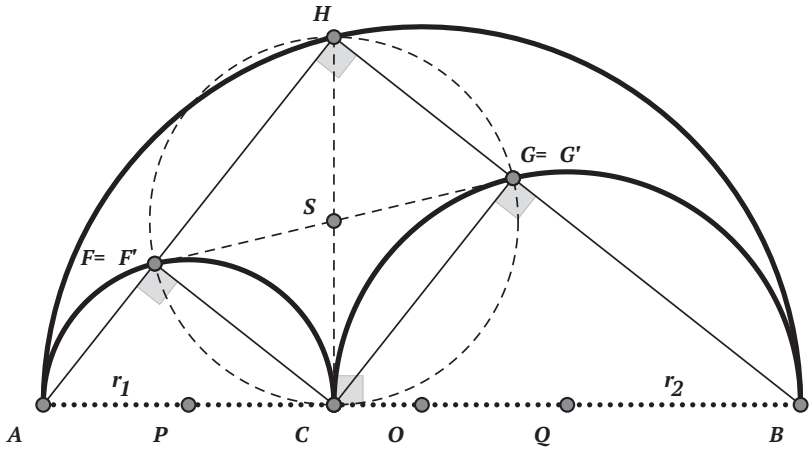


Рисунок 77-Р

Пример 78. Еще один сюрприз арбелоса

Начнем с того, что проведем отрезки AS, AR и CR, как показано на рис. 78-Р. Поскольку угол $\angle ASC$ вписан в полуокружность, он является прямым углом, а точка S является серединой его полуокружности, поэтому $\angle CAS = 45°$. Точно так же, так как точка R является серединой дуги полуокружности, получаем $\angle RAC = 45°$, а это значит, что угол $\angle SAR = \angle SAC + \angle CAR$ является прямым углом. Поскольку $SC \parallel AR$, треугольники SRC и SAC имеют общее основание SC и одинаковую высоту SA, а это значит, что их площади равны. Теперь будет несложно найти площадь $[SRC]$ = площадь $[SAC] = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot PS = \frac{1}{2} \cdot 2r_1 \cdot r_1 = r_1^2$. Аналогичным образом можно также доказать, что площадь $[TCR]$ = площадь $[TCB] = r_2^2$, и, следовательно, площадь заштрихованного четырехугольника равна площадь $[SRTC]$ = площадь $[SRC]$ + площадь $[TCR] = r_1^2 + r_2^2$.

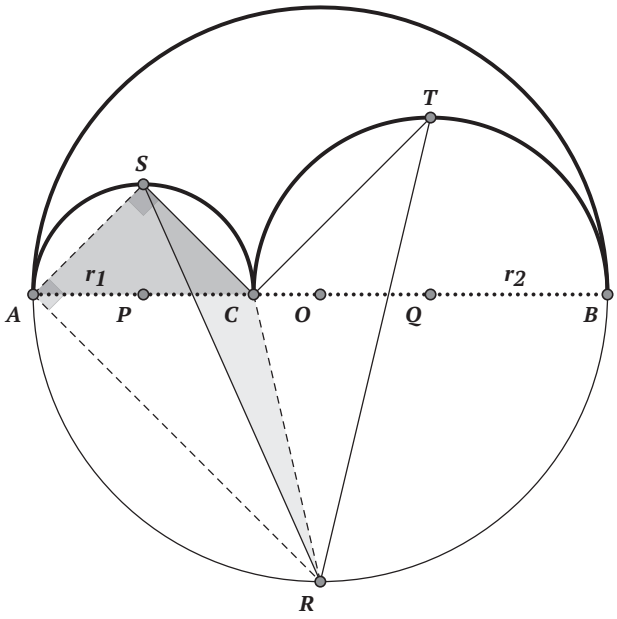


Рисунок 78-P

Пример 79. Дополнительные забавы с арбелосом

На рис. 79-P точки *P* и *Q*, а также радиусы r_1 и r_2 обозначены как центры и радиусы двух меньших полуокружностей. Площадь нижней полуокружности равна $\pi/2r_1^2$. Площадь верхней части равна площади большой полуокружности минус площадь меньшей полуокружности, или $\pi/2 \cdot (r_1 + r_2)^2 - \pi/2 \cdot r_2^2 = \pi/2 \cdot (r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2) - \pi/2 \cdot r^22 = \pi/2 \cdot (r_1^2 + 2r_1r_2)$. Таким образом, площадь всей фигуры (с выделенной границей) равна $\pi/2 \cdot r_1^2 + \pi/2 \cdot (r_1^2 + 2r_1r_2) = \pi/2 \cdot (r_1^2 + 2r_1r_2) = \pi \cdot (r_1^2 + r_1r_2)$. Чтобы найти площадь круга *R*, применяем теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику *TAQ* и получаем $(2RA)^2 + r_2^2 = (2r_1 + r_2)^2 = 4r_1^2 + 4r_1r^2 + r_2^2$. Это можно записать как $4RA^2 = 4r_1^2 + 4r_1r_2$, или $RA^2 = r_1^2 + r_1r_2$. Таким образом, площадь окружности *R* равна $\pi RA = \pi (r_1^2 + r_1r_2)^2$, что также является площадью фигуры с выделенной границей.

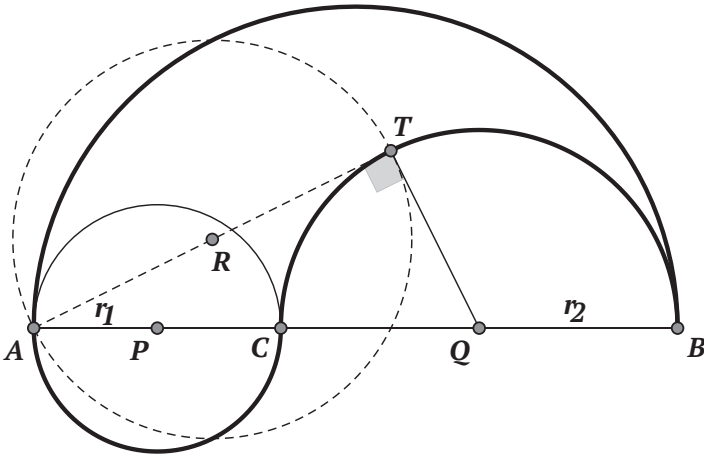


Рисунок 79-P

Пример 80. Удивительное равенство площадей, созданное с помощью полуокружностей

На рис. 80-P обозначены площади m и n, а также t_1 = площадь [DCA] и t_2 = площадь [DBC]. Отметим, что $t_1 + t_2$ = площадь [ABC], $m + y + t_1$ составляют площадь полуокружности ADC, а $n + x + t_2$ составляют площадь полуокружности CDB. Из теоремы Пифагора известно, что сумма площадей полуокружностей, лежащих на катетах прямоугольного треугольника, равна площади полуокружности, лежащей на гипотенузе. Поскольку площадь полуокружности AB равна $m + n + s$, получаем $(m + y + t_1) + (n + x + t_2) = m + n + s$, что после упрощения дает $s - x - y = t_1 + t_2$, или $s - x - y$ = площадь [ABC].

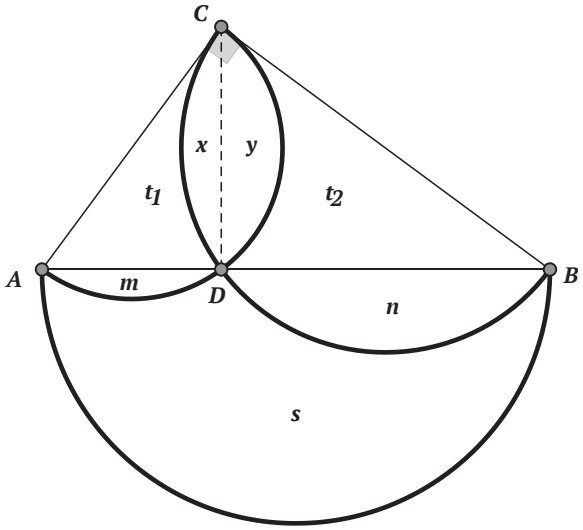


Рисунок 80-P

Пример 81. Еще одно удивительное равенство площадей, созданное полуокружностями

На рис. 81-Р обозначены области m, n, x и y, а также t_1 = площадь [DCA] и t_2 = площадь [DBC]. Как и в доказательстве примера 80, вновь будем использовать тот факт, что сумма площадей полуокружностей, опирающихся на катеты прямоугольного треугольника, равна площади полуокружности, опирающейся на гипотенузу. Для треугольника DCA это приводит нас к выражению $(m + p) + (y + j) = t_1 + m + y$, которое упрощается до $p + j = t_1$. Для треугольника DBC это приводит нас к выражению $(n + q) + (x + k) = t_2 + n + x$, которое упрощается до $q + k = t_2$. Сложив эти два равенства, получаем $j + k + p + q = t_1 + t_2$, а поскольку $t_1 + t_2$ = площадь [ABC], получаем $j + k + p + q$ = площадь [ABC].

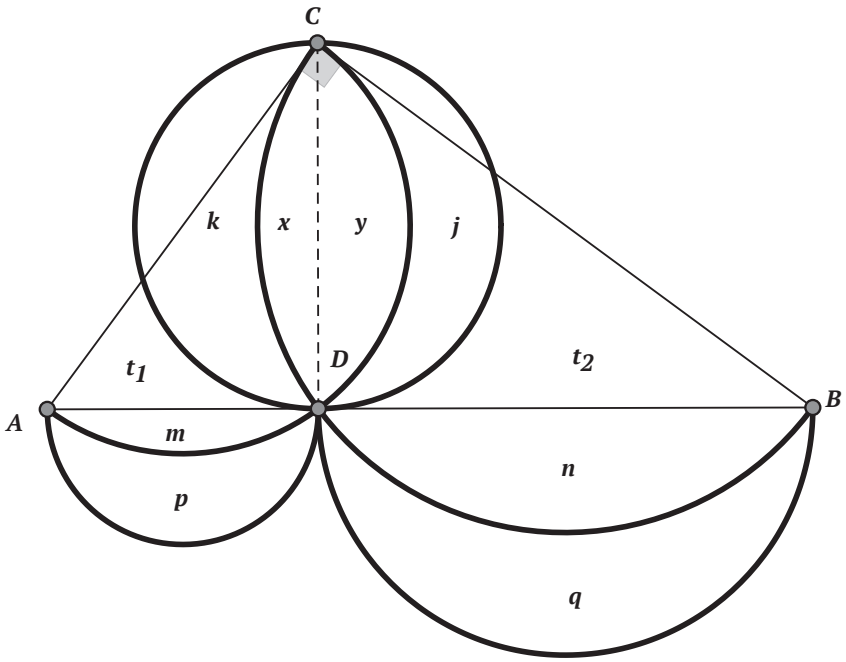


Рисунок 81-Р

Пример 82. Удивительное деление кривой на две равные части

На рис. 82-Р обозначим середину отрезка *MB* точкой *N* и проведем отрезок *NP*. Пусть *x* обозначает радиус малых полуокружностей, а поскольку их диаметры *AM* и *BM* являются радиусами большой полуокружности, то радиус большой полуокружности равен 2*x*. Вертикальные углы $\angle AMQ$ и $\angle BMP$ равны, и для полуокружности *N* получаем $\angle BNP = 2\angle BMP = 2\angle AMQ$. Теперь можно выразить длины различных дуг через *x* и $\angle AMQ$. Находим

$$\overset{\frown}{AM} = 2x\pi,\ \overset{\frown}{AQ} = AB\cdot\pi\frac{\angle AMQ}{180^\circ} = \frac{1}{180^\circ}4x\pi\angle AMQ,$$

$$\overset{\frown}{QB} = 4x\pi - \overset{\frown}{AQ} = 4x\pi - \frac{1}{180^\circ}4x\pi\angle AMQ = 4x\pi\left(1-\frac{1}{180^\circ}\angle AMQ\right),$$

$$\overset{\frown}{BP} = MB\pi\frac{\angle BNP}{180^\circ} = \frac{1}{180^\circ}2x\pi(2\angle AMQ) = \frac{1}{180^\circ}4x\pi\angle AMQ,$$

и, наконец,

$$\overset{\frown}{PM} = 2x\pi - \overset{\frown}{BP} = 2x\pi - \frac{1}{180^\circ}4x\pi\angle AMQ = 2\pi\left(1-\frac{2}{180^\circ}\angle AMQ\right).$$

Общая длина кривой от точки *Q* до точки *P* через точку *B* равна

$$\overset{\frown}{QB} + \overset{\frown}{BP} = 4x\pi\left(1-\frac{1}{180^\circ}\angle AMQ\right) + \overset{\frown}{QB}$$
$$= 4x\pi - \overset{\frown}{AQ} = 4x\pi - \frac{1}{180^\circ}4x\pi\angle AMQ + \frac{1}{180^\circ}4x\pi\angle AMQ = 4x\pi,$$

а общая длина кривой от точки *P* до точки *Q* через точки *M* и *A* равна

$$\overset{\frown}{PM} + \overset{\frown}{MA} + \overset{\frown}{AQ} = 2x\pi\left(1-\frac{2}{180^\circ}\angle AMQ\right) +$$
$$2x\pi + \frac{1}{180^\circ}4x\pi\angle AMQ = 4x\pi.$$

Следовательно, длины обеих частей кривой равны 4*x*π.

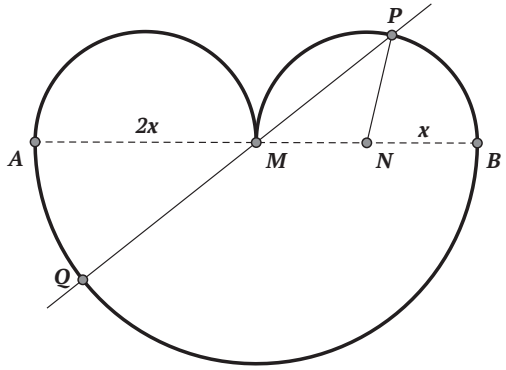


Рисунок 82-P

Пример 83. Неожиданное деление пополам

На рис. 83-P начертим отрезки PA, PB, QB и CB. Поскольку дуги BR, RQ и PQ равны, получаем $\angle BMR = \angle RMQ = \angle QMP$, а в меньшей полуокружности $\angle QMP = \angle QBP$. Теперь рассмотрим треугольники ΔQDB и ΔQBC. Эти треугольники имеют общую сторону QB, и поскольку MB является диаметром малой полуокружности, получаем $\angle DQB = \angle MQB = 90°$, а это означает, что треугольники ΔQDB и ΔQBC имеют прямые углы в вершине Q. Поскольку $\angle QBD = \angle QBP = \angle QMP$, получаем $\angle BDQ = 90° - \angle QBD = 90° - \angle QMP$. Известно, что $\angle BMQ = 2\angle QMP$, а так как треугольник MBC равнобедренный и $MB = MC$, получаем $\angle QCB = \angle MCB = 90° - \frac{1}{2}\angle BMC = 90° - \frac{1}{2}\angle BMQ = 90° - \frac{1}{2}\angle QMP$. Это свидетельствует о том, что $\angle QCB = 90° - \angle QMP = \angle BDQ$. Следовательно, $\Delta QDB \cong \Delta QBC$, так что $QD = QC$, и Q является серединой отрезка CD.

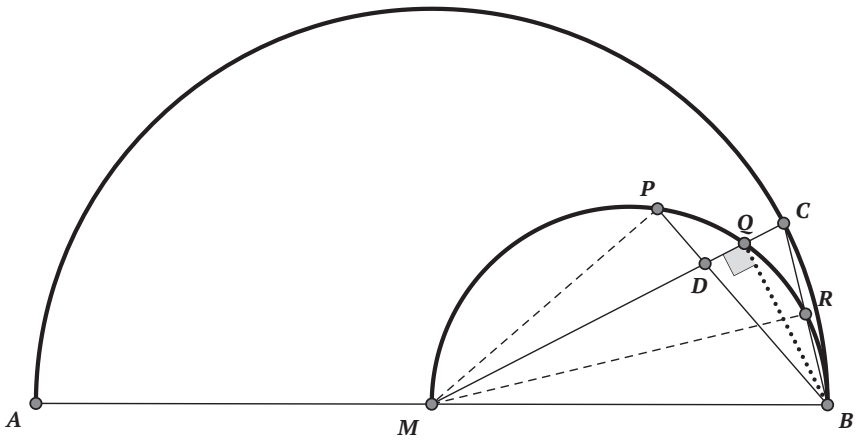


Рисунок 83-P

Пример 84. Двойная функция точки, связанной с окружностью

Начнем с построения отрезков *PR*, *PS* и *PT* на рис. 84-P. Поскольку *RB* = *RC* являются радиусами окружности *R*, треугольник *RCB* является равнобедренным с основанием *BC*. Так как точка *P* лежит вне окружности *R*, касательные *PB* и *PC* также равны, и треугольник *PBC* тоже является равнобедренным с основанием *BC*. Следовательно, линия *PR* является общей высотой равнобедренных треугольников *RCB* и *PCB*, а значит, перпендикулярной биссектрисой *BC* и биссектрисой углов ∠*CRB* = ∠*SRT*. Точно так же *PS* является как биссектрисой *CA*, так и биссектрисой углов ∠*ASC* = ∠*TSR*, а *PT* является как биссектрисой *AB*, так и биссектрисой углов ∠*BTA* = ∠*RTS*. Точка *R* является одновременно точкой пересечения биссектрис сторон треугольника Δ*ABC* и биссектрис углов треугольника Δ*RST*. Другими словами, точка *P* является одновременно центром окружности Δ*ABC* и центром вписанной окружности Δ*RST*.

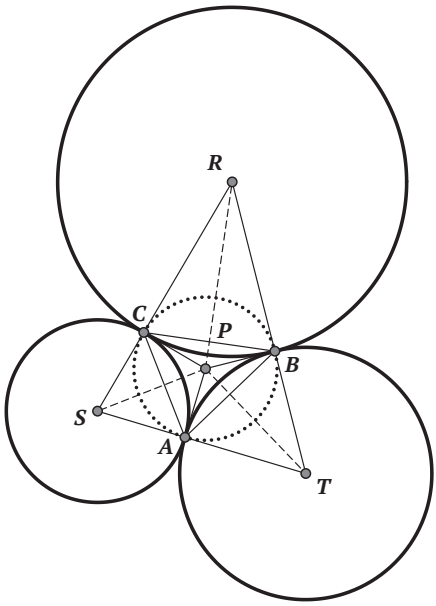


Рисунок 84-P

Пример 85. Три окружности с двумя общими точками образуют неожиданную окружность

Следует помнить, что угол, образованный касательной и хордой окружности, равен половине пересекаемой дуги. На рис. 85-P, где *QE* является касательной к окружности *Y*, ∠*AEQ* = ½ $\overset{\frown}{AE}$ = ∠*ABE*. Точно так же, поскольку *QF* является касательной к окружности *Z*, ∠*QFA* = ½$\overset{\frown}{AF}$ = ∠*FBA*. Отметив, что ∠*ABE* + ∠*FBA* = ∠*FBE*, рассмотрим треугольник *QEF*. Здесь примем во внимание, что ∠*EQF* = 180° – ∠*FEQ* – ∠*QFE* = 180° – ∠*AEQ* – ∠*QFA* = 180° – (∠*ABE* + ∠*FBA*) = 180° – ∠*FBE*.

Так как его противоположные углы четырехугольника *FQEB* дополняют друг друга, он является циклическим, так что $\angle BFE = \angle BQE$, поскольку оба измеряются половиной дуги *BE*. Аналогично можно доказать, что четырехугольник *FRDB* также является циклическим с $\angle BFD = \angle BRD$. Таким образом, получаем $\angle PQB = \angle EQB = \angle EFB = \angle DFB = \angle DRB = \angle PRB$, из чего следует, что четырехугольник *PBQR* тоже циклический, так как эти два равных угла вписаны в одну и ту же дугу *PB*.

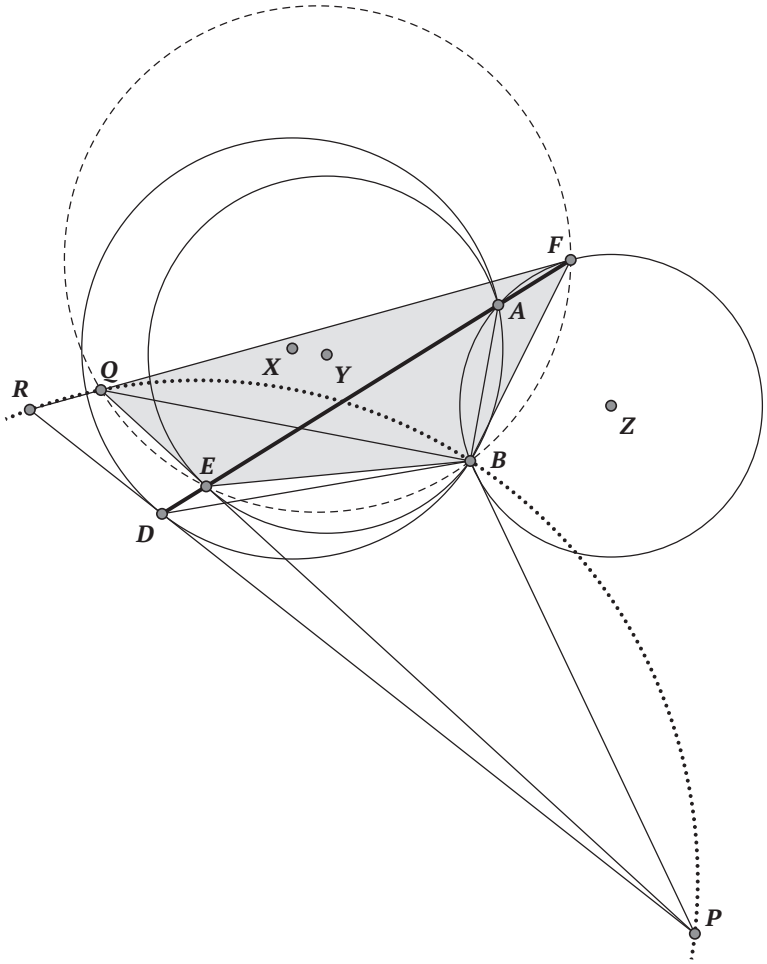


Рисунок 85-P

Пример 86. Пересекающиеся окружности создают пять концикличских точек

На рис. 86-P первым делом обращаем внимание на то, что треугольники ΔOPA и ΔQBP являются равнобедренными, поскольку их стороны $OA = OP$ и $QB = QP$ выступают радиусами окружностей O и Q соответственно. Отсюда следует, что углы $\angle OAP = \angle APO$ и $\angle PBQ = \angle QPB$ равны, а вместе с вертикальными углами $\angle APO = \angle QPB$ получаем, что $\angle OAP = \angle PBQ$. Это позволяет нам заключить, что четырехугольник $OQBA$ является циклическим, поскольку оба равных угла составляют половину длины одной и той же дуги OQ. Теперь нам нужно доказать, что точка R также лежит на этой окружности. Поскольку линия OQ является общей осью симметрии окружностей O и Q, треугольники POQ и RQO симметричны относительно OQ и конгруэнтны. Получаем $\angle QRO = \angle OPQ$, и, принимая во внимание равнобедренный треугольник OPA, получаем $\angle QRO = \angle OPQ = 180° - \angle APO = 180° - \angle OAP = 180° - \angle OAQ$. Таким образом, в четырехугольнике $AORQ$ имеется пара дополнительных углов $\angle OAQ$ и $\angle ORQ$, что делает его циклическим четырехугольником. Следовательно, точки A, O, R, Q и B лежат на одной окружности.

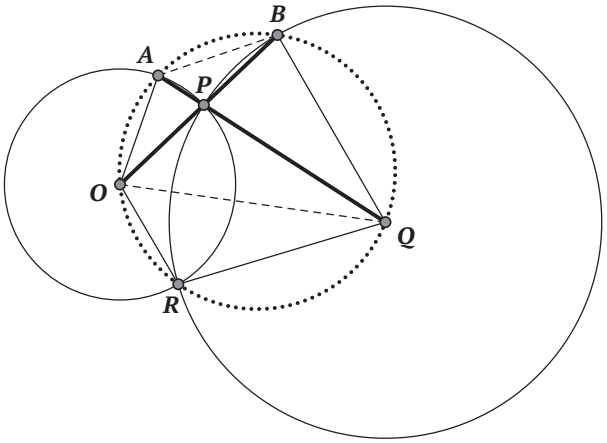


Рисунок 86-P

Пример 87. Концикличские центры трех связанных окружностей

В данном случае задача состоит в доказательстве того, что четырехугольник $PRTS$ является циклическим, как показано на рис. 87-P. Пусть точка D является точкой пересечения отрезка RT с PA, а точка E является точкой пересечения продления отрезка TS с PC. Нам необходимо доказать, что $\angle TRP = \angle ESP$. Поскольку отрезок TR соединяет центры окружностей треугольников PAB и PBC, он является биссектрисой угла PA. Тогда RDT является биссектрисой угла в равнобедренном треугольнике ARP, так что $\angle TRP = \frac{1}{2}\angle ARP$. Точно так

же, поскольку *TSE* соединяет центры окружностей треугольников *PAC* и *PCA*, *TSE* является биссектрисой угла *PCS*, и $\angle ESP = \frac{1}{2}\angle CSP$. В окружности *S* есть вписанный угол *CBP* и центральный угол *CSP*, так что $\angle CSP = 2\angle CBP$. В окружности *R* получаем $\angle ARP = 2(180° - \angle PBA) = 2\angle CBP$. Подводя итог, получаем $\angle TRP = \angle DRP = \frac{1}{2}\angle ARP = \angle CBP = \frac{1}{2}\angle CSP = \angle ESP$, или $\angle TRP = \angle ESP$. Таким образом, четырехугольник *PRTS* является циклическим.

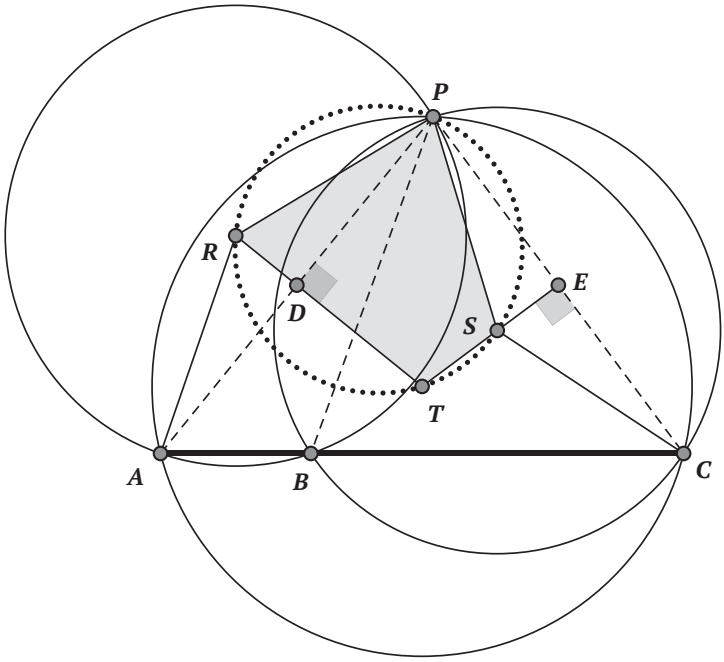


Рисунок 87-P

Пример 88. Две неравные окружности, вопреки логике, образуют две равные окружности

Начнем с того, что проведем отрезки *PA*, *PB*, *PR*, *AR* и *BR*, как показано на рис. 88b-P. В окружности *O* имеет место равенство $\angle PAB = \angle PRA$, поскольку оба угла равны половине длины дуги *AP*. Точно так же в окружности *Q* имеет место равенство $\angle ABP = \angle BRP$, поскольку оба угла равны половине длины дуги *PB*. В треугольнике *PBA* получаем $\angle PAB + \angle ABP + \angle BAP = 180°$, и в результате получаем $\angle PRA + \angle BRP + \angle BPA = 180°$, или $\angle BRA + \angle BPA = 180°$. Это дает нам $\sin\angle BRA = \sin\angle BPA$.

Теперь воспользуемся формулой для вычисления радиуса окружности при заданной длине хорды и угле, противолежащем этой хорде. Если найти длину хорды *AB* окружности *c*, как показано на рис. 88a-P, а также угол $\angle APB$, противолежащий дуге *AB*, то радиус *r* окружности *c* можно вычислить следующим образом. Если точка *M* является серединой хорды *AB*, то ΔMBO является пря-

моугольным треугольником, и поскольку $\angle MOB = ½ \cdot \angle AOB = ½ \cdot 2 \cdot \angle APB = \angle APB$, получаем $MB = OB \cdot \sin\angle MOB$, или $½ \cdot AB = r \cdot \sin \angle APB$, что дает нам $r = \frac{AB}{2 \cdot \sin \angle APB}$. Стоит отметить, что $\angle BQA = 180° - \angle APQ$, это означает, что $\sin\angle BQA = \sin\angle APB$, и для точки Q на дуге AB, противоположной точке P, мы также можем записать $r = \frac{AB}{2 \cdot \sin \angle AQB}$.

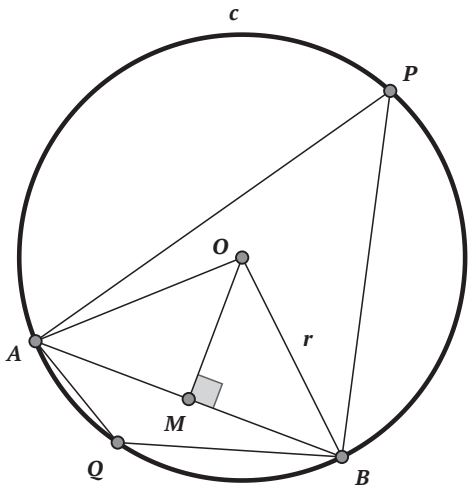


Рисунок 88a-P

Теперь обратимся к рис. 88b-P. Принимая во внимание, что радиус описанной окружности треугольника APB равен $\frac{AB}{2 \cdot \sin \angle BPA}$, а радиус описанной окружности треугольника ARB равен $\frac{AB}{2 \cdot \sin \angle BRA}$, можно видеть, что эти радиусы равны, а две окружности имеют одинаковый размер.

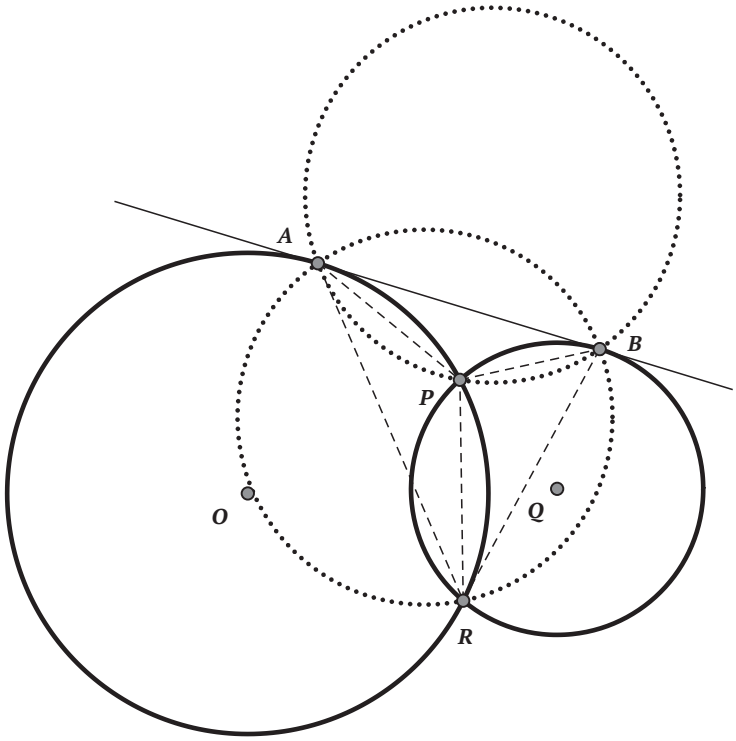


Рисунок 88b-P

Пример 89. Свойство угла точки Микеля треугольника

Для начала рассмотрим задачу, в которой точка M находится внутри треугольника ABC, как показано на рис. 89a-P. Точки D, E и F могут быть любыми точками на сторонах треугольника BC, CA и AB соответственно. Точки P, Q и R являются центрами описанных окружностей треугольников AFE, BDF и CED соответственно. Окружности Q и R пересекаются в точке M, и мы проводим отрезки MD, ME и MF. Поскольку четырехугольник $BDMF$ является циклическим, а противоположные углы циклического четырехугольника дополняют друг друга, получаем $\angle FMC = 180° - \angle DBF = 180° - \angle CBA$. Точно так же четырехугольник $CEMD$ является циклическим, и мы получаем $\angle DME = 180° - \angle ACB$. Сложив эти два угла, получаем $\angle FMD + \angle DME = 360° - (\angle CBA + \angle ACB)$, или $\angle CBA + \angle ACB = 360° - \angle FMD + \angle DME = \angle EMF$. В треугольнике ABC обращаем внимание, что $\angle CBA + \angle ABC = 180° - \angle BAC$, из чего следует, что $\angle EMF = 180° - \angle BAC$. Отсюда делаем вывод, что четырехугольник $AFME$ является циклическим. Следовательно, окружность, содержащая точки A, E и F, также содержит общую точку M двух других окружностей.

Равенство углов $\angle BFM = \angle AEM$ объясняется тем, что каждый из них является дополнительным к углу $\angle MFA$ в окружности P. Аналогичное доказательство можно провести и для остальных углов, в результате чего получаем $\angle BFM = \angle AEM = \angle CDM$.

Далее рассмотрим случай, когда точка M находится вне треугольника ABC, как показано на рис. 89b-P. Здесь точка M снова является точкой пересечения окружностей Q и R. Поскольку четырехугольник $BDMF$ является циклическим, получаем $\angle FMD = 180° - \angle DBF = 180° - \angle CBA$, а так как четырехугольник $CDME$ является циклическим, получаем $\angle EMD = 180° - \angle DCE = \angle ACB$. После вычитания получаем $\angle FME = \angle FMD - \angle EMD = 180° - \angle CBA - \angle ACB = \angle BAC$, и, следовательно, четырехугольник $AEMF$ также циклический. Таким образом, окружность с центром P в данном случае также имеет общую точку M с двумя другими окружностями. Кроме того, равенство углов $\angle MFX = \angle MAE = \angle MDC$ является непосредственным следствием того, что углы в окружностях P, Q и R дополняют друг друга, как и в предыдущем случае.

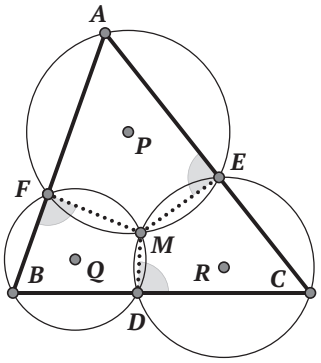


Рисунок 89a-P

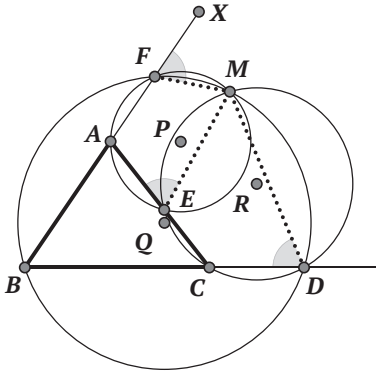


Рисунок 89b-P

Пример 90. Еще несколько слов о соотношении Микеля

На рис. 90-P точка M определяется как второе пересечение (помимо точки E) описанных окружностей R и S треугольников CDE и ACF соответственно. Сначала нам нужно доказать, что эта точка M также лежит на описанных окружностях P и Q треугольников ADB и BEF соответственно. Для этого рассмотрим

точку пересечения X окружности R с продолжением FM. Поскольку $CDXM$ является циклическим четырехугольником, получаем $\angle MCA = \angle MXD$, так как оба угла являются дополнительными к $\angle DCM$. Кроме того, так как $ACMF$ является циклическим четырехугольником, получаем $\angle MCA + \angle AFM = 180°$. Отсюда получаем $\angle MXD + \angle AFM = 180°$, или $\angle FXD + \angle AFX = 180°$, что означает $FA \parallel XD$.

Далее применим аналогичное рассуждение в обратном направлении. Поскольку $EDXM$ является циклическим четырехугольником, получаем $\angle FME = \angle XDE$, а так как известно, что $FA \parallel XD$, тогда $FB \parallel XD$. Отсюда получаем $\angle DBF + \angle XDB = 180°$, и, следовательно, $\angle DBF + \angle XDE = 180°$, или $\angle EBF + \angle FME = 180°$, и это доказывает, что точка M лежит на описанной окружности Q треугольника BEF. С помощью аналогичного рассуждения можно доказать, что точка M также лежит на описанной окружности P треугольника ADB.

Теперь докажем, что все четыре центра окружностей – P, Q, R и S, а также точка M лежат на одной и той же окружности. Примем во внимание, что в окружности P имеет место $\angle DBM = \angle DAM$, а в окружности Q имеет место $\angle EBM = ½\angle EOM$. Поскольку ME является общей хордой окружностей Q и R, то получаем $\angle RQM = ½\angle EQM = \angle EBM = \angle DBM$. Аналогично так как MD является общей хордой окружностей P и R, можно доказать, что $\angle RPM = ½\angle DPM$ $\angle DAM$. Исходя из того, что в окружности P $\angle DBM = \angle DAM$, получаем $\angle RPM = \angle DAM = \angle DBM$ $\angle RQM$. Таким образом, точки M, Q, P и R лежат на одной окружности. Аналогичным образом можно также доказать, что точки M, S, P и R лежат на одной окружности, и получается, что все пять точек M, P, Q, R и S лежат на одной окружности.

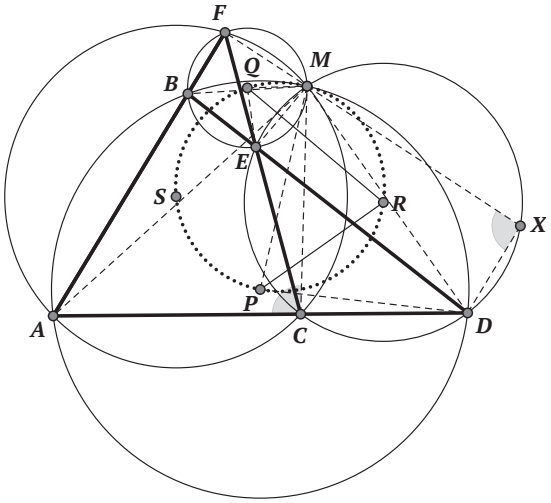


Рисунок 90-P

Пример 91. Три пересекающиеся окружности образуют подобные треугольники и не только

Начнем с построения общей хорды *OR* окружностей *A* и *C* на рис. 91-P. Линия *AC* является биссектрисой к *OR*. Если точка *M* лежит на пересечении *AC* с окружностью *A*, тогда $\angle ODR = \frac{1}{2}\angle OAR = \angle OAM = \angle OAC$; и, следовательно, *DR* || *AC*. Точно так же в окружности *C* имеет место *FR* || *AC*, и, следовательно, *FRD* является прямой линией, параллельной *AC*. То же самое можно сделать и для доказательства того, что линии *DPE* и *EQF* также являются прямыми линиями и параллельны *AB* и *BC* соответственно. С учетом этого получаются подобные треугольники *ABC* и *DEF*, при этом стороны треугольника *DEF* содержат точки пересечения *P*, *Q* и *R*.

Этот любопытный пример является непосредственным следствием элементарного применения гомотетии (см. «Инструментарий»). Поскольку точка *A* является серединой отрезка *OD*, точка *B* является серединой отрезка *OE*, а точка *C* является серединой отрезка *OF*, треугольник *DEF* получается в результате применения гомотетии с центром *O* и коэффициентом 2 к треугольнику *ABC*. Эти два треугольника являются подобными. Кроме того, так как *CA* является биссектрисой *OR*, как показано выше, а *AB* и *BC* являются биссектрисами *OP* и *OQ* соответственно, точки *P*, *Q* и *R* обязательно лежат на сторонах треугольника *DEF*.

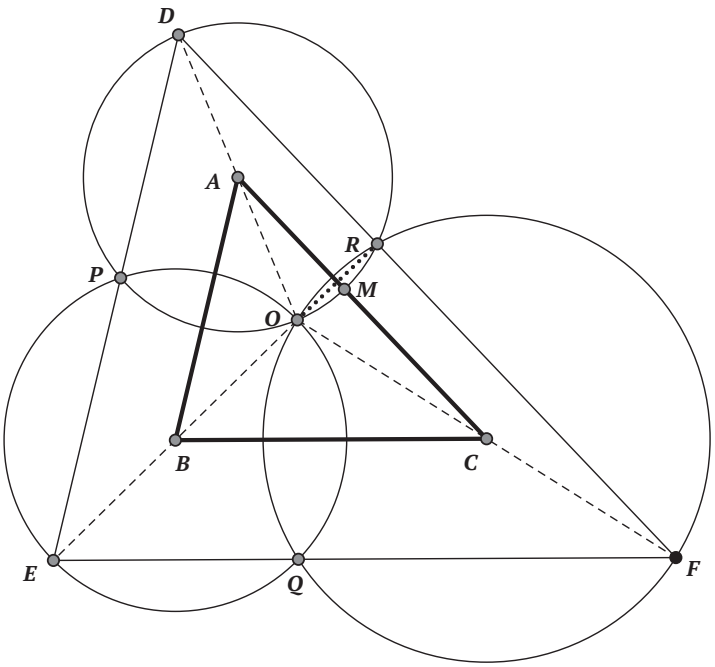


Рисунок 91-P

Пример 92. Равные окружности, построенные из трех равных окружностей с общей точкой

На рис. 92-P прежде всего обращаем внимание на то, что $PQ = PR = PS$, поскольку точка P является точкой пересечения окружностей Q, R и S, имеющих одинаковые радиусы. Отсюда следует, что точки Q, R и S лежат на одной окружности с центром в точке P и таким же радиусом, как и три исходные окружности. Таким образом, $AS = SB = BQ = QC = CR = RA = PQ = PR = PS$, что позволяет получить шестиугольник $ASBQCR$, все шесть сторон которого имеют одинаковую длину. Поскольку четырехугольники $ASPR$ и $BQPS$ являются ромбами, их противоположные стороны параллельны, и мы можем записать, что $AR \parallel SP \parallel BQ$. Точно так же можно записать, что $BS \parallel QP \parallel CR$ и $CQ \parallel RP \parallel AS$. Таким образом, все пары противоположных сторон в шестиугольнике $ASBQCR$ параллельны. Пусть точка D будет пересечением линии, проходящей через A и параллельной BS, с линией, проходящей через B и параллельной AS. Поскольку $AS = SB$, четырехугольник $ASBD$ также является ромбом. Если теперь обратиться к четырехугольнику $ADCR$, то получаем $AD \parallel SB \parallel RC$ и $CR = RA = AD$. Отсюда следует, что $ADCR$ также является ромбом, и имеет место $DC = DA = DB$. Точка D в этом случае является центром описанной окружности треугольника ABC, при этом $DA = SA$, а радиус окружности D равен радиусу окружности S и равен всем остальным радиусам.

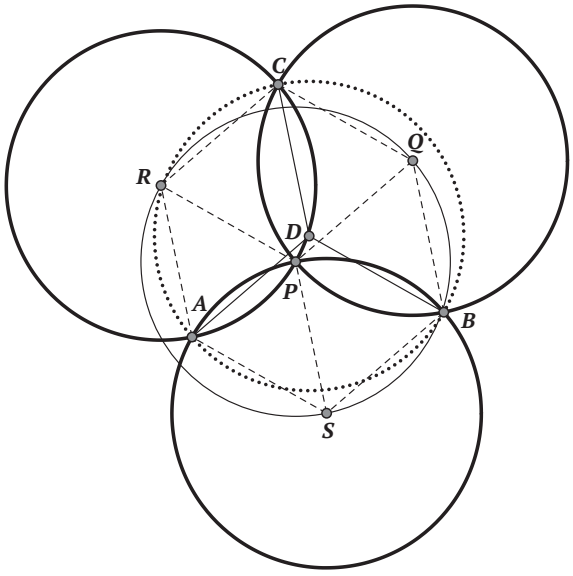


Рисунок 92-P

Пример 93. Построение конгруэнтных фигур с помощью трех равных окружностей с общей точкой

На рис. 93-Р для начала обратимся к четырехугольнику *ASQC*. Из доказательства примера 92 известно, что *AS* || *CQ* и *AS* = *QC*. Отсюда следует, что *ASQC* является параллелограммом, а это значит, что *AC* = *SQ* и *AC* || *SQ*. Точно так же в параллелограмме *APQD* получаем *PA* = *QD* и *PA* || *QD*; в параллелограмме *BDRP* получаем *BP* = *DR* и *BP* || *DR*; а в параллелограмме *CRSB* получаем *CB* = *RS* и *CB* || *RS*. Как можно убедиться, соответствующие стороны двух четырехугольников *APBC* и *QDRS* равны и параллельны, из чего следует, что эти четырехугольники конгруэнтны.

Нам нужно доказать, что прямая, соединяющая любые две точки в одном из этих четырехугольников, перпендикулярна прямой, соединяющей две другие его точки. Пусть *N* обозначает точку пересечения *BC* с продолжением *AP*. Ранее мы уже определили, что *PA* || *QD*, а поскольку *BC* является общей хордой окружностей *D* и *Q*, получаем *DQ* ⊥ *BC*, откуда следует, что *APN* ⊥ *BC*. Аналогичным образом можно доказать, что *BP* ⊥ *AC*, а так как четырехугольники *APBC* и *QDRS* конгруэнтны, то также получаем *DR* ⊥ *QS* и *DQ* ⊥ *RS*.

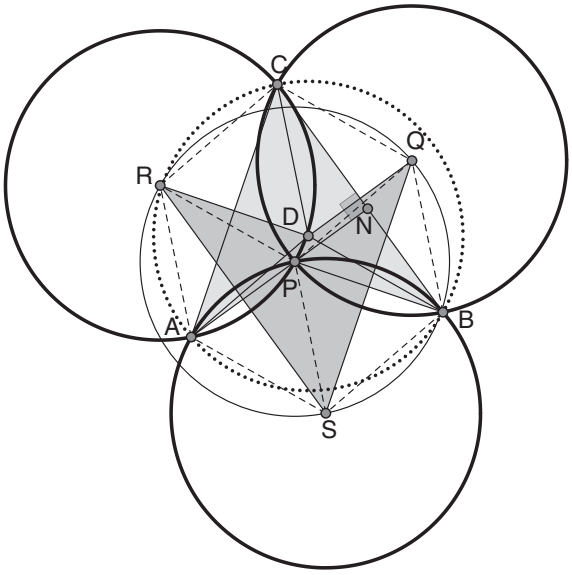


Рисунок 93-Р

Пример 94. Интересные свойства пересекающихся окружностей

На рис. 94-Р четырехугольники $ABKN$ и $BCLK$ являются циклическими, поэтому получаем $180° - \angle NKB = \angle BAN$ и $180° - \angle BKL = \angle LCB$, и, следовательно, $\angle LKN = 360° - \angle NKB - \angle BKL = (180° - \angle NKB) + (180° - \angle BKL) = \angle BAN + \angle LCB$. Подобным образом, поскольку четырехугольники $CDML$ и $DANM$ являются циклическими, получаем $180° - \angle LMD = \angle DCL$ и $180° - \angle DMN = \angle NAD$, и, следовательно, $\angle NML = 360° - \angle LMD - \angle DMN = (180° - \angle LMD) + (180° - \angle DMN) = \angle DCL + \angle NAD$. Сложив эти уравнения, получаем

$$\begin{aligned} &\angle LKN + \angle NML \\ &= (\angle BAN + \angle LCB) + (\angle DCL + \angle NAD) \\ &= (\angle BAN + \angle NAD) + (\angle DCL + \angle LCB) \\ &= \angle BAD + \angle DCB. \end{aligned}$$

Поскольку $ABCD$ является циклическим четырехугольником, получаем $\angle BAD + \angle DCB = 180°$, что дает нам $\angle LKN + \angle NML = 180°$, и, следовательно, четырехугольник $KLMN$ также является циклическим.

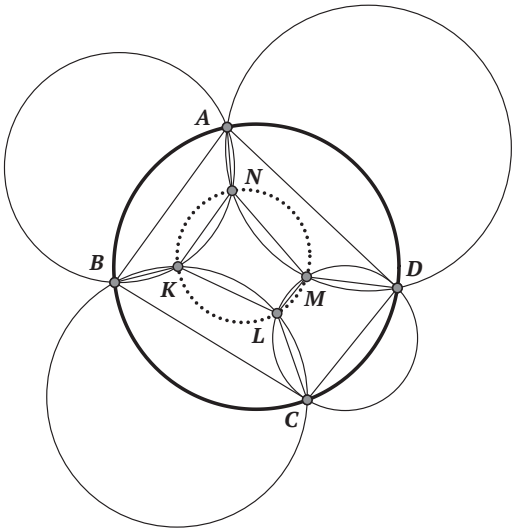


Рисунок 94-Р

Пример 95. Четыре равные окружности образуют четырехугольник, описываемый окружностью

На рис. 95-Р добавлены и обозначены точки касания четырех окружностей с их внешними касательными. Кроме того, к этим точкам касания и сторонам четырехугольника *ABCD* добавлены радиусы.

Сначала рассмотрим четырехугольник *AA″EA′*. Поскольку радиусы *AA′* и *AA″* перпендикулярны касательным *EF* и *HE* соответственно, получаем $\angle EA''A = \angle AA'E = 90°$. Таким образом, $\angle A''AA' = 180° - \angle A'EA'' = 180° - \angle FEH$. Обращая внимание на то, что все окружности имеют равные радиусы, а радиусы перпендикулярны соответствующим касательным, можно видеть, что четырехугольники *AA′B″B* и *ADD′A″* являются прямоугольниками. Таким образом, $\angle A'AB = \angle DAA'' = 90°$. Из этого выражения получаем $\angle BAD = 360° - \angle A'AB - \angle A''AA' - \angle DAA'' = 360° - 90° - (180° - \angle FEH) - 90° = \angle FEH$. Точно так же можно рассмотреть четырехугольник *CC″GC′*, чтобы получить $\angle DCB = \angle HGF$. Остается только обратить внимание, что четырехугольник *ABCD* является циклическим, поскольку все точки *A*, *B*, *C* и *D* находятся на одинаковом расстоянии от точки пересечения *P* четырех окружностей. Отсюда получаем $\angle FEH + \angle HGF = \angle BAD + \angle DCB = 180°$, и поскольку $\angle FEH + \angle HGF = 180°$, четыре точки *E*, *F*, *G* и *H* лежат на одной окружности.

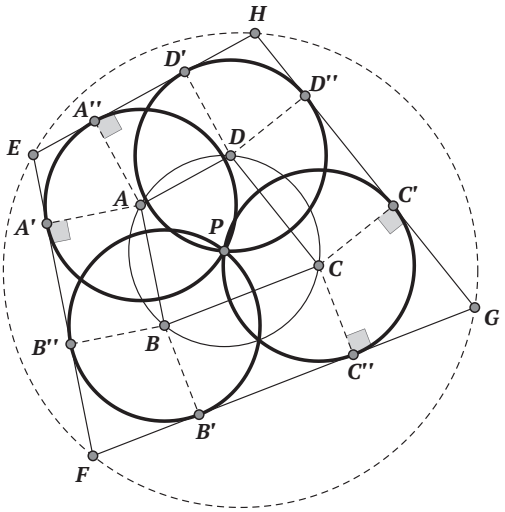


Рисунок 95-Р

Пример 96. Треугольник Рело

Как видно на рис. 96-P, если провести касательную в точке P к дуге окружности с центром A, то расстояние от точки P до центра окружности A будет равно радиусу окружности. Этот радиус равен длинам $b = AB = CA$ двух сторон равностороннего треугольника ABC, поскольку они также являются радиусами окружности. Перпендикуляр к AP в точке A имеет такое положение, что $AP = b$. Это верно и для касательной к дуге окружности с центром C в точке Q, так как все стороны равностороннего треугольника имеют длину b. Поскольку аналогичное утверждение справедливо и для касательных к третьей дуге, можно сделать вывод, что пары параллельных касательных на рисунке всегда имеют расстояние, равное длине b сторон треугольника ABC.

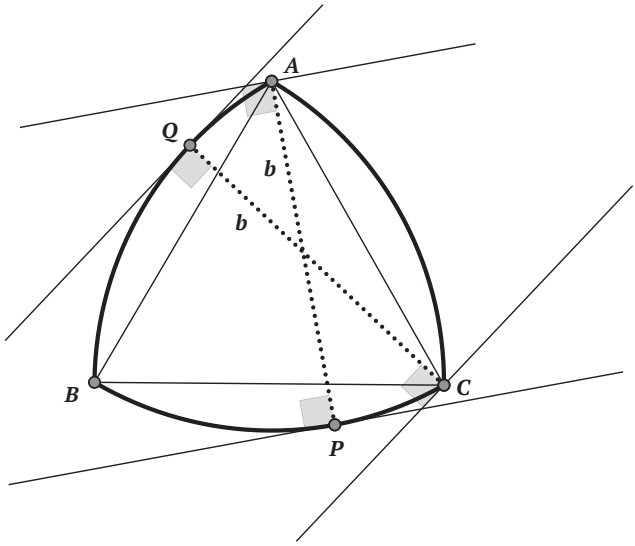


Рисунок 96-P

Пример 97. Еще несколько фигур с постоянной шириной

Тот же аргумент, который был использован для объяснения примера 96, подойдет и в данном случае. Сначала рассмотрим изображение слева на рис. 97-P, которое построено на основе правильного пятиугольника. Радиус окружности с центром в точке A и касательной в точке P равен длинам $d = AC = AD$ двух сторон равнобедренного треугольника ACD, которые также являются радиусами этой окружности. Эта длина d равна длине диагоналей пятиугольника $ABCDE$ и равна расстоянию между касательной фигуры, проходящей через A, и касательной в точке P. Этот факт подтверждается, если точка P выбрана на любой из других дуг окружности, составляющих фигуру. Точно так же, при анализе фигуры справа, построенной на основе правильного семиугольника, этот аргу-

мент можно полностью повторить для касательной в точке Q на дуге окружности с центром F и касательной в точке F, при этом длина e длинной диагонали семиугольника дает общее расстояние для всех таких пар.

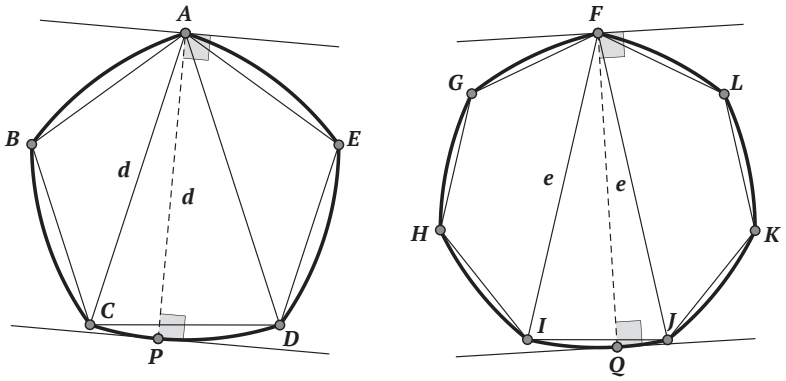


Рисунок 97-Р

Пример 98. Определение радикальной оси пересекающихся окружностей

Напомним, что если из одной и той же внешней точки к одной и той же окружности провести секущую и касательный отрезок, то касательный отрезок будет средним пропорциональным между секущей и ее внешним отрезком. Это показано на рис. 98-Р. По отношению к окружности O отрезок PR является средним пропорциональным между PA и PB, и получаем $PR^2 = PA \cdot PB$. Точно так же PS по отношению к окружности Q является средним пропорциональным между PA и PB, так что $PS^2 = PA \cdot PB$. Для любой внешней точки на прямой AB имеет место соотношение $PR = PS$.

Теперь предположим, что точка P – это любая точка на плоскости, для которой при касательных отрезках PR и PS к окружностям O и Q соответственно выполняется $PR = PS$. Пусть PA пересекает окружность O в точке B и окружность Q в точке B'. Как и ранее, в этом случае получаем $PR^2 = PA \cdot PB$ и $PQ^2 = PA \cdot PB'$. Поскольку $PR = PS$, получаем $PB = PB'$, и, следовательно, $B = B'$. Таким образом, точка P лежит на общей секущей AB двух окружностей.

Наконец, выбрав точку T на секущей AB, как показано на рис. 98-Р, мы получаем, что $TU \cdot TV = TW \cdot TX$ выполняется для любых выбранных отрезков TUV и TWX, поскольку касательные из T к двум окружностям имеют одинаковую длину.

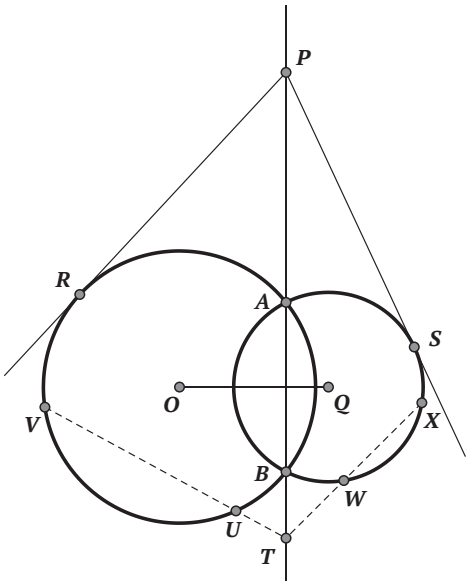


Рисунок 98-P

Пример 99. Радикальная ось касательных окружностей

Ситуации, представленные на рис. 99a-P и 99b-P, несколько проще, чем описанная в примере 98. В данном случае очевидно, что отрезок *PZ* имеет одинаковую длину относительно обеих окружностей для любой точки, выбранной на их общей касательной в точке *Z*.

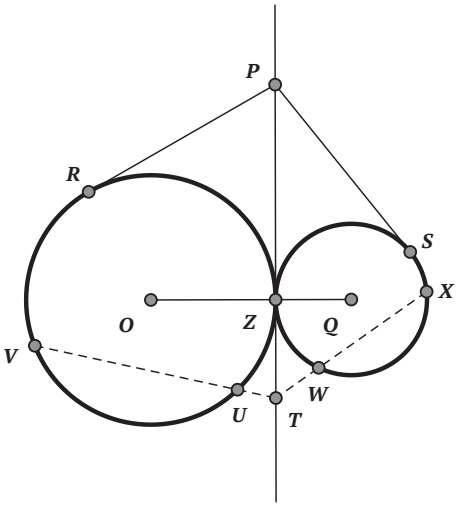


Рисунок 99a-P

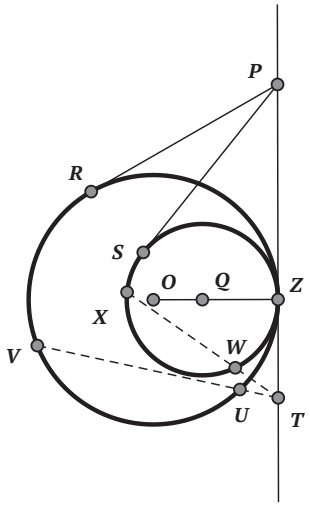


Рисунок 99b-P

Пусть P – это любая точка на плоскости, для которой выполняется $PR = PS$ для отрезков касательных PR и PS к окружностям O и Q соответственно. Пусть PZ пересекает окружность O в точке B и окружность Q в точке B', как показано на рис. 99c-P (заметим, что здесь показан только случай внешне касательных окружностей. Доказательство для внутренне касательных окружностей аналогично). И вновь получаем $PR^2 = PZ \cdot PB$ и $PQ^2 = PZ \cdot PB'$, а это значит, что $B = B'$. Это возможно только при $B = B' = Z$, и, следовательно, точка P лежит на общей касательной к двум окружностям в точке Z.

Наконец, как и в доказательстве примера 98, для точки T на общей касательной в точке Z, как показано на рисунках, $TU \cdot TV = TW \cdot TX$ верно для любого выбора линий TUV и TWX, поскольку касательные из T к двум окружностям имеют одинаковую длину.

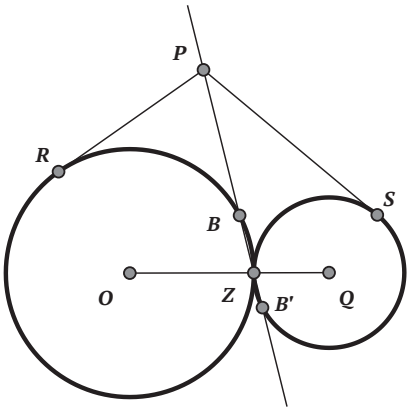


Рисунок 99c-P

Пример 100. Радикальная ось внешних непересекающихся окружностей

Хотя данный пример тесно связан с примерами 98 и 99, доказать его гораздо проще с помощью методов аналитической геометрии. Возможно, это послужит наглядным примером того, как аналитическая геометрия порой может оказаться более эффективной, чем элементарная (синтетическая) геометрия.

Как видно на рис. 100-P, мы выбираем систему координат таким образом, чтобы точка O находилась в начале системы координат, с координатами (0, 0). Точка Q лежит на положительной стороне оси x, и координаты Q равны $(m, 0)$ для некоторого положительного числа m. Точка P с координатами (x, y) обладает тем свойством, что касательные PR и PS, проведенные из P к окружностям O и Q соответственно, совпадают. Наконец, радиус окружности O обозначим через r, а радиус окружности Q – через s.

Нам известно, что $PR = PS$, что эквивалентно $PR^2 = PS^2$. Поскольку радиус окружности O, проходящий через точку R, перпендикулярен касательной PR, ΔPRO является прямоугольным, при этом $PR^2 = OP^2 - OR^2 = (x^2 + y^2) - r^2$. Точно так же ΔPQS также является прямоугольным треугольником, при этом $PS^2 = QP^2 - QR^2 = ((x - m)^2 + y^2) - s^2$. Подставляя эти выражения, получаем $x^2 + y^2 - r^2 = x^2 - 2mx + m^2 + y^2 - s^2$, что упрощается до $2mx = m^2 + r^2 - s^2$, или $x = \dfrac{m^2 + r^2 - s^2}{2m}$. Это означает, что любая точка P с заданным свойством имеет эту конкретную координату x и, следовательно, лежит на прямой, перпендикулярной оси x, то есть на прямой OQ. Можно также обратить внимание на то, что любой выбор координаты y даст нам точку P с $PR = PS$, поскольку мы можем просто произвести вычисления в обратном направлении. Радикальная (основная) ось двух окружностей – это прямая, перпендикулярная OQ. Наконец, примем во внимание, что равенство $TU \cdot TV = TW \cdot TX$ выполняется для всех точек T на этой прямой, и все секущие TUV окружности O и все секущие TWX окружности Q подчиняются тому же принципу, что и в доказательствах примеров 98 и 99.

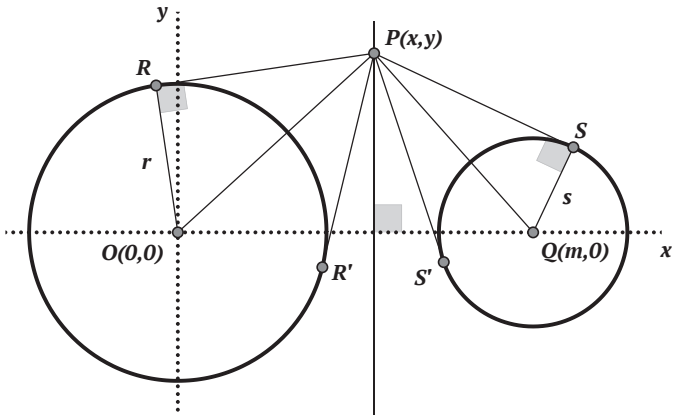


Рисунок 100-P

Пример 101. Радикальная ось внутренних непересекающихся окружностей

Доказательство этого примера идентично доказательству примера 100 и основано на системе координат, представленной на рис. 101-P.

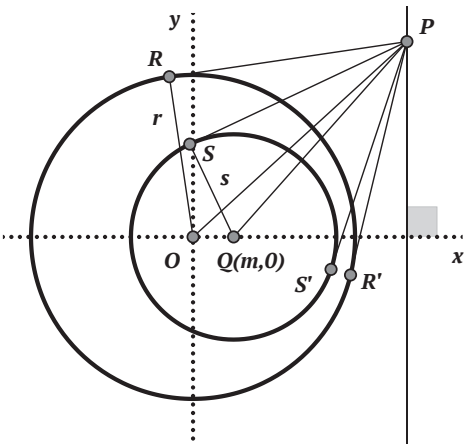


Рисунок 101-P

Пример 102. Совпадение пересекающихся окружностей

Как известно из примера 98, точка P лежит на радикальной оси KL окружностей O и Q тогда и только тогда, когда $PU \cdot PV = PW \cdot PX$ выполняется для любой секущей PUV окружности O и любой секущей PWX окружности Q. Чтобы доказать, что ортоцентр H обладает этим свойством, рассмотрим высоты AS и BT треугольника ABC, где S и T обозначают соответственно основания высот из A и B. Эта ситуация представлена на рис. 102-P. Поскольку $\angle FSA = 90°$, точка S лежит на окружности O с диаметром AF, а так как $\angle BTG = 90°$, точка T лежит на окружности Q с диаметром BG. Ортоцентр H треугольника ABC является точкой пересечения AS и BT. Поскольку $\angle ATB = \angle ASB = 90°$, точки S и T лежат на окружности с диаметром AB. Относительно этой окружности получаем $AH \cdot SH = BH \cdot TH$. Поскольку A и S лежат на окружности O, мы можем интерпретировать произведение $AH \cdot SH$ относительно окружности O, а так как B и T лежат на окружности Q, мы можем интерпретировать произведение $BH \cdot TH$ относительно окружности Q. Установив равенство этих двух значений, мы можем сделать вывод, что точка H лежит на радикальной оси KL окружностей O и Q.

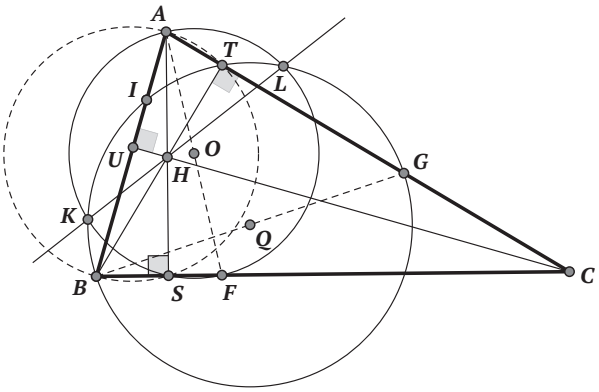


Рисунок 102-P

Пример 103. Радикальный центр трех окружностей

Рассмотрим окружности O, Q и R, радикальные оси которых указаны на рис. 103-P. На рисунке точки выбраны таким образом, что AB является радикальной осью окружностей O и Q, а CD является радикальной осью окружностей O и R. Пусть P является точкой пересечения AB и CD. Поскольку P лежит на радикальной оси AB окружностей O и Q, равенство $PU \cdot PV = PW \cdot PX$ выполняется для всех секущих PUV окружности O и всех секущих PWX окружности Q. Так как P лежит вне окружностей, касательные из P к окружностям имеют одинаковую длину, что можно видеть на рис. 103-P как $PE = PH$. Точно так же, поскольку точка P лежит на радикальной оси CD окружностей O и R, равенство $PU \cdot PV = PY \cdot PZ$ выполняется для всех секущих PUV окружности O и всех секущих PYZ окружности R. Так как P находится вне этих окружностей, касательные из P к окружностям также равны по длине, что отображено на рисунке как $PE = PJ$. Это означает, что $PE = PH = PJ$ и что равенство $PU \cdot PV = PW \cdot PX = PY \cdot PZ$ выполняется для всех секущих PUV окружности O, всех секущих PWX окружности Q и всех секущих PYZ окружности R. Таким образом, точка P также лежит на радикальной оси окружностей Q и R.

Поскольку P лежит вне всех трех окружностей, в общей сложности из точки P проходят шесть касательных одинаковой длины: PE, PF, PG, PH, PJ и PK. Рассмотрим точку E: радиус OE окружности O перпендикулярен касательной PE. Следовательно, EO является касательной к окружности с с центром P, содержащей точку E, и окружности O и P пересекаются под прямым углом в точке E. Аналогичным образом можно доказать это для всех шести касательных, и получается, что c пересекает все три заданные окружности под прямым углом, решая тем самым задачу Монжа. Такая окружность существует только в том случае, если радикальные оси заданных окружностей пересекаются снаружи.

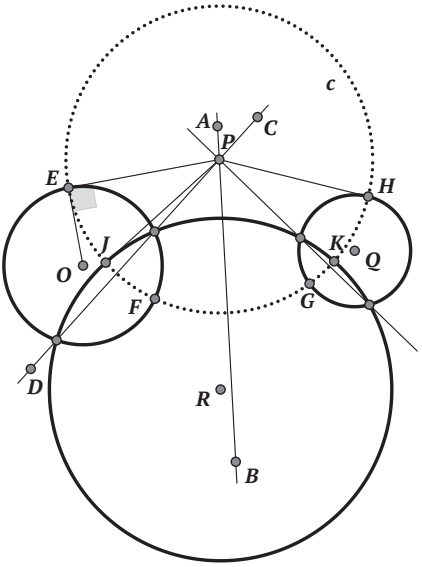


Рисунок 103-P

Пример 104. Удивительный результат для случайно выбранной точки вне окружности

Поскольку на рис. 104-P задано $OP \cdot OP' = r^2$, мы можем записать это в виде $\frac{OP}{r} = \frac{r}{OP'}$, или $\frac{OP}{OA} = \frac{OA}{OP'}$. Отсюда следует, что $\Delta OAP \sim \Delta OAP'$, так как у них также есть общий угол в вершине O. Такое отображение точек P на точки P' обычно называют *инверсией* на окружности c.

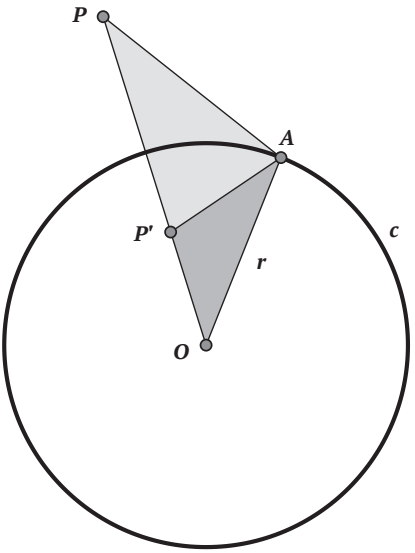


Рисунок 104-P

Пример 105. Неожиданные точки на касательной к окружности

На рис. 105-P рассмотрим треугольники OAP и OAP'. Поскольку нам известно, что $OP \cdot OP' = r^2$, из примера 104 мы можем заключить, что эти треугольники подобны. Так как точка P лежит на окружности с диаметром OA, получаем $\angle OPA = 90°$, а это значит, что $\angle P'AO = 90°$. Следовательно, точка P' лежит на касательной t к окружности c в точке A.

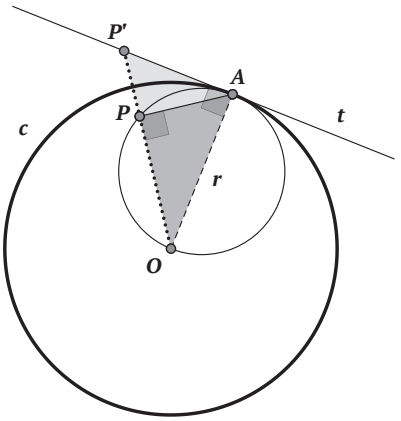


Рисунок 105-P

Пример 106. Точки на секущей определяют точки на особой вписанной окружности

На рис. 106-P рассмотрим треугольники OBP и OBP'. Поскольку известно, что $OP \cdot OP' = r^2$, из примера 104 следует, что эти треугольники подобны, и, следовательно, $\angle OP'B = \angle PBO = \angle ABO$. Так как этот угол не зависит от выбора точки P на отрезке AB, все получающиеся точки P' лежат на вписанной окружности треугольника OBA. Обратите внимание, что это доказательство можно распространить аналогичным образом на точки P на прямой s, лежащие вне окружности c.

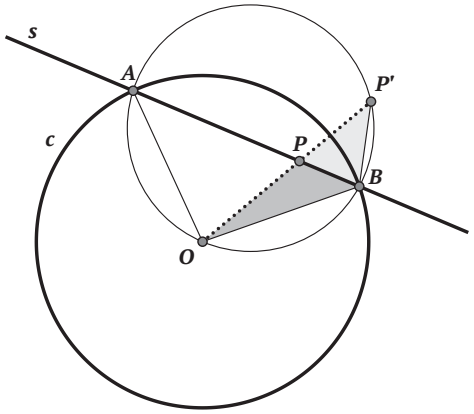


Рисунок 106-P

Пример 107. Внешняя окружность образует внутреннюю окружность

На рис. 107-Р для начала начертим диаметр AB окружности d и продлим его до центра O. Определим точки A' и B' таким образом, чтобы $OA \cdot OA' = r^2$ и $OB \cdot OB' = r^2$, и начертим отрезки PA, PB, $P'A'$ и $P'B'$. Поскольку точка P лежит на окружности с диаметром AB, отметим, что $\angle BPA = 90°$. Теперь рассмотрим треугольники ΔOBP и $\Delta OB'P'$. У них есть общий угол в точке O, и поскольку $OB \cdot OB' = r^2 = OP \cdot OP'$, тогда $\frac{OB}{OP} = \frac{OP'}{OB'}$, и, следовательно, $\Delta OBP \sim \Delta OB'P'$. Это приводит нас к $\angle ABP = \angle B'P'P$. Точно так же, поскольку $OA \cdot OA' = r^2 = OP \cdot OP'$, получаем $\frac{OA}{OP} = \frac{OP'}{OA'}$, и, следовательно, $\Delta OAP \sim \Delta OA'P'$, что приводит нас к $\angle PAO = \angle OP'A'$. Теперь мы готовы перейти к изучению угла $\angle A'P'B$. Подводя итог, получаем $\angle A'P'B = 180° - \angle OP'A' - \angle B'P'P = 180° - \angle PAO - \angle ABP = \angle BPA$. Поскольку $\angle BPA$ является прямым углом, а AB является диаметром окружности d, то также получаем: $\angle A'P'B' = 90°$, и делаем заключение, что все точки P' лежат на окружности с диаметром $A'B'$.

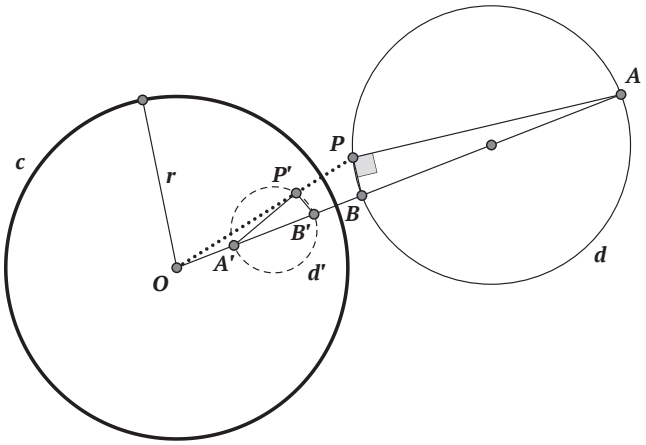


Рисунок 107-Р

Пример 108. Две окружности образуют концикличские точки

Доказательство для этого примера по сути не отличается от доказательства для примера 107. Как и на рис. 107-Р, сначала построим диаметр AB окружности d с центром O, но на рис. 108-Р продлим этот диаметр за пределы окружности c. Вновь определим точки A' и B' таким образом, чтобы $OA \cdot OA' = r^2$ и $OB \cdot OB' = r^2$, а затем построим отрезки PA, PB, $P'A'$ и $P'B'$. Поскольку точка P лежит на окружности с диаметром AB, из этого следует, что $\angle BPA = 90°$.

Теперь рассмотрим треугольники ΔOBP и $\Delta OB'P'$. У них есть общий угол в точке O, и поскольку $OB \cdot OB' = r^2 = OP \cdot OP'$, это можно записать как $\frac{OB}{OP} = \frac{OP'}{OB'}$, и, следовательно, $\Delta OBP \sim \Delta OB'P'$, из чего следует, что $\angle PBA = \angle OP'B'$. Точно так же, поскольку $OA \cdot OA' = r^2 = OP \cdot OP'$, это можно записать как $\frac{OA}{OP} = \frac{OP'}{OA'}$, и, следовательно, $\Delta OPA \sim \Delta OP'A'$, из чего следует, что $\angle OAP = \angle A'P'O$. Теперь мы готовы рассмотреть угол $\angle A'P'B'$. Подводя итог, получаем $\angle A'P'B' = \angle A'P'O + \angle OP'B' = \angle OAP + \angle PBA = 180° - \angle APB$. Поскольку $\angle APB$ является прямым углом, а AB является диаметром окружности d, мы вновь получаем: $\angle A'P'B' = 90°$, и можем убедиться, что все точки P' лежат на окружности с диаметром $A'B'$. Поскольку все точки P находятся внутри окружности c, все точки P' находятся снаружи окружности c, и, следовательно, окружность c находится внутри окружности с диаметром $A'B'$.

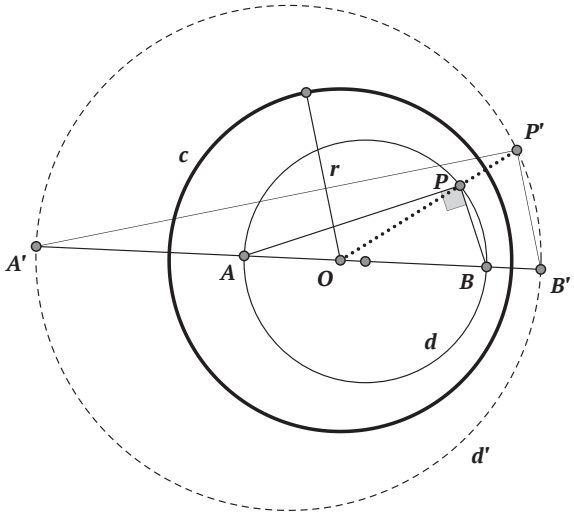


Рисунок 108-P

Пример 109. Построение полуокружностей на сторонах квадрата

В доказательстве примера 106 мы доказали, что точки P на хорде AB окружности O определяют точки P' на описанной окружности треугольника OAB, лежащей снаружи окружности O. Как видно на рис. 109-P, треугольник OAB является прямоугольным равнобедренным треугольником, поскольку диагонали AC и BD квадрата $ABCD$ перпендикулярны и делят друг друга пополам. Это означает, что AB является диаметром данной окружности, и все точки P', образованные точками P на AB, лежат на полуокружности с диаметром AB, внешней по отношению к окружности O. Аналогичным образом можно доказать, что хорды BC, CD и DA определяют точки четырех полуокружностей с диаметрами AB, BC, CD и DA, внешних по отношению к окружности O.

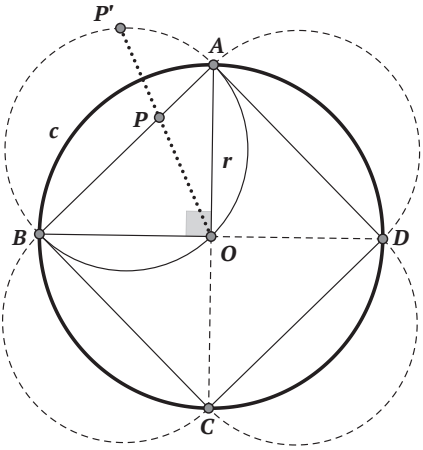


Рисунок 109-Р

Пример 110. Две окружности образуют неожиданный равносторонний треугольник

На рис. 110-Р для начала начертим радиусы *OD*, *OQ*, *OA*, *QA* и *QD*. Эти радиусы образуют два равносторонних треугольника, ΔDOQ и ΔAQO, и, следовательно, $\angle AOD = \angle DQA = 120°$. Поскольку четырехугольник *QDCA* является циклическим и вписан в окружность *O*, получаем $\angle ACB = \angle ACD = 180° - \angle DOA = 180° - 120° = 60°$. Кроме того, поскольку четырехугольник *DOBA* вписан в окружность *Q*, получаем $\angle ABD = \angle AOD = 120°$, из чего следует, что $\angle CBA = 180° - \angle ABD = 180° - 120° = 60°$. Из этого следует, что два угла в треугольнике *ABC* равны 60°, и, значит, треугольник *ABC* является равносторонним.

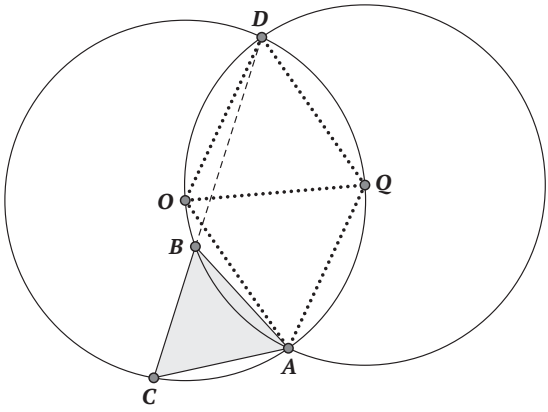


Рисунок 110-Р

Пример 111. Две равные окружности образуют равнобедренный треугольник

На рис. 111-Р начертим общую хорду AB двух окружностей, а также радиусы OA, OB, QA и QB. Поскольку треугольники ΔOBA и ΔQAB имеют общую сторону AB, а их остальные стороны равны по длине, получаем $\Delta OBA \cong \Delta QAB$, и, следовательно, $\angle BOA = \angle AQB$. В окружности O имеет место $\angle BXA = ½\ \angle$BOA, а в окружности Q имеем $\angle AYB = ½\ \angle AQB$. Следовательно, $\angle BXY = \angle BXA = ½\angle BOA = ½\ \angle AQB = \angle AYB = \angle XYB$, и поскольку $\angle BXY = \angle XYB$, получается, что треугольник ΔBYX равнобедренный.

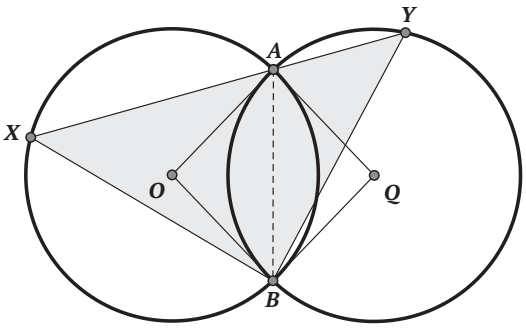


Рисунок 111-Р

Пример 112. Две одинаковые окружности образуют другой равнобедренный треугольник

Доказательство в данном случае практически идентично доказательству из примера 111. На рис. 112-Р построена общая хорда AB двух окружностей, а также радиусы OA, OB, QA и QB. Поскольку треугольники ΔOBA и ΔQAB имеют общую сторону AB, а их остальные стороны равны по длине, получаем $\Delta OBA \cong \Delta QAB$ и $\angle BOA = \angle AQB$. В окружности O получаем $\angle AXB = 180° - ½\angle BOA$, и $\angle BXY = 180° - \angle AXB = ½\angle BOA$. В окружности Q получаем $\angle AYB = ½\angle AQB$, и это приводит нас к $\angle BXY = ½\angle BOA = ½\angle AQB = \angle AYB = \angle XYB$. Поскольку $\angle BXY = \angle XYB$, становится очевидным, что треугольник ΔBYX является равнобедренным.

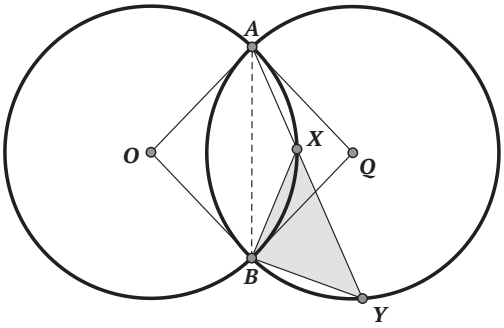


Рисунок 112-Р

Пример 113. Неожиданная биссектриса угла

Сначала проведем отрезки AB и BY, как показано на рис. 113-Р. Сразу обратим внимание, что $\angle DAY = \angle DBY$ в окружности Q, поскольку оба угла ограничены дугой DY. Также в окружности Q имеет место равенство $\angle CYB = \angle XAB = \angle XYB$, так как оба угла ограничены дугой XB. В окружности O имеет место выражение $\angle BAE = \angle BCE = \angle BCY$, поскольку оба угла измеряются дугой BE.

Таким образом, получаем $\angle XAD = \angle XAB + \angle BAE = \angle XYB + \angle BCE = \angle CYB + \angle BCY$. Внешний угол треугольника BYC дает $\angle CYB + \angle BCY = \angle DBY$. Объединяя равенства, получаем: $\angle XAD = \angle DBY = \angle DAY$, и находим, что AD является биссектрисой $\angle XAY$.

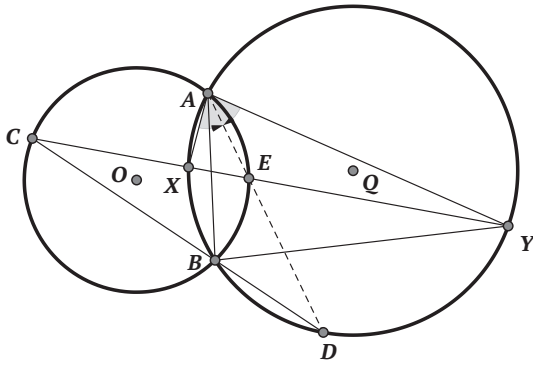


Рисунок 113-Р

Пример 114. Удивительное равенство углов в пересекающихся окружностях

На рис. 114-Р при построении отрезка XY получаем $\angle AXC = \angle AXY - \angle CXY$. В окружности O имеет место $\angle AXY = \angle ABY$, поскольку оба угла составляют половину длины дуги AY. Точно так же в окружности Q имеет место $\angle CXY = \angle CDY$, из чего получается $\angle AXC = \angle AXY - \angle CXY = \angle ABY - \angle CDY = \angle ABY - \angle BDY$. В треугольнике BYD, принимая во внимание внешний угол ABY, получаем $\angle ABY - \angle BDY = \angle DYB$, и таким образом выходит: $\angle AXC = \angle DYB$.

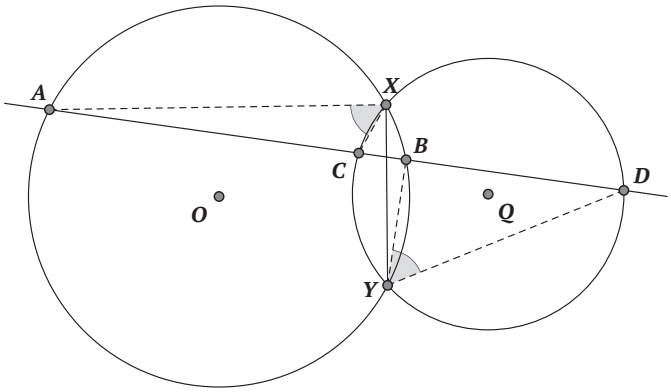


Рисунок 114-Р

Пример 115. Циклический четырехугольник образует две окружности с перпендикулярными радиусами

На рис. 115-Р сначала начертим описанную окружность треугольника *AEB*, которая пересекает прямую *EF* в точке *G*, а также начертим отрезки *OD*, *OE*, *OF* и *OM*. Как *ABCD*, так и *AEGB* являются циклическими четырехугольниками, и мы получаем $\angle ADC = \angle ABE = \angle AGE$. Поскольку $\angle FGA = 180° - \angle AGE = 180° - \angle ADC = 180° - \angle ADF$, четырехугольник *AGFD* также является циклическим. Исходя из секущих к описанной окружности *AGFD*, получаем $EA \cdot ED = EG \cdot EF$, а для описанной окружности *AEGB* получаем $FB \cdot FA = FG \cdot FE$. Сложив эти два уравнения, получаем $EA \cdot ED + FB \cdot FA = EG \cdot EF + FG \cdot EF = EF \cdot (EG + FG) = EF^2$.

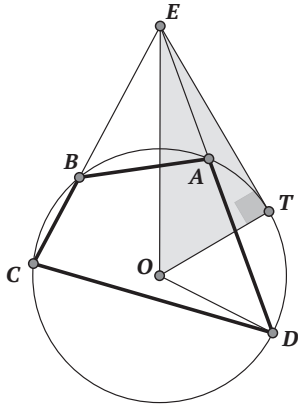


Рисунок 115а-Р

Для следующего шага рассмотрим рис. 115a-P, где вновь присутствует циклический четырехугольник *ABCD*. Как и на рис. 115-P, точка *E* является пересечением прямых *DA* и *CB*, а точка *O* является центром окружности *ABCD*. Мы также добавили касательную *ET* к окружности *O*, где точкой касания является точка *T*. Когда из внешней точки к одной и той же окружности проводятся касательная и секущая, касательная равна среднему пропорциональному между секущей и ее внешним отрезком, так что получаем $\frac{ED}{ET} = \frac{ET}{EA}$, или $EA \cdot ED = ET^2$. Поскольку *EOT* является прямоугольным треугольником, применим теорему Пифагора и получим $EA \cdot ED = ET^2 = OE^2 - OT^2$. Так как *OD* и *OT* являются радиусами окружности *O*, получаем $OT = OD$ и находим $EA \cdot ED = OE^2 - OD^2$.

Аналогичным образом также получаем $FB \cdot FA = OF^2 - OD^2$. Подставляя эти два выражения в $EA \cdot ED + FB \cdot FA = EF^2$, получаем $OE^2 - OD^2 + OF^2 - OD^2 = EF^2$, что также можно записать как $OE^2 + OF^2 + 2 \cdot OD^2 + EF^2 = 2 \cdot OD^2 + 4 \cdot ME^2$.

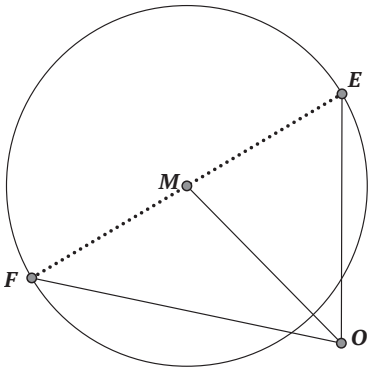


Рисунок 115b-P

Теперь можно перейти к рис. 115b-P, где вновь имеются точки *O*, *E*, *F* и *M* из рис. 115-P, при этом $ME = MF$, поскольку *M* является центром окружности с диаметром *EF*. Применяя закон косинусов (см. «Инструментарий») к треугольнику *OEM*, получаем $OE^2 = OM^2 + ME^2 - 2 \cdot OM \cdot ME \cdot \cos\angle OME$, а применив его к треугольнику *OMF*, получаем $OF^2 = OM^2 + MF^2 - 2 \cdot OM \cdot MF \cdot \cos(180° - \angle OME)$. Поскольку $ME = MF$, при сложении этих двух уравнений получаем $OE^2 + OF^2 = 2 \cdot OM^2 + 2 \cdot ME^2$.

С учетом того, что ранее уже было доказано $OE^2 + OF^2 = 2 \cdot OD^2 + 4 \cdot ME^2$, получаем $2 \cdot OM^2 + 2 \cdot ME^2 = 2 \cdot OD^2 + 4 \cdot ME^2$, или $OM^2 = OD^2 + ME^2$. Поскольку известно, что $OD = ON$ и $ME = MN$, это можно записать как $OM^2 = ON^2 + MN^2$, и это доказывает, что треугольник *MNO* является прямоугольным, при этом $\angle ONM = 90°$.

Пример 116. Окружности, образующие равенство, казалось бы, несвязанных отрезков

Сначала на рис. 116-Р начертим отрезки GC, BC, CA и BE. Поскольку угол DBC вписан в полуокружность, имеет место $\angle DBC = 90°$, из чего следует, что треугольник GBC является прямоугольным. Согласно теореме Пифагора, $CG^2 = BG^2 + CB^2$. Поскольку $CG = CH$, так как они являются радиусами окружности C, получаем

$$CH^2 = BG^2 + CB^2. \tag{I}$$

Теперь обратим внимание на то, что $CH^2 = (CE + EH)^2 = CE^2 + EH^2 + 2CE \cdot EH = EH^2 + CE \cdot (CE + 2 \cdot EH) = EH^2 + CE \cdot CF$, что приводит к

$$CH^2 = EH^2 + CE \cdot CF. \tag{II}$$

В треугольнике BDF получаем $\angle BFC = \angle ABC - \angle FCB$. Поскольку точка C является серединой дуги AB, получаем $\angle ABC = \angle CAB$, а поскольку четырехугольник $ACEB$ является циклическим, получаем $\angle BFC = \angle ABC - \angle FCB = \angle CAB - \angle FCB = (180° - \angle BEC) - \angle ECB = \angle CBE$.

Это означает, что линия CB является касательной к описанной окружности треугольника BEF, так как оба угла равны половине дуги BE. Исходя из касательной BC, имеем $CB^2 = CE \cdot CF$. Подставляя это в уравнение (II), получаем $CH^2 = EH^2 + CB^2$. Совместив это с уравнением (I), получаем $BG = EH$, что и требовалось доказать.

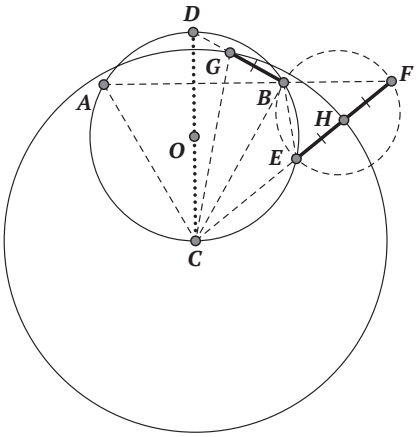


Рисунок 116-Р

Пример 117. Связанные равносторонние треугольники, вписанные в концентрические окружности

На рис. 117-P продлим отрезок $B'O$ таким образом, чтобы он пересек отрезок $A'B'$ в точке E, а затем начертим отрезки OC', OP', PE и PO. Поскольку треугольник $A'B'C'$ равносторонний, прямая $B'OE$ является биссектрисой угла $A'EC'$. В треугольнике $PA'C'$ получаем $A'P^2 + C'P^2 = 2 \cdot PE^2 + 2 \cdot C'E^2$ (напомним, что это было доказано в примере 115 с помощью рис. 115b-P). Прибавив $B'P^2$ к обеим частям этого уравнения, получаем $A'P^2 + B'P^2 + C'P^2 = 2 \cdot PE^2 + 2 \cdot C'E^2 + B'P^2$. Поскольку O является общим центроидом треугольников ABC и $A'B'C'$, получается, что $B'E$ является медианой треугольника $A'B'C'$, так что $OE = \frac{1}{2} \cdot OB$.

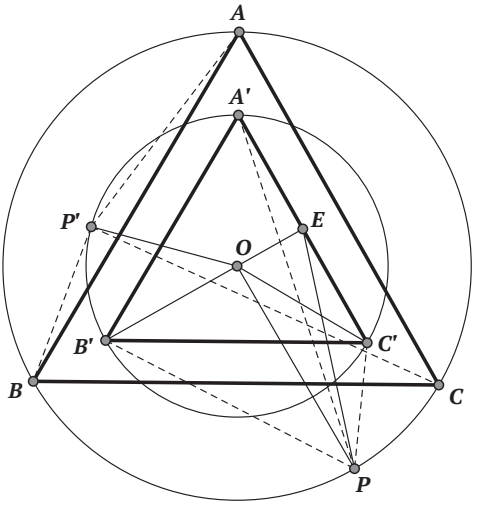


Рисунок 117-P

Теперь рассмотрим рис. 117a-P, где применение закона косинусов к треугольнику PEO дает $PE^2 = PO^2 + OE^2 - 2 \cdot PO \cdot OE \cdot \cos\angle POE$. Применение закона косинусов к треугольнику POB' дает $PB'^2 = PO^2 + OB'^2 - 2 \cdot PO \cdot OB' \cdot \cos(180° - \angle POE)$. Поскольку $OB' = 2 \cdot OE$, это уравнение можно также записать в виде $B'P^2 = PO^2 + 4 \cdot OE^2 + 4 \cdot PO \cdot OE \cdot \cos\angle POE$. Сложив это второе уравнение с удвоенным первым, получаем $B'P^2 + 2 \cdot PE^2 = 3 \cdot PO^2 + 6 \cdot OE^2$.

Теперь можно собрать воедино всю информацию, полученную на данный момент. Мы знаем, что $A'P^2 + B'P^2 + C'P^2 = 2 \cdot PE^2 + 2 \cdot C'E^2 + B'P^2 = (B'P^2 + 2 \cdot PE^2)$, и подстановка $B'P^2 + 2 \cdot PE^2 = 3 \cdot PO^2 + 6 \cdot OE^2$ дает нам

$$\begin{aligned} A'P^2 + B'P^2 + C'P^2 &= 2 \cdot C'E^2 + (B'P^2 + 2 \cdot PE^2) = 2 \cdot C'E^2 + 3 \cdot PO^2 + 6 \cdot OE^2 \\ &= 2 \cdot (C'E^2 + OE^2) + 3 \cdot PO^2 + 4 \cdot OE^2 \\ &= 2 \cdot C'O^2 + 3 \cdot PO^2 + B'O^2 \\ &= 2 \cdot P'O^2 + 3 \cdot PO^2 + P'O^2 \\ &= 3 \cdot (PO^2 + P'O^2), \end{aligned}$$

или $A'P^2 + B'P^2 + C'P^2 = 3 \cdot (PO^2 + P'O^2)$.

Точно так же мы можем получить $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3 \cdot (PO^2 + OP'^2)$, что доказывает равенство сумм квадратов.

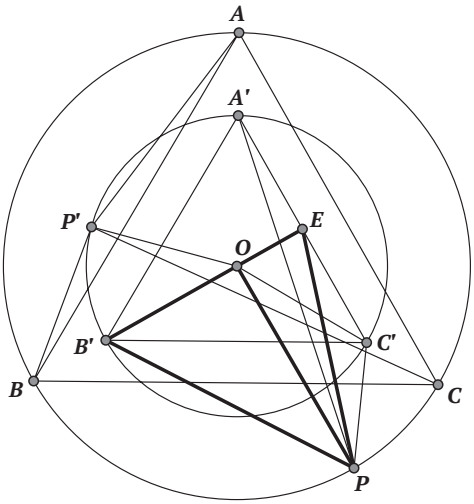


Рисунок 117a-P

Пример 118. Пересекающиеся окружности удивительным образом формируют равные отрезки

На рис. 118-P сначала начертим диаметры *CBR* и *DBS* окружности с центром *B*. Поскольку углы $\angle CER$ и $\angle DFS$ вписаны в полуокружность, оба они являются прямыми углами. Кроме того, в круге *A* равенство углов, описываемых дугой *BP*, дает нам $\angle RCE = \angle BCP = \angle BDP = \angle SDF$. Это дает нам возможность доказать, что $\Delta ECR \cong \Delta FDS$, и, следовательно, $CE = DF$.

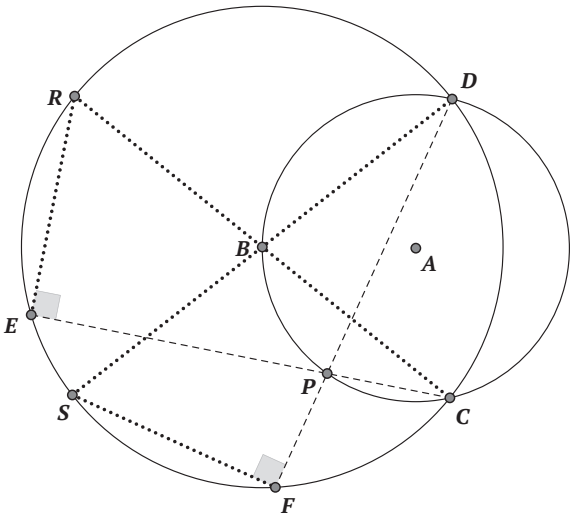


Рисунок 118-P

Пример 119. Две пересекающиеся окружности образуют неожиданное соотношение отрезков

На рис. 119-P начертим диаметр COD, а также линии AO, BO и AD. Поскольку AQB является диаметром окружности Q, треугольник AOB является прямоугольным. Точно так же, поскольку COD является диаметром окружности O, треугольник CAD также является прямоугольным. Так как радиусы $OA = OC$ равны, треугольник OCA является равнобедренным, и имеет место $\angle OAC = \angle ACO$. Кроме того, в треугольнике AOB выполняется равенство $\angle ABO = 90° - \angle OAB = 90° - \angle OAC$, и аналогично в треугольнике CAD выполняется равенство $\angle CDA = 90° - \angle ACD = 90° - \angle ACO$. Следовательно, $\angle ABO = \angle CDA$, из чего следует, что $\Delta CAD \sim \Delta AOB$. Отсюда получаем $\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{AC}$, и поскольку $DC = 2OC$, получаем $\frac{AB}{2OC} = \frac{OC}{AC}$, или $2OC^2 = AB \cdot AC$.

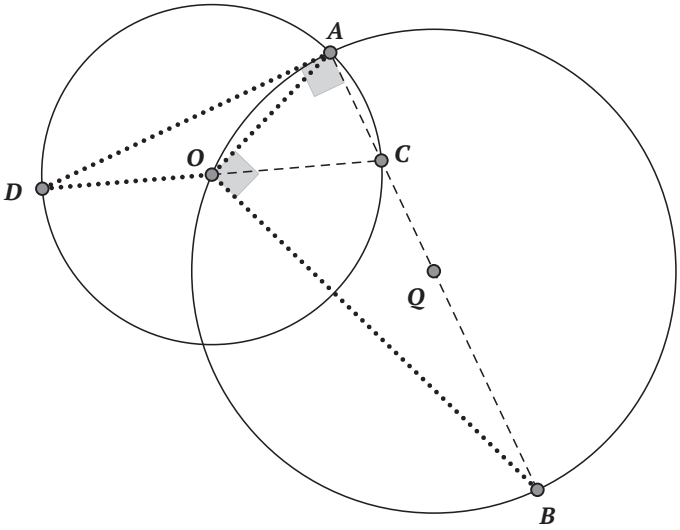


Рисунок 119-P

Пример 120. Четырехугольник с двумя пересекающимися окружностями образует еще одну окружность

Поскольку точки A, B, E и F лежат на описанной окружности треугольника ABC, как показано на рис. 120-P, выходит, что $\angle FEB = 180° - \angle BAF$. В треугольнике BAF получаем $180° - \angle\text{BAF} = \angle FBA + \angle AFB$, а также $\angle AFB = \angle ACB$, поскольку оба угла вписаны в дугу AB. Кроме того, так как точки A, P, Q и C лежат на одной окружности, имеет место $\angle ACB = \angle ACQ = \angle BPQ = \angle BPR$, поскольку углы $\angle ACQ$ и $\angle BPQ$ являются дополняющими к $\angle QPA$. Таким образом, учитывая, что $\angle FBA = \angle RBP$, теперь получаем $\angle FEB = \angle FBA + \angle ACB = \angle RBP + \angle BPR = \angle FRP$. Обращаем внимание, что $\angle FRP$ является внешним углом треугольника BPR. Поскольку $\angle FEB = \angle FES$, это можно записать как $\angle FES = \angle FRP$, из чего следует, что точки E, F, R и S являются конциклическими.

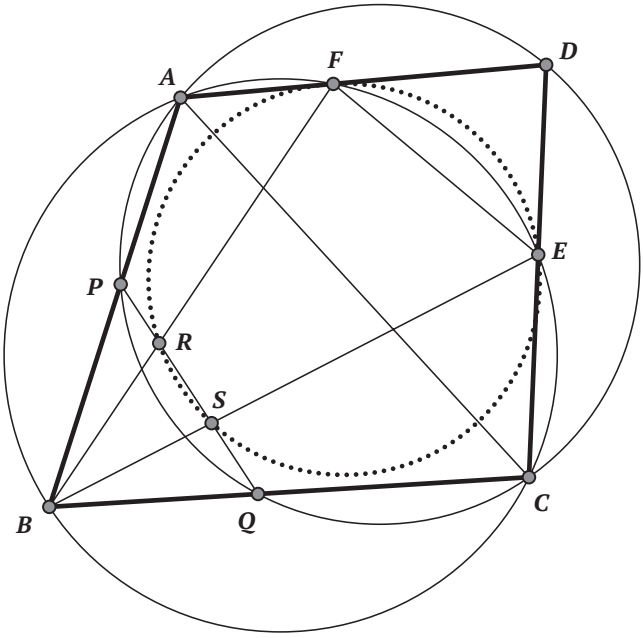


Рисунок 120-P

Пример 121. Прерванная хорда

Для начала продлим BA до точки D таким образом, чтобы $AD = AC$, как показано на рис. 121-P. В результате получается равнобедренный треугольник ACD, в котором $\angle DCA = \angle ADC$. Угол $\angle BAC$ является внешним углом треугольника ACD, и, следовательно, $\angle BAC = \angle DCA + \angle ADC = 2\angle ADC$. В окружности O точка M является верхней точкой пересечения с биссектрисой BC. Обращаем внимание, что $\angle BMC$ и $\angle BAC$ измеряются половиной дуги BC, а это значит, что $\angle BMC = \angle BAC = 2\angle ADC = 2\angle BDC$. Теперь рассмотрим окружность с центром M, проходящую через точки B и C. Поскольку $\angle BMC = 2\angle BDC$, точка D лежит на этой окружности, а AD является хордой. Так как перпендикуляр из центра окружности к хорде делит хорду пополам, получаем $BE = ED = AE + AD = AE + AC$, и, следовательно, $BE = AE + AC$.

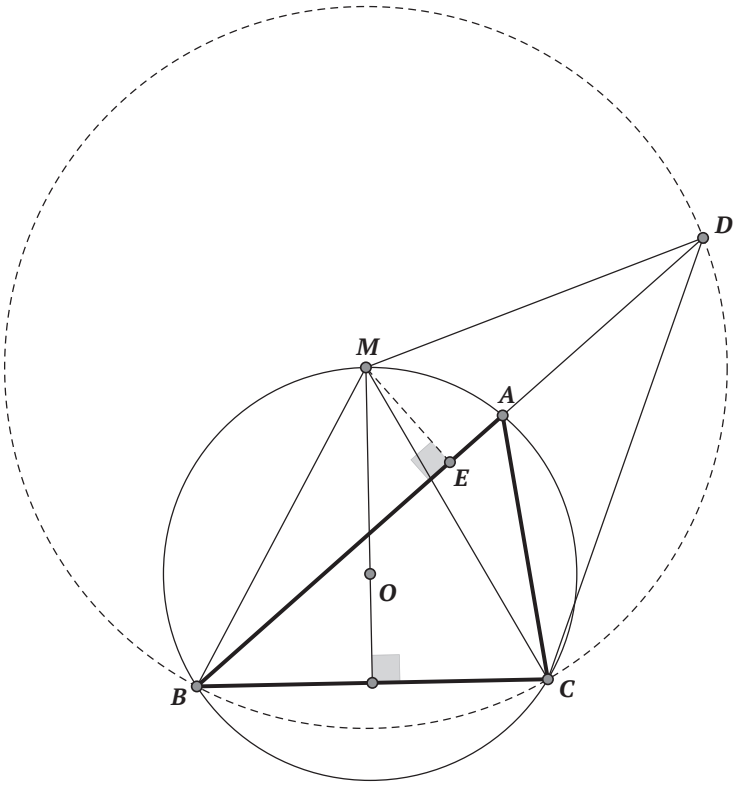


Рисунок 121-P

Пример 122. Касательные образуют равные отрезки

На рис. 122-P сначала начертим отрезки AB и PD. Наша цель в данном случае заключается в том, чтобы доказать, что $\angle APD = \angle PDA$, а это означает, что треугольник ADP является равнобедренным, при этом $AD = AP$.

Поскольку AC является касательной к окружности Q, имеет место $\angle APD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABD} = \angle CAD$, а так как AD является касательной к окружности O, имеет место $\angle BCA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \angle BAD$. Теперь примем во внимание, что $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \angle CAB + \angle BCA$, и поскольку в треугольнике ACB имеет место равенство $\angle CAB + \angle BCA = \angle PBA$, а на окружности Q выполняется равенство $\angle PBA = \angle PDA$, то можно сделать следующее заключение: $\angle APD = \angle CAD = \angle CAB + \angle BCA = \angle PBA = \angle PDA$. Получается, что $\angle APD = \angle PDA$, и, следовательно, $AD = AP$.

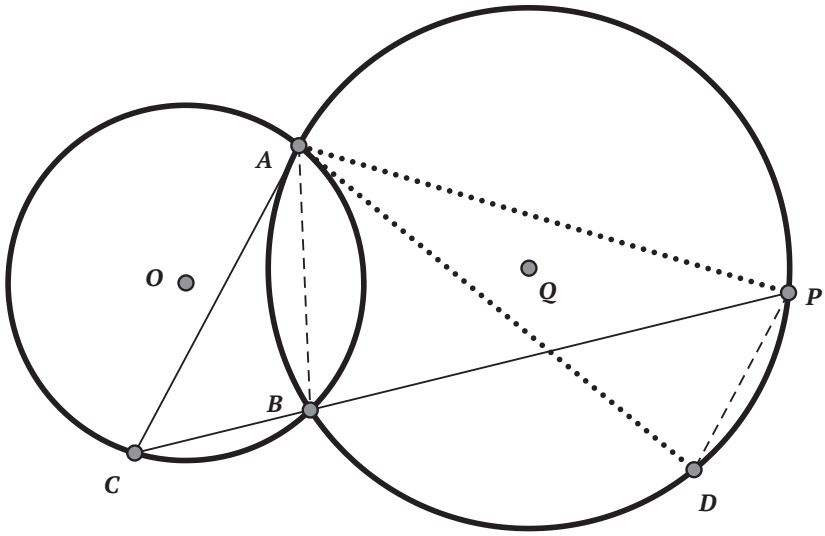


Рисунок 122-P

Пример 123. Четвертый угол прямоугольника находится на особой окружности

На рис. 123-Р начертим диаметры AX и AY окружностей O и Q соответственно, а также отрезок FY. Поскольку точка F лежит на окружности Q с диаметром AY, получаем $\angle YFA = 90°$, а так как $\angle AFE = 90°$ в прямоугольнике $ADEF$, выходит, что точки E, F и Y лежат на одной прямой. Точно так же, поскольку точка D лежит на окружности O с диаметром AX, получаем $\angle XDA = 90°$, а поскольку $\angle EDA = 90°$ в прямоугольнике $ADEF$, можно видеть, что точки D, X и E также лежат на одной прямой. Таким образом, мы доказали, что $\angle YEX = \angle BED$. Поскольку $\angle BED = 90°$ в прямоугольнике $ADEF$, получается, что $\angle YEX = 90°$, и точка E обязательно лежит на окружности с диаметром XY.

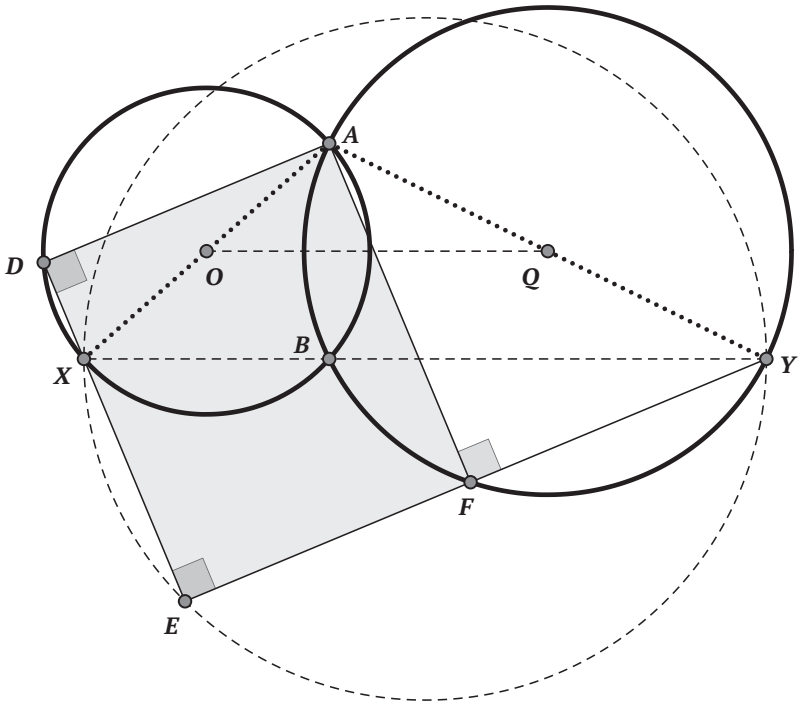


Рисунок 123-Р

Пример 124. Построение равных хорд на двух окружностях

На рис. 124-P начертим радиусы OA, OC, QB, QD, MA и MB, а также отрезки QA и OB. В окружности M отрезок $AQ \perp AO$, и AQ является касательной к окружности O в точке A. Кроме того, $\angle AOC = 2 \cdot \angle QAB = \angle QMB$. В результате получаем подобные равнобедренные треугольники $\Delta OAC \sim \Delta MQB$, и $\frac{AC}{AO} = \frac{BQ}{BM}$, или $AC = \frac{AO \cdot BQ}{BM}$. Точно так же можно доказать, что $\Delta QDB \sim \Delta MAO$, и это дает $\frac{BD}{BQ} = \frac{AO}{AM}$, или $BD = \frac{AO \cdot BQ}{BM}$. Поскольку $AM = BM = \frac{1}{2}OQ$, получается, что $AC = BD$.

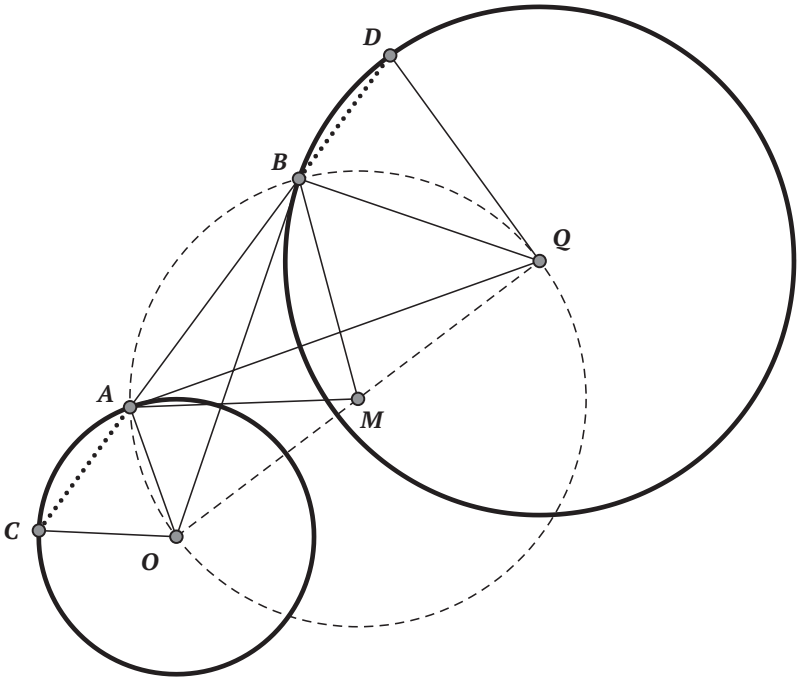


Рисунок 124-P

Пример 125. Необычное построение биссектрисы угла

Для начала проведем линии PA, PB, PD и PE, как показано на рис. 125-Р. Поскольку четырехугольник $APDC$ является циклическим, имеет место равенство $\angle PAE = \angle PAC = \angle PDB$, а так как четырехугольник $BCEP$ также является циклическим, имеет место равенство $\angle AEP = \angle CBP = \angle DBP$. Из условий задачи выходит, что $AE = BD$, и, следовательно, $\Delta PEA \cong \Delta PBD$. Отсюда следует, что $EP = PB$, и, принимая во внимание углы вписанной окружности четырехугольника $PBCE$, получаем $\angle ACP = \angle ECP = \angle PCB$. Таким образом, CP является биссектрисой $\angle ACB$.

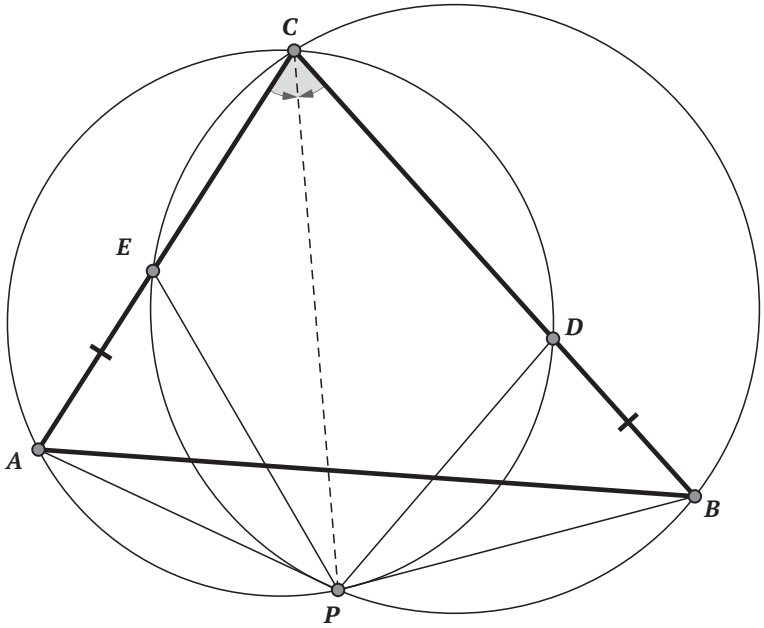


Рисунок 125-Р

Пример 126. Квадрат из двух окружностей с неожиданной площадью

На рис. 126-P треугольники MBC и OAC являются равнобедренными, поскольку $MB = MC$ являются радиусами окружности Q, а $OA = OC$ являются радиусами окружности O. В треугольнике MBC имеет место $\angle BMC = 180° - 2\angle CBM$, а в окружности M имеет место $\angle BAC = ½\ \angle BMC = 90° - \angle CBM$. Отсюда получаем: $\angle CAO = \angle BAO - \angle BAC = 90° - (90° - \angle CBM) = \angle CBM$, и, следовательно, $\Delta MBC \sim \Delta OAC$. Таким образом, получаем $\frac{OA}{AC} = \frac{MB}{BC}$, или $\frac{OA}{MB} = \frac{AC}{BC}$. Аналогичным образом можно также получить $\Delta MCA \sim \Delta QCB$, и, следовательно, $\frac{MA}{AC} = \frac{QB}{BC}$, или $\frac{QB}{MA} = \frac{BC}{AC}$. Перемножаем эти два уравнения и получаем $\frac{OA}{MB} \cdot \frac{QB}{MA} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = 1$. Можно записать $\frac{OA}{MB} = \frac{QB}{MA}$ как $\frac{r}{MC} \cdot \frac{s}{MC} = \frac{r \cdot s}{MC^2} = 1$, так что $MC^2 = r \cdot s$. Поскольку MC^2 – это площадь квадрата со стороной CM, выходит, что его площадь равна произведению $r \cdot s$.

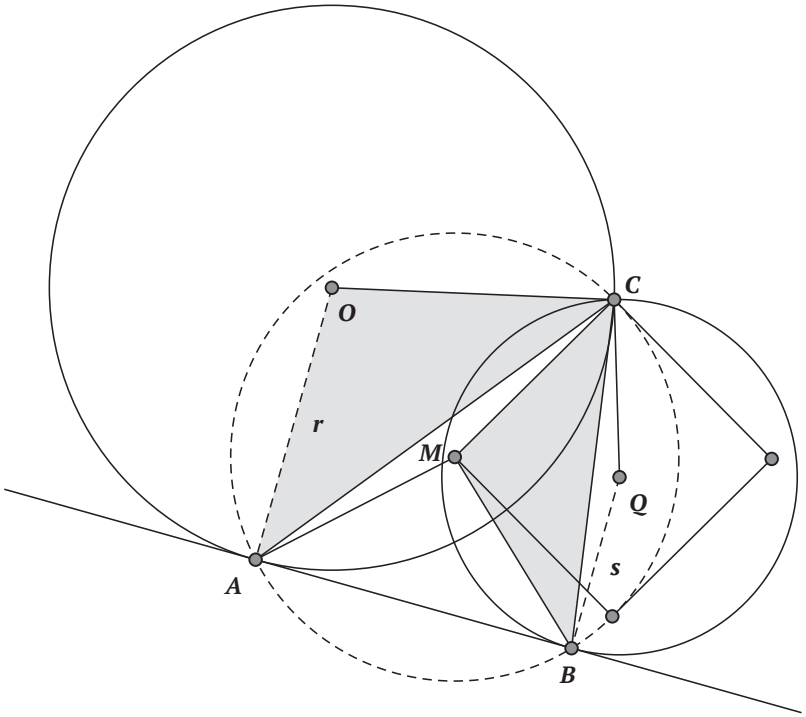


Рисунок 126-P

Пример 127. Неожиданный центр описанной окружности

На рис. 127-Р рассмотрим четырехугольники *ABPD*, *ABRD* и *ABQD*. Окружность с центром *B* и радиусом *AD* и окружность с центром *D* и радиусом *AB* пересекаются в точке *P*, так что *AD* = *BP* и *AB* = *DP*, а четырехугольник *ABPD* является параллелограммом. Поскольку точка *R* лежит на стороне *BP* параллелограмма *ABRD*, а четырехугольник *ABRD* является циклическим, получаем, что *ABRD* является равнобедренной трапецией с *BR* || *AD* и *AB* = *DR*. Отсюда следует, что *DP* = *AB* = *DR*, и поэтому треугольник *DRP* является равнобедренным с основанием *RP*. Поскольку *AC* является диаметром окружности *O*, а точка *D* лежит на этой окружности, имеет место *DC* ⊥ *AD*. Так как *BP* || *AD*, то также имеет место *DC* ⊥ *BP*, и, следовательно, *DC* ⊥ *RP*. Получается, что *DC* является высотой в равнобедренном треугольнике *DRP* и, следовательно, биссектрисой *RP*. Точно так же, поскольку точка *Q* лежит на стороне *PD* параллелограмма *ABPD*, а четырехугольник *ABQD* является циклическим, получается, что *ABQD* также является равнобедренной трапецией с *DQ* || *AB* и *AD* = *BQ*. Отсюда получаем *BQ* = *AD* = *BP*, и выходит, что треугольник *BPQ* является равнобедренным с основанием *PQ*. Поскольку *AC* – это диаметр окружности *O*, а точка *B* лежит на этой окружности, тогда *BC* ⊥ *AB*. Так как *PD* || *AB*, то также имеет место *BC* ⊥ *PD*, а значит, *BC* ⊥ *PQ*. Отрезок *BC* является высотой равнобедренного треугольника *BPQ*, поэтому он является биссектрисой *PQ*. Поскольку *DC* является биссектрисой *RP*, а *BC* является биссектрисой *PQ*, их точка пересечения *C* является центром окружности треугольника *PQR*, откуда следует, что *CP* = *CQ* = *CR*.

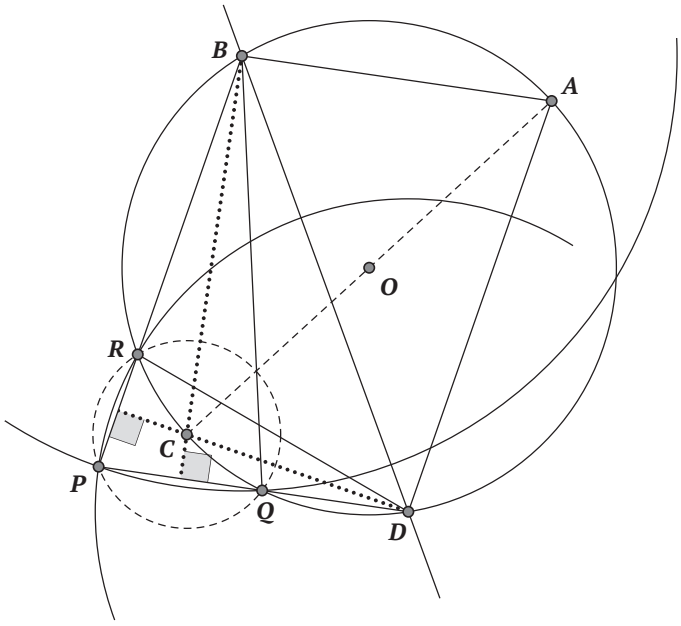


Рисунок 127-Р

Пример 128. Хорды постоянной длины

Для начала на рис. 128-Р начертим отрезки AB, AY и BX. Еще добавим альтернативную точку P' вместе с соответствующими точками X' и Y', а также линии, соединяющие их с точками A и B. Примем во внимание, что $\angle PYA = \angle BYA = \angle BAX = \angle BXP$ в окружности O и что $\angle APY = \angle APB = \angle XPB$, что дает нам $\Delta PAY \sim \Delta PXB$. Отсюда получаем $\frac{PY}{PA} = \frac{PX}{PB} = a$, или $PY = a \cdot PA$, и $PY = a \cdot PB$, из чего следует, что $\Delta PAB \sim \Delta PXY$ и $XY = a \cdot AB$.

Чтобы доказать, что длина отрезка XY не зависит от выбора точки P на окружности Q, мы докажем, что $X'Y' = a \cdot AB$ при том же значении a. Для этого рассмотрим треугольники ΔBPX и $\Delta BP'X'$. Поскольку $\angle BX'P' = \angle BX'A = \angle BXA = \angle BXP$ в окружности O и $\angle X'P'B = \angle AP'B = \angle APB = \angle XPB$ в окружности Q, получается, что $\Delta BPX \sim \Delta BP'X'$. Отсюда следует, что $\frac{P'X'}{P'B} = \frac{PX}{PB} = a$, и, следовательно, $P'X' = a \cdot P'B$. Точно так же для подобных треугольников PAB и $PX'Y'$ получаем $P'Y' = a \cdot P'A$, а из этого следует, что $X'Y' = a \cdot AB$. Из этого следует, что $XY = a \cdot AB = X'Y'$, так что длина отрезка XY имеет постоянное значение, не зависящее от положения точки P на окружности Q.

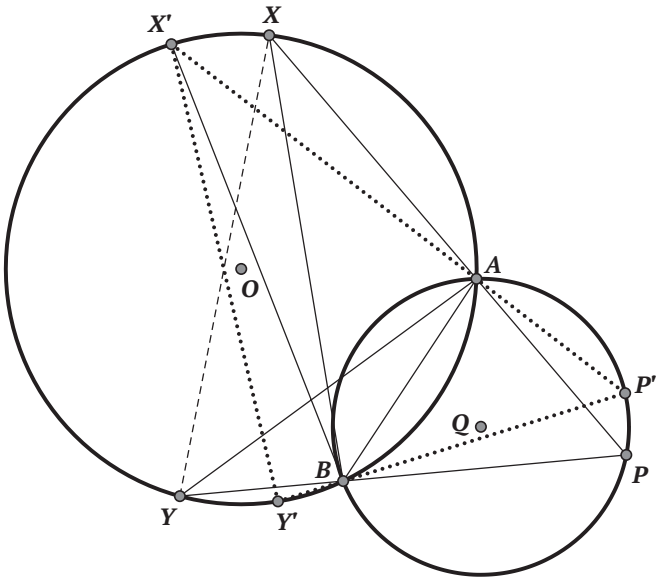


Рисунок 128-Р

Пример 129. Неожиданное равенство двух особенных хорд

На рис. 129-Р для начала начертим отрезки OQ, OB, AQ, BQ и CQ. Поскольку общая хорда AB перпендикулярна отрезку OQ, соединяющему центры окружностей, можно заключить, что четырехугольник $OBQA$ представляет собой дельтоид (или «воздушный змей»), а треугольник QAB является равнобедренным. В окружности O получаем $\angle AQB = 180° - \frac{1}{2}\angle BOA = 180° - \frac{1}{2}\angle QOA$. Кроме того, имеет место $\angle BAC = \angle OAC - \angle OAB = 90° - \angle OAB = \angle QOA$. Поскольку треугольник QAB равнобедренный, имеет место $\angle BAQ = \frac{1}{2}(180° - \angle AQB) = \frac{1}{2}\angle QOA$, и тогда получаем $\angle QAC = \angle BAC - \angle BAQ = \angle QOA - \frac{1}{2}\angle QOA = \frac{1}{2}\angle QOA$. Так как треугольник QCA также равнобедренный, то оба треугольника QAB и QCA являются равнобедренными с общей стороной AQ и $\angle BAQ = \angle QAC = \frac{1}{2}\angle QOA$. Следовательно, $\Delta QAB \cong \Delta QCA$, так что $AB = AC$.

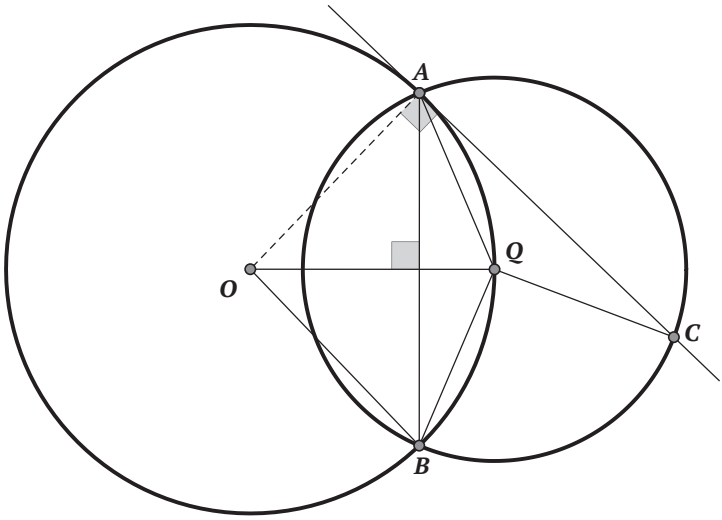


Рисунок 129-Р

Пример 130. Удивительная общая точка трех окружностей

На рис. 130-Р построим треугольник OPQ и обратим внимание на то, что точки A, B и C лежат соответственно на его сторонах PQ, QO и OP, поскольку каждая пара окружностей симметрична относительно прямой, соединяющей их центры. Далее рассмотрим общую касательную YZ, проходящую через точку A к окружностям P и Q, где Y и Z обозначают соответствующие точки касания. Поскольку радиусы PY и QZ окружностей P и Q перпендикулярны этой общей касательной, треугольники AYP и AZQ являются прямоугольными. Имея равные вертикальные углы в точке A, треугольники AYP и AZQ подобны. Пусть $y = PY$ и $z = QZ$, что соответствует радиусам окружностей P и Q, тогда получаем $\frac{AP}{AQ} = \frac{PY}{QZ} = \frac{y}{z}$. Пусть x обозначает радиус окружности O. Аналогично для других пар окружностей получаем $\frac{BQ}{BO} = \frac{z}{x}$ и $\frac{CO}{CP} = \frac{x}{y}$. Перемножив эти три равенства, получаем $\frac{AP}{AQ} \cdot \frac{BQ}{BO} \cdot \frac{CO}{CP} = \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$. Из теоремы Чевы (см. «Инструментарий») можно сделать вывод, что отрезки OA, PB и QC пересекаются в точке E.

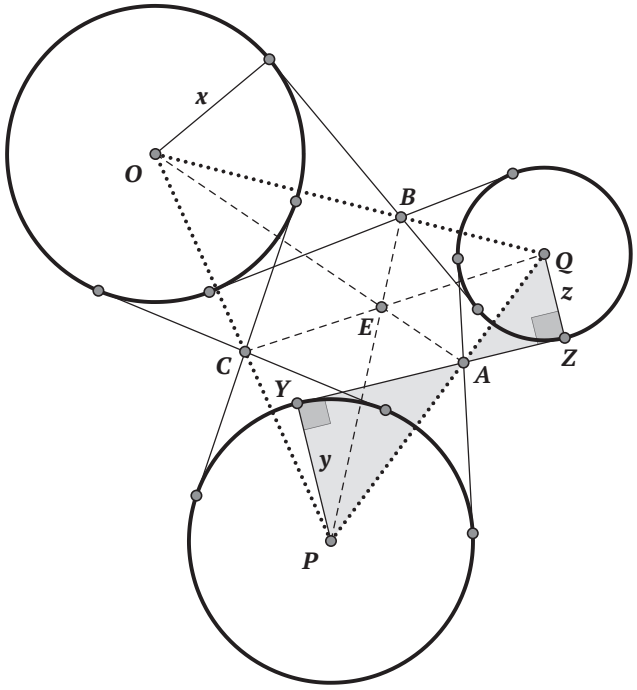


Рисунок 130-Р

Пример 131. Перпендикулярные окружности образуют диаметр

На рис. 131-P для начала добавим отрезки AQ, BQ, OQ, AB и OB. В окружности O, так как оба угла измеряются дугой BA, имеет место $\angle BOA = 2\angle BXA$. Поскольку линия OQ, соединяющая центры окружностей, делит углы $\angle BOA$ и $\angle AQB$ пополам, получаем $\angle QOA = \angle BXA$. Так как треугольник ΔAQO имеет прямой угол в точке A, получаем $\angle AQO = 90° - \angle QOA = 90° - \angle BXA$, и, следовательно, $\angle AOB = 2\angle AQO = 2(90° - \angle BXA)$. В окружности Q имеем $\angle BPA = 180° - \frac{1}{2}\angle AOB = 180° - (90° - \angle BXA) = 90° + \angle BXA$ и с помощью треугольника BPX получаем $\angle PBX = \angle BPA - \angle BXP = (90° + \angle BXA) - \angle BXA = 90°$. Поскольку теперь получилось $\angle YBX = \angle PBX = 90°$, выходит, что отрезок XY является диаметром окружности O.

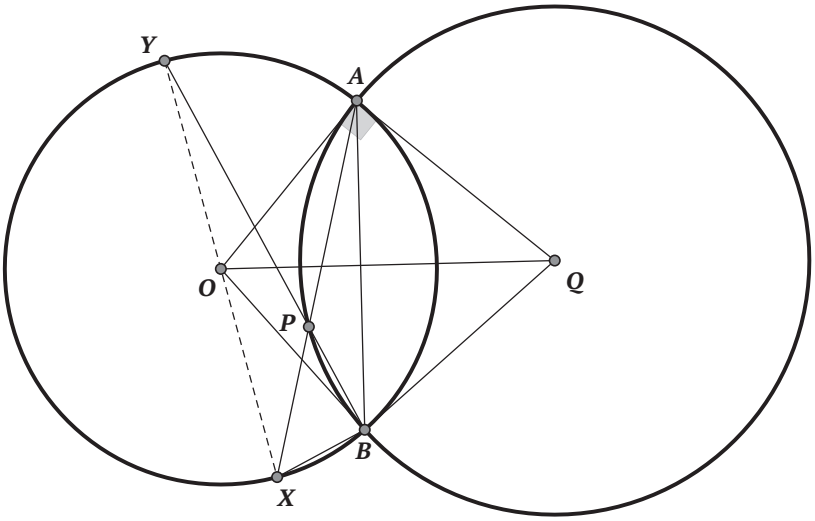


Рисунок 131-P

3

ИНСТРУМЕНТАРИЙ

Введение: набор геометрических инструментов

В интересах предоставления читателям всех необходимых инструментов, которые могут понадобиться для доказательств, представленных в этой книге, и осознавая тот факт, что иные читатели, возможно, забыли некоторые основы, представленные в учебной программе по геометрии для средних школ, мы предоставляем этот «Инструментарий». Он включает основные понятия, которые помогут вам лучше оценить описанные в первом разделе этой книги удивительные взаимоотношения, которые, как мы надеемся, доставят вам удовольствие.

В первой половине мы здесь рассмотрим некоторые факты и концепции, с которыми вы должны быть знакомы из школьного опыта. Эти результаты представлены без доказательств, поскольку читатель должен их просто вспомнить. Естественно, любой учебник по геометрии для средней школы поможет лучше узнать эти основные понятия.

Далее мы приводим ряд несколько более сложных результатов из базовой тригонометрии и несколько расширенной евклидовой геометрии, которые могут быть знакомы некоторым читателям, а другим – в меньшей степени, но тем не менее легко понятны. Они представлены с доказательствами, предполагающими знание только основных понятий из школьного курса. Для краткости доказательства приведены для самых общих случаев, в то время как для специальных конфигураций могут потребоваться некоторые дополнительные шаги. Заинтересованные читатели, возможно, захотят уточнить некоторые из этих аспектов.

Свойства, описанные во второй части «Инструментария», сами по себе являются замечательными примерами и вполне могли бы войти в основной раздел этой книги. Их называют «инструментами», поскольку они могут быть полезны при проведении более сложных геометрических доказательств. Разумеется, это еще больше подчеркивает особую чарующую красоту евклидовой геометрии!

A. Инструменты, с которыми вы, вероятно, знакомы из школьного курса геометрии

A1. Равенство треугольников

Равенство треугольников можно доказать, показав, что равны следующие соответствующие части:

- две стороны и их внутренний угол (правило «сторона–угол–сторона», или side – angle – side, SAS);
- два угла и их общая сторона (правило «угол–сторона–угол», или angle – side – angle, ASA);
- два угла и противолежащая сторона (правило «угол–угол–сторона», или angle – angle – side, AAS);
- три стороны (правило «сторона–сторона–сторона», или side – side – side, SSS);
- для прямоугольных треугольников: гипотенуза и катет (hypotenuse – leg, HL).

A2. Подобие треугольников

Подобие треугольников можно доказать, продемонстрировав любое из следующих эквивалентных свойств:

- соответственные углы равны (правило AAA);
- соответствующие стороны пропорциональны;
- две пары соответственных сторон пропорциональны, а прилегающие к ним углы равны.

A3. Свойства прямоугольного треугольника (см. рис. A3)

Для описания следующих свойств мы используем прямоугольный треугольник ABC с прямым углом в точке C. Длины сторон, противоположных вершинам A, B и C, обозначаются a, b и c соответственно. Высота CD, перпендикулярная гипотенузе AB, имеет длину h и делит гипотенузу на отрезки AD и DB длиной p и q соответственно.

- Теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы: $a^2 + b^2 = c^2$.

- Квадрат высоты h, опущенной на гипотенузу, равен произведению длин отрезков гипотенузы p и q: $h^2 = p \cdot q$.
- Квадрат длины катета a равен произведению длины гипотенузы c на ближайший к нему отрезок гипотенузы q, то есть $a^2 = p \cdot q$, а также $b^2 = c \cdot p$.
- Медиана CM, проведенная до гипотенузы прямоугольного треугольника, равна половине длины гипотенузы c.

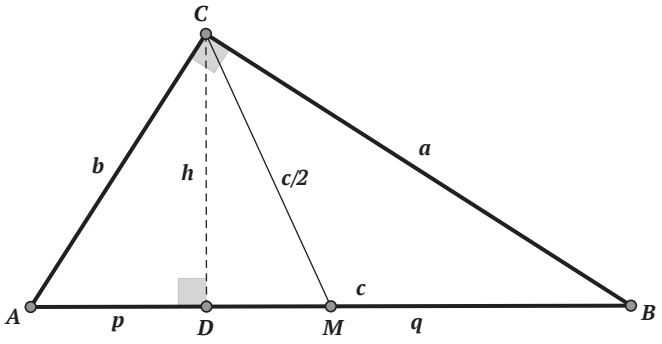


Рисунок А3

А4. Углы, связанные с окружностью (см. рис. А4)

Эти соотношения приведены в двух различных общепринятых обозначениях, среди множества используемых на международном уровне, в надежде, что одно из них будет достаточно знакомо любому читателю.

- Вписанный угол: $\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ (или $CAB = \frac{1}{2}COB$).
- Угол, образованный двумя секущими: $\angle F = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DE})$ (или $\angle CFB = \frac{1}{2} \cdot (\angle COB - \angle EOD)$).
- Угол, образованный двумя касательными: $\angle J = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{HAK} - \overset{\frown}{HCK}) = 180° - \overset{\frown}{HCK}$ (или $\angle HJK = \frac{1}{2}\,(180° - \angle KOH)$).
- Угол, образованный секущей и касательной: $\angle L = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CK} - \overset{\frown}{NK})$ (или $\angle KLC = \frac{1}{2}(\angle KOC - \angle NOK)$).
- Угол, образованный двумя хордами, пересекающимися внутри окружности: $\angle AME = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{BC})$ (или $\angle AME = \frac{1}{2}(\angle AOE - \angle COB)$).
- Угол, образованный хордой и касательной: $JKC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{KC} = \angle KAC$ (или $JKC = \frac{1}{2}\angle KOC = \angle KAC$).
- Противоположные углы в окружности (т. е. противоположные углы вписанного четырехугольника): $\angle BCK = 180° - \angle KAB$.

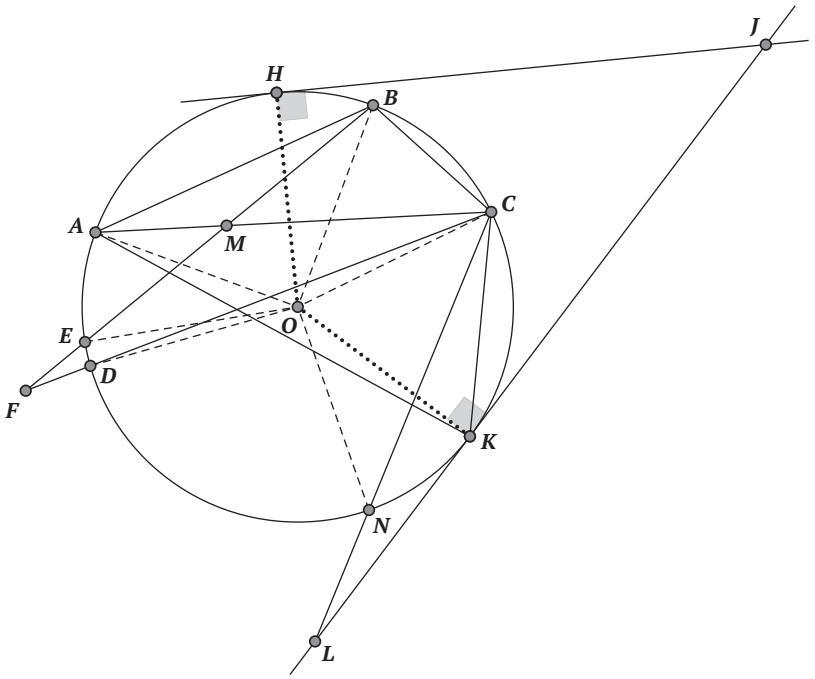


Рисунок А4

А5. Касательные, секущие и хорды: сегменты окружности и степень точки (см. рис. А5)

Если касательная проходит через ту же внешнюю точку, что и секущая, то она равна среднему пропорциональному между всей секущей и ее внешним отрезком: $\frac{e+f}{h} = \frac{h}{f}$.

Из одной и той же внешней точки для двух секущих: произведение длины одной секущей на длину ее внешнего отрезка равно произведению длины другой секущей на длину ее внешнего отрезка: $(e + f) \cdot f = (g + k) \cdot k$.

Для двух хорд, пересекающихся внутри окружности, произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды: $a \cdot b = c \cdot d$.

Произведения $(e + f) \cdot f = (g + k) \cdot k$ и $a \cdot b = c \cdot d$ называются *степенью* точки пересечения секущих и хорд соответственно.

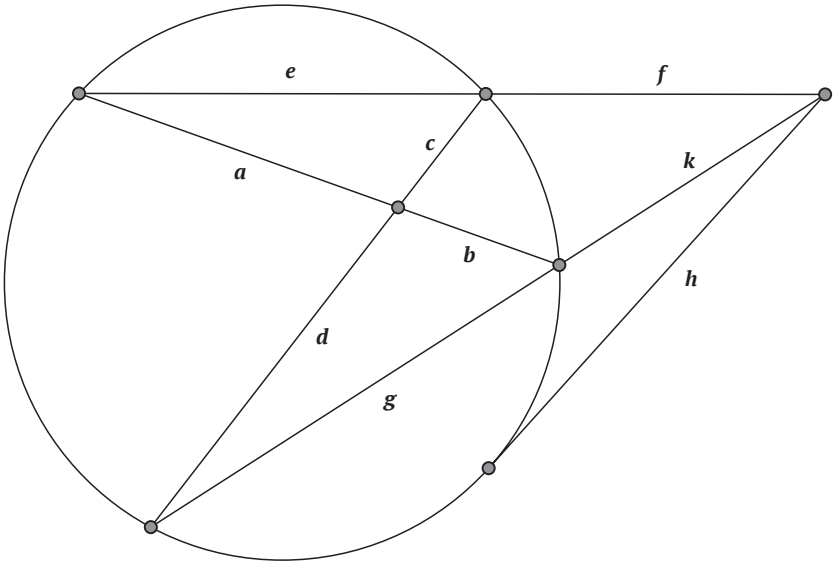


Рисунок А5

А6. Закон синусов и закон косинусов (см. рис. А6)

На рис. А6 в треугольнике ABC длины сторон, противолежащих вершинам A, B и C, обозначены a, b и c соответственно. Тогда $\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}$. Это соотношение известно как *закон синусов*.

Также $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\angle ACB$, и аналогично $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\angle BAC$ и $b^2 = c^2 + a^2 - 2c \cdot a \cdot \cos\angle CBA$. Эти соотношения известны как *закон косинусов*.

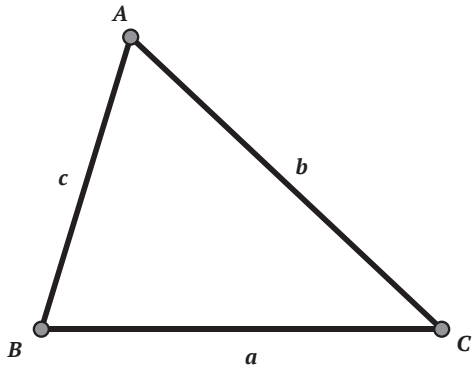


Рисунок А6

B. Полезные и увлекательные инструменты, но менее привычные

B1. Теорема Чевы

Одной из распространенных тем в геометрии треугольников являются линии, соединяющие вершины треугольника с точками на противоположных сторонах. Такие линии обычно называют *чевианами*, или *чевианскими линиями* – по имени итальянского математика Джованни Чевы (1647–1734), который опубликовал свою выдающуюся теорему в 1678 году. Эта теорема обладает огромной силой и приводит ко множеству удивительных геометрических следствий. Теорема Чевы гласит, что три чевианские линии сходятся в одной точке тогда и только тогда, когда произведение длин чередующихся отрезков, образованных точками соприкосновения со сторонами, является равным. Это показано на рис. B1a, где треугольник ABC имеет чевианские линии AD, BE и CF, пересекающие стороны BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. На рисунке показано, что они пересекаются в общей точке P. Согласно теореме Чевы, чевианы BC, CA и AB пересекаются в общей точке P тогда и только тогда, когда $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$, или, что эквивалентно, $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$.

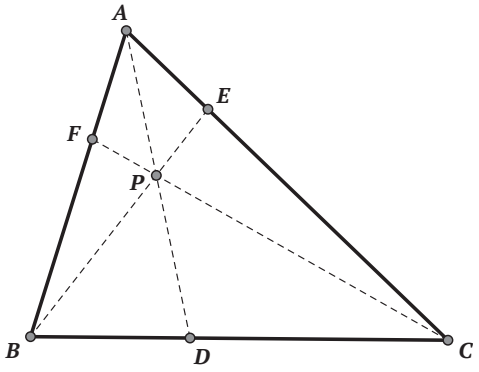


Рисунок B1a

Доказательство. Разделим это доказательство на этапы. Сначала предположим, что три чевианские линии BC, CA и AB пересекаются в одной точке P. Докажем, что $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$. Для этого рассмотрим рис. B1b. Здесь, исходя из конфигурации на рис. B1a, мы добавили линию, параллельную BC и проходящую через A. Эта линия пересекает продленную линию BE в точке R и продленную линию CF в точке S.

Параллельные линии позволяют нам установить несколько пар подобных треугольников и соотношения между длинами их сторон, вытекающие из этих подобий. Получаем следующее:

$\Delta AER - \Delta CEB$, следовательно, $\frac{AE}{CE} = \frac{AR}{BC}$, (I)

$\Delta BCF - \Delta ASF$, следовательно, $\frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AS}$, (II)

$\Delta CPD - \Delta SPA$, следовательно, $\frac{CD}{AS} = \frac{DP}{AP}$, (III)

$\Delta BDP - \Delta RAP$, следовательно, $\frac{BD}{AR} = \frac{DP}{AP}$. (IV)

Из формул (III) и (IV) получаем $\frac{CD}{AS} = \frac{BD}{AR}$, или $\frac{CD}{BD} = \frac{AS}{AR}$. (V)

Теперь умножим (I), (II) и (V), чтобы получить желаемый результат: $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = \frac{AR}{BC} \cdot \frac{BC}{AS} \cdot \frac{AS}{AR} = 1.$

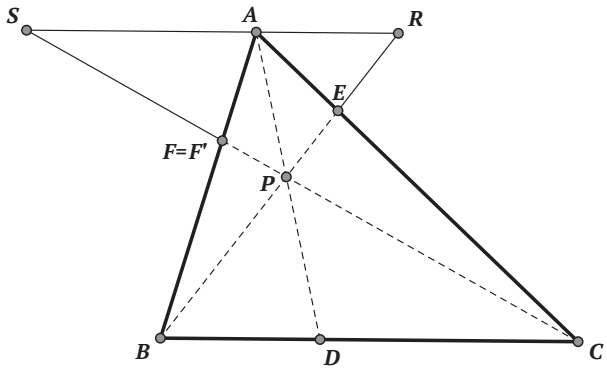


Рисунок B1b

Далее предположим, что точки *D*, *E* и *F* заданы на сторонах *BC*, *CA* и *AB*, соответственно, треугольника *ABC*, при этом $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$. Нам нужно доказать, что отрезки *AD*, *BE* и *CF* имеют общую точку *P*. Предположим, что *AD* и *BE* пересекаются в точке *P*. Начертим *CP* и назовем точку пересечения с *AB* точкой *F'*. Поскольку *AD*, *BE* и *CF* сходятся в одной точке, мы можем использовать ту часть теоремы Чевы, которую мы уже доказали, чтобы установить, что $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF'}{AF'} \cdot \frac{CD}{BD} = 1.$

Поскольку в нашей гипотезе утверждалось, что $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$, мы получаем $\frac{BF'}{AF'} = \frac{BF}{AF}$, и, следовательно, $F = F'$, что доказывает их совпадение.

B2. Расширенная теорема Чевы

Теорема Чевы верна и в том случае, когда чевианы пересекаются вне треугольника. На рис. B2a чевианы *AD*, *BE* и *CF* пересекают стороны *BC*, *CA* и *AB* в точках *D*, *E* и *F* соответственно. В данном случае конфигурация такова, что они пересекаются вне треугольника. В этом случае также выполняется условие, что *AD*, *BE* и *CF* пересекаются в одной точке *P* тогда и только тогда, когда $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = 1.$

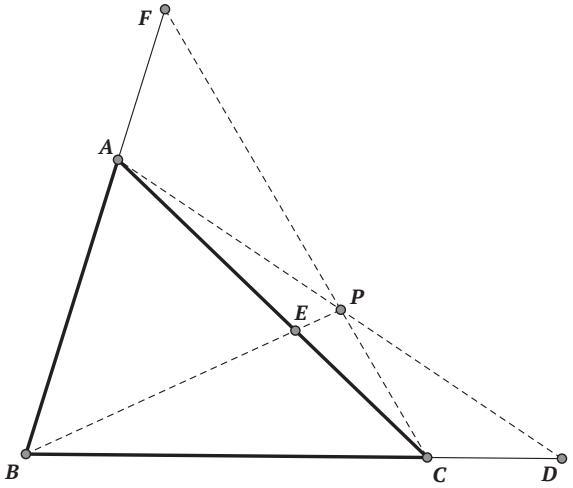


Рисунок B2a

Доказательство. В этом случае доказательство идентично доказательству для случая, когда точка *P* находится внутри треугольника *ABC*. На рис. B2b добавлены точки *R* и *S* так же, как на рис. B1b, и доказательство из раздела B1 остается неизменным и для данной конфигурации.

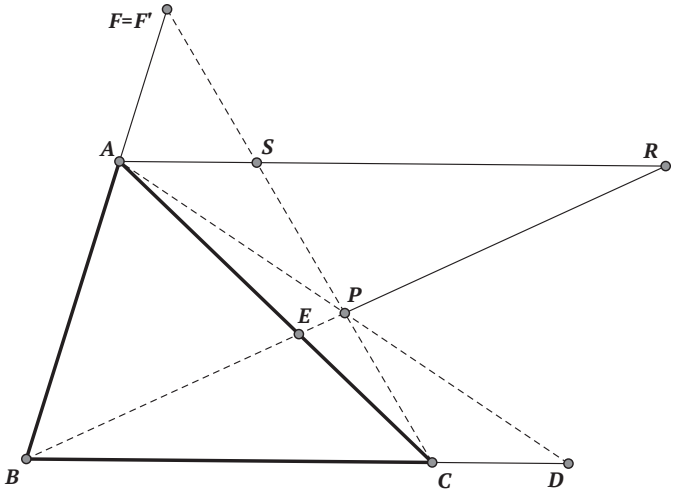


Рисунок B2b

B3. Теорема Птолемея

Произведение длин диагоналей циклического четырехугольника равно сумме произведений длин пар противоположных сторон. Иными словами, на рис. B3 выполняется соотношение $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$.

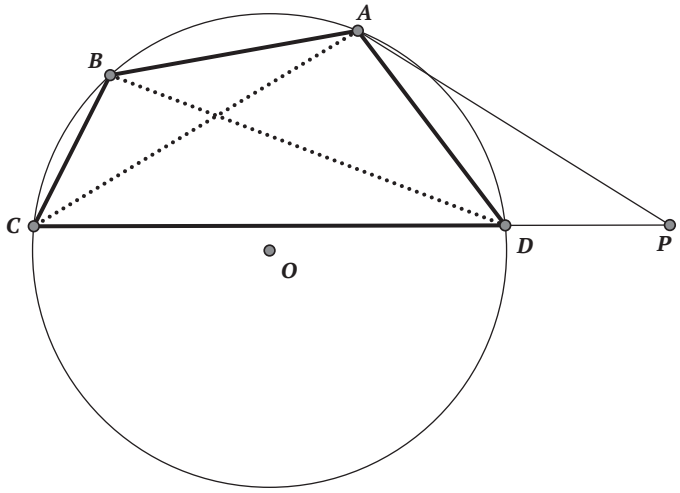


Рисунок B3

Доказательство. На рис. B3 четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность O. Проводим прямую через точку A, пересекающую продленную линию CD в точке P таким образом, что $\angle BAC = \angle DAP$. Поскольку четырехугольник $ABCD$ циклический, $\angle CBA$ дополняет $\angle ADC$. Так как $\angle PDA$ также дополняет $\angle ADC$, получаем $\angle CBA = \angle PDA$, а из-за способности определения точки P треугольники BCA и DPA являются подобными. Тогда получаем $\frac{AB}{DA} = \frac{BC}{DP}$, или $DP = \frac{BC \cdot DA}{AB}$. Кроме того, также получаем $\frac{AB}{DA} = \frac{AC}{AP}$. Поскольку $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle DAP + \angle CAD = \angle CAP$, треугольники ABD и ACP тоже являются подобными. В этом случае еще будет выполняться $\frac{BD}{CP} = \frac{AB}{AC}$, или $CP = \frac{AC \cdot BD}{AB}$. Исходя из того, что $CP = CD + DP$, подставляя значения CP и DP, получаем $\frac{AC \cdot BD}{AB} = CD + \frac{BC \cdot DA}{AB}$, или $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$.

B4. Изометрия: отражение и вращение

В ходе геометрического доказательства часто бывает полезно определить точечное преобразование, которое преобразует некую конфигурацию точек в равную (конгруэнтную) конфигурацию. Такие преобразования известны как изометрические. Определяющей характеристикой изометрии является тот факт, что она сопоставляет каждую точку на плоскости с другой уникальной точкой таким образом, что расстояние между любыми двумя точками равно расстоянию между их отображениями. Это означает, что любая геометрическая фигура с помощью изометрии всегда будет отображена на равную фигуру.

Двумя важными примерами изометрии являются *отражения* и *повороты*. Они проиллюстрированы на следующих рисунках. На рис. B4a показано отражение относительно линии n. Мы говорим, что точка P отражается от линии n в точку P', где P' – это точка, симметричная P относительно n. Из точки P прямая, перпендикулярная прямой n, проходит через точку P и пересекает прямую n в точке L. Точка P' затем определяется как точка на этой прямой, удовлетворяющая условию $LP = LP'$ и $P \neq P'$. (Обратите внимание, что если точка P лежит на прямой n, мы определяем $P = P'$.)

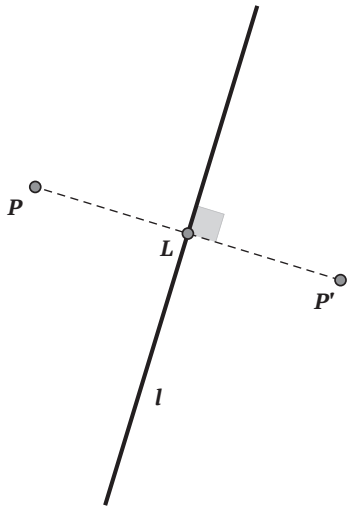


Рисунок B4a

На рис. B4b показан поворот, определяемый центром O и углом θ. Мы говорим, что точка P *поворачивается* вокруг центра O на угол θ, переходя в точку P'. Из точки P строится отрезок OP. Точка P' тогда определяется как точка, для которой $\angle POP' = \theta$ и $OP = OP'$. (Для полноты картины обратите внимание, что при повороте точка O отображается сама в себя, независимо от величины угла θ.)

Чтобы доказать, что эти преобразования действительно являются изометрическими, мы должны показать, что все отрезки преобразуются в отрезки длиной, равной исходным.

На рис. B4c показан отрезок PQ, отраженный от прямой n на отрезок $P'Q'$. Чтобы доказать, что $PQ = P'Q'$, проведем линии MP и MP', где M – это точка пересечения прямой n и QQ'. Поскольку $LP = LP'$ и $PP' \perp LM$ (а также n), треугольники LPM и LMP' равны, и мы имеем $MP = MP'$, а также $\angle LMP = \angle P'ML$. Это позволяет нам отметить, что $MQ = MQ'$, $\angle PMQ = \angle LMQ - \angle LMP = \angle Q'ML - \angle P'ML = \angle Q'MP'$ и $MP = MP'$, откуда треугольники MPQ и $MQ'P'$ также равны. Из этого мы видим, что выполняется равенство $PQ = P'Q'$.

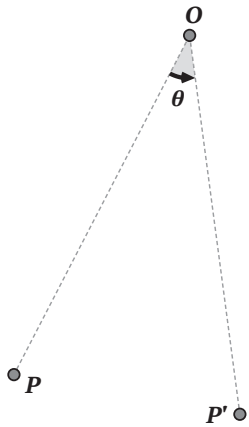


Рисунок B4b

Обратите внимание на предположение, что P и Q лежат по одну сторону от n. Если они лежат по разные стороны от прямой n, или одна из них либо обе лежат на прямой n, доказательство должно быть немного изменено, но это оставлено заинтересованному читателю в качестве простого упражнения.

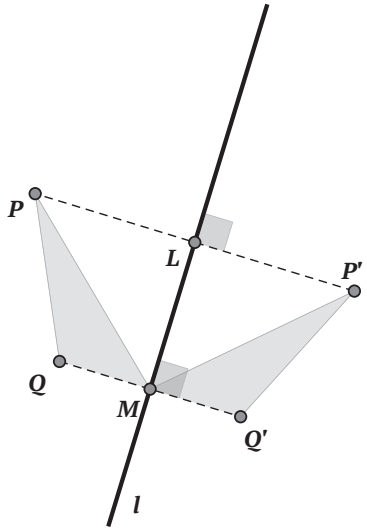


Рисунок B4c

Аналогично на рис. B4d показан отрезок PQ, повернутый вокруг центра O на величину угла θ с переходом в отрезок $P'Q'$. Чтобы доказать, что $PQ = P'Q'$, мы рассмотрим треугольники OPQ и $OP'Q'$. Так как $OP = OP'$, $OQ = OQ'$ и $\angle POQ = \angle POP' - \angle QOP' = \theta - \angle QOP' = \angle QOQ' - \angle QOP' = \angle P'OQ'$, мы видим, что треугольники OPQ и $OP'Q'$ равны. Из этого получаем, что $PQ = P'Q'$. Как и выше, следует отметить, что детали доказательства зависят от относительного расположения точек, но для любых других позиций они полностью аналогичны и оставлены на усмотрение заинтересованного читателя.

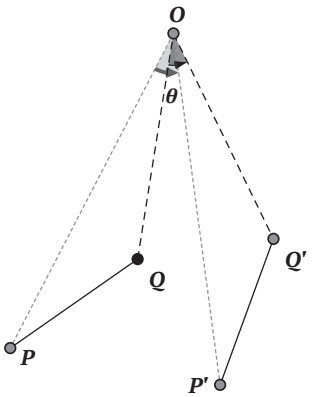


Рисунок B4d

B5. Гомотетия и подобие

Несколько более общим преобразованием, которое также часто бывает полезным, является преобразование, которое отображает конфигурацию точек на геометрически подобную конфигурацию. Такие преобразования известны как *преобразования подобия*. Определяющей характеристикой преобразования подобия является тот факт, что оно отображает каждую точку на плоскости в другую уникальную точку таким образом, что расстояние между любыми двумя точками, умноженное на постоянную величину, равно расстоянию между их отображениями. Это означает, что любая геометрическая фигура всегда будет отображена на подобную фигуру с помощью такого преобразования. Важным примером преобразования подобия является *гомотетия*. Это показано на рис. B5a.

Гомотетия – это отображение точек P на плоскости в соответствующие точки P', для которых существует фиксированная точка O (центр гомотетии) и фиксированный множитель a (то есть действительное число $a \neq 0$) такой, что $SP' = a \cdot SP$ для всех точек P.

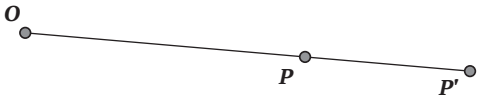


Рисунок B5a

Наиболее важным свойством гомотетии является то, что она отображает любой отрезок прямой PQ на отрезок прямой $P'Q'$ при условии $PQ \parallel P'Q'$ и $P'Q' = a \cdot PQ$. Чтобы доказать это, рассмотрим рис. B5b. Поскольку $OP' = a \cdot OP$ и $OQ' = a \cdot OQ$, а треугольники OPQ и $OP'Q'$ имеют общий угол в точке O, они подобны. Таким образом, имеем $a = \dfrac{OP'}{OP} = \dfrac{OQ'}{OQ} = \dfrac{P'Q'}{PQ}$, откуда следует, что $P'Q' = a \cdot PQ$. Кроме того, так как $\angle QPO = \angle Q'P'O$, также получаем $PQ \parallel P'Q'$.

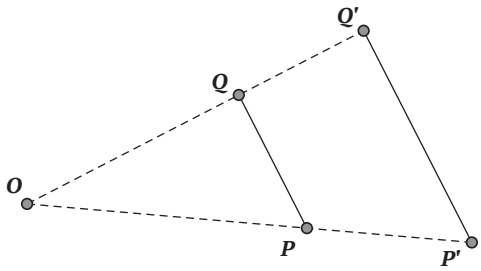


Рисунок B5b

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Арбелос 71, 72, 73, 172, 173, 174

Б

Биссектриса 38, 97, 104, 110, 123, 128, 136, 140, 148, 150, 157, 161, 166, 180, 188, 206, 218
Биссектриса арбелоса 71, 172

В

Вписанная окружность 48, 53, 54, 56, 60, 76, 99, 102, 136, 148, 152, 153, 155, 201
Высота 124, 126, 134, 138, 143, 174, 180, 227

Г

Гомотетия 156, 188
Гомотетия, определение 236

Д

Деление угла на три равные части 28, 116
Диаметр окружности 38

З

Задача Монжа 90, 199
Закон косинусов 119, 168, 208
Закон косинусов, определение 229
Закон синусов, определение 229

И

Изометрия 234
Инверсия на окружности 200
Инцентр 60

К

Касательная 146, 228
Касательная к окружности 24, 37
Касательные окружности к полуокружности 40
Конгруэнтный четырехугольник 83, 190
Константа для любой точки на окружности 36
Концентрическая окружность 99, 210
Конциклическая точка 33, 44, 48, 78, 81, 121, 135, 141, 182, 202, 213

Л

Лемма Саваямы 60, 156

О

Окружность девяти точек 52
Окружность Конвея 59, 155
Окружность, факты 22
Описанная окружность 41, 43, 46, 47, 52, 53, 101, 110, 132, 134, 137, 139
Описанный четырехугольник 192
Ортоцентр 138
Ортоцентр треугольника 46, 50, 56, 90, 150, 198
Отражение 234

П

Параллельная биссектриса 39, 128
Параллельная линия 30, 52, 65, 118, 124, 230
Параллельная хорда внешних касательных окружностей 64, 162
Пересекающаяся окружность 100
Поворот 234
Подобие треугольника 226
Полуокружность 74, 176, 203, 209
Полуокружность на стороне квадрата 203
Постоянная длина касательной 164
Преобразование подобия 236
Прерванная хорда 102, 214
Прямоугольник в окружности 38
Прямоугольный треугольник, свойства 226
Пятиугольник 86

Р

Равенство квадратов в окружности 31
Равенство треугольника 226
Радикальная ось 88, 89, 90, 194, 195, 197
Радикальная ось двух окружностей, определение 197
Радикальная ось, определение 87
Радикальный центр трех окружностей 199
Радиус окружности 22

С

Секущая 228
Симметричный равный угол 69
Соотношение «бабочки» 35, 123
Степень точки 228

Т

Теорема Пифагора 168, 209
Теорема Птолемея 131, 132, 233
Теорема Чевы 223, 230, 232
Точка Микеля 80, 81, 186
Точка на описанной окружности правильного пятиугольника 42
Точка на описанной окружности правильного шестиугольника 43
Треугольник Рело 85, 86, 193

У

Угол между двумя секущими 28, 116
Угол между двумя хордами 26
Угол между двумя хордами окружности 26, 114
Угол между касательной и секущей 27
Угол между касательной к окружности и хордой 26, 113
Угол между касательными к окружности 25

Ф

Фигура с постоянной шириной 86, 193

Х

Хорда 122, 222, 228
Хорда окружности, постоянная сумма углов 33
Хорда постоянной длины 106, 221

Ц

Центр окружности 22
Циклический четырехугольник 56, 77, 98, 123, 127, 130, 135, 136, 141, 143, 145, 149, 151, 181, 182, 187, 191, 204, 207, 218, 233

Ч

Чевиана 230
Четырехугольник 139, 142, 146, 174, 189, 220, 222

Ш

Шестиугольник 133

Книги издательства «ДМК Пресс» можно купить оптом и в розницу
на складе издательства по адресу:
Москва, ул. Электродная, д. 2, стр. 12, офис 7,
тел. +7 (499) 322–19–38,
а также заказать на сайте **www.dmkpress.com**
с доставкой в любой регион РФ

Альфред С. Позаментье, Роберт Геретшлегер

Жемчужины геометрии

Окружности

Главный редактор *Яценков В. С.*
editor@dmkpress.com

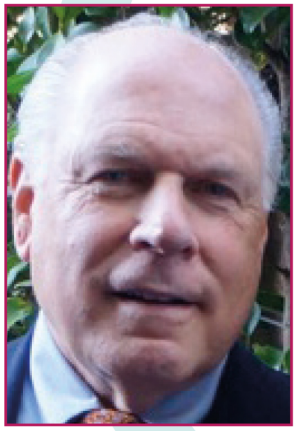
Перевод *Бахура В. И.*
Корректор *Синяева Г. И.*
Верстка *Луценко С. В.*
Дизайн обложки *Мовчан А. Г.*

Формат 70×100 1/16.
Гарнитура «PT Serif». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 19,5. Тираж 200 экз.

Веб-сайт издательства: *www.dmkpress.com*

Планарная геометрия полна чудес, о которых нам почти не рассказывают на уроках в школе. Даже обычная окружность – одна из наиболее простых фигур геометрии – способна удивить нас неожиданными фактами и закономерностями и дать богатую пищу для размышлений. В этой книге собрана одна из самых больших коллекций любопытных фактов и курьезов, связанных с окружностями. Исследуя многочисленные неожиданные взаимосвязи, читатели еще больше полюбят геометрию.

Издание рассчитано на широкую аудиторию читателей. Для понимания доказательств и пояснений достаточно знания основ школьной геометрии.



Альфред Позаментье работает преподавателем Технологического колледжа Городского университета Нью-Йорка. Автор и соавтор более 80 книг по математике для учителей, учащихся школ и массового читателя. Часто публикуется в газетах и журналах по темам, связанным с образованием и математикой.



Роберт Геретшлегер – учитель математики и геометрии из Граца, Австрия. Является редактором и соавтором многочисленных книг по популярной математике, а также сборников конкурсных математических задач. В настоящее время выступает с лекциями по геометрии в местном университете.

World Scientific

ДМК ПРЕСС

www.дмк.рф

ISBN 978-5-93700-446-8

9 785937 004468 >