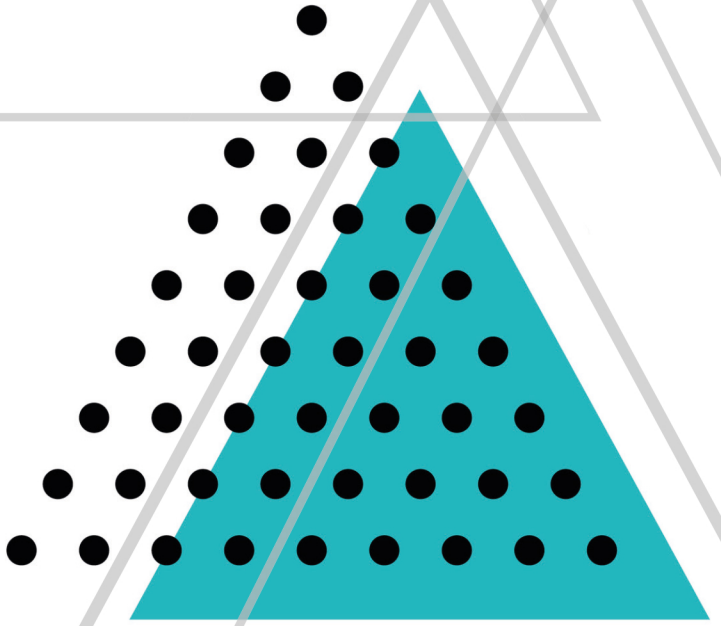
Альфред С. Позаментье
Роберт Геретшлегер

ЖЕМЧУЖИНЫ ГЕОМЕТРИИ



ТРЕУГОЛЬНИКИ

ДМК ПРЕСС
издательство

Альфред С. Позаментье, Роберт Геретшлегер

Жемчужины геометрии

Треугольники

GEOMETRIC GEMS

Volume I: The Wonders of Triangles

Alfred S. Posamentier,
Robert Geretschläger

World Scientific

NEW JERSEY • LONDON • SINGAPORE • BEIJING • SHANGHAI • HONG KONG • TAIPEI • CHENNAI • TOKYO

ЖЕМЧУЖИНЫ ГЕОМЕТРИИ

Треугольники

Альфред С. Позаментье,
Роберт Геретшлегер

ДМК ПРЕСС
ИЗДАТЕЛЬСТВО
Москва, 2025

УДК 514.112.3
ББК 22.151.0
П47

Позаментье А. С., Геретшлегер Р.
П47 Жемчужины геометрии. Треугольники / пер. с англ. Ю. В. Ревича. – М.: ДМК Пресс, 2025. – 338 с.: ил.

ISBN 978-5-93700-356-0

Планарная геометрия полна чудес, о которых нам почти не рассказывают на уроках в школе. Даже обычный треугольник – один из основных инструментов геометрии – способен удивить нас неожиданными фактами и закономерностями и дать богатую пищу для размышлений. В этой книге собрана одна из самых больших коллекций любопытных фактов и курьезов, связанных с треугольниками. Исследуя многочисленные неожиданные взаимосвязи, читатели еще больше полюбят геометрию.

Книга рассчитана на широкую аудиторию читателей и будет полезна преподавателям математики. Для понимания доказательств и пояснений достаточно знания основ школьной геометрии.

УДК 514.112.3
ББК 22.151.0

All rights reserved. This book, or parts thereof, may not be reproduced in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or any information storage and retrieval system now known or to be invented, without written permission from the Publisher.

Russian translation arranged with World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-9-81127-958-4 (англ.)

ISBN 978-5-93700-356-0 (рус.)

Copyright © 2024 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
© Перевод, оформление, издание, ДМК Пресс, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

https://t.me/it_boooks/2

От издательства ... 16

Благодарности ... 17

Об авторах ... 18

Введение ... 22

Часть 1. Геометрические чудеса в треугольнике ... 24

Пример 1. Углы в центре вписанной окружности ... 25
Пример 2. Неожиданная перпендикулярность ... 25
Пример 3. Самое необычное деление отрезка пополам ... 26
Пример 4. Открытие Жергонна о вписанной окружности треугольника ... 26
Пример 5. Еще один неожиданный результат для треугольника Жергонна ... 26
Пример 6. По поводу описанной и вписанной окружностей ... 27
Пример 7. Пересечения, связанные со вписанной окружностью ... 28
Пример 8. Более общий случай пересечений, связанный со вписанной окружностью ... 29
Пример 9. Окружность, вписанная в основной треугольник, образует равные углы ... 29
Пример 10. Неожиданные равные углы ... 30
Пример 11. Вписанная окружность треугольника порождает свою описанную окружность ... 30
Пример 12. Основания высот делят треугольник на три пары треугольников равной площади ... 31
Пример 13. Примечательное свойство ортоцентра треугольника ... 31
Пример 14. Окружность пересекает треугольник, образуя множество равных отрезков ... 33
Пример 15. Странное представление равных треугольников ... 33
Пример 16. Ортоцентр создает три точки на одной прямой ... 34
Пример 17. Ортоцентр выступает как середина отрезка ... 34
Пример 18. Совокупность перпендикуляров образует равные отрезки прямой ... 35
Пример 19. Еще одна неожиданная коллинеарность ... 36
Пример 20. Представляем ортоцентрический треугольник ... 36

Пример 21. Определение периметра ортоцентрического треугольника 37
Пример 22. Ортоцентрический треугольник — вписанный треугольник с наименьшим периметром 38
Пример 23. Удивительный подобный треугольник для ортоцентрического треугольника 38
Пример 24. Замечательное совпадение в ортоцентрическом треугольнике ... 38
Пример 25. Ортоцентрический треугольник порождает равнобедренный треугольник 39
Пример 26. Ортоцентрический треугольник образует параллелограмм 40
Пример 27. Точки на одной окружности, образуемые ортоцентрическим треугольником 40
Пример 28. Ортоцентрический треугольник порождает пересекающиеся прямые 41
Пример 29. Ортоцентрический треугольник создает точки, лежащие на одной прямой 42
Пример 30. Неожиданное свойство основания высоты треугольника 43
Пример 31. Как из неравнобедренного треугольника можно построить параллелограмм 43
Пример 32. Перпендикуляры, образующие неожиданные параллельные прямые 44
Пример 33. Описанная окружность порождает точки на одной прямой 44
Пример 34. Неожиданное равенство треугольников в круге 45
Пример 35. Неожиданное свойство результата 46
Пример 36. Необычное произведение двух сторон треугольника 46
Пример 37. Теорема Симсона 46
Пример 38. Расширение теоремы Симсона 48
Пример 39. Интересный аспект теоремы Симсона 48
Пример 40. Параллель прямой Симсона 49
Пример 41. Два треугольника, связанных общей точкой: центр описанной окружности и геометрический центр 50
Пример 42. Знакомимся с медианами треугольника и некоторыми их удивительными свойствами 50
Пример 43. Медиана треугольника равноудалена от двух вершин 52
Пример 44. Особая медиана в прямоугольном треугольнике 52
Пример 45. Медианы делят любой треугольник на четыре равных треугольника 53
Пример 46. Как геометрический центр помогает построить подобный треугольник 53
Пример 47. Геометрический центр обеспечивает необычное соотношение 54
Пример 48. Расстояния от вершин треугольника до произвольной прямой 54
Пример 49. Особое свойство геометрического центра, когда две медианы перпендикулярны 55
Пример 50. Удивительное свойство геометрического центра 56
Пример 51. Некоторые сюрпризы медианы 57
Пример 52. Другие чудеса с медианами 57
Пример 53. Сравнение медиан с периметром треугольника 57
Пример 54. Продление медиан создает коллинеарные точки 58

Пример 55. Два треугольника имеют общий геометрический центр 58
Пример 56. Невероятное соотношение центров описанных окружностей и медианных треугольников 59
Пример 57. Поразительное равенство 61
Пример 58. Неожиданное деление в треугольнике одновременно пополам и вчетверо 61
Пример 59. Удивительные соотношения площадей треугольников 61
Пример 60. Особенность случайной точки в равностороннем треугольнике 62
Пример 61. Особенность точки, находящейся за пределами равностороннего треугольника 63
Пример 62. Использование равностороннего треугольника для разделения отрезка прямой на три части 64
Пример 63. Еще один способ разделить отрезок прямой на три части с помощью равностороннего треугольника 64
Пример 64. Необычная конструкция в виде треугольника с углами 30°–60°–90° внутри равностороннего треугольника 64
Пример 65. Необычное соотношение отрезков в равностороннем треугольнике 66
Пример 66. Удивительная взаимосвязь между равнобедренным и равносторонним треугольниками 66
Пример 67. Неожиданное равенство в равнобедренном треугольнике 66
Пример 68. Еще одно неожиданное равенство в равнобедренном треугольнике 67
Пример 69. Замечательное геометрическое равенство 68
Пример 70. Еще одно замечательное геометрическое равенство 69
Пример 71. Неожиданная перпендикулярность 69
Пример 72. Неожиданное свойство высоты равнобедренного треугольника 70
Пример 73. Особое свойство равнобедренных треугольников 70
Пример 74. Странная связь: центр вписанной окружности находится на описанной окружности 71
Пример 75. Коллинеарные точки образуют биссектрису угла 71
Пример 76. Неожиданные подобные треугольники 71
Пример 77. Перпендикуляры к четырем биссектрисам треугольника образуют четыре коллинеарные точки 72
Пример 78. Деление отрезка прямой пополам сложным способом 73
Пример 79. Определение периметра треугольника без измерения длины его сторон 73
Пример 80. Странная трисекция угла 74
Пример 81. Неожиданное равенство 74
Пример 82. Особенность треугольника 74
Пример 83. Равенство площадей треугольников, противоречащее здравому смыслу 76
Пример 84. Параллельные прямые образуют треугольник с удвоенной площадью 76
Пример 85. Неожиданные соотношения площадей треугольников 76
Пример 86. Построение треугольника, площадь которого равна трем четвертям площади данного треугольника 77

Пример 87. Поразительная конструкция: подобные треугольники, соотношение площадей которых равно 1:4 ... 78
Пример 88. Непредвиденное равенство вписанных треугольников ... 78
Пример 89. Неожиданная общность треугольников равной площади ... 79
Пример 90. Как случайная точка делит площадь треугольника пополам ... 80
Пример 91. Нахождение треугольника, площадь которого составляет одну треть площади исходного ... 81
Пример 92. Точки трисекции сторон, разделяющие треугольник на части ... 81
Пример 93. Точки трисекции сторон треугольника преподносят больше сюрпризов ... 81
Пример 94. Еще один сюрприз преподносят точки трисекции сторон ... 83
Пример 95. Еще один сюрприз от точек трисекции сторон треугольника ... 83
Пример 96. Медианы и трисекторы сторон разбивают треугольник с неожиданным результатом ... 84
Пример 97. Непредвиденное свойство случайного треугольника с углом 60° ... 84
Пример 98. Еще одна удивительная особенность произвольного треугольника с углом в 60° ... 85
Пример 99. Еще одна неожиданная коллинеарность ... 85
Пример 100. При отражении треугольников образуются пересекающиеся окружности и пересекающиеся прямые ... 87
Пример 101. Чудеса трех пересекающихся равных окружностей ... 87
Пример 102. Другие неожиданные пересечения ... 88
Пример 103. Одно пересечение порождает другое ... 89
Пример 104. Необычные перпендикуляры, порождающие пересечения ... 89
Пример 105. Совершенно неожиданное пересечение ... 90
Пример 106. Интригующие пересечения ... 91
Пример 107. Еще одно неожиданное и непредусмотренное пересечение ... 91
Пример 108. Самое неожиданное пересечение в треугольнике ... 92
Пример 109. Поразительное свойство точки в треугольнике ... 93
Пример 110. Пересечение, противоречащее здравому смыслу ... 93
Пример 111. Пересекающиеся биссектрисы треугольников с общим основанием ... 94
Пример 112. Неожиданное пересечение с участием описанной окружности ... 94
Пример 113. Удивительный аспект пересечения чевиан ... 96
Пример 114. Удивительное равенство ... 96
Пример 115. Непредвиденный сюрприз треугольника ... 97
Пример 116. Замечательное свойство двух треугольников с общим основанием ... 97
Пример 117. Неожиданное разбиение на отрезки ... 98
Пример 118. Скрытое равенство длин отрезков прямой в треугольнике ... 100
Пример 119. Неожиданная величина угла ... 100
Пример 120. Неожиданное равенство в прямоугольном треугольнике ... 100
Пример 121. Загадка: перпендикуляр или параллель ... 101
Пример 122. Несколько средних точек в прямоугольном треугольнике определяют равные отрезки ... 102

Пример 123. Перпендикуляры в прямоугольных треугольниках образуют равные углы 103
Пример 124. Прямоугольные треугольники, имеющие общую гипотенузу, приводят к неожиданному равенству 103
Пример 125. Теорема Пифагора с геометрической точки зрения 103
Пример 126. Квадраты на сторонах треугольника могут преподнести интересные сюрпризы 105
Пример 127. Дополнительные свойства, создаваемые квадратами на сторонах треугольника 105
Пример 128. Неожиданная перпендикулярность 106
Пример 129. Удивительное пересечение с участием квадратов на сторонах треугольника 106
Пример 130. Еще одно удивительное совпадение для квадратов на сторонах треугольника 108
Пример 131. Использование квадратов на сторонах треугольника для создания еще одного удивительного совпадения 108
Пример 132. Квадраты на катетах прямоугольного треугольника дают неожиданное равенство 109
Пример 133. Подробнее о квадратах на катетах прямоугольного треугольника 110
Пример 134. Другие квадраты на сторонах прямоугольных треугольников 111
Пример 135. Еще одно неожиданное равенство площадей 112
Пример 136. Квадрат на гипотенузе прямоугольного треугольника 112
Пример 137. Действительно неожиданная коллинеарность 112
Пример 138. Необычный способ деления квадрата на две равные части 113
Пример 139. Удвоение квадрата 114
Пример 140. Странная конструкция из параллельных линий 114
Пример 141. Необычный способ нахождения середины отрезка 115
Пример 142. Неожиданное появление параллельных прямых 116
Пример 143. Неожиданная параллельная прямая 116
Пример 144. Удивительная перпендикулярность 117
Пример 145. Другая неожиданная перпендикулярность 117
Пример 146. Еще один неожиданный прямой угол 118
Пример 147. Четыре точки на одной окружности 119
Пример 148. Еще четыре примечательные точки на одной окружности 119
Пример 149. И еще четыре неожиданные точки на одной окружности 121
Пример 150. Перпендикуляры, образующие точки на одной окружности 121
Пример 151. Высоты и окружности, которые образуют еще одну окружность 122
Пример 152. Еще больше неожиданных точек на одной окружности 122
Пример 153. Удивительная окружность с пятью точками 122
Пример 154. Знаменитая окружность девяти точек 124
Пример 155. Коллинеарность с центром окружности девяти точек 125
Пример 156. Встреча трех известных центров треугольника 125
Пример 157. Свойства окружности девяти точек 126
Пример 158. Еще свойства окружности девяти точек 127

Пример 159. Неожиданная коллинеарность 127
Пример 160. Пересечение прямых, порождаемое ортоцентрическим треугольником 128
Пример 161. Высоты создают пересечение в одной точке и равенство 129
Пример 162. Вклад Наполеона в математику 129
Пример 163. Точка минимальных расстояний Наполеона (точка Ферма) 129
Пример 164. Точка минимальных расстояний не обязательно находится внутри треугольника 130
Пример 165. Расширения теоремы Наполеона 131
Пример 166. Пересекающиеся равносторонние треугольники 131
Пример 167. Удивительное соотношение площадей треугольников 132
Пример 168. Геометрический центр возвращает к предыдущей конфигурации 132
Пример 169. Появление еще одного равностороннего треугольника 134
Пример 170. Новый способ нахождения центра описанной окружности 134
Пример 171. Точка пересечения окружностей 135
Пример 172. Знаменитая теорема Микеля 136
Пример 173. Подобные треугольники Микеля 136
Пример 174. Поразительная теорема Морли 136
Пример 175. Расширение теоремы Морли 137

Часть 2. Доказательства примеров 139

Пример 1. Углы в центре вписанной окружности 139
Пример 2. Неожиданная перпендикулярность 139
Пример 3. Самое необычное деление отрезка пополам 140
Пример 4. Открытие Жергонна о вписанной окружности треугольника 142
Пример 5. Еще один неожиданный результат для треугольника Жергонна 143
Пример 6. По поводу описанной и вписанной окружностей 144
Пример 7. Пересечения, связанные со вписанной окружностью 144
Пример 8. Более общий случай пересечений, связанный со вписанной окружностью 144
Пример 9. Окружность, вписанная в основной треугольник, образует равные углы 146
Пример 10. Неожиданные равные углы 147
Пример 11. Вписанная окружность треугольника порождает свою описанную окружность 148
Пример 12. Основания высот делят треугольник на три пары треугольников равной площади 149
Пример 13. Примечательное свойство ортоцентра треугольника 150
Пример 14. Окружность пересекает треугольник, образуя множество равных отрезков 150
Пример 15. Странное представление равных треугольников 151
Пример 16. Ортоцентр создает три точки на одной прямой 154
Пример 17. Ортоцентр выступает как середина отрезка 155
Пример 18. Совокупность перпендикуляров образует равные отрезки прямой 156
Пример 19. Еще одна неожиданная коллинеарность 157
Пример 20. Представляем ортоцентрический треугольник 157

Пример 21. Определение периметра ортоцентрического треугольника 158
Пример 22. Ортоцентрический треугольник — вписанный треугольник с наименьшим периметром 158
Пример 23. Удивительный подобный треугольник для ортоцентрического треугольника.....160
Пример 24. Замечательное совпадение в ортоцентрическом треугольнике 161
Пример 25. Ортоцентрический треугольник порождает равнобедренный треугольник 161
Пример 26. Ортоцентрический треугольник образует параллелограмм 163
Пример 27. Точки на одной окружности, образуемые ортоцентрическим треугольником 164
Пример 28. Ортоцентрический треугольник порождает пересекающиеся прямые.....164
Пример 29. Ортоцентрический треугольник создает точки, лежащие на одной прямой 166
Пример 30. Неожиданное свойство основания высоты треугольника.....166
Пример 31. Как из неравнобедренного треугольника можно построить параллелограмм 167
Пример 32. Перпендикуляры, образующие неожиданные параллельные прямые.....168
Пример 33. Описанная окружность порождает точки на одной прямой 169
Пример 34. Неожиданное равенство треугольников в круге.....170
Пример 35. Неожиданное свойство результата 170
Пример 36. Необычное произведение двух сторон треугольника.....172
Пример 37. Теорема Симсона 172
Пример 38. Расширение теоремы Симсона 173
Пример 39. Интересный аспект теоремы Симсона.....174
Пример 40. Параллель прямой Симсона.....175
Пример 41. Два треугольника, связанных общей точкой: центр описанной окружности и геометрический центр.....176
Пример 42. Знакомимся с медианами треугольника и некоторыми их удивительными свойствами 177
Пример 43. Медиана треугольника равноудалена от двух вершин 179
Пример 44. Особая медиана в прямоугольном треугольнике 179
Пример 45. Медианы делят любой треугольник на четыре равных треугольника 180
Пример 46. Как геометрический центр помогает построить подобный треугольник 181
Пример 47. Геометрический центр обеспечивает необычное соотношение....182
Пример 48. Расстояния от вершин треугольника до произвольной прямой....183
Пример 49. Особое свойство геометрического центра, когда две медианы перпендикулярны.....183
Пример 50. Удивительное свойство геометрического центра 184
Пример 51. Некоторые сюрпризы медианы.....186
Пример 52. Другие чудеса с медианами 187
Пример 53. Сравнение медиан с периметром треугольника 188
Пример 54. Продление медиан создает коллинеарные точки 189

Пример 55. Два треугольника имеют общий геометрический центр 189
Пример 56. Невероятное соотношение центров описанных окружностей и медианных треугольников 189
Пример 57. Поразительное равенство 195
Пример 58. Неожиданное деление в треугольнике одновременно пополам и вчетверо 196
Пример 59. Удивительные соотношения площадей треугольников 197
Пример 60. Особенность случайной точки в равностороннем треугольнике 197
Пример 61. Особенность точки, находящейся за пределами равностороннего треугольника 199
Пример 62. Использование равностороннего треугольника для разделения отрезка прямой на три части 199
Пример 63. Еще один способ разделить отрезок прямой на три части с помощью равностороннего треугольника 200
Пример 64. Необычная конструкция в виде треугольника с углами 30°–60°–90° внутри равностороннего треугольника 200
Пример 65. Необычное соотношение отрезков в равностороннем треугольнике 202
Пример 66. Удивительная взаимосвязь между равнобедренным и равносторонним треугольниками 202
Пример 67. Неожиданное равенство в равнобедренном треугольнике 204
Пример 68. Еще одно неожиданное равенство в равнобедренном треугольнике 205
Пример 69. Замечательное геометрическое равенство 205
Пример 70. Еще одно замечательное геометрическое равенство 206
Пример 71. Неожиданная перпендикулярность 207
Пример 72. Неожиданное свойство высоты равнобедренного треугольника 208
Пример 73. Особое свойство равнобедренных треугольников 208
Пример 74. Странная связь: центр вписанной окружности находится на описанной окружности 209
Пример 75. Коллинеарные точки образуют биссектрису угла 209
Пример 76. Неожиданные подобные треугольники 211
Пример 77. Перпендикуляры к четырем биссектрисам треугольника образуют четыре коллинеарные точки 211
Пример 78. Деление отрезка прямой пополам сложным способом 212
Пример 79. Определение периметра треугольника без измерения длины его сторон 213
Пример 80. Странная трисекция угла 214
Пример 81. Неожиданное равенство 214
Пример 82. Особенность треугольника 216
Пример 83. Равенство площадей треугольников, противоречащее здравому смыслу 216
Пример 84. Параллельные прямые образуют треугольник с удвоенной площадью 217
Пример 85. Неожиданные соотношения площадей треугольников 218

Пример 86. Построение треугольника, площадь которого равна трем четвертям площади данного треугольника 219
Пример 87. Поразительная конструкция: подобные треугольники, соотношение площадей которых равно 1:4 220
Пример 88. Непредвиденное равенство вписанных треугольников 220
Пример 89. Неожиданная общность треугольников равной площади 222
Пример 90. Как случайная точка делит площадь треугольника пополам 223
Пример 91. Нахождение треугольника, площадь которого составляет одну треть площади исходного 224
Пример 92. Точки трисекции сторон, разделяющие треугольник на части 225
Пример 93. Точки трисекции сторон треугольника преподносят больше сюрпризов 226
Пример 94. Еще один сюрприз преподносят точки трисекции сторон 228
Пример 95. Еще один сюрприз от точек трисекции сторон треугольника 229
Пример 96. Медианы и трисекторы сторон разбивают треугольник с неожиданным результатом 231
Пример 97. Непредвиденное свойство случайного треугольника с углом 60° 232
Пример 98. Еще одна удивительная особенность произвольного треугольника с углом в 60° 232
Пример 99. Еще одна неожиданная коллинеарность 233
Пример 100. При отражении треугольников образуются пересекающиеся окружности и пересекающиеся прямые 234
Пример 101. Чудеса трех пересекающихся равных окружностей 236
Пример 102. Другие неожиданные пересечения 239
Пример 103. Одно пересечение порождает другое 241
Пример 104. Необычные перпендикуляры, порождающие пересечения 241
Пример 105. Совершенно неожиданное пересечение 242
Пример 106. Интригующие пересечения 243
Пример 107. Еще одно неожиданное и непредусмотренное пересечение 244
Пример 108. Самое неожиданное пересечение в треугольнике 245
Пример 109. Поразительное свойство точки в треугольнике 246
Пример 110. Пересечение, противоречащее здравому смыслу 247
Пример 111. Пересекающиеся биссектрисы треугольников с общим основанием 247
Пример 112. Неожиданное пересечение с участием описанной окружности 248
Пример 113. Удивительный аспект пересечения чевиан 248
Пример 114. Удивительное равенство 250
Пример 115. Непредвиденный сюрприз треугольника 250
Пример 116. Замечательное свойство двух треугольников с общим основанием 251
Пример 117. Неожиданное разбиение на отрезки 252
Пример 118. Скрытое равенство длин отрезков прямой в треугольнике 253
Пример 119. Неожиданная величина угла 254
Пример 120. Неожиданное равенство в прямоугольном треугольнике 254
Пример 121. Загадка: перпендикуляр или параллель 255

Пример 122. Несколько средних точек в прямоугольном треугольнике определяют равные отрезки 257
Пример 123. Перпендикуляры в прямоугольных треугольниках образуют равные углы 257
Пример 124. Прямоугольные треугольники, имеющие общую гипотенузу, приводят к неожиданному равенству 258
Пример 125. Теорема Пифагора с геометрической точки зрения 259
Пример 126. Квадраты на сторонах треугольника могут преподнести интересные сюрпризы 260
Пример 127. Дополнительные свойства, создаваемые квадратами на сторонах треугольника 264
Пример 128. Неожиданная перпендикулярность 265
Пример 129. Удивительное пересечение с участием квадратов на сторонах треугольника 266
Пример 130. Еще одно удивительное совпадение для квадратов на сторонах треугольника 268
Пример 131. Использование квадратов на сторонах треугольника для создания еще одного удивительного совпадения 269
Пример 132. Квадраты на катетах прямоугольного треугольника дают неожиданное равенство 270
Пример 133. Подробнее о квадратах на катетах прямоугольного треугольника 271
Пример 134. Другие квадраты на сторонах прямоугольных треугольников 271
Пример 135. Еще одно неожиданное равенство площадей 273
Пример 136. Квадрат на гипотенузе прямоугольного треугольника 274
Пример 137. Действительно неожиданная коллинеарность 274
Пример 138. Необычный способ деления квадрата на две равные части 275
Пример 139. Удвоение квадрата 276
Пример 140. Странная конструкция из параллельных линий 276
Пример 141. Необычный способ нахождения середины отрезка 277
Пример 142. Неожиданное появление параллельных прямых 278
Пример 143. Неожиданная параллельная прямая 279
Пример 144. Удивительная перпендикулярность 279
Пример 145. Другая неожиданная перпендикулярность 280
Пример 146. Еще один неожиданный прямой угол 281
Пример 147. Четыре точки на одной окружности 282
Пример 148. Еще четыре примечательные точки на одной окружности 283
Пример 149. И еще четыре неожиданные точки на одной окружности 283
Пример 150. Перпендикуляры, образующие точки на одной окружности 285
Пример 151. Высоты и окружности, которые образуют еще одну окружность 286
Пример 152. Еще больше неожиданных точек на одной окружности 286
Пример 153. Удивительная окружность с пятью точками 288
Пример 154. Знаменитая окружность девяти точек 288
Пример 155. Коллинеарность с центром окружности девяти точек 290
Пример 156. Встреча трех известных центров треугольника 291
Пример 157. Свойства окружности девяти точек 292
Пример 158. Еще свойства окружности девяти точек 293
Пример 159. Неожиданная коллинеарность 293

Пример 160. Пересечение прямых, порождаемое ортоцентрическим треугольником 295
Пример 161. Высоты создают пересечение в одной точке и равенство....296
Пример 162. Вклад Наполеона в математику....296
Пример 163. Точка минимальных расстояний Наполеона (точка Ферма)....298
Пример 164. Точка минимальных расстояний не обязательно находится внутри треугольника 299
Пример 165. Расширения теоремы Наполеона....299
Пример 166. Пересекающиеся равносторонние треугольники 300
Пример 167. Удивительное соотношение площадей треугольников....302
Пример 168. Геометрический центр возвращает к предыдущей конфигурации 303
Пример 169. Появление еще одного равностороннего треугольника....303
Пример 170. Новый способ нахождения центра описанной окружности....304
Пример 171. Точка пересечения окружностей....306
Пример 172. Знаменитая теорема Микеля....306
Пример 173. Подобные треугольники Микеля....307
Пример 174. Поразительная теорема Морли....308
Пример 175. Расширение теоремы Морли....308

Часть 3. Инструментарий....311

Введение: набор геометрических инструментов....311
A. Инструменты, с которыми вы, вероятно, знакомы из школьного курса геометрии....312
A1. Равенство треугольников....312
A2. Подобие треугольников....312
A3. Свойства прямоугольного треугольника 312
A4. Углы, связанные с окружностью....313
A5. Касательные, секущие и хорды: сегменты окружности 314
A6. Закон синусов и закон косинусов 315
A7. Тождества суммы и разности углов 315
B. Полезные и увлекательные инструменты, но менее привычные....315
B1. Внутренняя биссектриса угла в треугольнике....315
B2. Биссектриса внешнего угла в треугольнике 316
B3. Теорема Менелая....317
B4. Теорема Чевы 319
B5. Тригонометрическая версия теоремы Чевы 321
B6. Расширенная теорема Чевы 323
B7. Теорема Дезарга....324
B8. Теорема Стюарта 326
B9. Теорема Аполлония 328
B10. Теорема Птолемея....328
B11. Изометрия: отражение и вращение 329
B12. Гомотетия и подобие....332
B13. Полюсы и поляры....333

Предметный указатель....335

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте *www.dmkpress.com*, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу *dmkpress@gmail.com*; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу *http://dmkpress.com/authors/publish_book/* или напишите в издательство по адресу *dmkpress@gmail.com*.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг, мы будем очень благодарны, если вы сообщите о ней главному редактору по адресу *dmkpress@gmail.com*. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты *dmkpress@gmail.com*.

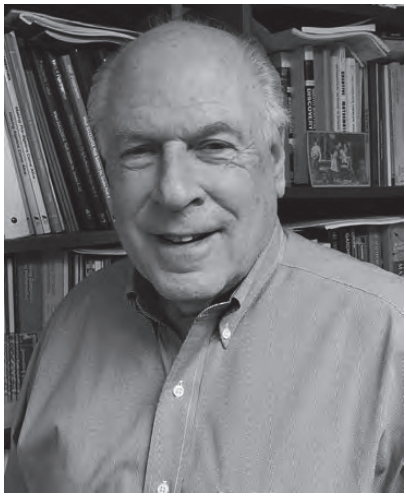
Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

БЛАГОДАРНОСТИ

Хорошо известно, что математические задачи часто имеют альтернативные пути решений. Наша цель в этой книге заключается в выборе самых элегантных и эффективных решений некоторых сложных геометрических проблем. Несколько математиков предоставили нам свои замечательные идеи. Мы благодарим Дэвида Ханкина, Морица Хиблера, Ханса Хьюминбергера и Роберта Серки за то, что поделились с нами своим опытом.

ОБ АВТОРАХ

Альфред С. Позаментье



Альфред С. Позаментье в настоящее время — преподаватель Технологического колледжа Городского университета Нью-Йорка. До этого он работал исполнительным директором по интернациональным программам в университете Лонг-Айленда, Нью-Йорк. Этой работе предшествовали 5 лет в качестве декана Школы образования и профессора математики в университете Мерси, Нью-Йорк, и 40 лет преподавания в колледже Городского университета Нью-Йорка, в котором он сейчас является почетным профессором математики и деканом Школы образования. Доктор Позаментье — автор и соавтор более 80 книг по математике для учителей, учащихся средних и начальных школ, а также для массового читателя. Он также часто появляется в газетах и журналах в качестве комментатора по темам, связанным с образованием и математикой.

После получения степени бакалавра математики в Хантер-колледже Городского университета Нью-Йорка Альфред Позаментье занял должность учителя математики в средней школе Теодора Рузвельта (Бронкс, Нью-Йорк), где

сосредоточил свое внимание на улучшении навыков учеников в решении задач и в то же время расширении их знаний за пределами того, что предлагали традиционные учебники. В течение своего шестилетнего пребывания на этой должности он также организовал первые математические команды этой школы (как на младшем, так и на старшем уровне). Он и сейчас участвует в работе с учителями и школьными инспекторами математики, на национальном и международном уровне, чтобы помочь им работать эффективнее.

Получив степень магистра в 1966 году, Альфред Позаментье в 1970 году пришел на один из факультетов Городского колледжа Нью-Йорка, где начал разрабатывать курсы без отрыва от работы для учителей математики средней школы, в том числе в таких областях, как развлекательная математика и решение особых математических задач. За время пребывания в качестве декана доктор Позаментье вывел школу с нижней части рейтинга штата Нью-Йорк на его вершину с наивысшей оценкой по аккредитации NCATE[1] в 2009 году. Он также собрал более 12 миллионов долларов от частного сектора для образовательных инновационных программ. Альфред Позаментье повторил этот успех в университете Мерси, что позволило ему стать единственным колледжем, который одновременно получил аккредитацию как NCATE, так и TEAC[2].

В 1973 году доктор Позаментье получил степень доктора философии от университета Фордхэма (Нью-Йорк) в области математического образования и с тех пор распространил свою репутацию в области математического образования в Европу. Он приглашенный профессор в нескольких европейских университетах Австрии, Англии, Германии, Чешской Республики, Турции и Польши. В 1990 году избран профессором по программе Фулбрайта[3] в Венском университете.

В 1989 году доктору Позаментье было присвоено звание почетного сотрудника в университете Саут-Бэнк (Лондон, Англия). В знак признания его выдающихся заслуг в 1994 и в 2009 годах Ассоциация выпускников городского колледжа Нью-Йорка называла его педагогом года. В 1994 году он также был награжден почётным знаком «За заслуги перед Австрийской Республикой», а в 1999 году после одобрения парламента президент Австрийской Республики присудил ему звание университетского профессора Австрии. В 2003 году он был награжден званием почетного научного сотрудника Венского технологического университета, а в 2004 году — почётным знаком Австрийской республики «За науку и искусство» первого класса. В 2005 году доктор Поза-

---

[1] **National Council for Accreditation of Teacher Education** (**NCATE**) — до 2013 года центральный национальный орган Министерства образования США по аккредитации программ педагогического образования в колледжах и университетах. — *Здесь и далее прим. перев. (авторские помечаются отдельно).*

[2] **Teacher Education Accreditation Council** (**TEAC**) — совет, который до 2013 года также занимался аккредитацией программ подготовки учителей. В указанном году оба ведомства были слиты в единый Council for the Accreditation of Educator Preparation (CAEP).

[3] **Программа Фулбрайта** (**Fulbright Program**) — крупнейшая из финансируемых правительством США международных обменных программ в области образования.

ментье был введен в Зал славы выпускников нью-йоркского Хантер-колледжа, а в 2006 году награжден престижной медалью Харриса Таунсенда, названной в честь основателя городского колледжа Нью-Йорка. Он был введен в Зал славы математиков штата Нью-Йорк в 2009 году, а в 2010 году был также удостоен премии имени Кристиана Петера Бейта от Берлинского института техники и экономики. В 2017 году доктор Позаментье был единогласно награжден академической премией фонда Себастиана в Мехико, Мексика.

Доктор Позаментье занимал многочисленные руководящие должности в математическом образовании на местном уровне. Он был членом экзаменационной комиссии по образованию Нью-Йорка и комитета по образовательным стандартам, который переосмыслил математические стандарты для штата Нью-Йорк, а также служил в Математической консультационной группе школ Нью-Йорка.

Он по-прежнему является ведущим экспертом по вопросам образования и продолжает свою давнюю страсть к поиску способов сделать математику интересной как для учителей, так и для широкой публики, как видно из некоторых из его более поздних книг. Для получения дополнительной информации и списка его публикаций см.: *https://en.wikipedia.org/wiki/Alfred_S._Posamentier*[1].

Роберт Геретшлегер



Роберт Геретшлегер — учитель математики и геометрии, живущий в Граце, Австрия. В 2022 году он ушел со своей преподавательской должности в австрийской федеральной государственной гимназии им. Кеплера в Граце после почти 40 лет работы. В настоящее время он по-прежнему активен в качестве лектора по геометрии в области педагогического образования в Грацском университете, Австрия.

[1] Русскоязычная версия: *https://ru.wikipedia.org/wiki/Позаментье,_Альфред_С.*.

Роберт Геретшлегер родился в Торонто, Канада, в 1957 году, в 1972 году он переехал в Австрию, где закончил свое образование со степенью магистра в качестве преподавателя математики средней школы со специализацией по геометрии. Впоследствии получил докторскую степень по математике в Грацском университете.

Бóльшую часть своей карьеры он активно участвовал в организации математических соревнований для всех возрастов на всех уровнях сложности. Среди других обязанностей в этом контексте он был лидером австрийской команды на Международной математической олимпиаде с 2007 года и ведущим организатором международного математического конкурса для школьников «Кенгуру без границ» в Австрии с начала до середины 1990-х годов. Он также был ответственным за проведение в Австрии международного математического турнира городов и средиземноморского конкурса математики.

На международном уровне Роберт Геретшлегер с 2008 года является членом исполнительного комитета Всемирной федерации математических соревнований (World Federation of National Mathematics Competitions, WFNMC), где занимал должность старшего вице-президента с 2018 по 2022 год и был выбран президентом с 2022 года. Он также является давним членом Международного совета ассоциации «Кенгуру без границ» (AKSF), где в настоящее время служит казначеем. Роберт Геретшлегер читал лекции на многих международных площадках, будучи приглашенным лектором среди прочих стран в Канаде, Австралии, Чехии, Швейцарии и Германии.

За эти годы он также участвовал в ряде проектов по математике. Среди прочего Роберт Геретшлегер в течение многих лет был членом Комиссии по дидактике Австрийского математического общества и ведущим редактором серии книг по математике для средней школы. Он активно участвовал в разработке учебных программ для австрийских средних школ и играл активную роль в ранней стадии внедрения исследований PISA[1] в Австрии.

Он является редактором и соавтором многочисленных книг по популярной математике, по решению конкурсных математических задач. Его особым исследовательским интересом является «Геометрия оригами».

Более подробная информация доступна на веб-сайте Роберта Геретшлегера по адресу *www.rgeretschlaeger.com*.

---

[1] **PISA** (**Programm for International Student Assessment**) — программа международной оценки учащихся, проводимая Организацией экономического сотрудничества и развития (ОЭСР) в таких областях, как математика, чтение и естественные науки.

ВВЕДЕНИЕ

Хотя мы все знакомимся с основаниями геометрии в раннем обучении, не всем дают возможность по-настоящему оценить всю силу и красоту этой науки. И с чисто эстетической точки зрения, и как предмет логических умозаключений, геометрия может считаться ключом к математике. В большинстве стран учащиеся изучают геометрию в средней школе в течение целого года, что, безусловно, является неплохим обстоятельством. Тем не менее, затратив такое большое количество времени на освоение основных концепций и принципов геометрии, можно немного времени выделить на то, чтобы по-настоящему оценить некоторые чудеса, предлагаемые этим предметом. В некоторых странах изучение элементарной геометрии было радикально сокращено в последние десятилетия, и понимание красоты этого предмета соответственно пострадало. Даже в странах с сильной традицией изучения геометрии в школе акцент, как правило, больше связан с техническими аспектами и логикой, часто в ущерб признанию великолепия этого предмета.

Есть много удивительных и неожиданных результатов, которые можно найти при изучении геометрических отношений. Многие из них довольно неочевидные, но все же поражают воображение. Простым примером, иногда представляемым в курсах геометрии средней школы, является факт, что последовательное соединение середин сторон любого случайно нарисованного четырехугольника всегда дает параллелограмм. Существует бесчисленное множество таких чудесных результатов, которые возникают в результате довольно простых геометрических построений. Эта книга отправит мотивированных читателей в путешествие по многим ранее неисследованным закономерностям, которые оставят их в полном изумлении. Кроме того, чтобы просветить читателей, представлены евклидовые доказательства для всех этих удивительных результатов. Эти доказательства изложены в стиле, максимально удобном для читателей. Конечно, многие читатели могут довольствоваться только неожиданностью представленных результатов, не касаясь дока-

зательств. Это нормально, так как понимание доказательств никоим образом не требуется, чтобы оценить красоту этих удивительных чудес.

Это первая серия из трех книг, демонстрирующих великолепие геометрии, она посвящена отношениям в треугольнике. Последующие книги с теми же основными целями будут посвящены четырехугольникам и окружностям. Чтобы получить при чтении этой книги больше пользы, читатель должен иметь разумное знакомство с основными понятиями, излагаемыми в курсе геометрии средней школы. Если в некоторых доказательствах по необходимости используются геометрические теоремы, выходящие за пределы средней школы, вы найдете их в разделе «*Инструментарий*». Не следует думать, что все содержание «*Инструментария*» находится за пределами школьной программы, наоборот, бóльшая часть этого раздела рассматривает основы обычных школьных курсов геометрии. Короче говоря, «*Инструментарий*» обеспечивает читателя всем необходимым для понимания доказательств, предлагаемых во втором разделе книги.

Чтобы сделать ваше путешествие по книге максимально приятным и интересным, темы отдельных примеров следуют в довольно случайном порядке. Хотя имеется несколько преднамеренно связанных тематических последовательностей, организованных с целью демонстрации определенных концепций. Например, связанные случаи посвящены коллинеарности точек[1], пересечения прямых в одной точке, точкам, лежащим на одной окружности[2], и другим темам, обычно не подчеркиваемым в учебной программе геометрии средней школы.

Примеры, выбранные для этой книги, довольно редкие и либо были созданы самостоятельно, либо представлены в книгах по геометрии за последние два столетия. Читателям рекомендуется сначала ознакомиться и по-настоящему оценить удивительные соотношения, которые представляет каждый из этих примеров. В качестве следующего шага заинтересованный читатель может сосредоточиться на доказательствах этих удивительных результатов, особенно после того, как оценил их необычность.

Мы сделали все возможное, чтобы представить все доказательства и разъяснения удобными для читателей.

Мы приглашаем вас сейчас отправиться в это изумительное путешествие через многие скрытые особенности геометрии треугольников, которые показывают мощь и красоту геометрии, а также логики, на которой она основана. Наслаждайтесь!

---

[1] Свойство **коллинеарности** для точек означает, что все они лежат на одной прямой.

[2] В зарубежной литературе свойство точек принадлежать одной окружности иногда называется «concyclic»; в русском языке термин «конциклический» употребляется крайне редко и обычно в другом контексте («совпадающий по циклу»).

1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЧУДЕСА В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

https://t.me/it_boooks/2

Возможно, треугольник является самой базовой структурой в линейной геометрии. Наше путешествие по чудесам треугольника мы должны начать с представления различных видов треугольников и некоторых основных моментов, связанных с этими изумительными фигурами. Когда треугольник не имеет сторон равной длины, его называют *неравносторонним*. Треугольник с двумя равными сторонами называется *равнобедренным*, а треугольник с тремя равными сторонами — *равносторонним*. Треугольники также иногда классифицируются по величине угла: *прямоугольный* (*правильный*) *треугольник* имеет один угол 90°; *остроугольный треугольник* имеет все углы менее 90°. Треугольник с одним углом больше 90° называется *тупоугольным*. Теперь у нас есть основная терминология для быстрого движения вперед.

В каждом треугольнике есть особенно важные элементы. Например, существует точка пересечения биссектрис углов треугольника, которая также является *центром вписанной окружности* (т. е. окружности, вписанной в треугольник). Другим важным элементом в треугольнике является точка пересечения его высот, которая называется *ортоцентром* треугольника. Затем существует точка пересечения медиан треугольника, которая известна как *геометрический центр*, или *центр масс* треугольника[1]. Точка пересечения перпендикуляров к середине каждой из сторон треугольника является *центром описанной окружности*, т. е. окружности, описанной вокруг треугольника.

[1] Нередко также встречается устаревшее название геометрического центра — *центр тяжести*.

Пример 1. Углы в центре вписанной окружности

Углы треугольника *ABC* на рис. 1 имеют биссектрисы *AX*, *BY* и *CZ*, встречающиеся в точке *I*, которая, как отмечалось выше, является центром вписанной окружности треугольника. Неизвестная особенность этого построения состоит в том, что угол, образованный двумя биссектрисами, равен 90° плюс половина величины третьего угла.

На рис. 1, например, $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$. Аналогично $\angle CIA = 90° + \frac{1}{2}\angle B$ и $\angle AIB = 90° + \frac{1}{2}\angle C$.

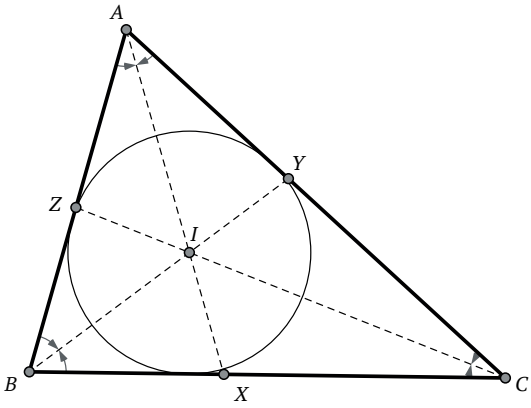


Рисунок 1

Пример 2. Неожиданная перпендикулярность

Давайте продолжим с довольно неожиданными результатами, демонстрирующими некоторые чудеса, которые выдают треугольники. Начнем с треугольника *ABC* произвольной формы на рис. 2, вписанная окружность которого с центром *I* касается сторон треугольника в точках *D*, *E* и *F*. Продолжение отрезка *BI* пересекает *DE* в точке *P*. *AP* всегда будет перпендикулярен *BP*.

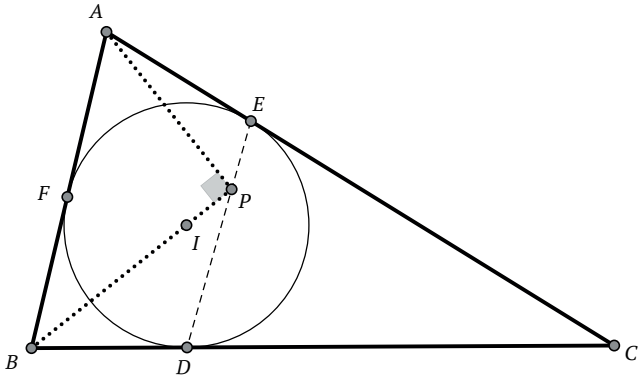


Рисунок 2

Пример 3. Самое необычное деление отрезка пополам

Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности, можно разделить пополам следующим образом. На рис. 3 окружность с центром *I* вписана в треугольник *ABC* с касанием сторон в точках *D*, *E* и *F*. Средними точками сторон *BC*, *CA* и *AB* являются точки *L*, *M* и *N* соответственно. Если мы проведем прямые *IL*, *IM* и *IN*, совершенно неожиданно обнаружим, что они делят пополам каждый из отрезков *AD*, *BE* и *CF* в точках *X*, *Y* и *Z* соответственно.

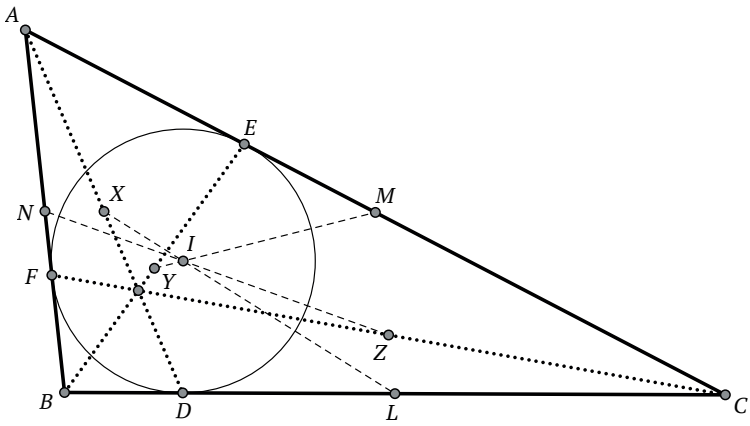


Рисунок 3

Пример 4. Открытие Жергонна о вписанной окружности треугольника

Продолжая рассмотрение вписанной окружности треугольника, мы можем выявить интригующий момент. Если мы на рис. 4 проводим прямые от каждой вершины произвольного треугольника *ABC* к точкам касания *D*, *E* и *F* на противолежащих сторонах, эти три прямые пересекаются в точке *G*. Эта точка в треугольнике *ABC* называется точкой Жергонна в честь французского математика Жозефа-Диаса Жергонна (1771–1859). Треугольник *DEF*, получающийся при соединении трех точек касания, называется треугольником Жергонна.

Пример 5. Еще один неожиданный результат для треугольника Жергонна

В этом построении можно найти еще кое-что интересное. Если мы проведем перпендикулярные отрезки от средних точек *L*, *M* и *N* каждой из сторон треугольника *ABC* к каждой из сторон треугольника Жергона *DEF*, то обнаружим, что эти отрезки, *LX*, *MY* и *NZ*, пересекаются в одной точке *P*, как показано на рис. 5.

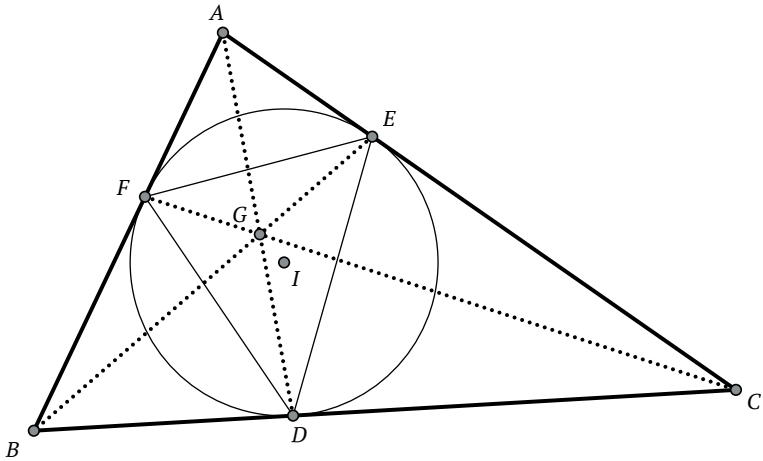


Рисунок 4

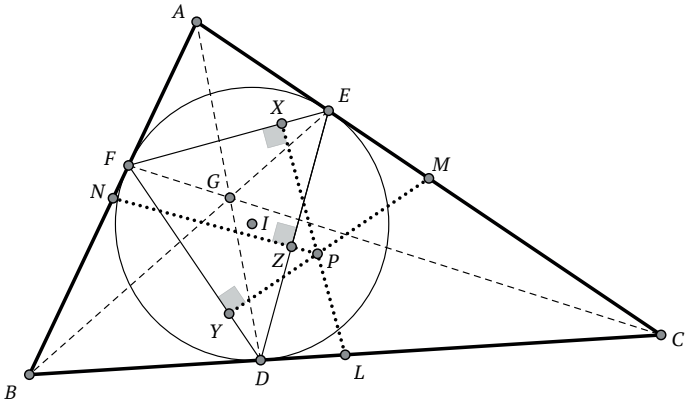


Рисунок 5

Пример 6. По поводу описанной и вписанной окружностей

При рассмотрении вписанной и описанной окружностей данного треугольника возникают неожиданные чудеса. Множество пересечений нас удивят в этой конфигурации. Например, рассмотрим рис. 6, где O — центр описанной окружности треугольника ABC. Мы проводим перпендикулярные отрезки OL, OM и ON к серединам каждой из сторон треугольника ABC, которые пересекаются с описанной окружностью в точках R, S и T соответственно. Эти точки являются средними точками соответственно дуг $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC}$ и $\overset{\frown}{AB}$, определенных согласно сторонам треугольника. Затем проводим прямые, соединяющие середины этих дуг с точками касания вписанной окружности треугольника ABC и находим, что эти прямые DR, ES и FT пересекаются в точке P. Кроме того, еще один любопытный результат состоит в том, что точки P и O находятся на одной прямой с геометрическим центром I и ортоцентром G.

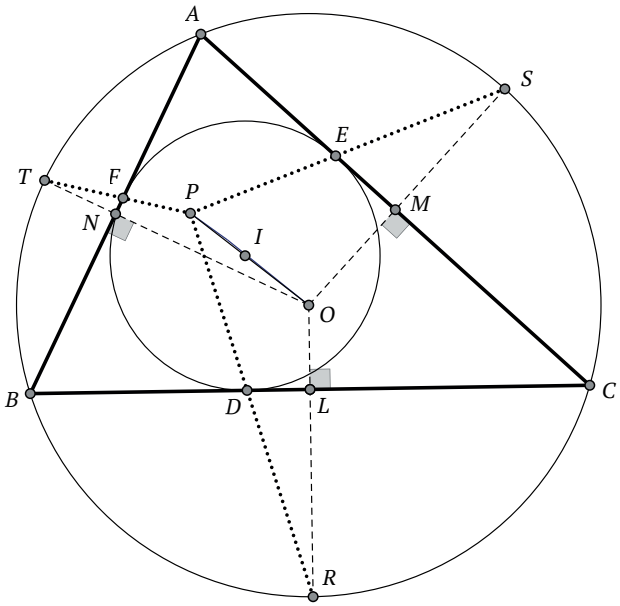


Рисунок 6

Пример 7. Пересечения, связанные со вписанной окружностью

Вписанная окружность может привести ко множеству неожиданных открытий. Одним из них является пересечение, которое обнаруживается, если взять для точек касания D, E и F окружности, вписанной в треугольник ABC, диаметрально противоположные точки R, S и T, как показано на рис. 7. Если мы проведем продолжение отрезков AR, BS и CT, увидим, что все три линии пересекутся в точке Q, что иллюстрирует одно из неожиданных пересечений.

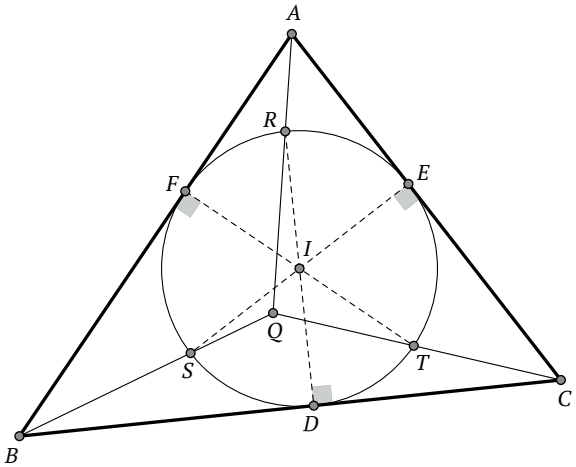


Рисунок 7

Пример 8. Более общий случай пересечений, связанный со вписанной окружностью

Предыдущий пример на самом деле является лишь частным случаем более общего результата. На рис. 8 мы выбираем произвольную точку *P* внутри окружности, вписанной в треугольник *ABC*, и из точек касания *D*, *E* и *F* через точку *P* проводим прямые, пересекающие вписанную окружность в точках *R*, *S* и *T* соответственно. И снова, когда мы рисуем продолжение отрезков *AR*, *BS* и *CT*, видим, что они пересекаются в точке *Q*. Кажется, что в этой конфигурации можно обнаружить бесконечное количество пересечений в одной точке!

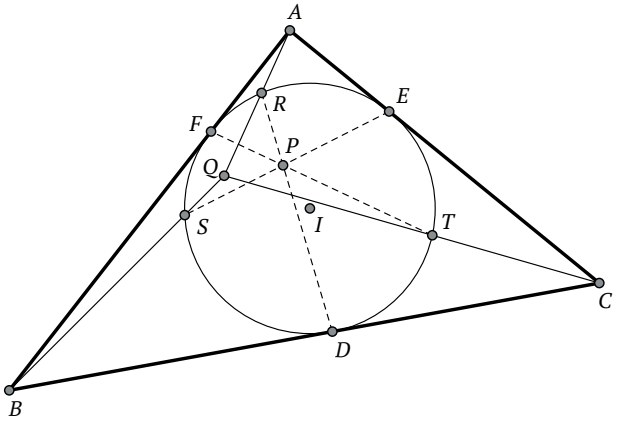


Рисунок 8

Пример 9. Окружность, вписанная в основной треугольник, образует равные углы

На рис. 9 окружность с центром в точке *I* вписана в треугольник *ABC*, а продолжение отрезка *AI* пересекается со стороной *BC* в точке *D*. Отрезок *IE* проведен перпендикулярно *BC* из точки *E*. Тогда мы найдем, что $\angle BID = \angle EIC$.

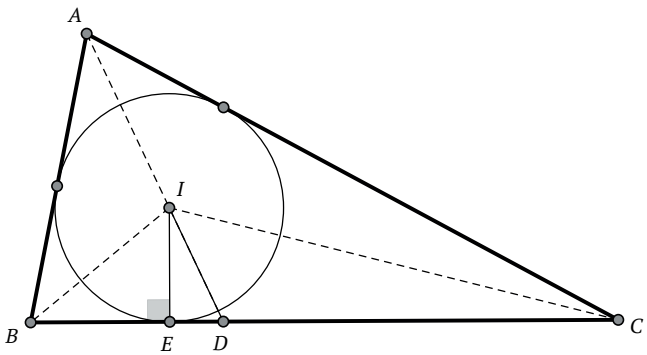


Рисунок 9

Пример 10. Неожиданные равные углы

Окружность с центром I вписана в треугольник ABC и касается сторон треугольника в точках D, E и F, как показано на рис. 10. Точка O является центром окружности, содержащей точки B, I и C. При таком расположении мы совершенно неожиданно обнаруживаем, что $\angle BFO = \angle OEC$.

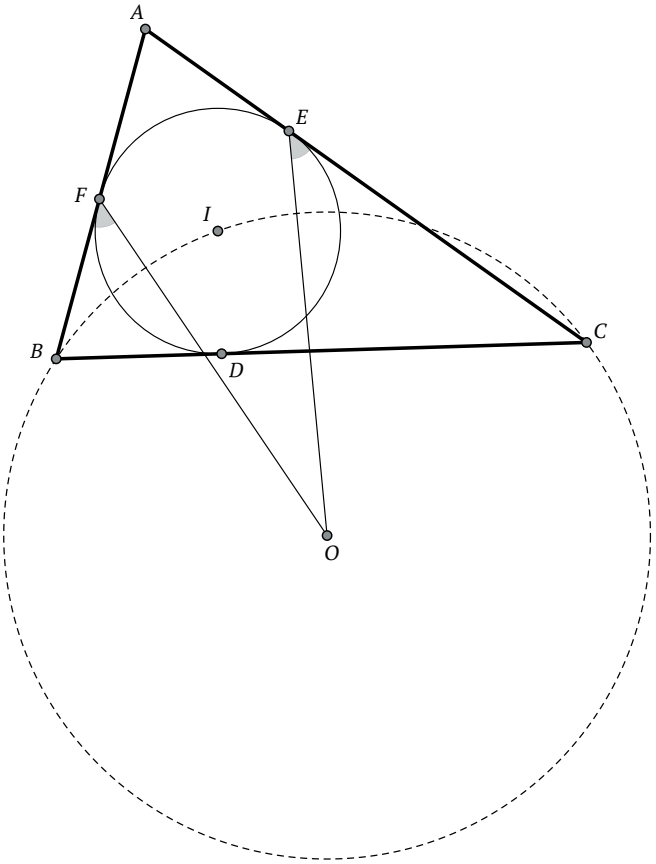


Рисунок 10

Пример 11. Вписанная окружность треугольника порождает свою описанную окружность

Теперь мы рассмотрим, как перпендикуляры, связанные с вписанной окружностью треугольника, могут порождать описанную окружность того же треугольника. Начнем с треугольника ABC, показанного на рис. 11, и вписанной в него окружности с центром I. Затем проведем отрезки AI, BI и CI и перпендикуляры из их середин, так что $EF \perp AI$, $FD \perp BI$ и $DE \perp CI$. Неожиданным результатом является то, что все точки D, E и F лежат на описанной окружности треугольника ABC. Это также важно потому, что часто необходимо получить

более трех определенных точек на одной и той же окружности, а в данном случае у нас даже есть шесть таких точек, а именно *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *F*.

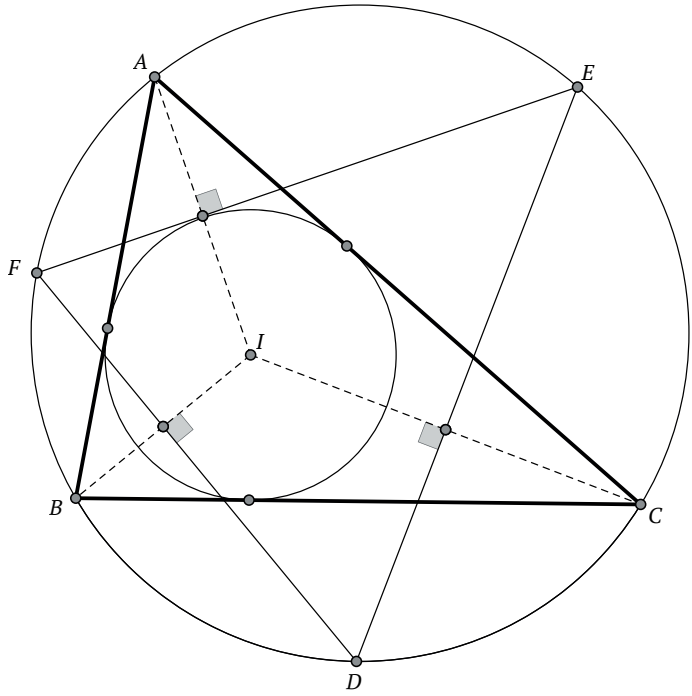


Рисунок 11

Пример 12. Основания высот делят треугольник на три пары треугольников равной площади

Точки *D*, *E* и *F* являются основаниями высот треугольника *ABC*, как показано на рис. 12. Точка *O* является центром описанной окружности треугольника *ABC*. Прямые *OA*, *OF*, *OB*, *OD*, *OC* и *OE* делят треугольник на шесть меньших треугольников, и мы с любопытством обнаруживаем, что

$$\text{площадь } \triangle AOF = \text{площадь } \triangle COD,$$
$$\text{площадь } \triangle BOF = \text{площадь } \triangle COE,$$
$$\text{а площадь } \triangle BOD = \text{площадь } \triangle AOE.$$

Может показаться, что они не равны по площади, но на самом деле равенство соблюдается.

Пример 13. Примечательное свойство ортоцентра треугольника

Точка пересечения трех высот треугольника, называемая ортоцентром, находится внутри треугольника, если треугольник является остроугольным,

и вне треугольника, если это тупоугольный треугольник. На рис. 13(а) показан остроугольный треугольник ABC с тремя его высотами: AD, BE и CF, пересекающимися в ортоцентре треугольника в точке H. На рис. 13(б) мы показываем тупоугольный треугольник с тремя пересекающимися высотами, где ортоцентр H находится за пределами треугольника.

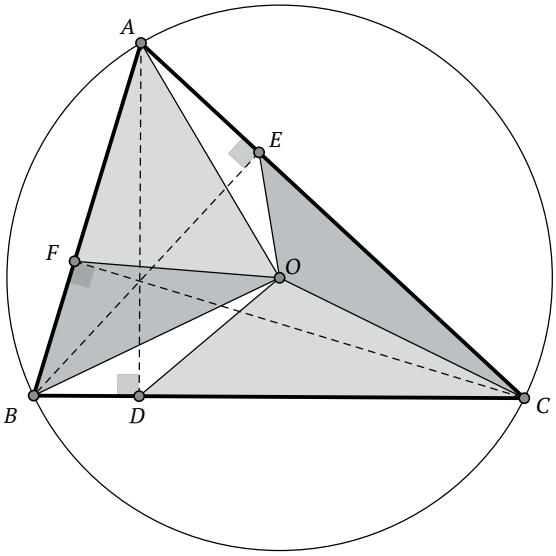


Рисунок 12

Ортоцентр треугольника обладает неожиданной особенностью: он разбивает каждую высоту таким образом, что произведение полученных отрезков каждой высоты равно произведению отрезков каждой из других высот. Мы можем видеть это на рис. 13(а) и 13(б) для треугольника ABC, где $AH \cdot DH = BH \cdot EH = CH \cdot FH$.

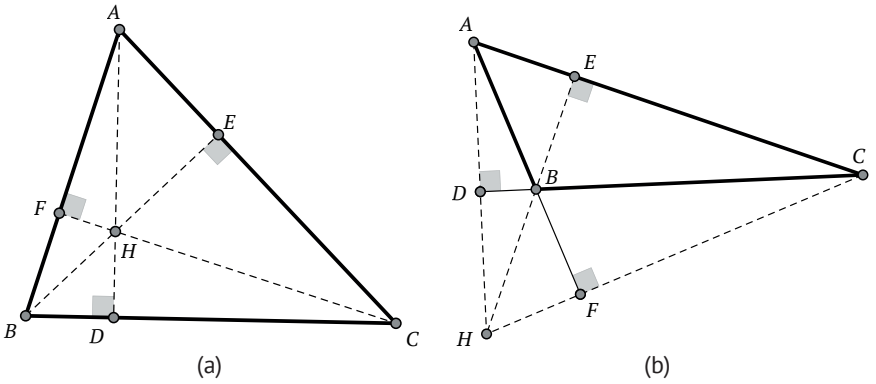


Рисунок 13

Пример 14. Окружность пересекает треугольник, образуя множество равных отрезков

При объединении окружностей с треугольником может получиться множество неожиданных результатов. На этот раз мы рассмотрим треугольник *MNR*, образованный соединением середин сторон треугольника *ABC*, как показано на рис. 14, где точка *H* — ортоцентр, образованный высотами *AD*, *BE* и *CF*. Рисуется произвольная окружность с центром *H*, которая пересекает продолженные стороны *NR*, *RM* и *MN* треугольника *MNR* в точках (*K*, *L*), (*P*, *Q*) и (*S*, *T*) соответственно. Довольно удивительно, но мы находим множество совпадений: *AK* = *AL* = *BP* = *BQ* = *CS* = *CT*.

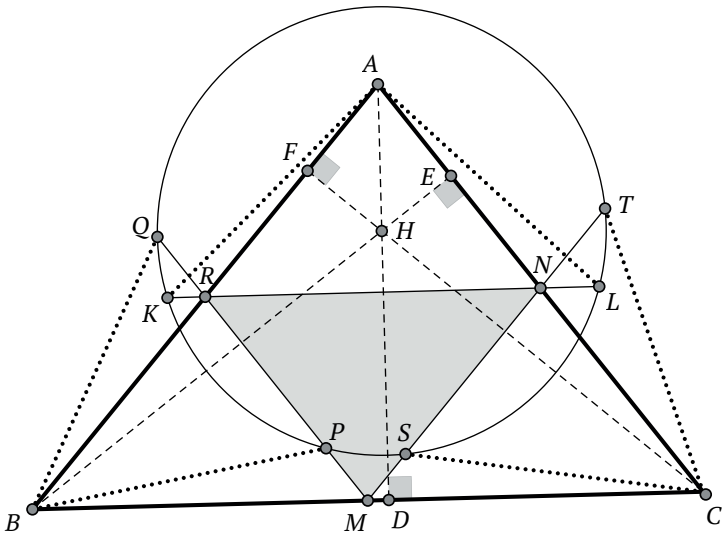


Рисунок 14

Пример 15. Странное представление равных треугольников

На первый взгляд, конфигурация на рис. 15 кажется несколько сложной. Однако на самом деле это простая конструкция, если рассматривать ее по частям, что приводит к поразительному результату. Мы начинаем с треугольника *ABC* и биссектрис *DE*, *EF* и *FD* каждого из его внешних углов, обозначая их точки пересечения как *D*, *E* и *F*, как показано на рисунке. Затем мы находим ортоцентры каждого из трех треугольников *BCD*, *CAE* и *ABF* и обозначаем их как *G*, *H* и *K* соответственно. В результате получается треугольник *GHK*, стороны которого параллельны и равны исходному треугольнику *ABC*. Немного длинновато, но, безусловно, стоит того, чтобы получить потрясающий результат — пару идентичных треугольников, а именно *GHK* и *ABC*.

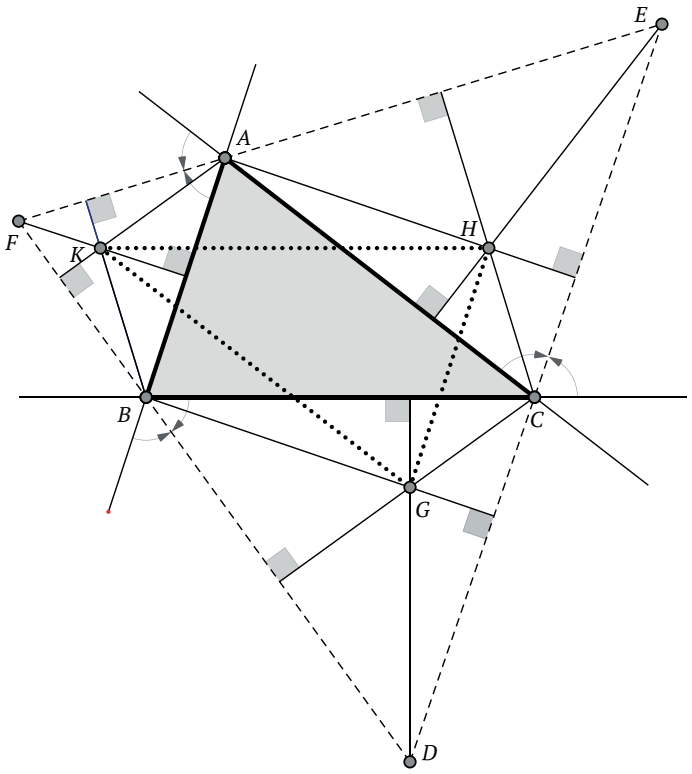


Рисунок 15

Пример 16. Ортоцентр создает три точки на одной прямой

И снова мы обнаруживаем, что высоты треугольника приводят к некоторым удивительным закономерностям. На рис. 16 точка *P* — это произвольная точка на описанной окружности треугольника *ABC*. Мы продлеваем высоты *AL*, *BM* и *CN* треугольника *ABC* за пределы сторон, на которые они опущены, и находим точки *D*, *E* и *F* пересечения их с описанной окружностью. Если провести прямые от точки *P* к этим трем точкам *D*, *E* и *F* на окружности, они пересекут соответствующие стороны треугольника в точках *R*, *S* и *T*. Удивительно, но эти три точки *R*, *S* и *T* окажутся лежащими на одной прямой с ортоцентром *H* треугольника.

Пример 17. Ортоцентр выступает как середина отрезка

Точка пересечения высот, которая является ортоцентром *H* треугольника *ABC*, на рис. 17 соединена с серединой *M* стороны *BC*. Прямая, перпендикулярная *MH* в точке *H*, пересекает стороны *AB* и *AC* в точках *K* и *L* соответственно. Поразительно, но мы обнаруживаем, что *H* является серединой отрезка прямой *KL*, то есть *KH* = *LH*.

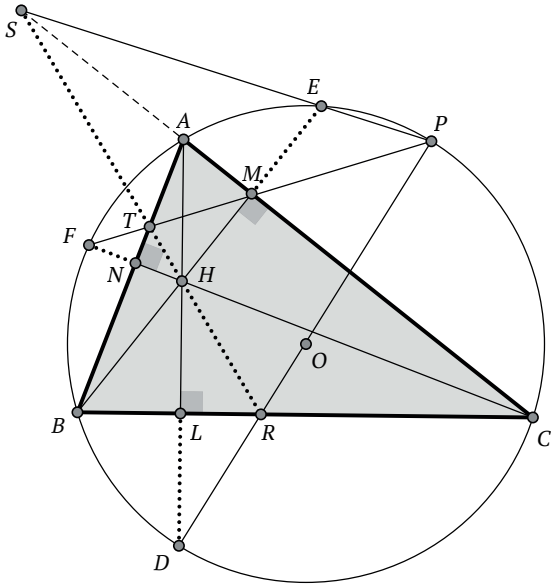


Рисунок 16

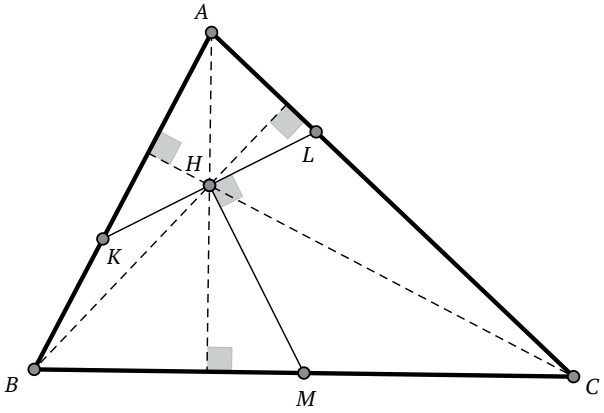


Рисунок 17

Пример 18. Совокупность перпендикуляров образует равные отрезки прямой

Построение, показанное на рис. 18, начинается с точки *H*, ортоцентра треугольника *ABC*, высоты которого равны *AD*, *BE* и *CF*. Затем мы проводим прямую *AP* перпендикулярно отрезку *EF*, пересекающую его в точке *P*. Если мы потом также соединим точки *P* и *D* отрезком *PD*, то перпендикулярная к нему прямая через точку *H* до линии *EF* пересечет ее в точке *Q*. Если продлить *QH* до пересечения *PD* в точке *R*, то неожиданно обнаружится, что *HR* = *HQ*.

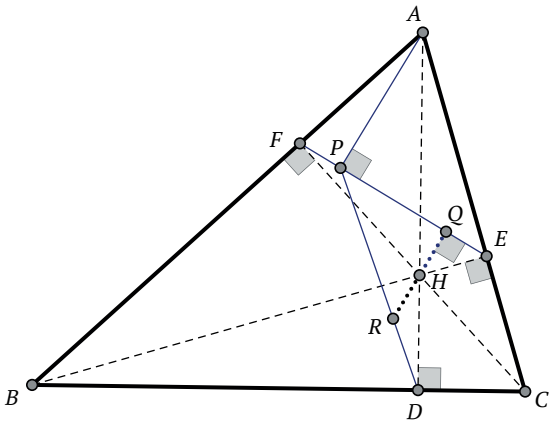


Рисунок 18

Пример 19. Еще одна неожиданная коллинеарность

На рис. 19 окружность с центром *I* вписана в треугольник *ABC*. Точки *D*, *E* и *F* являются точками ее касания со сторонами *BC*, *CA* и *AB* соответственно. Точки пересечения продолжений отрезков, соединяющих эти точки касания с продолжениями противоположных сторон, лежат на одной прямой. В данном случае продолжение *EF* пересекает продолжение *BC* в точке *K*, продолжение *FD* пересекает продолжение *CA* в точке *L*, а продолжение *DE* пересекает продолжение *AB* в точке *M*. Удивительно, но точки *M*, *L* и *K* лежат на одной прямой.

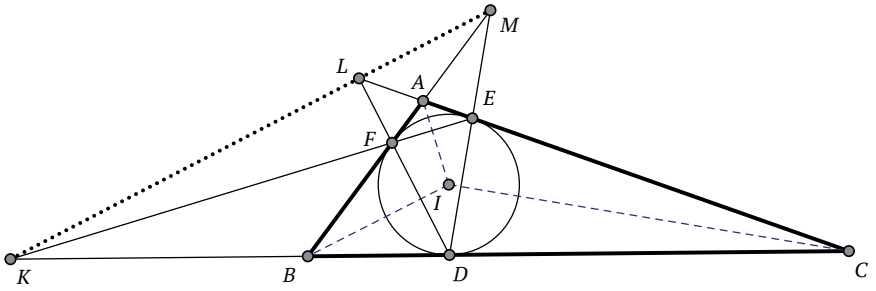


Рисунок 19

Пример 20. Представляем ортоцентрический треугольник

Из оснований высот треугольника получается треугольник, называемый *ортоцентрическим*. Он представляет собой особый тип *подэрного* треугольника[1] и обладает некоторыми очень интересными свойствами. На рис. 20 представ-

[1] **Подэрный треугольник** (англ. *pedal triangle*) — треугольник, вершинами которого являются основания перпендикуляров, исходящих из произвольной точки внутри треугольника к его сторонам.

лена одна из таких особенностей: мы видим, что высоты (остроугольного) треугольника *ABC* делят пополам углы ортогонального треугольника *DEF*. Кроме того, в этой конфигурации есть и другие особенности, которые стоит оценить: например, здесь можно увидеть четыре подобных треугольника: $\triangle ABC \sim \triangle BFD \sim \triangle ECD \sim \triangle EFA$.

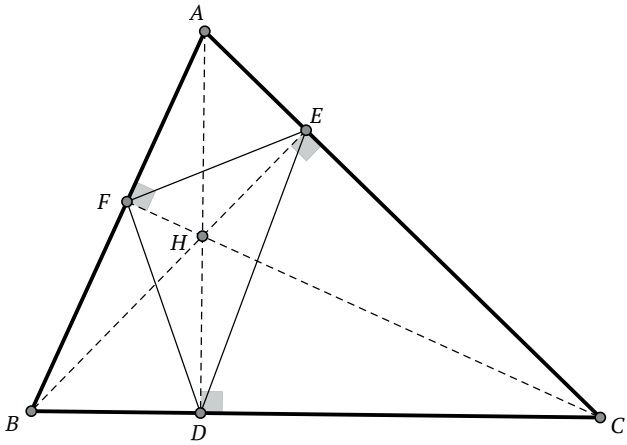


Рисунок 20

Пример 21. Определение периметра ортоцентрического треугольника

Существует довольно простой способ определения периметра ортоцентрического треугольника *DEF*. Перпендикуляры, опущенные из точки *D* на *AB* и *AC*, пересекаются со сторонами в точках *Q* и *P* соответственно (см. рис. 21). К нашему удивлению, обнаруживается, что периметр треугольника *DEF* равен удвоенной длине отрезка *PQ*.

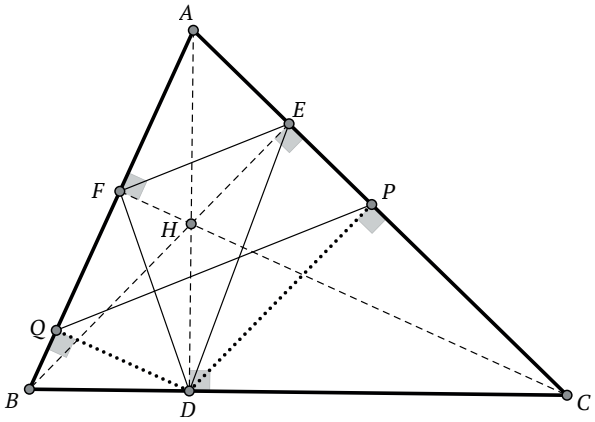


Рисунок 21

Пример 22. Ортоцентрический треугольник — вписанный треугольник с наименьшим периметром

Еще одна непредвиденная особенность ортоцентрического треугольника заключается в том, что он имеет наименьший периметр по сравнению с любым другим треугольником, вписанным в тот же исходный треугольник. На рис. 22 показан ортоцентрический треугольник *DEF*, вписанный в треугольник *ABC*. Для любого другого произвольно вписанного треугольника *JKL* можно показать, что периметр ортогонального треугольника *DEF* окажется меньше периметра треугольника *JKL*. Впервые это свойство было обнаружено в 1775 году Джованни Фаньяно (1715–1797), и поэтому его называют *задачей Фаньяно*.

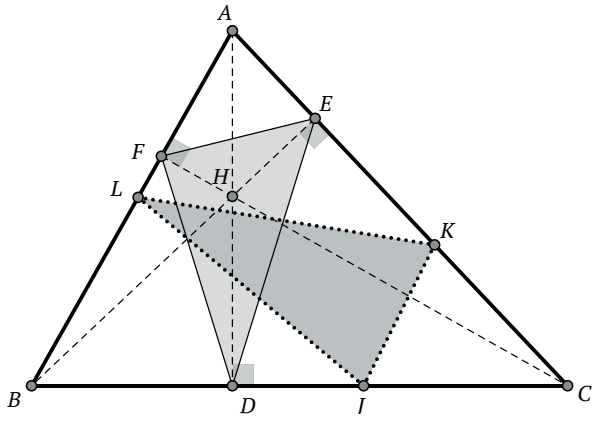


Рисунок 22

Пример 23. Удивительный подобный треугольник для ортоцентрического треугольника

Иногда мы натыкаемся на отношения подобия самым необычным образом. На рис. 23 каждая из высот треугольника *ABC* продолжается до пересечения с описанной окружностью в точках *K*, *L* и *M*. Результирующий треугольник *KLM* имеет стороны, параллельные сторонам ортогонального треугольника *DEF*, что означает подобие $\triangle KLM$ и $\triangle DEF$.

Пример 24. Замечательное совпадение в ортоцентрическом треугольнике

Ортоцентрический треугольник продолжает удивлять нас пересечениями. Рассмотрим треугольник *ABC*, показанный на рис. 24, вместе с его ортоцентрическим треугольником *DEF* и серединами *M*, *N* и *R* сторон *EF*, *FD* и *DE* соответственно. Из этих средних точек проведены перпендикуляры *JM*, *KN* и *LR* к противолежащим сторонам исходного треугольника *ABC*, которые пересека-

ются со сторонами в точках *J*, *K* и *L*. Снова мы обнаруживаем непредвиденное совпадение, поскольку *JM*, *KN* и *LR* пересекаются в одной точке *P*.

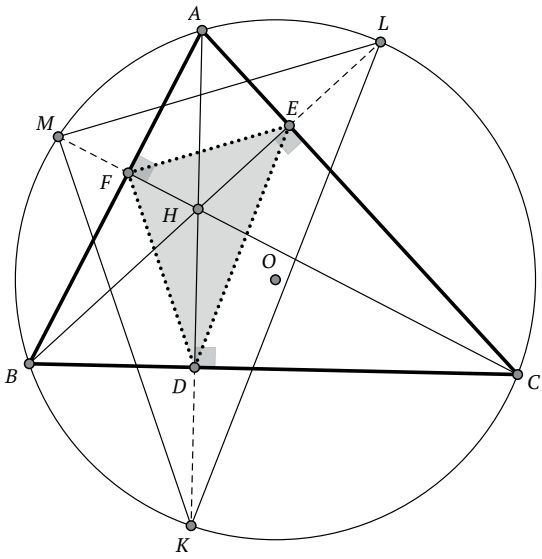


Рисунок 23

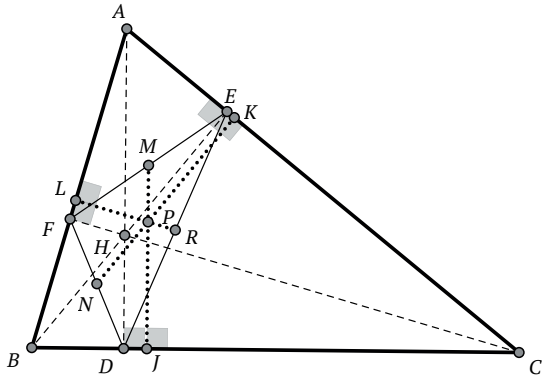


Рисунок 24

Пример 25. Ортоцентрический треугольник порождает равнобедренный треугольник

Ортоцентрический треугольник имеет еще одну любопытную особенность, поскольку с его помощью можно построить равнобедренный треугольник. Предположим, что мы берем середину любой из сторон треугольника *ABC*. Как показано на рис. 25, в данном случае выбираем середину *M* стороны *AC*. Соединив точку *M* с двумя противолежащими вершинами ортоцентрического треугольника *DEF*, совершенно неожиданно обнаруживаем, что получен-

ные отрезки равны, т. е. *DM* = *FM*, что делает треугольник *DMF* равнобедренным. Мы можем сформировать и другие равнобедренные треугольники, выбрав другие середины на сторонах треугольника и соединив эти точки с соответствующими противолежащими вершинами ортоцентрического треугольника.

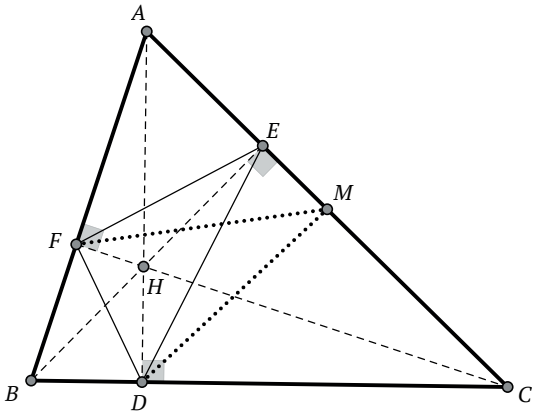


Рисунок 25

Пример 26. Ортоцентрический треугольник образует параллелограмм

Как мы можем заключить из предыдущих примеров, у ортоцентрического треугольника, по-видимому, есть множество удивительных свойств. Сейчас мы покажем, как ортогональный треугольник может образовывать параллелограмм. Если рассмотреть вписанную окружность ортогонального треугольника *DEF*, показанного на рис. 26, с точками касания *K*, *L* и *M* и продолжить *KL* до пересечения с высотой *AD* в точке *G*, как ни странно, получим *GL* = *GM*. Это еще не все. Если мы продолжим отрезок *LM* так, чтобы он пересекал высоту *FC* в точке *J*, а затем проведем прямые *JE* и *EG*, то обнаружим, что *JLGE* представляет собой параллелограмм.

Пример 27. Точки на одной окружности, образуемые ортоцентрическим треугольником

Если этого недостаточно, то в конфигурации с ортоцентрическим треугольником нас ждет еще больше сюрпризов. На рис. 27 мы имеем шесть точек *H*, *M*, *J*, *E*, *G* и *K*. Все эти точки лежат на одной общей окружности, центр которой находится на высоте *BE*. Наличие шести точек на одной окружности — большая редкость.

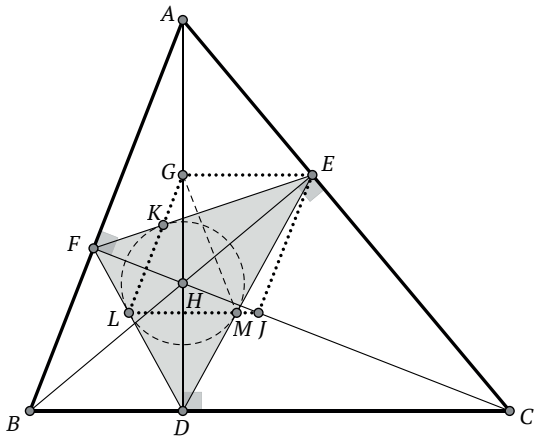


Рисунок 26

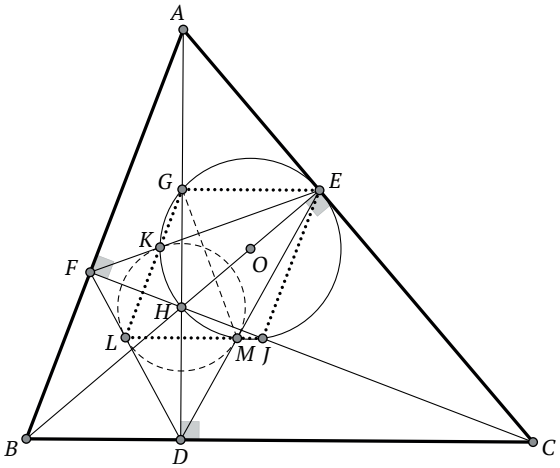


Рисунок 27

Пример 28. Ортоцентрический треугольник порождает пересекающиеся прямые

Бывают случаи, когда свойство пересекаться в одной точке проявляется при самых странных обстоятельствах, и тут снова вмешивается ортоцентрический треугольник. На рис. 28 показан ортоцентрический треугольник *DEF* в треугольнике *ABC* с высотами *AD*, *BE* и *CE*. Выберем точку *P*, лежащую на высоте *AD*. Отрезок *EP* продолжается до пересечения с *FD* в точке *G*, а отрезок *FP* продолжен до пересечения с *ED* в точке *J*. Неожиданным результатом является то, что продолжения *EF*, *JG* и *CB* сходятся в общей точке *Q*. Здесь мы можем видеть, как несколько запутанная геометрия приводит к удивительному результату.

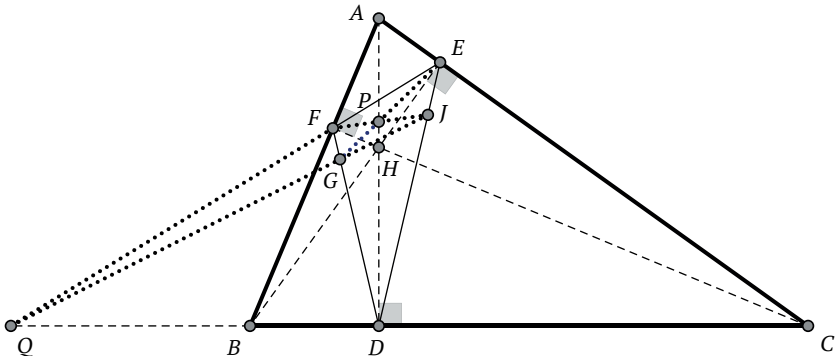


Рисунок 28

Пример 29. Ортоцентрический треугольник создает точки, лежащие на одной прямой

В конфигурации, аналогичной той, что показана на рис. 28, рассмотрим вариант, приведенный на рис. 29, где мы приходим к коллинеарности[1] вместо сходимости в одной точке. Здесь основания высот на сторонах треугольника *ABC* находятся в точках *D*, *E* и *F*. Прямая *DE* пересекает продолжение *AB* в точке *M*; прямая *EF* пересекает продолжение стороны *BC* в точке *K*; а прямая *FD* пересекает продолжение стороны *CA* в точке *L*. Неожиданно мы обнаруживаем, что точки *K*, *L* и *M* лежат на одной прямой.

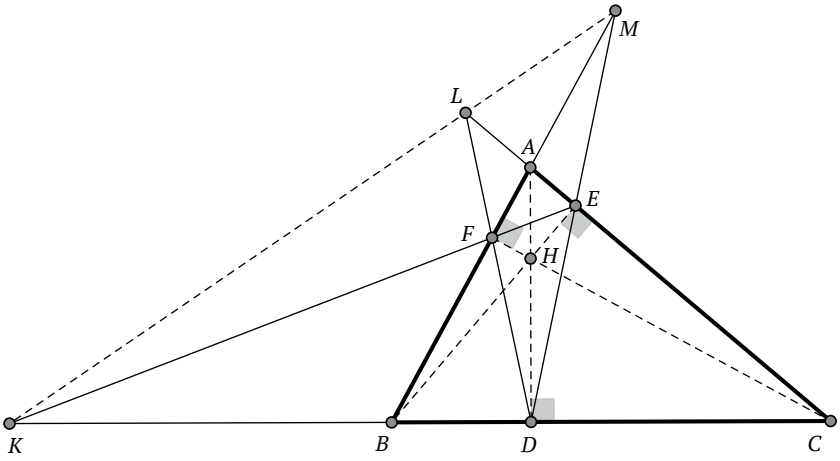


Рисунок 29

[1] Напоминаем, что **коллинеарность** для точек означает, что они лежат на одной прямой.

Пример 30. Неожиданное свойство основания высоты треугольника

На рис. 30 мы видим произвольный треугольник ABC с высотами BE и CF, пересекающимися со сторонами AC и AB в точках E и F соответственно. Отрезки, проведенные к этим точкам из средней точки M стороны BC, равны между собой: $ME = MF$, как мы уже установили в примере 25. Необычным является то, что это утверждение справедливо для треугольника ABC любой формы. В показанной конфигурации также нас ждет еще несколько сюрпризов. Мы находим, что $\angle EBA = \angle ACF$, и после проведения перпендикуляра к средней точке EF видим, что EF содержит середину M стороны BC.

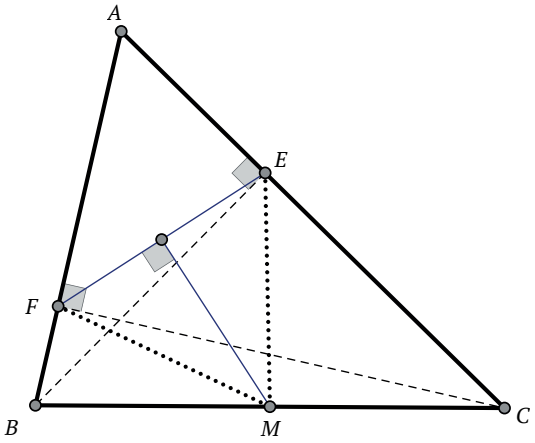


Рисунок 30

Пример 31. Как из неравнобедренного треугольника можно построить параллелограмм

Выполнение различных действий в пределах обычного треугольника, не обладающего особыми свойствами, часто позволяет создавать красивые геометрические фигуры. На рис. 31, например, показано, как можно создать параллелограмм из произвольного неравнобедренного треугольника ABC. Описанная окружность вокруг ABC имеет центр O. Мы проводим продолжение AO до точки D так, что $\angle ADB = \angle CDA$. Из точки D мы проводим перпендикуляр к стороне AB, пересекающий ее в точке E, и перпендикуляр к стороне AC, пересекающий ее в точке F. Для построения параллелограмма нужна еще одна точка, и это точка G, являющаяся основанием высоты из A на сторону BC. Четырехугольник $DFGE$ на самом деле является параллелограммом.

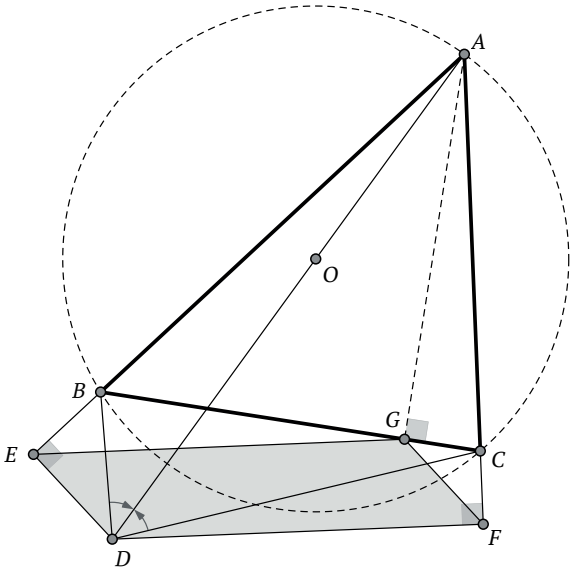


Рисунок 31

Пример 32. Перпендикуляры, образующие неожиданные параллельные прямые

Проведение перпендикуляров к сторонам треугольника может привести к весьма неожиданным результатам, как мы можем видеть на рис. 32. Перпендикуляры проводятся от случайно выбранной точки *P* на описанной окружности треугольника *ABC* к каждой из его трех сторон, пересекая стороны *BC*, *CA* и *AB* в точках *J*, *K* и *L* соответственно. Эти перпендикуляры (или их продолжения в некоторых случаях) пересекают описанную окружность во второй раз в точках *D*, *E* и *F* соответственно. Когда мы соединяем эти точки с соответствующими вершинами исходного треугольника, получается серия из трех параллельных прямых *AD*, *BE* и *CF*. Помните, что точка *P* могла находиться в любом месте описанной окружности, но эти прямые оказываются параллельными в любом случае.

Пример 33. Описанная окружность порождает точки на одной прямой

Точки, лежащие на одной прямой, также возникают, когда три касательные к окружности в вершинах вписанного в окружность треугольника пересекаются с продолжениями противолежащих сторон треугольника. Мы можем видеть это на рис. 33, где касательные *AD*, *BE* и *CF* к описанной окружности треугольника *ABC* пересекаются с продолжениями сторон *BC*, *CA* и *AB* в точках *D*, *E* и *F* соответственно, которые оказываются лежащими на одной прямой.

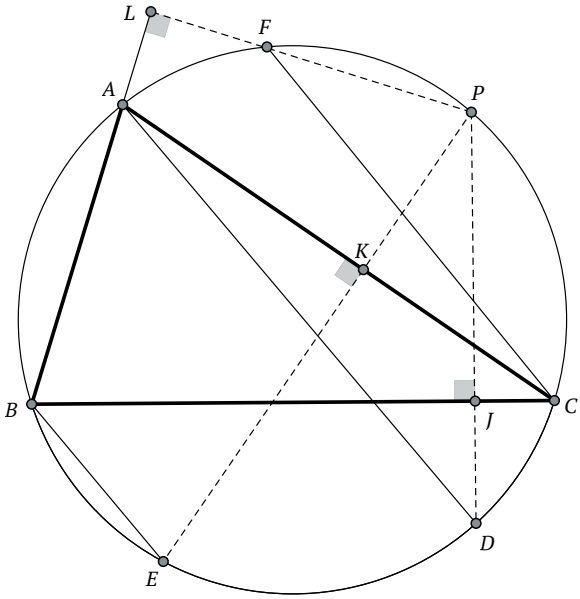


Рисунок 32

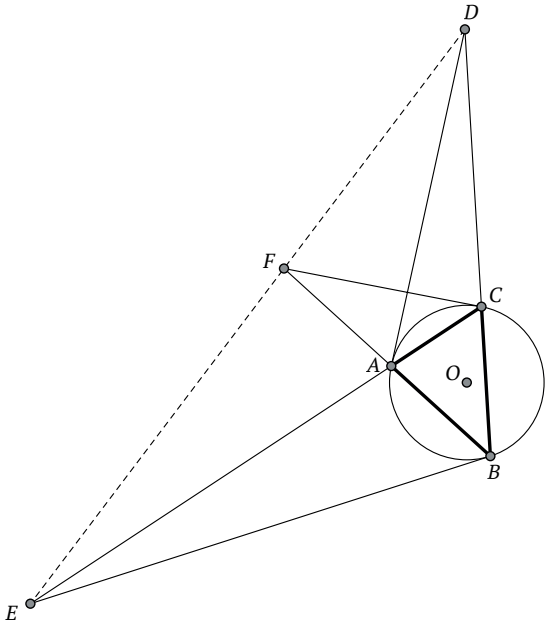


Рисунок 33

Пример 34. Неожиданное равенство треугольников в круге

Создание двух равных треугольников с разной ориентацией, вписанных в один круг, — это действительно необычный опыт. На рис. 34 мы возвраща-

емся к конфигурации из примера 32. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O, и из произвольной точки P на этой окружности к трем сторонам проведены перпендикуляры, пересекающие их в точках J, K и L. Эти перпендикуляры пересекают окружность во второй раз в точках D, E и F соответственно. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что $\triangle ABC$ равен $\triangle DFE$.

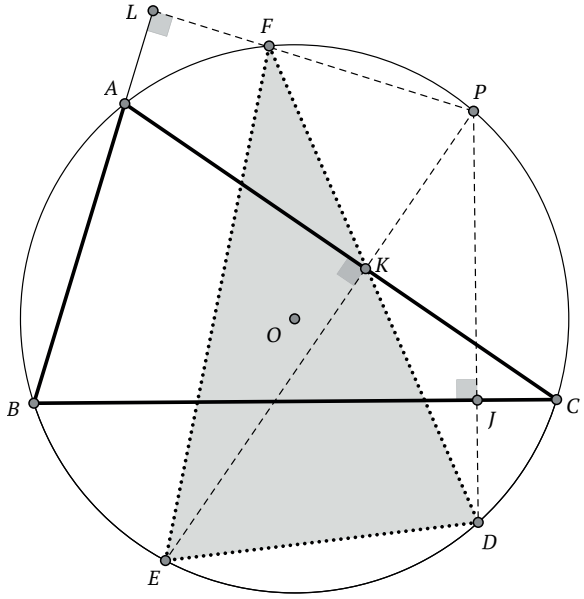


Рисунок 34

Пример 35. Неожиданное свойство результата

На рис. 35 мы видим треугольник ABC с высотой BD, вписанный в окружность с центром O диаметром BE. Примечательно, что при таком простом расположении получается $AB \cdot BC = BD \cdot BE$.

Пример 36. Необычное произведение двух сторон треугольника

На рис. 36 мы видим необычную зависимость между диаметром описанной окружности треугольника ABC, его высотой AE и его сторонами AB и AC. Так получилось, что их произведения равны, и мы имеем $AD \cdot AE = AB \cdot AC$.

Пример 37. Теорема Симсона

Замечательным результатом, касающимся коллинеарных точек в треугольниках, является знаменитая теорема Симсона. Эта теорема представляет одну из величайших несправедливостей в истории математики. Впервые она была опубликована Уильямом Уоллесом (1768–1843) только в 1799 году, но была

приписана Роберту Симсону (1687–1768), известному английскому переводчику «Начал» Евклида, чья книга стала основой для изучения геометрии в англоязычном мире и, в частности, оказала большое влияние на курс геометрии в средней школе. Чтобы соответствовать норме, мы будем придерживаться более популярного названия «теорема Симсона»[1].

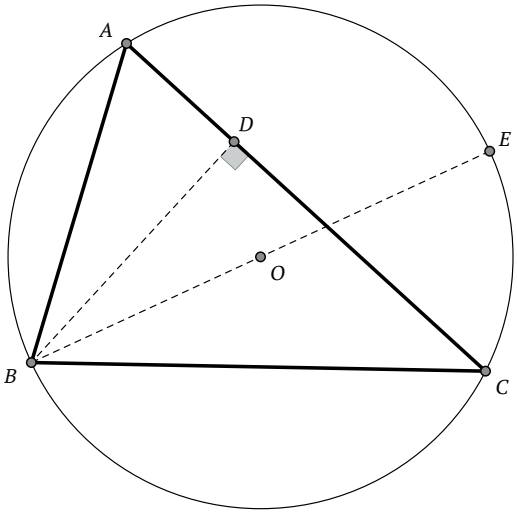


Рисунок 35

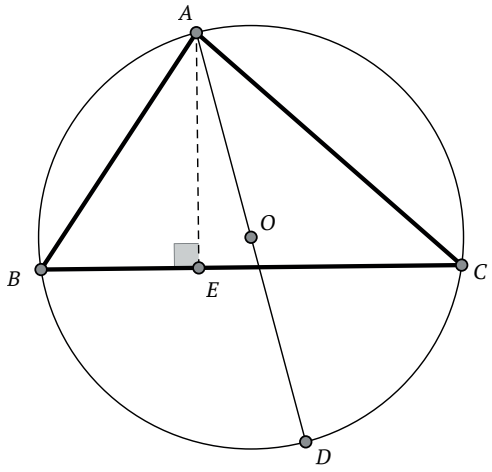


Рисунок 36

Теорема Симсона утверждает, что основания перпендикуляров, проведенных из произвольной точки описанной окружности треугольника к сторонам

[1] В ряде источников теорема несет двойное наименование «теорема Симсона—Уоллеса» (Simson-Wallace Theorem).

треугольника, лежат на одной прямой. Это показано на рис. 37, где P — произвольная точка на описанной окружности треугольника ABC. Затем мы проводим перпендикуляры $PX \perp BC$, $PY \perp CA$ и $PZ \perp AB$, обозначая их основания символом X на BC, Y на CA и Z на AB. Согласно теореме Симсона, точки X, Y и Z лежат на одной прямой независимо от того, где расположена точка P на описанной окружности треугольника. Эту прямую обычно называют *прямой Симсона*.

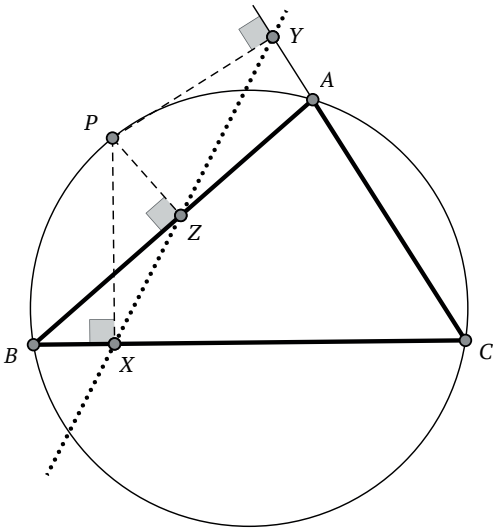


Рисунок 37

Пример 38. Расширение теоремы Симсона

Интересное расширение теоремы Симсона касается случая, когда точка P лежит на продолжении одной из высот треугольника ABC. В случае, показанном на рис. 38, точка P лежит на продолжении высоты от вершины C до стороны AB. В результате прямая Симсона оказывается параллельной касательной к описанной окружности в точке C.

Пример 39. Интересный аспект теоремы Симсона

Прямая Симсона обладает еще одним удивительным свойством. Мы обнаружили, что она делит пополам отрезок, соединяющий описанную в предыдущем примере точку P на описанной окружности $\triangle ABC$ и его ортоцентр H. Другими словами, как мы видим на рис. 39, $RP = RH$, где R обозначает пересечение PH и прямой Симсона для точки P.

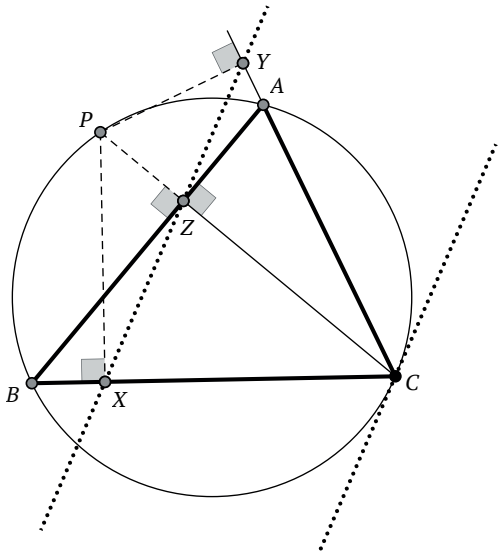


Рисунок 38

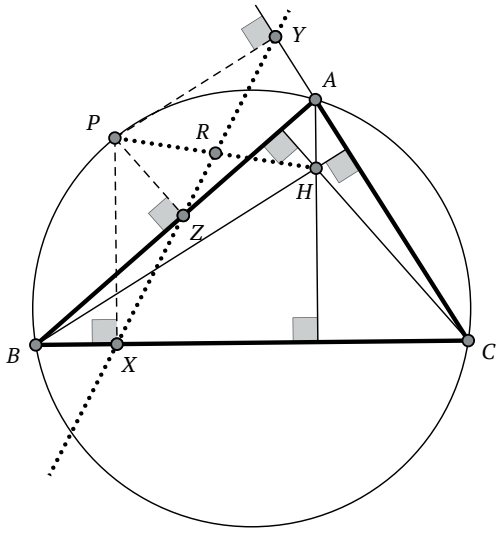


Рисунок 39

Пример 40. Параллель прямой Симсона

Когда мы проводим один из перпендикуляров от точки *P*, например как показано на рис. 40, перпендикуляр *PX* до пересечения с описанной окружностью в точке *Q*, мы обнаруживаем, что *AQ* параллельна прямой Симсона для точки *P*.

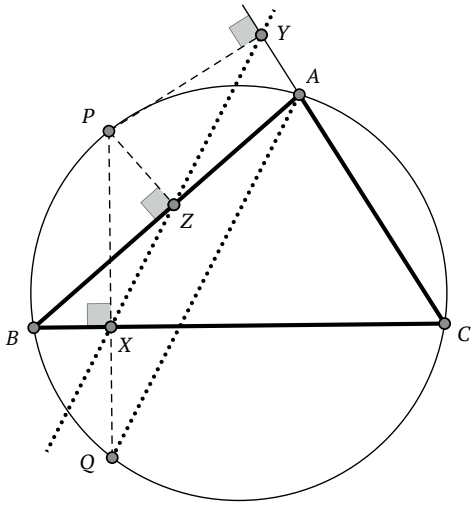


Рисунок 40

Пример 41. Два треугольника, связанных общей точкой: центр описанной окружности и геометрический центр

Бывают случаи, когда два треугольника связаны общей точкой; в данном случае центр описанной окружности одного треугольника является центром масс (геометрическим центром) другого треугольника. На рис. 41 центром описанной окружности треугольника *ABC* является точка *O*. Мы проводим медианы *AL*, *BM* и *CN* треугольника *ABC*, которые пересекаются в точке *G*, геометрическом центре $\triangle ABC$. Построив перпендикуляры к серединам отрезков *AG*, *BG* и *CG* в точках *Q*, *R* и *S* соответственно, мы обнаружим, что эти перпендикуляры пересекаются в точках *X*, *Y* и *Z*. Если мы затем проведем медианы *XD*, *YE* и *ZF* треугольника *XYZ*, то их точка пересечения (геометрический центр $\triangle XYZ$) будет находиться в точке *O*. Следовательно, точка *O* является одновременно геометрическим центром треугольника *XYZ* и центром описанной окружности треугольника *ABC*.

Пример 42. Знакомимся с медианами треугольника и некоторыми их удивительными свойствами

Напомним, что медиана треугольника соединяет вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, а три медианы пересекаются в общей точке, называемой геометрическим центром, или центром масс треугольника. На рис. 42 мы видим треугольник *ABC* с медианами *AD*, *BE* и *CF* и геометрическим центром *G*. Любая из трех медиан треугольника делит его на две части равной площади. Например, медиана *AD* треугольника *ABC* делит треугольник на два треугольника равной площади, и мы получаем *площадь* $\triangle ABD$ = *площадь* $\triangle ACD$, поскольку они имеют равные основания и имеют общую высоту. Мы

можем сделать еще один шаг вперед и показать, что медианы треугольника делят весь треугольник на шесть треугольников равной площади: *площадь* $\triangle GBD$ = *площадь* $\triangle GCD$ = *площадь* $\triangle GCE$ = *площадь* $\triangle GAE$ = *площадь* $\triangle GAF$ = *площадь* $\triangle GBF$.

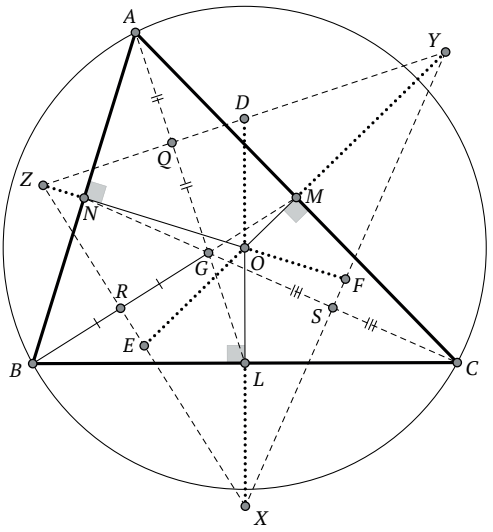


Рисунок 41

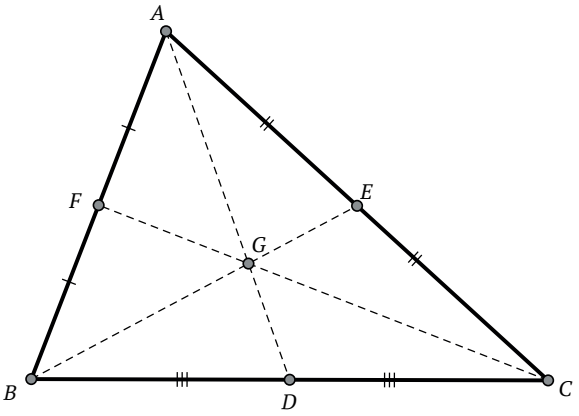


Рисунок 42

Это также подразумевает хорошо известный факт, что геометрический центр является точкой пересечения медиан.

Самая короткая медиана треугольника — та, конечная точка (основание) которой находится на самой длинной стороне. Кроме того, сумма длин медиан меньше периметра треугольника и больше, чем три четверти периметра треугольника. В соответствии с обозначениями на рис. 42 это можно выразить в виде следующей формулы:

$$AB + BC + CA > AD + BE + CF > \tfrac{3}{4}(AB + BC + CA).$$

Медианы также имеют довольно неожиданное соотношение со сторонами треугольника: сумма квадратов медиан равна трем четвертям суммы квадратов сторон треугольника. В соответствии с обозначениями на рис. 42 это выглядит так:

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Существует еще много взаимосвязей с участием медиан и сторон треугольника, которые стоит изучить.

Пример 43. Медиана треугольника равноудалена от двух вершин

Малоизвестным свойством медианы треугольника является то, что она равноудалена от двух других вершин треугольника. На рис. 43 в треугольнике *ABC* медиана *AD* продолжена до пересечения в точке *P* с перпендикуляром от вершины *B*. Кроме того, перпендикуляр от вершины *C* к медиане *AD* пересекает ее в точке *Q*. Затем мы можем видеть, что *BP* = *CQ,* что, в свою очередь, указывает на то, что вершины *B* и *C* равноудалены от медианы *AD*.

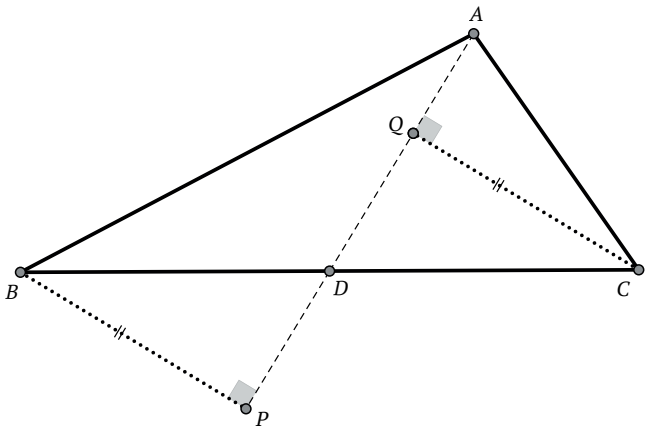


Рисунок 43

Пример 44. Особая медиана в прямоугольном треугольнике

Как и следовало ожидать, у прямоугольного треугольника есть особая медиана. Медиана, проходящая через гипотенузу прямоугольного треугольника, равна половине длины гипотенузы. На рис. 44 мы имеем прямоугольный треугольник *ABC* и находим, что медиана $AM = \frac{1}{2}BC$.

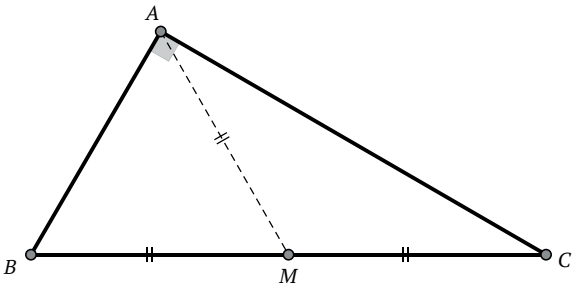


Рисунок 44

Пример 45. Медианы делят любой треугольник на четыре равных треугольника

Помимо деления треугольника на шесть треугольников равной площади, медианы также могут делить треугольник на четыре равных треугольника. Если мы соединим середины сторон треугольника, как показано на рис. 45, то получим отрезки *DE*, *EF* и *FD*. Они называются средними линиями треугольника. Средние линии разделены пополам медианами, а медианы, в свою очередь, разделены пополам средними линиями, так что, например, *AL* = *LD* и *EL* = *LF*. Это, конечно, справедливо для всех медиан. Кроме того, средние линии делят треугольник на четыре равных (конгруэнтных[1]) треугольника: $\triangle AEF \cong \triangle FDB \cong \triangle ECD \cong \triangle DFE$.

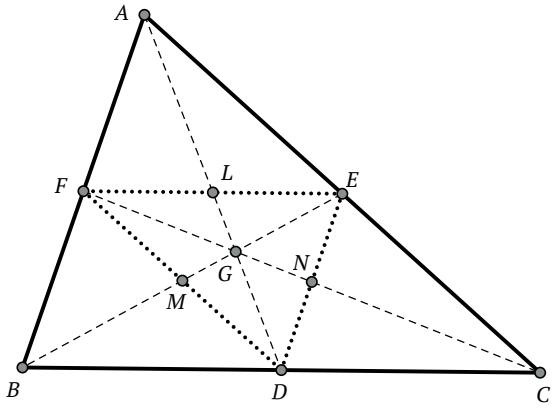


Рисунок 45

Пример 46. Как геометрический центр помогает построить подобный треугольник

Помимо разбиения каждой медианы на три равные части, геометрический центр также позволяет нам построить треугольник, подобный исходному. Как

[1] **Конгруэнтность** означает то же самое, что равенство, с учетом поворота или симметричного отражения. Для обозначения конгруэнтности употребляют символ ≅.

показано на рис. 46, медианы *AD*, *BE* и *CF* определяют геометрический центр *G*, а прямая *LK* проведена через точку *G* параллельно стороне *BC*, пересекая *AB* в точке *L* и *AC* в точке *K*. Затем мы проводим прямую *CL*, чтобы пересечь медиану *BE* в точке *J*, и прямую *BK*, чтобы пересечь медиану *CF* в точке *H*. Неожиданно мы обнаруживаем, что треугольник *DHJ* подобен треугольнику *ABC*.

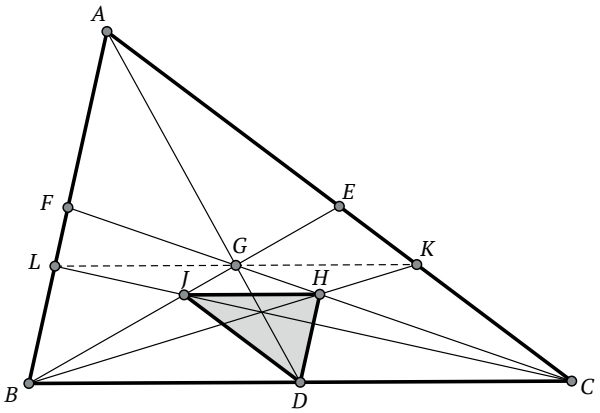


Рисунок 46

Пример 47. Геометрический центр обеспечивает необычное соотношение

Геометрический центр треугольника обладает впечатляющим свойством. Если вы проведете произвольную прямую через этот центр, сумма расстояний от двух вершин треугольника до этой прямой будет равна расстоянию от третьей вершины до этой же прямой. Это показано на рис. 47, где отрезок *MN* — произвольная прямая, проходящая через геометрический центр *G* треугольника *ABC*. Чтобы измерить расстояние от вершин треугольника *ABC* до этой прямой, мы проводим к ней перпендикуляры *AK*, *BM* и *CN* от каждой из вершин и находим, что $AK = MB + NC$. Имейте в виду, что это справедливо для любой произвольной прямой, проведенной через геометрический центр *G*.

Пример 48. Расстояния от вершин треугольника до произвольной прямой

Совершенно неожиданно мы обнаруживаем довольно необычную взаимосвязь между расстояниями от вершин треугольника до произвольно проведенной прямой линии и расстоянием от геометрического центра до этой прямой. Рассмотрим рис. 48, где расстояния *AK*, *BM* и *CN* до некоей прямой от вершин треугольника *ABC* связаны с расстоянием *GP* от геометрического центра *G* до той же прямой через соотношение $BM + AK + CN = 3GP$. Следует отметить, что прямая *MN* могла бы пересекать стороны треугольника, не проходя через геометрический центр *G*. В этом случае расстояния должны отсчи-

тываться с учетом направления, так чтобы точки на одной стороне прямой имели положительные значения расстояний от нее, а точки на другой стороне имели бы отрицательные значения[1].

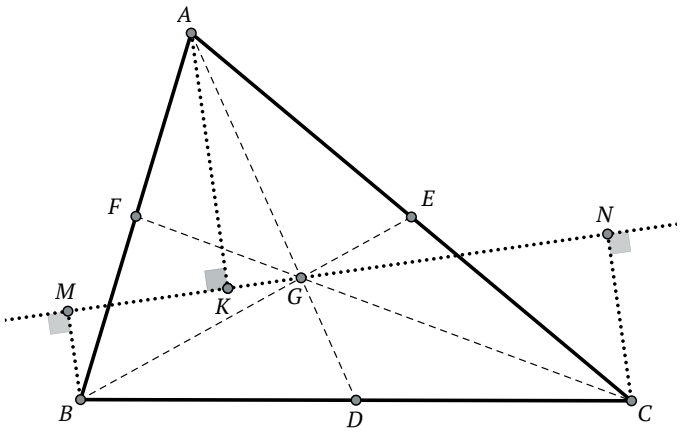


Рисунок 47

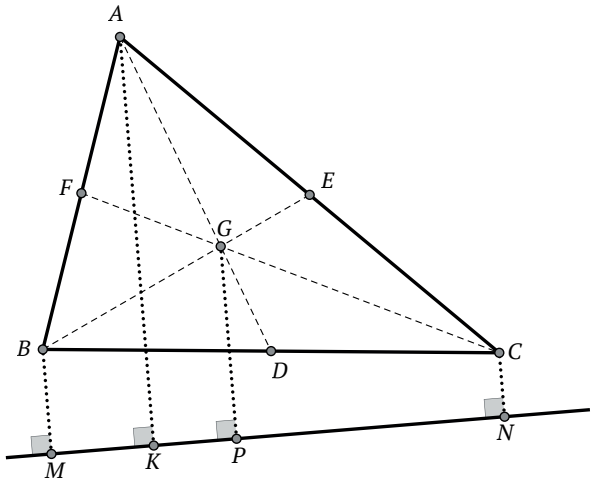


Рисунок 48

Пример 49. Особое свойство геометрического центра, когда две медианы перпендикулярны

Рассмотрим особый случай треугольника *ABC*, когда две его медианы перпендикулярны. На рис. 49 треугольник *ABC* имеет перпендикулярные медианы *AD*

[1] Очевидно, что в случае прохождения прямой через геометрический центр соотношение также будет соблюдаться, просто сумма расстояний *BM* + *AK* + *CN* с учетом знака будет равна нулю.

и BE, пересекающиеся в геометрическом центре G. В этом необычном случае справедливо следующее интересное соотношение: $AC^2 + BC^2 = 5AB^2$.

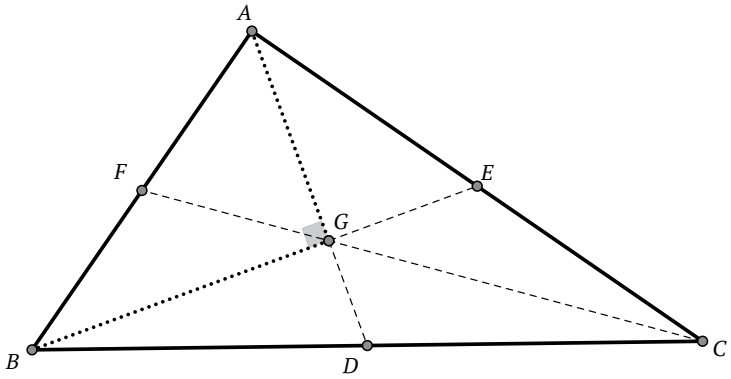


Рисунок 49

Пример 50. Удивительное свойство геометрического центра

У геометрического центра также есть одно необычное свойство, которое не очень хорошо известно. На рис. 50 точка G является геометрическим центром треугольника ABC. Точки P и N выбираются в треугольнике ABC произвольным образом с одним условием: они должны быть равноудалены от геометрического центра G. Результат, который обычно ставит в тупик больше всего, заключается в том, что сумма квадратов расстояний от каждой из этих двух точек до трех вершин треугольника одинакова. В виде формулы это можно выразить как $AP^2 + BP^2 + CP^2 = AN^2 + BN^2 + CN^2$.

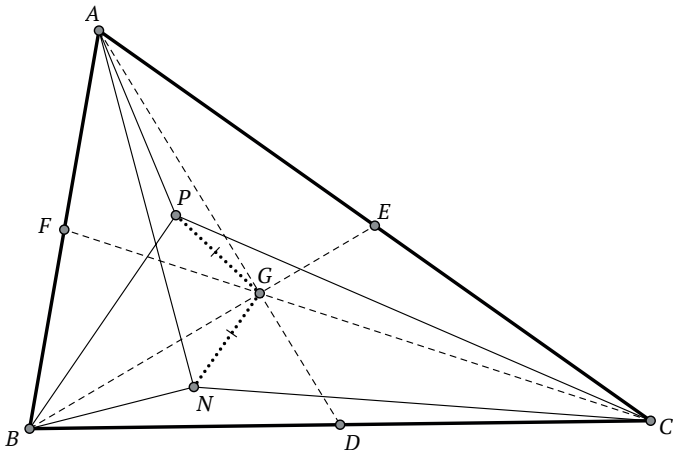


Рисунок 50

Пример 51. Некоторые сюрпризы медианы

Медианы треугольника также дают ряд других удивительных результатов. Рассмотрим еще раз треугольник *ABC* с медианами *AD*, *BE* и *CF*. Проведем *AJ* параллельно медиане *BE*, а *BJ* параллельно стороне *AC*, как показано на рис. 51. Первый сюрприз заключается в том, что три точки *J*, *E* и *F* расположены на одной прямой, а второй сюрприз заключается в том, что прямая *JC* делит пополам *FD*, так что *DN* = *FN*. Это лишь некоторые из тщательно хранимых секретов геометрии!

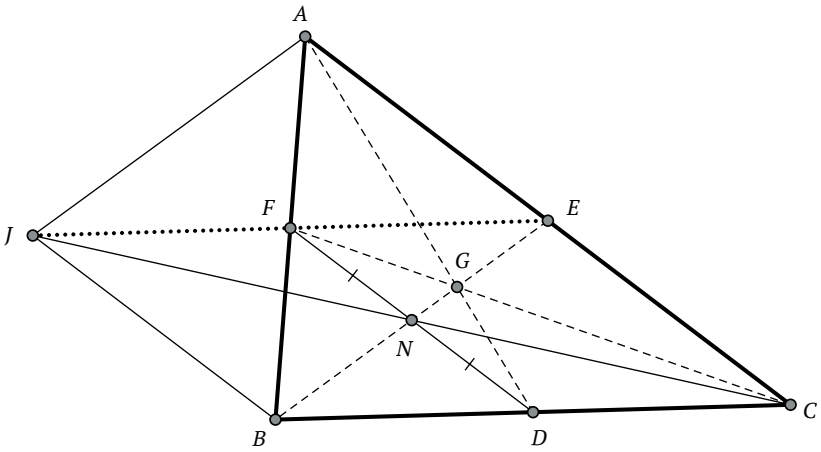


Рисунок 51

Пример 52. Другие чудеса с медианами

Медианы треугольника могут давать и другие поразительные результаты. На рис. 52 мы начнем с треугольника *AEF* и его трех медиан *AH*, *EJ* и *FK*. Когда мы продлеваем медиану *AH* на то же расстояние до точки *C*, а сторону *EF* на ее длину до точки *B* и до точки *D*, неожиданным результатом является то, что периметр треугольника *ABC* равен периметру треугольника *ADC*, причем оба периметра равны удвоенной сумме медиан треугольника *ABC*. Мы можем записать это в виде формулы так: $AB + BC + CA = AD + DC + CA = 2(AH + EJ + FK)$.

Пример 53. Сравнение медиан с периметром треугольника

Вот еще некоторые другие любопытные результаты для медиан треугольника. Пусть у нас есть медианы *AD*, *BE* и *CF* треугольника *ABC*, пересекающиеся в точке *G*. Если мы продлим медиану *DE* на ее длину до точки *J*, то получим треугольник *FCJ*, как показано на рис. 53. При внимательном рассмотрении окажется, что сумма медиан равна периметру треугольника *FCJ*. Это может быть выражено в виде формулы как $AD + BE + CF = FC + CJ + JF$.

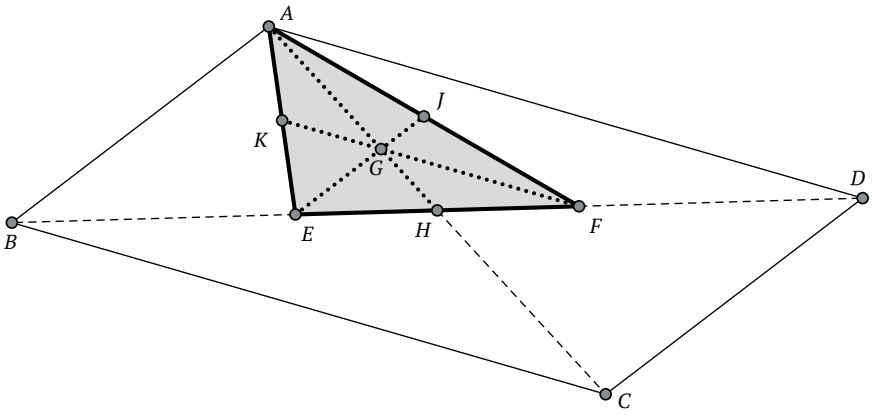


Рисунок 52

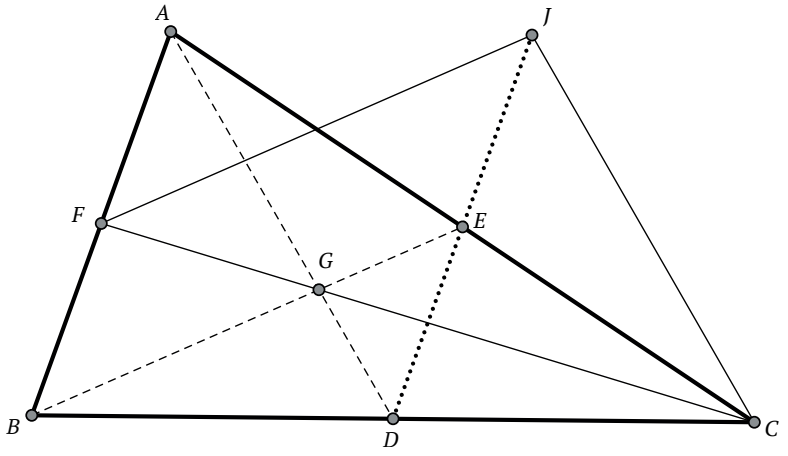


Рисунок 53

Пример 54. Продление медиан создает коллинеарные точки

Если медианы *BE* и *CF* треугольника *ABC* продлить на их собственные длины до точек *P* и *Q* соответственно, мы обнаруживаем, что точки *P*, *Q* и вершина *A* лежат на одной прямой, как показано на рис. 54.

Пример 55. Два треугольника имеют общий геометрический центр

Как мы можем видеть на рис. 55, когда один треугольник *QRS* вписан в другой треугольник *ABC* так, что общие точки *Q*, *R* и *S* подчиняются пропорции: $\frac{AS}{SB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RA}$, эти два треугольника имеют общий геометрический центр. На рис. 55 точка пересечения медиан *QH*, *RJ* и *SK* (геометрический центр) тре-

угольника *QRS* находится в точке *G*. Это также точка пересечения медиан *AD*, *BE* и *CF* треугольника *ABC*.

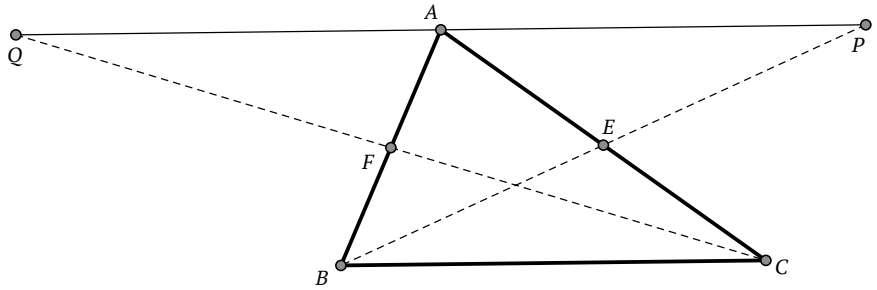


Рисунок 54

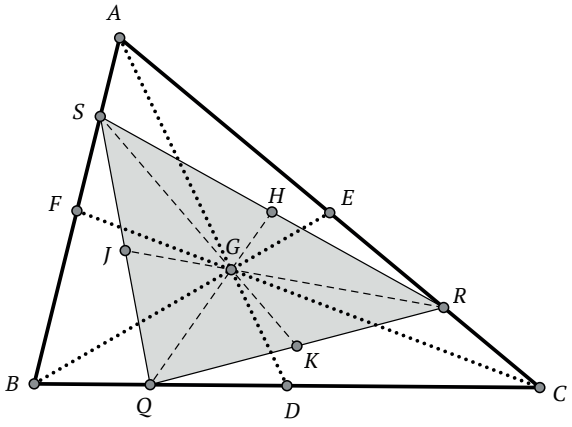


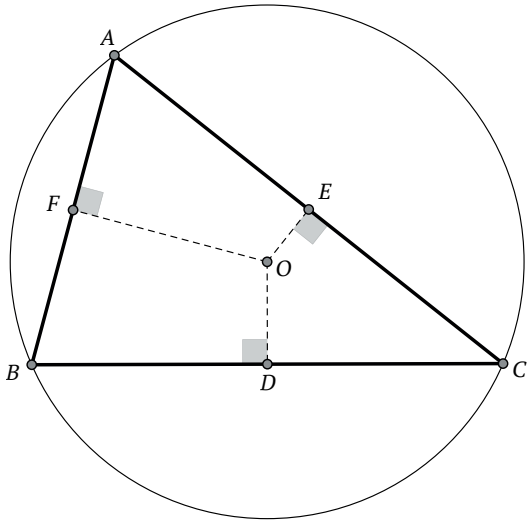
Рисунок 55

Пример 56. Невероятное соотношение центров описанных окружностей и медианных треугольников

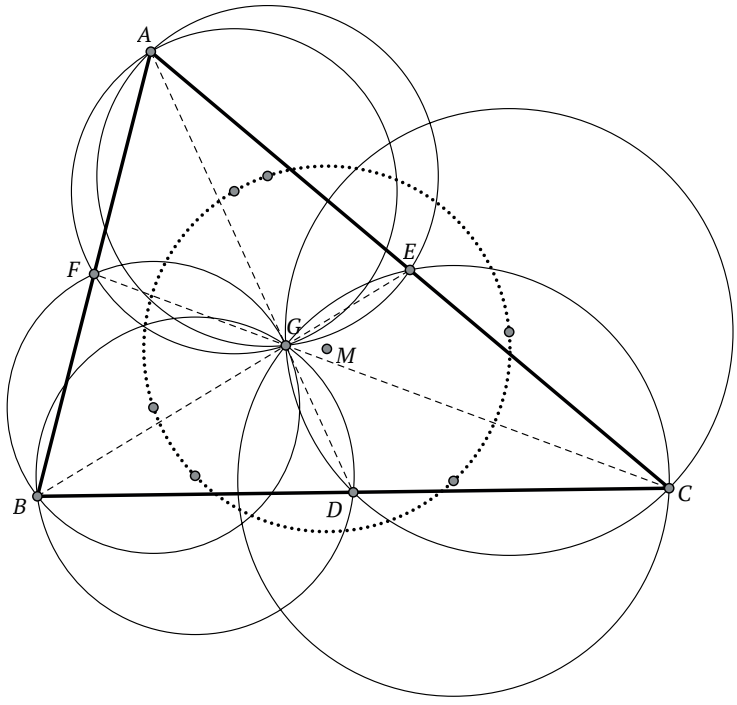
Напомним, что центр описанной окружности находится в точке пересечения трех перпендикуляров к серединам сторон треугольника. Как показано на рис. 56(а), перпендикуляры *OD*, *OE* и *OF* к серединам сторон пересекаются в точке *O*, которая находится на одинаковом расстоянии от каждой из вершин треугольника *ABC*. Таким образом, окружность с центром *O*, проходящая через *A*, также проходит через *B* и *C*, т. е. будет описанной окружностью треугольника *ABC*.

Теперь, когда мы определили центр описанной окружности треугольника, мы можем продемонстрировать поистине удивительное совпадение. Напомним, что три медианы делят треугольник ABC на шесть треугольников равной площади. Все описанные окружности каждого из этих шести треугольников имеют общую точку в геометрическом центре *G*, как показано на рис. 56(б).

Удивительно, но центры всех этих шести описанных окружностей лежат на одной общей окружности с центром *M*.



(а)



(б)

Рисунок 56

Пример 57. Поразительное равенство

На рис. 57 прямая *AM* является медианой, проведенной к стороне *BC* треугольника *ABC*. Окружность *O*, которая содержит вершину *A* и является касательной к стороне *BC* в вершине *B*, пересекает *AM* и *AC* в точках *D* и *E* соответственно. Прямая, параллельная *BE* и проходящая через точку C, пересекает продолжение *BD* в точке *F*. Продолжение *FE* пересекается с продолжением *CB* в точке *G*. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что *AG* = *DG*.

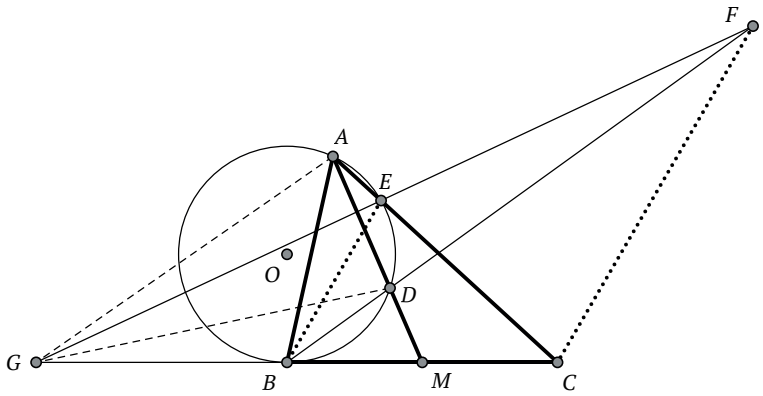


Рисунок 57

Пример 58. Неожиданное деление в треугольнике одновременно пополам и вчетверо

Из простых построений могут получиться удивительные результаты. На рис. 58 мы имеем произвольный треугольник *ABC*. Точка *N* выбрана на стороне *AB* таким образом, что *BN* = 2*AN*. Затем мы выбираем середину *M* стороны *BC* и проводим *AM* и *CN*, которые пересекаются в точке *D*. Возникают два курьезных случая: точка *D* — это середина *AM*, а *DC* = 3*DN*. Другими словами, точка *D* делит отрезок *AM* пополам, а отрезок *CN* на четыре части, поскольку *DN* составляет четверть *CN*.

Пример 59. Удивительные соотношения площадей треугольников

Геометрические результаты, по-видимому, не имеют ограничений. Рассмотрим произвольный треугольник *ABC*, показанный на рис. 59. Середина *M* стороны *BC* соединена со случайно выбранной точкой *D* внутри треугольника *ABC*. Получаем удивительный результат о площадях внутри этого треугольника, а именно: *площадь* $\triangle ADC$ – *площадь* $\triangle ABD = 2 \cdot$ *площадь* $\triangle ADM$.

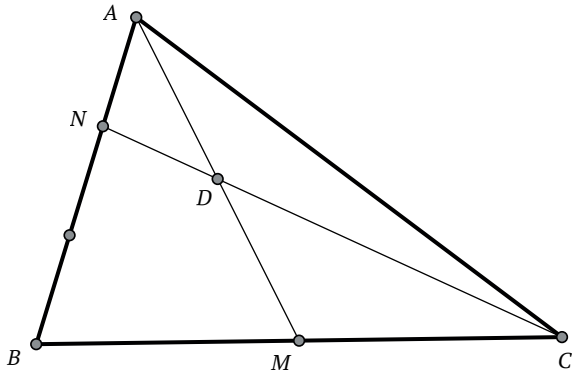


Рисунок 58

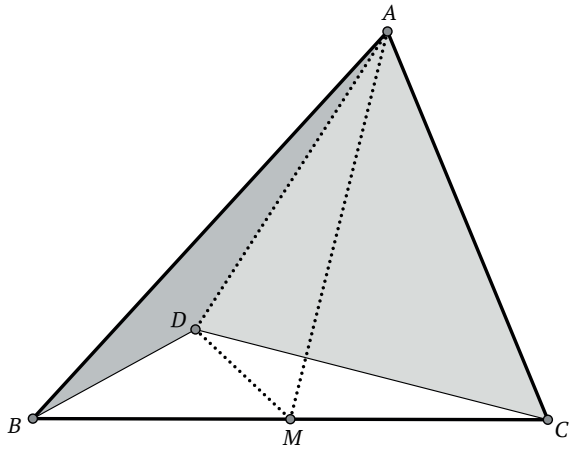


Рисунок 59

Пример 60. Особенность случайной точки в равностороннем треугольнике

Теперь давайте исследуем некоторые необычные свойства равностороннего треугольника. На рис. 60 нарисован равносторонний треугольник *ABC* и случайная точка *P* внутри него. Удивительным фактом, связанным с точкой *P*, является то, что сумма расстояний от этой случайно выбранной точки до сторон равностороннего треугольника такая же, как и для любой другой точки внутри треугольника. Эта сумма соответствует следующему уравнению: $PD + PE + PF = AH$, т. е. сумма этих расстояний до трех сторон всегда равна высоте треугольника, независимо от того, какую точку мы выберем в качестве точки *P*. Это соотношение приписывается итальянскому математику Винченцо Вивиани (1622–1703), который был учеником знаменитого ученого Галилео Галилея (1564–1642).

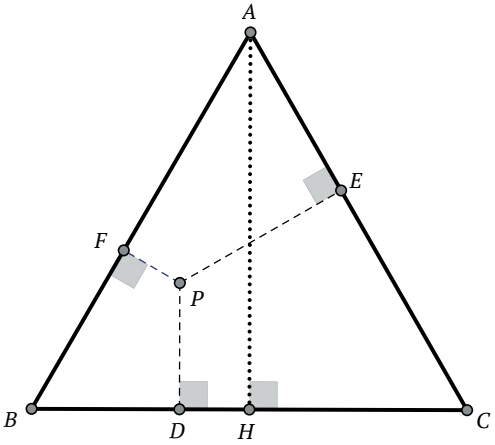


Рисунок 60

Пример 61. Особенность точки, находящейся за пределами равностороннего треугольника

С точкой, находящейся за пределами равностороннего треугольника, может быть связана особенность, аналогичная точке внутри такого треугольника из предыдущего примера. На рис. 61 изображена точка на описанной окружности равностороннего треугольника *ABC*. Независимо от того, где находится эта точка *P* на окружности, существует следующая зависимость: $AP + CP = BP$.

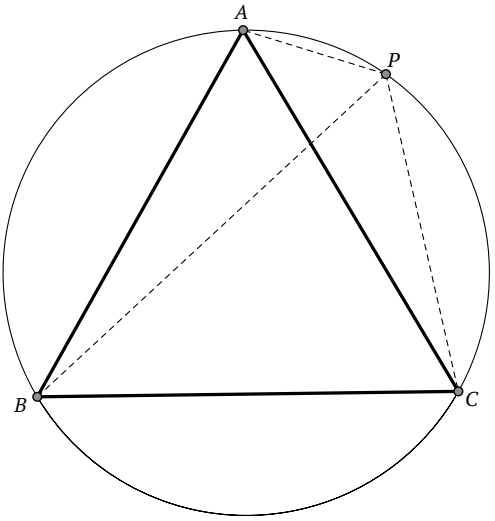


Рисунок 61

Пример 62. Использование равностороннего треугольника для разделения отрезка прямой на три части

Уникальные свойства равностороннего треугольника дают нам возможность разделить отрезок прямой на три части. На рис. 62 углы *B* и *C* равностороннего треугольника *ABC* разделены пополам биссектрисами PB и PC соответственно. Затем мы проводим отрезки *PD* и *PE* параллельно сторонам треугольника *AB* и *AC* соответственно. В результате сторона *BC* была разрезана на три равные части в точках *D* и *E*, так что мы имеем *BD* = *DE* = *EC*.

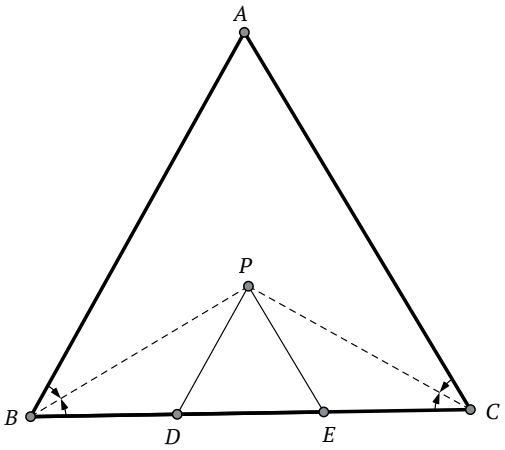


Рисунок 62

Пример 63. Еще один способ разделить отрезок прямой на три части с помощью равностороннего треугольника

Существует еще один хитроумный способ разделения на три части стороны равностороннего треугольника. Как показано на рис. 63, точка *M* является серединой стороны *BC* равностороннего треугольника *ABC*. Снаружи треугольника *ABC* расположены два равносторонних треугольника *BPM* и *MQC*. Если провести прямые *AP* и *AQ*, они пересекутся с *BC* в точках *E* и *F*, таких что *BE* = *EF* = *FC*. Сторона равностороннего треугольника снова окажется разделенной на три части.

Пример 64. Необычная конструкция в виде треугольника с углами 30°–60°–90° внутри равностороннего треугольника

В математике треугольник с углами 30°–60°–90° считается очень полезным. Самый простой способ создать такой треугольник — нарисовать высоту в равностороннем треугольнике, после чего появятся два таких треугольника. Однако можно создать такой треугольник довольно необычным способом, если поступить следующим образом. Начнем с равностороннего треугольника *ABC*.

Проведем прямую *DE*, параллельную *AC*, через произвольную точку *D* на стороне *AB*, до пересечения в точке *E* со стороной *BC*. Точка *M* является серединой *AE* и соединена с центральной точкой[1] *O* равностороннего треугольника *DBE*. Полученный в результате треугольник *MOC* представляет собой треугольник с углами 30°–60°–90°, как показано на рис. 64.

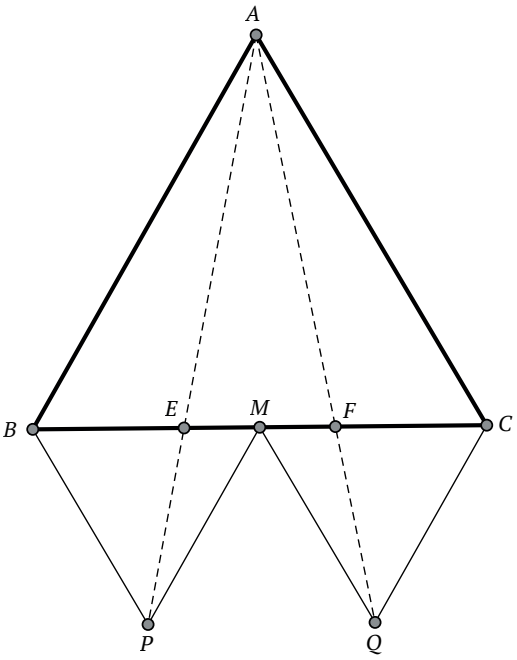


Рисунок 63

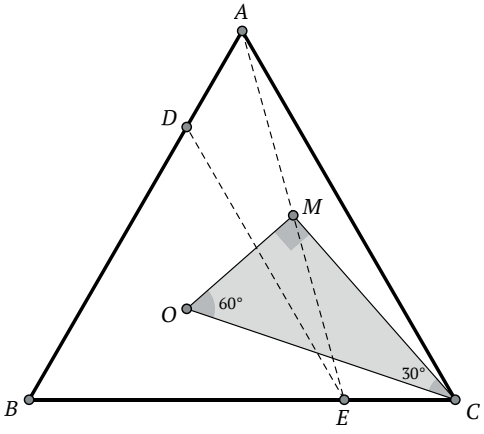


Рисунок 64

[1] **Центральной точкой (центром)** равностороннего треугольника называется точка пересечения медиан, высот, биссектрис и серединных перпендикуляров.

Пример 65. Необычное соотношение отрезков в равностороннем треугольнике

В равностороннем треугольнике ABC на стороне BC выбирается случайным образом точка D, как показано на рис. 65. Отрезок прямой EF является перпендикуляром в середине AD, с точками E и F пересечений сторон AB и AC соответственно. В результате получается следующее соотношение: $BE \cdot FC = DB \cdot DC$.

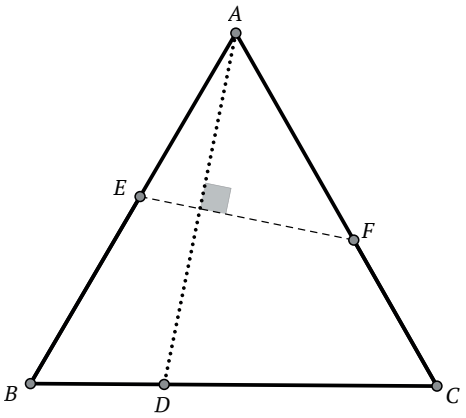


Рисунок 65

Пример 66. Удивительная взаимосвязь между равнобедренным и равносторонним треугольниками

Сочетание равносторонних и равнобедренных треугольников также может привести к некоторым довольно поразительным результатам. На рис. 66 мы имеем равносторонний треугольник ABC и равнобедренный треугольник DBC, так что $\angle BAC = 2\angle BDC$. Любопытный результат заключается в том, что два отрезка AD и BC, которые, по-видимому, никак не связаны, на самом деле равны: $AD = BC$.

Пример 67. Неожиданное равенство в равнобедренном треугольнике

На рис. 67 показан еще один удивительный результат в равнобедренном треугольнике ABC. Точка P может занимать любое положение на основании BC. В средних точках M и N отрезков BP и CP, соответственно, проводятся перпендикуляры, которые пересекаются со сторонами AB и AC в точках D и E соответственно. Ко всеобщему удивлению, мы обнаруживаем, что $AE = DB$ и $EC = AD$.

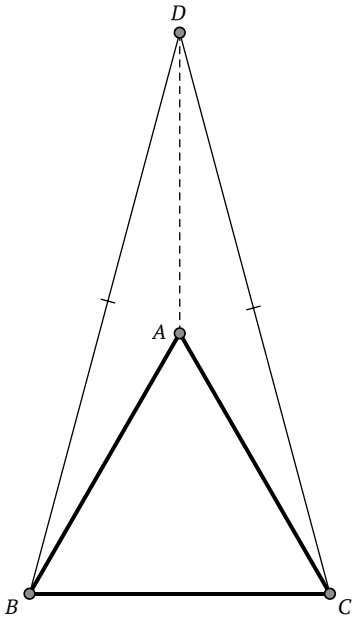


Рисунок 66

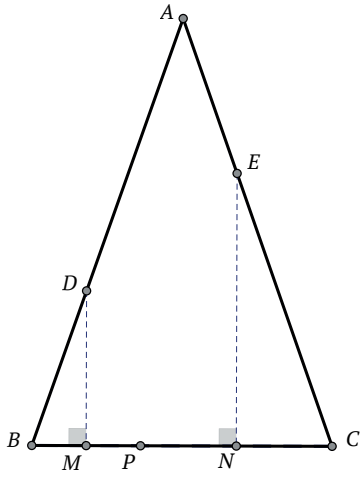


Рисунок 67

Пример 68. Еще одно неожиданное равенство в равнобедренном треугольнике

И снова мы начинаем с равнобедренного треугольника ABC с высотой AM, показанного на рис. 68. Продолжим сторону BA на неопределенную длину до точки P. Перпендикуляр, проведенный от P к стороне BC, пересекает сторону AC в точке R и сторону BC в точке Q. Совершенно неожиданно оказывается, что $PQ + RQ = 2AM$.

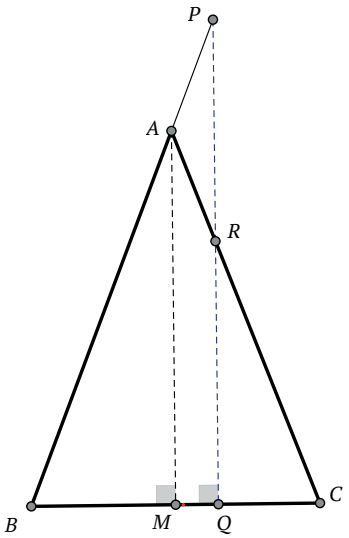


Рисунок 68

Пример 69. Замечательное геометрическое равенство

Бывают случаи, когда геометрия предлагает нам почти необъяснимый результат. На рис. 69 показан равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AB = AC$. Выбирается точка D в любом месте на стороне AB, а затем определяется точка E на продолжении стороны AC таким образом, что DE делится пополам стороной BC в точке F. После выполнения этой необычной конструкции неожиданным результатом является то, что теперь мы имеем $DB = CE$.

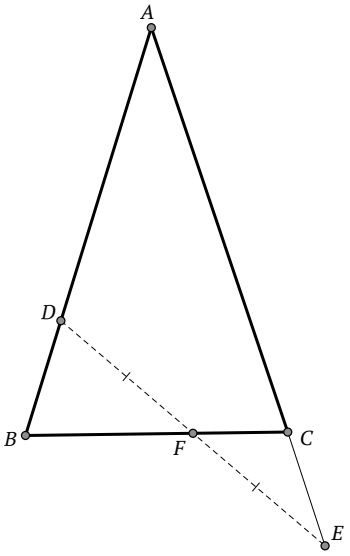


Рисунок 69

Пример 70. Еще одно замечательное геометрическое равенство

Не менее простая конструкция приводит к другому довольно удивительному результату. На рис. 70 мы на этот раз начинаем с равнобедренного треугольника *ABC*, угол при вершине которого в точке *A* равен 45°, а *AD* — высота до основания *BC*. Перпендикуляр из точки *C* пересекает *AB* в точке *E*. Наконец, этот перпендикуляр *CE* пересекает *AD* в точке *P*. Неожиданно оказывается, что *PE* = *BE*.

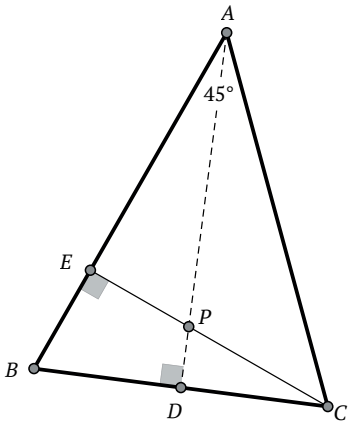


Рисунок 70

Пример 71. Неожиданная перпендикулярность

Кажется, что перпендикулярные прямые линии возникают в самом неожиданном месте. В конфигурации, показанной на рис. 71, точка *M* — это середина основания *BC* равнобедренного треугольника *ABC*. Из точки *M* к стороне *AC* строится перпендикуляр, пересекающий ее в точке *D*. Соединяя середину *F* отрезка *MD* с вершиной треугольника *A*, обнаруживаем, что *AF* оказывается перпендикулярной *BD* в точке *E*.

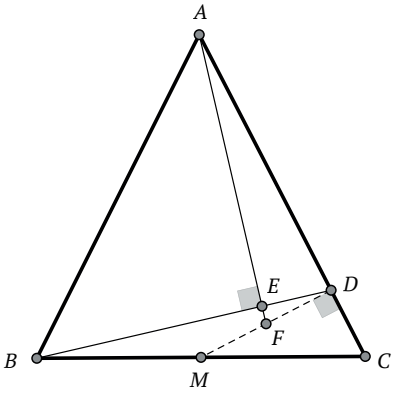


Рисунок 71

Пример 72. Неожиданное свойство высоты равнобедренного треугольника

Рассмотрим высоту BD равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = AC$, как показано на рис. 72. Удивительный результат заключается в том, что $\angle BAD = 2\angle CBD$.

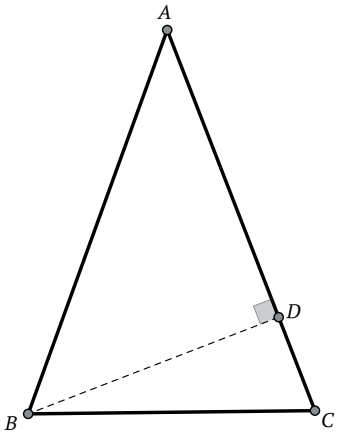


Рисунок 72

Пример 73. Особое свойство равнобедренных треугольников

Равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC$, таит в себе еще один сюрприз для нас. Как показано на рис. 73, если мы выберем любые две точки P и Q на основании BC, то, к нашему большому удивлению, сумма расстояний до двух сторон будет одинаковой. Другими словами, мы получим $PD + PE = QF + QG$. Следует подчеркнуть, что точки P и Q могут быть выбраны в любом месте на основании BC, и это соотношение будет соблюдаться.

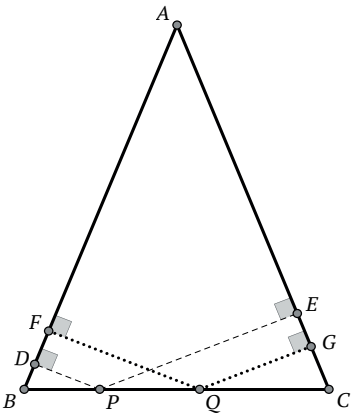


Рисунок 73

Пример 74. Странная связь: центр вписанной окружности находится на описанной окружности

На рис. 74 на стороне AB равнобедренного треугольника ABC, где $AB = AC$, случайным образом выбрана точка D. Оказывается, что центр I вписанной окружности треугольника ADC лежит на описанной окружности треугольника DBC.

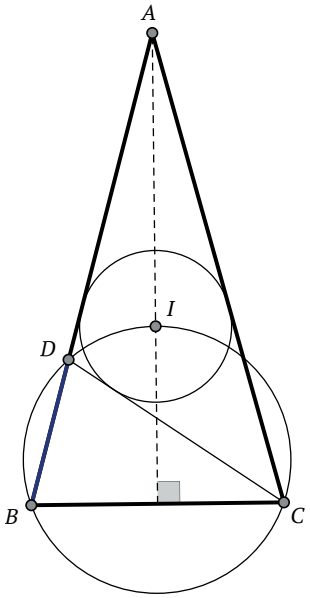


Рисунок 74

Пример 75. Коллинеарные точки образуют биссектрису угла

В треугольнике ABC, показанном на рис. 75, точка Q находится на медиане AM. От точки Q до стороны BC проводится перпендикуляр, пересекающий ее в точке D. Затем на QD выбирается точка P, после чего к сторонам AC и AB проводятся перпендикуляры PE и PF, пересекающие стороны в точках E и F соответственно. Как это и должно быть, точки E, Q и F оказываются лежащими на одной прямой. В этом случае мы неожиданно обнаруживаем, что прямая PA является биссектрисой $\angle BAC$.

Пример 76. Неожиданные подобные треугольники

Подобные треугольники иногда могут появляться тогда, когда мы меньше всего этого ожидаем. Например, на рис. 76 внутренний угол и внешний угол в вершине A треугольника ABC разделены пополам прямыми линиями AG и AH, соответственно пересекающими сторону BC и ее продолжение в точках G и H. Серединой GH является точка M. В результате у нас оказывается два подобных треугольника $\triangle ABM \sim \triangle ACM$.

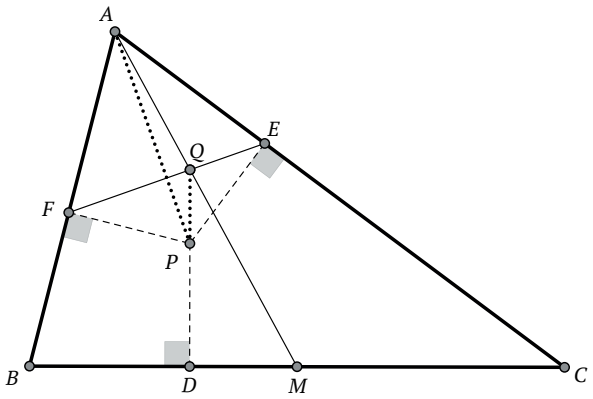


Рисунок 75

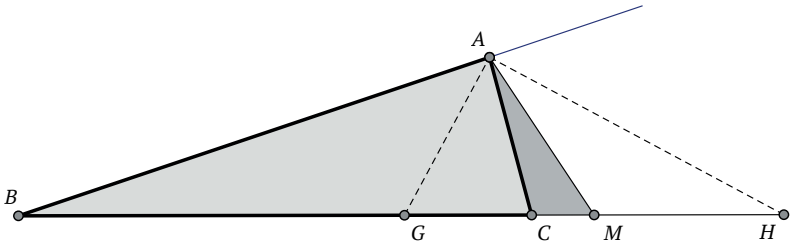


Рисунок 76

Пример 77. Перпендикуляры к четырем биссектрисам треугольника образуют четыре коллинеарные точки

Неожиданную коллинеарность четырех точек можно увидеть, если провести биссектрисы как к внутренним, так и к внешним углам, как показано на рис. 77. Треугольник *ABC* имеет внутренние биссектрисы углов *CG* и *BD* и внешние биссектрисы углов *BE* и *CJ*. Если провести перпендикуляры от вершины *A* к каждой из этих четырех угловых биссектрис, пересекая их в точках *G*, *D*, *E* и *J* соответственно, обнаруживается, что эти четыре точки лежат на одной прямой.

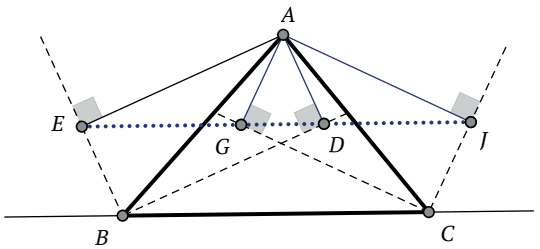


Рисунок 77

Пример 78. Деление отрезка прямой пополам сложным способом

Существует множество простых способов разделить отрезок прямой пополам. Для развлечения мы разделим отрезок прямой пополам довольно сложным способом, но таким, который демонстрирует мощь геометрии. Начнем с треугольника *ABC*, показанного на рис. 78, в котором делим пополам внутренний и внешний углы в вершине *C* с помощью биссектрис *CD* и *CE*. Они пересекают сторону *AB* и ее продолжение в точках *D* и *E* соответственно. Затем проведем прямую *DQ*, параллельную *BC* и пересекающую *AC* в точке *Q*. Если провести прямую *QE*, обнаруживается, что она делит *BC* пополам в точке *P*, так что *BP* = *CP*.

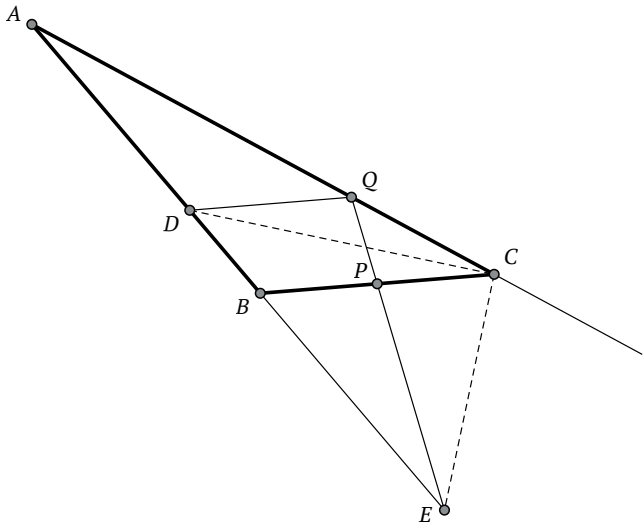


Рисунок 78

Пример 79. Определение периметра треугольника без измерения длины его сторон

В разговоре об удивительных и по-настоящему неожиданных результатах имеет смысл рассмотреть следующий яркий пример. Начнем с показанного на рис. 79 треугольника *ABC* произвольной формы со сторонами *AB* и *AC*, продленными на достаточное расстояние до *D* и *E* соответственно. Построим биссектрисы *BG* и *CG* внешних углов $\angle DBC$ и $\angle BCE$ соответственно. Эти биссектрисы пересекаются в точке *G*. Из этой точки построим перпендикуляр *GH*, пересекающий отрезок *AE* в точке *H*. Вот удивительный результат: периметр треугольника *ABC* равен удвоенной длине *AH*.

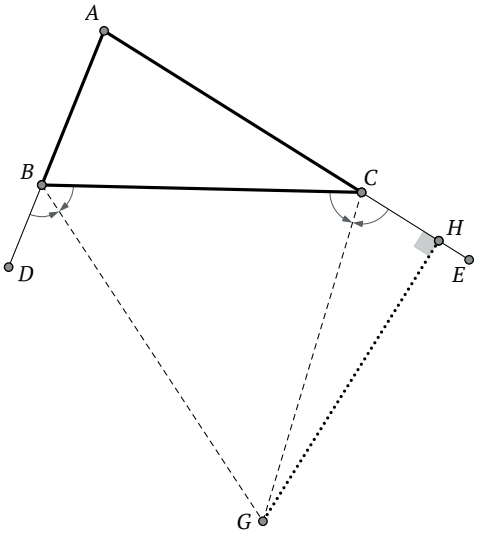


Рисунок 79

Пример 80. Странная трисекция угла

На протяжении веков одной из самых известных задач геометрии было вычисление способа деления угла на три части при использовании только линейки и циркуля. Известно, что в общем случае это невозможно. Однако при определенных обстоятельствах мы можем использовать некоторые хитроумные геометрические приемы для деления углов на три части. Как показано на рис. 80, начнем с треугольника ABC, где AB в два раза длиннее BC. Сначала проведем перпендикуляр к стороне AB в ее средней точке R, а затем проведем перпендикуляр к стороне BC в точке C. Эти два перпендикуляра пересекаются в точке P. Неожиданный результат заключается в том, что PR делит угол APC так, что $\angle APR = \frac{1}{3}\angle APC$. Таким образом, мы разделили угол, используя только циркуль и линейку (без делений).

Пример 81. Неожиданное равенство

На рис. 81 на сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны случайные точки P и Q соответственно. Затем проведены отрезки BX и CY в качестве биссектрис углов QBA и ACP соответственно. Эти биссектрисы пересекаются в точке R. Примечательно, что тогда мы имеем $\angle BPC + \angle BQC = 2\angle BRC$.

Пример 82. Особенность треугольника

Этот пример демонстрирует специфическую особенность треугольника. Если определить середины D, E и F трех сторон BC, AC и AB треугольника ABC, как показано на рис. 82, и построить высоту CH от вершины C до стороны AB, окажется, что $\angle DFE = \angle DHE$.

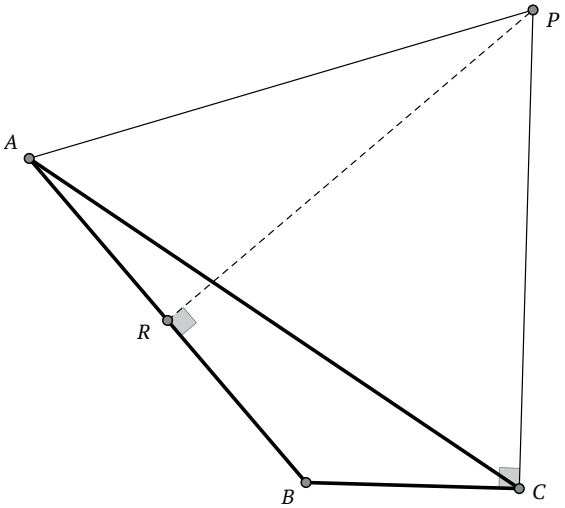


Рисунок 80

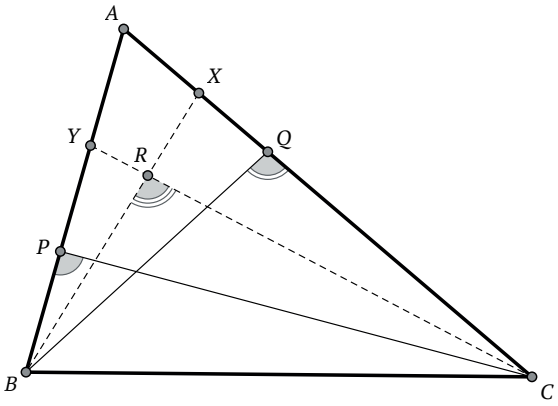


Рисунок 81

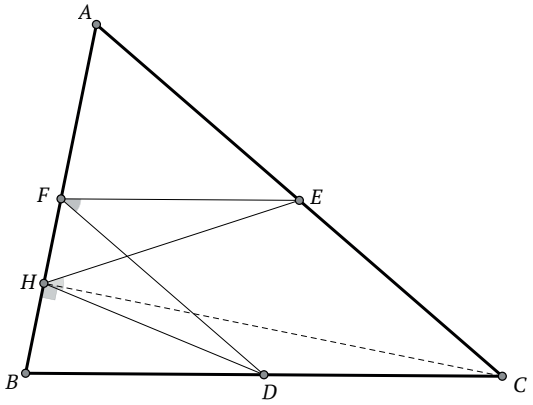


Рисунок 82

Пример 83. Равенство площадей треугольников, противоречащее здравому смыслу

В геометрии нередки неочевидные результаты: например, когда два треугольника оказываются одинаковой площади, несмотря на то что визуально они такими не выглядят. Такой пример мы видим на рис. 83. Здесь точки *F* и *D* расположены в треугольнике *ABC* на стороне *AC* таким образом, что *AD* = *CF*. Через точки *D* и *F* проведены прямые, параллельные стороне *AB*, которые пересекают сторону *BC* в точках *E* и *G* соответственно. Удивительно, но оказывается, что площадь △*AED* равна площади △*AGF*. Внешность может быть обманчивой!

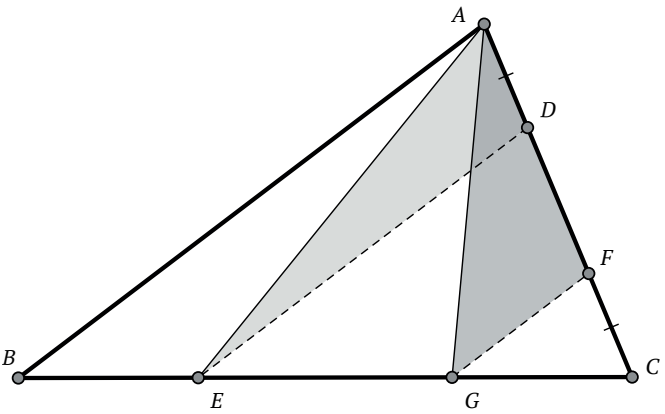


Рисунок 83

Пример 84. Параллельные прямые образуют треугольник с удвоенной площадью

Геометрия часто показывает нам взаимосвязи, которые кажутся почти необъяснимыми. Используя треугольник любой формы и проведя три параллельные прямые, мы можем создать второй треугольник, площадь которого в два раза больше площади первого. Это проиллюстрировано на рис. 84, где задан произвольный треугольник *ABC* и три параллели *AD*, *BE* и *CF*, проходящие через вершины треугольника и пересекающие противолежащие стороны (продолженные при необходимости) в точках *D*, *E* и *F* соответственно. Поразительный результат заключается в том, что площадь треугольника *DEF* ровно в два раза больше площади треугольника *ABC*.

Пример 85. Неожиданные соотношения площадей треугольников

Как мы видели из предыдущих примеров, рисунки, иллюстрирующие соотношения площадей в треугольниках, могут быть довольно обманчивыми. Рассмотрим прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом в вершине *C*,

показанный на рис. 85. Снаружи на стороне *BC* нарисован равносторонний треугольник *BDC*. Неожиданно мы получаем следующее соотношение: *площадь* $\triangle BDC$ + *площадь* $\triangle ADC$ = *площадь* $\triangle ABD$.

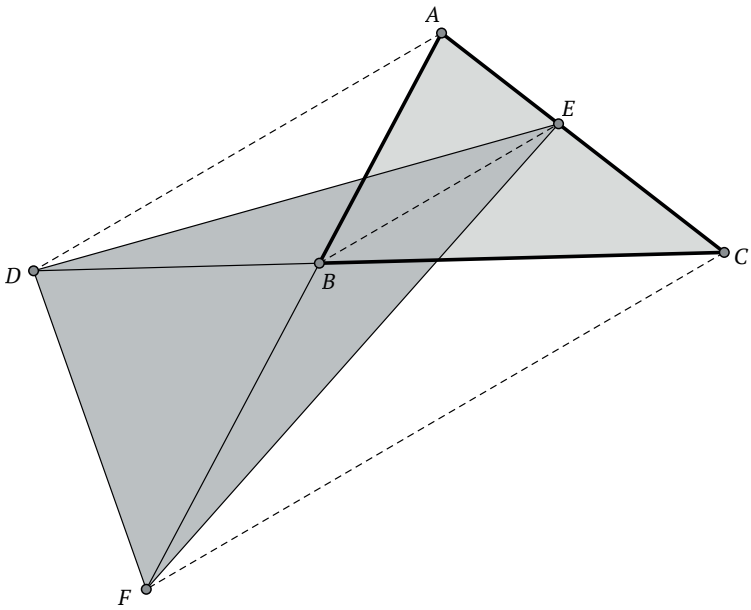


Рисунок 84

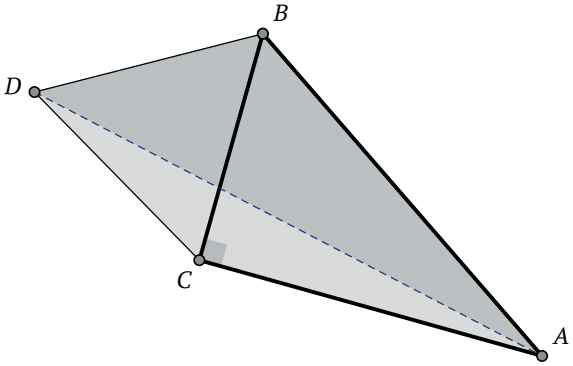


Рисунок 85

Пример 86. Построение треугольника, площадь которого равна трем четвертям площади данного треугольника

Построение треугольника, площадь которого равна трем четвертям площади данного треугольника, может быть сложной задачей. Тем не менее есть очень хитроумный способ, которым это можно сделать. Как показано на рис. 86, начинаем с треугольника ABC, определяем середины *D*, *E* и *F* сторон *BC*, *CA*

и *AB* соответственно. Затем мы проводим прямую, проходящую через точку *F* параллельно *BE* и пересекающуюся с *DE* в точке *G*. В результате получается треугольник *GFC*, три стороны которого имеют длину, равную медианам треугольника *ABC*. Кроме того, *площадь* $\triangle GFC = \frac{3}{4}$ *площадь* $\triangle ABC$.

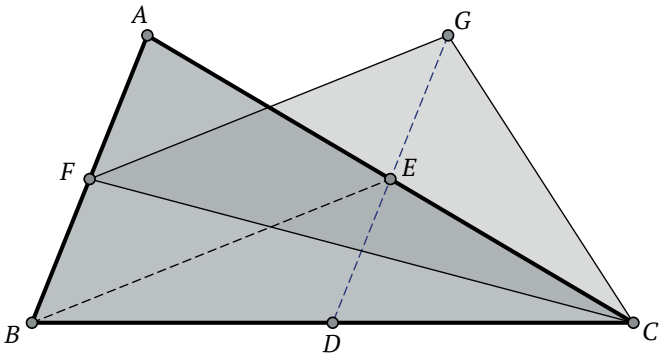


Рисунок 86

Пример 87. Поразительная конструкция: подобные треугольники, соотношение площадей которых равно 1:4

На рис. 87 мы видим конфигурацию, в которой треугольник порождает подобный треугольник, площадь которого, что любопытно, составляет одну четверть площади исходного. Выбрав произвольный треугольник *ABC* и выбрав любую точку *P*, проведем перпендикуляры от *P* к каждой из трех сторон (если надо, продленной) треугольника *ABC*. Это отрезки $PG \perp BC$, $PH \perp CA$ и $PJ \perp AB$. Если нарисовать описанные окружности треугольников *PJH*, *PJG* и *PHG* с центрами *K*, *L* и *N* соответственно, окажется, что $\triangle ABC$ подобен $\triangle KLN$ и, кроме того, площадь $\triangle KLN$ равна $\frac{1}{4}$ площади $\triangle ABC$.

Пример 88. Непредвиденное равенство вписанных треугольников

На рис. 88 треугольник *DEF* и треугольник *RST* вписаны в треугольник *ABC*, причем каждая из их вершин находится на стороне большего треугольника. Между двумя такими треугольниками, вписанными в один и тот же треугольник, существует весьма неожиданная взаимосвязь. Когда вершины каждого из вписанных треугольников расположены на сторонах большего треугольника таким образом, что их вершины находятся на равном расстоянии от середин соответствующих сторон, то два вписанных треугольника будут иметь равные площади. На рис. 88 точки *K*, *M* и *N* — середины сторон *BC*, *CA* и *AB* соответственно. Два треугольника *DEF* и *RST*, вписанных в треугольник *ABC*, расположены таким образом, что $RK = DK$, $SM = EM$ и $TN = FN$. Можно заключить, что *площадь* $\triangle DEF$ = *площадь* $\triangle RST$.

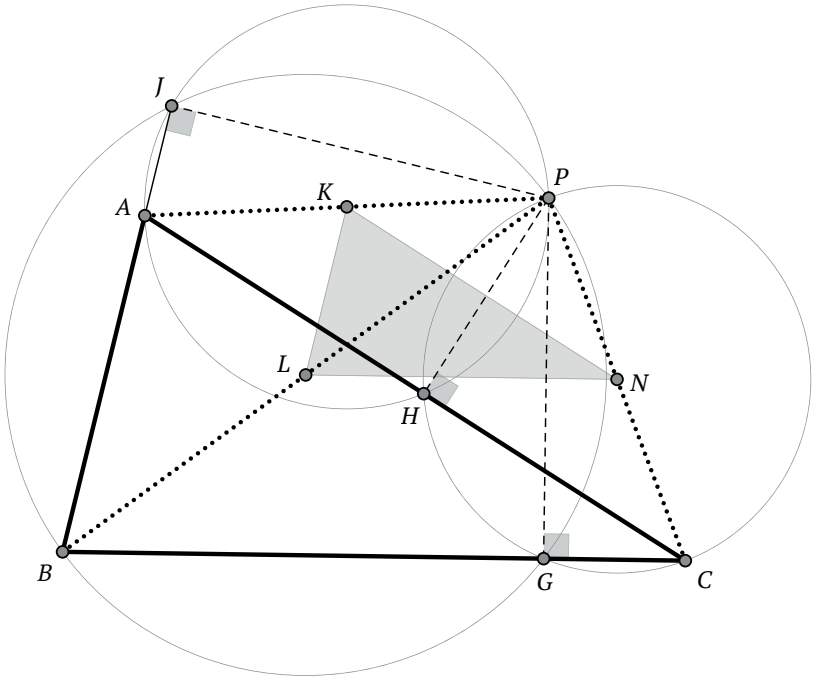


Рисунок 87

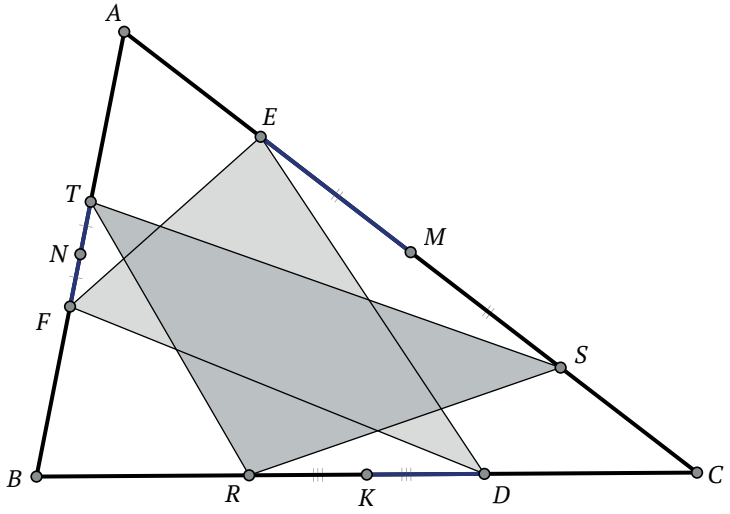


Рисунок 88

Пример 89. Неожиданная общность треугольников равной площади

Треугольники равной площади также могут дать удивительные результаты. Рассмотрим два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle BDC$ равной площади, имеющих

общую сторону *BC*, как показано на рис. 89. Если соединить две удаленные вершины *A* и *D*, обнаруживается, что общая сторона *BC* делит пополам отрезок *AD*, так что *AM* = *DM*.

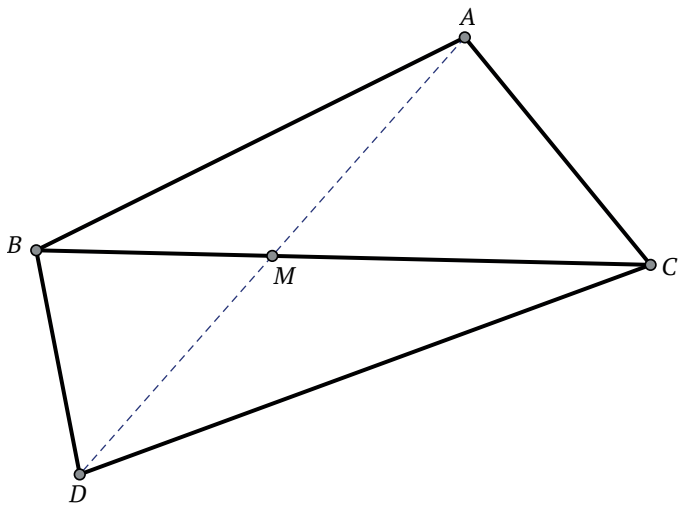


Рисунок 89

Пример 90. Как случайная точка делит площадь треугольника пополам

На удивление легко определить прямую, проходящую через любую точку на стороне треугольника, которая делит треугольник на две равные части. Это показано на рис. 90, где на стороне *AB* треугольника *ABC* выбрана произвольная точка *P* между серединой *M* стороны *AB* и вершиной *A*. Точка *N* на стороне *BC* определяется прямой, параллельной *PC* и проходящей через точку *M*. Удивительный результат заключается в том, что площадь треугольника *PBN* составляет ровно половину площади треугольника *ABC*.

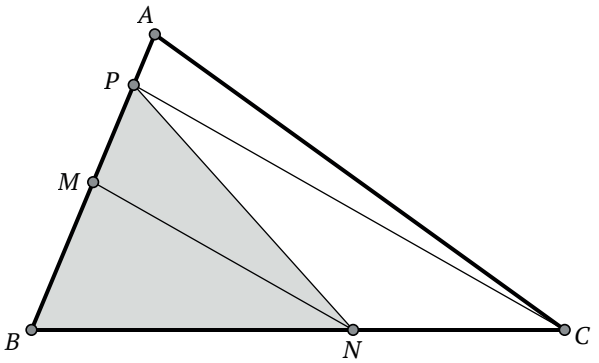


Рисунок 90

Пример 91. Нахождение треугольника, площадь которого составляет одну треть площади исходного

Интересно, что треугольник, площадь которого составляет одну треть площади данного треугольника, получается в результате деления на три части каждой из сторон исходного треугольника. Рассмотрим треугольник *ABC*, каждая из сторон которого разделена на три части, как показано на рис. 91, где точками деления являются *D*, *E*, *F*, *G*, *H* и *J*, соответственно, *AD* = *DE* = *EB*, *BF* = *FG* = *GC* и *CH* = *HJ* = *JA*.

Тогда у нас получается *площадь* $\triangle EGJ = \frac{1}{3}$ *площадь* $\triangle ABC$. Кроме того, также соблюдается равенство *площадь* $\triangle AEJ$ = *площадь* $\triangle BGE$ = *площадь* $\triangle CJG$.

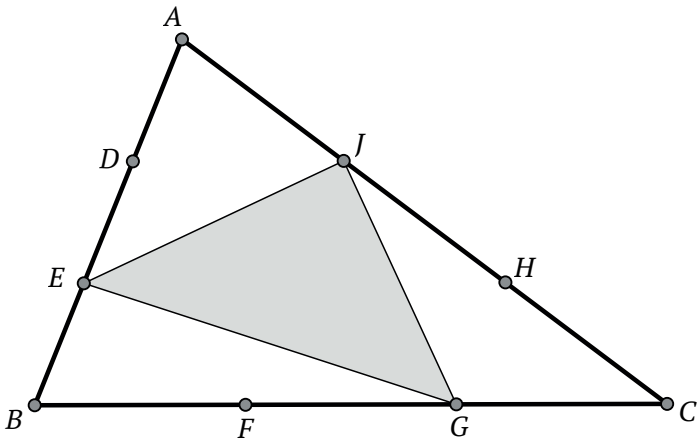


Рисунок 91

Пример 92. Точки трисекции сторон, разделяющие треугольник на части

На рис. 92 мы снова рассматриваем треугольник *ABC*. Точки *D* и *E* находятся на сторонах *AB* и *AC* соответственно, так что *DB* = 2*DA* и *EC* = 2*EA*. Прямые *BE* и *CD* пересекаются в точке *F*. У этой конфигурации есть несколько примечательных свойств. Во-первых, отмечаем, что треугольник *BCF* имеет площадь в половину площади треугольника *ABC*. Кроме того, у нас также площадь четырехугольника *ADFE* = *площадь* $\triangle BFD$ = *площадь* $\triangle CEF$.

Пример 93. Точки трисекции сторон треугольника преподносят больше сюрпризов

Точки трисекции сторон треугольника дают еще более удивительные результаты. На рис. 93 каждая из сторон треугольника *ABC* снова разделена на три равные части точками *D*, *E*, *F*, *G*, *H* и *J*, где *AD* = *DE* = *EB*, *BF* = *FG* = *GC* и *CH* = *HJ* = *JA*.

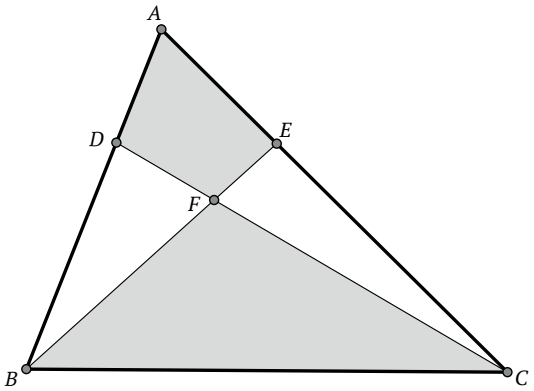
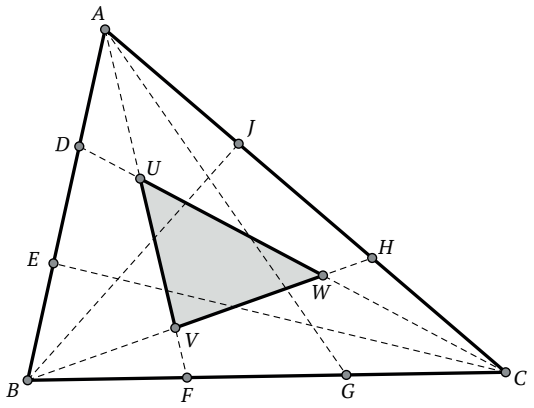


Рисунок 92



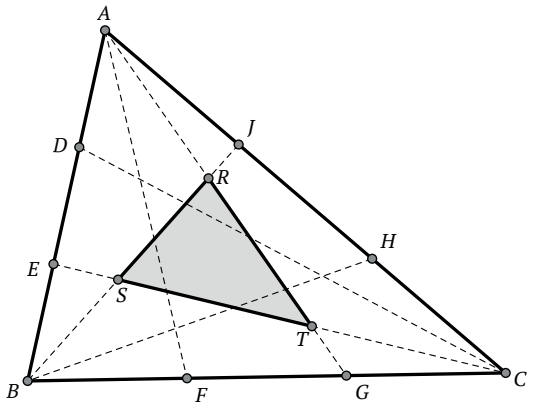


Рисунок 93

Затем от каждой вершины проводятся прямые к точкам деления на противолежащей стороне. На верхнем рисунке точки пересечения были выбраны таким образом, чтобы сформировать треугольник *UVW*, и тогда получается, что

площадь $\triangle UVW$ равна $\frac{1}{7}$ площади $\triangle ABC$. Для сравнения, на нижнем рисунке точки были выбраны так, чтобы образовать треугольник *RST*, и мы также находим, что площадь $\triangle RST$ равна $\frac{1}{7}$ площади $\triangle ABC$. Это означает, что два треугольника *UVW* и *RST* имеют равные площади. Однако следует отметить, что в целом эти два треугольника не являются равными, не похожи друг на друга и даже не имеют одинаковый периметр.

Пример 94. Еще один сюрприз преподносят точки трисекции сторон

На рис. 94 мы видим те же точки пересечения сторон треугольника *ABC*, что и на рис. 93, а также те же соединительные отрезки. Треугольник *XYZ*, вершины которого образуются на пересечениях этих отрезков, имеет свойство *площадь* $\triangle XYZ = \frac{1}{25}$ *площадь* $\triangle ABC$. Кроме того, мы обнаруживаем, что $\triangle XYZ$ подобен $\triangle ABC$, поскольку их соответственные стороны параллельны, что делает соответственные углы равными.

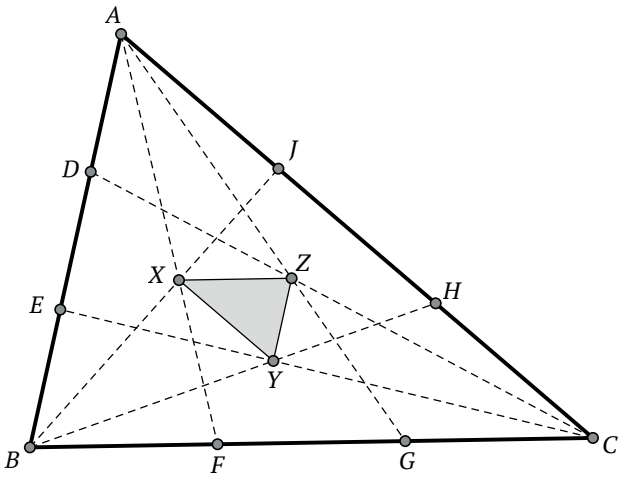


Рисунок 94

Пример 95. Еще один сюрприз от точек трисекции сторон треугольника

На рис. 95 мы снова видим те же точки трисекции сторон треугольника *ABC*, что и на рис. 93, а также те же соединительные отрезки. На этот раз рассмотрим треугольник *LMN*, вершины которого также являются пересечениями этих отрезков. Этот треугольник обладает следующим свойством: *площадь* $\triangle LMN = \frac{1}{16}$ *площадь* $\triangle ABC$. Треугольник *LMN* подобен треугольнику *ABC*, поскольку их соответственные стороны снова параллельны, что делает соответственные углы равными.

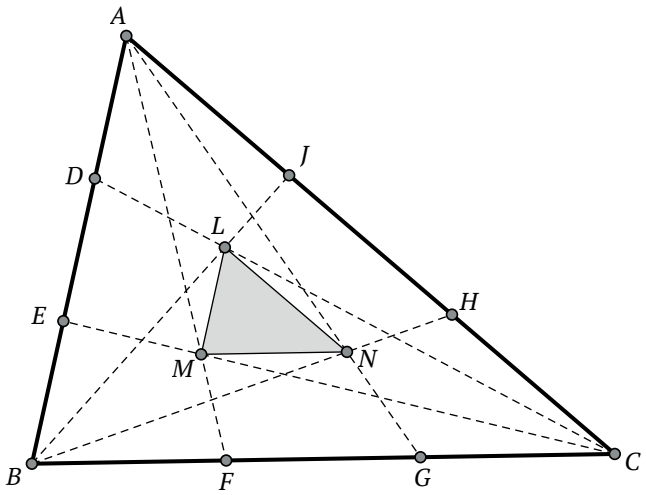


Рисунок 95

Пример 96. Медианы и трисекторы сторон разбивают треугольник с неожиданным результатом

Более интересные области треугольника получаются, когда мы добавляем медианы к трисекторам[1] сторон данного треугольника. На рис. 96 медианы *AM* и *BN*, взятые вместе с линией трисекции *CD*, образуют треугольник *LUZ*. Здесь мы находим, что площадь $\triangle LUZ = \frac{1}{60}$ площади $\triangle ABC$. Следует отметить, что треугольник *LUZ* в общем случае не подобен треугольнику *ABC*.

Пример 97. Непредвиденное свойство случайного треугольника с углом 60°

Любопытно, что произвольный треугольник с углом 60° будет обладать неожиданным свойством, заключающимся в том, что его биссектрисы определяют равенство суммы отсекаемых ими частей двух сторон треугольника третьей стороне. На рис. 97 треугольник *ABC* имеет угол *BAC* = 60°. Прямые *AP* и *BQ* делят пополам углы *BAC* и *CBA* соответственно. Удивительно, но мы обнаруживаем, что *BC* = *BQ* + *CP*.

---

[1] Вообще говоря, английский термин *trisector* переводится на русский как «трисектриса». Однако в русском языке принято употреблять термин «трисектриса» (аналогично «биссектрисе») только по отношению к углам, а не к линейным объектам. В данном случае для краткости изложения сохранена английская калька термина, чтобы подчеркнуть, что речь идет о линиях, делящих в точках трисекции именно сторону треугольника, а не угол.

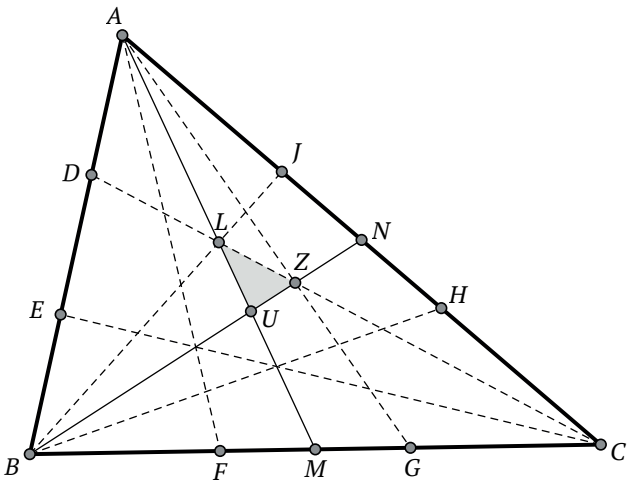


Рисунок 96

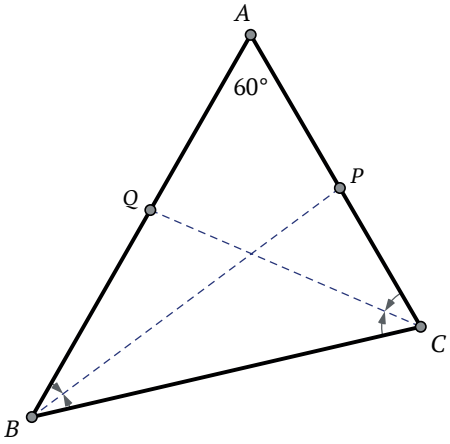


Рисунок 97

Пример 98. Еще одна удивительная особенность произвольного треугольника с углом в 60°

На рис. 98 снова изображен треугольник ABC с $\angle A = 60°$. Высоты BE и CF пересекаются в ортоцентре H. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что прямая OH, соединяющая ортоцентр с центром O описанной окружности, делит пополам $\angle FHB$. В качестве еще одной особенности отметим, что $\triangle FHB$ также имеет угол 60°.

Пример 99. Еще одна неожиданная коллинеарность

На рис. 99 показан треугольник ABC с центром вписанной окружности в точке I и центром описанной окружности в точке O. Прямая, проходящая через I и па-

раллельная стороне AB, пересекается в точке P с прямой, касательной к описанной окружности в точке C. Продолжение прямой AI пересекает описанную окружность в точке D, а прямой BI — в точке E. Неожиданно мы обнаруживаем, что точки D, E и P лежат на одной прямой.

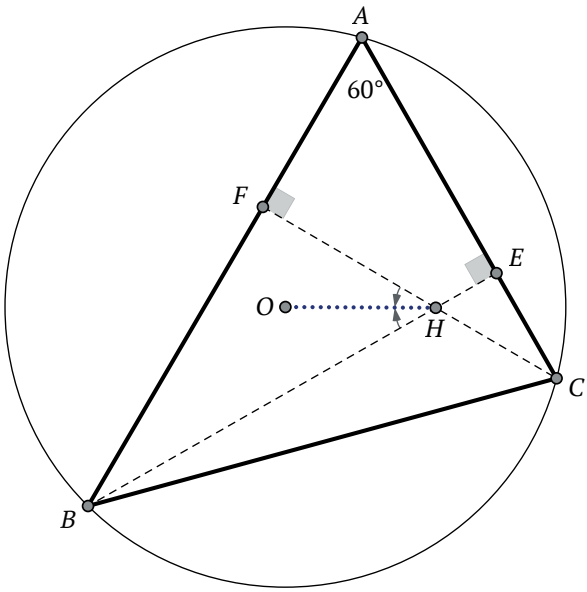


Рисунок 98

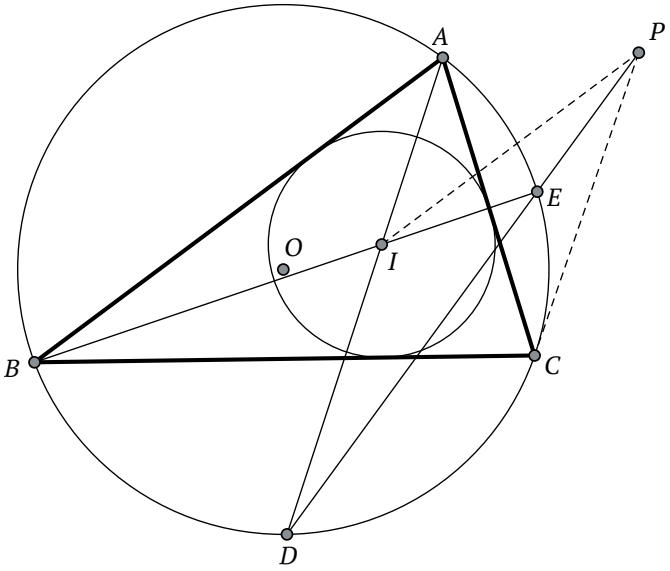


Рисунок 99

Пример 100. При отражении треугольников образуются пересекающиеся окружности и пересекающиеся прямые

Пересечение окружностей также может привести к еще одному довольно красивому соотношению. Предположим, что мы начинаем с произвольного треугольника ABC и отражаем его относительно каждой из сторон, так что все четыре треугольника, показанных на рис. 100, соединены сторонами. Когда мы нарисуем описанную окружность вокруг каждого из трех треугольников $\triangle BA'C$, $\triangle CB'A$ и $\triangle AC'B$, мы обнаружим, что все три окружности имеют общую точку P. Мы можем сделать еще один шаг вперед и поразмыслить над удивительной группой пересекающихся прямых, когда обнаружим, что прямые AQ, BR и CS, соединяющие центры Q, R и S окружностей с соответствующими противолежащими вершинами исходного треугольника, имеют общую точку M.

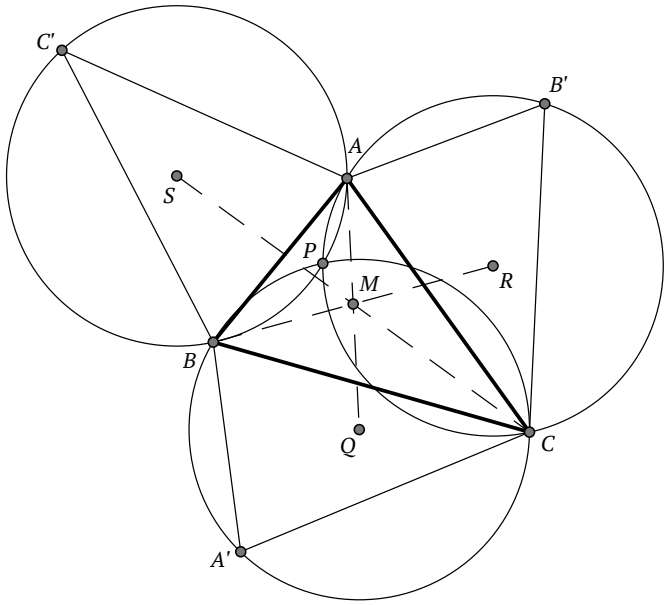


Рисунок 100

Пример 101. Чудеса трех пересекающихся равных окружностей

Самая необычная взаимосвязь возникает, когда у нас есть данный треугольник и три пересекающиеся равные окружности, которые нарисованы таким образом, что каждая окружность содержит две вершины треугольника. Мы можем видеть эту конфигурацию на рис. 101, где три окружности с центрами в точках Q, R и S содержат по две вершины треугольника ABC. Окружности пересекаются в точке P. У этой конфигурации есть ряд примечательных особенностей:

а) окружность, содержащая точки *R*, *S* и *Q*, также имеет тот же радиус, что и исходные окружности;
б) точка пересечения *P* трех окружностей является ортоцентром (пересечением высот) треугольника *ABC*;
в) окружность, описанная вокруг треугольника *ABC*, имеет тот же радиус, что и эти три окружности;
г) треугольник *QRS* равен треугольнику *ABC*.

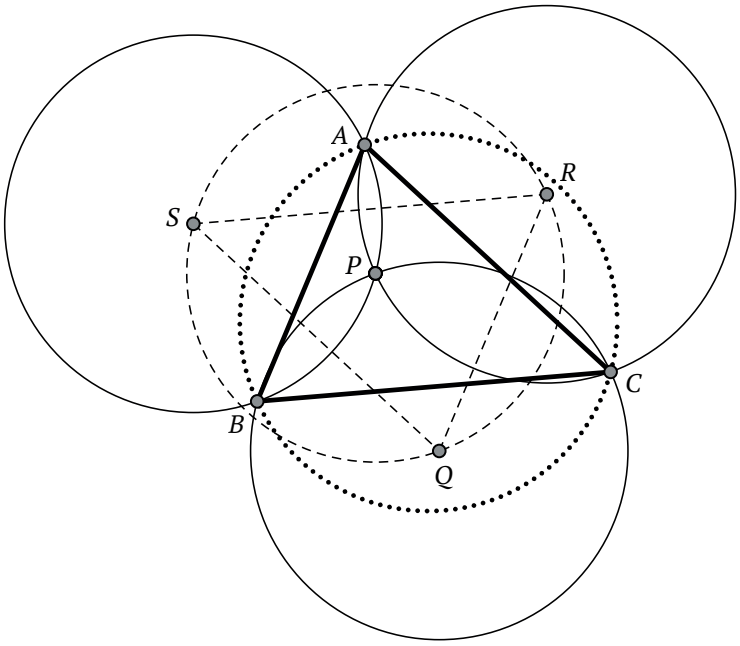


Рисунок 101

Пример 102. Другие неожиданные пересечения

Пересечения часто могут проявляться самым неожиданным образом. Предположим, мы выбрали случайную точку *P* внутри треугольника *ABC*, как показано на рис. 102. Из этой точки мы проводим перпендикуляры к каждой из сторон, которые пересекаются со сторонами *AB*, *BC* и *AC* в точках *G*, *H* и *J* соответственно. Затем мы выбираем случайную точку на каждом из перпендикуляров: точку *D* на *PG*, точку *E* на *PH* и точку *F* на *PJ*, получив таким образом треугольник *DEF*. Далее мы проводим перпендикуляры от вершин исходного треугольника *ABC* к каждой из трех сторон треугольника *DEF*: перпендикуляр от точки *A* к *DF*, перпендикуляр от точки *B* к *DE* и перпендикуляр от точки *C* к *EF*. В результате этих построений обнаруживается, что три последних перпендикуляра пересекаются в точке *Q*. Обратите внимание: все исходные точки были выбраны случайным образом. Точкой *P* может быть любая точка внутри треугольника, а вершины треугольника *DEF* расположены случайным образом

на трех начальных перпендикулярах. Это довольно необычное сочетание пересечений.

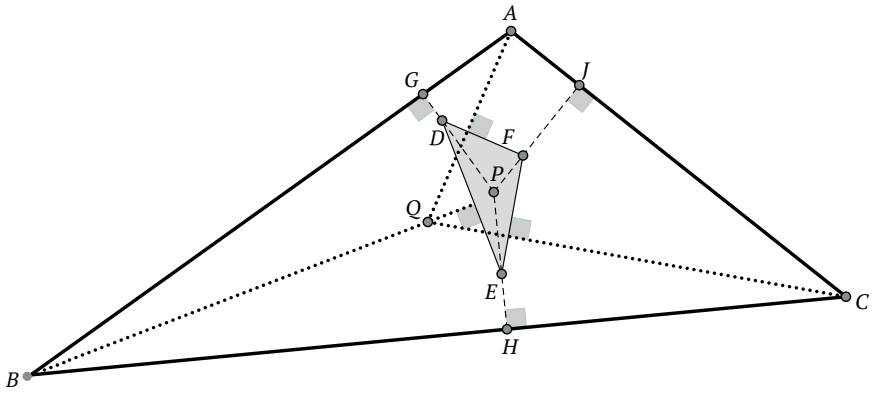


Рисунок 102

Пример 103. Одно пересечение порождает другое

Пример, приведенный на рис. 103, несомненно, является одним из самых замечательных сюрпризов, связанных с пересечениями прямых внутри треугольников. Начнем с треугольника *ABC* с тремя отрезками *AD*, *BE* и *CF*, пересекающимися в произвольной точке *P*. Если нарисовать окружность, содержащую точки *D*, *E* и *F*, получим следующий удивительный результат. Эта окружность пересечет стороны треугольника в трех дополнительных точках *X*, *Y* и *Z*, при этом три отрезка *AX*, *BY* и *CZ*, соединяющих эти точки с противолежащими вершинами, также всегда будут пересекаться в одной точке. Имейте в виду, что наши исходные прямые, которые пересекались в точке *P*, могли быть любыми произвольными тремя пересекающимися прямыми, и затем они образовали окружность, которая породила еще одно пересечение в одной точке *Q*. Поистине удивительно!

Пример 104. Необычные перпендикуляры, порождающие пересечения

Существует еще один случай пересечений, аналогичный тому, который мы только что рассмотрели на рис. 103. Здесь мы начинаем с окружности, которая дважды пересекает каждую сторону произвольно нарисованного треугольника *ABC*, как показано на рис. 104. Известно, что перпендикуляры *PD*, *PE* и *PF*, проведенные к каждой из сторон в трех точках пересечения с окружностью, пересекаются в точке *P*. Удивительно, но когда перпендикуляры затем проводятся из трех других точек пересечения с окружностью *K*, *L* и *M*, эти перпендикуляры *QK*, *QL* и *QM* неожиданно также окажутся пересекающимися в точке *Q*. Это просто поразительно!

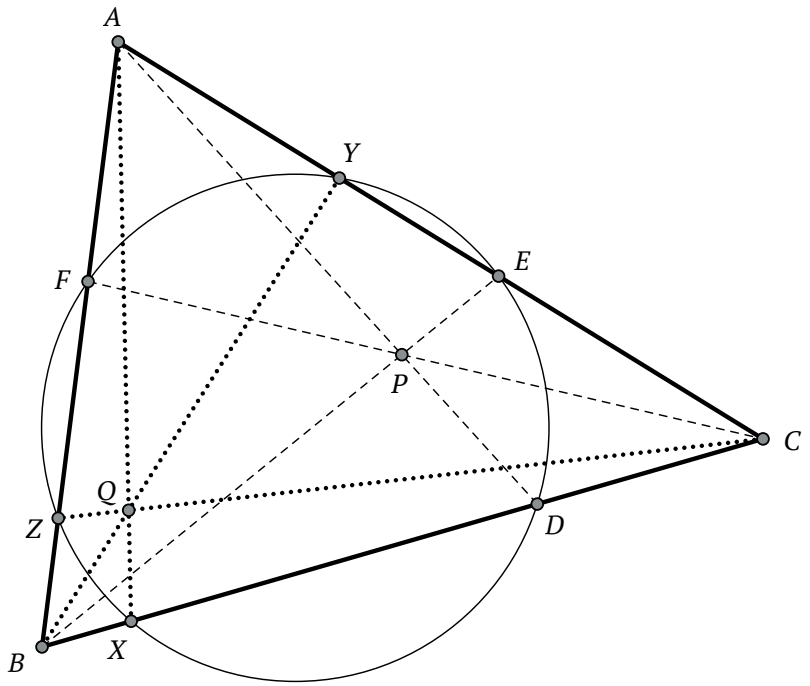


Рисунок 103

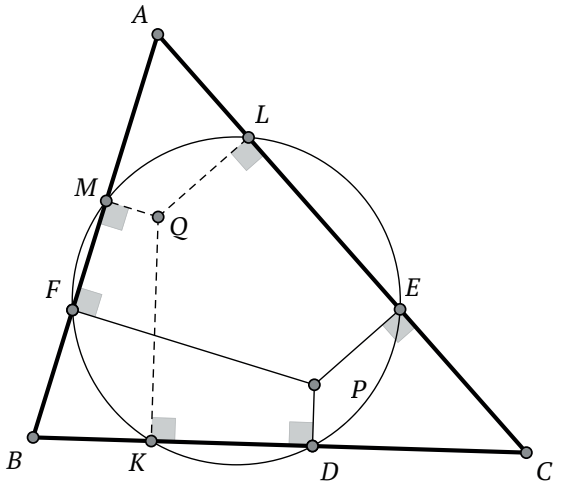


Рисунок 104

Пример 105. Совершенно неожиданное пересечение

Если предыдущая конфигурация не произвела на вас должного впечатления, то, безусловно, должна произвести следующая. На рис. 105 мы также начинаем с того, что рисуем три прямые *AD*, *BE* и *CF* в треугольнике *ABC*, которые

пересекаются в точке *P*. Затем мы находим середины *G*, *H* и *J* трех прямых *AD*, *BE* и *CF* соответственно. Потом находим середины *K*, *M* и *N* сторон *BC*, *CA* и *AB* треугольника *ABC* соответственно. Примечательно, что когда мы соединяем эти середины с ранее найденными, образуя отрезки *GK*, *HM* и *JN*, обнаруживаем, что эти соединения пересекаются в точке *Q*.

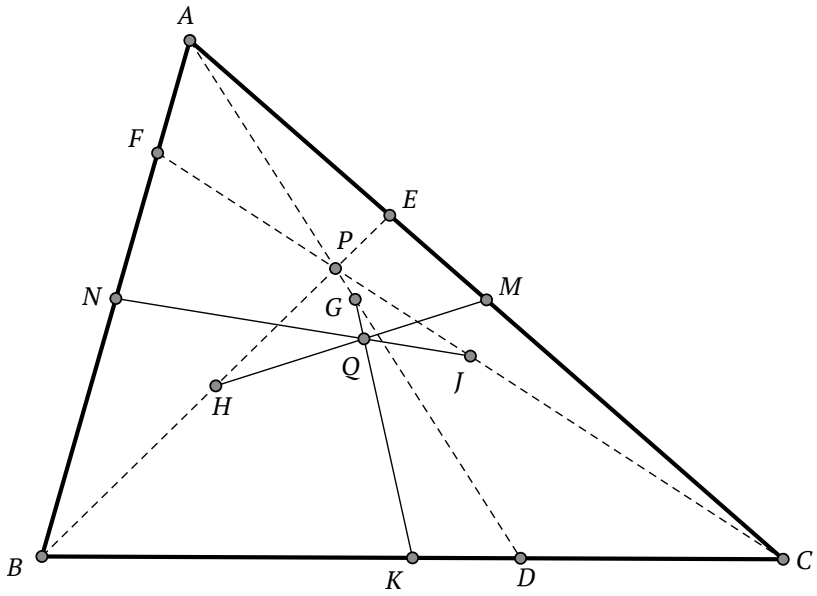


Рисунок 105

Пример 106. Интригующие пересечения

Вот еще одно пересечение в треугольнике, тоже довольно неожиданное. На этот раз, как показано на рис. 106, мы проведем в треугольнике *ABC* три пересекающиеся прямые *AD*, *DE* и *CF* с общей точкой *P*. Используя основания *D*, *E* и *F* этих трех отрезков, построим треугольник *DEF* и найдем середины *K*, *M* и *N* его сторон *EF*, *FD* и *DE* соответственно. Удивительно, но продолжения отрезков *AK*, *BM* и *CN* сходятся в общей точке *Q*. Снова удивительное и неожиданное пересечение!

Пример 107. Еще одно неожиданное и непредусмотренное пересечение

На рис. 107 мы рассматриваем треугольник *ABC* с высотами *AP*, *BQ* и *CR*. Точки *D*, *E* и *F* являются средними точками сторон *BC*, *AC* и *AB* соответственно. Средними точками отрезков *QR*, *PR* и *PQ* являются точки *X*, *Y* и *Z* соответственно. Непредвиденным является тот факт, что *XD*, *YE* и *ZF* пересекаются в одной точке *K*.

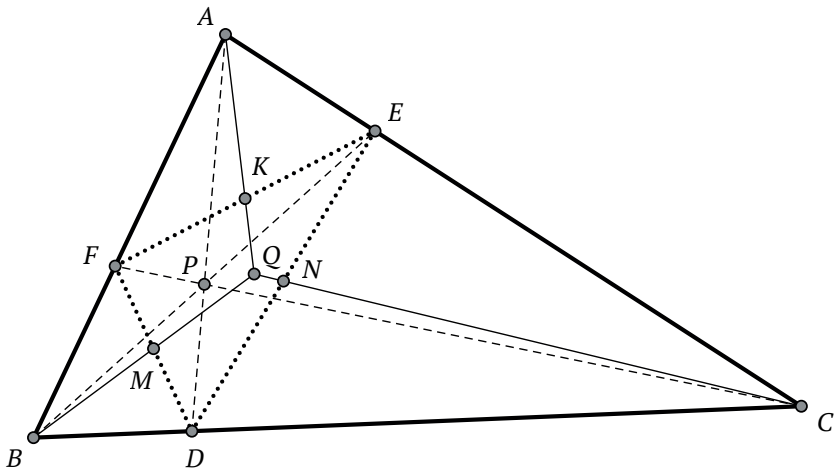


Рисунок 106

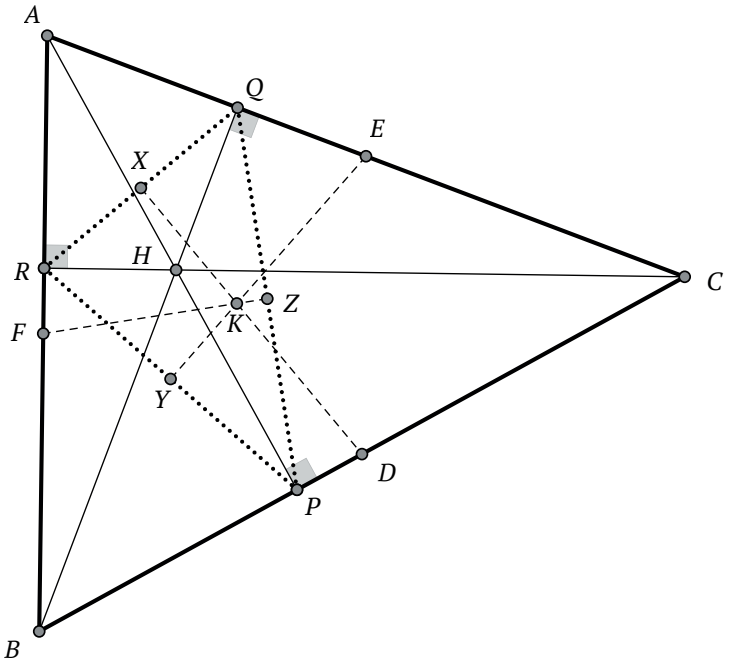


Рисунок 107

Пример 108. Самое неожиданное пересечение в треугольнике

На рис. 108 снова задан треугольник *ABC*. Точка *M* — это середина стороны *AB*, а точка *D* — любая случайно выбранная точка на стороне *AC*. Прямая *CE* проходит через точку *C* и параллельна стороне *AB*, и она пересекает продолжение отрезка *BD* в точке *E*. Сторона *BC* продолжена до пересечения с продолжением отрезка *AE* в точке *P*. Вспомнив, что точка *D* была выбрана случайным обра-

зом, мы обнаруживаем, что возникает неожиданное совпадение: продолжения отрезков *AE*, *BC* и *MD* пересекаются в точке *P*.

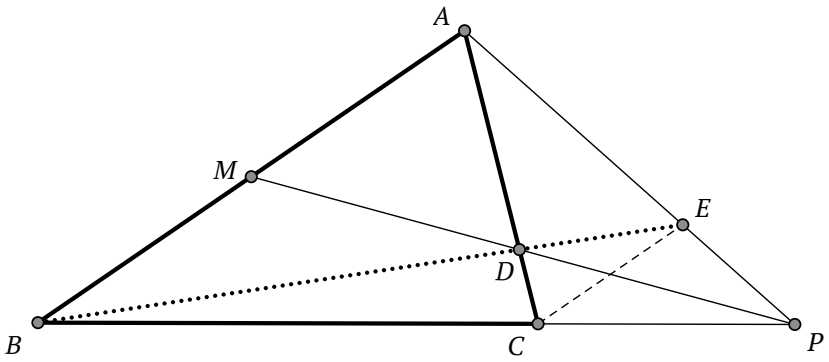


Рисунок 108

Пример 109. Поразительное свойство точки в треугольнике

Еще одно удивительное совпадение наблюдается в конфигурации, показанной на рис. 109. Здесь выбрана произвольная точка *P* внутри треугольника *ABC* с прямыми, проведенными от *P* к каждой из трех вершин. Биссектрисы углов *BPC*, *CPA* и *APB* пересекаются со сторонами *BC*, *CA* и *AB* треугольника *ABC* в точках *D*, *E* и *F* соответственно. Неожиданно мы обнаруживаем, что *AD*, *BE* и *CF* пересекаются в общей точке *R*. Следует также отметить, что точка *P* обладает еще одним интересным свойством, поскольку она соотносится со сторонами треугольника *ABC* следующим образом: $\frac{1}{2}(AB + BC + CA) < PA + PB + PC < 2(AB + BC + CA)$.

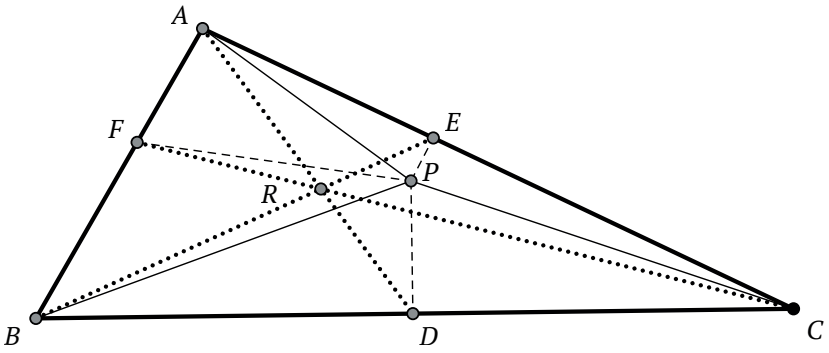


Рисунок 109

Пример 110. Пересечение, противоречащее здравому смыслу

Случается, что совпадение прямых в одной точке полностью противоречит интуиции, как в случае с конфигурацией, показанной на рис. 110. Здесь за

пределами треугольника *ABC* проведена произвольная прямая. От вершин треугольника *ABC* к этой прямой проведены перпендикуляры *AD*, *BE* и *CF*, пересекающие ее в точках *D*, *E* и *F*. Вот довольно удивительное обстоятельство, если учесть, что внешняя прямая была проведена случайным образом. Если провести перпендикуляры от каждой из трех точек *D*, *E* и *F* на внешней прямой к соответствующим сторонам исходного треугольника *ABC*, обнаруживается, что они пересекаются в одной точке *P*. Другими словами, если $DG \perp BC$, $EH \perp CA$ и $FJ \perp AB$, то прямые *DG*, *EH* и *FJ* пересекаются в точке *P*.

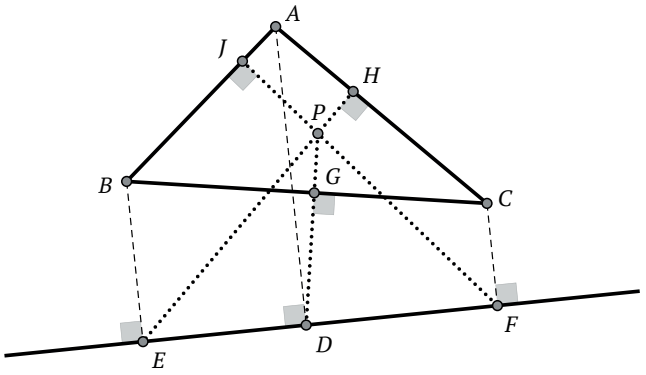


Рисунок 110

Пример 111. Пересекающиеся биссектрисы треугольников с общим основанием

На рис. 111 показаны четыре треугольника с общим основанием *AB* и равными углами при вершинах в точках *C*, *D*, *E* и *F*, а именно $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = \angle AFB$. Совершенно неожиданно обнаруживается, что биссектрисы каждого из равных углов пересекаются в одной точке *P*.

Пример 112. Неожиданное пересечение с участием описанной окружности

Странные и неожиданные пересечения могут происходить и с участием окружности, описанной вокруг треугольника. На рис. 112 треугольник *ABC* вписан в окружность с центром *O*. Биссектриса $\angle BAC$ пересекает сторону *BC* в точке *D*. Прямая *DP*, перпендикулярная *BC* в точке *D*, пересекает сторону *AC* в точке *J*. Кроме того, перпендикуляр к биссектрисе *AD* пересекает сторону *AB* в точке *K*, сторону *AC* в точке *L* и прямую *DJ* в точке *P*. Непредвиденным образом радиус *AO* описанной окружности также содержит точку *P*. Таким образом, мы имеем неожиданное пересечение прямых *KL*, *DJ* и радиуса *AO*, которые пересекаются в точке *P*.

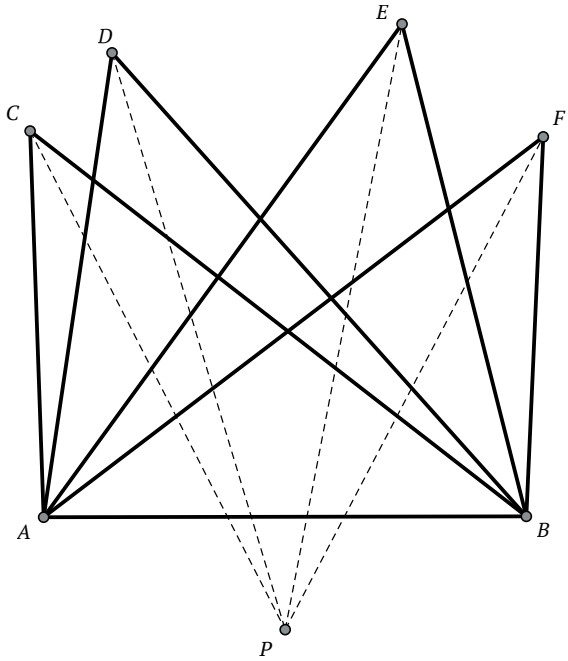


Рисунок 111

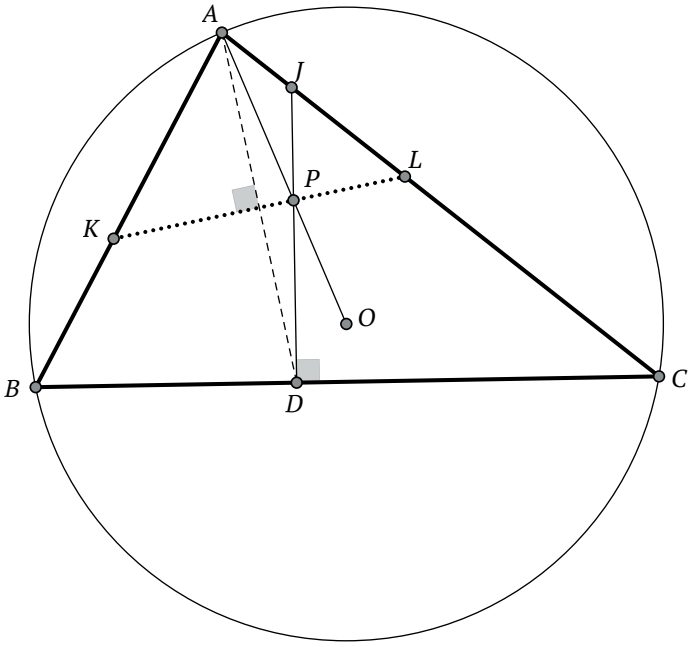


Рисунок 112

Пример 113. Удивительный аспект пересечения чевиан

Произвольные чевианы (т.е. отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками на противолежащих сторонах[1]) дают довольно неожиданный результат, если провести параллельные прямые для каждой из двух других чевиан через их основания. На рис. 113 начинаем с проведения трех чевиан *AD*, *BE*, и *CF*, которые пересекаются в точке *U*. Затем проведем следующие параллельные прямые: $AD \parallel FQ \parallel ER$, $BE \parallel DY \parallel FX$ и $CF \parallel EV \parallel DW$. Точки пересечения этих прямых определяются следующим образом: *FX* пересекает *EV* в точке *M*, *FQ* пересекает *DW* в точке *N*, а *ER* пересекает *DY* в точке *S*. Обнаруживается, что три отрезка *MD*, *NE* и *SF* пересекаются в точке *P* и разделяют друг друга пополам.

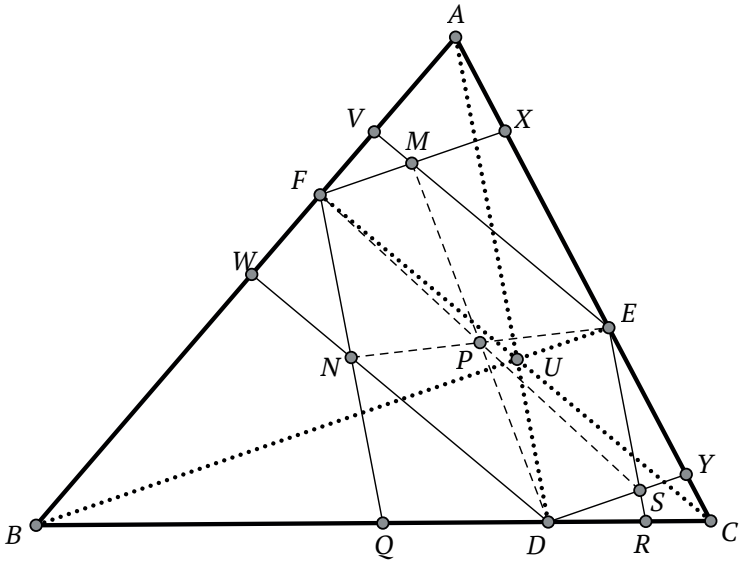


Рисунок 113

Пример 114. Удивительное равенство

Геометрия, как правило, демонстрирует неожиданные взаимосвязи. Одна из таких взаимосвязей показана на рис. 114, где угол *A* треугольника *ABC* разделен пополам прямой *AD* с точкой *D* на стороне *BC*. В точке *B* проводится прямая, параллельная *AD*, пересекающая продолжение прямой *CA* в точке *E*. Окружность, содержащая точки *C*, *D* и *E*, пересекается продолжением прямой *AD* в точке *G*, в то время как описанная окружность треугольника *ABC* пересекается продолжением прямой *AD* в точке *H*. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что $AG = AH$.

---

[1] **Чевиана** получила свое название в честь итальянского математика Джованни Чева (1647–1734), см. также раздел B4 в части 3 «*Инструментарий*».

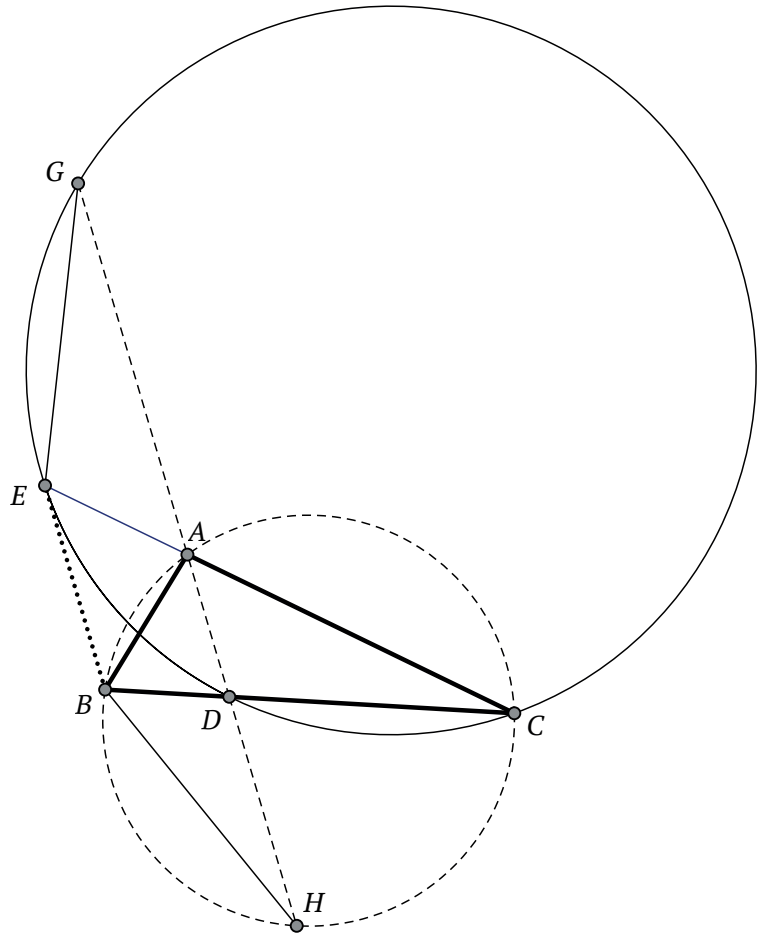


Рисунок 114

Пример 115. Непредвиденный сюрприз треугольника

Еще один непредвиденный сюрприз возникает в треугольнике ABC, показанном на рис. 115. Здесь M — середина BC, а P — случайная точка на BC. Перпендикуляры BK и CH проведены из точек B и C к продолжению прямой AP. Неожиданно мы обнаруживаем, что $MK = MH$.

Пример 116. Замечательное свойство двух треугольников с общим основанием

Два треугольника с общим основанием, вершины которых лежат на прямой, параллельной основанию, обладают довольно интересной характеристикой. Любая прямая, параллельная основанию, будет иметь равные отрезки, отрезанные двумя остальными сторонами каждого из треугольников. На рис. 116(а) $\triangle ABC$ и $\triangle DBC$ имеют одно и то же основание BC, а вершины A и D лежат на

прямой, параллельной *BC*. Проведя произвольную прямую *EH* параллельно *BC*, мы получим *EF* = *GH*. Это верно для любой такой параллельной прямой: для другой случайно выбранной прямой *IL*, параллельной *BC*, мы снова обнаружим, что два треугольника образуют равные отрезки на этой прямой: *IK* = *JL* и *IJ* = *LK*.

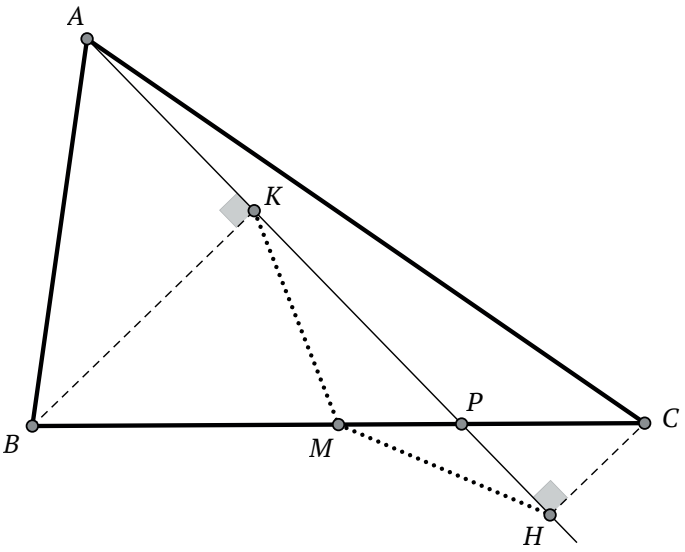
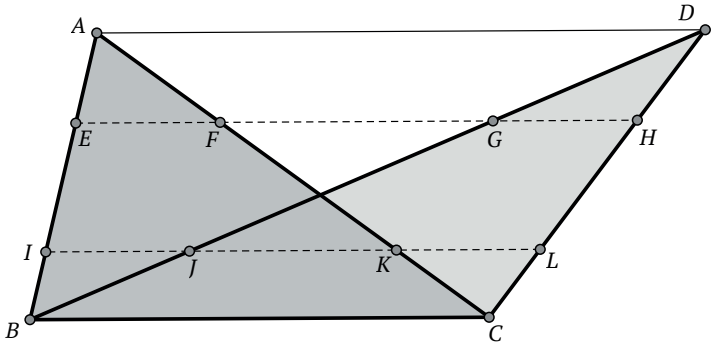


Рисунок 115

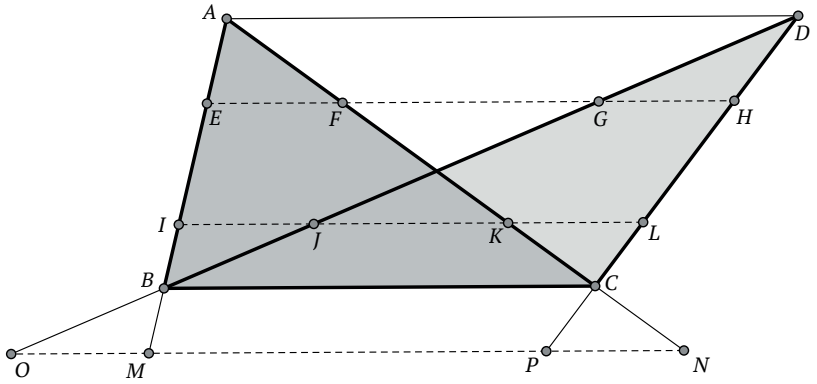
На самом деле это удивительное деление параллельных прямых также может быть распространено за пределы показанного на рис. 116(а). На рис. 116(б) стороны двух треугольников △*ABC* и △*DBC* продолжены, чтобы они пересекались с прямой *ON*, параллельной *BC*, в точках *M*, *N*, *O* и *P*. И снова мы находим, что *MN* = *OP* и *MO* = *PN*.

Пример 117. Неожиданное разбиение на отрезки

Равенство отрезков иногда проявляется, когда этого меньше всего ожидаешь. Пример такого случая показан на рис. 117. Здесь нам дан прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом в точке *C*. Середины *K*, *M* и *N* сторон *BC*, *AC* и *AB* соответственно являются центрами окружностей, диаметрами которых являются стороны прямоугольного треугольника. Затем мы проводим произвольную прямую из точки *C*, пересекая каждую из трех окружностей по одному разу в точке, отличной от *C*. Назвав эти точки пересечения точками *E*, *F* и *G*, мы обнаруживаем поразительное равенство: *CE* = *FG*.



(а)



(б)

Рисунок 116

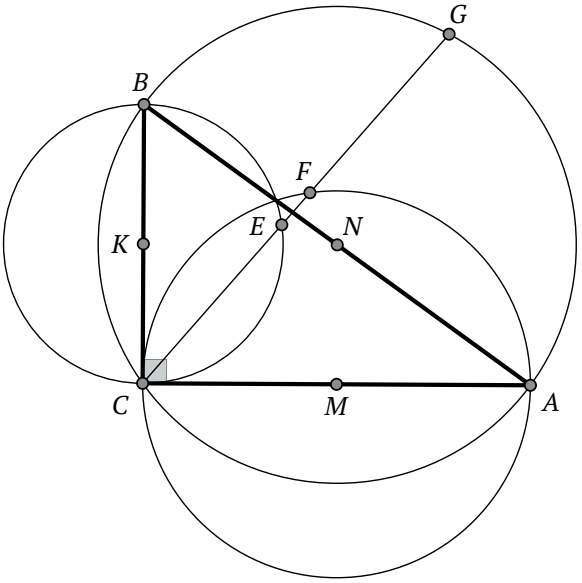


Рисунок 117

Пример 118. Скрытое равенство длин отрезков прямой в треугольнике

Поиск отрезков, сумма длин которых равна длине данного отрезка, может оказаться удивительным занятием. Рассмотрим отрезок AH в треугольнике ABC, показанном на рис. 118. Из точки H на BC проводим прямую, параллельную стороне AB и пересекающую сторону AC в точке E. Аналогично проводим прямую через точку H, параллельную стороне AC и пересекающую сторону AB в точке D. Затем проводим прямую DF, параллельную AH, пересекающую BC в точке F и, например, параллельную AH, пересекающую сторону BC в точке G. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что $DF + EG = AH$.

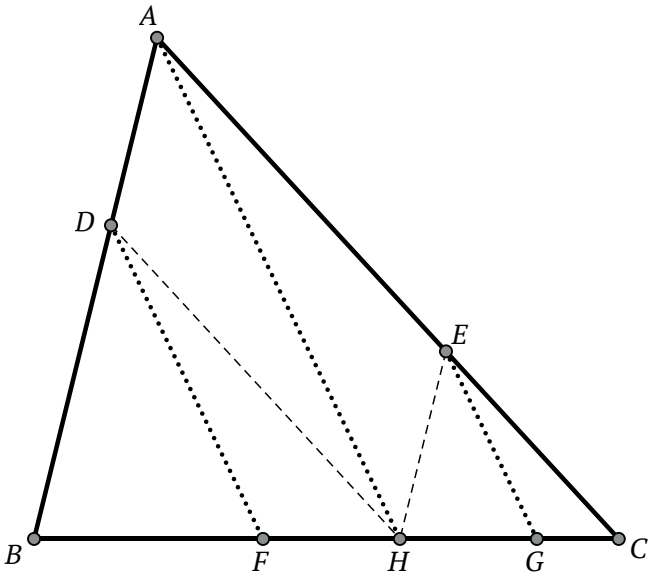


Рисунок 118

Пример 119. Неожиданная величина угла

Прямоугольные треугольники, как правило, таят в себе много сюрпризов. Рассмотрим треугольник ABC, показанный на рис. 119, с высотой CD. Прямая CF является биссектрисой угла ACB, а CE — медианой стороны AB. Кроме того, мы предполагаем, что $\angle ACD = \angle DCF = \angle FCE = \angle ECB$. В таком случае угол ACB должен быть прямым! Это довольно необычная ситуация.

Пример 120. Неожиданное равенство в прямоугольном треугольнике

Прямоугольные треугольники могут привести к весьма неожиданным результатам. На рис. 120 высота, проведенная к гипотенузе AB прямоугольного тре-

угольника ABC, продолжается через точку C так, что $CP = AC$. Гипотенуза AB продолжена через точку A в точку Q так, что $AQ = BC$. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что $PB = QC$.

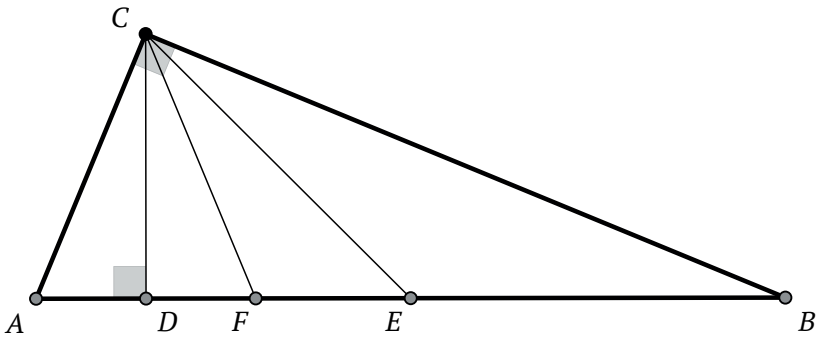


Рисунок 119

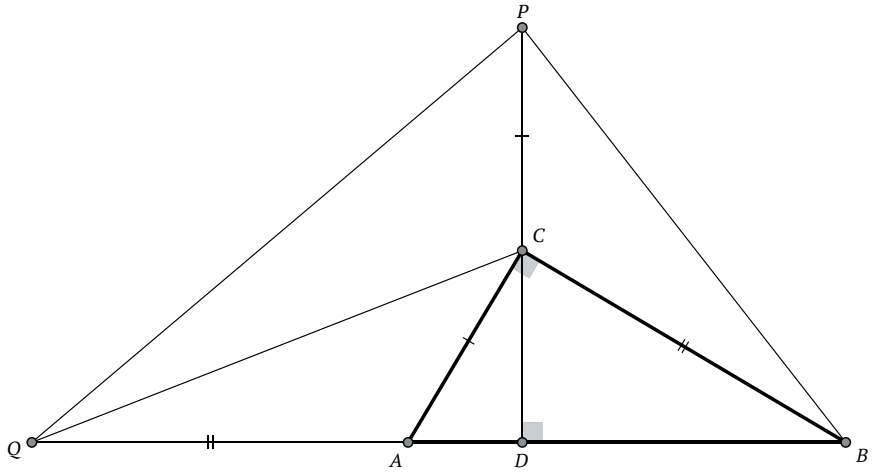


Рисунок 120

Пример 121. Загадка: перпендикуляр или параллель

Иногда описание геометрической конфигурации недостаточно точное и может привести к различным выводам. Один из таких примеров можно увидеть на рис. 121(а) и 121(б). На обоих рисунках мы начинаем с прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB и размещения точки P таким образом, что $BP \perp AB$ и $BP = BC$. Мы хотим сравнить относительное положение отрезка CP и биссектрисы AD угла BAC. На рис. 121(а) перпендикуляр BP проведен справа от треугольника, и когда отрезок CP пересекает биссектрису AD в точке E, он оказывается перпендикулярен ей. С другой стороны, на рис. 121(б), где перпендикуляр BP, также перпендикулярный AB и равный BC, проведен в другом направлении, мы видим, что PC параллелен биссектрисе AD.

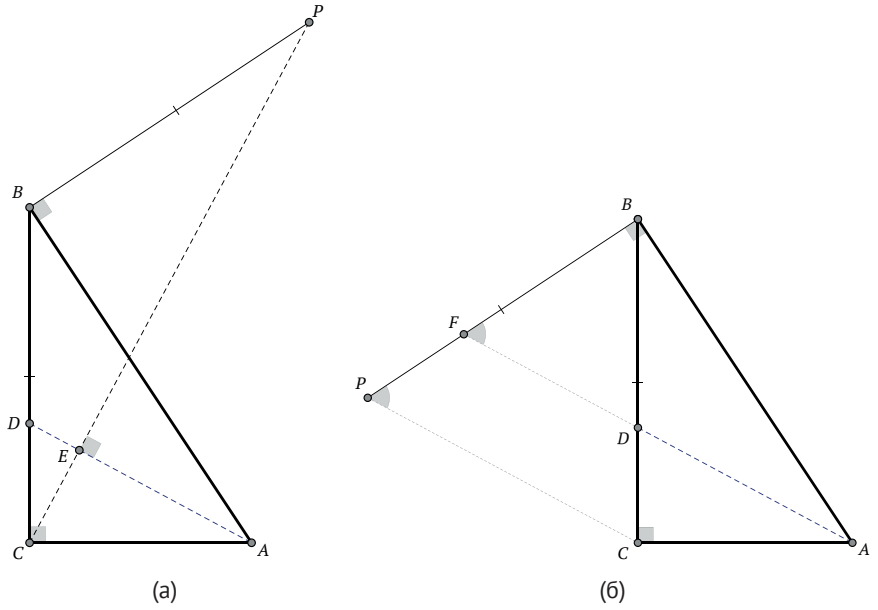


Рисунок 121

Пример 122. Несколько средних точек в прямоугольном треугольнике определяют равные отрезки

Мы представляем довольно необычный случай равенства при наличии нескольких средних точек внутри прямоугольного треугольника. На рис. 122 точки *D* и *E* —любые случайно выбранные точки на сторонах *AB* и *AC* треугольника *ABC*. Затем мы рассмотрим середины *F*, *G*, *H* и *J* отрезков *DE*, *BE*, *DC* и *BC* соответственно. Неожиданным образом обнаруживаем, что *FJ* = *GH*.

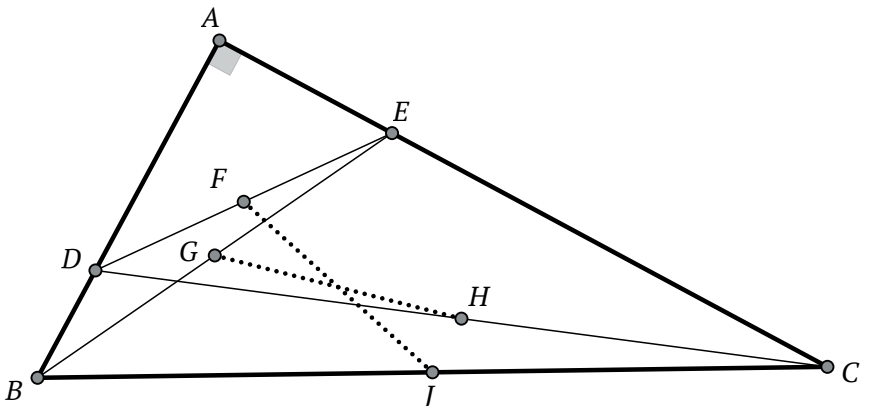


Рисунок 122

Пример 123. Перпендикуляры в прямоугольных треугольниках образуют равные углы

Есть и другие сюрпризы, связанные с прямоугольными треугольниками. Например, в показанном на рис. 123 прямоугольном треугольнике ABC с высотой CD, опущенной на гипотенузу AB, отрезки CA и CB, проведенные перпендикулярно катетам прямоугольного треугольника из точки D до точек E и F соответственно, перпендикулярны друг другу. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что $\angle AEB = \angle AFB$.

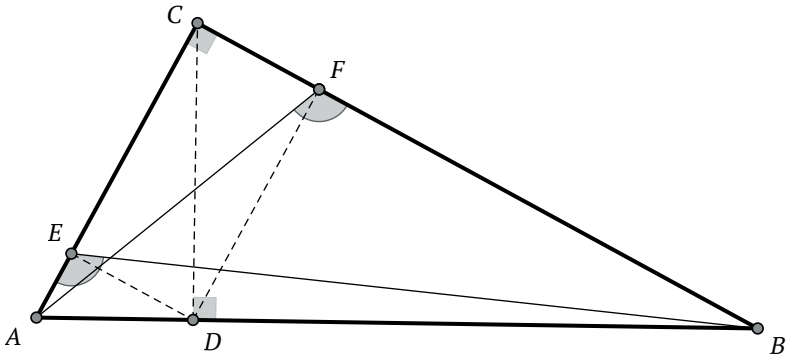


Рисунок 123

Пример 124. Прямоугольные треугольники, имеющие общую гипотенузу, приводят к неожиданному равенству

Совокупность перпендикулярных прямых часто приводит к неожиданным результатам. Рассмотрим два неравных прямоугольных треугольника, имеющих общую гипотенузу. На рис. 124 прямоугольный треугольник ACB и прямоугольный треугольник ABD имеют общую гипотенузу AB с серединой M. Если построить перпендикуляры к отрезкам MC и MD в точках D и C, они пересекутся в точке P. Неожиданно оказывается, что $PC = PD$.

Пример 125. Теорема Пифагора с геометрической точки зрения

Построение квадратов по сторонам прямоугольного треугольника геометрически объясняет знаменитую теорему Пифагора: сумма квадратов длин сторон прямоугольного треугольника равна квадрату длины гипотенузы. Это свойство обычно записывается как $a^2 + b^2 = c^2$. Геометрически это можно интерпретировать следующим образом: сумма площадей квадратов на катетах прямоугольного треугольника равна площади квадрата на гипотенузе, как мы видим на рис. 125.

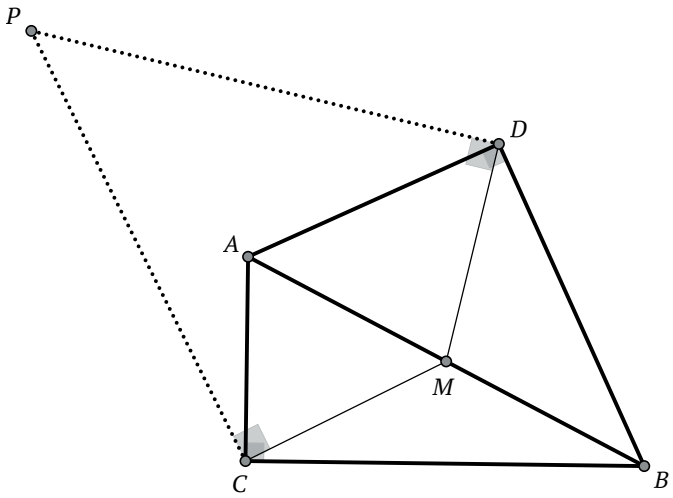


Рисунок 124

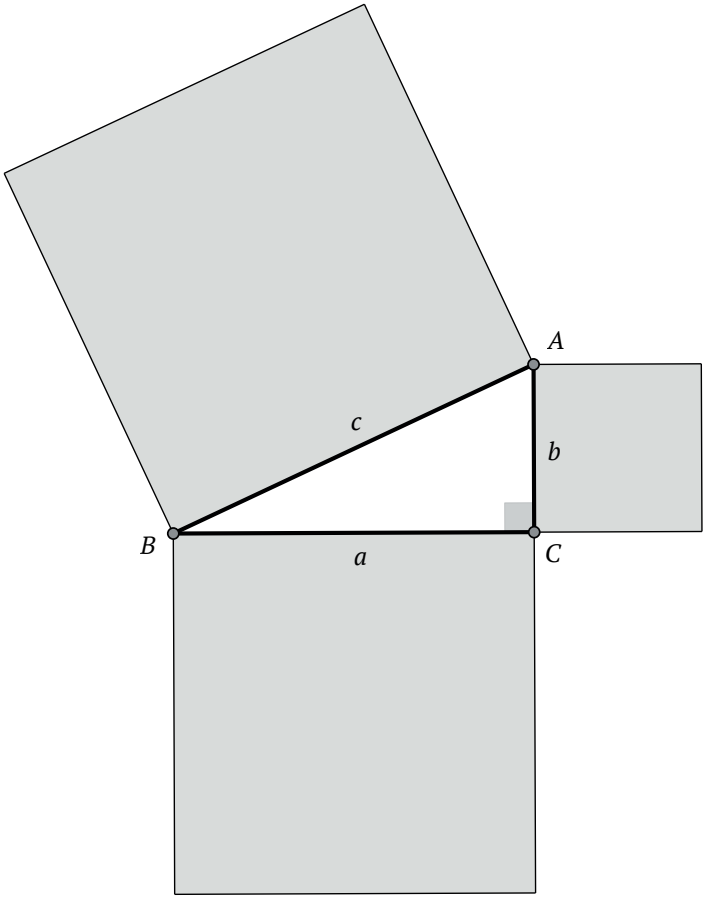


Рисунок 125

Пример 126. Квадраты на сторонах треугольника могут преподнести интересные сюрпризы

Нам не обязательно ограничиваться прямоугольными треугольниками. Размещение квадратов на каждой из сторон произвольно нарисованного треугольника *ABC*, как показано на рис. 126, также может преподнести несколько интересных сюрпризов. Мы получаем параллельные прямые, соединяя центр каждого квадрата с противолежащей вершиной исходного треугольника *ABC*. Кроме того, мы обнаруживаем, что эти три отрезка *AD*, *BE* и *CF* перпендикулярны отрезкам, соединяющим середины соседних квадратов. Другими словами, $AD \perp EF$, $BE \perp DF$ и $CF \perp DE$. В этой конфигурации есть еще кое-что удивительное: эти отрезки не только перпендикулярны, но и равны друг другу. Другими словами, мы неожиданно имеем $AD = EF$, $BE = DF$ и $CF = DE$.

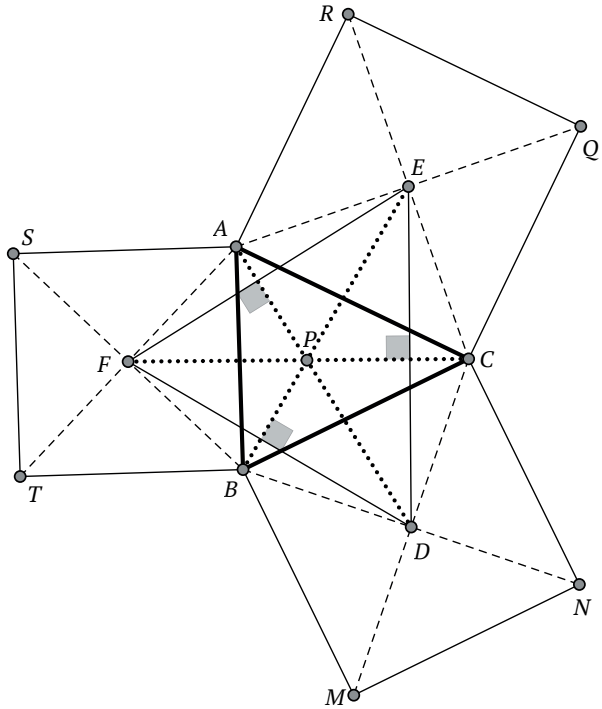


Рисунок 126

Пример 127. Дополнительные свойства, создаваемые квадратами на сторонах треугольника

Квадраты на сторонах произвольного треугольника приносят много других необычных сюрпризов. Давайте еще раз рассмотрим треугольник *ABC* с квадратами на каждой стороне, как показано на рис. 127. На этот раз мы обратим внимание на два параллелограмма *BTXM* и *CNYQ*. Поразительным результа-

том является то, что мы создали основу равнобедренного прямоугольного треугольника AXY, в котором $\angle XAY = 90°$, $AX = AY$ и $AX \perp AY$.

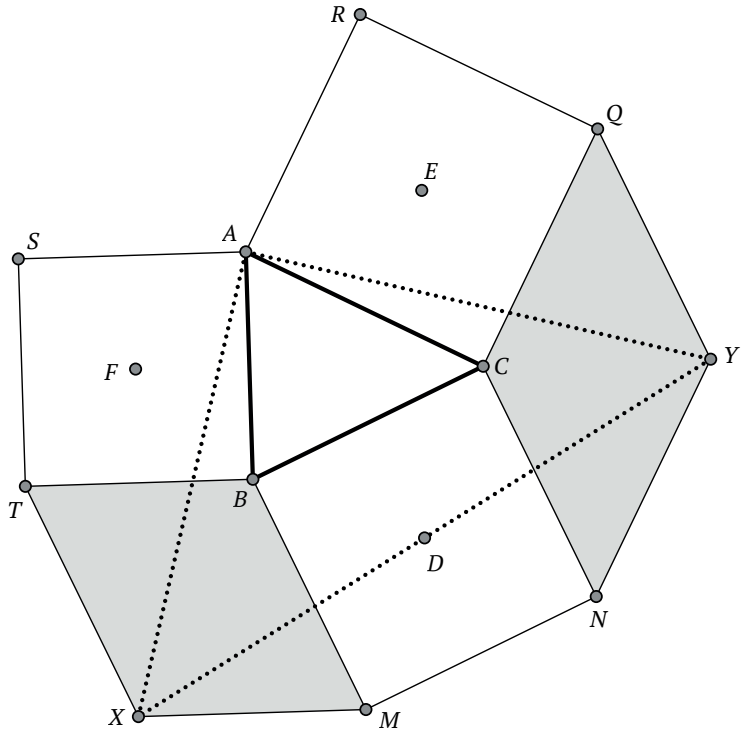


Рисунок 127

Пример 128. Неожиданная перпендикулярность

В конфигурации на рис. 127 есть и другая перпендикулярность. Как мы видим на рис. 128, прямая CT перпендикулярна AM. В этой конфигурации можно найти еще кое-что, что мы увидим в следующих примерах.

Пример 129. Удивительное пересечение с участием квадратов на сторонах треугольника

Теперь мы нарисуем третий параллелограмм $ARZS$, а затем соединим центры параллелограммов G, H и J с центрами противолежащих квадратов D, F и E соответственно, как показано на рис. 129. Неожиданно получаются три прямые, пересекающиеся в одной точке: DG, EJ и FH.

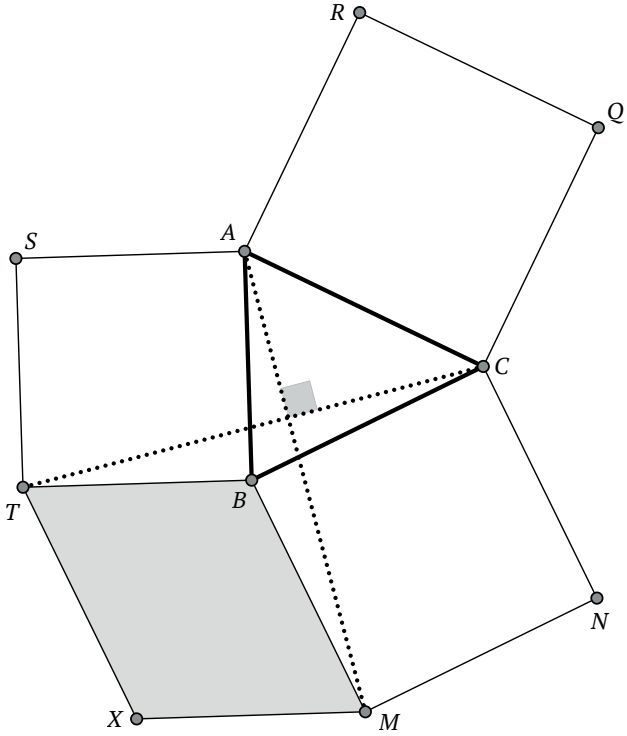


Рисунок 128

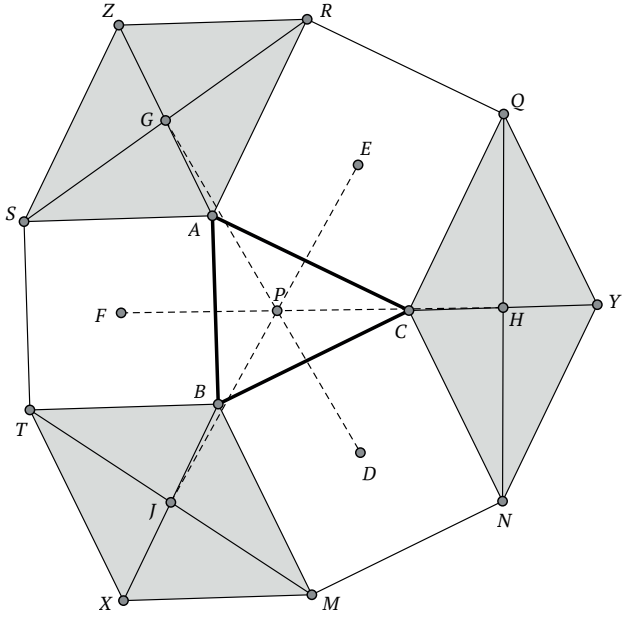


Рисунок 129

Пример 130. Еще одно удивительное совпадение для квадратов на сторонах треугольника

Дальнейшие совпадения в конфигурации с квадратами. Если мы рассмотрим прямые *GU*, *JV* и *HW*, соединяющие центральную точку каждого параллелограмма *G*, *J* и *H* с серединами противолежащих сторон *U*, *V* и *W* исходного треугольника *ABC*, мы обнаружим, что эти прямые пересекаются в точке *L*, как показано на рис. 130.

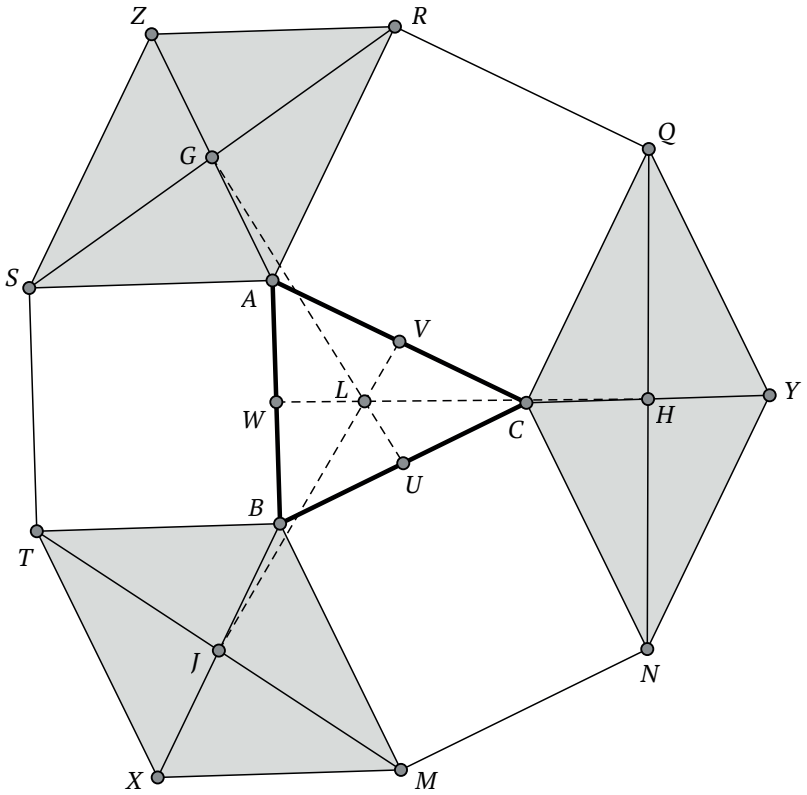


Рисунок 130

Пример 131. Использование квадратов на сторонах треугольника для создания еще одного удивительного совпадения

Размещение квадратов на сторонах треугольника продолжает приводить ко множеству других совпадений. На этот раз мы продолжим внешние стороны квадратов, расположенных в треугольнике *ABC*, до тех пор, пока они не

пересекутся в точках *X*, *Y* и *Z*. Таким образом, получается треугольник *XYZ*, показанный на рис. 131. Соединяя каждую из этих точек с ближайшими вершинами треугольника *ABC*, мы снова обнаруживаем, что в точке *P* возникает пересечение.

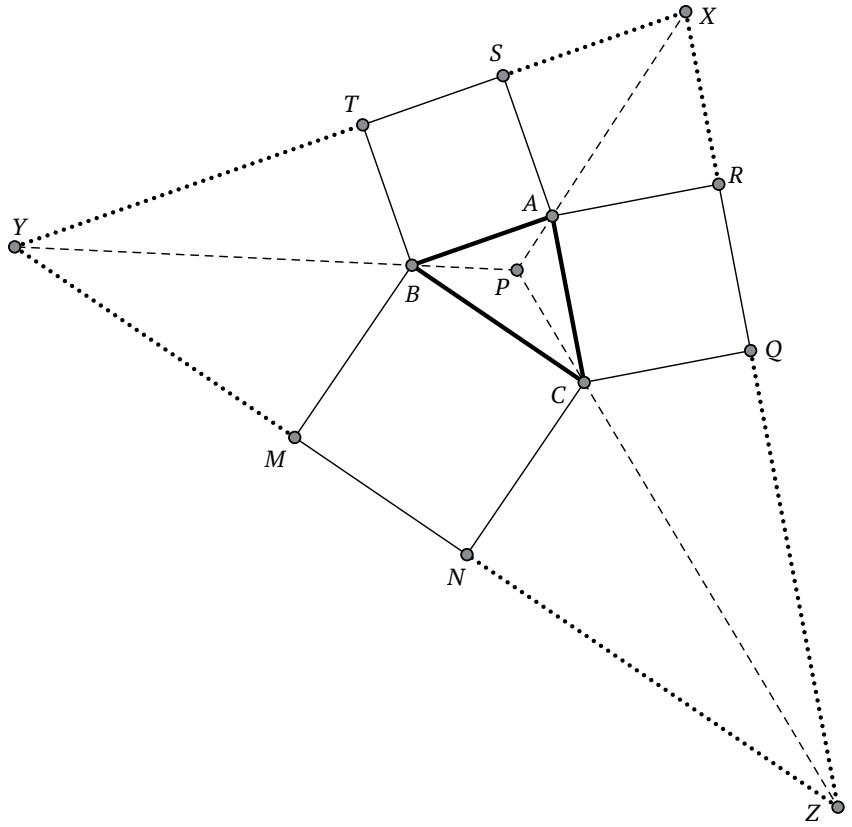


Рисунок 131

Пример 132. Квадраты на катетах прямоугольного треугольника дают неожиданное равенство

Построив квадраты на каждом из катетов прямоугольного треугольника и добавив несколько простых связей, мы обнаруживаем неожиданные сюрпризы. На рис. 132 к сторонам *CA* и *BC* прямоугольного треугольника *ABC* добавлены квадраты *ACDE* и *CBFG* соответственно. Проводим *AF* и *BE*, пересекающиеся в точке *P*, при этом *BE* и *CA* пересекутся в точке *K*, а *AF* и *BC* — в точке *J*. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что *CK* = *CJ*, независимо от формы прямоугольного треугольника.

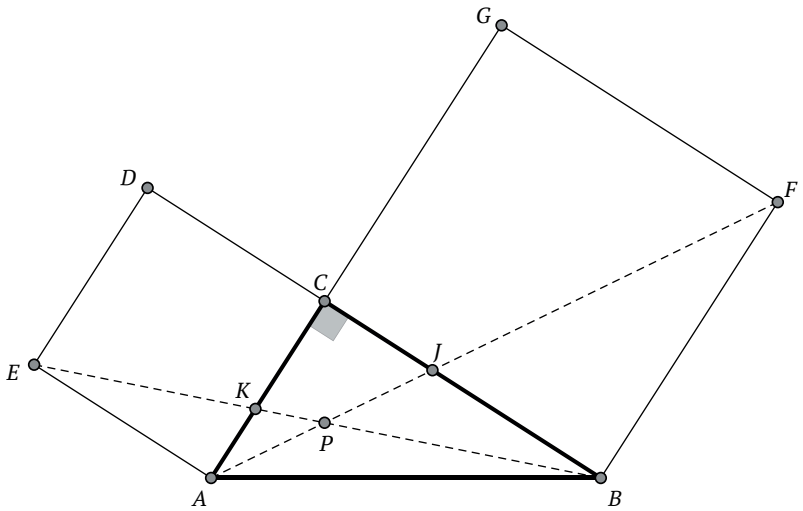


Рисунок 132

Пример 133. Подробнее о квадратах на катетах прямоугольного треугольника

В этой конфигурации можно получить еще несколько необычных результатов. На рис. 133 у нас снова есть квадраты *ACDE* и *CBFG*, расположенные на сторонах *CA* и *BC* соответственно. Из вершины *E* проводится перпендикуляр к продолжению *AB*, пересекающему ее в точке *S*, а из вершины *F* проводится перпендикуляр к другому продолжению *AB*, пересекающему ее в точке *T*. Первый неожиданный результат: *ES* + *FT* = *AB*. Кроме того, *площадь* $\triangle AES$ + *площадь* $\triangle FBT$ = *площадь* $\triangle ABC$.

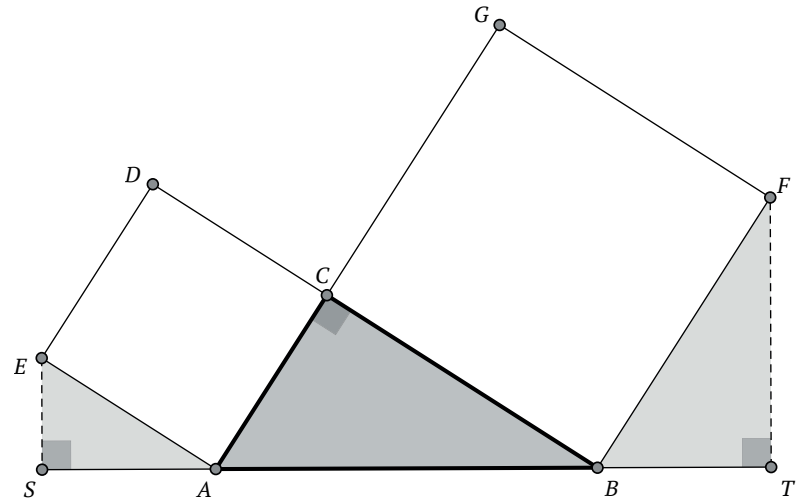


Рисунок 133

Пример 134. Другие квадраты на сторонах прямоугольных треугольников

Размещение квадрата на катете и квадрата на гипотенузе прямоугольного треугольника приводит к еще более неожиданным результатам. На рис. 134 прямоугольный треугольник *ABC* имеет квадрат *BFGC*, расположенный на катете *BC*, и квадрат *AEDB*, расположенный на гипотенузе *AB*. Выбираем точку *L* в любом месте на стороне *BC*. Вопреки здравому смыслу оказывается, что *площадь* $\triangle LBF$ = *площадь* $\triangle LDB$. Что еще более примечательно в этом результате: равенство площадей этих двух треугольников остается постоянным, независимо от расположения точки *L* на стороне *BC*.

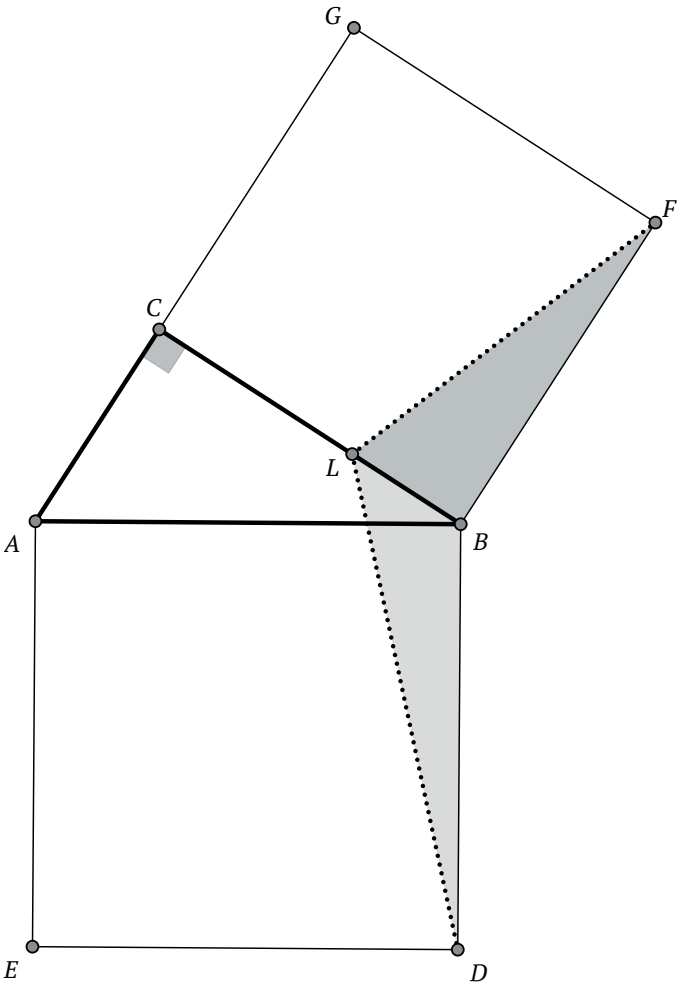


Рисунок 134

Пример 135. Еще одно неожиданное равенство площадей

Конфигурация, аналогичная показанной на рис. 134, дает другую пару треугольников, которые дают столь же удивительный результат. На рис. 135 мы снова поместим квадрат *AEDB* на гипотенузу треугольника *ABC*. Удивительно, но обнаруживается, что *площадь* $\triangle ACE$ + *площадь* $\triangle BCD = \frac{1}{2}$*площадь* $\triangle AEBD$.

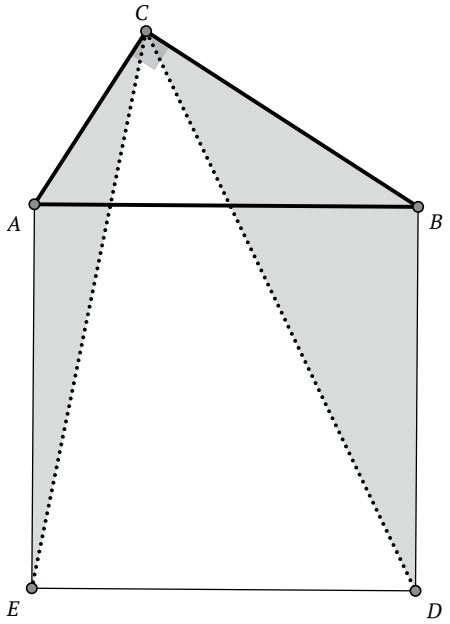


Рисунок 135

Пример 136. Квадрат на гипотенузе прямоугольного треугольника

На рис. 136 мы снова помещаем квадрат *ARSB* на гипотенузу *AB* прямоугольного треугольника *ABC*. Затем проводим прямую, соединяющую центр *M* квадрата с вершиной *C*. Прямая, проходящая через *M* перпендикулярно *CM*, пересекает продолжения двух сторон *CA* и *CB* в точках *D* и *E* соответственно. Неожиданным результатом является то, что $BE = AC$ и $AD = BC$. Кроме того, еще одной удивительной особенностью этой конфигурации является то, что *CM* делит пополам угол *ACB*.

Пример 137. Действительно неожиданная коллинеарность

Размещение равностороннего треугольника внутри данного квадрата *ABCD* и другого равностороннего треугольника снаружи квадрата, как показано на рис. 137, обеспечивает интересную и неожиданную коллинеарность трех точек. Равносторонний треугольник *BCE* и равносторонний треугольник *DCF*

расположены внутри и снаружи квадрата *ABCD*. В результате точки *A*, *E* и *F* находятся на одной прямой.

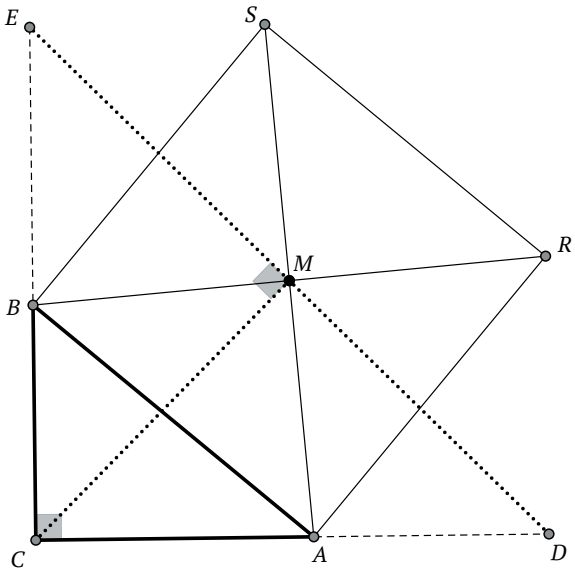


Рисунок 136

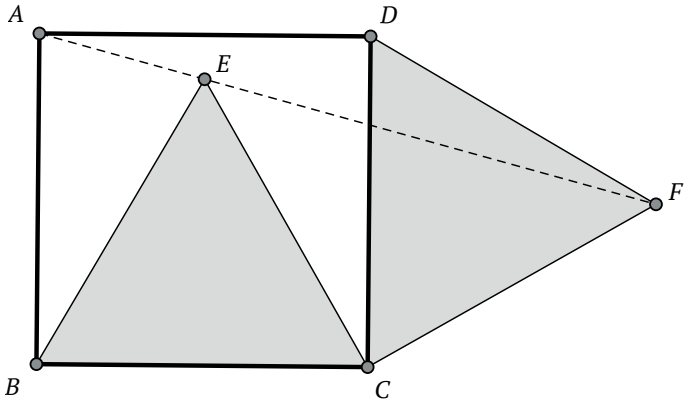


Рисунок 137

Пример 138. Необычный способ деления квадрата на две равные части

Разделить квадрат на две равные части довольно просто. Два известных способа: провести диагональ квадрата или соединить середины двух противолежащих сторон. Процедура, показанная на рис. 138, довольно необычна, поскольку демонстрирует красоту математики в неожиданном ракурсе. Нарисуем любой прямоугольный треугольник *AED*, гипотенуза которого является

стороной *AD* квадрата *ABCD*. Биссектриса угла *AED*, пересекающая стороны *AD* и *BC* в точках *K* и *L* соответственно, делит квадрат на две равные по площади области. Другими словами, площадь четырехугольника *ABLK* равна площади четырехугольника *DKLC*.

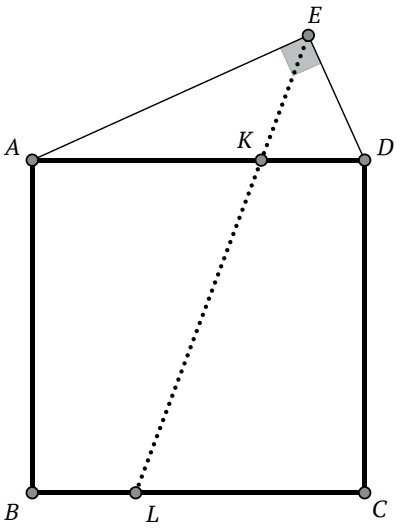


Рисунок 138

Пример 139. Удвоение квадрата

Удивительное дело: мы можем построить простую геометрическую фигуру, в результате которой получаются два квадрата, площадь одного из которых вдвое превышает площадь другого. Начинаем с треугольника *ABC* с углом $A = 45°$, показанного на рис. 139, где перпендикуляры от вершин *B* и *C* к противолежащим сторонам пересекают их в точках *D* и *E* соответственно. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что площадь квадрата *BGFC* на стороне *BC* ровно в два раза превышает площадь квадрата *DHIE*.

Пример 140. Странная конструкция из параллельных линий

Существуют любопытные способы построения прямой, параллельной стороне треугольника. Один из способов заключается в том, чтобы сначала провести медиану к одной стороне треугольника, а затем провести прямые от двух конечных точек этой стороны таким образом, чтобы они пересекались друг с другом на медиане. Этот прием показан на рис. 140, где *AD* — медиана треугольника *ABC*. Предположим, мы хотим провести прямую через точку *P*, параллельную *BC*. Все, что нам нужно, — провести линию *PC*, которая пересекает медиану *AD* в точке *G*. Затем проведем прямую через точки *B* и *G*, пересекающую *AC* в точке *Q*, и прямая *PQ* окажется параллельной *BC*.

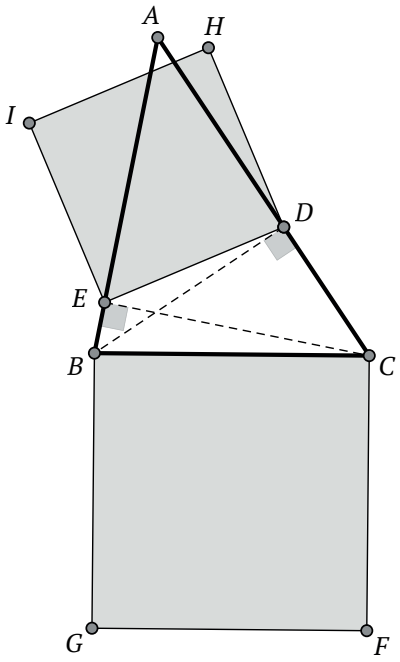


Рисунок 139

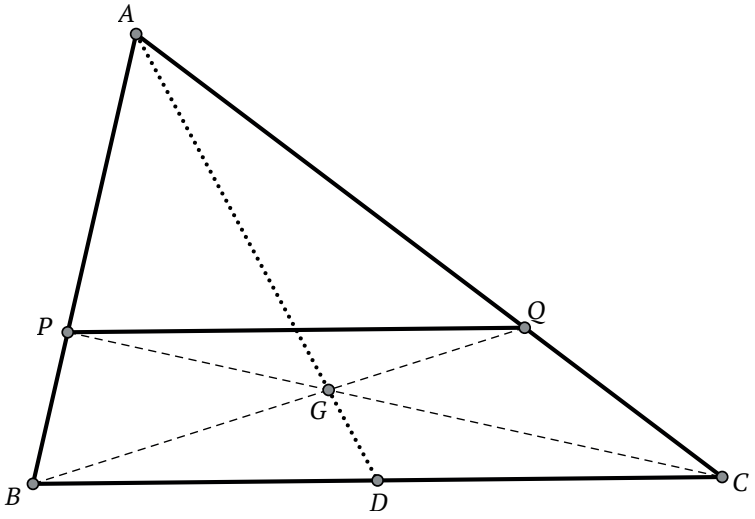


Рисунок 140

Пример 141. Необычный способ нахождения середины отрезка

Существуют также очень интересные способы деления отрезков пополам. Метод, связанный с предыдущим примером, может быть показан на примере треугольника *ABC* на рис. 141. Здесь нам дан отрезок *BC*, который мы хотим

разделить пополам. Выбираем вершину A в произвольном месте за пределами линии BC. Затем проводим прямую PQ, параллельную BC, с точкой P на пересечении с AB и точкой Q на пересечении с AC, а также проводим прямые PC и QB, пересекающиеся в точке G. Если мы проведем прямую через точки A и G, то обнаружим, что она делит пополам отрезки PQ и BC в точках N и M соответственно, так что $PN = NQ$, а $BM = MC$.

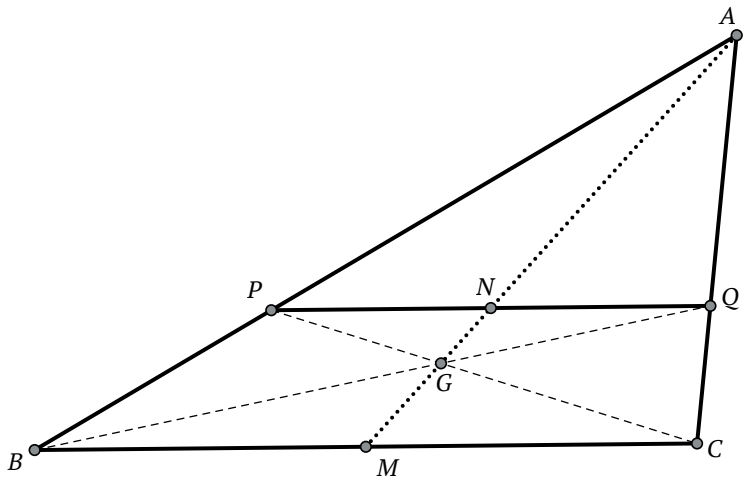


Рисунок 141

Пример 142. Неожиданное появление параллельных прямых

Параллельные прямые иногда появляются совершенно неожиданно, в очередной раз демонстрируя интересные аспекты геометрии. В качестве примера, показанного на рис. 142, можно нарисовать произвольную прямую, содержащую вершину A треугольника ABC, стороны которого BC, AC и AB имеют середины D, E и F соответственно. Продолжение отрезка DE пересекается с этой случайно выбранной прямой в точке G, а продолжение DF пересекается с той же прямой в точке H. К нашему удивлению, мы обнаруживаем, что GC параллельна HB — еще один пример неочевидной симметрии.

Пример 143. Неожиданная параллельная прямая

Еще один удивительный результат заключается в следующем. На рис. 143 мы видим треугольник ABC и биссектрисы BL и CK углов CBA и ACB соответственно. Когда мы строим перпендикуляры от точки A к каждой из биссектрис (при необходимости продолженных), мы получаем $AD \perp BL$ в точке D и $AE \perp CK$ в точке E. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что отрезок прямой DE параллелен основанию BC треугольника ABC.

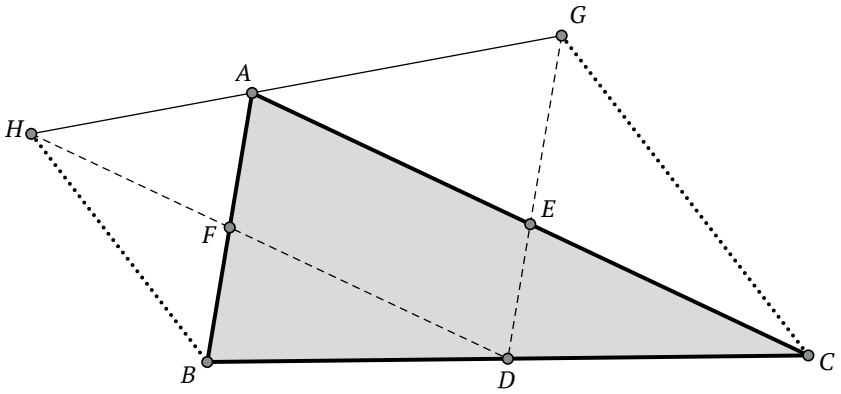


Рисунок 142

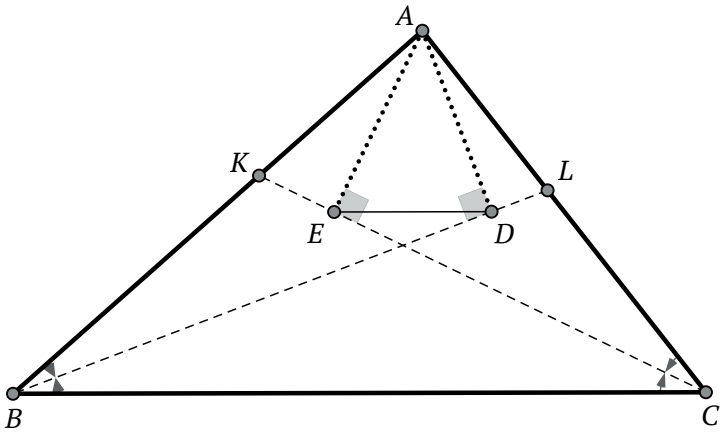


Рисунок 143

Пример 144. Удивительная перпендикулярность

Бывают случаи, когда, казалось бы, никак не связанные прямые оказываются перпендикулярными. Именно так обстоит дело в ситуации, показанной на рис. 144. В треугольнике ABC мы сначала строим биссектрису AD угла BAC с точкой D на стороне BC. Точки E и F получены на сторонах AB и AC соответственно таким образом, что DE делит пополам угол FDB, а DF делит пополам угол CDA. Продолжение EF пересекает продолжение BC в точке G. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что прямая GA перпендикулярна AD.

Пример 145. Другая неожиданная перпендикулярность

На рис. 145 высота AH в треугольнике ABC пересекает сторону BC в точке H. Кроме того, точка M — середина стороны BC. Задается точка Q такая, что $\angle AQC = 90°$, и точка P на HQ такая, что $\angle APB = 90°$. Если точка R представляет

середину отрезка *PQ*, то угол *ARM* совершенно неожиданно также оказывается прямым углом.

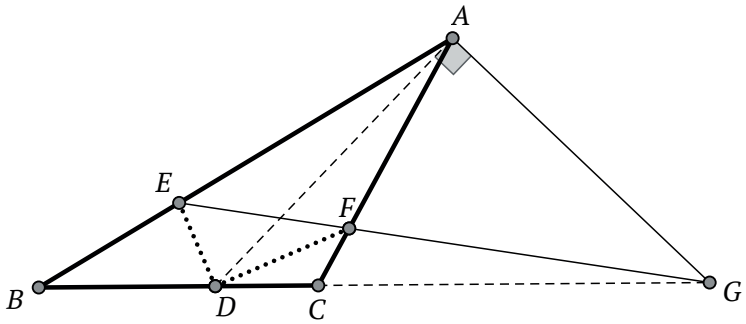


Рисунок 144

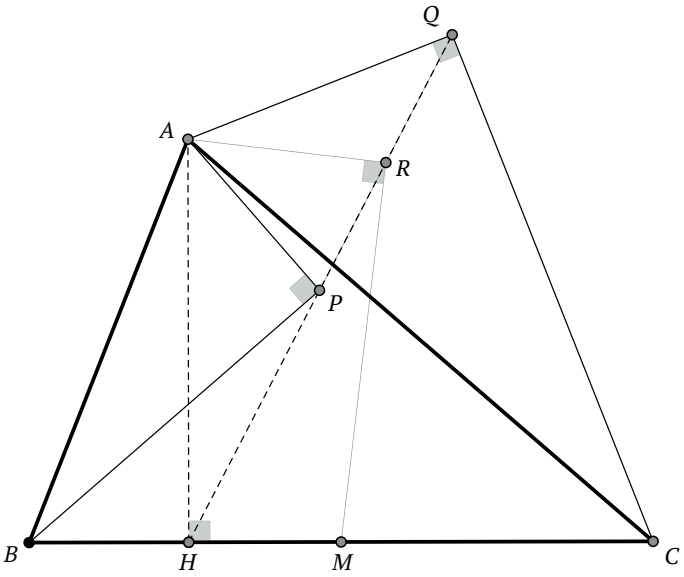


Рисунок 145

Пример 146. Еще один неожиданный прямой угол

Как и в предыдущем примере, существуют некоторые процедуры, которые создают прямые углы, когда этого меньше всего ожидаешь. На рис. 146 мы начинаем с треугольника *ABC* и случайно выбранной точки *P* на стороне *BC*. Затем находим середину *O* стороны *BC* и строим окружность с центром *O* и радиусом *OC*. Эта окружность пересекает продолжение отрезка *AP* в точке *F*. Затем определяем прямую, проходящую через точку *P* и параллельную *FO*. Эта прямая *PN* пересекает *AO* в точке *N*. Потом мы проводим линию, параллельную *BC*, через точку *N*, пересекающую стороны *AB* и *AC* в точках *J* и *H* соответ-

ственно. Обнаруживается, что $\angle HPJ$ совершенно неожиданно также является прямым углом.

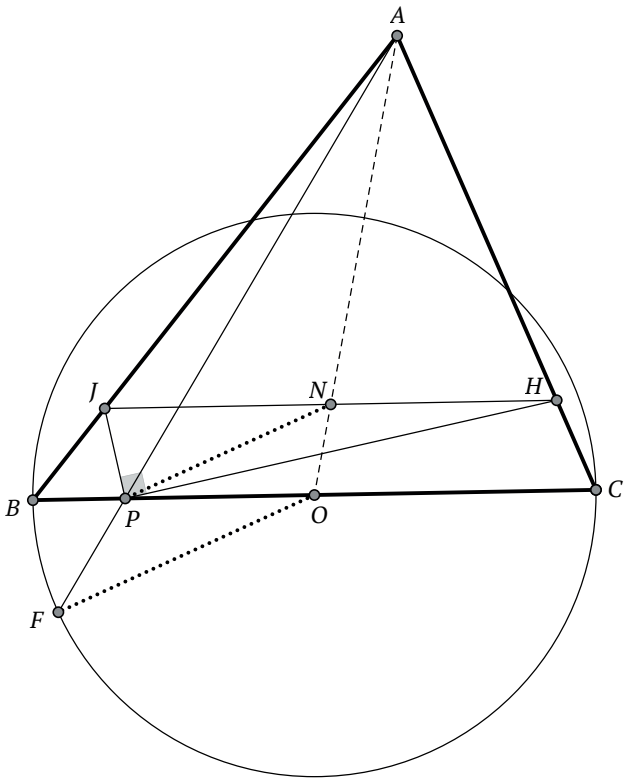


Рисунок 146

Пример 147. Четыре точки на одной окружности

В геометрии всегда стоит обратить внимание на сложный случай четырех или более точек, лежащих на одной окружности. Предположим, задан треугольник ABC, как показано на рис. 147, ортоцентр которого в точке H, а точка P — пересечение высоты AH со стороной BC. Если продолжить отрезок HP на его собственную длину до точки K, обнаруживается, что эта точка K также лежит на описанной окружности треугольника ABC. В результате получается окружность с четырьмя точками на ней, а именно A, B, K и C.

Пример 148. Еще четыре примечательные точки на одной окружности

Точки на одной окружности, как правило, появляются тогда, когда их меньше всего ожидаешь. Рассмотрим треугольник ABC, показанный на рис. 148, с центром описанной окружности в точке O. Точки E и F расположены на сторонах AB

и AC таким образом, что отрезок EF перпендикулярен AO. Как только это будет построено, обнаружится, что точки B, E, F и C находятся на одной окружности.

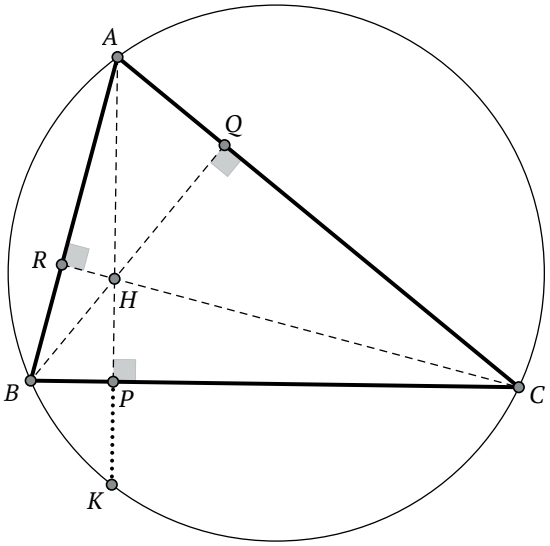


Рисунок 147

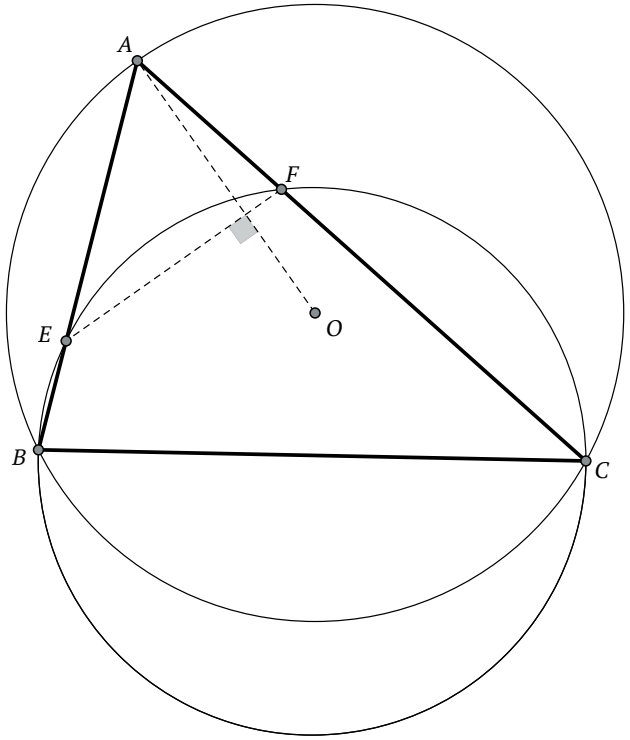


Рисунок 148

Пример 149. И еще четыре неожиданные точки на одной окружности

Как мы уже говорили, найти четыре или более точек, лежащих на одной окружности, всегда является сложной задачей в геометрии. Другой такой пример показан на рис. 149, где H — ортоцентр треугольника ABC, а точки F и D — середины сторон AB и BC соответственно. Продолжим DH до точки X пересечения с описанной окружностью треугольника ABC. Продолжение FH пересекает описанную окружность в точке Y. Удивительно, но точки D, F, X и Y лежат на одной окружности.

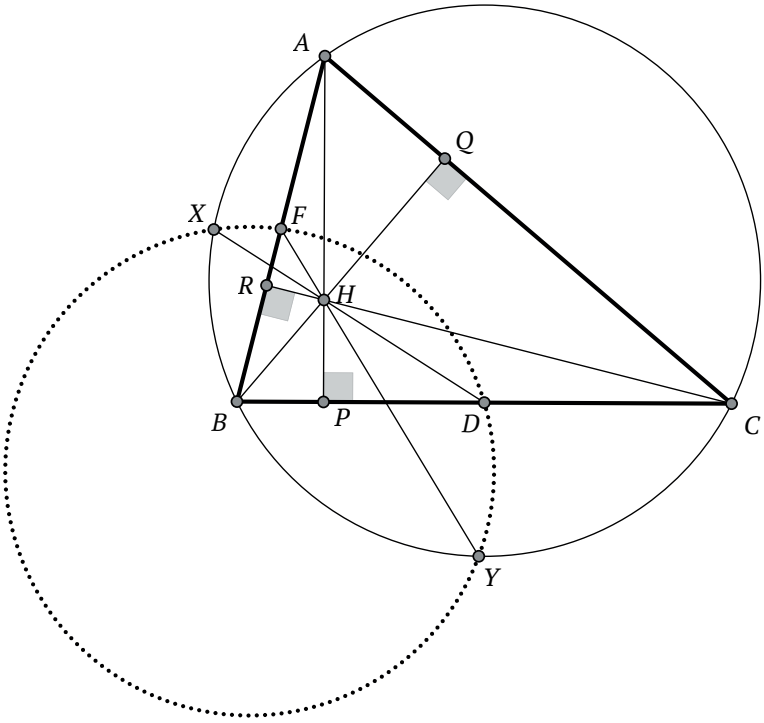


Рисунок 149

Пример 150. Перпендикуляры, образующие точки на одной окружности

Следующий набор перпендикулярных линий в треугольнике создаст точки на одной окружности. На рис. 150 в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом в точке A имеются две случайно выбранные точки P и Q на сторонах AB и AC соответственно. Проведем перпендикулярные прямые из точки A к прямым BC, PC, BQ и PQ, пересекающие эти прямые в точках E, G, H и J соответственно. К нашему удивлению, обнаруживается, что все эти точки E, G, H и J лежат на одной окружности.

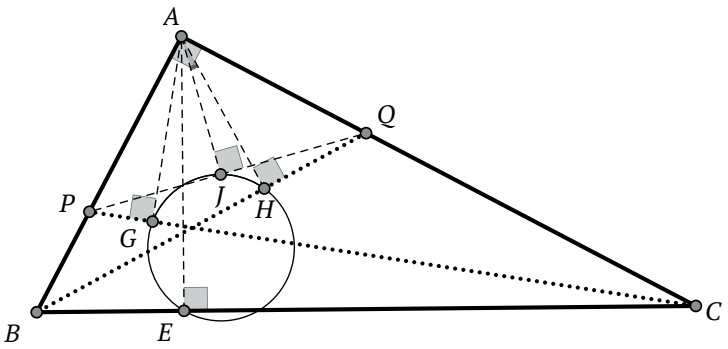


Рисунок 150

Пример 151. Высоты и окружности, которые образуют еще одну окружность

Пересекающиеся окружности также могут приводить к образованию других точек на одной окружности. На рис. 151 стороны BC и AC треугольника ABC являются диаметрами окружностей с центрами в точках D и E соответственно. Высота AP пересекает окружность с центром D в точках R и S. Высота BQ пересекает окружность с центром E в точках L и K. Все эти четыре точки пересечения S, L, R и K лежат на одной окружности, только часть которой показана на рис. 151. В этой конфигурации следует также отметить, что две окружности с центрами в точках D и E пересекаются в точке T, лежащей на стороне AB.

Пример 152. Еще больше неожиданных точек на одной окружности

На этот раз четыре такие точки создадут несколько перпендикуляров в остроконечном треугольнике. Сначала выбирается произвольная точка R внутри треугольника ABC, как показано на рис. 152. Из этой точки проводятся перпендикуляры к каждой из трех сторон, пересекающие AB, BC и AC в точках F, D и E соответственно. Затем строится перпендикуляр из точки B к прямой DF, пересекающий ее в точке L. Продолжение перпендикуляра из точки A к прямой EF пересекается с линией BL в точке P, а перпендикуляр из точки P к прямой AB пересекает ее в точке K. Неожиданно все эти перпендикуляры приводят к четырем точкам на одной окружности D, E, F и K.

Пример 153. Удивительная окружность с пятью точками

Наличие пяти точек на одной окружности — довольно удивительный случай. Он проиллюстрирован на рис. 153, где точка H является ортоцентром $\triangle ABC$ с высотами AP, BQ и CR. Точки E, F и M являются средними точками отрезков BQ, CR и BC соответственно. Удивительно, но все 5 точек E, H, F, P и M лежат на одной окружности. В качестве дополнительного обстоятельства отметим, что $\triangle PFE$ подобен $\triangle ABC$.

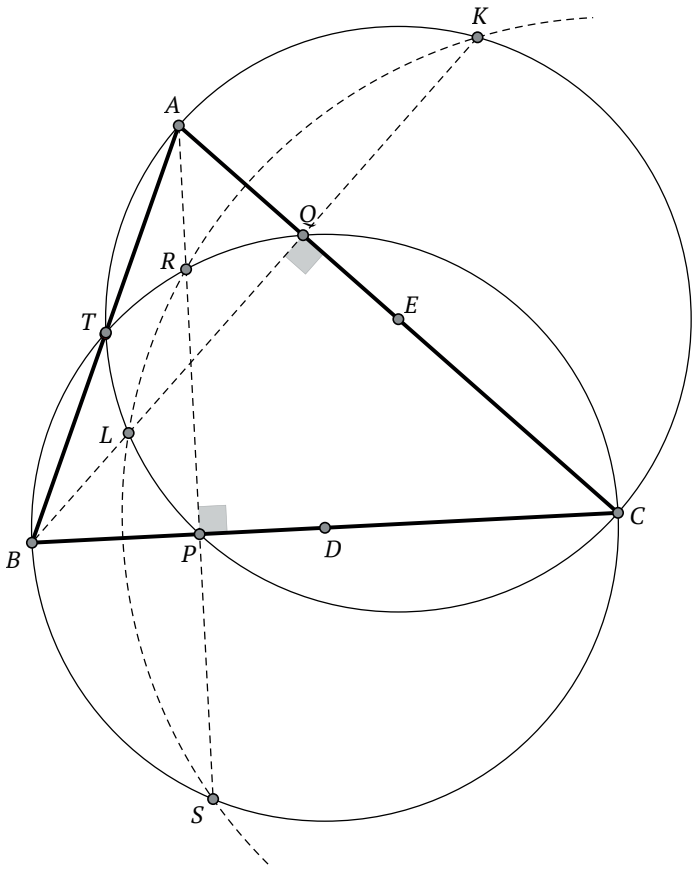


Рисунок 151

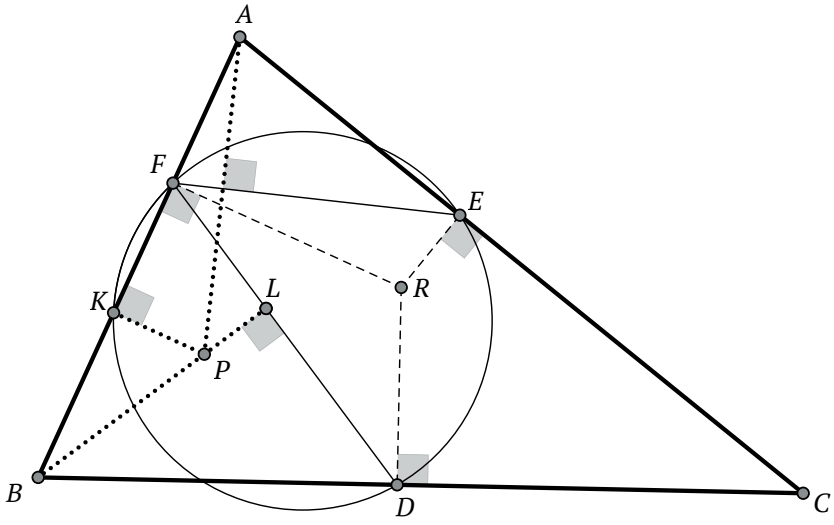


Рисунок 152

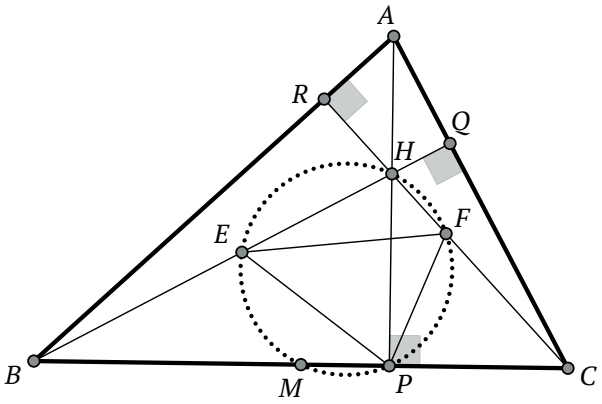


Рисунок 153

Пример 154. Знаменитая окружность девяти точек

Безусловно, вызывает восхищение, когда четыре и пять точек лежат на одной окружности. Однако иногда это может происходить и для гораздо большего их числа. Одна из самых известных зависимостей в геометрии на плоскости — окружность девяти точек, которая, как следует из названия, представляет собой девять точек на одной окружности, связанных с треугольником. Первоначально в 1765 году знаменитый швейцарский математик Леонард Эйлер (1707–1783) обнаружил, что существует шесть точек, связанных с треугольником, которые лежат на одной окружности. Это три середины сторон треугольника, на рис. 154 они обозначены *K*, *M* и *N*, а также еще три точки *D*, *E* и *F*, являющиеся основаниями трех высот. Такое совпадение уже было довольно удивительным открытием, но оказалось, что это еще не все!

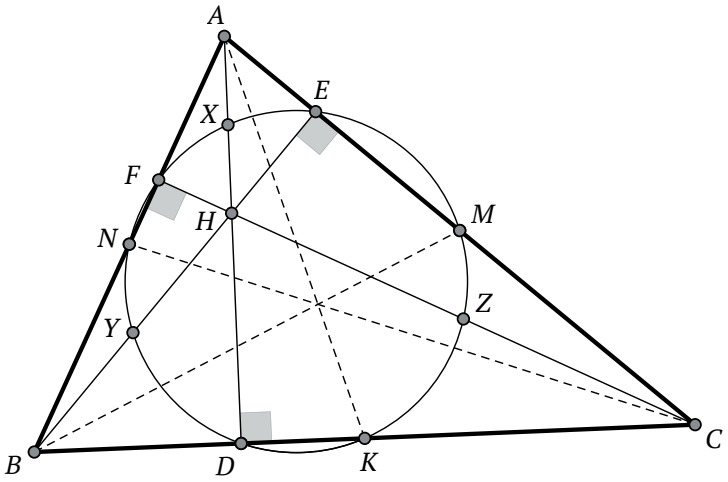


Рисунок 154

В 1822 году немецкий математик Карл Вильгельм Фейербах (1800–1834) обнаружил, что на этой же окружности Эйлера лежат еще три точки. На рис. 154 эти дополнительные точки X, Y и Z являются серединами отрезков AH, BH и CH, соединяющих вершины треугольника ABC с его ортоцентром H.

Таким образом, мы видим, что окружность девяти точек содержит девять конкретных точек, связанных с треугольником ABC, а именно основания высот D, E и F, середины сторон K, M и N и середины X, Y и Z отрезков, соединяющих каждую вершину с ортоцентром.

Пример 155. Коллинеарность с центром окружности девяти точек

Интересный случай нахождения на одной прямой показан на рис. 155. В треугольнике ABC основание S перпендикуляра, проведенного от ортоцентра H к биссектрисе $\angle BAC$, центр R окружности девяти точек и середина K стороны BC лежат на одной прямой.

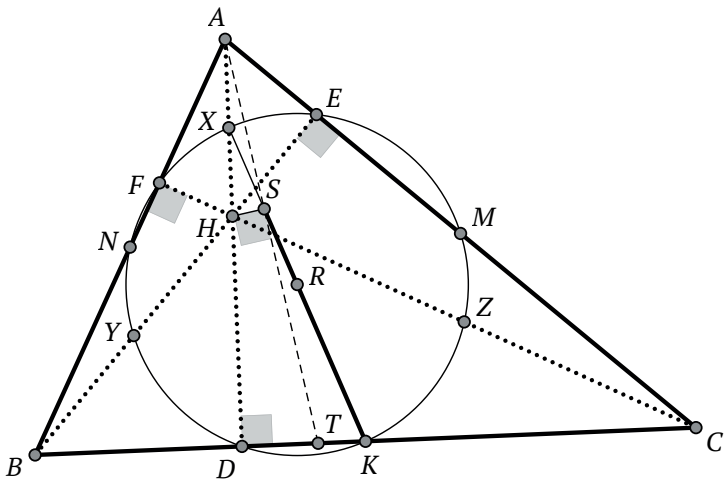


Рисунок 155

Пример 156. Встреча трех известных центров треугольника

Некоторые точки треугольника имеют особое значение: ортоцентр (точка пересечения высот треугольника), центр описанной окружности (точка пересечения перпендикуляров от середин сторон треугольника) и геометрический центр (центр масс — точка пересечения медиан треугольника). На рис. 156 они обозначены как H, O и G соответственно. Эти три точки не только всегда находятся на одной прямой, но и всегда соблюдается следующее соотношение: $OG = \frac{1}{2}HG$.

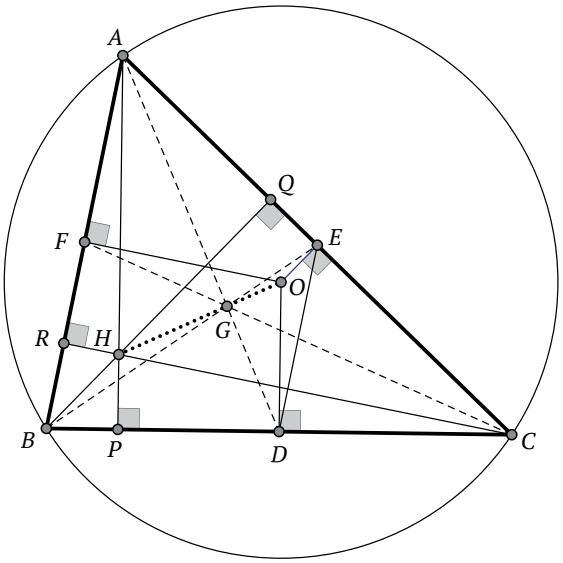


Рисунок 156

Пример 157. Свойства окружности девяти точек

В примере 156 мы установили, что точки H, O и G коллинеарны и при этом $OG = \frac{1}{2}HG$. На рис. 157 показано, что центр окружности девяти точек R является серединой отрезка HO. Таким образом, мы установили еще одну общую прямую для четырех точек H, R, G и O. Кроме того, радиус окружности девяти точек равен половине длины радиуса описанной окружности.

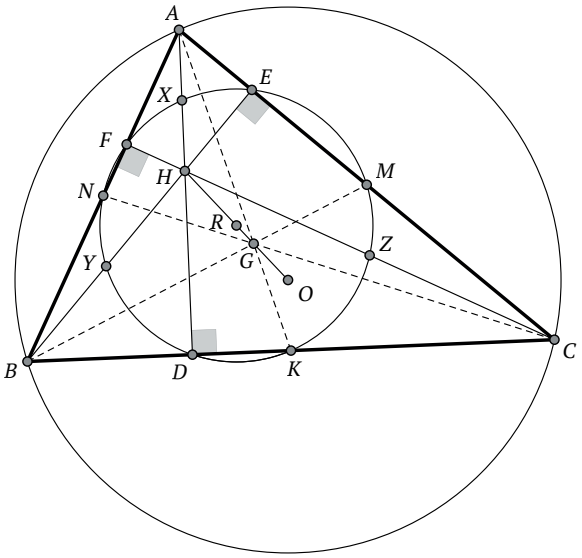


Рисунок 157

Пример 158. Еще свойства окружности девяти точек

Окружность девяти точек обладает еще одной впечатляющей особенностью. Любой отрезок прямой, проходящий от ортоцентра к описанной окружности, делится окружностью девяти точек пополам. Предположим, что мы берем произвольный отрезок *HJ*, соединяющий ортоцентр *H* треугольника *ABC* с точкой *J* на описанной окружности, как показано на рис. 158. В точке *L* отрезок *HJ* пересекает окружность девяти точек. Этот отрезок в точке *L* делится пополам, так что *HL* = *LJ*.

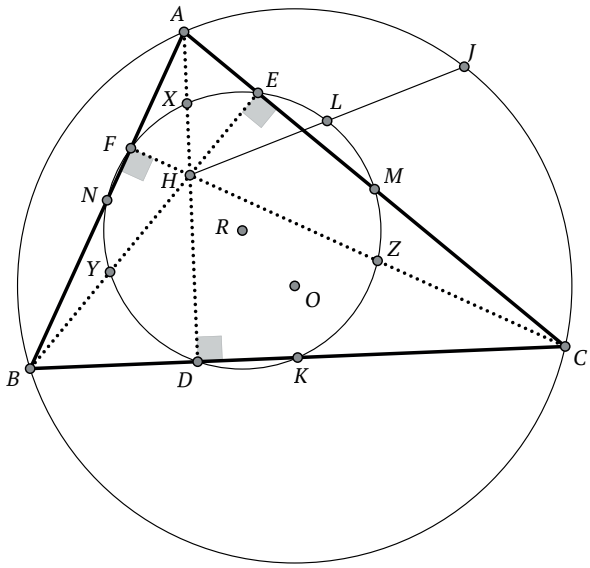


Рисунок 158

Пример 159. Неожиданная коллинеарность

Основания высот треугольника иногда могут выдать самые неожиданные результаты. На рис. 159 нарисована окружность, содержащая вершину *A*, и высоты *BE* и *CF* треугольника *ABC* с основаниями в точках *E* и *F*. Окружность, проходящая через точки *A*, *E* и *F*, также должна содержать точку пересечения высот *BE* и *CF* в точке *H*. Поскольку четырехугольник *AFHE* имеет пару дополнительных (до 180°) противоположных углов[1], таких как $\angle AEH = \angle HFA = 90°$, мы можем утверждать, что вокруг этого четырехугольника можно описать окружность. Удивительным сюрпризом будет то, что касательные к этой окружности в точках *E* и *F* пересекутся в точке *X*, которая окажется на стороне

[1] **Дополнительными** (supplementary) называются углы, которые взаимно дополняют друг друга до угла 180°. Если такие углы прилегают к общей прямой, то их называют *смежными*. В школьных учебниках дополнительными называют *комплементарные* углы (complementary — дополняющие друг друга до 90°), поэтому во избежание разночтений мы здесь указываем значение суммарного угла.

BC, независимо от формы исходного треугольника. Иными словами, точки *B*, *X* и *C* будут лежать на одной прямой.

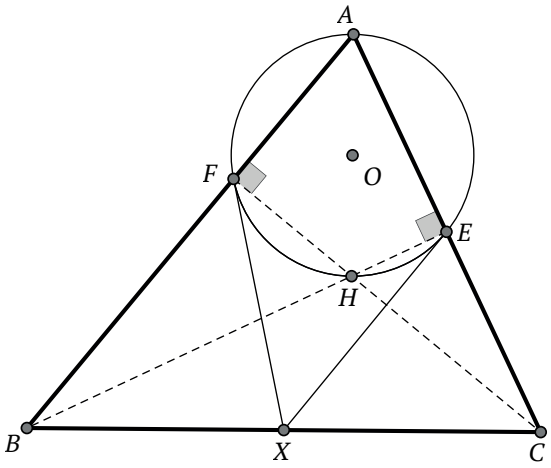


Рисунок 159

Пример 160. Пересечение прямых, порождаемое ортоцентрическим треугольником

Перпендикуляры к серединам противоположных сторон ортоцентрического треугольника (напомним, что это треугольник, образованный основаниями высот исходного) ведут себя довольно неожиданным образом. На рис. 160 показан треугольник *ABC* с его ортоцентрическим треугольником *DEF*. Точки *M*, *N* и *R* являются серединами сторон треугольника *ABC*. Если провести перпендикуляры от каждой из этих средних точек к противолежащим сторонам ортоцентрического треугольника, эти три прямые пересекутся в одной точке *P*.

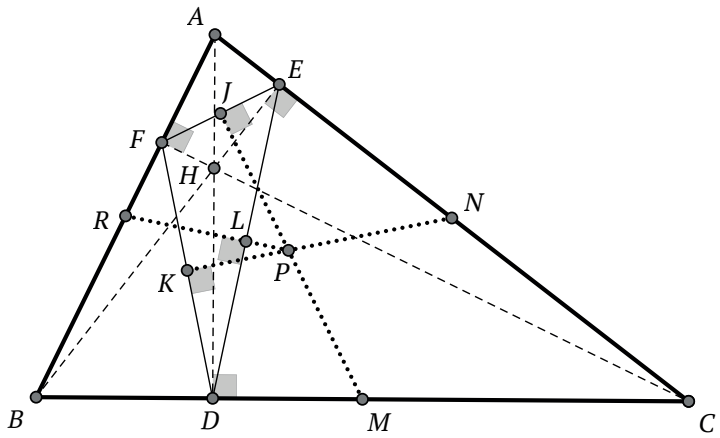


Рисунок 160

Пример 161. Высоты создают пересечение в одной точке и равенство

На рис. 161 высоты *AE*, *BF* и *CD* пересекаются в точке *H*, ортоцентре треугольника *ABC*. Мы находим середины *T*, *U* и *V* отрезков *AH*, *BH* и *CH* соответственно. Затем находим середины *K*, *M* и *N* соответственно сторон *BC*, *CA* и *AB* треугольника *ABC*. В результате отрезки *TK*, *UM* и *VN* пересекаются в одной точке *P*. Кроме того, эти отрезки равны по длине, так что *TK* = *UM* = *VN*. Вспомните окружность девяти точек!

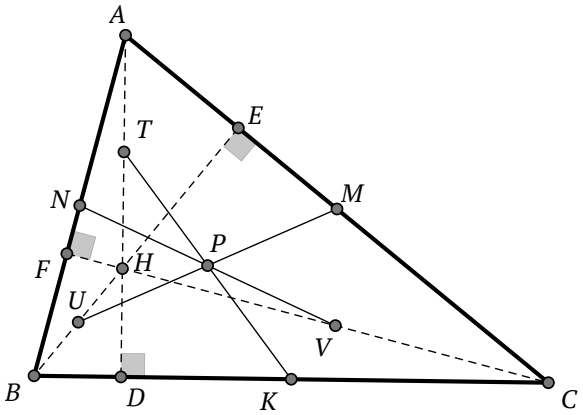


Рисунок 161

Пример 162. Вклад Наполеона в математику

Равносторонние треугольники в сочетании с другим треугольником, нарисованным произвольным образом, могут играть необычную роль. Предположим, мы нарисуем равносторонние треугольники *ADB*, *BEC* и *CFA* на сторонах произвольного треугольника *ABC*, как показано на рис. 162. Если провести прямые *AE*, *BF* и *CD*, обнаруживается, что они равны по длине и совпадают в точке *P*. Это довольно удивительная особенность, поскольку мы начинали с совершенно произвольно нарисованного треугольника *ABC*, который привел нас к равенству и совпадению. Исторически формулировка этого факта приписывается императору Наполеону Бонапарту (1769–1821), хотя есть некоторые сомнения относительно того, разработал ли он ее сам или это была заслуга его артиллерийского инженера Жана-Виктора Понселе (1788–1867).

Пример 163. Точка минимальных расстояний Наполеона (точка Ферма)

Как будто этого недостаточно, точка *P* на рис. 162 обладает и другими интересными характеристиками. *P* — это точка внутри треугольника, для которой сумма расстояний до трех вершин минимальна. Эту точку так и называют —

точкой минимальных расстояний, также она известна как точка Ферма. Кроме того, точка P является равноугольной точкой треугольника, поскольку $\angle APB = \angle BPC = \angle APC$ (см. рис. 163).

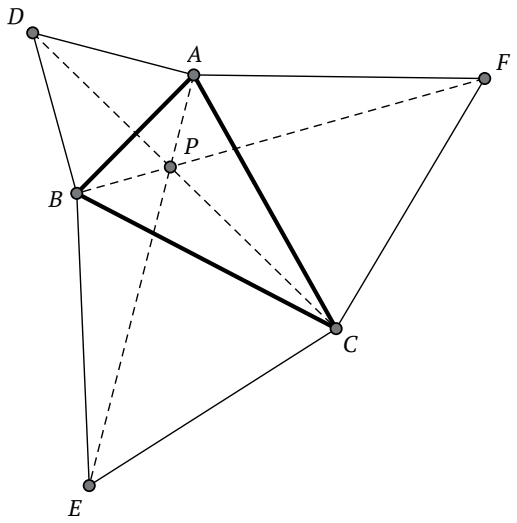


Рисунок 162

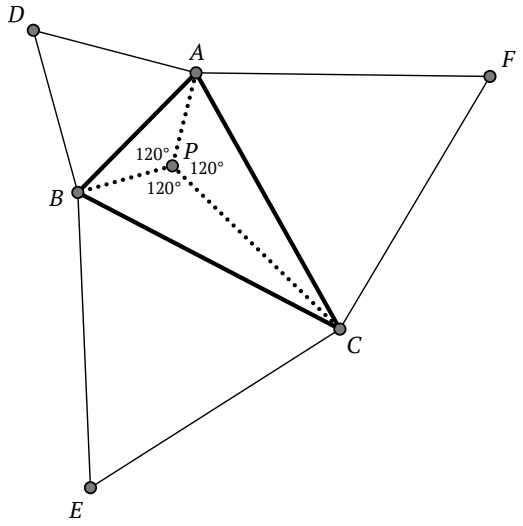


Рисунок 163

Пример 164. Точка минимальных расстояний не обязательно находится внутри треугольника

Предположим, мы рисуем треугольник ABC, в котором один угол равен или превышает 120°. Если угол равен 120°, точка минимальных расстояний P со-

впадает с вершиной A с углом 120°, как показано на рис. 164(а). Если этот угол BAC превысит 120°, как показано на рис. 164(б), точка P окажется за пределами треугольника. Следовательно, для того чтобы точка минимальных расстояний находилась внутри треугольника, необходимо убедиться, что ни один угол треугольника не превышает 120°.

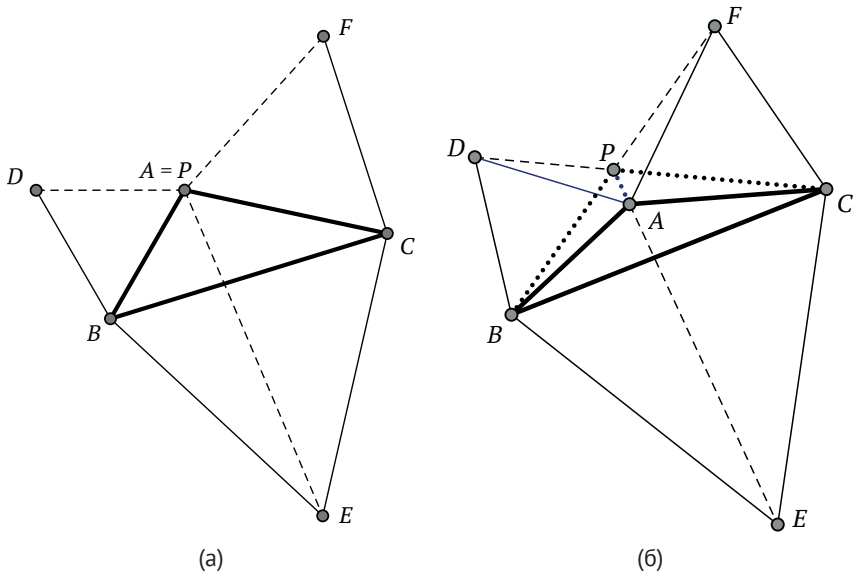


Рисунок 164

Пример 165. Расширения теоремы Наполеона

Еще одна удивительная особенность этой конфигурации возникает, когда мы берем центры K, L и M каждого из трех равносторонних треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC, и соединяем их, как показано на рис. 165. Полученный треугольник KLM, как ни удивительно, оказывается также равносторонним треугольником.

Пример 166. Пересекающиеся равносторонние треугольники

На случай, если вам интересно, нужно ли строить равносторонние треугольники обязательно снаружи данного треугольника ABC, чтобы получить результат из примера 165, на рис. 166 показано, что происходит, когда равносторонние треугольники на каждой из сторон треугольника ABC перекрывают исходный треугольник. Ко всеобщему изумлению, мы все равно получаем равносторонний треугольник GHJ, соединяя середины трех равносторонних треугольников, хотя они больше не являются внешними по отношению к исходному треугольнику.

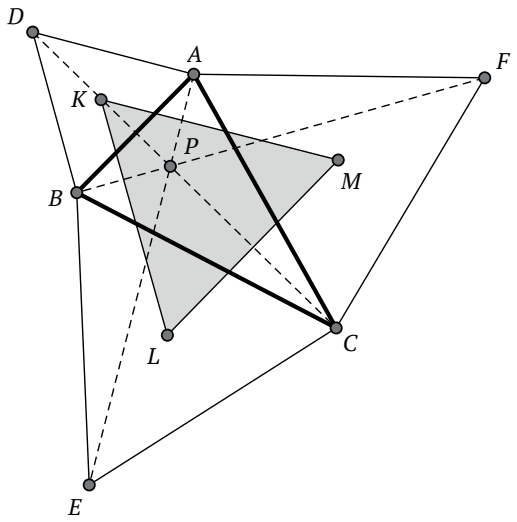


Рисунок 165

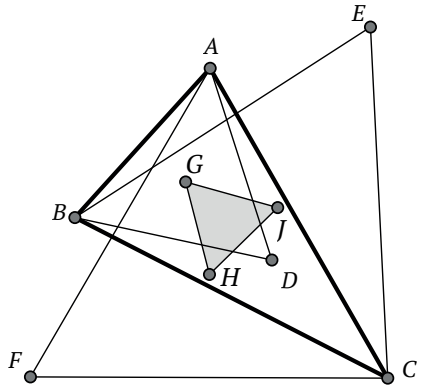


Рисунок 166

Пример 167. Удивительное соотношение площадей треугольников

Комбинируя предыдущие ситуации, мы получим совершенно неожиданный результат. На рис. 167 представлены три треугольника *ABC*, *KLM* и *GHJ* с рис. 165 и 166. Площади этих трех треугольников отвечают такому соотношению: *площадь* $\triangle KLM$ *– площадь* $\triangle GHJ$ *= площадь* $\triangle ABC$.

Пример 168. Геометрический центр возвращает к предыдущей конфигурации

В конфигурации равносторонних треугольников на сторонах случайно выбранного треугольника нас поджидает еще больше неожиданных чудес. Если

найти центр масс (геометрический центр — точку пересечения медиан) треугольника *ABC*, как показано на рис. 168, обнаружится, что он находится точно в центре равностороннего треугольника *KLM*[1]. Если бы это было все, у нас уже есть достаточно удивительной информации. Однако, как мы увидим в дальнейшем, в этой конфигурации есть еще много сюрпризов, которые стоят внимания.

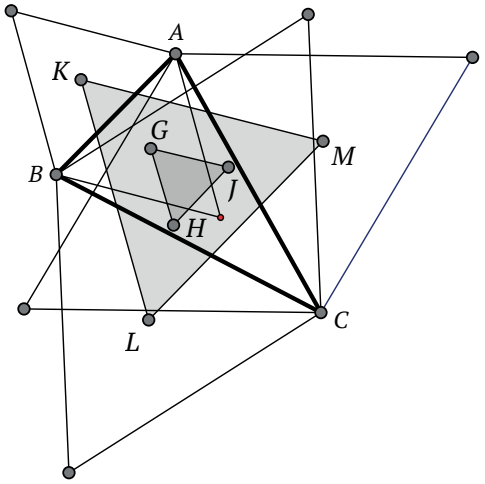


Рисунок 167

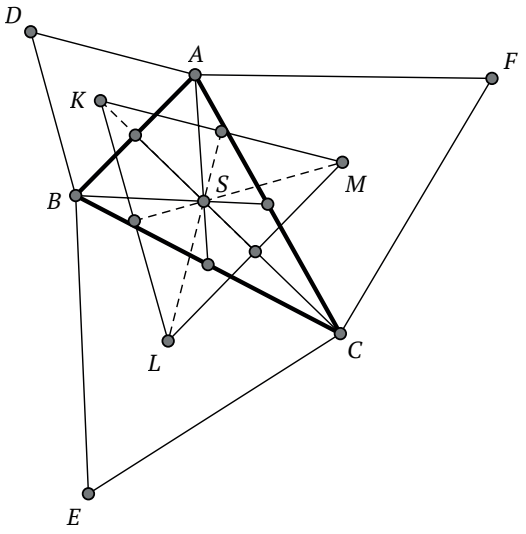


Рисунок 168

[1] Напомним, что **центром** равностороннего треугольника называется точка пересечения высот, медиан и биссектрис (а также срединных перпендикуляров, см. также стр. 65).

Пример 169. Появление еще одного равностороннего треугольника

Проявив немного изобретательности, мы можем построить еще один равносторонний треугольник в дополнение к трем равносторонним треугольникам, нарисованным на сторонах данного треугольника *ABC*. Как показано на рис. 169, если провести *AR* параллельно *DC*, а *CR* параллельно *DA*, получится параллелограмм *ADCR*. $\triangle AER$ также является равносторонним треугольником.

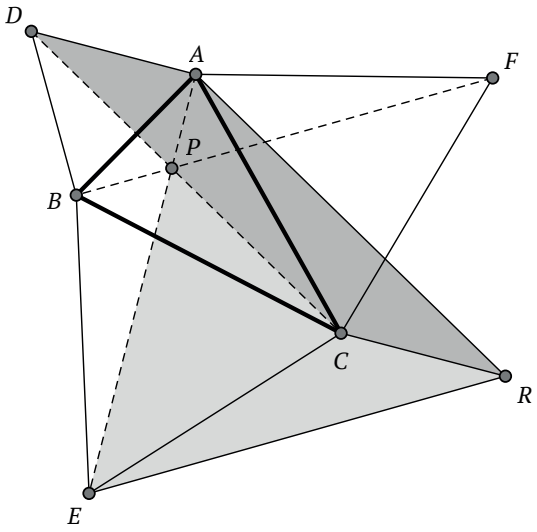


Рисунок 169

Пример 170. Новый способ нахождения центра описанной окружности

Все треугольники имеют описанные окружности. Обычным способом определения центра описанной окружности вокруг треугольника *ABC* является построение перпендикуляров к прямым, делящим пополам каждую из трех сторон. Их общая точка является центром окружности. Однако на рис. 170 показана интересная альтернатива этому построению. Используя равносторонний треугольник *KLM*, приведенный на рис. 165, и проведя прямые *KD*, *LE* и *MF* от трех его вершин к противолежащим вершинам исходных трех равносторонних треугольников, замечаем, что эти три линии сходятся в общей точке, которая и является центром *O* описанной окружности треугольника *ABC*.

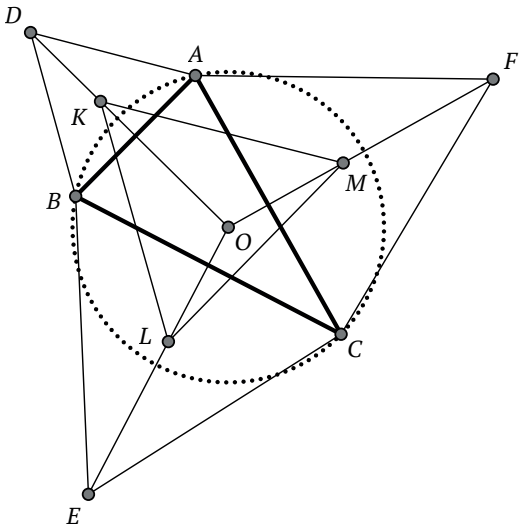


Рисунок 170

Пример 171. Точка пересечения окружностей

Говоря об описанных окружностях, можно заметить, что точка минимальных расстояний *P* на рис. 169 имеет еще одно значение. Мы обнаруживаем, что описанные окружности каждого из трех равносторонних треугольников, нарисованных на сторонах треугольника *ABC*, также совпадают в одной и той же точке *P*, как мы можем видеть на рис. 171.

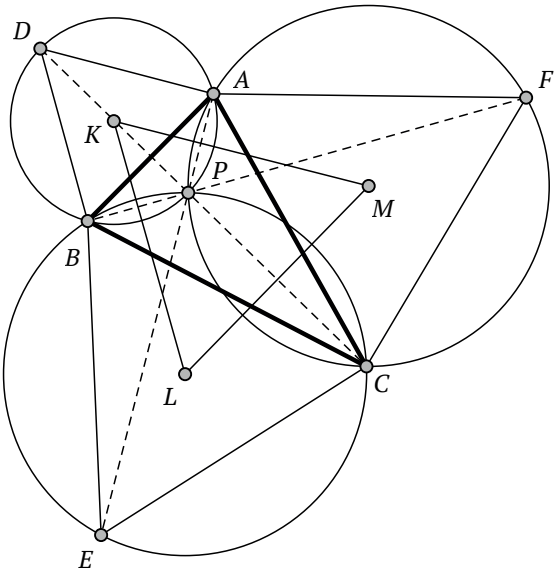


Рисунок 171

Пример 172. Знаменитая теорема Микеля

Окружности также могут играть любопытную роль в появлении пересечений. Возьмем любые три точки D, E и F на сторонах произвольно нарисованного треугольника ABC, а затем построим окружности, используя одну вершину и пару этих точек на каждой из смежных сторон, как показано на рис. 172. Проделав это трижды, мы обнаружим, что независимо от того, где на сторонах треугольника располагались эти ранее выбранные три точки, три окружности всегда будут пересекаться в одной точке P. Эта точка названа в честь французского математика Огюста Микеля (1816–1851), опубликовавшего этот результат в 1838 году.

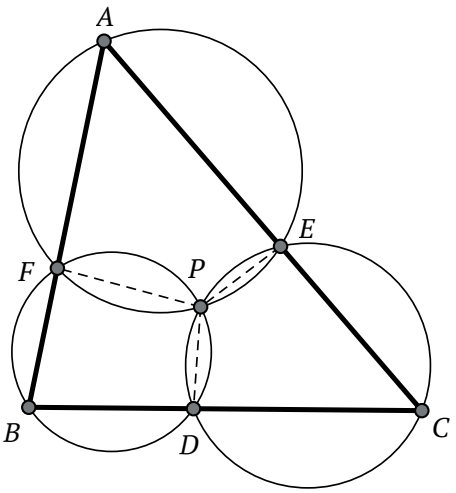


Рисунок 172

Пример 173. Подобные треугольники Микеля

Как мы видели из примера 172, окружности Микеля могут занимать любое положение, если они содержат вершину и точку на двух смежных сторонах. Самый удивительный результат получается, когда мы соединяем центры Q, R и S этих трех окружностей. Необычность результата, показанного на рис. 173, заключается в том, что $\triangle ABC$ и $\triangle QRS$ подобны, так как соблюдаются следующие равенства углов: $\angle A = \angle Q$, $\angle B = \angle R$ и $\angle C = \angle S$.

Пример 174. Поразительная теорема Морли

В 1900 году математик Фрэнк Морли (1860–1937) обнаружил удивительную взаимосвязь, которая применима ко всем треугольникам, независимо от их формы. Морли показал, что если разделить на три части каждый из углов треугольника, то пересечения соседних трисектрис образуют равносторонний треугольник, независимо от формы исходного треугольника. На рис. 174 каж-

дый угол треугольника ABC разделен на три части, а соседние трисектрисы пересекаются в точках *D*, *E* и *F*. Если соединить эти три точки, результирующий треугольник *DEF* всегда является равносторонним.

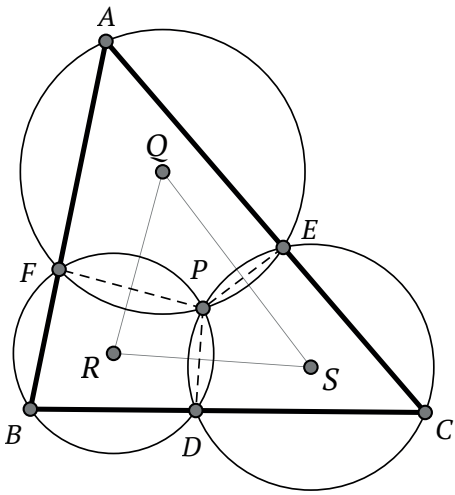


Рисунок 173

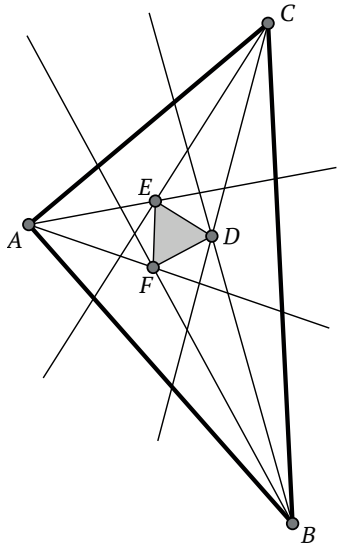


Рисунок 174

Пример 175. Расширение теоремы Морли

Если теорема Морли недостаточно впечатляет, добавим, у этой конфигурации есть еще один удивительный аспект. Если соединить вершины вновь образованного равностороннего треугольника *EFD* с противолежащими вершинами

исходного треугольника *ABC*, линии пересекутся в одной точке. То есть, как показано на рис. 175, линии *AD*, *BE* и *CF* встречаются в точке *P*. Поистине достойное завершение нашей коллекции раритетов!

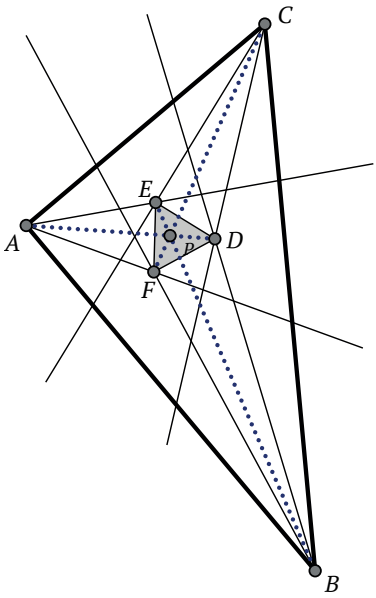


Рисунок 175

2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРИМЕРОВ

Пример 1. Углы в центре вписанной окружности

Основная идея, используемая для доказательства соотношения $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$, заключается в том, что внешний угол треугольника равен сумме двух противолежащих внутренних углов.

На рис. Д-1 обратим внимание на внешний угол BIX треугольника AIB, где $x = \alpha + \beta$. Аналогично для внешнего угла XIC треугольника AIC мы имеем $x = \alpha + \gamma$. После сложения получим $2x = \alpha + \beta + \alpha + \gamma$. Поскольку сумма половин всех углов треугольника равна $\frac{1}{2} \cdot 180°$, то имеем $2x = \alpha + (\alpha + \beta + \gamma) = \alpha + 90°$. Следовательно, $\angle BIC = \frac{1}{2}\angle A + 90°$.

Пример 2. Неожиданная перпендикулярность

Начнем с рассмотрения треугольника ABC, показанного на рис. Д-2. Из примера 1 мы знаем, что $\angle AIB = 90° + \frac{1}{2}\angle C$. Треугольник CDE равнобедренный, из чего следует $\angle CDE = \frac{1}{2}(180° - \angle C)$, что, в свою очередь, приводит к $\angle PDB = 90° + \frac{1}{2}\angle C$. Следовательно, $\angle AIB = \angle PDB$. Поскольку $\angle PBA = \angle DBP$, треугольники AIB и PDC подобны. Отсюда следует, что $\frac{AB}{PB} = \frac{BI}{BD}$. Это позволяет заключить, что треугольники APB и IDB также подобны, поскольку $\angle ABP = \angle IBD$, что позволяет сделать заключение о равенстве $\angle APB = \angle IDB$. Однако мы знаем, что ра-

диус вписанной окружности перпендикулярен касательной в точке касания. Следовательно, $\angle IDB = 90°$, и из подобия треугольника мы можем заключить, что $\angle APB = 90°$, или отрезок AP перпендикулярен BP.

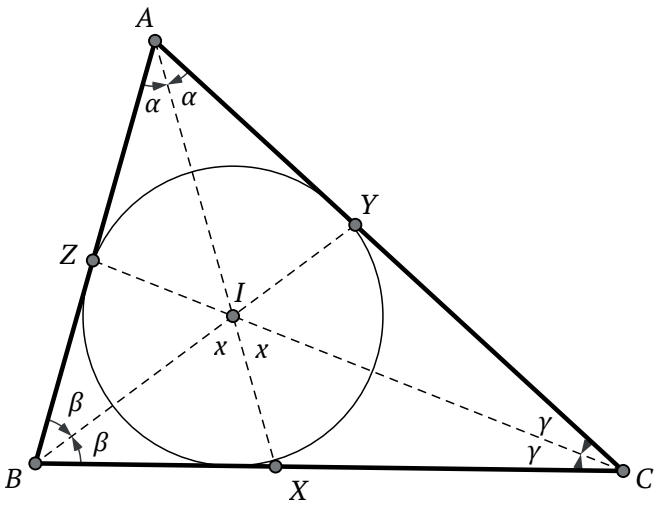


Рисунок Д-1

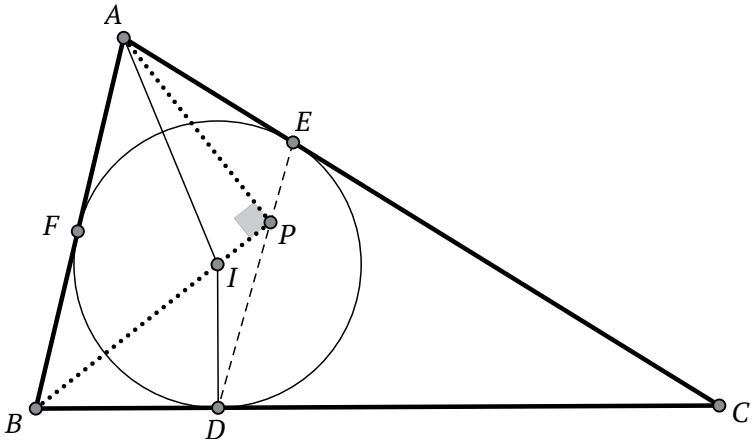


Рисунок Д-2

Пример 3. Самое необычное деление отрезка пополам

Чтобы доказать использованный способ, будет полезно вспомнить важное свойство вписанной и вневписанной окружностей[1] треугольника. Пусть D —

[1] **Вневписанная окружность** треугольника — это окружность, которая касается одной из его сторон и продолжений двух других сторон. У любого треугольника существует три вневписанные окружности.

точка, в которой вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC, а G — точка, в которой стороны BC касается вневписанная окружность, противолежащая вершине A. Тогда $BD = CG$, что показано на рис. Д-3(а). Это можно доказать следующим образом.

Поскольку касательные к окружности из внешней точки всегда равны, мы можем обозначить через x длины касательных от A, через y — длины касательных от B, а через z — длины касательных от C до вписанной окружности. Кроме того, мы обозначим точку, в которой вневписанная окружность касается продолжения AB, как Y, а точку, в которой она касается продолжения AC, как X. Поскольку $CX = CG$ и $BY = BG$, имеем

$$AX + AY = AB + BY + AC + CX = AB + BG + AC + CG$$
$$= AB + BC + CA = 2(x + y + z).$$

Так как $AX = AY$, имеем $AX = AC + CX = (x + z) + CX = x + y + z$, или $CX = y = BD$. Поскольку $CX = CG$, то, следовательно, мы имеем $BD = CG$, как мы и намеревались показать.

С учетом этой предварительной информации, относящейся к рис. Д-3(а), обозначим D' точку, диаметрально противоположную точке D на вписанной окружности $\triangle ABC$, как показано на рис. Д-3(б), а через G — точку на BC при $DL = LG$. Поскольку L — середина BC, мы только что показали, что G является точкой касания вневписанной окружности $\triangle ABC$, противолежащей вершине A.

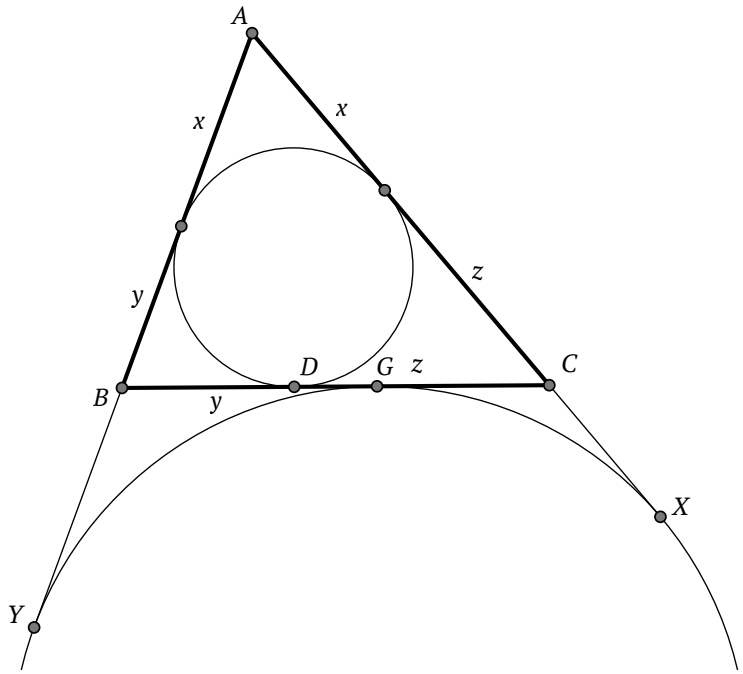


Рисунок Д-3(а)

Теперь мы рассмотрим гомотетию (см. раздел B12 в части 3 «*Инструментарий*») с центром A, которая отображает вписанную окружность $\triangle ABC$ на вневписанную окружность, противоположную вершине A. Поскольку касательная к окружности в точке D' параллельна касательной в точке D, то есть перпендикулярна BC, эта гомотетия отображает точку D' на точку G. Из этого следует, что центр A гомотетии, а также точки D' и G лежат на одной прямой. Поскольку I — середина DD', а L — середина DG, мы видим, что LI параллелен GD'. Это означает, что LZ параллельна GA, и треугольники DLZ и DGA, следовательно, также подобны. Из того, что L — середина DG, следует, что Z должна быть серединой DA, как и утверждалось в примере. Не имеет значения, на какой из вершин мы сосредоточим внимание, поскольку результат, который мы получаем для угла A, также справедлив для каждого из двух других углов в вершинах B и C.

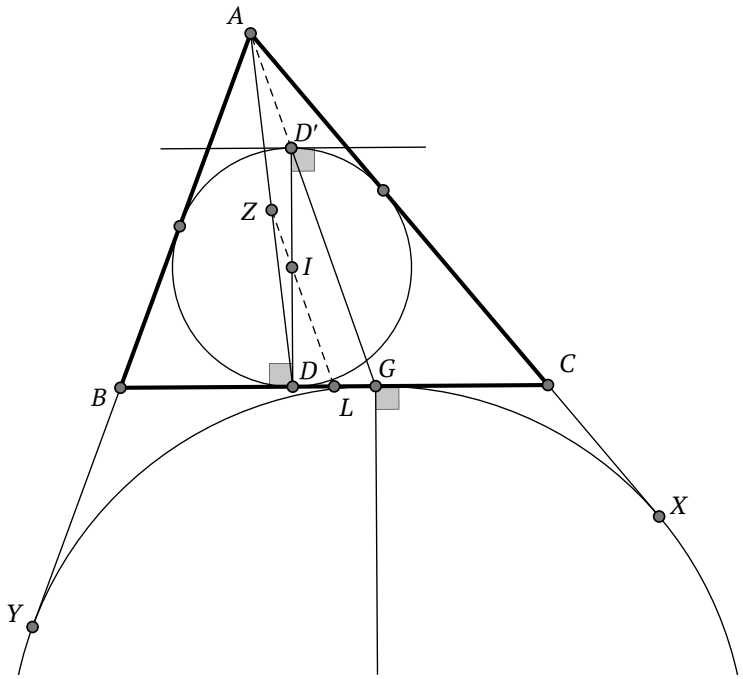


Рисунок Д-3(б)

Пример 4. Открытие Жергонна о вписанной окружности треугольника

Чтобы доказать, что три прямые, соединяющие вершины с точками касания вписанной окружности, совпадают в точке Жергонна, мы можем использовать теорему Чевы (см. раздел B4 в части 3 «*Инструментарий*»). Напомним, что теорема Чевы гласит следующее: если от вершин треугольника к противоположным сторонам провести три прямые, образующие шесть отрезков вдоль трех сторон треугольника, то эти три прямые будут пересекаться в одной точке тог-

да и только тогда, когда произведения этих чередующихся отрезков по сторонам треугольника получаются равными[1]. Возьмем три прямые, соединяющие вершины *A*, *B* и *C* треугольника с точками *D*, *E* и *F*, в которых окружность проходит по касательной к сторонам (см. рис. Д-4). Поскольку отрезки касательной от внешних точек к одной и той же окружности равны, мы имеем $AE = AF$, $BF = BD$ и $CD = CE$. Следовательно, равны произведения $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$, а прямые *AD*, *BE* и *CF* сходятся в одной точке.

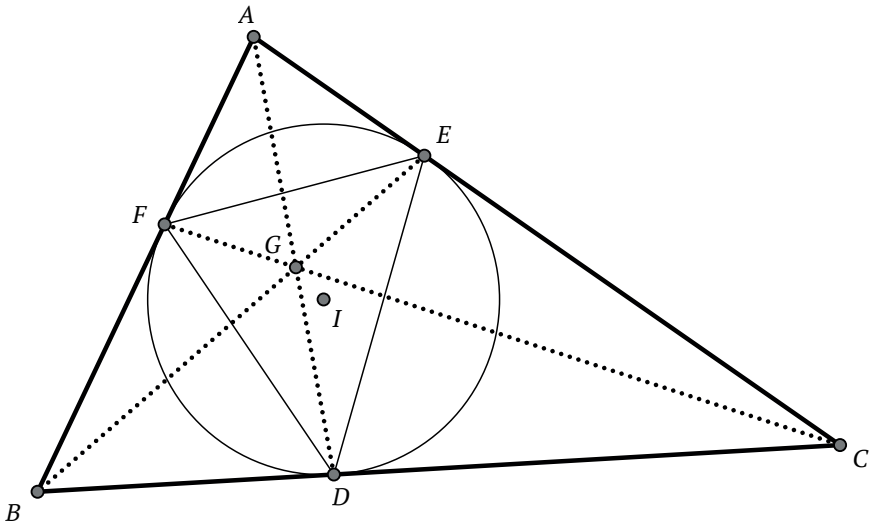


Рисунок Д-4

Пример 5. Еще один неожиданный результат для треугольника Жергонна

На рис. Д-5 мы видим, что треугольник *AEF* является равнобедренным, так что биссектриса *AU* угла *A* будет перпендикулярна *EF*. Рассмотрим срединный треугольник[2] *LMN*. Поскольку прямая *ML* параллельна *AB*, а *NL* параллельна *AC*, биссектриса $\angle MLN$ должна быть параллельна биссектрисе $\angle BAC$. Поскольку прямая *LX* параллельна *AU*, то это биссектриса $\angle MLN$. Аналогично *MY* — биссектриса $\angle NML$, а *NZ* — биссектриса $\angle LNM$. Из этого следует, что три отрезка *LX*, *MY* и *NZ* пересекаются в одной точке, поскольку это биссектрисы трех углов срединного треугольника, сходящиеся в его центре.

---

[1] Равны тройные произведения $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$, что эквивалентно равенству $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$ (см. рис. Д-4, или для общего случая см. указанный раздел в «*Инструментарии*»).

[2] **Срединный треугольник** — треугольник, построенный на серединах сторон данного треугольника (т. е. основаниях медиан, поэтому его называют еще *медианным треугольником*).

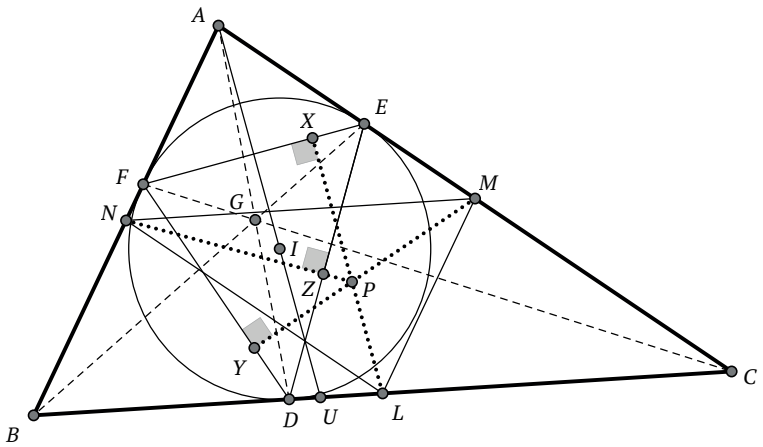


Рисунок Д-5

Пример 6. По поводу описанной и вписанной окружностей

Поскольку все точки *R*, *S* и *T* лежат на окружности с центром *O*, как показано на рис. Д-6, мы можем определить радиус этой окружности как $OR = OS = OT = q$. Аналогично, поскольку все точки *D*, *E* и *F* лежат на окружности с центром *I*, мы также можем определить радиус этой окружности как $ID = IE = IF = r$. Теперь мы определяем точку *P* на продолжении *OI* так, чтобы $\frac{PI}{PO} = \frac{r}{q}$, а затем рассмотрим треугольники *PID* и *POR*. Поскольку и *ID*, и *OR* перпендикулярны *BC*, мы имеем $\angle PID = \angle POR$. Мы также знаем, что $\frac{PI}{PO} = \frac{ID}{OR} = \frac{r}{q}$, и треугольники *PID* и *POR*, следовательно, подобны. Это означает, что *P* лежит на прямой *RD*. Аналогично, поскольку *P* также лежит на прямых *SE* и *TF*, мы видим, что эти три прямые имеют общую точку *P*.

Пример 7. Пересечения, связанные со вписанной окружностью

и

Пример 8. Более общий случай пересечений, связанный со вписанной окружностью

Поскольку пример 7 является частным случаем примера 8 при точках $P = I$, доказательство для примера 8 также включает в себя доказательство для примера 7. Мы хотим показать, что прямые *AR*, *BS* и *CT* сходятся в одной точке. Это равносильно тому, чтобы показать, что их полюса[1] — относительно вписанной окружности — лежат на одной прямой.

[1] О полюсах и полярах см. раздел B13 в части 3 «*Инструментарий*», а также статью в журнале «Квант», № 7 за 1986 (*https://kvant.mccme.ru/1986/07/polyus_i_polyara_otnositelno_o.htm*).

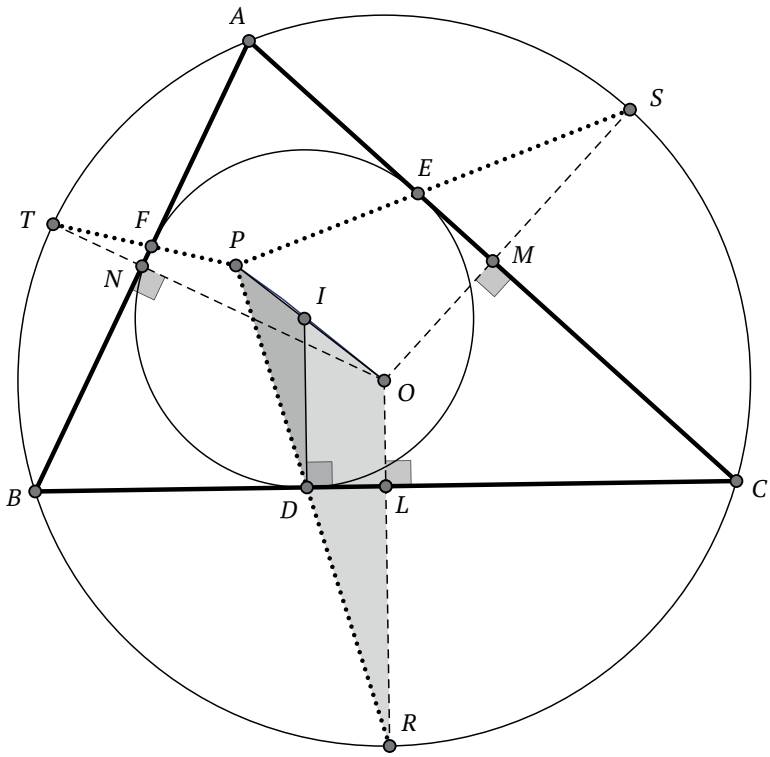


Рисунок Д-6

Полюс AR, конечно же, является общей точкой поляр *A* и *R*, и, как мы видим на рис. Д-8, поляра *A* равна *EF*, в то время как поляра *R* является касательной к окружности, вписанной в *R*. Назовем эту точку *X*. Аналогично полюс *Y* точки *BS* является общей точкой *FD* и касательной в точке *S*, а полюс *Z* точки *CT* является общей точкой *DE* и касательной в точке *T*.

Чтобы показать, что *X*, *Y* и *Z* лежат на одной прямой, мы можем применить теорему Менелая (см. раздел B3 части 3 «*Инструментарий*») относительно треугольника *DEF*. Поскольку все три точки *X*, *Y* и *Z* являются внешними по отношению к треугольнику *DEF*, мы можем игнорировать знаки, и достаточно показать, что справедливо соотношение $\frac{EX}{XF}\cdot\frac{FY}{YD}\cdot\frac{DZ}{ZE}=1$.

Рассматривая первый член этого выражения, отметим, что $\frac{EX}{XF}=\left(\frac{ER}{RF}\right)^2$.

Это следует из закона синусов, поскольку имеем

$$\frac{EX}{XF}=\frac{EX}{XR}\div\frac{XF}{XR}=\frac{\sin\angle XRE}{\sin\angle REX}\div\frac{\sin\angle XRF}{\sin\angle RFX}=\frac{\sin\angle EFR}{\sin\angle REF}\div\frac{\sin\angle REF}{\sin\angle EFR}$$
$$=\left(\frac{\sin\angle EFR}{\sin\angle REF}\right)^2=\left(\frac{ER}{RF}\right)^2.$$

Аналогично имеем $\frac{FY}{YD} = \left(\frac{FS}{SD}\right)^2$ и $\frac{DZ}{ZE} = \left(\frac{DT}{TE}\right)^2$, следовательно:

$$\frac{EX}{XF} \cdot \frac{FY}{YD} \cdot \frac{DZ}{ZE} = \left(\frac{ER}{RF} \cdot \frac{FS}{SD} \cdot \frac{DT}{TE}\right)^2.$$

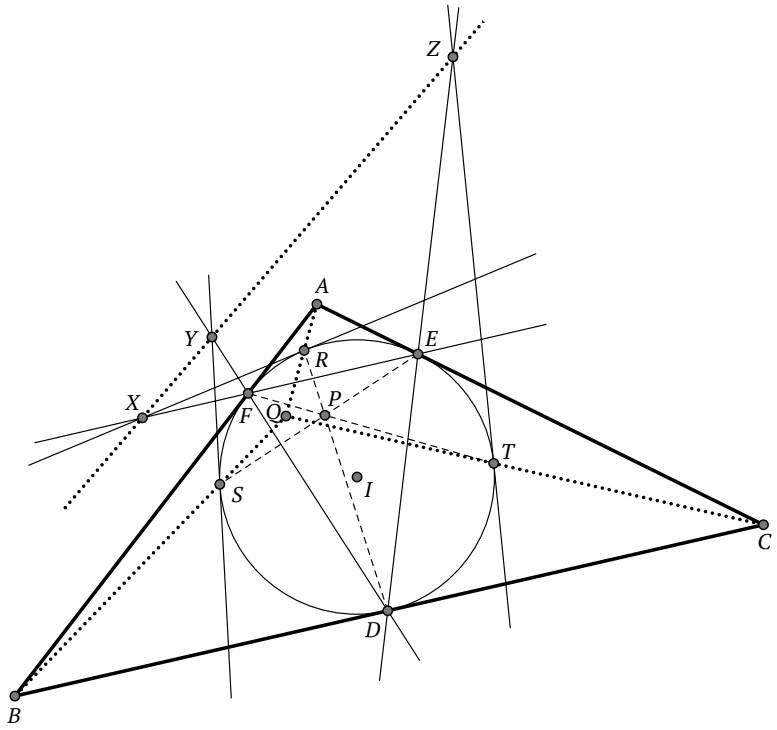


Рисунок Д-8

Тригонометрическая форма теоремы Чевы (см. раздел B5 в части 3 «*Инструментарий*») в треугольнике *DEF* дает нам

$$1 = \frac{\sin\angle EDP}{\sin\angle PDF} \cdot \frac{\sin\angle FEP}{\sin\angle PED} \cdot \frac{\sin\angle DFP}{\sin\angle PFE} = \frac{ER}{RF} \cdot \frac{FS}{SD} \cdot \frac{DT}{TE},$$

что и требовалось доказать.

Пример 9. Окружность, вписанная в основной треугольник, образует равные углы

На рис. Д-9 центр треугольника является точкой пересечения его биссектрис, и таким образом *IC* делит пополам $\angle ACB$. Из примера 1 мы знаем, что $\angle AIB = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB$. Следовательно, $\angle BID = 180° - \angle AIB = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB = 90° - \angle ICB = \angle EIC$.

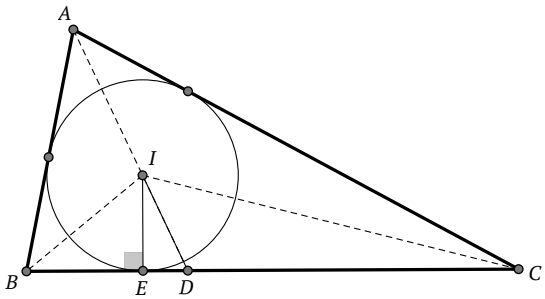


Рисунок Д-9

Пример 10. Неожиданные равные углы

Начнем с рисования линий FI, EI, OI, BO, BI, CI и CO, как показано на рис. Д-10. Заметим, что $\angle OIE = \angle OIC + \angle CIE$ и $\angle FIO = \angle FIB + \angle BIO$. Поскольку I является центром $\triangle ABC$, мы имеем $\angle CIE = 90° - \angle ECI = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB$. Поскольку $OC = OI$, треугольник OCI равнобедренный, и мы получаем $\angle OIC = 90° - \frac{1}{2}\angle COI$. Однако так как $\angle CBI$ — это вписанный угол и $\angle COI$ — это центральный угол, опирающиеся на одну и ту же дугу CI, то $\angle COI = 2\angle CBI$. Кроме того, BI — биссектриса $\angle CBA$, т. е. $\angle CBA = 2\angle CBI$. Следовательно, $\angle COI = \angle CBA$, и мы имеем $\angle OIC = 90° - \frac{1}{2}\angle CBA$.

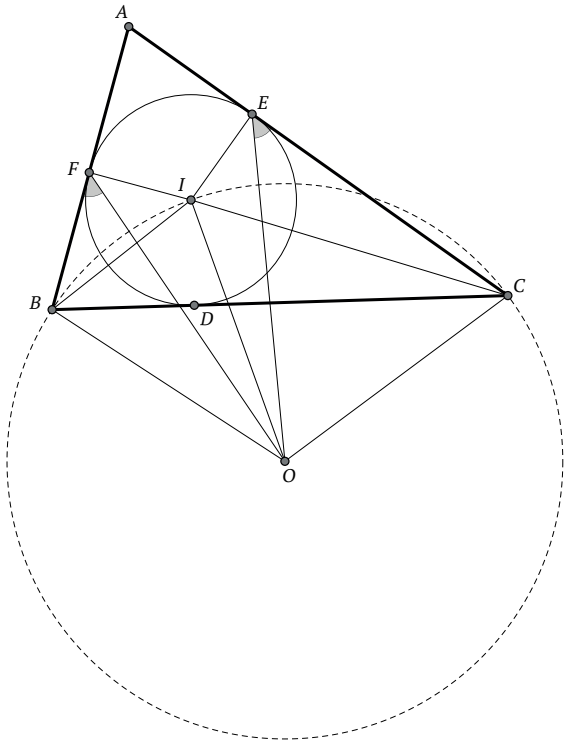


Рисунок Д-10

Аналогично мы можем получить уравнения $\angle FIB = 90° - \frac{1}{2}\angle CBA$ и $\angle BIO = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB$. Следовательно, $IE = IF$, это позволяет нам установить, что $\triangle OIF$ равен $\triangle OEI$; таким образом, $\angle OFI = \angle IEO$. При вычитании получаем $\angle BFO = 90° - \angle OFI = 90° - \angle IEO = \angle OEC$, что мы и собирались доказать.

Пример 11. Вписанная окружность треугольника порождает свою описанную окружность

Как мы уже видели в примере 1, когда I является центром вписанной окружности треугольника ABC, как показано на рис. Д-11, имеем $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$. Поскольку D определяется как пересечение перпендикуляров к биссектрисам IB и IC, треугольники DIB и DCI являются равнобедренными, и имеем $\angle DBI = \angle BID$ и $\angle DIC = \angle ICD$. Рассматривая углы в четырехугольнике $ICDB$, можем вычислить, что

$$\angle CDB = 360° - \angle ICD - \angle BIC - \angle DBI = 360° - (\angle DIC + \angle BID) - \angle BIC$$
$$= 360° - 2\angle BIC = 360° - 2\left(90° + \frac{1}{2}\angle BAC\right) = 180° - \angle BAC.$$

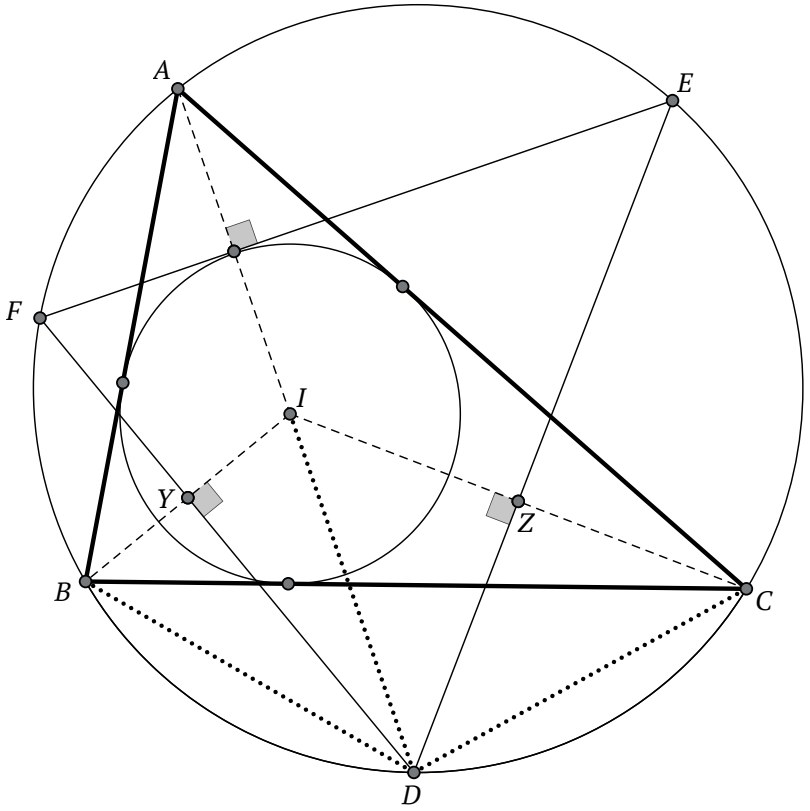


Рисунок Д-11

Тогда у нас есть точка D на описанной окружности $\triangle ABC$. Можно повторить эти вычисления аналогичным образом для точек E и F, чтобы получить $\angle FED = 180° - \angle CBA$ и $\angle DFE = 180° - \angle ACB$. Отсюда следует, что все точки D, E и F лежат на одной окружности — описанной окружности треугольника ABC.

Пример 12. Основания высот делят треугольник на три пары треугольников равной площади

Пусть X обозначает основание перпендикуляра от точки O к стороне BC, как показано на рис. Д-12, а Y — основание перпендикуляра от O к стороне AB. Теперь мы можем рассчитать *площадь* $\triangle AOF$ и *площадь* $\triangle COD$ очень простым способом.

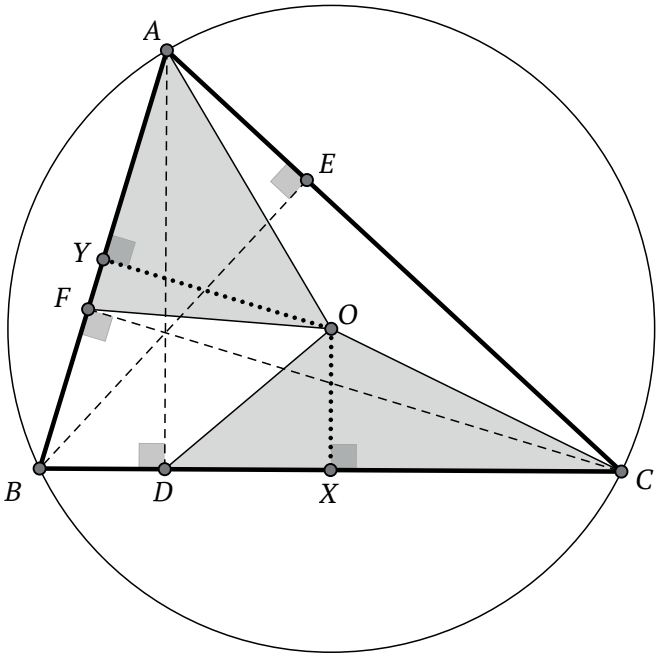


Рисунок Д-12

Площадь треугольника COD равна $\frac{1}{2}CD \cdot OX$. Поскольку $\angle BOC = 2\angle BAC$ и $\angle XOC = \frac{1}{2}\angle BOC$, а длина OC равна радиусу r описанной окружности, следовательно, имеем $OX = OC \cdot \cos \angle XOC = R \cdot \cos \angle BAC$. Далее, в треугольнике ACD имеем $CD = CA \cdot \cos \angle ACB$. Из этого следует, что площадь треугольника COD равна

$$\frac{1}{2} \cdot CD \cdot OX = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot r \cdot \cos \angle ACB \cdot \cos \angle BAC.$$

Мы можем вычислить площадь треугольника AOF таким же образом, получив для нее выражение:

$$\frac{1}{2}\cdot AF\cdot OY = \frac{1}{2}\cdot(CA\cdot\cos\angle BAC)(OA\cdot\cos\angle ACB) = \frac{1}{2}\cdot CA\cdot r\cdot\cos\angle ACB\cdot\cos\angle BAC.$$

Мы видим, что эти два предыдущих выражения для площадей совпадают, и, следовательно, площади треугольников равны. Мы можем повторить этот процесс для двух других пар треугольников точно таким же образом, и получить в конечном итоге *площадь* $\triangle BOF$ = *площадь* $\triangle COE$ и *площадь* $\triangle BOD$ = *площадь* $\triangle AOE$.

Пример 13. Примечательное свойство ортоцентра треугольника

Доказательства для рис. Д-13(а) и Д-13(б) одинаковы. Для простоты мы будем использовать рис. Д-13(а). Начнем с того, что покажем подобие $\triangle HBD$ и $\triangle HAE$, откуда $\frac{DH}{EH} = \frac{BH}{AH}$ и $AH\cdot DH = BH\cdot EH$. Это верно, поскольку оба треугольника имеют прямые углы в точках D и E соответственно, а также $\angle DAC = \angle BHD = 90° - \angle$ACB.

Аналогично мы можем показать, что $\triangle HCE$ подобен $\triangle HBF$, откуда $\frac{CH}{BH} = \frac{EH}{FH}$ и $BH\cdot EH = CH\cdot FH$. В результате $AH\cdot DH = BH\cdot EH = CH\cdot FH$.

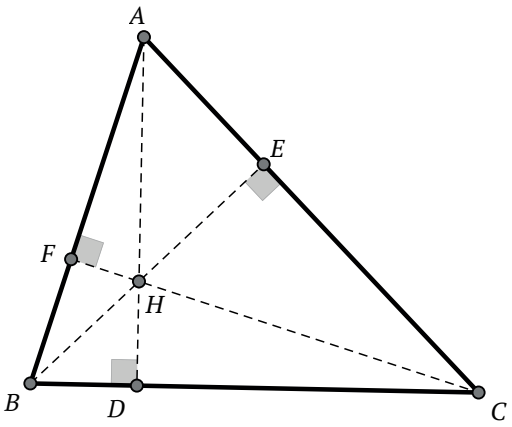


Рисунок Д-13(а)

Пример 14. Окружность пересекает треугольник, образуя множество равных отрезков

Сначала отметим, что треугольник JKL является равнобедренным, поскольку $HK = HL$, как показано на рис. Д-14. Это означает, что его высота от точки H равна перпендикуляру к биссектрисе KL, а поскольку прямая NR параллельна BC, то из этого следует, что KL также параллельна BC. Кроме того, мы видим, что этот перпендикуляр к биссектрисе должен проходить через точку A, по-

скольку прямая, перпендикулярная BC через точку H, равна высоте треугольника ABC от вершины A. Тогда мы имеем $AK = AL$, и аналогичные рассуждения также дают нам $BP = BQ$ и $CS = CT$.

В четырехугольнике $BMHQ$ диагонали BH и MQ перпендикулярны, и, следовательно, $BM^2 + HQ^2 = (BX^2 + XM^2) + (HX^2 + XQ^2) = (BX^2 + XQ^2) + (HX^2 + XM^2) = BQ^2 + HM^2$, откуда $BM^2 + HQ^2 = BQ^2 + HM^2$. Кроме того, также перпендикулярны диагонали CH и MT в четырехугольнике $CTHM$, откуда получаем $CM^2 + HT^2 = CT^2 + HM^2$. Так как $BM = CM$ и $HQ = HT$, это дает $BQ^2 + HM^2 = CT^2 + HM^2$; следовательно, $BQ^2 = CT^2$, или $BQ = CT$.

Таким образом, теперь у нас есть соотношение $BP = BQ = CT = CS$, и аналогичные рассуждения для точки A также дают $AK = AL = BP = BQ = CS = CT$.

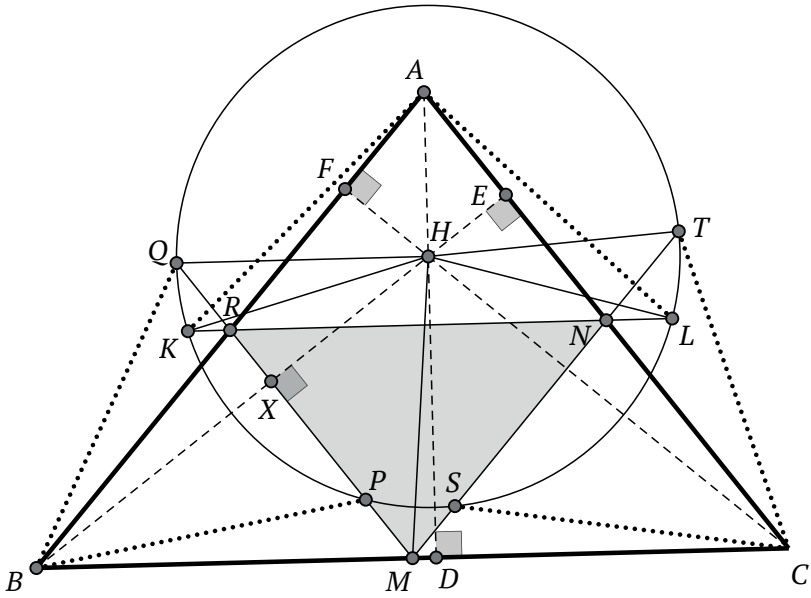


Рисунок Д-14

Пример 15. Странное представление равных треугольников

В этом примере формулировка результата уже была немного сложной, и доказательство также потребует нескольких шагов. Результат, однако, стоит затраченных усилий.

Рассмотрим четырехугольник, образованный точками B, C, H и K на рис. Д-15. Поскольку BK и CH перпендикулярны биссектрисе угла EF, они параллельны друг другу. В качестве первого (и самого длинного) шага в доказательстве покажем, что $BCHC$ является параллелограммом, т. е. мы должны далее показать, что $CH = BK$.

Как обычно, немного упростим запись, обозначив $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$.

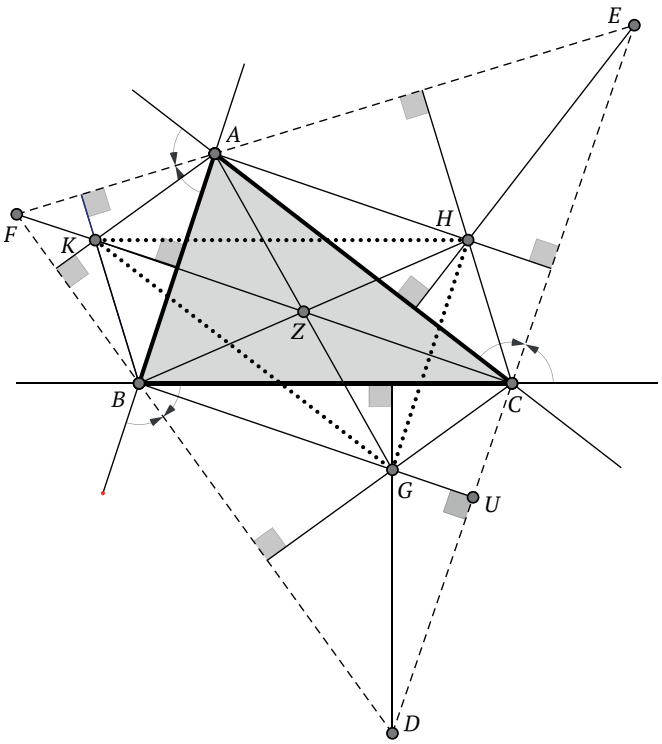


Рисунок Д-15

Поскольку D, E и F определяются пересечениями биссектрис внешних углов $\triangle ABC$, можно вычислить величины углов в треугольниках BCD, CAE и ABF и показать, что эти треугольники подобны. Имеем следующее:

$$\angle CAE = \angle BAF = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2},$$
$$\angle ABF = \angle CBD = \frac{1}{2}(180° - \beta) = 90° - \frac{\beta}{2}$$

и

$$\angle BCD = \angle ACE = \frac{1}{2}(180° - \gamma) = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

Сумма этих трех углов равна

$$\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) + \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = 270° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 180°.$$

Перпендикуляр из точки B пересекает CD в точке U, откуда $\angle UBC = 90° - \angle BCD = \frac{\gamma}{2}$ и $\angle GCD = 90° - \angle CDB = \frac{\alpha}{2}$, что дает $CG = a - \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$.

Так как треугольники BCD и CAE подобны вследствие того, что $\angle BCD = \angle ECA$ и $\angle DBC = \angle AEC$, мы имеем $\frac{CH}{CG} = \frac{AC}{CD}$; откуда $CH = \frac{CG \cdot AC}{CD}$. Закон синусов (см. раздел А6 части 3 «*Инструментарий*») в треугольнике BCD дает

$$\frac{CD}{BC} = \frac{\sin\angle DBC}{\sin\angle CDB} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\sin\left(90° - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Следовательно, $CD = a \cdot \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$. Складывая, получаем

$$CH = \frac{a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot b \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{a \cdot \cos\frac{\beta}{2}} = b \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{q}{2}} = \frac{b}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Аналогичный расчет на другой стороне дает нам

$$BK = \frac{a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot c \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{a \cdot \cos\frac{\gamma}{2}} = c \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{c}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Теперь нам нужно показать, что эти два значения эквивалентны. Это следует из упомянутого закона синусов для треугольника ABC, поскольку равенство $CH = BK$ эквивалентно:

$$\frac{b}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{c}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \quad \text{или} \quad 2b \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} = 2c \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2},$$

что, в свою очередь, эквивалентно $b \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\beta$. Мы видим, что CH и BK имеют одинаковую длину, и $BCHK$, следовательно, является параллелограммом, поскольку две противоположные стороны параллельны и равны между собой. Теперь мы готовы к последнему шагу. Рассмотрим шестиугольник $AKBGCH$. Поскольку $BCHK$ является параллелограммом, его диагонали BH и CK пересекаются в общей средней точке. Аналогичным образом можно показать, что $AKGC$ (или, если угодно, $BAGH$) также является параллелограммом, диагонали которого AG и CK пересекаются в общей средней точке. Все три диагонали AG, BH и CK шестиугольника $AKBGCH$ имеют общую середину Z, показанную на рис. Д-15.

Это означает, что треугольники ABC и GHK симметричны относительно Z и, следовательно, являются равными.

Пример 16. Ортоцентр создает три точки на одной прямой

Мы попытаемся определить, почему ортоцентр H треугольника ABC лежит на прямой, соединяющей R и T, с помощью рис. Д-16. Ограничимся тем, что покажем, почему это должно быть так. Полностью аналогичный результат для прямой RS (или ST) можно легко найти, соответствующим образом изменив обозначения. Напомним, что S — общая точка для PE и AC. Мы хотим показать, что все точки R, S, T и H лежат на одной прямой, и это имеет место, если H принадлежит как RT, так и RS или ST.

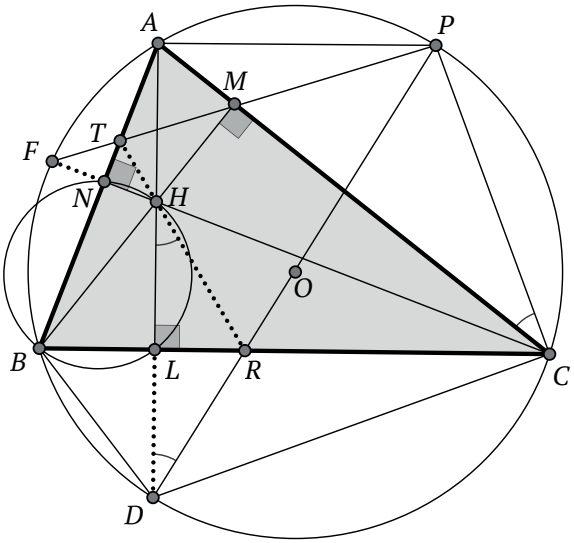


Рисунок Д-16

Сначала заметим, что $\angle CDB = 180° - \angle BAC$. Также для треугольника BCH мы имеем $\angle CBH = \angle CBM = 90° - \angle ACB$ и $\angle HCB = \angle NCB = 90° - \angle CBA$. Таким образом:

$$\begin{aligned}\angle BHC &= 180° - \angle CBH - \angle HCB = 180° - (90° - \angle ACB) - (90° - \angle CBA)\\ &= \angle ACB + \angle CBA = 180° - \angle BAC = \angle CDB.\end{aligned}$$

Треугольники BCH и BDC, следовательно, симметричны относительно BC. Другими словами, мы имеем $LH = LD$, а поскольку у нас также есть $RL \perp DH$, мы видим, что треугольник RHD является равнобедренным с $\angle DHR = \angle HDR$. Откуда мы получаем $\angle DHR = \angle HDR = \angle ADP = \angle ACD$.

Аналогично мы также имеем $\angle THF = \angle PAC$. Теперь заметим, что $\angle HNB = \angle BLH = 90°$, что означает, что точки B, L, H и N лежат на общей окружности. Из этого мы получаем $\angle NHD = 180° - \angle CBA$. Поскольку P — это точка на описанной окружности $\triangle ABC$, у нас также есть $\angle APC = 180° - \angle CBA$, что дает $\angle NHD = \angle APC$.

Суммируя, получаем $\angle DHR + \angle FHD + \angle THF = \angle PCA + \angle APC + \angle CAP = 180°$; следовательно, точка H лежит на линии RT.

Как было указано ранее, можно завершить доказательство, показав аналогичным образом, что H лежит одновременно на прямых RS и ST и, следовательно, точки R, S, T и H лежат на одной прямой.

Пример 17. Ортоцентр выступает как середина отрезка

На рис. Д-17 мы начинаем с того, что продлеваем HM на его собственную длину до точки P. Тогда у нас получится параллелограмм $HBPC$, поскольку диагонали этого четырехугольника делят друг друга пополам. Обозначив основания высот D на стороне BC, E на стороне CA и F на стороне AB, видим, что $\angle FAE$ является дополнительным (до 180°) к углу $\angle EHF$, поскольку другие два противоположных угла четырехугольника $AFHE$ являются прямыми углами и, следовательно, дополняют друг друга. Таким образом, мы также имеем $\angle PBH$, дополнительный к углу $\angle BHC$ (в параллелограмме $HBPC$) и равный $\angle EHF$; следовательно, $\angle PBH = \angle FAE = \angle BAC$. Далее заметим, что $\angle LKA = \angle HKF = 90° - \angle FHK = 90° - \angle CHL = \angle PHC = \angle HPB$, и эти два равенства обеспечивают подобие $\triangle AKL$ и $\triangle BPH$.

Так как $\angle MBH = 90° - \angle ACB = \angle DAC = \angle HAL$, мы видим, что H и M являются точками на сторонах KL и PH подобных треугольников BPH и AKL соответственно, с углами $\angle MBH = \angle HAL$. Таким образом, мы получаем $KH\ LH = PM\ HM = 1$, где $KH = LH$.

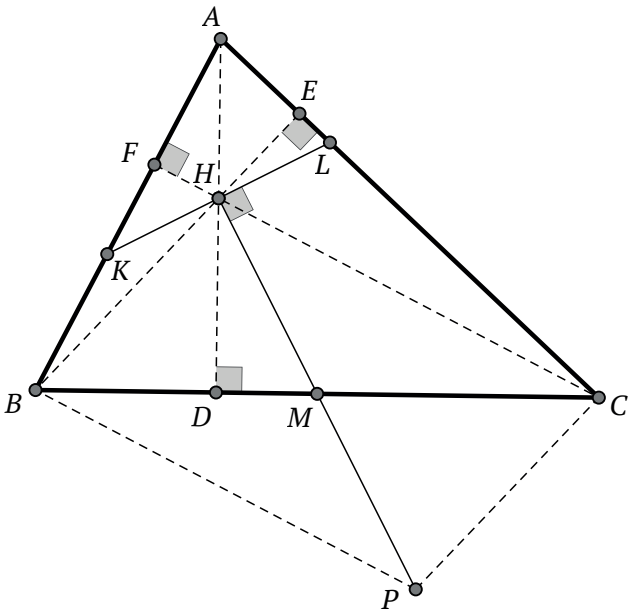


Рисунок Д-17

Пример 18. Совокупность перпендикуляров образует равные отрезки прямой

Мы начнем с применения теоремы Менелая к треугольнику *AHC* с прямой *EF*, пересекающей все три стороны, чтобы получить соотношение $\frac{AS}{HS}\cdot\frac{HF}{CF}\cdot\frac{CE}{AE}=1$ (см. раздел B3 части 3 «*Инструментарий*») с точкой *S*, обозначающей пересечение *AH* и *EF*, как показано на рис. Д-18. Поскольку *AP* и *RQ* перпендикулярны *EF*, находим, что $AP \parallel RQ$. Это означает, что треугольники *DHR* и *DAP* подобны с соотношением $\frac{HR}{AP}=\frac{HD}{AD}$, и также есть подобные треугольники *HQS* и *APS*, в которых $\frac{HQ}{AP}=\frac{HS}{AS}$. Отсюда мы можем видеть, что $\frac{AD}{HD}\cdot\frac{HF}{CF}\cdot\frac{CE}{AE}=1$.

Чтобы упростить задачу, обозначим X = *площадь* $\triangle HAB$, Y = *площадь* $\triangle HBC$ и Z = *площадь* $\triangle HCA$. Поскольку площади двух треугольников, имеющих общее основание, пропорциональны длине их высот, опущенных к этому общему основанию, получаем следующие соотношения: $\frac{AD}{HD}=\frac{X+Y+Z}{Y}$, $\frac{HF}{CF}=\frac{X}{X+Y+Z}$ и $\frac{CE}{AE}=\frac{Y}{X}$.

Перемножив эти три уравнения, получаем $\frac{AD}{HD}\cdot\frac{HF}{CF}\cdot\frac{CE}{AE}=1$, что мы и хотели доказать. Отсюда, сравнив это с предыдущей формулой теоремы Менелая, получаем, что $\frac{AS}{HS}=\frac{AD}{HD}$. Поскольку мы уже показали, что $\frac{HR}{AP}=\frac{HD}{AD}$ и $\frac{HQ}{AP}=\frac{HS}{AS}$, получается $\frac{AP}{HQ}=\frac{AS}{HS}=\frac{AD}{HD}=\frac{AP}{HR}$, откуда $HQ = HR$, что мы и собирались доказать.

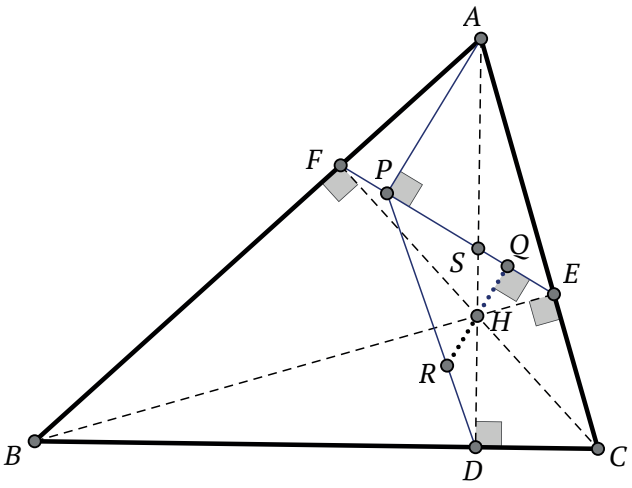


Рисунок Д-18

Пример 19. Еще одна неожиданная коллинеарность

Поскольку касательные к окружности из внешней точки равны, мы имеем следующие равенства: $AE = AF$, $BF = BD$ и $CE = CD$ (см. рис. Д-19). Следовательно, $\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$, и по теореме Чевы (см. раздел B4 в части 3 «*Инструментарий*») прямые AF, BE, и CD пересекаются в одной точке. Поскольку это линии, соединяющие соответствующие вершины треугольников ABC и DEF, согласно теореме Дезарга (см. раздел B7 части 3 «*Инструментарий*»), точки пересечения продолжений соответствующих сторон, а именно K, L и M, лежат на одной прямой.

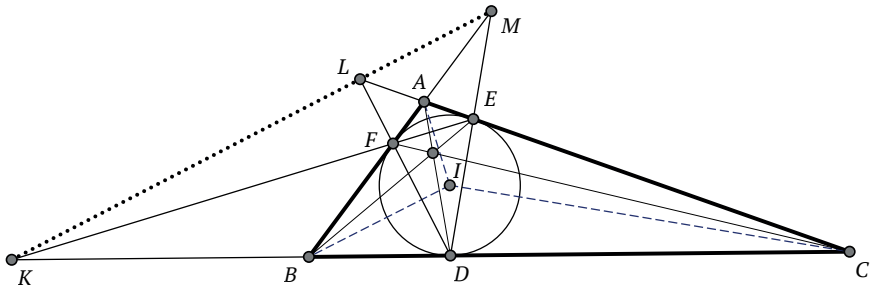


Рисунок Д-19

Пример 20. Представляем ортоцентрический треугольник

Чтобы доказать, что $\triangle ABC$, $\triangle AEF$, $\triangle EBD$ и $\triangle EFC$ подобны, мы докажем, что подобны $\triangle ABC$ и $\triangle AEF$, а затем выполним ту же процедуру для треугольников EBD и EFC.

На рис. Д-20 четырехугольник $BFEC$ является четырехугольником, вокруг которого можно описать окружность, поскольку $\angle BFC$ и $\angle BEC$ являются прямыми углами. Следовательно, углы $\angle CBF$ и $\angle FEC$ являются дополнительными (до 180°) друг другу. Однако $\angle AEF$ является дополнительным к $\angle FEC$; следовательно, $\angle CBF = \angle AEF$. Поскольку, кроме того, $\triangle ABC$ и $\triangle AEF$ оба содержат $\angle FAE$, мы можем заключить, что $\triangle ABC$ подобен $\triangle AEF$. Ту же процедуру можно проделать и с двумя другими треугольниками, чтобы затем сделать вывод, что все четыре треугольника подобны друг на другу.

Чтобы доказать, что FC делит пополам $\angle DFE$, мы снова рассмотрим четырехугольник $BFEC$ с описанной окружностью. В этом четырехугольнике мы имеем $\angle CFE = \angle CBE = 90° - \angle ACB$. В аналогичном четырехугольнике $CDFA$ имеем $\angle DFC = \angle DAC = 90° - \angle ACB$. Мы видим, что $\angle DFC = \angle CFE$, и, следовательно, FC является биссектрисой $\angle DFE$. Аналогичные аргументы показывают обоснованность утверждения для двух других прямых DA и EB.

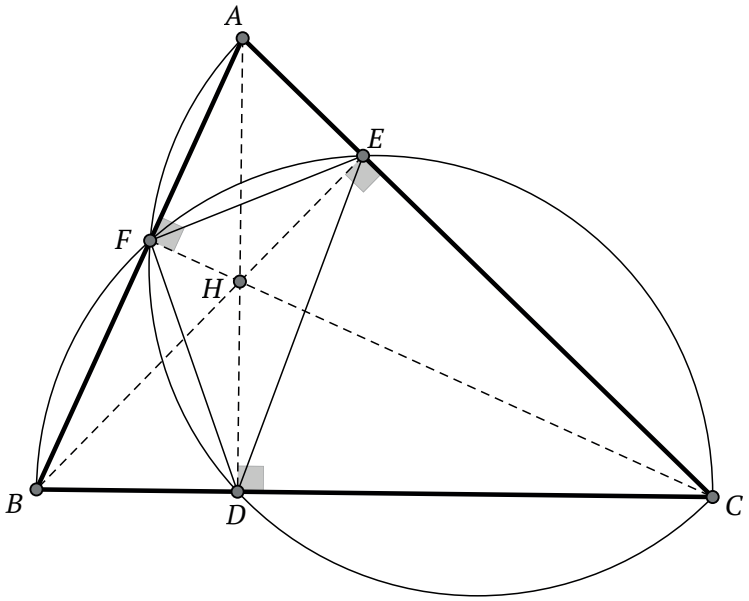


Рисунок Д-20

Пример 21. Определение периметра ортоцентрического треугольника

Чтобы доказать правильность полученного соотношения, рассмотрим точки X и Y на рис. Д-21, симметричные точке D относительно AC и AB соответственно. Как мы только что видели в доказательстве для примера 20, $\angle FEC = 180° - \angle CBF$ и $\angle CBF = \angle DEC$. Это означает, что точки E, F и X лежат на одной прямой. Аналогично точки E, F и Y также лежат на одной прямой.

Поскольку точки D, P и X лежат на одной прямой, если $DP = PX$, а точки D, Q и Y — если $DQ = QY$, гомотетия (см. раздел В12 части 3 «*Инструментарий*») с центром D и коэффициентом 2 отображает PQ на XY. Таким образом, отрезок XY в два раза длиннее, чем PQ. Кроме того, поскольку EX симметричен ED относительно AC, мы имеем $ED = EX$, и аналогично, поскольку FY симметричен FD относительно AB, мы также имеем $FD = FY$. Таким образом, мы получаем $DE + EF + FD = EX + EF + FY = XY = 2PQ$, тем самым завершая доказательство.

Пример 22. Ортоцентрический треугольник — вписанный треугольник с наименьшим периметром

На рис. Д-22 мы предполагаем, что JKL — это произвольный треугольник, вписанный в остроугольный треугольник ABC, с точкой J на стороне BC. Пусть X — отражение J на AC, а Y — отражение J на AB. Вследствие симметрии мы имеем $JK = XK$ и $LJ = LY$. Таким образом, периметр JKL равен $JK + KL + LJ = XK + KL + LY$. Поскольку кратчайшим путем между точками X и Y является отрезок прямой

XY, периметр треугольника *JKL* по меньшей мере равен длине *XY*. Причем минимум достигается, когда мы выбираем точку *K* в качестве общей точки *K′* для *AC* и *XY* и точку *L* в качестве общей точки *L′* для *AB* и *XY*.

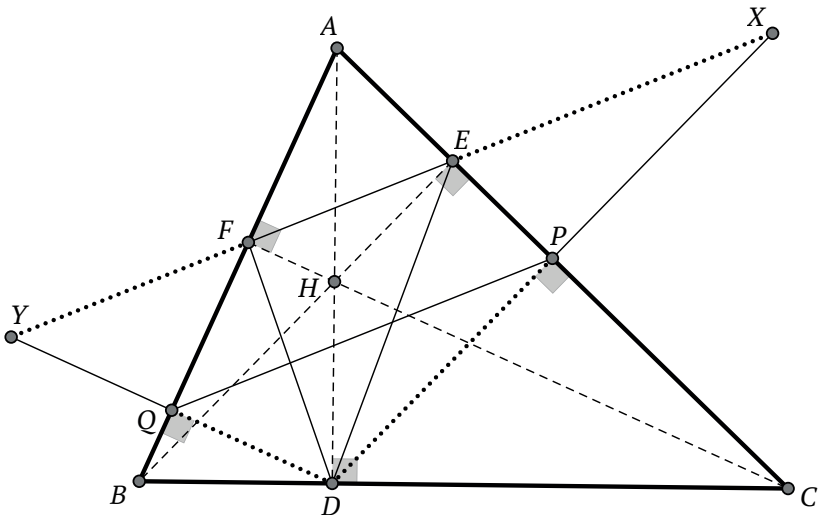


Рисунок Д-21

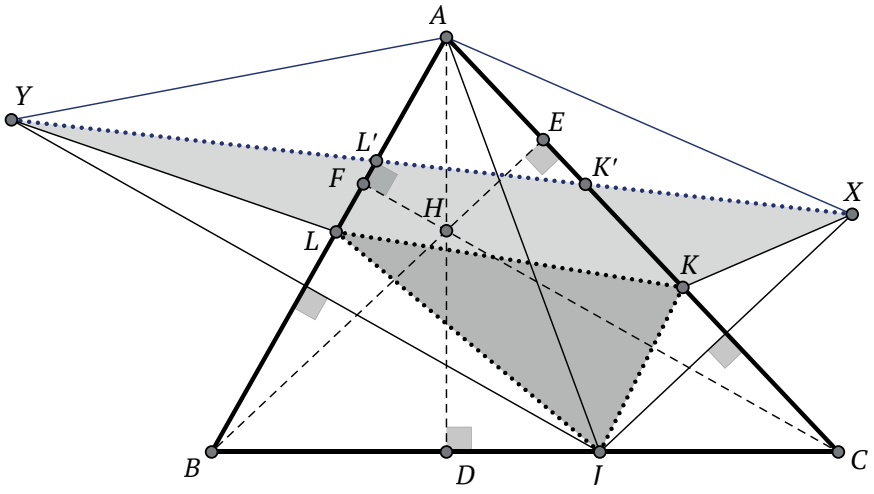


Рисунок Д-22

Теперь отмечаем, что $AJ = AX = AY$ из-за симметрии, возникающей в результате отражений. Кроме того, эта симметрия также означает, что

$$\begin{aligned}\angle YAX &= \angle YAB + \angle BAJ + \angle JAC + \angle CAX \\ &= \angle BAJ + \angle BAJ + \angle JAC + \angle JAC = 2\angle BAC.\end{aligned}$$

Мы видим, что треугольник AXY является равнобедренным, поскольку $AJ = AX = AY$ и $\angle YAX = 2\angle BAC$, независимо от выбора точки J. Различные возможные треугольники AXY, возникающие в результате различных вариантов расположения J на BC, одинаковы, при этом наименьший периметр треугольника JKL получается, если AJ как можно меньше, а K и L выбраны на сторонах AC и AB соответственно. Таким образом, треугольник с наименьшим возможным периметром получается, когда J совпадает с основанием D высоты от A до BC.

Это также верно для каждой из двух других сторон, и, следовательно, треугольник JKL с минимальным периметром получается, когда J совпадает с D, K совпадает с E, а L совпадает с F.

Пример 23. Удивительный подобный треугольник для ортоцентрического треугольника

Прежде чем перейти к доказательству этого примера, вспомним полезное соотношение, с которым мы уже сталкивались в доказательстве примера 16: сторона треугольника делит пополам отрезок перпендикуляра к стороне от ортоцентра до конечной точки на описанной окружности. Альтернативный способ убедиться в этом заключается в следующем. На рис. Д-23(а) продолжение высоты AD совпадает с описанной окружностью в точке K. Проведя прямую KC, получим $\angle ABC = \angle AKC$, поскольку оба они опираются на одну и ту же дугу AC. Четырехугольник $BFHD$ является четырехугольником, вокруг которого можно описать окружность, поскольку имеет пару противоположных прямых углов, поэтому $\angle FHD$ является дополнительным (до 180°) к $\angle DBF$. Однако $\angle DHC$ является дополнительным к $\angle FHD$. Следовательно, $\angle ABC = \angle AKC = \angle DHC$. Таким образом, треугольник HKC является равнобедренным, в котором $HD = DK$.

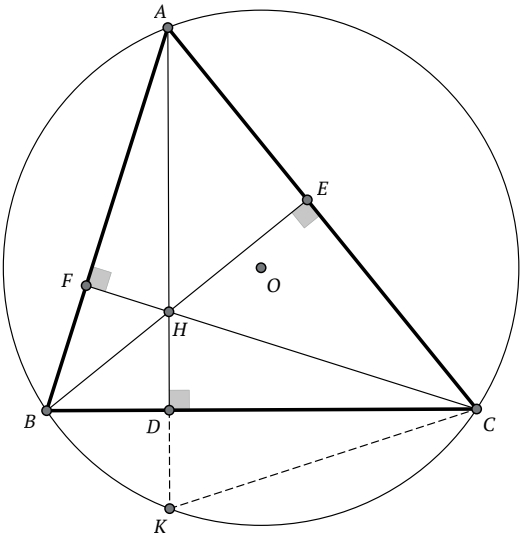


Рисунок Д-23(а)

Теперь, обращаясь к рис. Д-23(б), мы имеем $HD = DK$, аналогично $HE = EL$ и $HF = FM$. Для треугольника LHM мы имеем EF в качестве средней линии, поскольку она соединяет середины двух сторон треугольника и, следовательно, параллельна третьей стороне, так что мы имеем $EF \parallel LM$. Мы можем повторить это рассуждение, чтобы показать, что $FD \parallel ML$ и $DE \parallel KL$. Таким образом, треугольник KLM подобен треугольнику DEF.

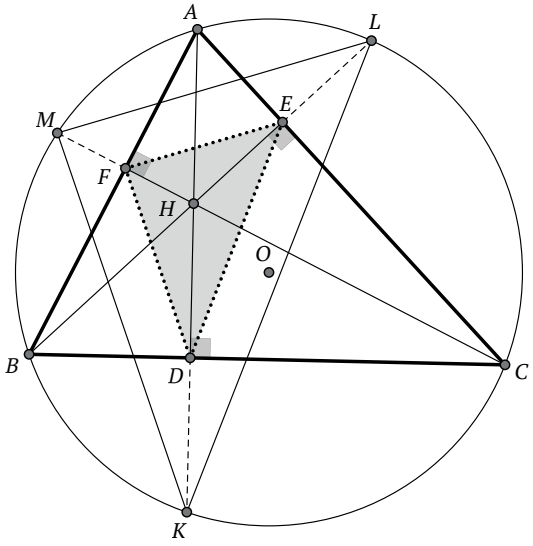


Рисунок Д-23(б)

Пример 24. Замечательное совпадение в ортоцентрическом треугольнике

Как мы уже знаем из доказательства примера 20, высота AD делит пополам $\angle FDE$ в подэрном треугольнике[1] DEF. Аналогично BE и CF делят пополам углы $\angle FED$ и $\angle DFE$ соответственно. На рис. Д-24 мы также можем отметить, что $MN \parallel DE$, $MR \parallel FD$ и $MJ \parallel AD$. Таким образом, MJ делит пополам $\angle NMR$. Аналогичным образом мы можем показать, что NK делит пополам $\angle RNM$, а PL делит пополам $\angle MRN$. Тогда у нас есть три прямые MJ, NK и Pl, являющиеся биссектрисами углов треугольника MNR, что, таким образом, делает их сходящимися в одной точке.

Пример 25. Ортоцентрический треугольник порождает равнобедренный треугольник

Как показано на рис. Д-25, доказательство основано на том факте, что окружность диаметром AC проходит через точки D и F из-за прямых углов $\angle CDA$

[1] См. сноску на стр. 36.

и $\angle CFA$. Поскольку M — середина AC, она является центром этой окружности. Мы знаем, что медиана к гипотенузе прямоугольного треугольника равна половине длины гипотенузы; следовательно, в прямоугольном треугольнике ADC медиана MD равна половине AC. В прямоугольном треугольнике AFC медиана FM также равна половине длины AC. Таким образом, $DM = FM$.

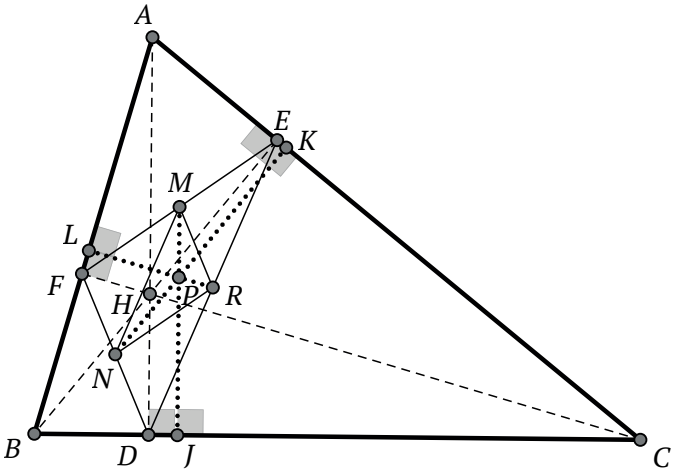


Рисунок Д-24

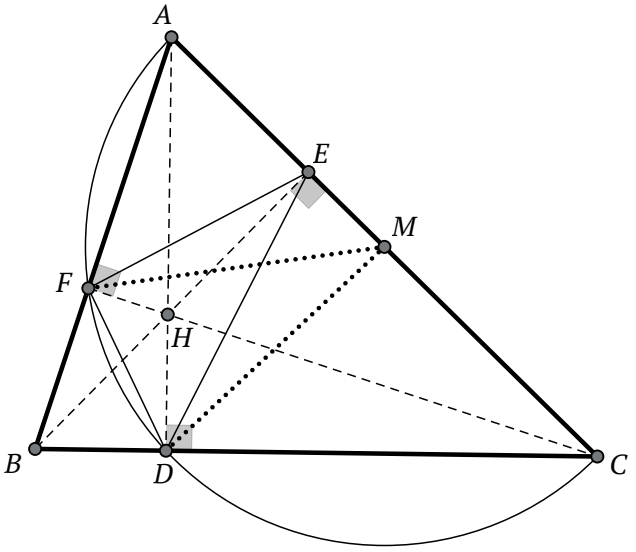


Рисунок Д-25

Пример 26. Ортоцентрический треугольник образует параллелограмм

Как показано на рис. Д-26, касательные *DL* и *DM* к вписанной окружности ортоцентрического треугольника имеют одинаковую длину. Таким образом, треугольник *DLM* является равнобедренным с высотой *DH*, совпадающей с *AD*, а поскольку *G* размещается на *AD*, треугольник *GLM* также является равнобедренным в силу симметрии по отношению к *AD*.

Чтобы доказать, что *LJEG* является параллелограммом, мы воспользуемся прямоугольными треугольниками в этой конфигурации. Введем следующие обозначения: $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$. Тогда в треугольнике *EBC* имеем $EB = c \cdot \sin \angle BA\text{E} = c \cdot \sin \alpha$ и, при $EY \perp BC$, в треугольнике *EBY* имеем, что $EY = EB \cdot \sin \angle YBE = c \cdot \sin \alpha \cdot \sin(90° - \gamma) = c \cdot \sin \alpha \cdot \cos \gamma$.

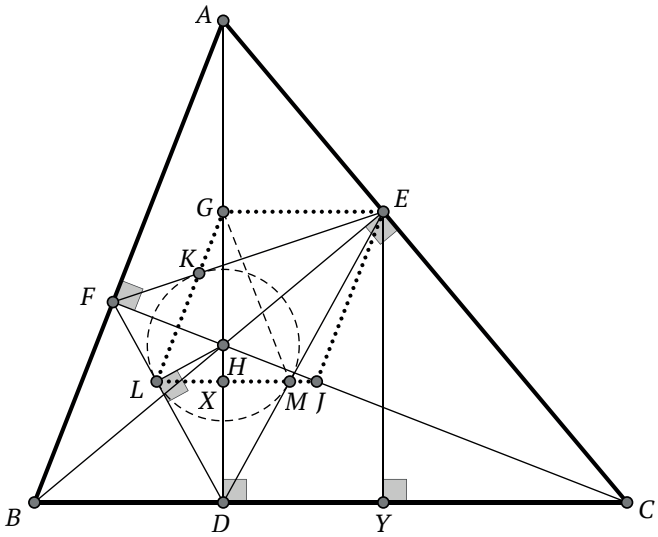


Рисунок Д-26

Теперь покажем, что $DG = EY$, чтобы установить, что прямая *EG* параллельна *BC*. Заметим, что *LM* также параллельна *BC*, поскольку *DH* является перпендикуляром к BC, а основание *LM* равнобедренного треугольника *DLM* также перпендикулярно *DH*, откуда получается, что *EG* тогда параллельна *LJ*. Аналогичные рассуждения показывают, что *GL* параллельна *EJ*, и четырехугольник *EGLJ*, таким образом, является параллелограммом.

Чтобы вычислить длину *DG*, отметим, что $DG = DX + XG$. В треугольниках *BDA*, *DBH*, *HDL* и *XDL* соответственно имеем:

$$BD = c \cdot \cos \angle DBA = c \cdot \cos \beta,$$

$$DH = BD \cdot \operatorname{tg} \angle DBH = c \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{tg}(90° - \gamma) = c \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{ctg} \gamma,$$

$$DL = DH \cdot \sin \angle HDL = c \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \cos(90° - \alpha) = c \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \sin\alpha,$$

$$DX = DL \cdot \cos \angle XDL = c \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \cos(90° - \alpha) = c \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \sin^2\alpha,$$

так же и в треугольниках *XDL* и *LGX*:

$$\begin{aligned} LX &= DL \cdot \sin \angle XDL = c \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \sin(90° - \alpha) \\ &= c \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} XG &= LX \cdot \operatorname{ctg} \angle LGX = c \cdot \cos\beta \cdot \cot\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}(90° - \beta) \\ &= c \cdot \cos(\beta) \cdot \cot\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \\ &= c \cdot \sin\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha. \end{aligned}$$

Суммирование дает:

$$\begin{aligned} DG &= DX + XG = c \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \sin^2\alpha + c \cdot \sin\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ &= c \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \sin\alpha(\cos\beta \cdot \sin\alpha + \sin\beta \cdot \cos\alpha) = c \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) \\ &= c \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \sin(180° - \gamma) = c \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\alpha \cdot \cos\gamma, \end{aligned}$$

что равно ранее рассчитанной длине *EY*. Как указано выше, это означает, что и *EG*, и *LJ* параллельны *BC*; следовательно, они также параллельны друг другу. Поскольку мы можем повторить эти вычисления, чтобы показать, что *EJ* и *GL* параллельны *AB*, это доказывает, что четырехугольник *EGLJ* является параллелограммом.

Пример 27. Точки на одной окружности, образуемые ортоцентрическим треугольником

Этому доказательству могут помочь наши выводы из примера 26, где мы имеем $\angle HKE = \angle EMH = 90°$, а точки *K* и *M* определенно лежат на окружности диаметром *EH*, центр которой *O* является серединой *EH*. Это показано на рис. Д-27. Поскольку *LM* (или *LJ*) параллельна *BC*, мы имеем $\angle HJM = \angle FJL = \angle FCB = 90° - \beta$, а из примера 20 мы уже знаем, что $\angle HEM = 90° - \beta$. Таким образом, мы имеем $\angle HJM = 90° - \beta = \angle HEM$, и точка *J* также лежит на окружности диаметром *EH*. Поскольку аналогичный аргумент можно привести и для точки *G* на другой стороне, у нас есть все шесть точек, а именно точки *H*, *M*, *J*, *E*, *G* и *K*, лежащие на одной окружности.

Пример 28. Ортоцентрический треугольник порождает пересекающиеся прямые

Пусть *Q′* обозначает общую точку линий *EF* и *BC*, а *X* — общую точку линий *EF* и *AD*, как показано на рис. Д-28. Заметим, что у нас точка *A* является пересечением продолжений *FB* и *EC*, точка *H* — пересечением *FC* и *EB*, точка *Q′* — пересечением продолжений *BC* и *EF* и точка *X* — пересечением *AH* и *EF*. Применив теорему Чевы (см. раздел В4 в части 3 «*Инструментарий*») к тре-

угольнику *AEF* относительно точки *H*, мы получим $\frac{EX}{XF}\cdot\frac{FB}{BA}\cdot\frac{AC}{CE}=1$. Игнорируя ориентацию отрезков прямой, применяем теорему Менелая (см. раздел B3 части 3 «*Инструментарий*») к треугольнику *AEF* относительно прямой *BC* и получаем $\frac{EQ'}{Q'F}\cdot\frac{FB}{BA}\cdot\frac{AC}{CE}=1$. Комбинируя эти два результата, получаем $\frac{EX}{XF}=\frac{EQ'}{Q'F}$.

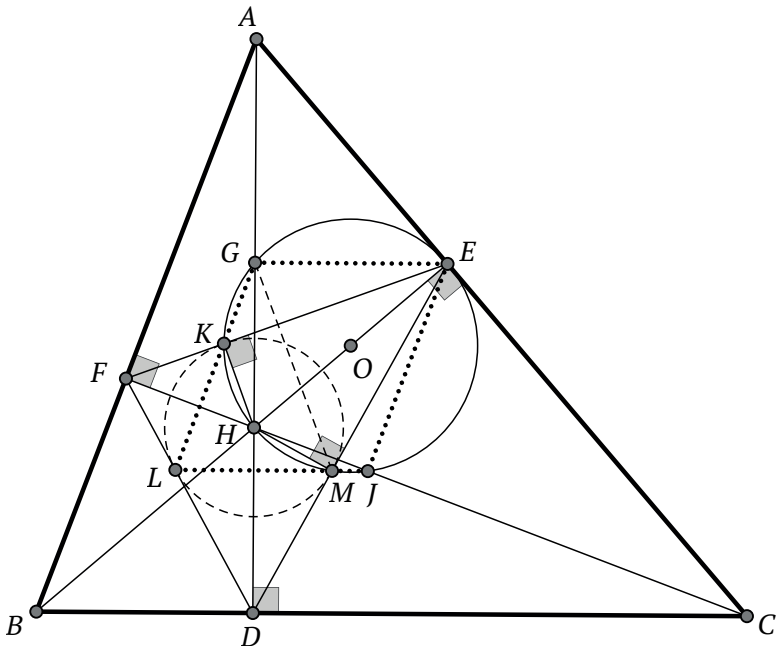


Рисунок Д-27

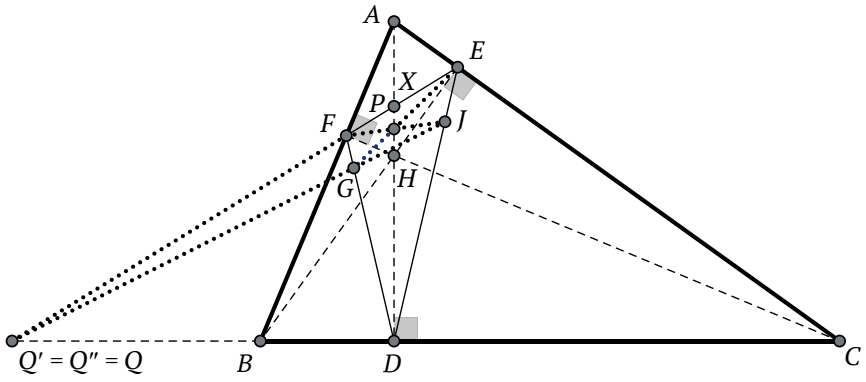


Рисунок Д-28

Если мы аналогично через *Q″* обозначим общую точку прямых *EF* и *GJ*, то заметим, что точка пересечения продолжений *FG* и *EJ* есть *D*, точка пересе-

чения JF и EG есть P и продолжений EF и JG есть Q''. Теперь мы можем применить теорему Чевы к треугольнику DEF относительно точки P, чтобы получить $\frac{EX}{XF}\cdot\frac{FG}{GD}\cdot\frac{DJ}{JE} = 1$, и теорему Менелая к треугольнику DEF относительно прямой GJ, получив $\frac{EQ''}{Q''F}\cdot\frac{FG}{GD}\cdot\frac{DJ}{JE} = 1$. Комбинирование этих двух результатов дает $\frac{EX}{XF} = \frac{EQ''}{Q''F}$. Отсюда $Q' = Q'' = Q$ является общей точкой BC, EF и GJ, как и утверждалось.

Пример 29. Ортоцентрический треугольник создает точки, лежащие на одной прямой

Это особый случай ситуации, которую обычно называют трехлинейной полярностью. Такая ситуация возникает, когда мы пересекаем стороны треугольника линиями, соединяющими противоположные вершины с некоторой общей внутренней точкой, причем в данном случае, показанном на рис. Д-29, такой точкой является ортоцентр H, лежащий на пересечении прямых AD, BE и CF. Теперь рассмотрим два треугольника ABC и DEF. Из теоремы Дезарга (см. раздел В7 части 3 «*Инструментарий*») следует, что точка K на пересечении продолжений BC и EF, точка L на пересечении продолжений CA и FD и M на пересечении продолжений AB и DE лежат на одной прямой.

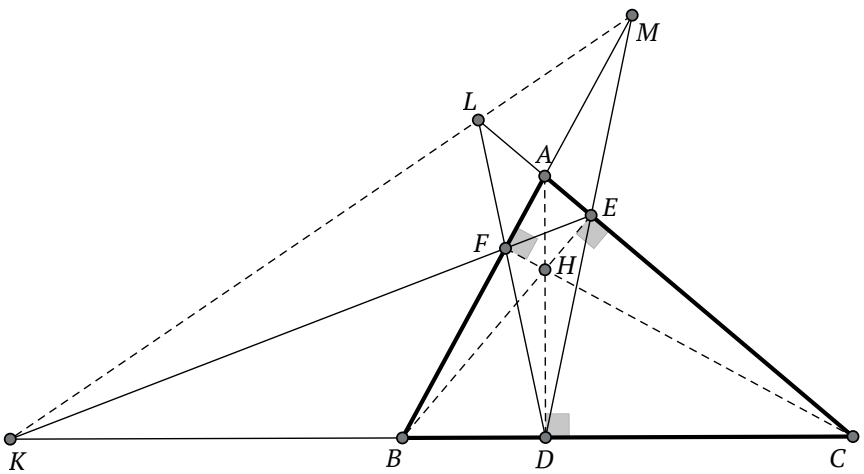


Рисунок Д-29

Пример 30. Неожиданное свойство основания высоты треугольника

Как мы видим на рис. Д-30, прямые EM и FM являются медианами прямоугольных треугольников BCE и BCF, проведенными к их общей гипотенузе BC. Мы

знаем, что медиана гипотенузы прямоугольного треугольника равна половине длины гипотенузы, и поэтому имеем $ME = MF$. Отметим, что $\angle A$ — общий угол прямоугольных треугольников ABE и AFC. Это дает нам $\angle EBA = 90° - \angle A = \angle ACF$. Наконец, мы уже знаем, что $ME = MF$. Тогда треугольник MEF равнобедренный, и биссектриса, перпендикулярная к его основанию EF, таким образом, содержит третью вершину — точку M.

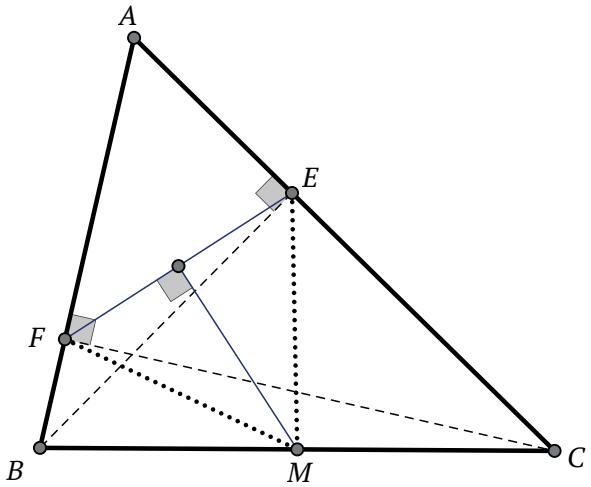


Рисунок Д-30

Пример 31. Как из неравнобедренного треугольника можно построить параллелограмм

На рис. Д-31 начнем с того, что $\angle AOB = 2\angle ACB$. Также $\angle BAO = \frac{1}{2}(180° - \angle AOB) = \frac{1}{2}(180° - \angle ACB) = 90° - \angle ACB$.

Кроме того, $\angle GAC = 90° - \angle ACB$. Следовательно, $\triangle AED$ подобен $\triangle AGC$, откуда $\frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AC}$. Добавляя $\angle DAG$, мы также получаем $\angle BAG = \angle DAC$, и из этого получаем, что $\triangle AEG$ подобен $\triangle ADC$. Следовательно, $\angle AEG = \angle ADC$. Поскольку $\triangle ABC$ не является равнобедренным, мы имеем $BD \neq DC$ (если бы AD был биссектрисой, перпендикулярной к основанию BC, то $AB = AC$ бы выполнялось). Поскольку $OB = OC$ и $\angle ODB = \angle CDO$, точка O лежит на описанной окружности $\triangle BDC$. Таким образом, четырехугольник $OBDC$ является четырехугольником, вокруг которого можно описать окружность, и мы имеем $\angle CBO = \angle CDA = \angle GEA$. Так как точка O является центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC, то есть $\angle OBC + \angle BAC = 90°$, то и $\angle GEA + \angle BAC = 90°$. Следовательно, $EG \perp AG$ и $EG \parallel DF$. Аналогичные рассуждения дают нам также, что $GF \parallel ED$, и, следовательно, $DFGE$ является параллелограммом.

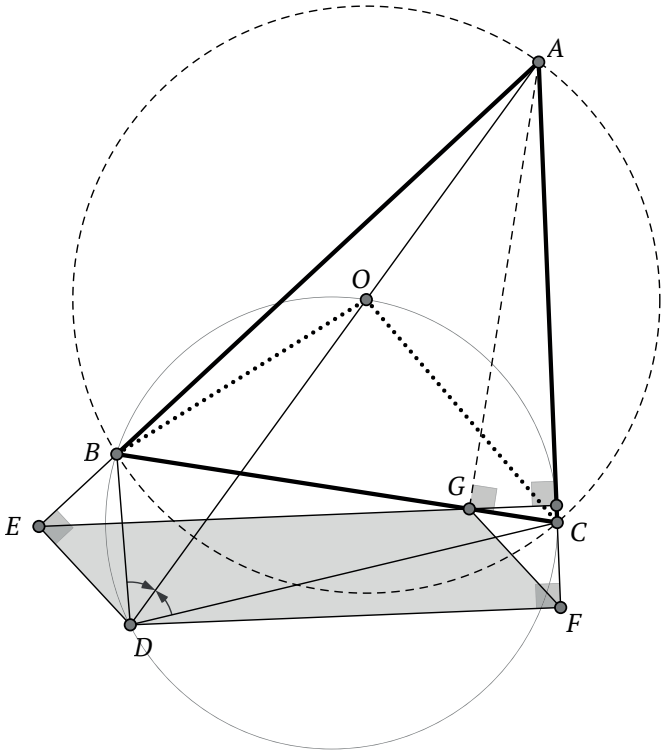


Рисунок Д-31

Пример 32. Перпендикуляры, образующие неожиданные параллельные прямые

В качестве первого шага мы добавим несколько полезных прямых *PA*, *PC* и *CD*, показанных на рис. Д-32. С помощью этих прямых мы покажем, что $\angle FCA = \angle CAD$, и, следовательно, $FC \parallel AD$. Поскольку *A*, *F*, *P* и *C* лежат на одной общей окружности, мы имеем $\angle FCA = \angle FPA$, так как они опираются на одну и ту же дугу *FA*. В треугольнике *LAP* получаем следующее:

$$\begin{aligned}\angle FPA = \angle LPA &= 90° - \angle PAL = 90° - (180° - \angle BAC - \angle CAP) \\ &= \angle BAC + \angle CAP - 90°.\end{aligned}$$

Аналогично, поскольку *D*, *A*, *P* и *C* лежат на одной общей окружности, мы также имеем опирающиеся на общую дугу $\angle DAC = \angle DPC$ и $\angle CDP = \angle CAP$. Кроме того, так как треугольник *JDC* является прямоугольным треугольником, а *ABCP* — четырехугольником, вписанным в окружность, из этого следует, что $\angle PCD = \angle PCB + \angle BCD = (180° - \angle BAP) + \angle JCD = (180° - \angle BAC - \angle CAP) + (90° - \angle CDJ) = (180° - \angle BAC - \angle CAP) + (90° - \angle CDP) = (180° - \angle BAC - \angle CAP) + (90° - \angle CAP) = 270° - \angle BAC - 2\angle CAP$.

Далее, с учетом треугольника PDC, имеем следующее:

$$\angle DPC = 180° - \angle CDP - \angle PCD = 180° - \angle CAP - (270° - \angle BAC - 2\angle CAP)$$
$$= \angle BAC + \angle CAP - 90°.$$

Подводя итоги, имеем $\angle DAC = \angle DPC = \angle BAC + \angle CAP - 90° = \angle FPA = \angle FCA$, и таким образом, $FC \parallel AD$. Аналогично также можно показать, что $BE \parallel AD$, откуда видно, что три прямые FC, AD и BE действительно параллельны.

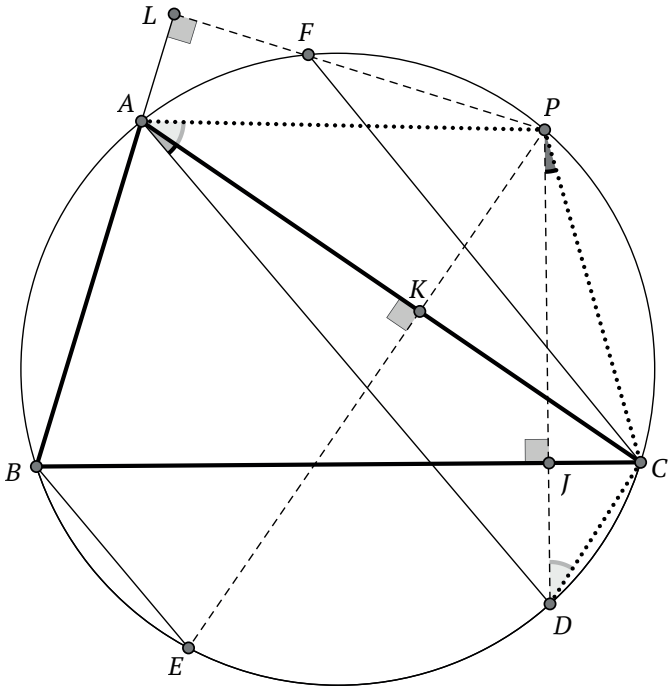


Рисунок Д-32

Пример 33. Описанная окружность порождает точки на одной прямой

На рис. Д-33 мы видим, что треугольники AEB и BEC подобны: у них общий угол в вершине E и $\angle ECB = \angle ABE$, поскольку оба опираются на одну и ту же половину дуги AB. Это позволяет заключить, что $\frac{AE}{BE} = \frac{BE}{CE} = \frac{AB}{BC} = \frac{x}{y}$, и от этого получаем $\frac{AE}{CE} = \frac{AE}{BE} \cdot \frac{AE}{BE} = \frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$. Аналогично точно так же, как точка E пропорционально делит отрезок CE, то же самое верно для точек D и F на отрезках BD и AF соответственно, иными словами, $\frac{CD}{BD} = \left(\frac{CA}{AB}\right)^2 = \frac{z^2}{x^2}$ и $\frac{BF}{FA} = \left(\frac{BC}{CA}\right)^2 = \frac{y^2}{z^2}$. Та-

ким образом, следствие этих соотношений, на которые точки *D*, *E* и *F* делят стороны треугольника *ABC*, дают нам $\frac{AE}{CE}\cdot\frac{CD}{BD}\cdot\frac{BF}{FA}=\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{z^2}{x^2}\cdot\frac{y^2}{z^2}=1$. Что, согласно теореме Менелая (см. раздел B3 части 3 «*Инструментарий*»), указывает на то, что точки *D*, *E* и *F* лежат на одной прямой.

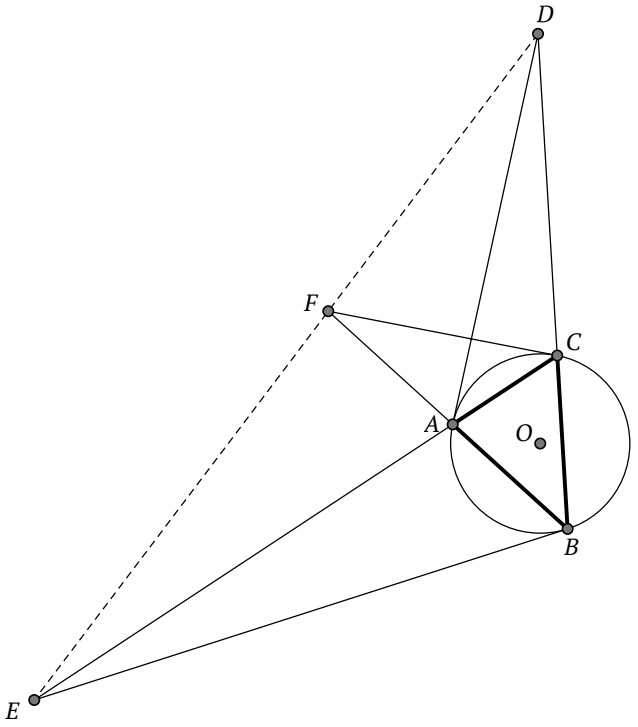


Рисунок Д-33

Пример 34. Неожиданное равенство треугольников в круге

Удивительно, но это является непосредственным следствием примера 32. Поскольку *FC*, *AD* и *BE* являются параллельными хордами окружности *O*, перпендикуляры к их серединам совпадают и проходят через центр описанной окружности с центром *O*, как видно на рис. Д-34. Поскольку точки *D*, *E* и *F* располагаются симметрично к точкам *A*, *B* и *C* соответственно относительно этого общего перпендикуляра (см. раздел B11 части 3 «*Инструментарий*»), треугольники *ABC* и *DFE* симметричны и, следовательно, равны.

Пример 35. Неожиданное свойство результата

На рис. Д-35 мы начинаем с построения отрезка *CE*. Затем получаем прямой угол *ECB*, вписанный в полукруг. Два прямоугольных треугольника *ABD* и *EBC* подобны, так как и $\angle BAC$, и $\angle BEC$ опираются на одну и ту же дугу *BC*. Это

позволяет нам установить пропорцию $\frac{AB}{BE} = \frac{BD}{BC}$, что приводит к желаемому выводу $AB \cdot BC = BD \cdot BE$.

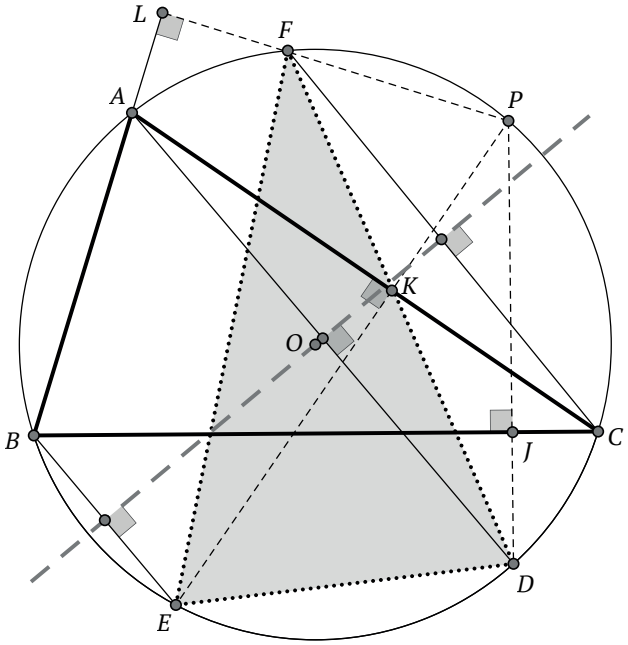


Рисунок Д-34

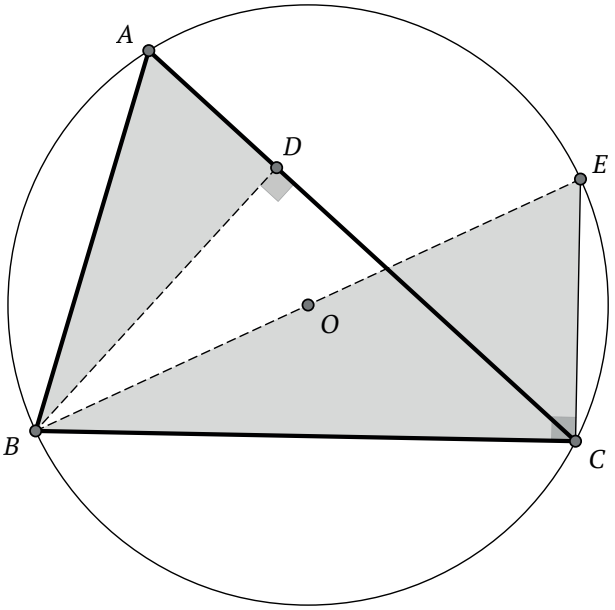


Рисунок Д-35

Пример 36. Необычное произведение двух сторон треугольника

Доказательством является довольно простое применение подобных треугольников. На рис. Д-36 начинаем с проведения CD, чтобы создать треугольник ADC. Поскольку $\angle ACD$ вписан в полукруг, это прямой угол. Кроме того, $\angle EBA$ и $\angle CDA$ являются вписанными углами с одной и той же опорной дугой AC. Следовательно, $\triangle EBA = \triangle CDA$, из чего следует, что $\triangle ABE$ подобен $\triangle ADC$. Это позволяет получить соотношение $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$, и, следовательно $AD \cdot AE = AB \cdot AC$.

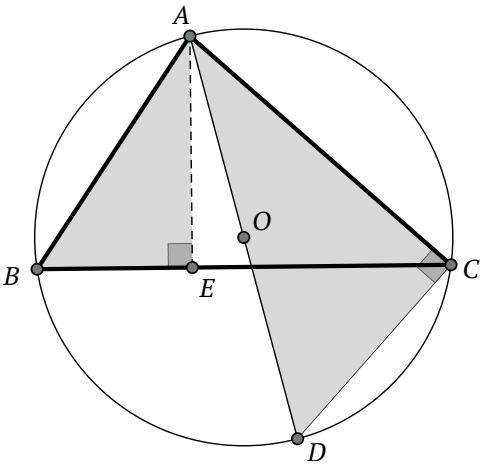


Рисунок Д-36

Пример 37. Теорема Симсона

Начнем с того, что изобразим PA, PB и PC на рис. Д-37. Поскольку A, B, C и P лежат на общей окружности, получим $\angle ABP = \angle ACP$. Следовательно, прямоугольные треугольники ZPB и YPC подобны, и мы имеем $\frac{BZ}{CY} = \frac{PZ}{PY}$. Аналогично равенство $\angle PAB = \angle PCB$ дает подобные прямоугольные треугольники XCP и ZAP, так что $\frac{CX}{AZ} = \frac{PX}{PZ}$. Поскольку $\angle CBP$ и $\angle PAC$ являются противоположными углами вписанного четырехугольника, они дополняют друг друга. Однако $\angle YAP$ также дополняет $\angle PAC$. Это означает, что прямоугольные треугольники XPB и YPA также подобны, что дает $\frac{AY}{BX} = \frac{PY}{PX}$. Перемножив эти равенства, мы получаем $\frac{BZ}{CY} \cdot \frac{CX}{AZ} \cdot \frac{AY}{BX} = \frac{PZ}{PY} \cdot \frac{PX}{PZ} \cdot \frac{PY}{PX} = 1$. Таким образом, согласно теореме Менелая (см. раздел В3 части 3 «*Инструментарий*»), точки X, Y и Z лежат на одной прямой. Эти три точки определяют прямую Симсона треугольника ABC относительно точки P.

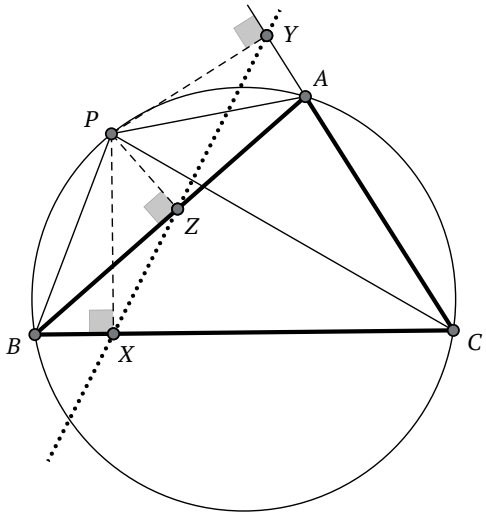


Рисунок Д-37

Пример 38. Расширение теоремы Симсона

Мы знаем, что на рис. Д-38 высота, проведенная в треугольнике *ABC* от вершины *C* до стороны *AB*, пересекается с окружностью в точке *P* и пересекается с *AB* в точке *Z*, которая является одной из точек на прямой Симсона. У нас также есть отрезки *PX* и *PY*, перпендикулярные, соответственно, сторонам *BC* и *CA* треугольника *ABC*. Следовательно, точки *X*, *Y* и *Z* определяют линию Симсона треугольника *ABC* относительно точки *P*.

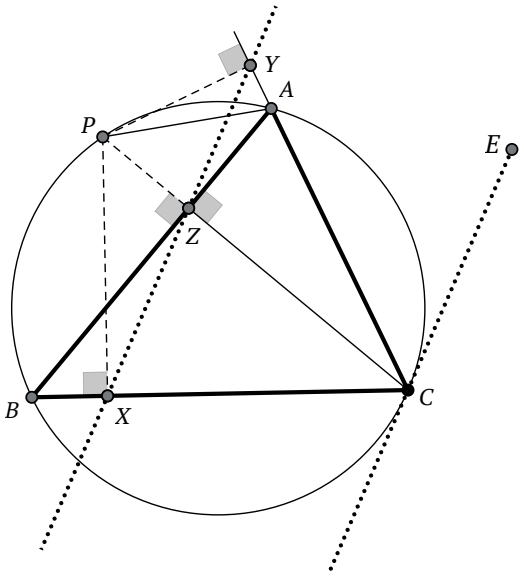


Рисунок Д-38

Теперь мы проведем прямую PA и рассмотрим четырехугольник $PXAY$, где $\angle AZP = \angle PYA = 90°$. Это делает $PXAY$ четырехугольником, вокруг которого можно описать окружность, и, следовательно, $\angle ZYA = \angle ZPA$. Теперь пусть E обозначает точку, расположенную на касательной к описанной окружности $\triangle ABC$ в точке C, как показано на рис. Д-38. В этой окружности мы, безусловно, имеем $\angle ECA = \angle CPA$, поскольку оба угла опираются на половину длины дуги AC. Тогда мы получим $\angle ZYC = \angle ZYA = \angle ZPA = \angle CPA = \angle ECA$. Поскольку они являются противолежащими внутренними углами, образуемыми прямой Симсона XYZ и касательной EC, эти две прямые параллельны.

Пример 39. Интересный аспект теоремы Симсона

На рис. Д-39 мы продлеваем высоту CH, чтобы она пересеклась с описанной окружностью $\triangle ABC$ в точке T, и продлеваем PZ, чтобы она пересеклась с окружностью в точке K. Нарисовав отрезок CK, мы проводим прямую из точки H параллельно CK. Эта прямая пересекает PK в точке U. Тогда у нас есть параллелограмм $CKUH$, где $HU = CK$. У нас также есть равнобедренная трапеция $PKCT$, так что $PT = CK$. Следовательно, $TPUH$ также является равнобедренной трапецией.

Теперь рассмотрим треугольник ATH. Поскольку T — это точка на описанной окружности треугольника ABC, мы имеем $\angle HTA = \angle CTA = \angle CBA$. Кроме того, мы имеем $\angle AHE = \angle CBA$, так как их соответствующие стороны перпендикулярны сторонам: $AH \perp BC$ и $EH \perp BA$. Следовательно, треугольник ATH равнобедренный. Обозначив E как середину TH, мы увидим, что прямая AB (или AE) является перпендикуляром, делящим пополам TH. Поскольку точка Z лежит на этой прямой и помня, что $TPUH$ — равнобедренная трапеция, мы видим, что Z — это середина PU. Теперь мы должны показать, что прямая HU параллельна прямой Симсона XYZ. Чтобы сделать это, отметим, что четырехугольник $PZAY$ является четырехугольником, вокруг которого можно описать окружность, так как $\angle PYA = \angle AZP = 90°$. Из этого получаем $\angle ZYC = \angle ZYA = \angle ZPA = \angle KPA$, следовательно, точки A, P, K и C лежат на одной окружности, то есть $\angle KPA = 180° - \angle ACK = 180° - \angle YCK$. Подводя итог, получаем, что $\angle ZYC = 180° - \angle YCK$, и, следовательно, CK параллельна линии Симсона YZ. Поскольку мы знаем, что HU параллельна CK, она также параллельна линии Симсона.

В качестве последнего шага рассмотрим треугольник PUH. Поскольку прямая Симсона ZR параллельна стороне HU треугольника PUH, а Z — середина его стороны PU, она также должна пересекать другую сторону треугольника PUH в его средней точке R. Следовательно, $PR = HR$, а R — середина PH, что мы и намеревались доказать.

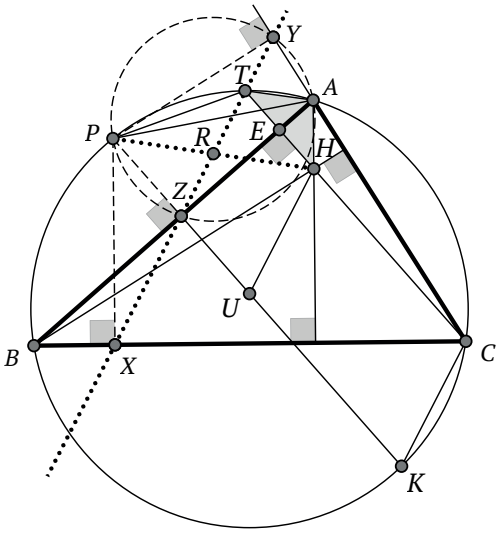


Рисунок Д-39

Пример 40. Параллель прямой Симсона

На рис. Д-40 приведена несколько иная версия того же построения. Поскольку точки P и Q лежат на описанной окружности $\triangle ABC$, мы имеем $\angle AQP = \angle ABP$. Учитывая, что $\angle PXB = \angle PZB = 90°$, точки P, B, X и Z также лежат на одной окружности, получается, что $\angle ZXP = \angle ZBP$. Таким образом, имеем $\angle ZXP = \angle ZBP = \angle ABP = \angle AQP$, и поскольку AQ и XZ, пересекаясь с PXQ, образуют равные соответственные углы $\angle AQX = \angle YXP$, прямая AQ параллельна прямой Симсона: $AQ \parallel YX$.

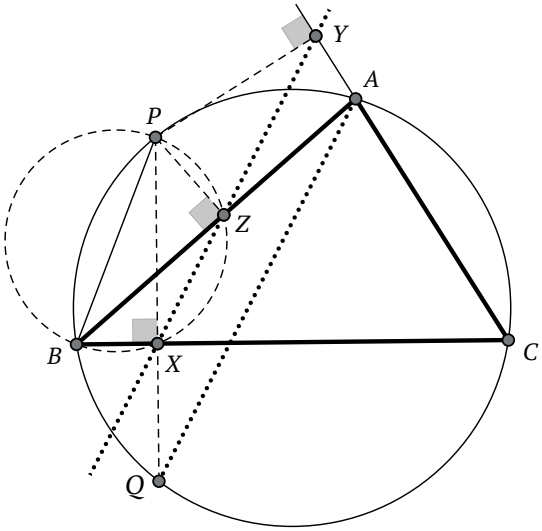


Рисунок Д-40

Пример 41. Два треугольника, связанных общей точкой: центр описанной окружности и геометрический центр

На рис. Д-41 сначала отмечаем, что X — это точка пересечения перпендикуляров к центрам отрезков BG и CG. Это означает, что отрезки BX, CX и GX имеют одинаковую длину, а точка X является центром описанной окружности треугольника BCG. Следовательно, X также лежит на продолжении прямой OL — перпендикуляре к середине BC. Аналогично Y лежит на OM, а Z на ON. Теперь обратим внимание на некоторые равенства углов. Поскольку прямая AQ перпендикулярна QY, а AM перпендикулярна MY, точки A, Q, M и Y лежат на одной окружности, и имеем $\angle QAM = \angle QYM$, или $\angle LAC = \angle DYO$. Аналогично точки C, L, O и M также лежат на одной прямой. Определяя точку D там, где продолжение LO пересекается с YZ, получаем $\angle MCL = \angle TOD$, так как оба угла являются дополнительными к $\angle LOM$. Поскольку $\angle MCL = \angle ACL$, мы имеем $\triangle YOD$ подоб-

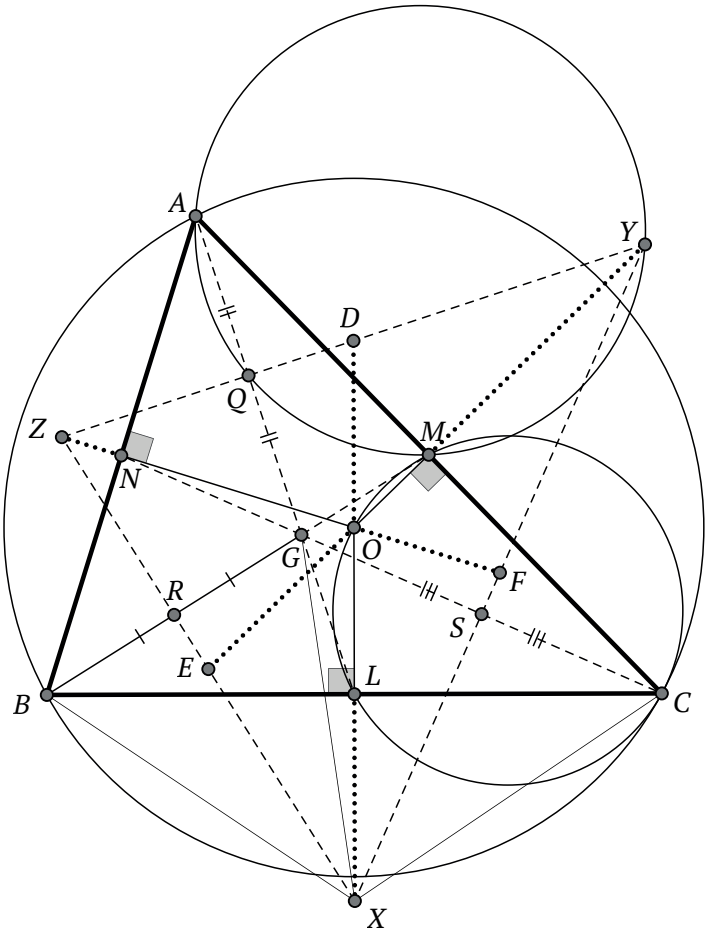


Рисунок Д-41

ный $\triangle ACL$ и получаем $\frac{YD}{AL} = \frac{OD}{CL}$. Аналогично можно найти, что $\triangle ABL$ подобен $\triangle ZOD$, что дает нам $\frac{ZD}{AL} = \frac{OD}{BL}$. Поскольку $BL = CL$, мы можем заключить, что $YD = ZD$; это означает, что точка D, в которой продолжение XO пересекается с YZ, является серединой YZ. Затем это можно повторить для двух других средних точек E и F, откуда вытекает, что точка O является геометрическим центром $\triangle XYZ$.

Пример 42. Знакомимся с медианами треугольника и некоторыми их удивительными свойствами

Медиана треугольника делит его на два треугольника равной площади, поскольку основания двух треугольников равны и они имеют одну и ту же высоту, как, например, *площадь* $\triangle ABD$ = *площадь* $\triangle ADC$ на рис. Д-42(а). Используя то же рассуждение, можно показать, что на рис. Д-42(б) медиана GD делит треугольник BGC на две равные части, а именно *площадь* $\triangle GBD$ = *площадь* $\triangle GCD$. Из этого следует, что *площадь* $\triangle ABG$ = *площадь* $\triangle ABD$ − *площадь* $\triangle GBD$ = *площадь* $\triangle ADC$ − *площадь* $\triangle GDC$ = *площадь* $\triangle AGC$.

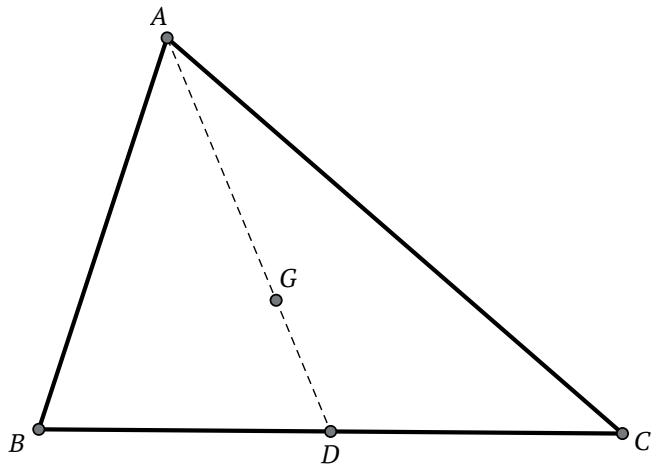


Рисунок Д-42(а)

Поскольку *площадь* $\triangle GAF$ = *площадь* $\triangle GFB$ и *площадь* $\triangle GCE$ = *площадь* $\triangle GEA$, мы получаем $\frac{1}{2}$*площадь* $\triangle ABG = \frac{1}{2}$*площадь* $\triangle AGC$, откуда следует, что *площадь* $\triangle GAF$ = *площадь* $\triangle GFB$ = *площадь* $\triangle GCE$ = *площадь* $\triangle GEA$.

Если повторить это для треугольников BCE и BEA, мы найдем равенство всех шести показанных треугольников, а именно: *площадь* $\triangle GBD$ = *площадь* $\triangle GDC$ = *площадь* $\triangle GCE$ = *площадь* $\triangle GEA$ = *площадь* $\triangle GAF$ = *площадь* $\triangle GFB$.

Поскольку *площадь* $\triangle GDC$ = *площадь* $\triangle GCE$ = *площадь* $\triangle GEA$, следовательно, мы имеем *площадь* $\triangle GDC = \frac{1}{3}$ *площадь* $\triangle ADC$. Таким образом, высота треуголь-

ника GDC, проведенная к стороне CD, составляет одну треть высоты ADC, из чего также следует, что GD составляет одну треть от AD. Таким образом, точка G является точкой деления медианы AD на три части, и поскольку мы можем рассуждать аналогичным образом для двух других медиан, она также является точкой деления на три медиан BE и CF. Чтобы понять, почему кратчайшая медиана имеет свою конечную точку на самой длинной стороне треугольника, полезно применить теорему Аполлония (см. раздел B9 части 3 «*Инструментарий*»). Она утверждает, что в любом треугольнике ABC соблюдается равенство $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$, где D — середина стороны BC. Это прямое следствие закона косинусов, показанное на рис. Д-42(а), поскольку $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos \angle ADB$ и

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos \angle ADC \\ &= AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos(180° - \angle ADB) \\ &= AD^2 + BD^2 + 2AD \cdot BD \cdot \cos \angle ADB. \end{aligned}$$

Сложение этих двух уравнений дает нам $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

Установив этот факт и отметив, что $BD = \frac{1}{2}BC$, мы также можем записать теорему Аполлония как

$$AD^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2).$$

Теперь мы можем сравнить длины любых двух медиан и видим, что $AD > BE$ эквивалентно выражению

$$\frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2) > \frac{1}{4}(2AB^2 + 2BC^2 - AC^2), \quad \text{или} \quad 3AC^2 > 3BC^2.$$

Мы видим, что более длинная медиана имеет свою конечную точку на более короткой стороне $\triangle ABC$, а самая короткая медиана, следовательно, имеет конечную точку на самой длинной стороне треугольника, как и было сказано. Чтобы доказать, что сумма длин медиан меньше периметра треугольника, отметим, что сумма длин любых двух сторон треугольника всегда больше длины третьей стороны. Это происходит потому, что третья сторона соединяет две вершины кратчайшим путем, а две другие точки соединяются не напрямую через третью вершину. Согласно рис. Д-42(а), это означает, что $AB + BD > AD$, $FB + BC > CF$, $BC + CE > BE$, $DC + CA > AD$, $CA + AF > CF$ и $EA + AB > BF$. Сложение всех этих неравенств дает $2(AB + BC + CA) > 2(AD + BE + CF)$, или $AB + BC + CA > AD + BE + CF$.

Далее мы покажем, что для любого треугольника сумма длин медиан больше, чем три четверти периметра треугольника. Мы начнем с использования хорошо известного свойства геометрического центра G из $\triangle ABC$, делящего каждую медиану на три части, и для простоты обозначим медианы из вершин A, B и C как m_a, m_b и m_c.

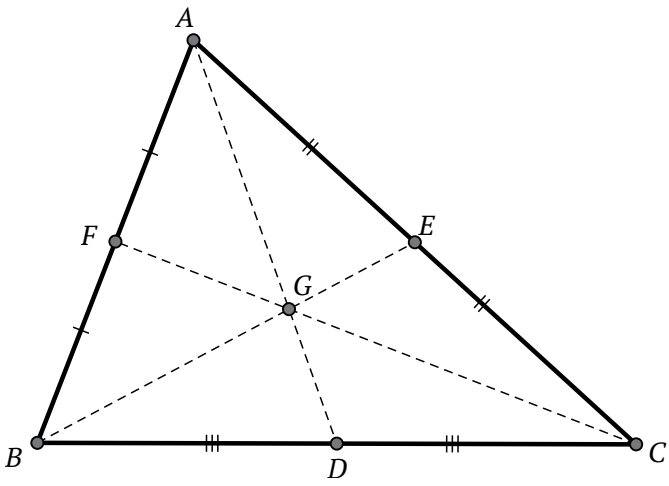


Рисунок Д-42(б)

Как показано на рис. Д-42(б), в треугольнике BGC стороны $BG + CG > BC$, или $\frac{2}{3}m_c + \frac{2}{3}m_b > a$. Аналогичным образом получаем $\frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_a > c$ и $\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c > b$.

Складывая, имеем $\frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c) > a + b + c$, и, следовательно, $m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}(a + b + c)$.

Окончательно получаем $AD^2 + BE^2 + CF^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$, если еще раз применить теорему Аполлония. Мы знаем, что $AD^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2)$, аналогично $BE^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2BC^2 - AC^2)$ и $CF^2 = \frac{1}{4}(2BC^2 + 2AC^2 - AB^2)$. Сложение этих соотношений дает тот же результат $AD^2 + BE^2 + CF^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$.

Пример 43. Медиана треугольника равноудалена от двух вершин

Доказательство, показанное на рис. Д-43, довольно простое, но результат весьма примечательный. Поскольку $BD = CD$ и $\angle BDP = \angle QDC$, мы можем установить равенство прямоугольных треугольников $\triangle CQD$ и $\triangle BFD$. Следовательно, $BP = CQ$.

Пример 44. Особая медиана в прямоугольном треугольнике

Простой способ доказать это соотношение состоит в учете того, что диаметр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, равен гипотенузе, как показано на рис. Д-44. Очевидно, что середина M гипотенузы BC треугольника ABC при этом является центром описанной окружности, а AM, BM и CM — ее радиусами, следовательно, $AM = \frac{1}{2}BC$.

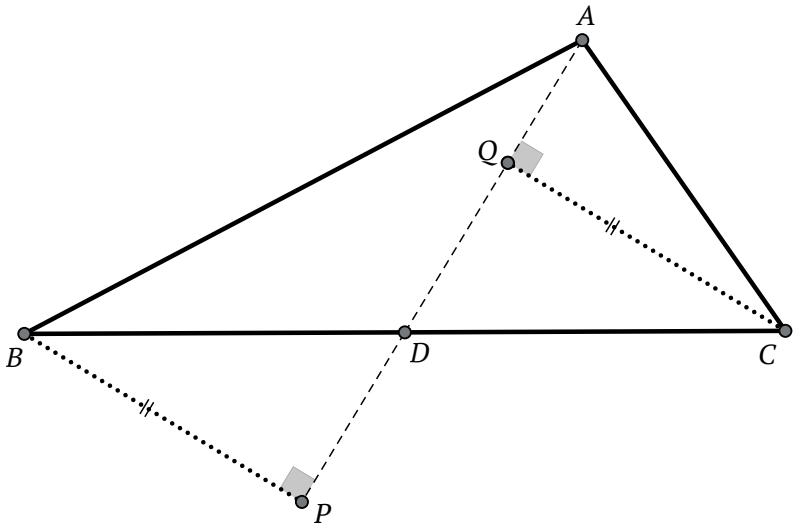


Рисунок Д-43

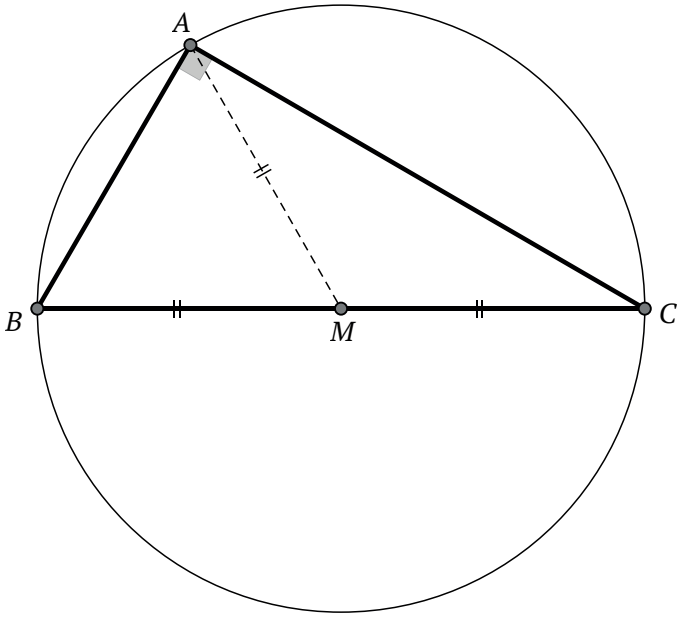


Рисунок Д-44

Пример 45. Медианы делят любой треугольник на четыре равных треугольника

Свойство деления пополам средней линии в точке L непосредственно вытекает из того факта, что существует гомотетия (см. раздел В12 части 3 «*Инструментарий*») с центром A и коэффициентом 2, отображающая треугольник AFE

на треугольник *ABC*, в сочетании с тем фактом, что *D* является серединой *BC*.

Чтобы доказать равенство четырех маленьких треугольников, вспомним, что средняя линия треугольника, показанная на рис. Д-45, равна половине длины стороны, которой она параллельна. Следовательно, например, $EF = \frac{1}{2}BC = BD$. Тот же вывод можно сделать для $FD = AE$ и, поскольку *F* является серединой *AB*, $AF = FB$. Таким образом, мы показали, что $\triangle AFE$ равен $\triangle FBD$. Аналогичным образом мы можем показать, что все треугольники равны (конгруэнтны[1]): $\triangle AEF \cong \triangle FDB \cong \triangle ECD \cong \triangle DFE$.

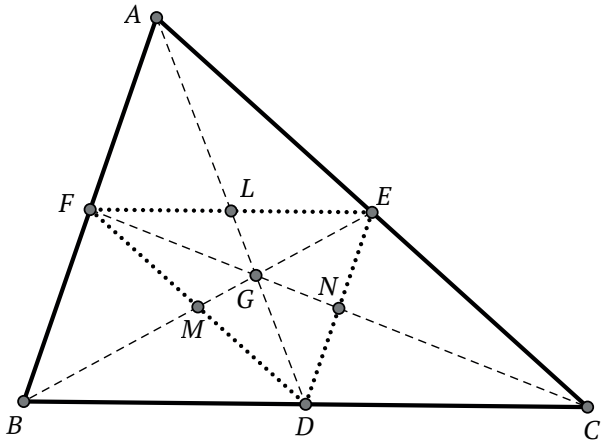


Рисунок Д-45

Пример 46. Как геометрический центр помогает построить подобный треугольник

Поскольку на рис. Д-46 прямая *GK* параллельна *BC*, $\angle GKH = \angle CBH$ и $\angle HGK = \angle HCB$, треугольники *HKG* и *HBC* подобны. Треугольники *AGC* и *ADC* также подобны, и так как геометрический центр *G* делит медиану на три части, имеем $\frac{GK}{DC} = \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}$. Следовательно, $\frac{GH}{HC} = \frac{GK}{BC} = 2\left(\frac{GK}{DG}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$. Откуда $\frac{CH}{CF} = \frac{CH}{CG} \cdot \frac{CG}{CF} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$, т. е. *H* является серединой отрезка *CF*. Поскольку *D* является серединой *BC*, получаем $HD \parallel AB$. Аналогично $JD \parallel AC$, что мы можем показать, рассмотрев подобные треугольники *AGL* и *ADB*, а также *JLG* и *JCB*. Наконец, поскольку $\frac{CH}{CF} = \frac{CJ}{GE} = \frac{1}{2}$, треугольники *GJH* и *GEF* также подобны, так как у них равны вертикальные углы в точке G. Это означает, что $\angle FEG = \angle HJG$ и $\angle GFE = \angle GHJ$, и у нас есть отрезок *JH*, параллельный *EF*, а поскольку *EF* параллелен *BC*, также $JH \parallel BC$. Таким образом, мы можем сделать вывод, что треугольник *EHJ* подобен треугольнику *ABC*.

---

[1] См. сноску в тексте исходного примера на стр. 53.

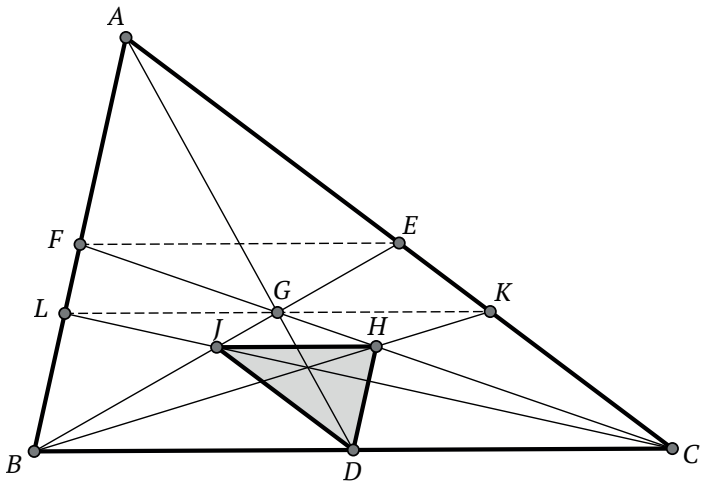


Рисунок Д-46

Пример 47. Геометрический центр обеспечивает необычное соотношение

Это доказательство состоит из двух частей. Первая часть посвящена треугольнику *AKG*, показанному на рис. Д-47, где точка *J* является серединой стороны *AG*. Построим перпендикуляр *JL* к прямой *MN*, пересекающий ее в точке *L*. Тогда имеем: $\triangle JGL$ подобен $\triangle AGK$, откуда $JL = \frac{1}{2}AK$. Теперь сосредоточимся на трапеции *BCNM*, в которой *HD* делит основания пополам, откуда $HD = \frac{1}{2}(MB + NC)$. Мы видим, что $\triangle JLG$ равен $\triangle DHG$, так что $JL = DH$. Объединение этих равенств дает нам $\frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}(MB + NC)$, или просто $AK = MB + NC$, что и было целью доказательства.

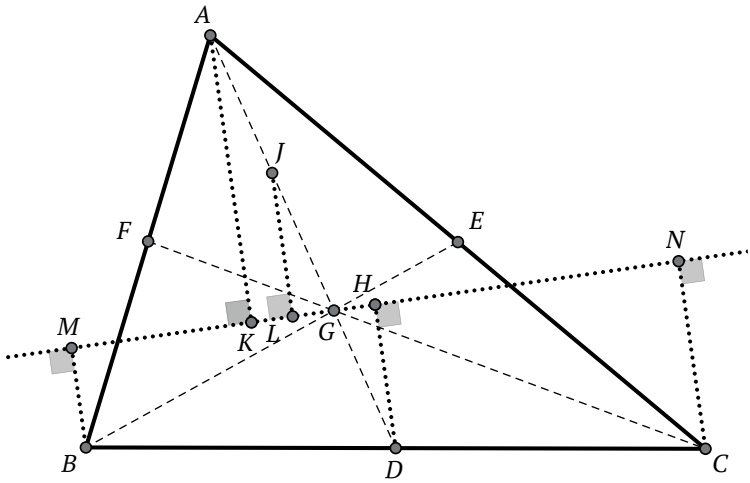


Рисунок Д-47

Пример 48. Расстояния от вершин треугольника до произвольной прямой

Этот пример непосредственно вытекает из предыдущего. На рис. Д-48 мы добавили прямую $M'N'$, проходящую через точку G параллельно прямой MKN. Если AK', BM' и CN' являются перпендикулярами к $M'N'$ из вершин треугольника ABC, то из доказательства примера 47 мы знаем, что $AK' = M'B + N'C$. Поскольку прямые MKN и $M'K'N$ параллельны, имеем $KK' = MM' = NN' = PG$. Так как $AK' - M'B - N'C = 0$, $AK' + PG = AK' + KK' = AK$, $PG - M'B = MM' - M'B = BM$ и $PG - N'C = NN' - N'C = CN$, имеем $3PG = AK' - M'B - N'C + 3PG = (AK' + PG) + (PG - M'B) + (PG - N'C) = AK + BM + CN$, что и требовалось доказать.

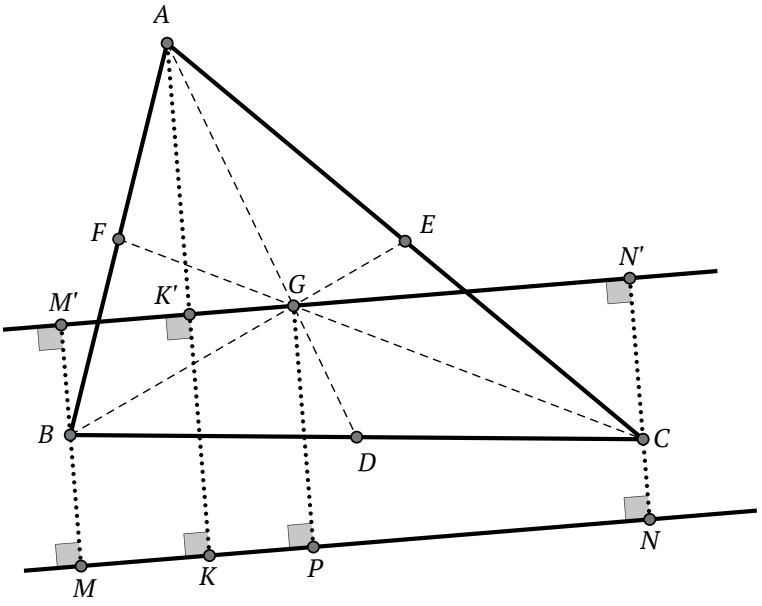


Рисунок Д-48

Пример 49. Особое свойство геометрического центра, когда две медианы перпендикулярны

Напомним, что точка пресечения медиан треугольника делит каждую из них на три равные части. На рис. Д-49 относительные длины двух частей медиан обозначены соответственно как $GE = x$, $GB = 2x$, $GD = y$ и $GA = 2y$. Применяя формулу теоремы Пифагора к треугольнику BGD, получаем $BD^2 = y^2 + (2x)^2 = y^2 + 4x^2$.

Поскольку D является серединой BC, мы имеем $BC^2 = (2BD)^2 = 4(y^2 + 4x^2) = 16x^2 + 4y^2$. Аналогично можно показать, что $AC^2 = 4x^2 + 16y^2$. Следовательно, $AC^2 + BC^2 = 20(x^2 + y^2)$. Теперь для прямоугольного треугольника BAG теорема Пифагора дает $AB^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 4(x^2 + y^2)$. Умножив на 5, получим $5AB^2 = 20(x^2 + y^2)$, и можно заключить, что $AC^2 + BC^2 = 5AB^2$.

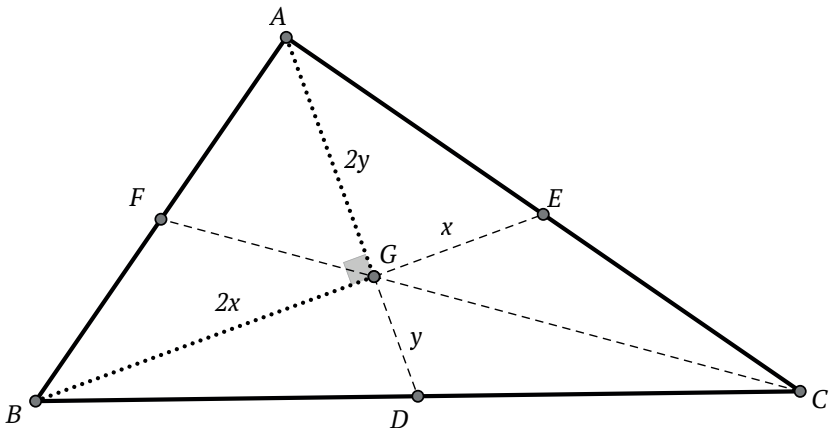


Рисунок Д-49

Пример 50. Удивительное свойство геометрического центра

Чтобы доказать, что сумма квадратов расстояний от точек P и N до каждой из вершин одинакова, мы сначала должны доказать следующее соотношение: если P — любая точка в плоскости $\triangle ABC$ с геометрическим центром G, то $AP^2 + BP^2 + CP^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3PG^2$.

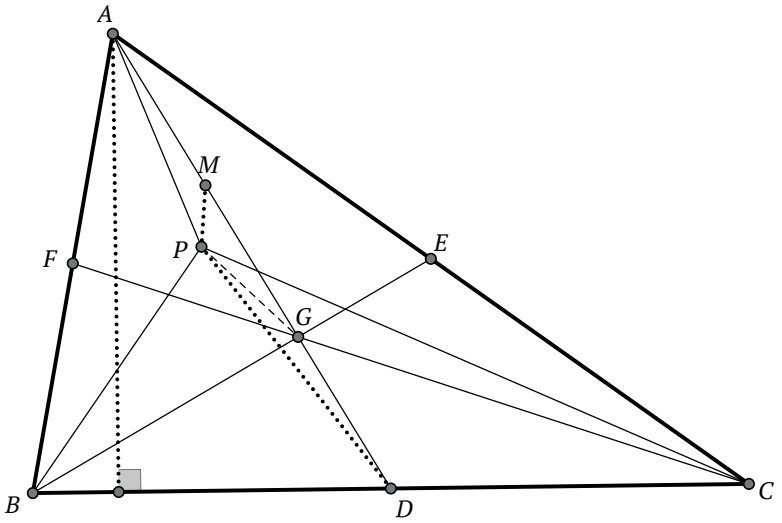


Рисунок Д-50(а)

Для доказательства этого соотношения начнем с того, что обозначим M середину AG, как показано на рис. Д-50(а). Сначала нам нужно установить следующую зависимость:

Удвоенный квадрат длины медианы треугольника равен сумме квадратов длин двух прилегающих сторон за вычетом половины квадрата длины третьей

стороны. Символически мы можем записать это для медианы AD как $2AD^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$. Это можно показать, применив теорему Стюарта к $\triangle ABC$ (см. раздел B8 части 3 «*Инструментарий*»). Применительно к вершине A эта теорема утверждает, что $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD = (BD + DC) \cdot (AD^2 + BD \cdot DC)$.

Пусть $x = DC = BD$. Тогда

$$xAB^2 + xAC^2 = 2x(AD^2 + x^2),$$

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + x^2),$$

$$2AD^2 = AB^2 + AC^2 - 2x^2.$$

Учитывая, что $x = \frac{1}{2}BC$, получаем желательный результат $2AD^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$.

Теперь применим это отношение к различным треугольникам.

$$\text{Применительно к } \triangle PBC \text{ имеем: } 2PD^2 = PB^2 + PC^2 - \frac{1}{2}BC^2. \quad \text{(I)}$$

$$\text{Применительно к } \triangle PAG \text{ имеем: } 2PM^2 = PA^2 + PG^2 - \frac{1}{2}AG^2. \quad \text{(II)}$$

$$\text{Применительно к } \triangle PMD \text{ имеем: } 2PG^2 = PM^2 + PD^2 - \frac{1}{2}MD^2. \quad \text{(III)}$$

Учитывая, что $GD = \frac{1}{3}AD$ и $AG = \frac{2}{3}AD$, следовательно, $AM = MG = GD$; откуда $MD = AG$. Подставляя это в уравнение (III) и умножая на 2, получаем:

$$4PG^2 = 2PM^2 + 2PD^2 - AG^2. \quad \text{(IV)}$$

В результате сложения (I), (II) и (IV) получим:

$$2PD^2 + 2PM^2 + 4PG^2 = BP^2 + AP^2 + 2PM^2 + CP^2 + PG^2 + 2PD^2 - \frac{1}{2}BC^2 - \frac{1}{2}AG^2 - (AG)^2 \text{ или} \quad \text{(V)}$$

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 - 3PG^2 = \frac{3}{2}AG^2 + \frac{1}{2}BC^2.$$

Аналогичное рассуждение можно привести и для медианы BE, что даст:

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 - 3PG^2 = \frac{3}{2}BG^2 + \frac{1}{2}AC^2. \quad \text{(VI)}$$

Для медианы CD получаем:

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 - 3PG^2 = \frac{3}{2}CG^2 + \frac{1}{2}AB^2. \quad \text{(VII)}$$

Складываем (V), (VI) и (VII):

$$3(AP^2 + BP^2 + CP^2 - 3PG^2) = \frac{3}{2}(AG^2 + BG^2 + CG^2) + \frac{1}{2}(BC^2 + AC^2 + AB^2). \quad \text{(VIII)}$$

Теперь мы применим к $\triangle ABC$ соотношение, согласно которому сумма квадратов длин отрезков, соединяющих геометрический центр с вершинами, составляет одну треть суммы квадратов длин сторон. Мы можем записать это как $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(BC^2 + AC^2 + AB^2)$ или $3(AG^2 + BG^2 + CG^2) = BC^2 + AC^2 + AB^2$. Это следует из закона косинусов (см. раздел А6 части 3 «*Инструментарий*») для треугольников *ABD* и *ACD*. В треугольнике *ABD* имеем $AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cdot \cos \angle ADB$, и в треугольнике *ACD* имеем $AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2CD \cdot AD \cdot \cos(180° - \angle ADB)$.

Так как $CD = BD = \frac{1}{2}BC$ и $AD = \frac{3}{2}GA$, сложение этих двух соотношений даст $AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + \frac{9}{2}GA^2$.

Подобные рассуждения для двух других медиан дают нам $BC^2 + AC^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{9}{2}GC^2$ и $AB^2 + BC^2 = \frac{1}{2}AC^2 + \frac{9}{2}GB^2$. Складывая эти три равенства, получаем $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) + \frac{9}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$, и после упрощения $3(AG^2 + BG^2 + CG^2) = BC^2 + AC^2 + AB^2$.

Теперь мы подставим это в уравнение (VIII), чтобы получить желаемый результат:

$$3(AP^2 + BP^2 + CP^2 - 3PG^2) = \frac{3}{2}(AG^2 + BG^2 + CG^2) + \frac{1}{2} \times 3(AG^2 + BG^2 + CG^2),$$

или $AP^2 + BP^2 + CP^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3PG^2$.

Все, что теперь остается, — это отметить, что для рис. Д-50(б) мы имеем оба равенства $AP^2 + BP^2 + CP^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3PG^2$ и $AN^2 + BN^2 + CN^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3NG^2$. Поскольку $PG = NG$, это позволяет вывести желаемое равенство: $AP^2 + BP^2 + CP^2 = AN^2 + BN^2 + CN^2$.

Пример 51. Некоторые сюрпризы медианы

Если провести параллельные прямые *AJ* и *BJ*, как показано на рис. Д-51, четырехугольник *AJBE* окажется параллелограммом. Поскольку диагонали параллелограмма делят друг друга пополам в точке пересечения, диагональ *JE* должна содержать середину *F* другой диагонали *AB*. Это доказывает, что точки *J*, *E* и *F* лежат на одной прямой. Так как *EF* соединяет середины двух сторон треугольника *ABC*, она должна быть параллельна третьей стороне *BC* и составлять половину ее длины. Таким образом, мы имеем $JE = BC$, и *JBCE* также является параллелограммом, поскольку его противоположные стороны равны и параллельны. Из параллельности *JE* и *BC* вытекает, что $\angle NJF = \angle CJE = \angle JCB = \angle NCD$, а из $JF = CD$ и $JN = CN$ мы получаем $\triangle JNF$, равный $\triangle CND$, что дает $DN = FN$.

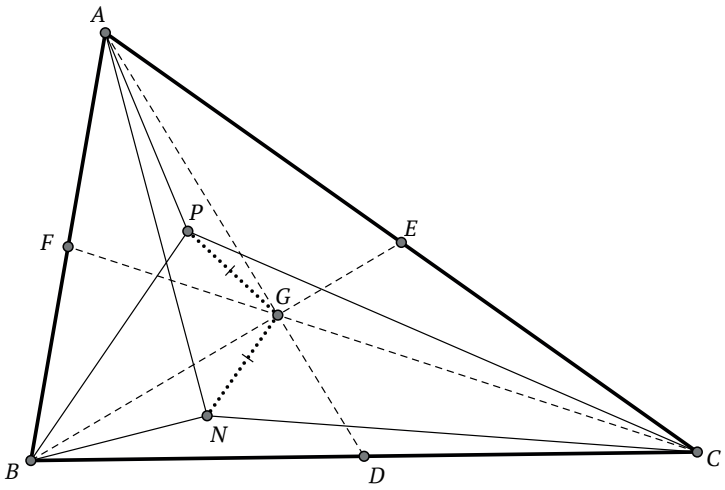


Рисунок Д-50(б)

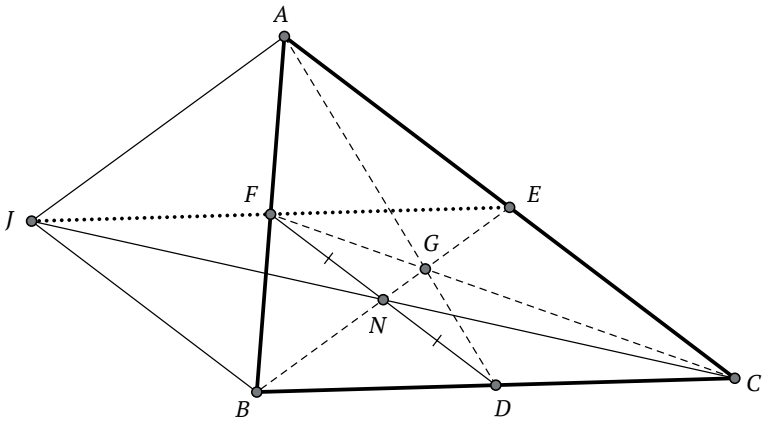


Рисунок Д-51

Пример 52. Другие чудеса с медианами

Поскольку H является общей серединой AC и BD, мы можем видеть на рис. Д-52, что здесь получился параллелограмм с равными треугольниками ABC и ACD, что доказывается равенством их периметров. Следует также отметить, что в треугольнике AFB точка J является серединой стороны AF, а точка E — серединой FB. Следовательно, $EJ = \frac{1}{2}AB$. То же рассуждение справедливо для $\triangle AED$, где $FK = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$. Мы уже знаем, что $AH = \frac{1}{2}AC$. Следовательно, можно заключить, что $AB + BC + CA = AD + DC + CA = 2(AH + EJ + FK)$.

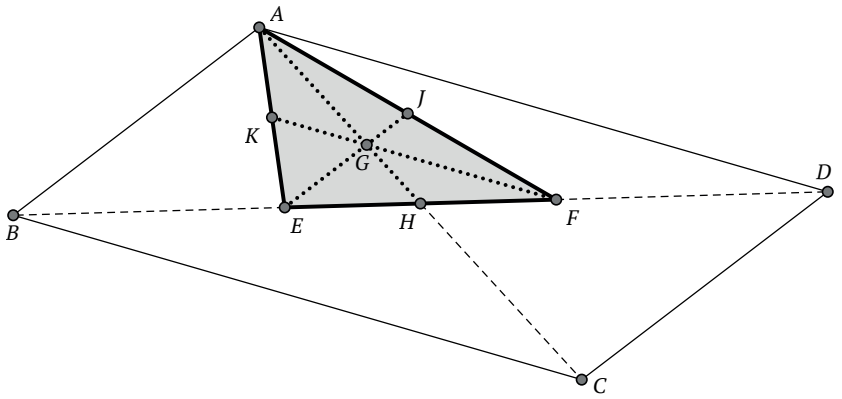


Рисунок Д-52

Пример 53. Сравнение медиан с периметром треугольника

Чтобы показать, что периметр треугольника *FCJ* равен сумме медиан треугольника *ABC*, сразу же отметим на рис. Д-53, что *CF* является одной из сторон треугольника *FCJ*, а также одной из медиан треугольника *ABC*. В треугольнике *ABC* отрезок *DE* соединяет середины двух сторон треугольника, т. е. параллелен третьей стороне *AB*, а также равен половине ее длины, так что *ED* = *BF*. Отрезок *JE* = *ED* по построению. Таким образом, *BF* = *JE*, и мы можем заключить, что *BFEJ* является параллелограммом; следовательно, *JF* = *BE*. Аналогично можно показать, что *ADCJ* является параллелограммом, поскольку диагонали *JED* и *AC* в точке пересечения делят друг друга пополам; следовательно, *JC* = *AD*. Это завершает доказательство того, что периметр треугольника *FCJ* равен сумме медиан треугольника *ABC*.

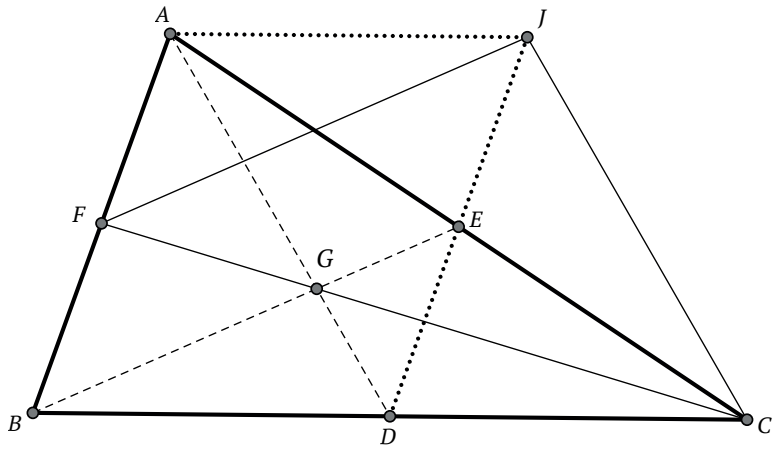


Рисунок Д-53

Пример 54. Продление медиан создает коллинеарные точки

Если $AF = BF$, $QF = CF$ и $\angle AFQ = \angle BFC$, мы можем легко доказать равенство $\triangle QFA$ и $\triangle CFB$, показанных на рис. Д-54. Следовательно, $\angle QAF = \angle CBF$, что устанавливает параллельность $QA \parallel BC$. Аналогичным образом мы можем доказать, что треугольники PAE и BCE равны, откуда вытекает, что $AP \parallel BC$. Поскольку и QA, и PA параллельны BC, они должны составлять одну прямую; следовательно, точки Q, A и P лежат на одной прямой.

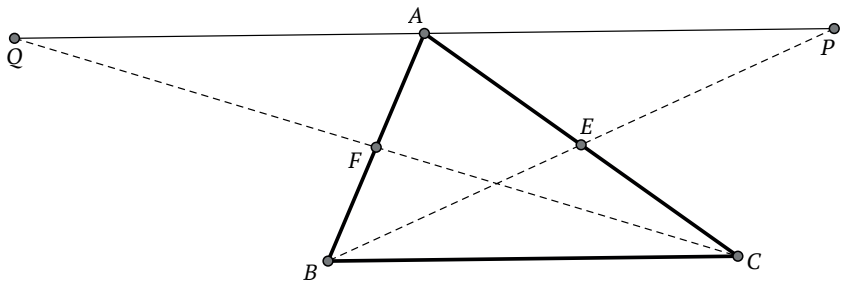


Рисунок Д-54

Пример 55. Два треугольника имеют общий геометрический центр

Пусть точка G является геометрическим центром треугольника QRS, как показано на рис. Д-55, и начнем с того, что в треугольнике ABC справедлива следующая пропорция: $\frac{AS}{SB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RA}$. Далее мы находим точку P на BC такую, что $PC = BQ$. Следовательно, $\frac{CP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RA}$, откуда вытекает, что $RP \parallel AB$. Аналогично $\frac{CP}{RB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{AS}{SB}$, откуда $PS \parallel AC$. Это означает, что $ASPR$ представляет собой параллелограмм, в котором $AS = RP$, а также $AS \parallel RP$. Теперь рассмотрим треугольник RQP, где DK — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника; следовательно, DK = $\frac{1}{2}RP$ и $DK \parallel RP$. Тогда у нас также есть $DK \parallel AS$ и $DK = \frac{1}{2}AS$. Получается, что $\triangle GDK$ подобен $\triangle GAS$, откуда следует, что точка G пересечения SK и AD делит их в соотношении 2:1. Если точка G делит медиану AD треугольника ABC в таком соотношении, следовательно, она является геометрическим центром треугольника ABC.

Пример 56. Невероятное соотношение центров описанных окружностей и медианных треугольников

Это весьма примечательный результат, и его доказательство заслуживает высокой оценки, несмотря на то что оно довольно длинное. В последние годы

сам результат приобрел некоторую известность, а окружность с шестью центрами описанных окружностей даже была украшена именем человека, ответственного за ее популяризацию, — голландского математика Флориса Майкла (Флура) ван Ламуна (р. 1966), который предложил эту зависимость в 2000 году. В настоящее время ее обычно называют окружностью Ламуна.

Приступая к доказательству этой удивительной теоремы, мы разделим его на несколько частей. На подготовительном этапе сначала отметим, что три медианы треугольника всегда можно преобразовать таким образом, чтобы они сами стали сторонами треугольника. Это показано на рис. Д-56(а).

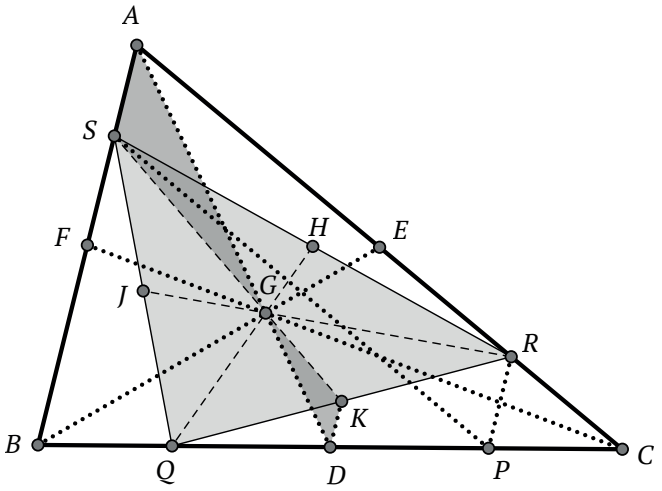


Рисунок Д-55

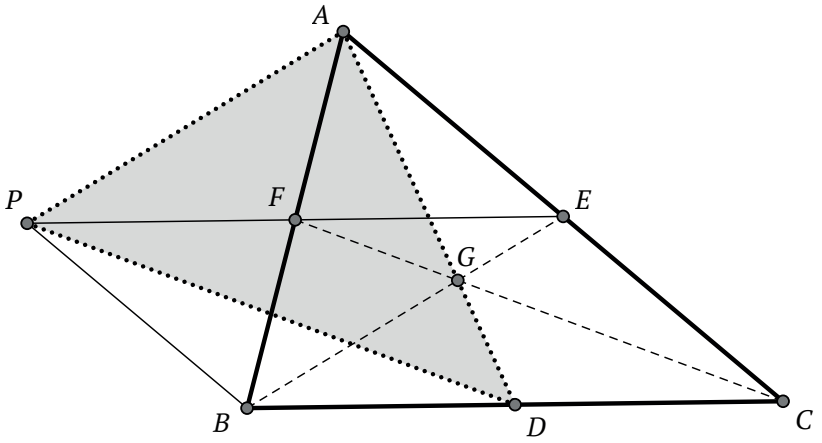


Рисунок Д-56(а)

Здесь *AD*, *BE* и *CF* — медианы треугольника *ABC*. Точка *P* создается преобразованием переноса *CF* в *DP*, или, другими словами, мы имеем $CF = DP$ и $CF \parallel DP$.

Это означает, что *CFPD* — параллелограмм, а *CD* = *FP*. Мы знаем, что и *EF*, и *FP* параллельны *CD*, и также знаем, что $CD = \frac{1}{2}CB = EF$; следовательно, *F* — середина *EP*. Поскольку *F* является общей серединой *AB* и *EP*, *APBE* представляет собой параллелограмм. Таким образом, мы имеем *PA* = *BE*, доказывая таким образом, что длина сторон треугольника *APD* равна длине медиан *ABC*.

Теперь мы готовы к первой основной части доказательства окружности Ламуна.

На рис. Д-56(б) мы видим построение окружностей с центрами O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 и O_6, описанных вокруг шести маленьких треугольников, определенных тремя медианами *AD*, *BE* и *CF* треугольника *ABC*, сходящимися в геометрическом центре *G*. Они делят треугольник *ABC* на эти маленькие треугольники: *AFG*, *BGF*, *BDG*, *CGD*, *CEG* и *AGE*.

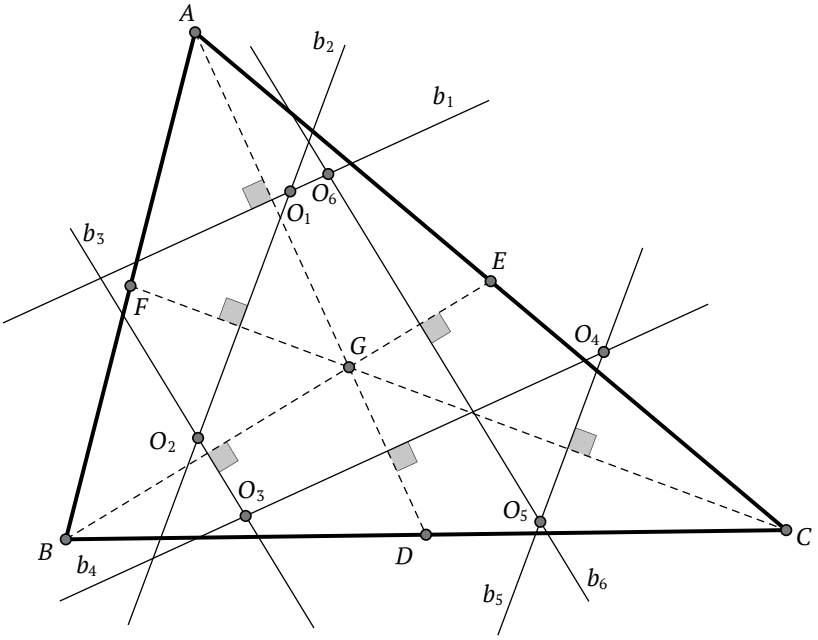


Рисунок Д-56(б)

Прямые b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 и b_6 делят пополам стороны *AG*, *FG*, *BG*, *DG*, *CG* и *EG* соответственно. Это означает, что точка пересечения O_1 для b_1 и b_2 является центром окружности треугольника *AFG*, точка пересечения O_2 для b_2 и b_3 является центром окружности треугольника *BGF*, точка пересечения O_3 для b_3 и b_4 является центром окружности треугольника *BDG*, точка пересечения O_4 для b_4 и b_5 является центром окружности треугольника *CGD*, точка пересечения O_5 для b_5 и b_6 является центром окружности треугольника *CEG*, а точка пересечения O_6 для b_6 и b_1 является центром окружности треугольника *AGE*. Шесть точек O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 и O_6 являются вершинами шестиугольника (в данном случае невыпуклого), противоположные стороны которого попарно параллельны друг другу.

Теперь мы покажем, что вершины этого шестиугольника с параллельными сторонами всегда являются вершинами равнобедренной трапеции. На рис. Д-56(в) мы видим, что точки O_1, O_2, O_4 и O_5 лежат на параллельных прямых b_2 и b_5. Затем нам нужно только показать, что выполняется равенство $O_1O_4 = O_2O_5$.

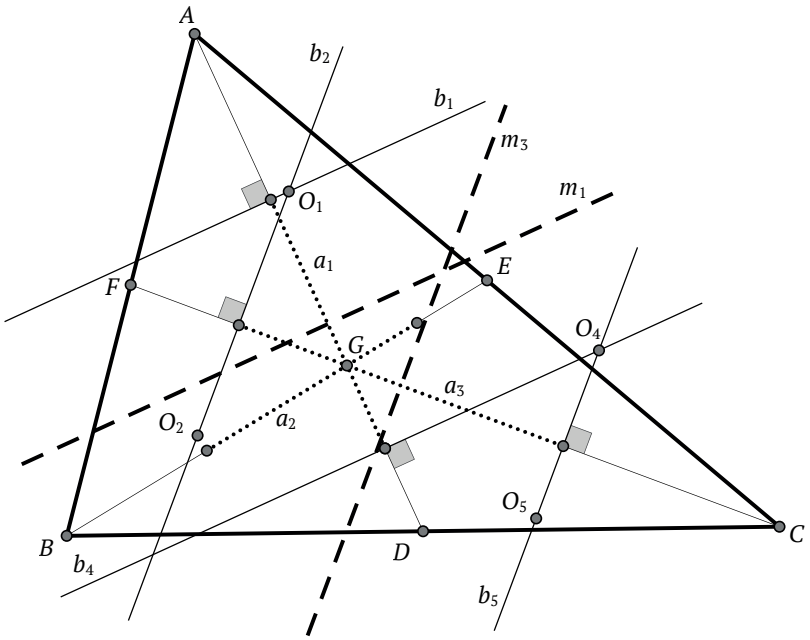


Рисунок Д-56(в)

Чтобы показать это, рассмотрим отрезки прямой a_1, a_2 и a_3, показанные на рис. Д-56(в). Отрезок a_3 соединяет середины отрезков *CG* и *GF* медианы *CF*. Таким образом, он перпендикулярен как b_2, так и b_5, и его длина равна половине длины *CF*, так как b_2 делит пополам отрезок *GF*, а b_5 — отрезок *CG*. Аналогично a_1 соединяет середины *AG* и *GD* и, следовательно, перпендикулярен b_1 и b_4 и имеет длину, вдвое меньшую, чем медиана *AD*. Кроме того, a_2 соединяет середины *BG* и *GE* и, таким образом, перпендикулярен b_3 и b_6, его длина вдвое меньше длины медианы *BE*.

Мы уже показали, что существуют треугольники, стороны которых равны длинам медиан *ABC* и параллельны этим медианам. Это означает, что также существуют треугольники, подобные этим, у которых стороны равны половине их длины, или, другими словами, стороны которых имеют длину a_1, a_2 и a_3. Кроме того, на рис. Д-56(в) мы добавили параллели m_1 и m_3 в середине между b_1 и b_4, а также b_2 и b_5 соответственно.

На рис. Д-56(г) мы перенесли a_3 параллельно m_3 таким образом, что один конец результирующего отрезка оказался в точке O_1, а a_1 параллельно m_1 таким образом, что один конец результирующего отрезка также находится в точке

O_1. Полученный треугольник имеет стороны длиной a_1, a_2 и a_3. Поскольку m_3 делит пополам a_3 (и, следовательно, так же делит ее параллель, проходящую через O_1), а m_1 делит пополам a_1 (и ее параллель, проходящую через O_1), центром описанной окружности является точка пересечения X отрезков m_3 и m_1. Кроме того, мы также создали еще один равный треугольник. Мы переносим a_3 параллельно m_3 таким образом, чтобы один конец результирующего отрезка лежал в точке O_4, а a_1 параллельно m_1 таким образом, чтобы один конец результирующего отрезка также лежал в точке O_4. У получившегося треугольника также стороны длиной a_1, a_2 и a_3, а центр его описанной окружности — точка X пересечения m_3 и m_1.

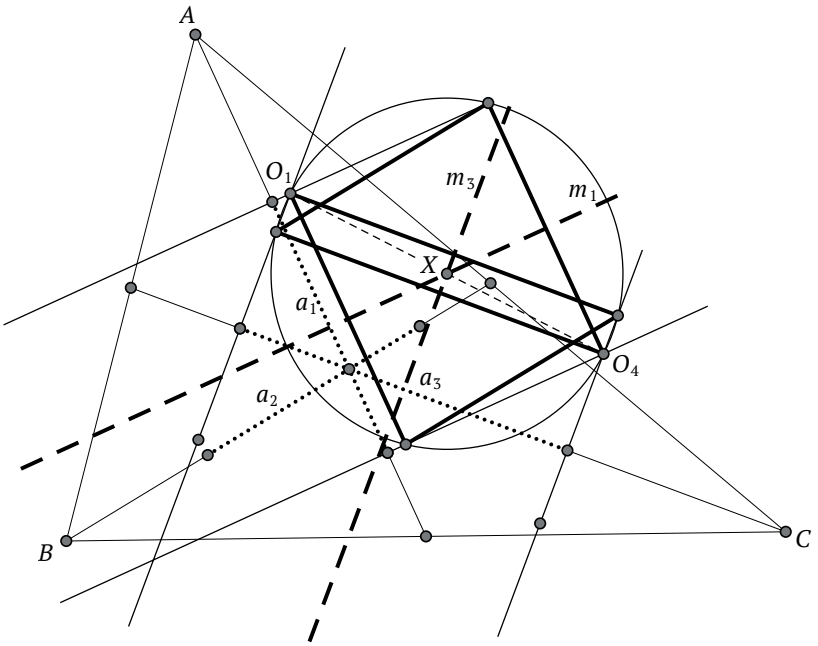


Рисунок Д-56(г)

Третьи стороны обоих этих треугольников имеют длину a_2, и поэтому они одинаковы.

Поскольку центры их описанных окружностей должны находиться в точке X, они имеют одну и ту же описанную окружность, радиус которой определяется длинами сторон треугольника a_1, a_2 и a_3. Поскольку основания этих треугольников параллельны и треугольники симметричны относительно точки X, мы видим, что O_1O_4 — это диаметр описанной окружности треугольника с указанными сторонами a_1, a_2 и a_3, который мы обозначим d. Точка X является серединой диаметра O_1O_4.

Так как можно воссоздать идентичную конструкцию с O_2 и O_5 вместо O_1 и O_4, получаем, что $O_1O_4 = O_2O_5 = d$, и, таким образом, $O_1O_2O_5O_4$ действительно является равнобедренной трапецией.

Кроме того, отметим, что такие же рассуждения могут быть проведены для четырехугольников $O_2O_3O_5O_6$ и $O_3O_4O_6O_1$. Тогда это также равнобедренные трапеции с $O_2O_5 = O_3O_6 = d$ и $O_3O_6 = O_1O_4 = d$.

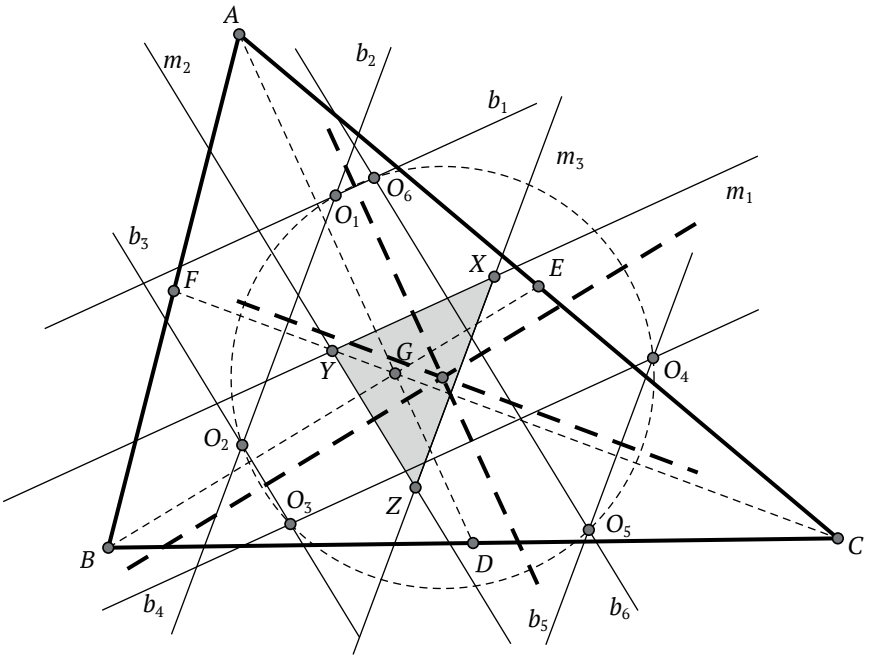


Рисунок Д-56(е)

Теперь мы готовы к заключительной части доказательства. На рис. Д-56(е) точка X пересечения m_1 и m_3, как и ранее, является серединой O_1O_4. Аналогично мы имеем точку пересечения Y для m_1 и m_2 (которая также является серединой O_3O_6) и точку пересечения Z для m_2 и m_3 (которая также является серединой O_2O_5).

Теперь мы можем показать, что центр окружности треугольника XYZ равноудален от всех 6 точек O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 и O_6. Мы только что показали, что X — середина O_1O_4, и можем аналогичным образом показать, что Z — середина O_2O_5. Поскольку четырехугольник $O_1O_2O_5O_4$ является равнобедренной трапецией, прямая, делящая пополам XZ, следовательно, также делит пополам параллельные стороны трапеции O_1O_2 и O_4O_5. Поскольку центр описанной окружности треугольника XYZ лежит на этой прямой, он равноудален от точек O_1 и O_2, а также от O_4 и O_5.

Это соображение справедливо и для двух других прямых, делящих пополам стороны треугольника XYZ. Поскольку четырехугольник $O_3O_4O_6O_1$ является равнобедренной трапецией, прямая, делящая пополам XY, также делит пополам параллельные стороны трапеции O_1O_6 и O_3O_4. Так как центр описанной окружности треугольника XYZ лежит на этой прямой, он равноудален от точек

O_1 и O_6, а также от O_3 и O_4. Наконец, поскольку четырехугольник $O_2O_3O_5O_6$ является равнобедренной трапецией, прямая, делящая пополам YZ, также делит пополам параллельные стороны трапеции O_2O_3 и O_5O_6. Так как центр описанной окружности треугольника XYZ лежит на этой прямой, он равноудален от точек O_2 и O_3, а также от O_5 и O_6.

Подводя итог, мы видим, что центр окружности треугольника XYZ равноудален от O_1 и O_2, от O_2 и O_3, от O_3 и O_4, от O_4 и O_5, от O_5 и O_6, а также от O_1 и O_6. Таким образом, это центр окружности, содержащей все шесть точек O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 и O_6, что мы изначально и намеревались доказать.

Пример 57. Поразительное равенство

На рис. Д-57 для параллельных прямых EB и FC противолежащие внутренние углы равны, так что $\angle BFC = \angle FBE$. В окружности с центром O мы также имеем $\angle CAM = \angle EBF$, поскольку они оба опираются на одну и ту же дугу ED. Это означает, что мы имеем $\angle DAC = \angle FBE = \angle BFC = \angle DFC$, а A, F, C и D лежат на одной окружности с точкой Q в качестве центра. Теперь, рассматривая секущую AM и касательную BC окружности с центром O, мы получаем $AM \cdot DM = BM^2$. Поскольку $BM = CM$, следовательно, мы также получаем $AM \cdot DM = CM^2$. Это означает, что MC (и, следовательно, GC) является касательной к окружности Q, содержащей точки A, F, C и D.

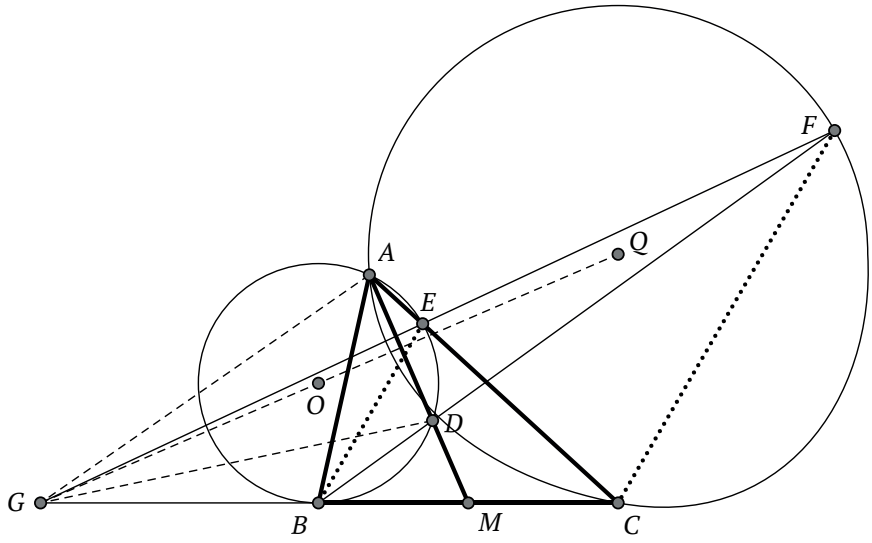


Рисунок Д-57

Теперь заметим, что гомотетия (см. раздел B12 части 3 «*Инструментарий*») с центром G, которая отображает B на C, также отображает E на F, так как BE и CF параллельны, а G, E и F лежат на общей прямой. Поскольку OB и QC оба перпендикулярны GC, это означает, что окружность с центром O также отобра-

жается на окружность с центром Q через эту гомотетию. Таким образом, у нас есть точка G на прямой OQ, и поскольку она делит пополам отрезок DA, оказывается, что $GA = AD$, что мы и намеревались доказать.

Пример 58. Неожиданное деление в треугольнике одновременно пополам и вчетверо

Как показано на рис. Д-58, будет полезно нарисовать середину X стороны AC, а затем повернуть треугольник вокруг точки X на 180°. В результате получается несколько параллелограммов, и их изучение даст представление, необходимое для доказательства этого замечательного примера.

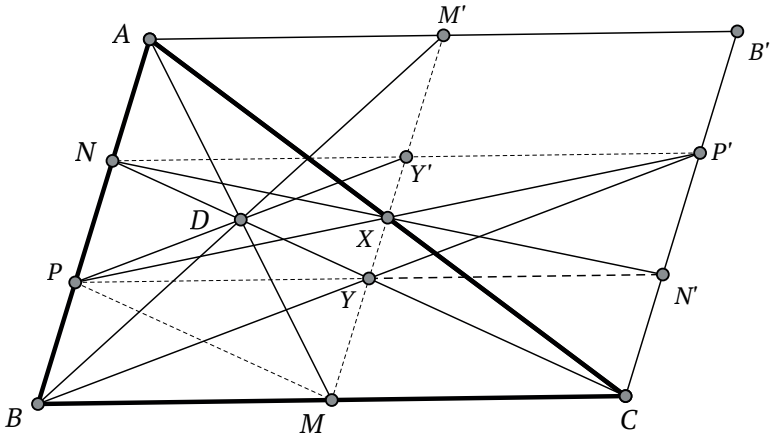


Рисунок Д-58

Сначала обозначим еще несколько точек. Пусть P обозначает середину BN, так что у нас есть $BP = PN = NA$ на стороне AB треугольника ABC. Вращение вокруг центра X преобразует точки B, M, N и P в точки B', M', N' и P' соответственно. Мы видим, что вращение отображает AB на параллельную прямую $B'C$, а BC — на параллельную прямую AB', откуда $ABCB'$ является параллелограммом. Поскольку M и X являются средними точками BC и AC соответственно, у нас также есть $AB \parallel MX$, и из этого следует, что $AB \parallel MX'$. Тогда другим параллелограммом на рисунке является $ABMM'$. Так как $BP = PN = NA$, мы также имеем $B'P' = P'N' = N'C$ и $AB' \parallel NP' \parallel PN' \parallel BC'$. Мы видим, что большой параллелограмм $ABCB'$ на самом деле разделен на шесть параллелограммов меньшего размера, $ANY'M'$, $M'Y'P'B'$, $NPYY'$, $Y'YN'P'$, $PBMY$ и $YMCN'$, где Y обозначает пересечение MM' и PN', а Y' — пересечение MM' и NP'. Длины сторон каждого из них равны $\frac{1}{3}AB$ и $\frac{1}{2}BC$. Теперь мы можем многое узнать, присмотревшись к этим параллелограммам.

Поскольку четыре параллелограмма $NPYY'$, $Y'YN'P'$, $PBMY$ и $YMCN'$ вместе образуют параллелограмм большего размера $NBCP'$, его диагонали NC и BP' делят друг друга пополам в точке пересечения. Следовательно, Y — это сере-

дина CN. Диагонали NY и PY' параллелограмма $NPYY'$ также делят друг друга пополам, как и диагонали другого составного параллелограмма $ABMM'$. Из-за симметрии фигуры точки пересечения диагоналей параллелограммов $ABMM'$ и $NPYY'$ идентичны. Это общая середина D диагонали AM параллелограмма $ABMM'$ и диагонали NY параллелограмма $NPYY'$. Таким образом, мы видим, что точка D является серединой AM, а $DC = 3ND$, как мы и намеревались доказать.

Пример 59. Удивительные соотношения площадей треугольников

На рис. Д-59 точка X обозначает пересечение AM и CD. У нас также есть *площадь* $\triangle DBM$ = *площадь* $\triangle DMC$ и *площадь* $\triangle ABM$ = *площадь* $\triangle AMC$, поскольку $BM = MC$. Из этого мы можем получить следующие эквивалентные уравнения:

$$\text{площадь } \triangle ADC - \text{площадь } \triangle ABD = 2 \cdot \text{площадь } \triangle ADM;$$

$$\text{площадь } \triangle ADC = 2 \cdot \text{площадь } \triangle ADM + \text{площадь } \triangle ABD;$$

$$\text{площадь } \triangle ADX + \text{площадь } \triangle AXC = 2 \cdot \text{площадь } \triangle ADX + 2 \cdot \text{площадь } \triangle DMX + \text{площадь } \triangle ABD;$$

$$\text{площадь } \triangle AXC = \text{площадь } \triangle ADX + 2 \cdot \text{площадь } \triangle DMX + \text{площадь } \triangle ABD;$$

$$\text{площадь } \triangle AMC - \text{площадь } \triangle XMC = \text{площадь } \triangle ADX + 2 \cdot \text{площадь } \triangle DMX + \text{площадь } \triangle ABD;$$

$$\text{площадь } \triangle ABM - \text{площадь } \triangle XMC = \text{площадь } \triangle ADX + 2 \cdot \text{площадь } \triangle DMX + \text{площадь } \triangle ABD;$$

$$\text{площадь } \triangle ABD + \text{площадь } \triangle ADX + \text{площадь } \triangle DMX + \text{площадь } \triangle DBM - \text{площадь } \triangle XMC = \text{площадь } \triangle ADX + 2 \cdot \text{площадь } \triangle DMX + \text{площадь } \triangle ABD;$$

$$\text{площадь } \triangle DBM = \text{площадь } \triangle DMX + \text{площадь } \triangle XMC;$$

$$\text{площадь } \triangle DBM = \text{площадь } \triangle DMC.$$

Из последней строки вытекает эквивалентное равенство *площадь* $\triangle ADC$ – *площадь* $\triangle ABD = 2 \cdot$ *площадь* $\triangle ADM$, что мы и намеревались доказать.

Пример 60. Особенность случайной точки в равностороннем треугольнике

Если провести прямую KJ параллельно BC, как показано на рис. Д-60, обнаружится, что она пересекает высоту AH в точке N; следовательно, $PD = NH$. Теперь, рассматривая равносторонний треугольник AKJ, мы проводим высоту JL, которая в точке Q пересекает прямую PM, параллельную AB. Поскольку в результате получился прямоугольник $FPQL$, мы имеем $PF = QL$. В равносто-

роннем треугольнике MPJ отмечаем, что PE — высота, равная высоте JQ. Это означает, что $PF + PE = QL + JQ = JL$. Наконец, в равностороннем треугольнике AKJ имеем $JL = AN$, и, таким образом, $PD + PE + PF = NH + AN = AH$.

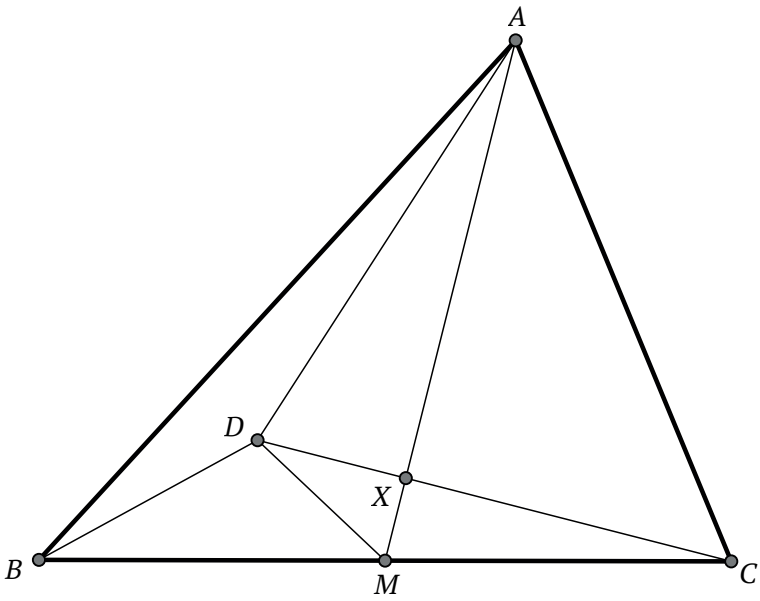


Рисунок Д-59

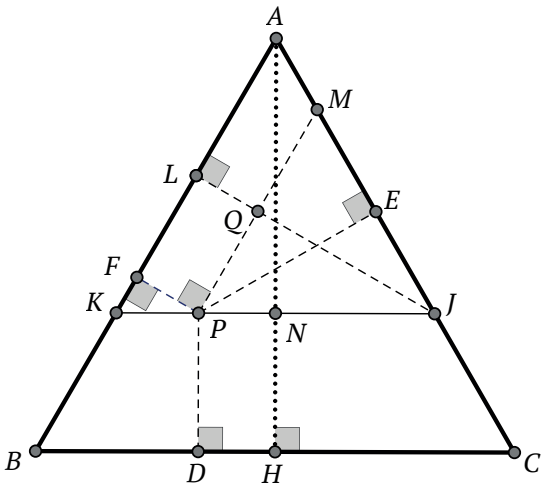


Рисунок Д-60

Пример 61. Особенность точки, находящейся за пределами равностороннего треугольника

Это можно доказать простым применением теоремы Птолемея (см. раздел B10 части 3 «*Инструментарий*»). Поскольку *APCB* является четырехугольником с описанной окружностью, как показано на рис. Д-61, мы имеем $AP \cdot BC + PC \cdot AB = AC \cdot PB$. Однако так как $AB = PC = AC$, мы можем заключить, что $AP + PC = PB$.

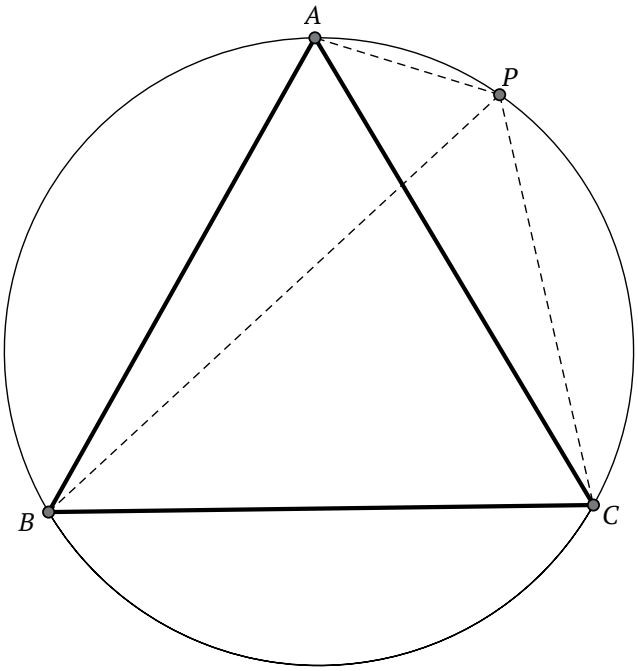


Рисунок Д-61

Пример 62. Использование равностороннего треугольника для разделения отрезка прямой на три части

Как показано на рис. Д-62, поскольку $DP \parallel AB$, мы имеем $\angle BPD = \angle PBA = \angle DBP$, и треугольник *DPB*, следовательно, является равнобедренным со сторонами $DP = DB$. Кроме того, $\angle EDP = \angle DBP + \angle BPD = 60°$. Таким же образом получается, что $\angle DEP = 60°$, после чего $\angle DPE = 60°$; следовательно, $BD = DP = DE$. Аналогично для треугольника *CPE* мы имеем $\angle EPC = \angle PCE$ и $EC = PE$. Поскольку $DE = PE$, то в результате получается, что $BD = DE = EC$.

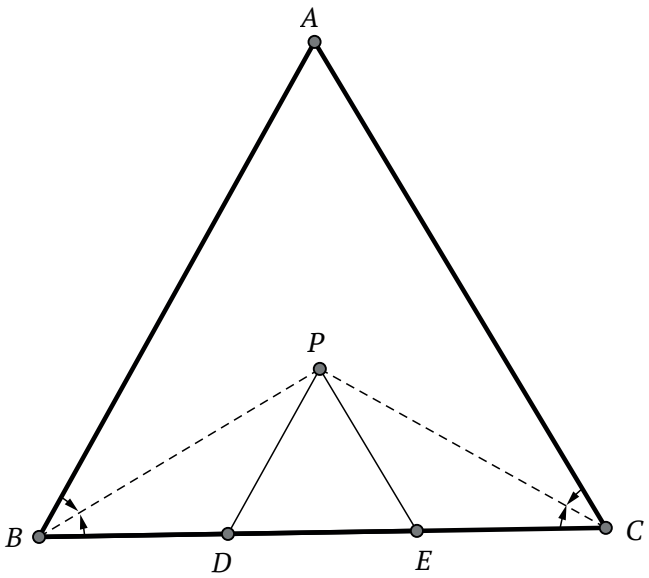


Рисунок Д-62

Пример 63. Еще один способ разделить отрезок прямой на три части с помощью равностороннего треугольника

Начнем с того, что $\angle QMF = 60° = \angle ACF$, а вертикальные углы $\angle MFQ = \angle CFA$, как показано на рис. Д-63. Таким образом, треугольники FMQ и FCA подобны. Поскольку $AC = 2MQ$, мы также имеем $CF = 2MF$. Иными словами, у нас есть $CF = \frac{2}{3}MC$. Из этого мы получаем $FC = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}BC = \frac{1}{3}BC$. Аналогично мы также получаем $BE = \frac{1}{3}BC$; следовательно, из этого должно следовать, что $EF = \frac{1}{3}BC$. Таким образом, мы показали, что $BE = EF = FC$.

Пример 64. Необычная конструкция в виде треугольника с углами 30°–60°–90° внутри равностороннего треугольника

Чтобы доказать эту довольно необычную взаимосвязь, мы будем использовать альтернативный метод, который обладает преимуществами и демонстрирует еще один подход к геометрическим задачам. Мы будем использовать координатную геометрию, которая во многом является результатом работ знаменитого французского математика Рене Декарта (1596–1650). Для начала расположим треугольники в системе координат. Как видно на рис. Д-64, начало координат выбирается в вершине B, и ось x откладывается в сторону вершины C. Обозначив $AB = BC = CA = a$ и $DB = BE = ED = b$, получаем координаты $A\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $B(0, 0)$, $C(a, 0)$ и $E(b, 0)$. Поскольку O является центром треугольника

DBE, у нас также есть его координаты $O\left(\frac{b}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{6}\right)$, и так как M — середина AE, имеем координаты $M\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$. Теперь несложно вычислить длины сторон $\triangle CMO$.

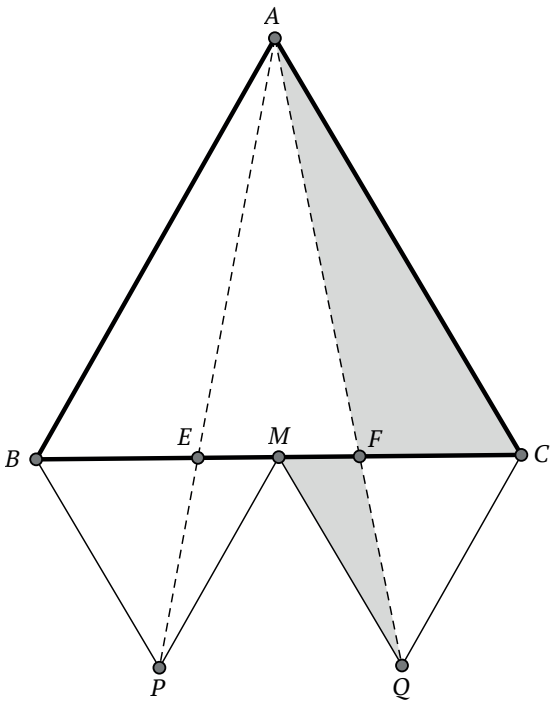


Рисунок Д-63

Получаем:

$$OM = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{b\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{3a^2}{16} - \frac{ab}{4} + \frac{b^2}{12}} = \frac{1}{6}\sqrt{9a^2 - 9ab + 3b^2},$$

$$OC = \sqrt{\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{a^2 - ab + \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{12}} = \frac{1}{3}\sqrt{9a^2 - 9ab + 3b^2} = 2 \cdot MF$$

и

$$MC = \sqrt{\left(\frac{3a}{4} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{16} - \frac{3ab}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{3a^2}{16}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 - 3ab + b^2} = \sqrt{3} \cdot MF.$$

Поскольку отсюда следует $OM:OC:MC = 1:2:3$, мы можем заключить, что $\triangle CMO$ представляет собой треугольник 30°–60°–90°.

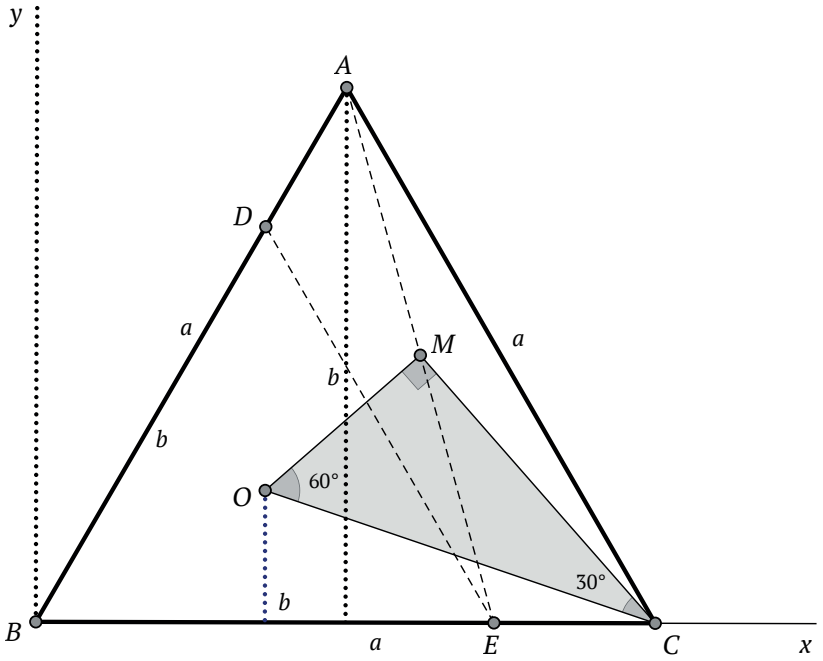


Рисунок Д-64

Пример 65. Необычное соотношение отрезков в равностороннем треугольнике

Начнем с того, что проведем линии ED и FD, как показано на рис. Д-65, и заметим, что $\triangle BDE$ подобен $\triangle CFD$. Мы знаем, что $\angle DBE = \angle FCD = 60°$. Теперь необходимо показать, что $\angle BED = \angle CDF$. Поскольку EF делит пополам отрезок AD, мы имеем $AE = DE$ и $AF = DF$. Следовательно, треугольники AEF и DEF равны, откуда $\angle FDE = \angle EAF = 60°$. Следовательно, $\angle CDF = 180° - \angle FDE - \angle EDB = 180° - 60° - \angle EDB = 180° - \angle DBE - \angle EDB = \angle BED$, и получаем, что $\triangle BDE$ подобен $\triangle CFD$. Это подразумевает, что $\frac{DB}{BE} = \frac{FC}{DC}$, что приводит к искомому результату: $BE \cdot FC = DB \cdot DC$.

Пример 66. Удивительная взаимосвязь между равнобедренным и равносторонним треугольниками

Поскольку ABC — равносторонний треугольник с $AB = BC = CA$, мы имеем $\angle BAC = 60°$. На рис. Д-66 добавляем окружность с центром A через точки B и C. Нам дано, что $\angle BAC = 2\angle BDC$, следовательно, точка D должна быть точкой на

этой окружности, поскольку угол, опирающийся на хорду *BC*, равен половине центрального угла. Это означает, что *AD* = *AB*, а поскольку *AB* = *BC*, мы также имеем *AD* = *BC*, что и намеревались доказать.

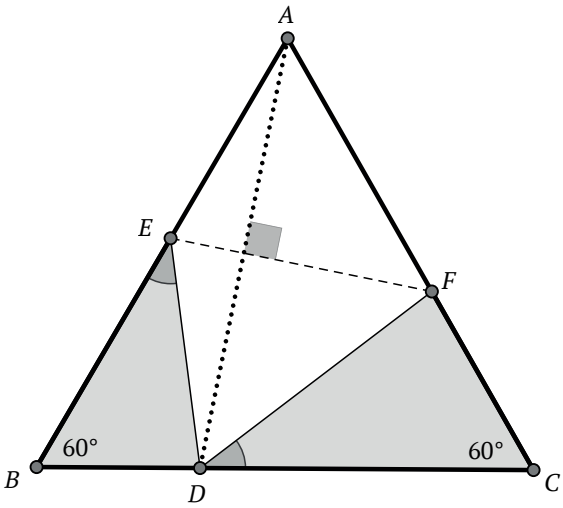


Рисунок Д-65

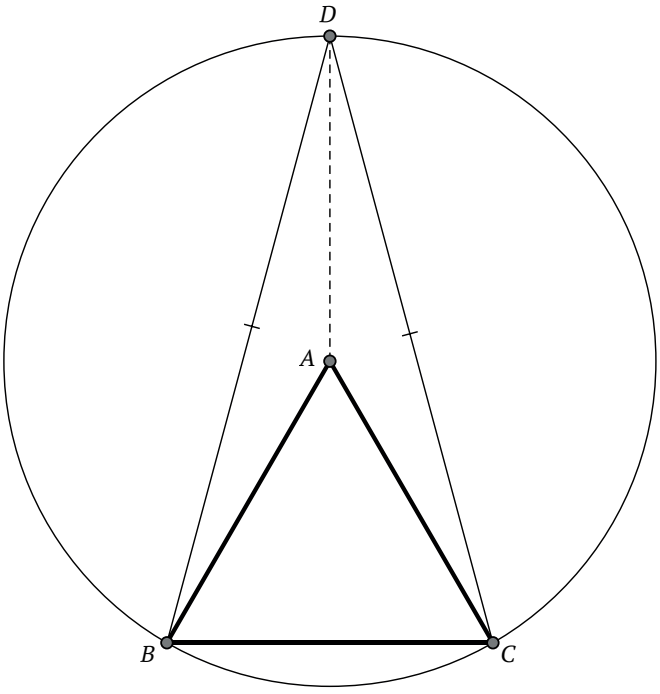


Рисунок Д-66

Пример 67. Неожиданное равенство в равнобедренном треугольнике

На рис. Д-67 добавлена высота треугольника ABC с пересечением стороны BC в точке X. Кроме того, Y — это точка на AX, для которой $\angle DYA = 90°$, а Z — точка на AX, для которой $\angle EZA = 90°$. Теперь мы покажем, что $AE = DB$, доказав, что треугольники DBM и AZE равны.

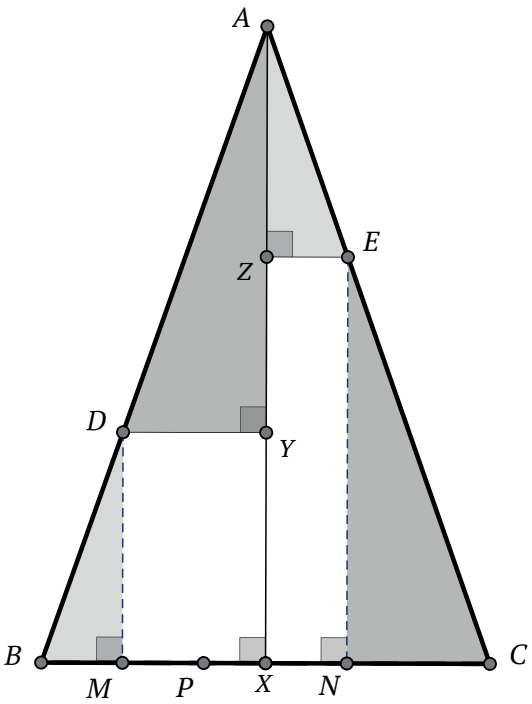


Рисунок Д-67

Сначала отметим, что $\angle DMB = \angle EZA = 90°$. Так как AX — высота равнобедренного треугольника ABC, то есть $\angle ZAE = \angle XAC = \angle BAX$, следовательно, $AX \parallel DM$, и мы также имеем $\angle ZAE = \angle BAX = \angle BDM$. Наконец, поскольку $BM = \frac{1}{2}BP$, $NC = \frac{1}{2}PC$ и $BP + PC = BC$, мы имеем $BM + NC = \frac{1}{2}BC$. Так как $ZE + NC = XN + NC = XC = \frac{1}{2}BC$, в равнобедренном треугольнике ABC имеем $BM + NC = ZE + NC$; следовательно, $BM = ZE$. Мы видим, что треугольники DBM и AZE равны, что означает $AE = DB$.

Теперь мы можем показать $EC = AD$, либо используя аналогичные соображения для доказательства того, что равны треугольники ADY и ENC, либо заметив, что для равнобедренного треугольника ABC мы имеем $AB = AC$, что дает $EC = AC - AE = AB - DB = AD$.

Пример 68. Еще одно неожиданное равенство в равнобедренном треугольнике

На рис. Д-68 мы начинаем с того, что проводим перпендикуляр из точки A к прямой PQ, пересекающей PQ в точке S. Затем мы можем заключить, что $AMQS$ представляет собой прямоугольник, поскольку он имеет прямые углы $\angle QMA$, $\angle SQM$ и $\angle ASQ$. Это означает, что $AM = SQ$. Теперь заметим, что треугольники RSA и PAS равны. У этих треугольников общая сторона AS, а также $\angle PSA = \angle ASR = 90°$. Кроме того, поскольку $AM \parallel PQ$ и высота AM — биссектриса угла $\angle BAC$, имеем $\angle SRA = \angle MAR = \angle BAM = \angle BPS$ и получаем: $\triangle RSA$ равен $\triangle PAS$; таким образом, $PS = SR$. Из этого окончательно получаем $PQ + RQ = SQ + PS + SQ - SR = 2SQ + (PS - SR) = 2AM$.

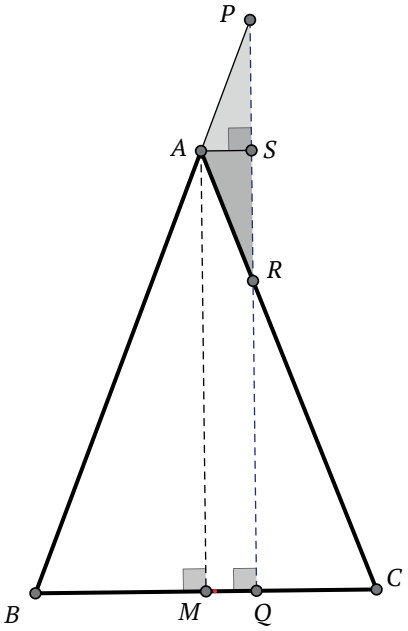


Рисунок Д-68

Пример 69. Замечательное геометрическое равенство

Как показано на рис. Д-69, мы сначала определяем точку G на отрезке BC (продолженном, если необходимо), таким образом, что $FB = FG$. Поскольку F является общей серединой DE и BG, четырехугольник $BEGD$ представляет собой параллелограмм с $BD = EG$ и $\angle CBA = \angle GBA = \angle BGE = \angle CGE$. Рассмотрим треугольник EGC, где вертикальные углы в точке C дают $\angle ECG = \angle ACB$. Так как треугольник ABC равнобедренный, $\angle ECG = \angle ACB = \angle CBA = \angle CGE$. Следовательно, треугольник EGC также является равнобедренным с $EG = CE$. Таким образом, мы имеем $BD = EG = CE$, что и требовалось доказать.

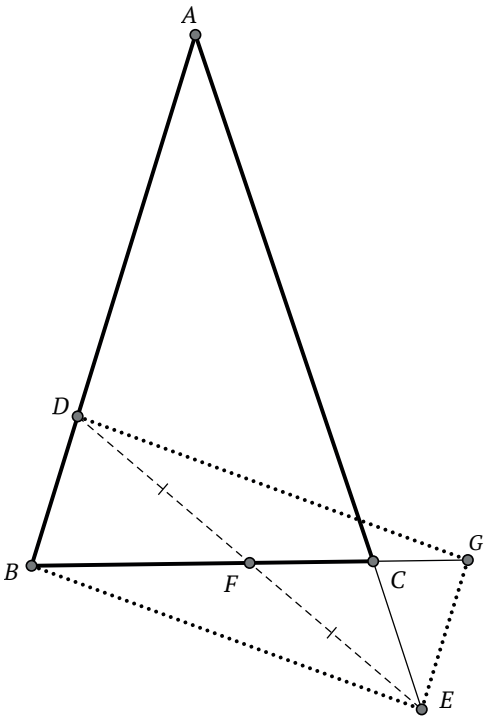


Рисунок Д-69

Пример 70. Еще одно замечательное геометрическое равенство

Чтобы установить, что $PE = BE$, покажем, что треугольник EBP является равнобедренным прямоугольным треугольником. Мы уже знаем, что $\angle BEC = \angle BEP = 90°$, так как CE есть высота, опущенная на основание AB. Поскольку $\angle ACE = 45°$ в прямоугольном треугольнике ECA, как показано на рис. Д-70, этот треугольник, таким образом, является равнобедренным и прямоугольным. Так как высота AD является перпендикуляром, делящим пополам основание BC, то любая точка на этой прямой равноудалена от конечных точек отрезка BC, и имеем $PB = PC$. Поскольку треугольник BPC равнобедренный, имеем $\angle PBD = \angle PCD$. Если вычесть эти равные углы из углов $\angle ABC = \angle ACB$ при основании равнобедренного треугольника ABC, получим $\angle ABP = \angle ACP = 45°$; следовательно, $\angle EPB = 45°$. Таким образом, у нас есть равнобедренный прямоугольный треугольник BEP, из чего можно заключить, что $PE = BE$, что и намеревались доказать.

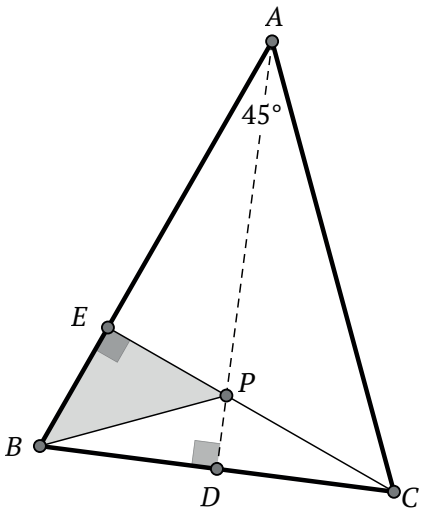


Рисунок Д-70

Пример 71. Неожиданная перпендикулярность

Начинаем с того, что рисуем высоты AM и BN треугольника ABC, как показано на рис. Д-71. Затем располагаем MD параллельно BN так, что точка D является серединой NC. Тогда $\angle CBN + \angle C = 90°$ и $\angle MAD + \angle C = 90°$. Следовательно, $\angle CBN = \angle MAD$ и $\triangle NBC$ подобен $\triangle MDA$. Так как BD и AF являются соответственными медианами этих двух подобных треугольников, также имеем $\triangle NBD$, подобный $\triangle FDA$. Таким образом, $\angle DFA = \angle NDB$, и следовательно, $\angle DEA = \angle DFA + \angle BDM = \angle NDB + \angle BDM = \angle NDM = 90°$.

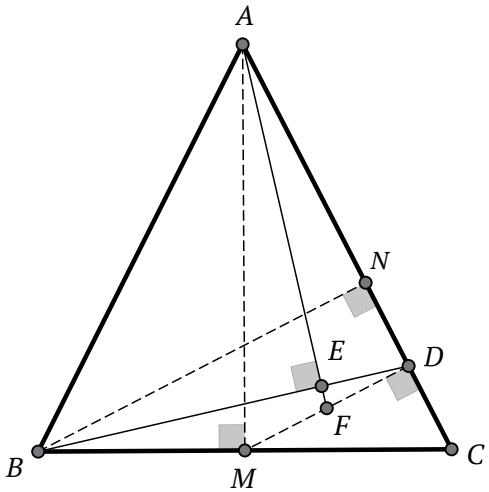


Рисунок Д-71

Пример 72. Неожиданное свойство высоты равнобедренного треугольника

В соответствии с рис. Д-72 в равнобедренном треугольнике ABC имеем $\angle ACB = \angle CBA$. Однако $\angle CBA = \angle DBA + \angle CBD$ и $\angle DBA = 90° - \angle BAD$. Кроме того, $\angle ACB = 90° - \angle CBD$. Таким образом, из соотношения $\angle ACB = \angle DBA + \angle CBD$ получаем $90° - \angle CBD = (90° - \angle BAD) + \angle CBD$. Следовательно, $90° - \angle CBD = \angle DBA + \angle CBD$, или $90° - \angle DBA = 2\angle CBD$, что приводит к $\angle BAD = 2\angle CBD$.

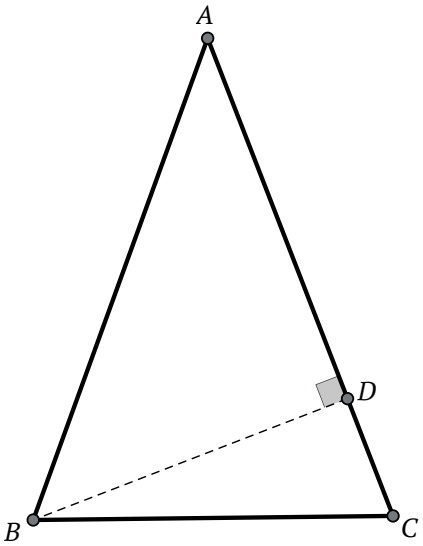


Рисунок Д-72

Пример 73. Особое свойство равнобедренных треугольников

Чтобы показать, что $PD + PE = QF + QG$, мы сначала построим BH перпендикулярно AC в точке H, как показано на рис. Д-73. Мы покажем, что $PD + PE = QF + QG = BH$. Выбирая точку P где-нибудь на BC, мы строим JP перпендикулярно BH в точке J. Поскольку треугольник ABC равнобедренный, мы имеем $\angle QBF = \angle CBA = \angle ACB = \angle JPB$. Это означает, что равны прямоугольные треугольники BPD и BPJ с общей гипотенузой BP, и, следовательно, мы имеем $PD = BJ$. Отметим также, что четырехугольник $JPEH$ есть прямоугольник; следовательно, $PE = JH$. Таким образом, мы имеем $PD + PE = BJ + JH = BH$. Поскольку это равенство не зависит от выбора положения точки P на BC, мы также можем выбрать точку Q на BC и точку K на BH так, что $QK \perp BH$, и показать $QF + QG = BH$ совершенно аналогичным образом. Следовательно, $PD + PE = QF + QG$ для любых двух случайно выбранных точек P и Q на основании BC равнобедренного треугольника ABC.

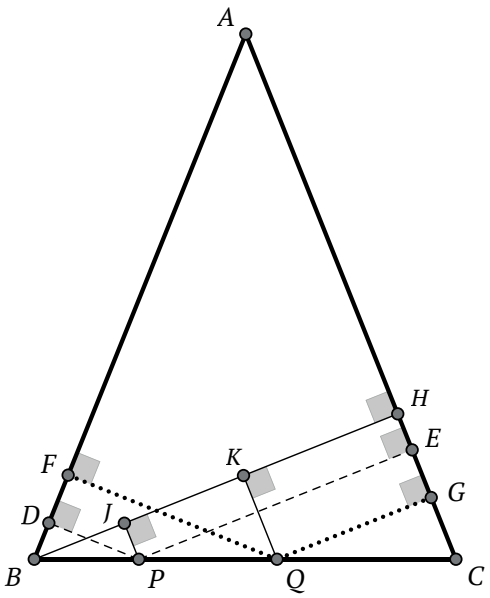


Рисунок Д-73

Пример 74. Странная связь: центр вписанной окружности находится на описанной окружности

На рис. Д-74 предполагается, что I — точка, в которой описанная окружность треугольника DBC пересекает высоту треугольника ABC, опущенную из точки A. Мы хотим показать, что эта точка является центром вписанной окружности треугольника ADC. Чтобы продемонстрировать это, добавим отрезки IB, IC и ID. Поскольку два угла, опирающихся на одну и ту же дугу BC, равны, мы имеем $\angle BIC = \angle BDC = 180° - \angle CDA$. Поскольку точка I находится на высоте равнобедренного треугольника ABC, треугольник IBC также равнобедренный, и мы имеем $\angle CBA = \frac{1}{2}(180° - \angle BIC) = \frac{1}{2}\angle CDA$. Теперь, поскольку точки B, C, I и D лежат на одной окружности, мы имеем $\angle CDI = \angle CBI = \frac{1}{2}\angle CDA$, а точка I лежит на биссектрисе угла $\angle CAD$. Поскольку точка I также находится на высоте равнобедренного треугольника ABC, опущенной из точки A, которая также является биссектрисой угла $\angle DAC$, точка I является пересечением двух биссектрис треугольника ADC и, следовательно, центром вписанной окружности этого треугольника.

Пример 75. Коллинеарные точки образуют биссектрису угла

Мы сразу же замечаем, что четырехугольник $AFPE$ на рис. Д-75 имеет описанную окружность, поскольку одна пара противолежащих углов являются прямыми. Следовательно, поскольку вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой, имеем $\angle PAE = \angle PFE$ и аналогично $\angle FAP =$

$\angle FEP$. Если мы сможем показать, что $\angle PFE = \angle FEP$, то равны $\angle FAP = \angle PAE$ и AP, следовательно, делит пополам $\angle BAC$. Прямая RQS проведена параллельно BC и, следовательно, делится пополам медианой AM. Поскольку $QD \perp RS$, треугольник RPS является равнобедренным со сторонами $PR = PS$ и углами $\angle PRS = \angle RSP$. Отмечая, что четырехугольники $PQRF$ и $PSEQ$ также имеют описанную окружность с парами противолежащих прямых углов, имеем $\angle PRS = \angle PFE$ и $\angle RSP = \angle FEP$. Это означает, что $\angle FAP = \angle PAE$; следовательно, AP делит $\angle BAC$ пополам.

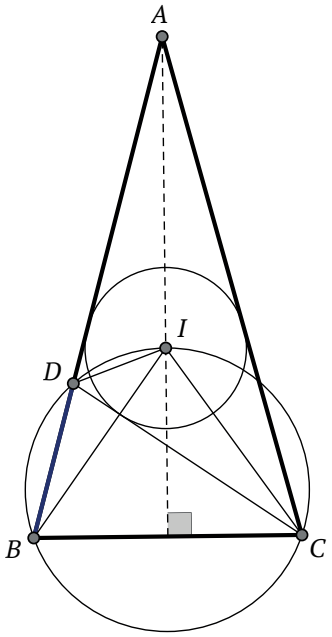


Рисунок Д-74

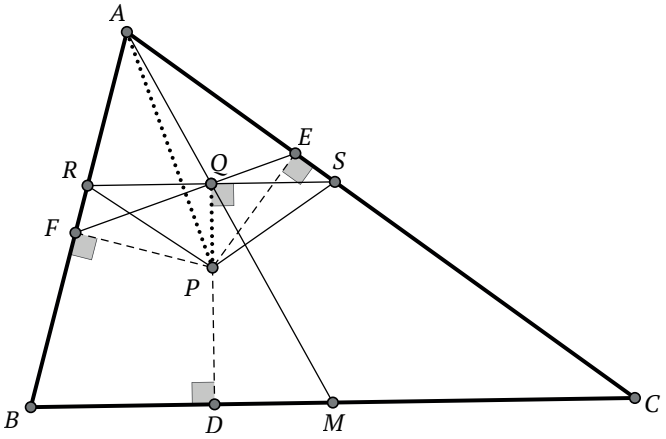


Рисунок Д-75

Пример 76. Неожиданные подобные треугольники

Сначала отметим, что два треугольника ABM и ACM на рис. Д-76 имеют общий угол в точке M. Таким образом, чтобы доказать сходство, нам просто нужно показать, что у этих двух треугольников есть еще одна пара равных углов. Поскольку AH — это внешняя биссектриса угла треугольника ABC в вершине A, мы имеем $\angle BAH = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$. В треугольнике BHA получаем следующее:

$$\angle AHB = 180° - \angle HBA - \angle BAH = 180° - \angle CBA - \left(90° + \frac{1}{2}\cdot\angle BAC\right)$$
$$= 90° - \angle CBA - \frac{1}{2}\cdot\angle BAC.$$

Биссектрисы углов AG и AH в вершине A перпендикулярны, поскольку они делят пополам смежные дополнительные углы. Точка M является серединой GH, из чего следует, что точка A должна лежать на окружности с центром M и диаметром GH. У нас есть $MA = MH$, так как они оба являются радиусами этой окружности, что делает треугольник MHA равнобедренным, так что $\angle MAH = \angle AHM = 90° - \angle CBA - \frac{1}{2}\angle BAC$.

Это дает нам $\angle CAM = \angle BAH - \angle BAC - \angle MAH = (90° + \frac{1}{2}\angle BAC) - \angle BAC - (90° - \angle CBA - \frac{1}{2}\angle BAC) = \angle CBA$, и, следовательно, треугольники ABM и ACM подобны.

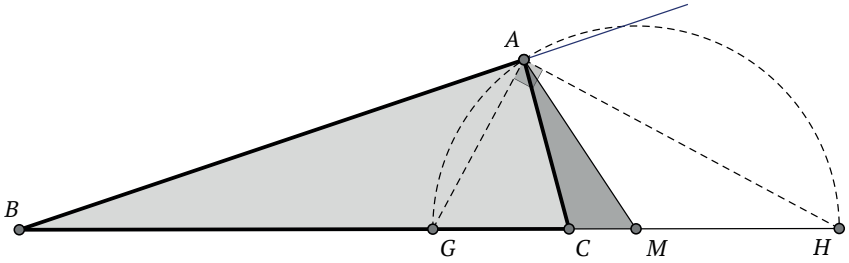


Рисунок Д-76

Пример 77. Перпендикуляры к четырем биссектрисам треугольника образуют четыре коллинеарные точки

На рис. Д-77 рассмотрим $\triangle ABC$, где BD и BE — это биссектрисы внутреннего и внешнего углов (соответственно) в вершине B, а точки D и E — это основания перпендикуляров к BD и BE, исходящих из вершины A. Проведите AD и AE так, чтобы они пересекались с BC и ее продолжением в точках M и N соответственно. Так как BD — биссектриса $\angle B$ и $AM \perp BD$, мы знаем, что $\triangle BDA$ равен $\triangle BMD$, и тогда $AD = DM$. Кроме того, поскольку BE есть биссектриса внешнего $\angle B$ и $AN \perp BE$, получается, что $\triangle BAE$ равен $\triangle BEN$; следовательно, $AE = EN$. Тогда мы имеем DE в качестве средней линии $\triangle AMN$. Мы знаем, что средняя линия треугольника параллельна третьей стороне (в данном случае $DE \parallel BC$)

и делит пополам две другие стороны треугольника, ее можно считать находящейся на половине расстояния между вершиной и противолежащей стороной треугольника.

Аналогично основания перпендикуляров от A к внутренней и внешней биссектрисам $\angle C$ также находятся на линии, параллельной BC и лежащей на половине расстояния между BC и вершиной A. Следовательно, все четыре основания перпендикуляров от вершины A к внутренней и внешней биссектрисам двух других углов $\triangle ABC$ лежат на одной прямой.

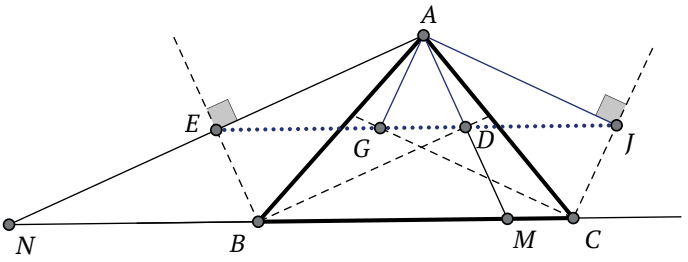


Рисунок Д-77

Пример 78. Деление отрезка прямой пополам сложным способом

Чтобы немного упростить обозначения, определим длины сторон треугольника ABC как $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$, как показано на рис. Д-78. Поскольку CD и CE являются биссектрисами углов треугольника в вершине C, мы можем применить свойства биссектрис углов (см. разделы B1 и B2 части 3 «*Инструментарий*») и получить $\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} = \frac{BE}{AE}$. Кроме того, поскольку DQ параллелен BC, мы отмечаем, что треугольники ADQ и ABC подобны, так как у нас также есть подобные треугольники APB и AQD. Из подобия $\triangle ADQ$ и $\triangle ABC$ получаем $\frac{BC}{DQ} = \frac{AB}{AD}$. Также из подобия $\triangle APB$ и $\triangle AQD$ получаем $\frac{BP}{DQ} = \frac{BE}{BD}$. Установив это, выразим каждое из отношений $\frac{BC}{DQ}$ и $\frac{BP}{DQ}$ в терминах a, b и c, что позволит нам более четко сравнить их относительные размеры.

Во-первых, отмечаем, что $\frac{BD}{AD} = \frac{a}{b}$ и $BD + AD = AB = c$, что подразумевает $\frac{c - AD}{AD} = \frac{a}{b}$, или $b \cdot c - b \cdot AD = a \cdot AD$, и это дает нам $AD = \frac{bc}{a + b}$.

Из этого получаем $\frac{BC}{DQ} = \frac{AB}{AD} = \frac{c}{\frac{bc}{a + b}} = \frac{a + b}{b}$.

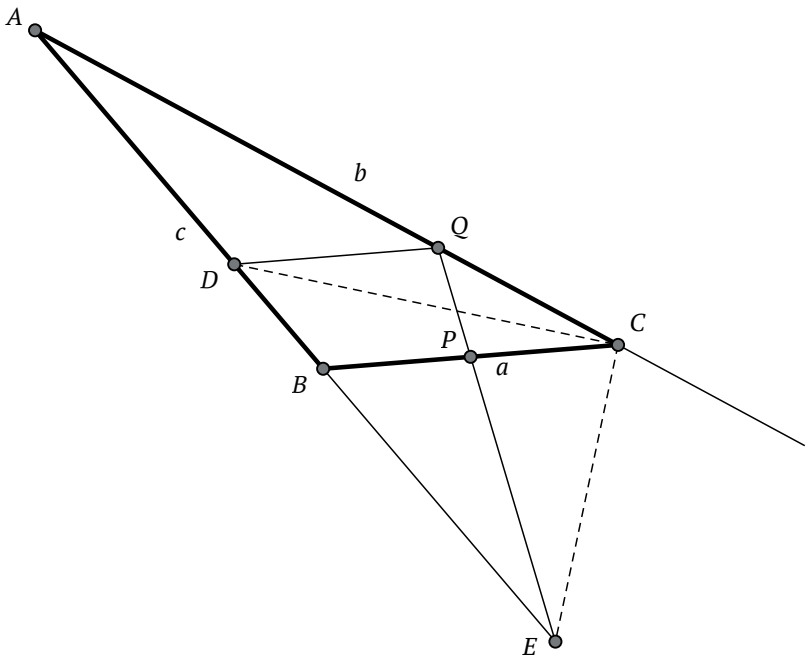


Рисунок Д-78

Аналогично имеем $\frac{BE}{AE} = \frac{a}{b}$ и $AE - BE = AB = c$, это означает $\frac{BE}{BE + c} = \frac{a}{b}$, или $b \cdot BE = a \cdot BE + a \cdot c$, что дает $BE = \frac{ac}{b - a}$.

Мы также получаем $DB = AB - AD = \frac{bc}{a + b} = \frac{ac}{a + b}$ и $DE = BE + BD = \frac{ac}{b - a} + \frac{ac}{a + b} = \frac{2abc}{(a + b)(b - a)}$, из чего следует $\frac{BP}{DQ} = \frac{BE}{DE} = \frac{\frac{ac}{b - a}}{\frac{2abc}{(a + b)(b - a)}} = \frac{a + b}{2b}$.

Мы видим, что $\frac{BC}{DQ} = \frac{a + b}{b} = 2\frac{a + b}{2b} = 2\frac{BP}{DQ}$. Это означает, что $BC = 2BP$. Таким образом, мы показали, что P — это середина BC, что нам и требовалось доказать.

Пример 79. Определение периметра треугольника без измерения длины его сторон

Это доказательство начинаем с того, что проводим прямые GF и GK перпендикулярно к прямым AD и BC соответственно, а также проводим прямую AG, как показано на рис. Д-79. Поскольку прямоугольные треугольники CKG и CGH имеют общую сторону CG и $\angle KCG = \angle GCH$, треугольник CKG равен треугольнику CGH; следовательно, $CH = CK$, а $GH = GK$. Аналогично находим, что $\triangle BFG$

равен $\triangle BGK$, так что $BK = BF$, а $GK = GF$. Следовательно, $GH = GF$. Более того, два прямоугольных треугольника с общей стороной AG позволяют получить равенство $\triangle AFG$ и $\triangle AGH$, а следовательно, $AF = AH$. Также $AH = AC + CH = AC + CK$. Аналогично $AF = AB + BK$. Подводя итог, имеем $AH = \frac{1}{2}(AH + AF) = \frac{1}{2}(AC + CK + BK + AB) = \frac{1}{2}(AC + BC + AB)$, что мы и намеревались доказать.

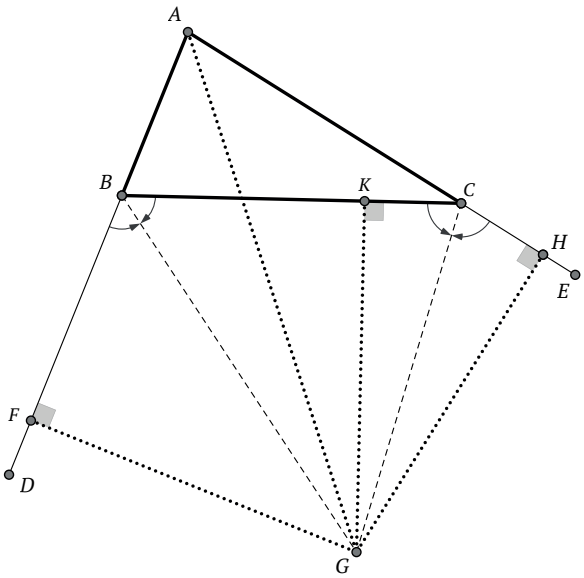


Рисунок Д-79

Пример 80. Странная трисекция угла

Отмечая, что на рис. Д-80 точка R является серединой AB и что AB в два раза длиннее BC, мы получаем $AR = BR = BC$. Кроме того, задано, что $\angle PRA = \angle BRP = \angle PCB = 90°$. Теперь более подробно рассмотрим треугольники PAR, PRB и PBC. Учитывая, что PR является общей стороной треугольников PAR и PRB, эти треугольники оказываются равными. Кроме того, поскольку PB является общей стороной треугольников PRB и PBC, мы также имеем их равенство. Поскольку имеем равенство трех треугольников PAR, PRB и PBC, в результате получаем $\angle APR = \angle RPB = \angle BPC$ и таким образом показываем, что PR и PB делят $\angle APC$ на три равные части.

Пример 81. Неожиданное равенство

Чтобы упростить обсуждение, обозначим внутренние углы треугольника ABC как $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ и, кроме того, будем использовать обозначения $\angle P = \angle BPC$ и $\angle Q = \angle BQC$. Как показано на рис. Д-81, в треугольнике ABX мы имеем $\angle QBA = \angle Q - \angle A$, а так как BX является биссектрисой угла, это дает нам $\angle XBA = \frac{1}{2}(\angle Q - \angle A)$. В треугольнике ABX мы имеем $\angle AXB = 180° - \angle A - \angle XBA = 180° - \angle A -$

$\frac{1}{2}(\angle Q - \angle A)$. Повторение этого с другой стороной дает нам $\angle CYA = 180° - \angle A - \frac{1}{2}(\angle P - \angle A)$, и это позволяет выполнить следующие вычисления в четырехугольнике $AYRX$:

$$\begin{aligned}\angle BRC &= \angle XRY \\ &= 360° - \angle A - \angle AXR - \angle RYA \\ &= 360° - \angle A - \angle AXB - \angle CYA \\ &= 360° - \angle A - \left(180° - \angle A - \frac{1}{2}(\angle Q - \angle A)\right) - \left(180° - \angle A - \frac{1}{2}(\angle P - \angle A)\right) \\ &= \frac{1}{2}(\angle P + \angle Q).\end{aligned}$$

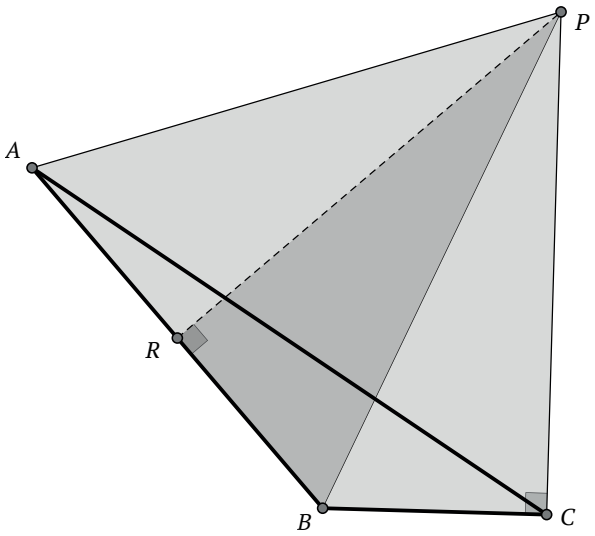


Рисунок Д-80

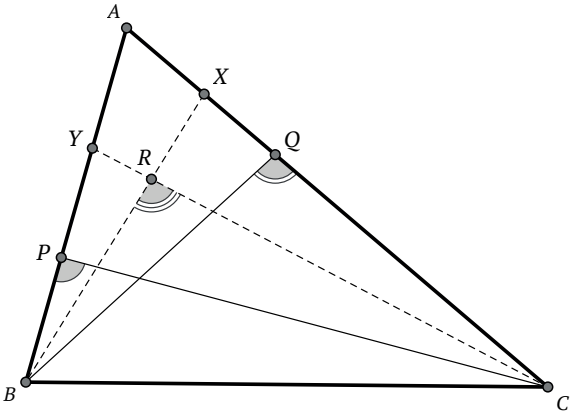


Рисунок Д-81

Таким образом, у нас получается $\frac{1}{2}(\angle BPC + \angle BQC) = \angle BRC$, что также может быть выражено как $\angle BPC + \angle BQC = 2\angle BRC$.

Пример 82. Особенность треугольника

Поскольку точки F и D являются средними точками сторон AB и BC соответственно, как показано на рис. Д-82, находим, что DF параллелен AC и $DF = \frac{1}{2}AC = CE$. Это позволяет нам заключить, что четырехугольник $CEFD$ является параллелограммом; следовательно, $\angle DFE = \angle ECD$. В прямоугольном треугольнике AHC отрезок EH является медианой, проведенной к гипотенузе AC; следовательно, $EH = EC$, а $\angle ECH = \angle CHE$. Если рассмотреть прямоугольный треугольник CHB, то DH — это медиана к гипотенузе BC, то есть $\angle HCD = \angle DHC$. Складывая, получаем $\angle ECD = \angle ECH + \angle HCD = \angle CHE + \angle DHC = \angle DHE$. Однако из параллелограмма $CEDF$ мы знаем, что $\angle ECF = \angle EDF$, поэтому мы можем заключить, что $\angle DFE = \angle DHE$.

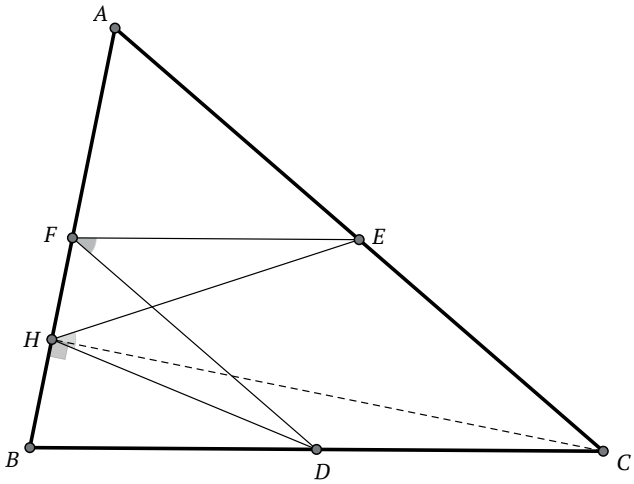


Рисунок Д-82

Пример 83. Равенство площадей треугольников, противоречащее здравому смыслу

Чтобы немного упростить обозначения, на рис. Д-83 обозначим $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ и $AD = FC = x$. Поскольку $AB \parallel DE \parallel FG$, мы имеем три подобных треугольника ABC, DEC и FGC. Следовательно, имеем $\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{b-x}{b}$, или $DE = \frac{c(b-x)}{b}$, и $\frac{FG}{AB} = \frac{FC}{AC} = \frac{x}{b}$, или $FG = \frac{cx}{b}$.

Поскольку $DE \parallel FG$, мы имеем $\angle ADE = \angle AFG$. Теперь нам просто нужно вычислить площади. У нас есть

$$\textit{площадь}\ \triangle AED = \tfrac{1}{2}AD \cdot DE \cdot \sin\angle ADE$$
$$= \frac{1}{2}x\frac{c(b-x)}{b}\sin\angle ADE = \frac{1}{2}\frac{cbx - cx^2}{b}\sin\angle ADE,$$

а также

$$\textit{площадь}\ \triangle AGF = \frac{1}{2}(AF)(FG)\sin\angle AFG$$
$$= \frac{1}{2}(b-x)\frac{cx}{b}\sin\angle AFG = \frac{1}{2}\frac{cbx - cx^2}{b}\sin\angle AFG.$$

Поскольку ранее показано, что $\angle ADE = \angle AFG$, исходя из вышеприведенных соотношений, можно заключить, что *площадь* $\triangle AED$ = *площадь* $\triangle AGF$.

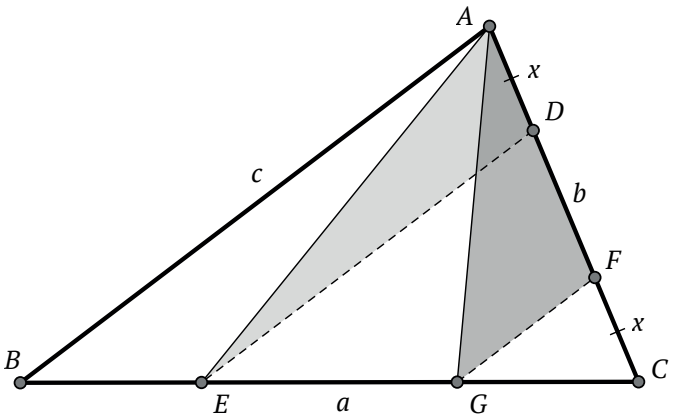


Рисунок Д-83

Пример 84. Параллельные прямые образуют треугольник с удвоенной площадью

На рис. Д-84 точка *E* лежит на отрезке *AC*, в то время как точки *D* и *F* находятся за пределами треугольника *ABC*. (Для любой другой конфигурации иллюстрация может быть изменена при сохранении обозначений.) Мы продолжаем прямую *EB*, чтобы она пересекла *DF* в точке *P*. Поскольку $AD \parallel EP \parallel CF$, мы имеем $\frac{PF}{DF} = \frac{EC}{AC}$. При этом *EB* параллелен *AD*, так что треугольники *CEB* и *CAD* подобны, вследствие чего $\frac{EB}{AD} = \frac{EC}{AC}$. Аналогично, поскольку *BP* параллелен *AD*, треугольники *ABP* и *FAD* подобны, и из этого следует, что $\frac{BP}{AD} = \frac{PF}{DF}$. Из предыдущих трех соотношений мы имеем $\frac{EB}{AD} = \frac{EC}{AC} = \frac{PF}{DF} = \frac{BP}{AD}$, из чего следует,

что $EB = BP$. Теперь нам нужно только отметить, что все треугольники ABE, DBE и DPB имеют основания одинаковой длины, либо EB, либо BP, и одинаковые высоты, поскольку $AD \parallel EP$. Это дает нам *площадь* $\triangle ABE$ = *площадь* $\triangle DBE$ = *площадь* $\triangle DPB$. Кроме того, все треугольники CEB, FEB и BFP имеют основания одинаковой длины, либо EB, либо BP, и одинаковые высоты, поскольку $CF \parallel EP$. Это дает нам *площадь* $\triangle CEB$ = *площадь* $\triangle FEB$ = *площадь* $\triangle FBP$. Суммируя, имеем

$$\begin{aligned} \text{площадь } \triangle DEF &= \text{площадь } \triangle DBE + \text{площадь } \triangle DPB + \text{площадь } \triangle FBP \\ &\quad + \text{площадь } \triangle FE = 2 \cdot \text{площадь } \triangle ABE + 2 \cdot \text{площадь } \triangle CEB \\ &= 2 \cdot (\text{площадь } \triangle ABE + \text{площадь } \triangle CEB) = 2 \cdot \text{площадь } \triangle ABC. \end{aligned}$$

Иными словами, площадь треугольника DEF в два раза больше площади треугольника ABC.

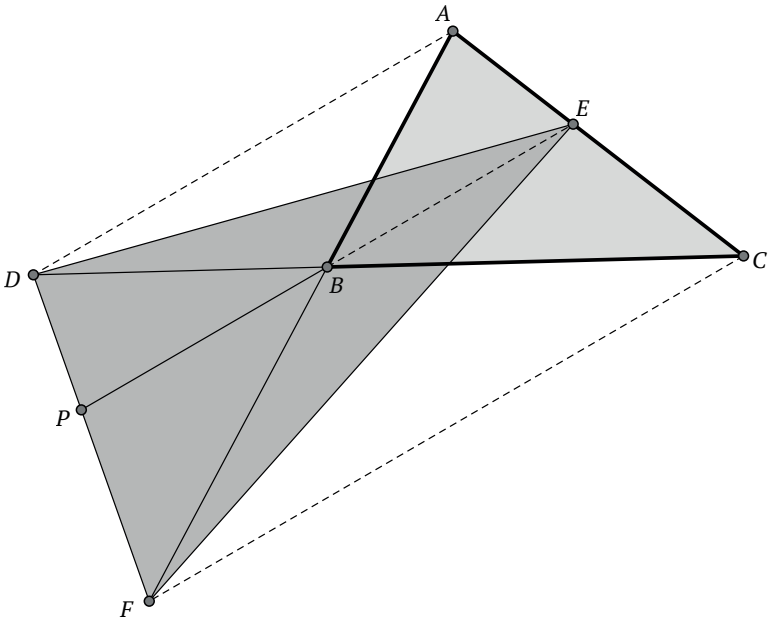


Рисунок Д-84

Пример 85. Неожиданные соотношения площадей треугольников

Если мы хотим доказать, что *площадь* $\triangle BDC$ + *площадь* $\triangle ADC$ = *площадь* $\triangle ABD$, для начала отметим, что это эквивалентно выражению *площадь* $\triangle BDC$ + *площадь* $\triangle ADC$ = *площадь* $\triangle ABC$ + *площадь* $\triangle BCD$ − *площадь* $\triangle ADC$, или $2 \cdot$ *площадь* $\triangle ADC$ = *площадь* $\triangle ABC$. Это следует из того, что мы рассматриваем высоту DM равностороннего треугольника BDC, как показано на рис. Д-85. Поскольку $\triangle BDC$ является равносторонним, M — это середина стороны BC, и мы имеем $BC = 2MC$. Так как $DM \parallel CA$, треугольники ADC и AMC имеют одинаковое осно-

вание AC, одинаковую высоту и, следовательно, одинаковую площадь. Таким образом, мы получаем *площадь* $\triangle ABC = 2 \cdot$ *площадь* $\triangle AMC = 2 \cdot$ *площадь* $\triangle ADC$ и показали, что *площадь* $\triangle BDC$ + *площадь* $\triangle ADC$ = *площадь* $\triangle ABD$.

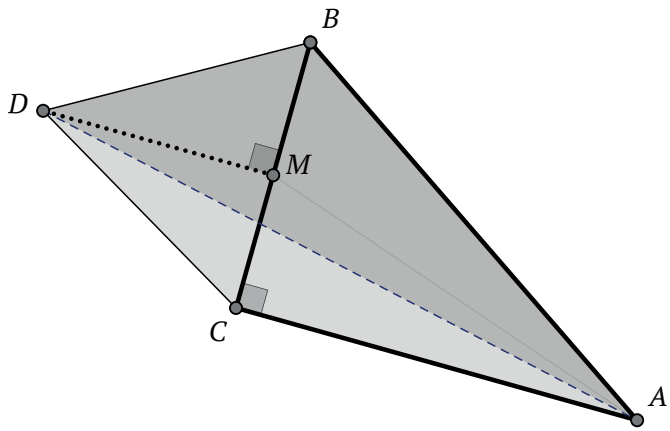


Рисунок Д-85

Пример 86. Построение треугольника, площадь которого равна трем четвертям площади данного треугольника

В соответствии с рис. Д-86 мы сначала хотим доказать, что длины сторон треугольника GFC равны медианам треугольника ABC. Сторона FC уже является одной из медиан $\triangle ABC$. Поскольку D и E являются средними точками BC и CA соответственно, то мы имеем $DE \parallel AB$. Так как FG параллелен BE по построению, $BEGF$ является параллелограммом, и длина FG, следовательно, равна медиане BE. Наконец, мы видим, что по той же причине $EF \parallel BD$, и это означает, что $DE = BF = EG$. Поскольку E является серединой AC, четырехугольник $ADCG$ также является параллелограммом, и тогда мы имеем $GC = AD$. Таким образом, стороны треугольника GFC равны медианам треугольника ABC.

Теперь рассмотрим соотношения площадей. Поскольку $ED \parallel AB$, треугольники CED и CAB подобны, а медиана CP треугольника CED — часть медианы CF треугольника CAB. Отсюда следует, что P — это середина DE, а поскольку DE вдвое меньше AB, мы видим, что EP вдвое меньше AF. Теперь можно сравнить площади треугольников AFC и EFC. Эти треугольники имеют общую сторону CF, откуда $\angle CPE = \angle CFA$ и $AF = 2EP$. Таким образом, высота треугольника AFC в два раза больше высоты треугольника EFC, из чего получаем *площадь* $\triangle EFC = \frac{1}{2}$*площадь* $\triangle AFC$. Теперь мы также можем сравнить площади треугольников GFC и EFC. Мы уже установили, что $DE = EG$ и $DP = PE$. Это означает, что справедливо соотношение $GP = 3EP$, а поскольку треугольники GFC и EFC имеют общую сторону FC, это означает, что *площадь* $\triangle EFC = \frac{1}{2}$*площадь* $\triangle GFC$. Кроме того, мы знаем, что медиана CF треугольника ABC делит его на треугольники равной площади, и отсюда *площадь* $\triangle AFC = \frac{1}{2}$*площадь* $\triangle ABC$. Суммируя, полу-

чаем *площадь* $\triangle GFC = 3 \cdot$ *площадь* $\triangle EFC = \frac{3}{2}$ *площадь* $\triangle AFC = \frac{3}{4}$ *площадь* $\triangle ABC$, что мы и намеревались доказать.

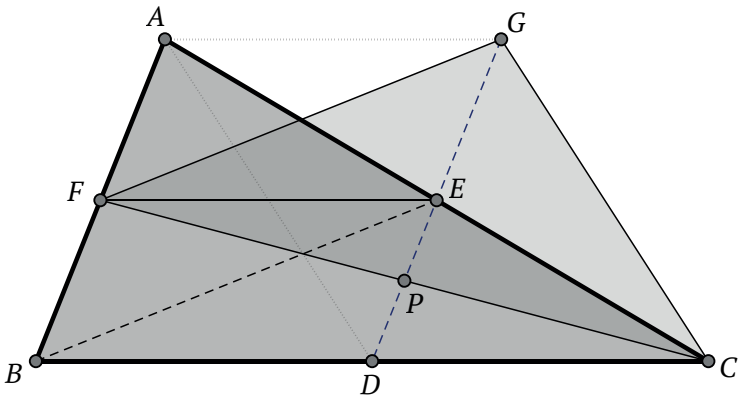


Рисунок Д-86

Пример 87. Поразительная конструкция: подобные треугольники, соотношение площадей которых равно 1:4

Как показано на рис. Д-87, точка *J* является основанием перпендикуляра, проведенного от точки *P* к стороне *AB*, откуда $\angle AJP = 90°$; точка *H* является основанием перпендикуляра, проведенного от *P* к *AC*, откуда $\angle PHA = 90°$. Таким образом, отрезок *AP* является диаметром описанной окружности четырехугольника *PJAH*, а центр окружности *K* является серединой *AP*. Аналогичные соображения для двух других окружностей показывают нам, что *L* является серединой *BP*, а *N* — серединой *CP*. Это означает, что треугольник *KLN* получается из треугольника *ABC* преобразованием гомотетии (см. раздел B12 части 3 «*Инструментарий*») с центром *P* и коэффициентом 1:2. Из этого факта мы можем сделать вывод, что треугольники *ABC* и *KLN* подобны и что длина сторон *KLN* в два раза меньше длины сторон *ABC*. Отношение площадей двух одинаковых треугольников равно квадрату отношения соответствующих сторон. Следовательно, *площадь* $\triangle KLN = \frac{1}{4}$ *площадь* $\triangle ABC$, что завершает доказательство.

Пример 88. Непредвиденное равенство вписанных треугольников

Чтобы упростить обозначения, определим $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $x = BR = CD$, $y = CS = AE$ и $z = AT = BF$, как показано на рис. Д-88. Мы хотим доказать, что *площадь* $\triangle DEF$ = *площадь* $\triangle RST$. Так как

$$\text{площадь } \triangle DEF = \text{площадь } \triangle ABC - \text{площадь } \triangle AFE - \text{площадь } \triangle BDF - \text{площадь } \triangle CED$$

и

$$\textit{площадь}\ \triangle RST = \textit{площадь}\ \triangle ABC - \textit{площадь}\ \triangle ATS - \textit{площадь}\ \triangle BRT - \textit{площадь}\ \triangle CSR,$$

это равносильно соотношению

$$\textit{площадь}\ \triangle AFE + \textit{площадь}\ \triangle BDF + \textit{площадь}\ \triangle CED = \textit{площадь}\ \triangle ATS + \textit{площадь}\ \triangle BRT + \textit{площадь}\ \triangle CSR.$$

Мы можем написать:

$$\textit{площадь}\ \triangle AFE + \textit{площадь}\ \triangle BDF + \textit{площадь}\ \triangle CED = \frac{1}{2}y(c-z)\sin\angle A + \frac{1}{2}z(a-x)\sin\angle B + \frac{1}{2}x(b-y)\sin\angle C,$$

а также

$$\textit{площадь}\ \triangle ATS + \textit{площадь}\ \triangle BRT + \textit{площадь}\ \triangle CSR = \frac{1}{2}z(b-y)\sin\angle A + \frac{1}{2}x(c-z)\sin\angle B + \frac{1}{2}y(a-x)\sin\angle C.$$

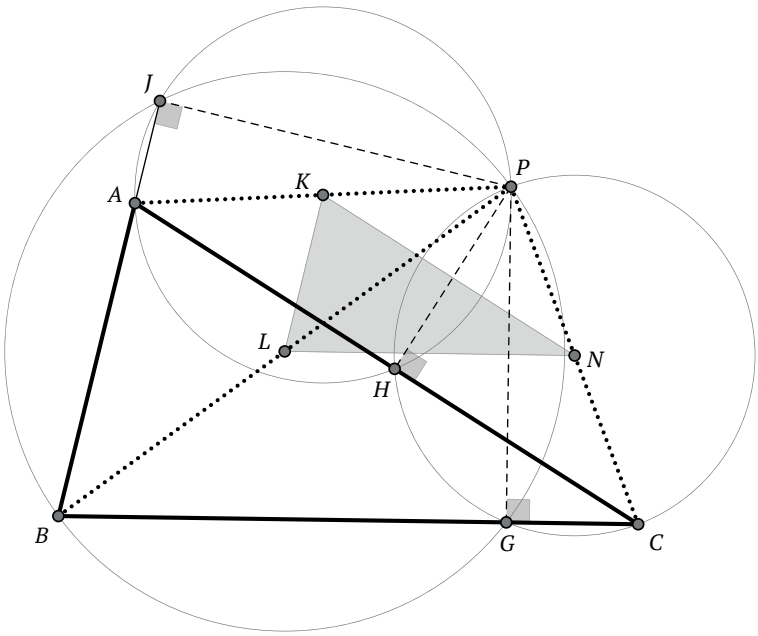


Рисунок Д-87

Закон синусов (см. раздел А6 части 3 «*Инструментарий*») в $\triangle ABC$ дает $a\cdot\sin\angle B = b\cdot\sin\angle A$, $b\cdot\sin\angle C = c\cdot\sin\angle B$ и $c\cdot\sin\angle A = a\cdot\sin\angle C$, и мы можем на этом основании показать, что

$$\frac{1}{2}y(c-z)\sin\angle A + \frac{1}{2}z(a-x)\sin\angle B + \frac{1}{2}x(b-y)\sin\angle C$$
$$= \frac{1}{2}(yc\sin\angle A - yz\sin\angle A + za\sin\angle B - zx\sin\angle B + xb\sin\angle C - xy\sin\angle C)$$
$$= \frac{1}{2}(ya\sin\angle C - yz\sin\angle A + zb\sin\angle A - zx\sin\angle B + xc\sin\angle B - xy\sin\angle C)$$
$$= \frac{1}{2}(zb\sin\angle A - zy\sin\angle A + xc\sin\angle B - xz\sin\angle B + ya\sin\angle C - yx\sin\angle C)$$
$$= \frac{1}{2}z(b-y)\sin\angle A + \frac{1}{2}x(c-z)\sin\angle B + \frac{1}{2}y(a-x)\sin\angle C).$$

Таким образом, мы показали, что

$$\textit{площадь}\ \triangle AFE + \textit{площадь}\ \triangle BDF + \textit{площадь}\ \triangle CED$$
$$= \textit{площадь}\ \triangle ATS + \textit{площадь}\ \triangle BRT + \textit{площадь}\ \triangle CSR.$$

Это позволяет утверждать, что *площадь* $\triangle DEF$ = *площадь* $\triangle RST$.

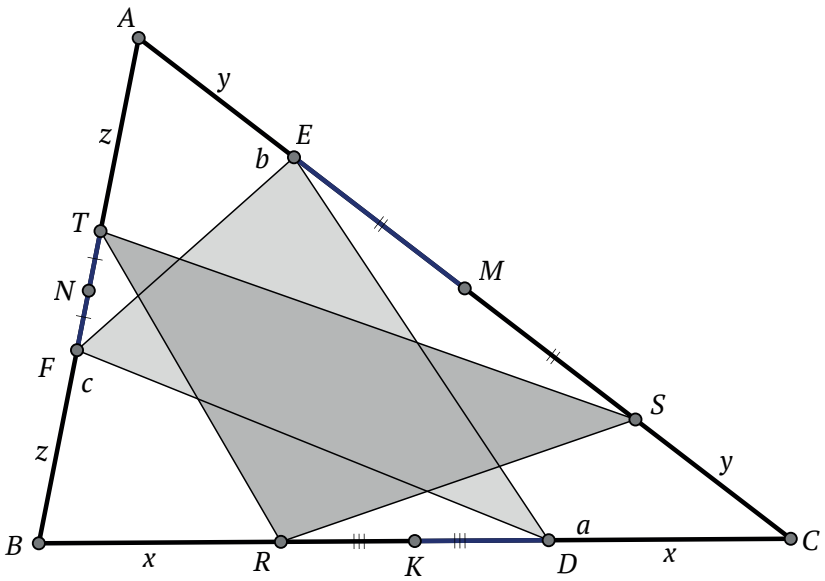


Рисунок Д-88

Пример 89. Неожиданная общность треугольников равной площади

Чтобы доказать деление AD пополам в точке M, нам сначала понадобится несколько вспомогательных линий. На рис. Д-89 мы устанавливаем точку F, в которой BF параллелен AC, а CF параллелен AB, в результате чего получается па-

раллелограмм *ABFC*, и треугольники *ABC* и *FBC* имеют равные площади. Дано, что треугольники *ABC* и *BDC* также имеют равные площади. Из этого следует, что площади треугольников *BDC* и *BFC* тоже равны. Таким образом, отрезок *FD* должен быть параллелен *BC*, поскольку эти треугольники имеют общее основание *BC* и высоты этих двух треугольников равной площади также должны быть равны. Поскольку диагонали параллелограмма в точке пересечения делят друг друга пополам, точка *G* является серединой диагонали *AF*. В треугольнике *ADF* отрезок *GM* параллелен основанию *FD*; следовательно, точка *M* должна быть серединой *AD*, что мы и намеревались доказать.

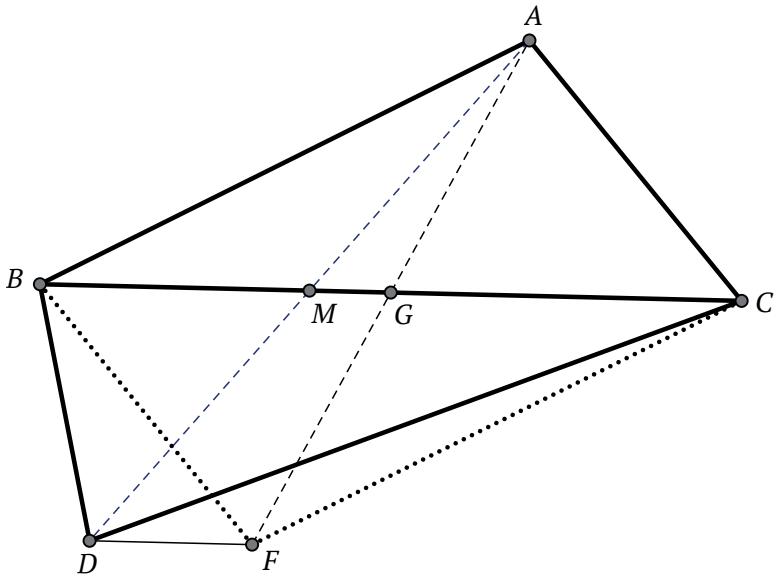


Рисунок Д-89

Пример 90. Как случайная точка делит площадь треугольника пополам

Поскольку $MB = \frac{1}{2}AB$, как показано на рис. Д-90, а также $\triangle CAB$ и $\triangle CMB$ имеют общую высоту *CG* относительно их оснований на прямой *AB*, мы можем заключить, что *площадь* $\triangle CMB = \frac{1}{2}$*площадь* $\triangle CAB$. Кроме того, поскольку $MN \parallel PC$, замечаем, что $\triangle PMN$ и $\triangle CMN$ имеют одинаковую высоту над своим общим основанием *MN* и, следовательно, равны по площади. Теперь мы замечаем, что *площадь* $\triangle CMB$ = *площадь* $\triangle NMB$ + *площадь* $\triangle CMN$. Подстановкой соответствующих значений получаем *площадь* $\triangle PBN$ = *площадь* $\triangle NMB$ + *площадь* $\triangle PMN$ = *площадь* $\triangle NMB$ + *площадь* $\triangle CMN$ = *площадь* $\triangle CMB = \frac{1}{2}$*площадь* $\triangle CAB$, что и хотели доказать.

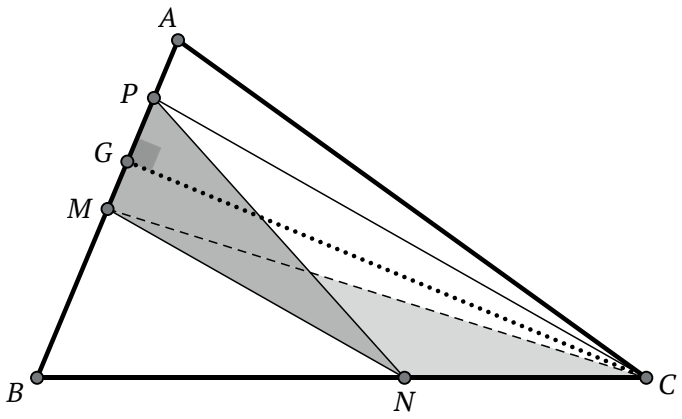


Рисунок Д-90

Пример 91. Нахождение треугольника, площадь которого составляет одну треть площади исходного

На рис. Д-91 добавлена высота AQ треугольника ABC от вершины A, а также высота ER треугольника BGE от вершины E. Кроме того, у нас есть точка P, которая является пересечением AQ и EH. Отметив, что гомотетия с центром A и коэффициентом 2:3 (см. раздел B12 части 3 «*Инструментарий*») отображает BC в EH, мы видим, что $BC \parallel EH$. Таким образом, ERP представляет собой прямоугольник. Кроме того, гомотетия отображает Q на P. Теперь мы можем вычислить следующее:

$$\begin{aligned} \text{площадь}\,\triangle BGE &= \frac{1}{2} BG \cdot ER = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} BC\right) \cdot PQ = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} BC\right) \cdot \left(\frac{1}{3} AQ\right) \\ &= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2} BC \cdot AQ\right) = \frac{2}{9} \cdot \text{площадь}\,\triangle ABC. \end{aligned}$$

Аналогично мы также можем провести GD и вычислить $\text{площадь}\,\triangle CJG = \frac{2}{9}\text{площадь}\,\triangle ABC$, а также провести JF и вычислить $\text{площадь}\,\triangle AEJ = \frac{2}{9}\text{площадь}\,\triangle ABC$. Получаем, что $\text{площадь}\,\triangle AEJ = \text{площадь}\,\triangle BGE = \text{площадь}\,\triangle CJG$. Кроме того, теперь у нас есть

$$\begin{aligned} \text{площадь}\,\triangle EGJ &= \text{площадь}\,\triangle ABC - \text{площадь}\,\triangle EBG \\ &\quad - \text{площадь}\,\triangle CJG - \text{площадь}\,\triangle AEJ \\ &= \text{площадь}\,\triangle ABC - \tfrac{2}{9}\text{площадь}\,\triangle ABC - \tfrac{2}{9}\text{площадь}\,\triangle ABC \\ &\quad - \tfrac{2}{9}\text{площадь}\,\triangle ABC = \tfrac{1}{3}\text{площадь}\,\triangle ABC. \end{aligned}$$

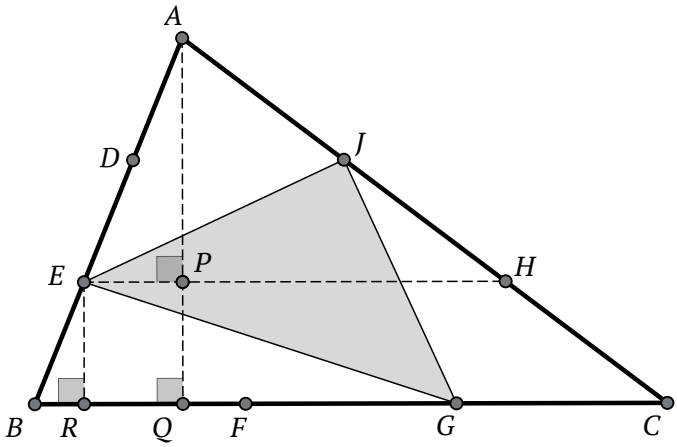


Рисунок Д-91

Пример 92. Точки трисекции сторон, разделяющие треугольник на части

Поскольку точки *D* и *E* отсекают пропорциональные отрезки от сторон *AB* и *AC* треугольника *ABC*, *DE* параллелен *BC*. Из этого следует, что треугольники *ADE* и *ABC* подобны, и мы имеем $DE/BC = AD/AB = \frac{1}{3}$. Мы также имеем $\triangle EDF$ подобный $\triangle CBF$ из-за равных соответственных внутренних углов, образованных параллельными линиями *DE* и *BC* с одними и теми же сторонами, разделенными также в соотношении 1:3. Следовательно, мы имеем $\frac{DF}{FC} = \frac{1}{3}$. Поскольку треугольники *BFD* и *BCF* имеют одну и ту же высоту *BP* от вершины *B* до *DC*, как показано на рис. Д-92, их площади также находятся в соотношении 1:3. Для упрощения обозначим *площадь* $\triangle BFD = R$. Тогда *площадь* $\triangle BCF = 3R$, а *площадь* $\triangle BCD = 4R$. Треугольники *BCD* и *BCA* имеют одну и ту же высоту *CQ* от вершины *C* до *AB*; следовательно, соотношение их площадей равно $\frac{BD}{BA} = \frac{2}{3}$. Мы находим, что удвоенная площадь $\triangle ABC$ равна трехкратной площади $\triangle BCD$, которая равна $\frac{1}{2}R$, и из этого мы получаем *площадь* $\triangle ABC = 6R$. Поскольку *площадь* $\triangle BCF = 3R$, мы получаем *площадь* $\triangle BCF = \frac{1}{2}$*площадь* $\triangle ABC$. Применив те же рассуждения к другой стороне треугольника, получим $\triangle ABE$ и $\triangle ABC$, имеющие одну и ту же высоту от вершины *B* до стороны *CA*, и поэтому мы имеем *площадь* $\triangle ABE$: *площадь* $\triangle ABC = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$. Используя эти отношения площадей, получим $3 \cdot$ *площадь* $\triangle ABE$ = *площадь* $\triangle ABC = 6R$, или *площадь* $\triangle ABE = 2R$. Это дает нам площадь четырехугольника *ADFE* = *площадь* $\triangle ABE$ − *площадь* $\triangle BFD = 2R - R = R =$ *площадь* $\triangle BFD$. Аналогичным образом мы также можем показать, что площадь четырехугольника *ADFE* = *площадь* $\triangle$CEF, и это даст нам *площадь* $\triangle ADFE$ = *площадь* $\triangle BFD$ = *площадь* $\triangle CEF$.

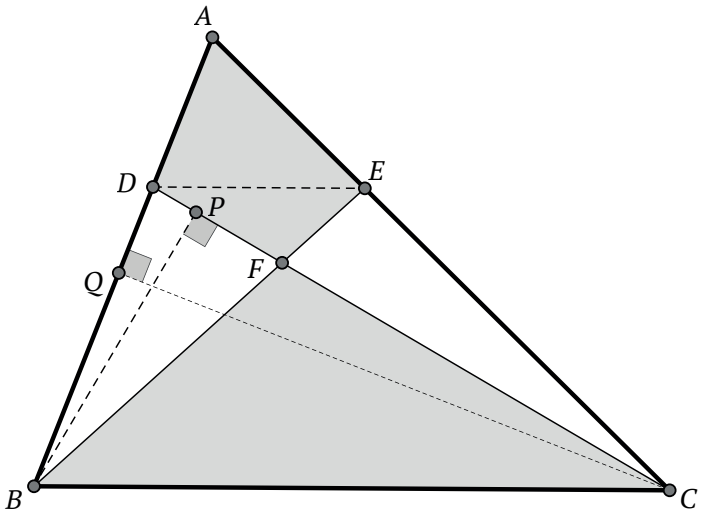


Рисунок Д-92

Пример 93. Точки трисекции сторон треугольника преподносят больше сюрпризов

На рис. Д-93(а) проведены отрезки прямых *AK*, *WL*, *HM* и *DN*, перпендикулярные *BC*, которые мы будем использовать для вычисления площади треугольника *WBC*, чтобы определить его долю от площади треугольника *ABC*. Выразить высоту *WL* треугольника *ABC* как кратную *AK*, которая является высотой треугольника *ABC*, можно с помощью формулы $WL = a \cdot AK$. Это позволит нам получить соотношения: *площадь* $\triangle WBC = \frac{1}{2}BC \cdot WL = \frac{1}{2}BC \cdot a \cdot AK = a \cdot (\frac{1}{2}BC \cdot AK) =$ $a \cdot$ *площадь* $\triangle ABC$, и тогда осталось только найти значение *a*. Для достижения этой цели сначала рассмотрим отрезок *HM*. Поскольку треугольники *CAK* и *CHM* являются подобными прямоугольными треугольниками, из $CH = \frac{1}{3}CA$ вытекает $HM = \frac{1}{3}AK$. Аналогично треугольники *BKA* и *BND* являются подобными прямоугольными треугольниками с $DB = \frac{2}{3}AB$, откуда $DN = \frac{2}{3}AK$. Кроме того, полезно отметить, что подобные треугольники *CAK* и *CHM* также дают нам равенство $CM = \frac{1}{3}CK$, а подобные треугольники *BKA* и *BND* — равенство $BN = \frac{2}{3}BK$.

Далее мы обратим наше внимание на треугольники *WBL* и *HBM*. Это также подобные прямоугольные треугольники, из чего следует $\frac{BL}{BM} = \frac{WL}{HM}$, или

$$BL = \frac{WL}{HM} \cdot BM = \frac{a \cdot AK}{\frac{1}{3}AK}(BK + CK - CM) = 3a(BK + \tfrac{2}{3}CK).$$

Аналогичным образом подобные прямоугольные треугольники *WLC* и *DNC* дают $\frac{BL}{BM} = \frac{WL}{HM}$, или $CL = \frac{WL}{DN} \cdot CN = \frac{a \cdot AK}{\frac{2}{3}AK}(BK + CK - BN) = \frac{3}{2}a(\frac{1}{3}BK + CK)$.

Из $BL + CL = BK + CK$ вытекает, что $3a \cdot (BK + CK) + \frac{3}{2}a \cdot (\frac{1}{3}BK + CK) = BK + CK$. Это равносильно $\frac{7}{2}a \cdot (BK + CK) = BK + CK$, откуда $a = \frac{2}{7}$. То есть *площадь* $\triangle WBC =$

$\frac{2}{7}$*площадь* $\triangle ABC$. Аналогично можно показать, что *площадь* $\triangle UCA = \frac{2}{7}$*площадь* $\triangle VAB$, а *площадь* $\triangle WBC = \frac{2}{7}$*площадь* $\triangle ABC$.

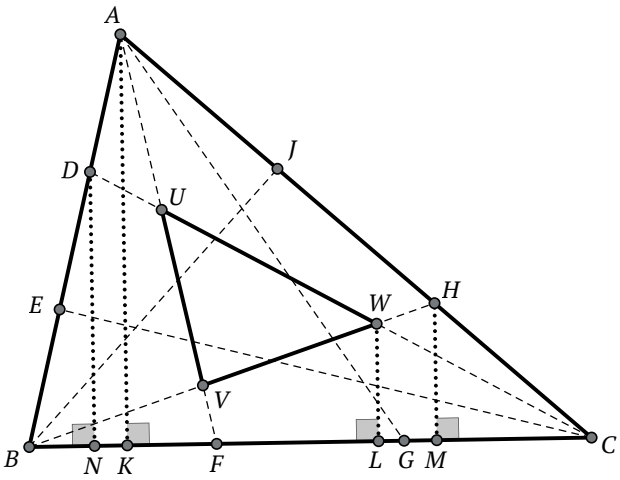


Рисунок Д-93(а)

Следовательно, мы можем вычислить площадь треугольника *UVW* относительно треугольника *ABC*, поскольку как показано на рис. Д-93(б): *площадь* $\triangle UVW$ = *площадь* $\triangle ABC$ – *площадь* $\triangle WBC$ – *площадь* $\triangle UCA$ – *площадь* $\triangle VAB$. Отсюда получаем *площадь* $\triangle UVW$ = *площадь* $\triangle ABC - \frac{2}{7}$*площадь* $\triangle ABC - \frac{2}{7}$*площадь* $\triangle ABC - \frac{2}{7}$*площадь* $\triangle ABC = \frac{1}{7}$ *площадь* $\triangle ABC$.

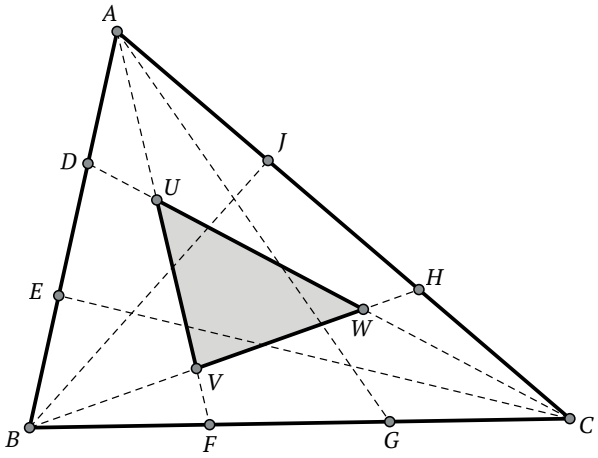


Рисунок Д-93(б)

На рис. Д-93(в) показано, как мы можем аналогичным образом вычислить площадь треугольника *RST*.

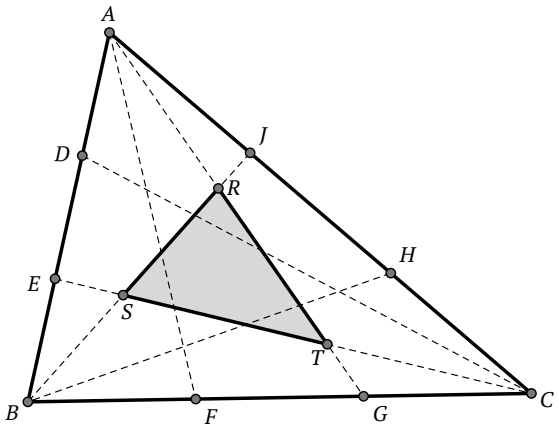


Рисунок Д-93(в)

Аналогичные вычисления дадут: *площадь* $\triangle SBC$ = *площадь* $\triangle TCA$ = *площадь* $\triangle RAB = \frac{2}{7}$*площадь* $\triangle ABC$, откуда получаем *площадь* $\triangle RST$ = *площадь* $\triangle ABC$ – *площадь* $\triangle SBC$ – *площадь* $\triangle TCA$ – *площадь* $\triangle RAB$. Следовательно, *площадь* $\triangle RST$ = *площадь* $\triangle ABC - \frac{2}{7}$*площадь* $\triangle ABC - \frac{2}{7}$*площадь* $\triangle ABC - \frac{2}{7}$*площадь* $\triangle ABC = \frac{1}{7}$ *площадь* $\triangle ABC$.

Мы видим, что площади обоих треугольников *UVW* и *RST* равны одной седьмой площади треугольника *ABC*, что мы и намеревались доказать.

Пример 94. Еще один сюрприз преподносят точки трисекции сторон

Первая часть этого доказательства очень похожа на доказательство из примера 93. На рис. Д-94 точка *P* лежит на пересечении прямых *BJ* и *CD*, и у нас есть отрезки *AK*, *XL*, *JM* и *PN*, перпендикулярные *BC*. Мы хотим выразить *XL* как кратное высоте *AK* треугольника *ABC* в виде $XL = a \cdot AK$. Как и в предыдущем доказательстве, отмечаем, что $JM = \frac{2}{3}AK$ и $CM = \frac{2}{3}CK$.

Рассматривая подобные прямоугольные треугольники *XBL* и *JBM*, получим $\frac{BL}{BM} = \frac{XL}{JM}$, или $BL = \frac{XL}{JM} \cdot BM = \frac{a \cdot AK}{\frac{2}{3}AK}(BK + CK - CK) = \frac{3}{2}a(BK + \frac{1}{3}CK)$. Кроме того, подобные прямоугольные треугольники *XLF* и *AKF* дают нам $\frac{FL}{FK} = \frac{XL}{AK}$, или $FL = \frac{XL}{AK} \cdot FK = \frac{a \cdot AK}{AK}(FB - BK) = a\left(\frac{1}{3}(BK + CK) - BK\right) = a(\frac{1}{3}CK - \frac{2}{3}BK)$.

Так как $BL + FL = 13$ ($BK + CK$), имеем $\frac{3}{2}a \cdot (BK + \frac{1}{3}CK) + a \cdot (\frac{1}{3}CK - \frac{2}{3}BK) = \frac{1}{3}(BK + CK)$. Это равносильно $\frac{5}{6}a \cdot (BK + CK) = \frac{1}{3}(BK + CK)$, откуда $a = \frac{2}{5}$. Таким образом, мы показали, что $XL = \frac{2}{5}AK$. Поскольку можно повторить эти рассуждения аналогичным образом для точки *Z*, заменив *BJ* на *CD*, а *AF* на *AG*, мы видим, что длина перпендикуляра от *Z* до *BC* также равна $\frac{2}{5}AK$. Таким образом, отрезок *XZ*

параллелен отрезку BC, а расстояние между ними равно $\frac{2}{5}AK$.

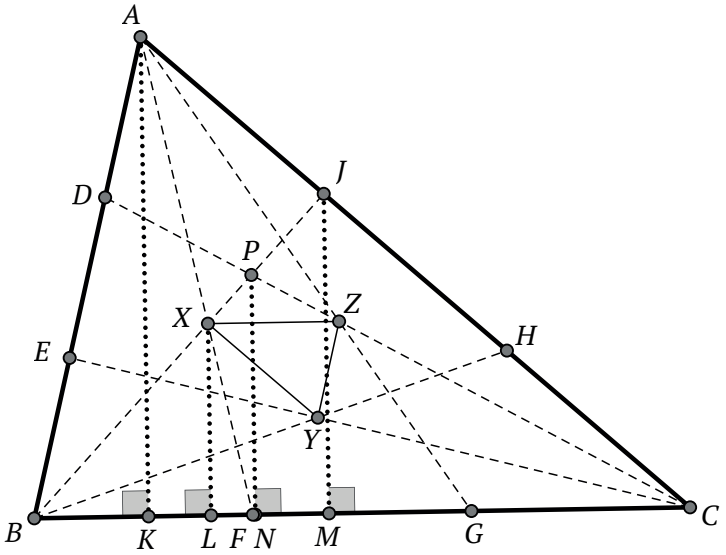


Рисунок Д-94

В доказательстве для примера 92 мы уже показывали, что площадь треугольника PBC в два раза меньше площади треугольника ABC. Поскольку у этих двух треугольников общее основание BC, высота от P до BC равна $\frac{1}{2}AK$. Отметив теперь, что треугольники PBC и PXZ подобны, так как $BC \parallel XZ$, а высота треугольника PXZ равна $\frac{1}{2}AK - \frac{2}{5}AK = \frac{1}{10}AK$, видим, что высота PBC в пять раз больше высоты треугольника PXZ, так как $5 \cdot \frac{1}{10}AK = \frac{1}{2}$AK. Это также означает, что $XZ = \frac{1}{5}BC$.

Эти рассуждения можно аналогично повторить для других сторон треугольника XYZ и также получить $XY \parallel CA$ при $XY = \frac{1}{5}CA$ и $YZ \parallel AB$ при $YZ = \frac{1}{5}AB$. Мы видим, что треугольники ABC и XYZ подобны, а длины сторон треугольника XYZ составляют одну пятую от длин сторон соответствующих сторон треугольника ABC. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату отношения длин соответственных сторон, и мы, таким образом, получаем *площадь* $\triangle XYZ = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot$ *площадь* $\triangle ABC = \frac{1}{25}$ *площадь* $\triangle ABC$, что завершает доказательство.

Пример 95. Еще один сюрприз от точек трисекции сторон треугольника

Это доказательство почти идентично доказательству в примере 94, хотя и немного короче. На рис. Д-95 добавим отрезки AK, MX и EY, перпендикулярные BC. Выразим MX как кратное высоте AK треугольника ABC, т. е. $MX = a \cdot AK$. Из подобных треугольников EBY и ABK получаем $EY = \frac{1}{3}AK$ и $BY = \frac{1}{3}BK$. Рассматри-

вая подобные прямоугольные треугольники MXC и EYC, получим $\frac{CX}{CY} = \frac{MX}{EY}$, или $CX = \frac{MX}{EY} \cdot CY = \frac{a \cdot AK}{\frac{1}{3} AK}(CK + BK - BY) = 3a(\frac{2}{3} BK + CK)$.

Подобные прямоугольные треугольники MXF и AKF дают $\frac{FX}{FK} = \frac{MX}{AK}$, или $FX = \frac{MX}{AK} \cdot FK = \frac{a \cdot AK}{AK}(FB - BK) = a\left(\frac{1}{3}(BK + CK) - BK\right) = a(\frac{1}{3} CK - \frac{2}{3} BK)$.

Так как $CX - FX = CF = \frac{2}{3}(BK + CK)$, получаем, что $3a \cdot (\frac{2}{3} BK + CK) - a \cdot (\frac{1}{3} CK - \frac{2}{3} BK) = \frac{2}{3}(BK + CK)$. Это равносильно $\frac{8}{3} a \cdot (BK + CK) = \frac{2}{3}(BK + CK)$, или $a = \frac{1}{4}$. Отсюда следует, что $MX = \frac{1}{4} AK$. Поскольку мы можем повторить эти рассуждения аналогичным образом для точки N, заменив CE на BH, длина перпендикуляра от точки N до BC также равна $\frac{1}{4} AK$. Таким образом, отрезок прямой MN параллелен отрезку прямой BC, а расстояние между ними равно $\frac{1}{4} AK$.

Отметим теперь, что треугольники AFG и AMN подобны, так как $FG \parallel MN$. Высота AMN равна $AK - \frac{1}{4} AK = \frac{3}{4} AK$, откуда следует, что высота AMN на $\frac{1}{3}$ меньше высоты AFG. Это означает, что мы также имеем $MN = \frac{3}{4} FG = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3} BC\right) = \frac{1}{4} BC$.

Эти рассуждения можно повторить для других сторон треугольника LMN, и получим $NL \parallel CA$ при $NL = \frac{1}{4} CA$ и $LM \parallel AB$ при $LM = \frac{1}{4} AB$. Мы видим, что треугольники ABC и LMN подобны, а длины сторон треугольника LMN равны одной четверти длин соответственных сторон треугольника ABC. Известно, что отношение площадей подобных треугольников равно квадрату отношения длин их соответственных сторон, и таким образом получаем *площадь* $\triangle LMN = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot$ *площадь* $\triangle ABC = \frac{1}{16}$ *площадь* $\triangle ABC$, что завершает доказательство.

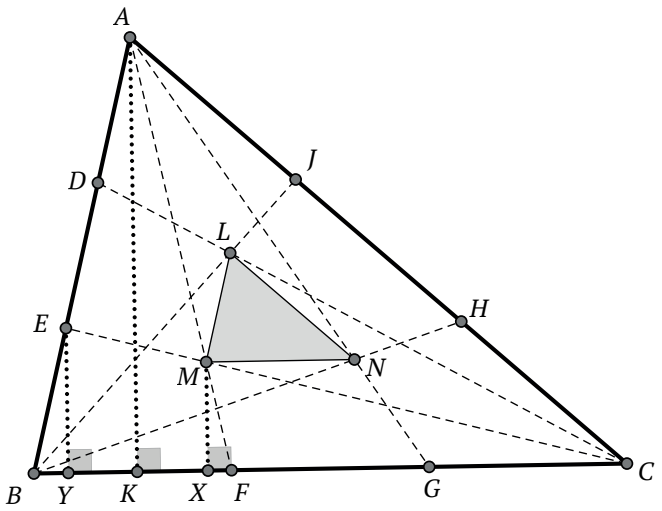


Рисунок Д-95

Пример 96. Медианы и трисекторы сторон разбивают треугольник с неожиданным результатом

Поскольку это доказательство непосредственно вытекает из результатов примеров 94 и 95, это, пожалуй, один из самых удивительных результатов из всех, относящихся к трисекторам. Как мы видим на рис. Д-96, мы можем рассчитать площадь маленького треугольника LUZ как *площадь* $\triangle LUZ$ = *площадь* $\triangle ABC$ − *площадь* $\triangle UAB$ − *площадь* $\triangle ZBC$ − *площадь* $\triangle LCA$. Поскольку AM и BN являются медианами треугольника ABC, их пересечение U является геометрическим центром треугольника ABC. Как мы знаем из примера 42, площади UAB, UBC и UCA равны, и поэтому мы имеем *площадь* $\triangle UAB = \frac{1}{3}$ *площадь* $\triangle ABC$.

В примере 94 мы видели, что перпендикулярное расстояние точки Z от BC в 2 раза больше расстояния от точки A до BC, откуда следует, что *площадь* $\triangle ZBC = \frac{2}{5}$ *площадь* $\triangle ABC$. Наконец, в примере 95 мы увидели, что расстояние по перпендикуляру от L до CA равно $\frac{1}{4}$ расстояния от B до CA, откуда следует, что *площадь* $\triangle LCA = \frac{1}{4}$ *площадь* $\triangle ABC$. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned}\text{площадь } \triangle LUZ &= \text{площадь } \triangle ABC - \text{площадь } \triangle UAB - \text{площадь } \triangle ZBC \\ &\quad - \text{площадь } \triangle LCA = \text{площадь } \triangle ABC - \tfrac{1}{3}\,\text{площадь } \triangle ABC \\ &\quad - \tfrac{2}{5}\,\text{площадь } \triangle ABC - \tfrac{1}{4}\,\text{площадь } \triangle ABC = \tfrac{1}{60}\,\text{площадь } \triangle ABC.\end{aligned}$$

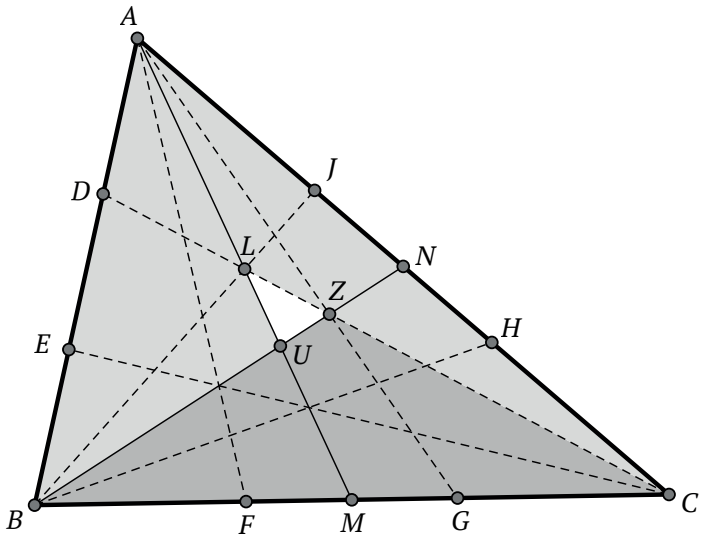


Рисунок Д-96

Пример 97. Непредвиденное свойство случайного треугольника с углом 60°

Чтобы доказать этот удивительный результат, полученный с помощью биссектрис BP и CQ углов B и C соответственно, которые пересекаются в точке E, необходимо для начала провести несколько вспомогательных линий. Выбрав точку R на стороне BC так, чтобы $BR = BQ$, как мы видим на рис. Д-97, проведем линии PQ, QR, RP и ER. Поскольку $\angle A = 60°$, получаем, что $\angle B + \angle C = 120°$. Следовательно, так как CE и BE — биссектрисы, $\angle CBE + \angle ECB = 60°$. Таким образом, $\angle BEC = 120°$ и $\angle CEP = \angle QEB = 60°$. Так как мы выбрали R таким образом, что $BR = BQ$ и BE делит пополам $\angle B$, мы имеем $\triangle BRE$, равный $\triangle BEQ$. Следовательно, $EQ = ER$ и $\angle QEB = \angle BER = 60°$. Таким образом, $\angle REC = \angle BEC - \angle BER = 120° - 60° = 60° = \angle CEP$. Кроме того, CE делит пополам $\angle C$, что позволяет сделать заключение о равенстве $\triangle CER$ и $\triangle CPE$; таким образом, $CP = CR$. Следовательно, $BC = BR + CR = BQ + CP$.

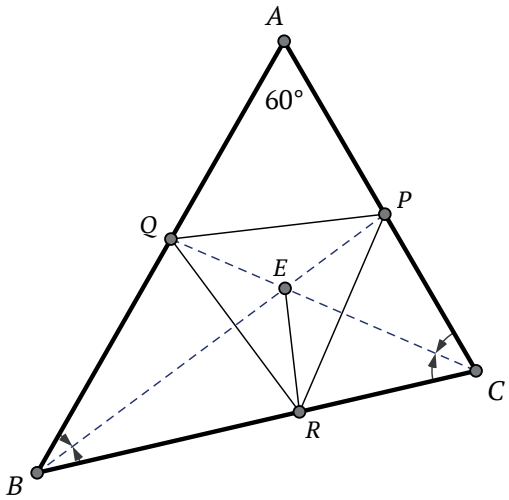


Рисунок Д-97

Пример 98. Еще одна удивительная особенность произвольного треугольника с углом в 60°

На рис. Д-98 четырехугольник $AFHE$ вписывается в окружность, так как имеет противоположные прямые углы. Поскольку $\angle BAC = 60°$, мы получаем $\angle EHF = 180° - \angle BAC = 120°$. Таким образом, $\angle FHB = 60°$, так что наша цель — показать, что $\angle OHB = 30°$. Поскольку $\angle BAC = 60°$, мы имеем $\angle BOC = 120°$. Однако $\angle BHC$ является дополнительным к $\angle FHB$, и, следовательно, он также равен 120°. Поскольку $\angle BOC = \angle BHC$, четырехугольник BCHO также имеет описанную окружность, и из этого получаем $\angle OHB = \angle OCB$. Так как треугольник OBC равнобедренный с $\angle BOC = 120°$, углы у его основания равны 30°, и таким об-

разом получаем $\angle OHB = \angle OCB = 30°$; следовательно, $\angle FHO = \angle FHB - \angle OHB = 60° - 30° = 30°$, т. е. OH делит пополам $\angle FHB$.

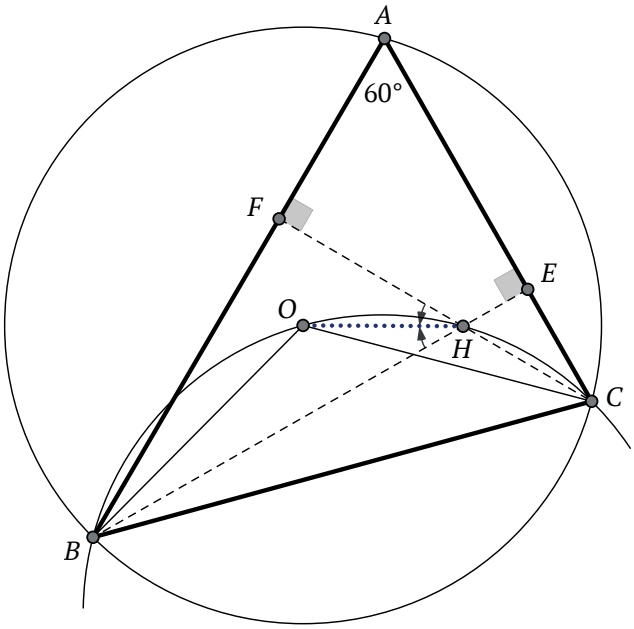


Рисунок Д-98

Пример 99. Еще одна неожиданная коллинеарность

На рис. Д-99 добавлены отрезки CI и CD. Поскольку BE является биссектрисой угла $\angle CBA$, а точки D и E лежат на окружности ABC, мы имеем $\angle CDE = \angle CBE = \angle EBA = \angle EDA$. Таким образом, мы имеем DE в качестве биссектрисы угла $\angle CDA$. Теперь рассмотрим треугольник DCI. Мы имеем $\angle CDI = \angle CDA = \angle CBA = \angle B$ и $\angle ICD = \angle ICB + \angle BCD = \angle ICB + \angle BAD = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle A$. Следовательно, имеем $\angle DIC = 180° - \angle CDI - \angle ICD = \angle A + \angle B + \angle C - \angle B - (\frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle A) = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle A$, откуда получаем, что DCI — равнобедренный треугольник. Таким образом, биссектриса DE угла $\angle CDA$ является биссектрисой, перпендикулярной основанию CI. Далее мы рассмотрим углы треугольника PIC, вспомнив, что PI была определена как параллельная AB, а PC — как касательная к описанной окружности ABC в точке C. Поскольку PC является касательной к окружности с центром O, мы имеем $\angle PCI = \angle PCB - \angle ICB = 180° - \angle A - \frac{1}{2}\angle C$. Рассмотрим пересечение IP и AC в точке Q. Здесь $\angle IQC = \angle BAC = \angle A$; таким образом, в треугольнике QIC мы получаем $\angle CIP = \angle CIQ = 180° - \angle IQC - \angle QCI = 180° - \angle A - \frac{1}{2}\angle C$. Мы видим, что треугольник PIC также является равнобедренным, так что точка P также лежит на биссектрисе, перпендикулярной к основанию IC. Иными словами, точки D, E и P лежат на одной прямой, как мы и намеревались доказать.

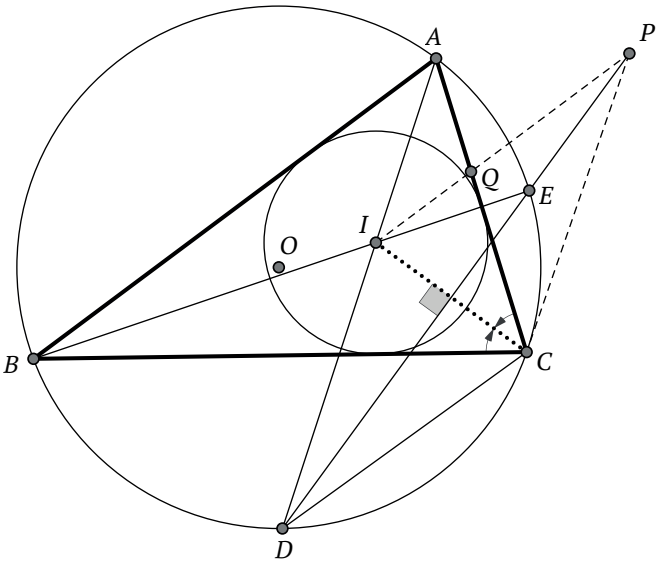


Рисунок Д-99

Пример 100. При отражении треугольников образуются пересекающиеся окружности и пересекающиеся прямые

На рис. Д-100 определяем точку P как пересечение окружностей, описанных вокруг $\triangle AC'B$ и $\triangle ACB'$. Наша цель — показать, что точка P также лежит на описанной окружности $\triangle A'CB$.

Поскольку противоположные углы четырехугольника с описанной окружностью являются дополнительными (до 180°), имеем $\angle APB = 180° - \angle BC'A = 180° - \angle C$, и $\angle CPA = 180° - \angle AB'C = 180° - \angle B$. Отсюда получается $\angle BPC = 360° - \angle APB - \angle CPA = 360° - (180° - \angle C) - (180° - \angle B) = \angle B + \angle C = 180° - \angle A$.

Поскольку $\angle CA'B = \angle A$, это означает, что P должно лежать на окружности $A'CB$, что завершает первую часть доказательства. Теперь остается показать, что прямые AQ, BR и CS параллельны. Чтобы сделать это, мы применим теорему Чевы (см. раздел B5 в части 3 «*Инструментарий*»), и пусть X, Y и Z обозначают точки пересечения AQ и BC, BR и CA, а также CS и AB соответственно, как показано на рис. Д-100. Затем нам нужно показать, что $\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$. Закон синусов (см. раздел A6 части 3 «*Инструментарий*») в треугольнике ABX дает $\frac{BX}{AX} = \frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle B}$, и аналогично треугольник AXC дает $\frac{CX}{AX} = \frac{\sin\angle XAC}{\sin\angle C}$. Поделив эти два уравнения, получаем $\frac{BX}{CX} = \frac{\sin\angle C \cdot \sin\angle BAX}{\sin\angle B \cdot \sin\angle XAC}$. Поскольку Q является центром описанной окружности $\triangle A'CB$, мы имеем $\angle CQB = 2\angle CA'B = 2\angle B$. Треугольник QCB равнобедренный; следовательно, мы получаем: $\angle QBC = \frac{1}{2}(180° - \angle CQB) = \frac{1}{2}(180° - 2\angle A) = 90° - \angle A$. Отсюда $\angle QBA = \angle QBC + \angle CBA = 90° - \angle A + \angle B$, и, применяя закон синусов к треугольнику ABQ, выводим

$\frac{BQ}{AQ} = \frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle QBA} = \frac{\sin\angle BAX}{\sin(90^\circ - \angle A + \angle B)}$. Аналогично те же соображения для треугольника AQC приведут к равенству $\frac{CQ}{AQ} = \frac{\sin\angle XAC}{\sin(90^\circ - \angle A + \angle C)}$. Поскольку $BQ = CQ$, эти два выражения равны, и мы получаем $\frac{\sin\angle BAX}{\sin(90^\circ - \angle A + \angle B)} = \frac{\sin\angle XAC}{\sin(90^\circ - \angle A + \angle C)}$, что эквивалентно $\frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle XAC} = \frac{\sin(90^\circ - \angle A + \angle B)}{\sin(90^\circ - \angle A + \angle C)}$. Подстановка дает $\frac{BX}{CX} = \frac{\sin\angle C \cdot \sin\angle BAX}{\sin\angle B \cdot \sin\angle XAC} = \frac{BX}{CX} = \frac{\sin\angle C \cdot \sin(90^\circ - \angle A + \angle B)}{\sin\angle B \cdot \sin(90^\circ - \angle A + \angle C)}$.

Если мы повторим эти рассуждения, проведенные для AQ, аналогичным образом для прямых BR и CS, то получим $\frac{CY}{AY} = \frac{\sin\angle C \cdot \sin(90^\circ - \angle B + \angle C)}{\sin\angle B \cdot \sin(90^\circ - \angle B + \angle A)}$ и $\frac{AZ}{BZ} = \frac{\sin\angle C \cdot \sin(90^\circ - \angle C + \angle A)}{\sin\angle B \cdot \sin(90^\circ - \angle C + \angle B)}$.

Перемножив эти равенства, получаем:

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} =$$
$$\frac{\sin\angle C \cdot \sin(90^\circ - \angle A + \angle B)}{\sin\angle B \cdot \sin(90^\circ - \angle A + \angle C)} \cdot \frac{\sin\angle A \cdot \sin(90^\circ - \angle B + \angle C)}{\sin\angle C \cdot \sin(90^\circ - \angle B + \angle A)} \cdot \frac{\sin\angle B \cdot \sin(90^\circ - \angle C + \angle A)}{\sin\angle A \cdot \sin(90^\circ - \angle C + \angle B)} =$$
$$\frac{\sin\angle C \cdot \sin(90^\circ - \angle A + \angle B)}{\sin\angle B \cdot \sin(90^\circ - (\angle A - \angle C))} \cdot \frac{\sin\angle A \cdot \sin(90^\circ - \angle B + \angle C)}{\sin\angle C \cdot \sin(90^\circ - (\angle B - \angle A))} \cdot \frac{\sin\angle B \cdot \sin(90^\circ - \angle C + \angle A)}{\sin\angle A \cdot \sin(90^\circ - (\angle C - \angle B))}.$$

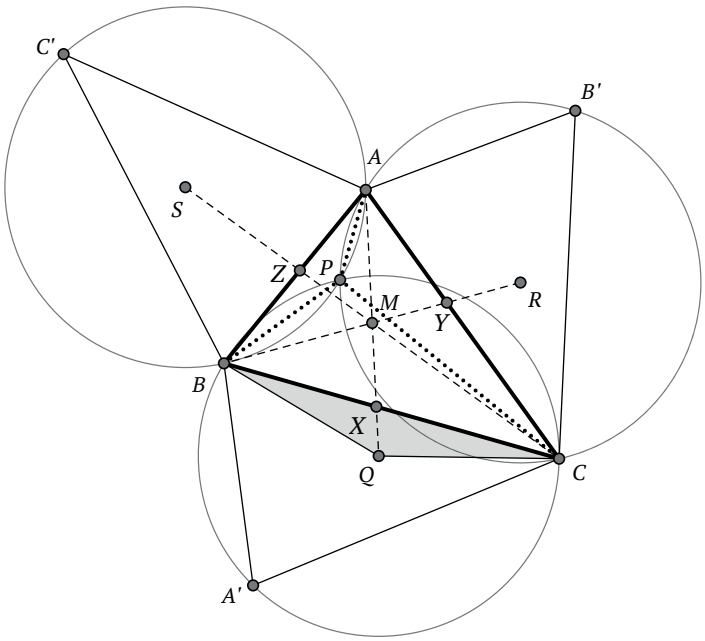


Рисунок Д-100

Мы знаем, что $\sin(90° + x) = \sin(90° - x)$; таким образом, мы видим, что все эти выражения взаимно сокращаются, и произведение равно 1. Следовательно, согласно теореме Чевы, прямые AX, BY и CZ пересекаются в одной точке, и это также верно для AQ, BR и CS, как мы и намеревались доказать.

Пример 101. Чудеса трех пересекающихся равных окружностей

Для начала обозначим буквой r длину радиуса трех равных окружностей с центрами Q, R и S. Как показано на рис. Д-101(а), точка P лежит на всех трех окружностях, и, следовательно $PQ = PR = PS$. Таким образом, точка P является центром описанной окружности треугольника QRS, а радиус этой окружности равен r. На этом завершается доказательство пункта (а).

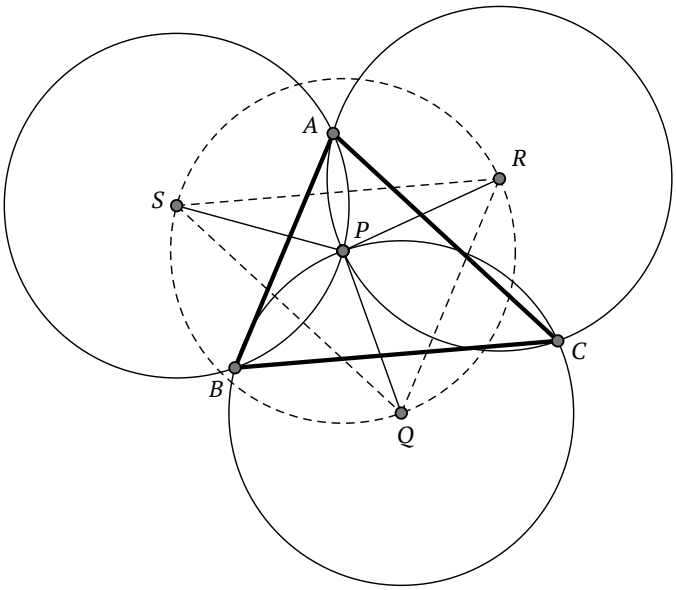


Рисунок Д-101(а)

Следующий пункт доказать будет немного сложнее. Рассмотрим детали конфигурации, показанной на рис. Д-101(б), где A', B' и C' выбираются так, чтобы $A'P$, $B'P$ и $C'P$ были диаметрами окружностей с центрами Q, R и S соответственно. Кроме того, точку пересечения продолжения AP с BC обозначим D, точку пересечения продолжения BP с CA обозначим E, а также точку пересечения продолжения CP с AB обозначим F.

Поскольку PB' и PC' — диаметры соответствующих окружностей, мы имеем $PB' = PC'$. Следовательно, треугольник $PB'C'$ является равнобедренным с $\angle C'B'P = \angle PC'B'$. Из равенства этих углов, опирающихся на AP в окружностях с центрами R и S, получаем $\angle PBA = \angle PC'A = \angle PC'B' = \angle C'B'P = \angle AB'P = \angle ACP$, и назовем этот угол $\angle PBA = \angle ACP = x$. Аналогично получаем $\angle PCB = \angle BAP = y$ и $\angle PAC = \angle CBP = z$.

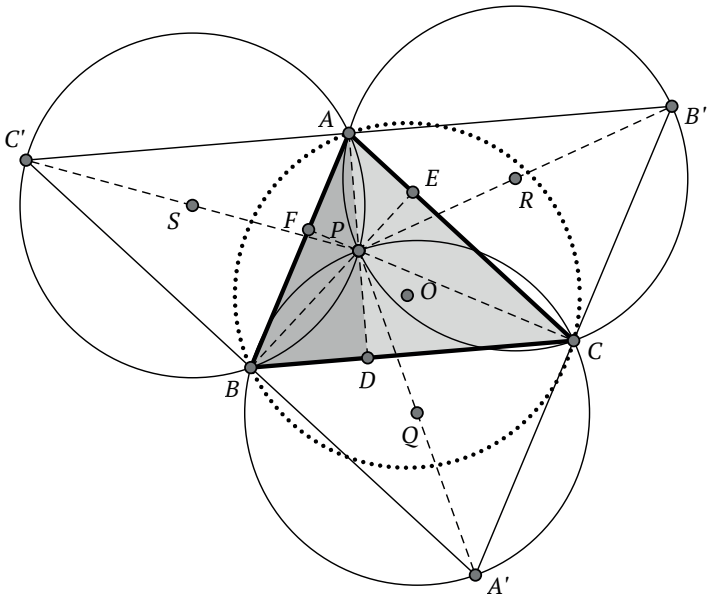


Рисунок 101(б)

Теперь рассмотрим затененные треугольники *ABD* и *ADC*. В $\triangle ABD$ имеем $180° = \angle ADB + \angle BAD + \angle DBA = \angle ADB + \angle BAP + \angle CBP + \angle PBA = \angle ADB + y + z + x$. Аналогично в $\triangle ADC$:

$$180° = \angle CDA + \angle ACD + \angle DAC = \angle CDA + \angle ACP + \angle PCB + \angle PAC$$
$$= \angle CDA + x + y + z.$$

Это означает, что $\angle ADB = \angle CDA$, и поскольку эти два угла являются дополнительными (до 180°), каждый из них должен равняться 90°. Таким образом, $AP \perp BC$. Аналогично можно показать, что $BP \perp CA$ и $CP \perp AB$. Таким образом, мы доказали, что точка *P* является ортоцентром треугольника *ABC*.

Теперь, когда установлено, что *P* является ортоцентром $\triangle ABC$, можно рассмотреть доказательство следующего пункта. На рис. Д-101(в) показан треугольник *ABC* вместе с окружностью с центром *Q* и ортоцентром треугольника *ABC* в точке *P*. Кроме того, добавлена точка пересечения продолжения *AD* с описанной окружностью $\triangle ABC$, обозначенная как *P**.

Теперь покажем, что треугольники *PBC* и *P*CB* симметричны относительно их общей стороны *BC*. Поскольку *PP** перпендикулярен *BC*, необходимо показать, что $\angle BPC = \angle CP^*B$. Так как четырехугольник *ABP*C* имеет описанную окружность, его противоположные углы являются дополнительными (до 180°), так что $\angle CP^*B = 180° - \angle A$. Из прямоугольных треугольников *BCE* и *BCF* получаем: $\angle BPC = 180° - \angle CBP - \angle PCB = 180° - (90° - \angle C) - (90° - \angle B) = \angle B + \angle C = 180° - \angle A$, и мы показали, что $\angle BPC = \angle CP^*B$. Поскольку это подразумевает равенство треугольников *PBC* и *P*CB*, их описанные окружности, следовательно, также равны. Так как описанная окружность $\triangle PBC$ — это окруж-

ность с центром Q, а описанная окружность $\triangle P^*CB$ — это окружность ABC, мы видим, что радиус описанной окружности ABC также равен r, что завершает доказательство пункта (в).

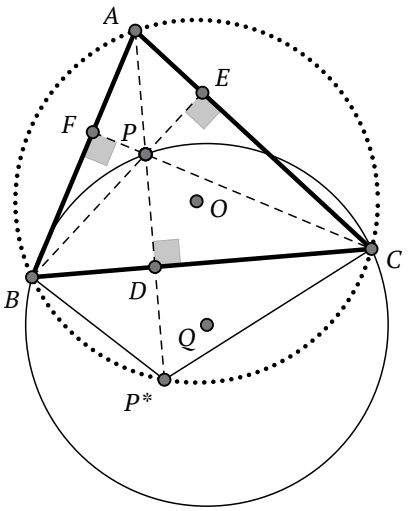


Рисунок Д-101(в)

Наконец, чтобы выполнить последний пункт, рассмотрим рис. Д-101(г). Мы только что показали, что $AP \perp BC$, и поскольку AP является общей хордой окружностей с центрами R и S, оба центра лежат на перпендикуляре к AP, что

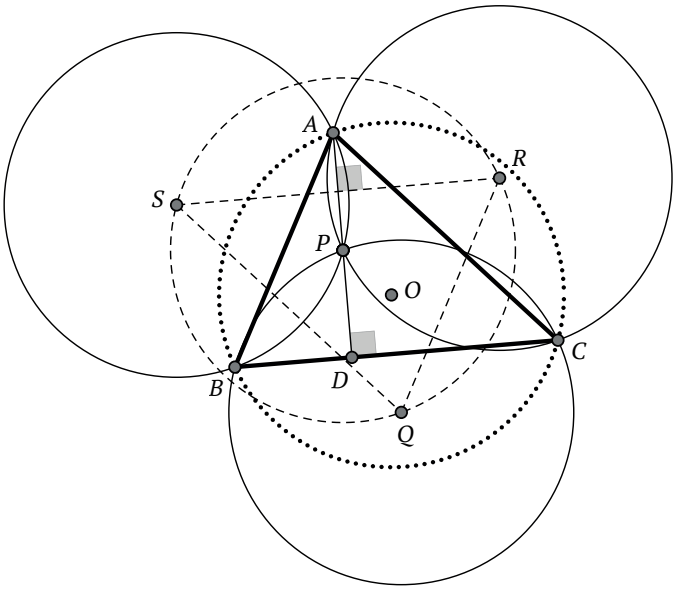


Рисунок Д-101(г)

дает $AP \perp RS$. Это дает нам $BC \parallel RS$, и так как мы можем аналогично определить $CA \parallel SQ$ и $AB \parallel QR$, мы видим, что треугольники ABC и QRS подобны. Поскольку мы уже знаем, что они оба имеют одинаковую описанную окружность с радиусом r, $\triangle ABC$ равен $\triangle QRS$, что завершает доказательство последнего пункта (г).

Пример 102. Другие неожиданные пересечения

Чтобы приступить к доказательству, сначала нужно установить несколько предварительных фактов. На рис. Д-102(а) основания перпендикуляров из точки P к сторонам AB, BC и CA треугольника — точки G, H и J соответственно. Применяя теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам $\triangle APJ$, $\triangle BPG$ и $\triangle CPH$, получаем $AP^2 + BP^2 + CP^2 = (AJ^2 + JP^2) + (BG^2 + GP^2) + (CH^2 + HP^2)$.

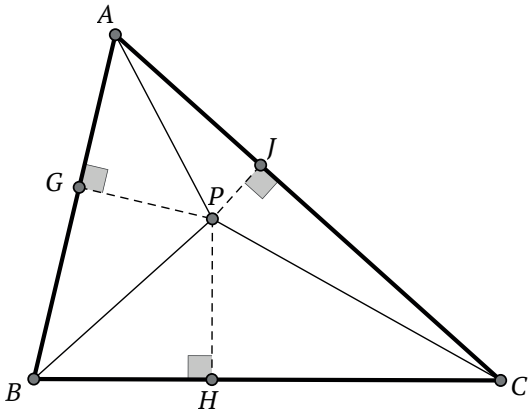


Рисунок Д-102(а)

Применяя теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам $\triangle APG$, $\triangle BPH$ и $\triangle CPJ$, получаем $AP^2 + BP^2 + CP^2 = (AG^2 + GP^2) + (BH^2 + HP^2) + (CJ^2 + JP^2)$, что эквивалентно $AJ^2 + CH^2 + BG^2 = AG^2 + BH^2 + CJ^2$. Обратите внимание, что на рисунке точка P находится внутри треугольника, но все рассуждения справедливы также, когда точка P находится за пределами треугольника.

Теперь, установив эти соотношения, замечаем, что верно и обратное. Другими словами, если точки G, H и J выбраны на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC соответственно так, что $AJ^2 + CH^2 + BG^2 = AG^2 + BH^2 + CJ^2$, и для каждой из этих точек проведены прямые, перпендикулярные соответствующим сторонам, эти три перпендикуляра должны пересекаться в общей точке P. (Мы ограничимся случаем, когда точки находятся внутри треугольника.) Это можно показать следующим образом. Рассмотрим прямые, перпендикулярные AB в точке G и CA в точке J, и предположим, что они пересекаются в точке P. Если провести линию, перпендикулярную BC, через P, она пересечется с BC в точке H', и в результате, который только что был установлен, получим $AJ^2 + CH'^2 + BG^2 = AG^2 + BH'^2 + CJ^2$. С другой стороны, мы также предположили, что остается в силе соотношение $AJ^2 + CH^2 + BG^2 = AG^2 + BH^2 + CJ^2$. Это означает, что

$0 = AJ^2 + CH'^2 + BG^2 - (AG^2 + BH'^2 + CJ^2) = AJ^2 + CH^2 + BG^2 - (AG^2 + BH^2 + CJ^2)$, или, что то же самое, $CH'^2 - BH'^2 = CH^2 - BH^2$. Если мы сможем показать, что из этого должно следовать совпадение $H = H'$, это будет означать, что три перпендикуляра пересекаются в точке P. Заметим, что равенство $CH'^2 - BH'^2 = CH^2 - BH^2$ эквивалентно $(CH' - BH')(CH' + BH') = (CH - BH)(CH + BH)$. Поскольку мы предполагаем, что H и H' находятся между B и C, мы имеем $CH' + BH' = CH + BH = BC$ и из этого получаем $CH' - BH' = CH - BH$. Если мы теперь предположим, что $CH' < CH$, это означает, что $BH' > BH$; следовательно, $CH' - BH' < CH - BH$. Аналогично $CH' > CH$ подразумевает $CH' - BH' > CH - BH$, т. е. $CH' = CH$; таким образом, имеет место совпадение точек $H' = H$. Теперь мы готовы применить эти результаты к рассматриваемой задаче.

Мы применим это соотношение на рис. Д-102(б) к треугольнику DEF и точке Q с ее перпендикулярами к каждой из трех сторон в точках L, M и N. Нам нужно доказать, что $DL^2 + FN^2 + EM^2 = DM^2 + EN^2 + FL^2$, или $(DL^2 - FL^2) + (FN^2 - EN^2) + (EM^2 - DM^2) = 0$. Из-за прямых углов точки L, M и N, безусловно, являются внутренними точками на сторонах треугольника DEF. Теорема Пифагора применительно к треугольнику ADF дает $AD^2 - DL^2 = AF^2 - FL^2$, или $DL^2 - FL^2 = AD^2 - AF^2$. Точно так же для треугольника BED справедливо $EM^2 - DM^2 = BE^2 - BD^2$, а для треугольника CFE справедливо $FN^2 - EN^2 = CF^2 - CE^2$. Уравнение, которое мы должны доказать: $(AD^2 - AF^2) + (CF^2 - CE^2) + (BE^2 - BD^2) = 0$. Это может быть также выражено как $(AD^2 - BD^2) + (BE^2 - CE^2) + (CF^2 - AF^2) = 0$, что следует из рассмотрения треугольников ABD, BCE и CAF. Из определения точек G, H и J вытекает справедливость соотношения $(AG^2 + GP^2) + (BH^2 + HP^2) + (CJ^2 + JP^2) = 0$. В треугольнике ABD мы имеем $GD^2 = AD^2 - AG^2 = BD^2 - BG^2$, что дает $AD^2 - BD^2 = AG^2 - BG^2$. Аналогично из треугольника BCE получаем $BE^2 - CE^2 = BH^2 - CH^2$, а из треугольника CAF получаем $CF^2 - AF^2 = CJ^2 - AJ^2$. Это означает, что равенство $(AD^2 - BD^2) + (BE^2 - CE^2) + (CF^2 - AF^2) = 0$ эквивалентно $(AG^2 - BG^2) + (BH^2 - CH^2) + (CJ^2 - AJ^2) = 0$, и прямые AL, BM и CN действительно пересекаются в общей точке Q, как мы и намеревались доказать.

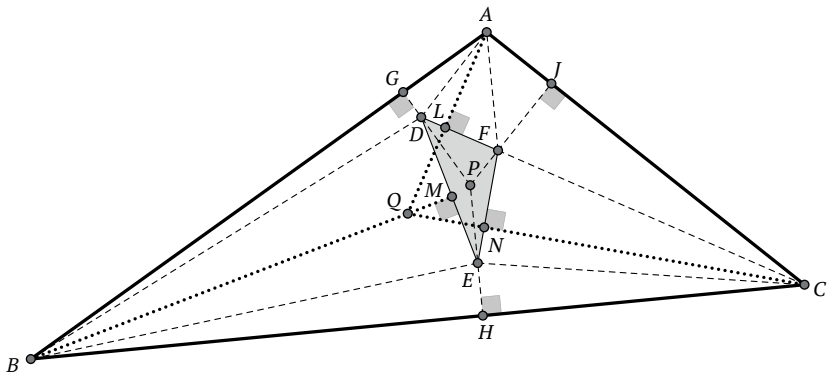


Рисунок Д-102(б)

Пример 103. Одно пересечение порождает другое

Поскольку *AD*, *BE* и *CF* пересекаются в точке *P*, как показано на рис. Д-103, теорема Чевы (см. раздел B5 в части 3 «*Инструментарий*») дает соотношение $\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF} = 1$. Секущие *AC* и *AB* проводятся из внешней точки, при пересечении окружности они дают $AY\cdot AE = AF\cdot AZ$, что эквивалентно $\frac{AF}{AE} = \frac{AY}{AZ}$. Аналогично для вершин *B* и *C* также получаем $\frac{BD}{BF} = \frac{BZ}{BX}$ и $\frac{CE}{CD} = \frac{CX}{CY}$. Подстановка этих выражений в $\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF} = 1$, что также можно переписать как $\frac{BD}{BF}\cdot\frac{CE}{CD}\cdot\frac{AF}{AE} = 1$, дает $\frac{BZ}{BX}\cdot\frac{CX}{CY}\cdot\frac{AY}{AZ} = 1$, что можно переписать как $\frac{CX}{BX}\cdot\frac{AY}{CY}\cdot\frac{BZ}{AZ} = 1$. Согласно обратной теореме Чевы, находим, что *AX*, *BY* и *CZ* также пересекаются в одной точке, что и пытались доказать.

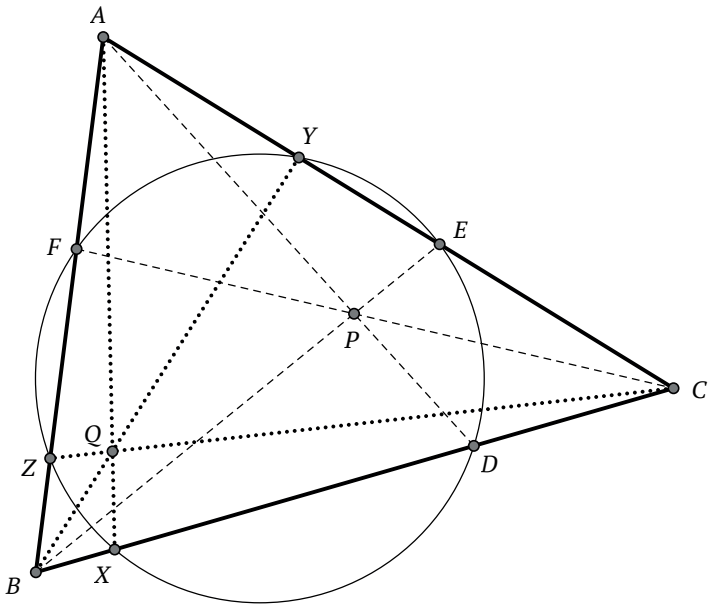


Рисунок Д-103

Пример 104. Необычные перпендикуляры, порождающие пересечения

На рис. Д-104 добавлены середины *X*, *Y* и *Z* отрезков *DK*, *EL* и *FM* соответственно, а также перпендикуляры *OX*, *OY* и *OZ* к серединам отрезков *DK*, *EL* и *FM* соответственно, которые пересекаются в центре *O* исходной окружности. Отрезок *PQ*, образующий трапецию *QKDP*, построен так, чтобы точка *O* являлась его серединой. Аналогично для трапеции *QMFP* мы снова имеем точку *O*

в качестве средней точки QP. Следовательно, мы имеем $PO = QO$. Кроме того, у нас есть середина O той же стороны QP у трапеции $ELQP$. Таким образом, мы видим, что перпендикуляры QK, QL и QM будут пересекаться в одной точке Q, что мы и хотели показать.

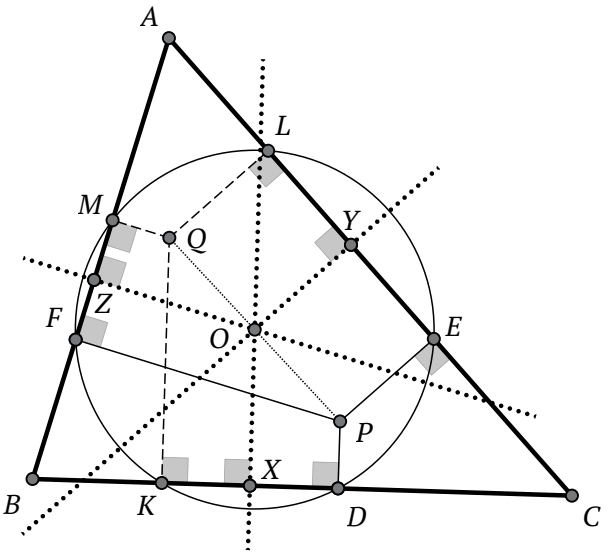


Рисунок Д-104

Пример 105. Совершенно неожиданное пересечение

На рис. Д-105 сначала рассмотрим треугольник KMN. Поскольку M, N и G являются средними точками AC, AB и AD соответственно, мы имеем $MN \parallel BC$, так что $\triangle ADC$ подобен $\triangle AGM$ и $\triangle ANG$ подобен $\triangle ABD$, откуда $\frac{NG}{BD} = \frac{AG}{GD} = \frac{MG}{CD}$, что может быть переписано как $\frac{BD}{CD} = \frac{NG}{MG}$. Аналогично получаем $\frac{CE}{AE} = \frac{KH}{NH}$ и $\frac{AF}{BF} = \frac{MJ}{KJ}$.

Поскольку AD, BE и CF пересекаются в одной точке, теорема Чевы (см. раздел В5 в части 3 «*Инструментарий*») дает $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$. Подстановка для каждой из трех дробей дает $\frac{NG}{MG} \cdot \frac{KH}{NH} \cdot \frac{MJ}{KJ} = 1$, откуда KG, MH и NJ, согласно теореме Чевы, пересекаются в одной точке.

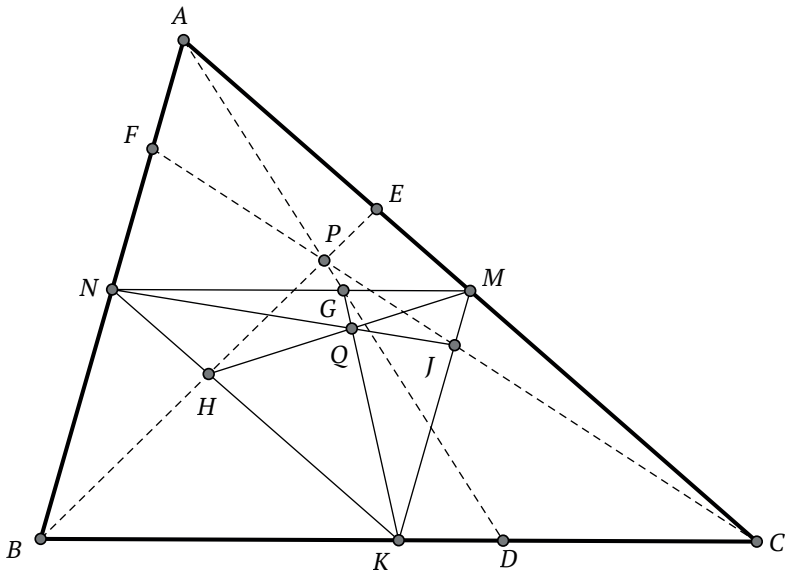


Рисунок Д-105

Пример 106. Интригующие пересечения

На рис. Д-106 отрезки *AK*, *BM* и *CN* продолжены до пересечения с прямыми *BC*, *CA* и *AB* в точках *X*, *Y* и *Z* соответственно. Поскольку мы хотим доказать, что эти три продолжения сходятся в общей точке, следует применить теорему Чевы (см. раздел B5 в части 3 «*Инструментарий*») и показать, что $\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1$. В качестве первого шага отметим, что в треугольнике *ABX*, согласно закону синусов (см. раздел A6 части 3 «*Инструментарий*»), мы имеем $\frac{BX}{AX}=\frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle B}$. Обратите внимание, что мы, как обычно, используем $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ для обозначения углов в вершинах треугольника *ABC*. Аналогично в $\triangle AXC$ имеем $\frac{CX}{AX}=\frac{\sin\angle XAC}{\sin\angle C}$, и деление первого из этих равенств на второе дает $\frac{BX}{CX}=\frac{\sin\angle C\cdot\sin\angle BAX}{\sin\angle B\cdot\sin\angle XAC}$.

Теперь применим закон синусов к треугольнику *AFK*. Здесь получаем $\frac{AF}{FK}=\frac{\sin\angle AKF}{\sin\angle BAX}$, что может быть переписано как $AF\cdot\sin\angle BAX = FK\cdot\sin\angle AKF$. Аналогично в треугольнике *AKE* имеем $\frac{AE}{EK}=\frac{\sin\angle EKA}{\sin\angle XAC}$, что может быть переписано как $AE\cdot\sin\angle XAC = EK\cdot\sin\angle EKA$. Поскольку $FK = EK$ и $\sin\angle AKF = \sin\angle EKA$, получаем $AF\cdot\sin\angle BAX = AE\cdot\sin\angle XAC$, что можно переписать как $\frac{AE}{AF}=\frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle XAC}$. Подстановка дает $\frac{BX}{CX}=\frac{\sin\angle C\cdot\sin\angle BAX}{\sin\angle B\cdot\sin\angle XAC}=\frac{\sin\angle C}{\sin\angle B}\cdot\frac{AE}{AF}$. Ана-

логично получаем $\frac{CY}{AY} = \frac{\sin\angle A}{\sin\angle C} \cdot \frac{BF}{BD}$ и $\frac{AZ}{BZ} = \frac{\sin\angle B}{\sin\angle A} \cdot \frac{CD}{CE}$, что окончательно дает с применением теоремы Чевы

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = \frac{\sin\angle C}{\sin\angle B} \cdot \frac{AE}{AF} \cdot \frac{\sin\angle A}{\sin\angle C} \cdot \frac{BF}{BD} \cdot \frac{\sin\angle B}{\sin\angle A} \cdot \frac{CD}{CE} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{BF}{BD} \cdot \frac{CD}{CE} = 1.$$

Это доказывает, что *AK*, *BM* и *CN* действительно пересекаются в одной точке.

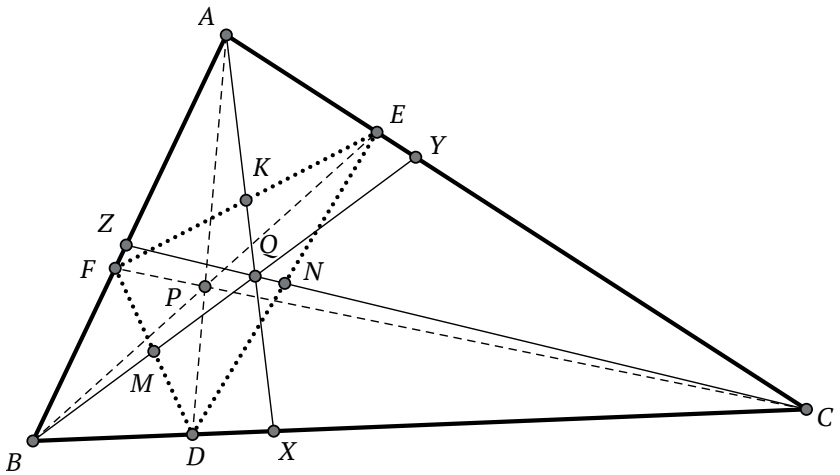


Рисунок Д-106

Пример 107. Еще одно неожиданное и непредусмотренное пересечение

Мы знаем, что медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине ее длины. Следовательно, когда два прямоугольных треугольника имеют одну и ту же гипотенузу, их медианы, проведенные к гипотенузе, равны. Следовательно, для прямоугольных треугольников *BCF* и *BCR* на рис. Д-107, имеющих общую гипотенузу *BC*, имеем *QD* = *RD*. Тогда прямая *DX* перпендикулярна к отрезку *RQ* и делит его пополам. Из тех же соображений можно показать, что прямая *EY* перпендикулярна и делит пополам отрезок *RP*, а прямая *FZ* — отрезок *QP*. Перпендикулярные отрезки к трем сторонам треугольника (в данном случае $\triangle PQR$) сходятся в центре описанной окружности этого треугольника и, следовательно, пересекаются в одной точке.

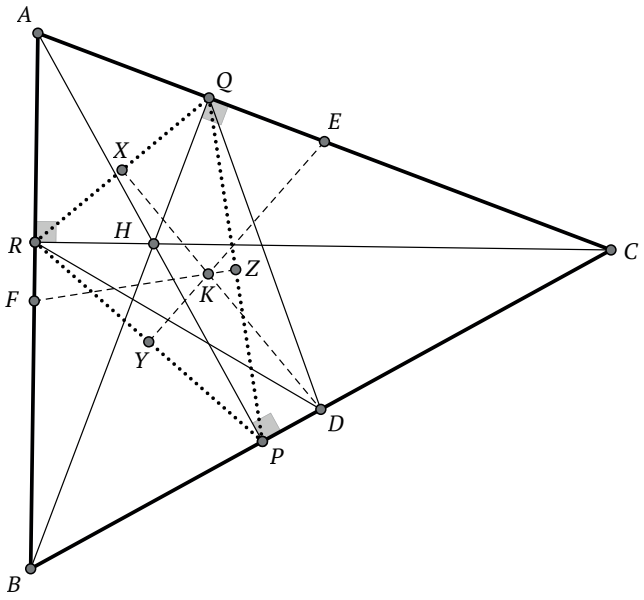


Рисунок Д-107

Пример 108. Самое неожиданное пересечение в треугольнике

На рис. Д-108 мы сначала расширяем *PD* до пересечения с *AB* в точке *N*. Применяя теорему Чевы (см. раздел B5 в части 3 «*Инструментарий*»), получаем $\frac{AN}{BN}\cdot\frac{BC}{PC}\cdot\frac{PE}{AE}=1$.

Также имеем $EX \parallel AB$, откуда $\frac{BC}{PC}=\frac{AE}{PE}$. Подстановка дает $\frac{AN}{BN}\cdot\frac{AE}{PE}\cdot\frac{PE}{AE}=1$, что упрощается до $\frac{AN}{BN}=1$. Это эквивалентно равенству $AN = BN$, т. е. точка *N* является серединой отрезка *AB* и, следовательно, совпадает с точкой *M*. Следовательно, продолжение прямой *PD* проходит через точку *M*, и это доказывает пересечение отрезков *AE*, *BC* и *MD* в одной точке *P*.

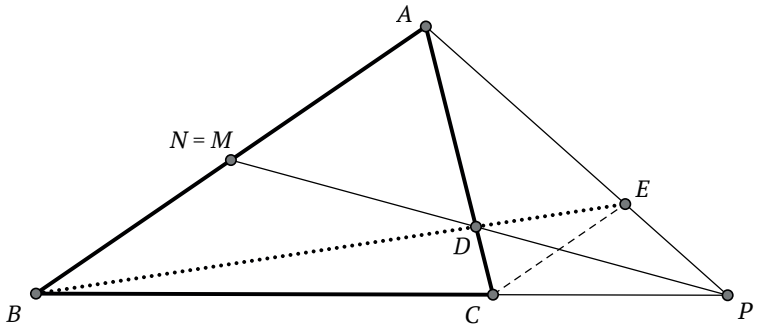


Рисунок Д-108

Пример 109. Поразительное свойство точки в треугольнике

Еще раз применим теорему Чевы (см. раздел B5 в части 3 «*Инструментарий*»), чтобы показать, что *AD*, *BE* и *CF* сходятся в общей точке. Мы должны показать $\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF} = 1$. Поскольку *PD* был построен как биссектриса $\angle BPC$, имеем $\frac{BD}{CD} = \frac{PB}{PC}$ (см. раздел B1 в части 3 «*Инструментарий*»), и то же самое для $\angle CPA$ и $\angle APB$ дает $\frac{CE}{AE} = \frac{PC}{PA}$ и $\frac{AF}{BF} = \frac{PA}{PB}$ соответственно. Соответствующая подстановка дает $\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF} = \frac{PB}{PC}\cdot\frac{PC}{PA}\cdot\frac{PA}{PB} = 1$. Исходя из теоремы Чевы, мы видим, что *AD*, *BE* и *CF* сходятся в одной общей точке.

Теперь нам нужно показать, что справедливы неравенства $\frac{1}{2}(AB + BC + CA) < PA + PB + PC < 2(AB + BC + CA)$. В треугольнике *PBC* основное неравенство треугольника[1] дают нам $PB + PC > BC$. Аналогично в треугольниках *PCA* и *PAB* получаем $PC + PA > CA$ и $PA + PB > AB$ соответственно. Сложение этих трех неравенств дает нам $2PA + 2PB + 2PC > AB + BC + CA$, что эквивалентно левой части неравенства $\frac{1}{2}(AB + BC + CA) < PA + PB + PC$.

Чтобы доказать неравенство правой части $PA + PB + PC < 2(AB + BC + CA)$, мы определяем точку *X* как пересечение продолжения *BC* с *AP*, как показано на рис. Д-109. Поскольку *P* находится внутри *ABC*, мы имеем $PA < XA$ и $BX < BC$. Основное неравенство треугольника для $\triangle ABX$ дают $PA < XA < AB + BX < AB + BC$. Поскольку мы можем действовать аналогично предыдущим случаям для *PB* и *PC*, также справедливо, что $PB < BC + CA$ и $PC < CA + AB$, и сложение этих трех неравенств дает нам правую часть неравенства $PA + PB + PC < 2(AB + BC + CA)$.

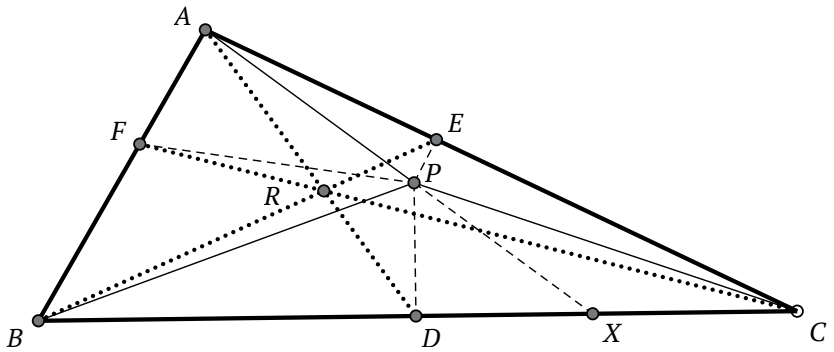


Рисунок Д-109

[1] Сумма длин любых двух сторон треугольника больше длины третьей стороны (**теорема о неравенстве треугольника**).

Пример 110. Пересечение, противоречащее здравому смыслу

На рис. Д-110 обозначим пересечение EH с DG как точку M, а пересечение FJ с DG как точку N. Наша цель — показать, что $M = N$, поскольку это означает, что прямые DG, EH и FJ совпадают в общей точке $M = N = P$. У нас также есть точка K в качестве пересечения AD с BC, точка I в качестве пересечения AD с EH и точка Q в качестве пересечения EH с BC. С помощью перпендикуляров, указанных на рис. Д-110, находим, что $\angle MED = \angle CAK$, поскольку каждый из них дополняет вертикальные углы в точке L в треугольниках DLE и HAL соответственно. У нас также есть угол ACQ, дополнительный углу CQH, и угол QMG, дополнительный углу CQH; следовательно, $\angle ACK = \angle ACQ = \angle QMG = \angle EMD$. Треугольники MED и CAK, следовательно, подобны, и мы имеем $\frac{DM}{DE} = \frac{KC}{KA}$. Аналогичным образом мы можем показать, что $\triangle BKA$ подобен $\triangle FND$, соответственно, $\frac{DF}{DN} = \frac{KA}{KB}$. Так как отрезки BE, AD и CF перпендикулярны общей прямой, они параллельны друг другу: $BE \parallel AD \parallel CF$, что позволяет вывести пропорцию $\frac{DE}{DF} = \frac{KB}{KC}$. Перемножая последние пропорции, получаем $\frac{DM}{DE} \cdot \frac{DF}{DN} \cdot \frac{DE}{DF} = \frac{KC}{KA} \cdot \frac{KA}{KB} \cdot \frac{KB}{KC}$, что можно сократить до $\frac{DM}{DN} = 1$, или $DM = DN$. Это означает, что точки M и N совпадают, и доказывает пересечение трех прямых DG, EH и FJ в одной точке.

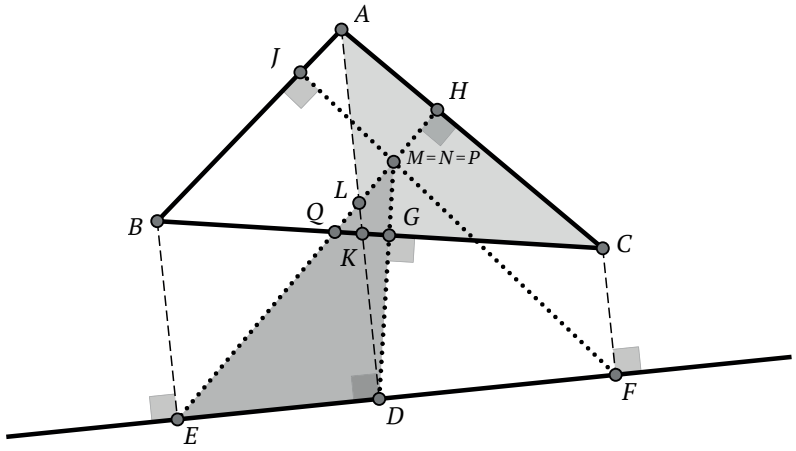


Рисунок Д-110

Пример 111. Пересекающиеся биссектрисы треугольников с общим основанием

Углы в точках C, D, E и F равны, поскольку они опираются на общую хорду AB описанной окружности треугольника ABC, как показано на рис. Д-111. Каждый

из этих углов равен половине дуги AB. Биссектрисы каждого из этих углов пересекаются в средней точке P дуги AB; т. е. биссектрисы пересекаются в одной точке.

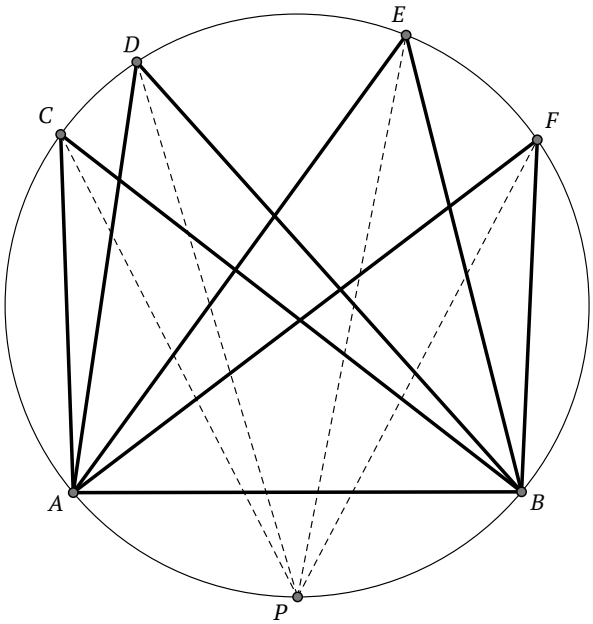


Рисунок Д-111

Пример 112. Неожиданное пересечение с участием описанной окружности

На рис. Д-112 точка P является точкой пересечения KL и AO. Наша цель — показать, что $PD \perp BC$. Треугольник PAD является равнобедренным, поскольку KL делит пополам отрезок AD, т. е. $\angle DAP = \angle PDA = x$. Пусть $\angle CAP = y$. Так как AD — биссектриса $\angle BAC$, то $\angle DAB = \angle CAD = x + y$. Тогда пусть $\angle ADB = z$. Поставим точку G как диаметрально противоположную точке A на описанной окружности треугольника ABC, как показано на рис. Д-112. Отметим, что $\angle ACG = 90°$, поскольку AG — это диаметр окружности; следовательно, $\angle CBA = \angle AGC = 90° - y$. В $\triangle ABD$ тогда $180° = \angle CBA + \angle BAD + \angle ADB = (90° - y) + (x + y) + z = 90° + x + z$, от чего получаем $\angle JDB = \angle JDA + \angle ADB = x + z = 90°$; таким образом, $PD \perp BC$. Это подтверждает, что прямые KL, DJ и AO пересекаются в точке P.

Пример 113. Удивительный аспект пересечения чевиан

Эта конфигурация по построению имеет некоторое количество параллелограммов. Начнем с того, что на рис. Д-113 можно заметить, что четырехугольники $FNDU$ и $FUEM$ являются параллелограммами, поскольку у них обе пары противоположных сторон параллельны. Следовательно, $ND = ME$. Тогда $MNDE$ явля-

ется параллелограммом, диагонали которого *NE* и *MD* пересекают друг друга в точке *P*. Кроме того, четырехугольник *DSEU* также является параллелограммом, и, следовательно, *FN* = *UD* = *ES*. Это показывает нам, что четырехугольник *FNSE* тоже является параллелограммом, а его диагонали *NE* и *FS* тоже пересекают друг друга в общей точке *P*. Таким образом, мы показали, что три прямые *MD*, *NE* и *SF* пересекаются в точке *P*, а также разделяют друг друга пополам.

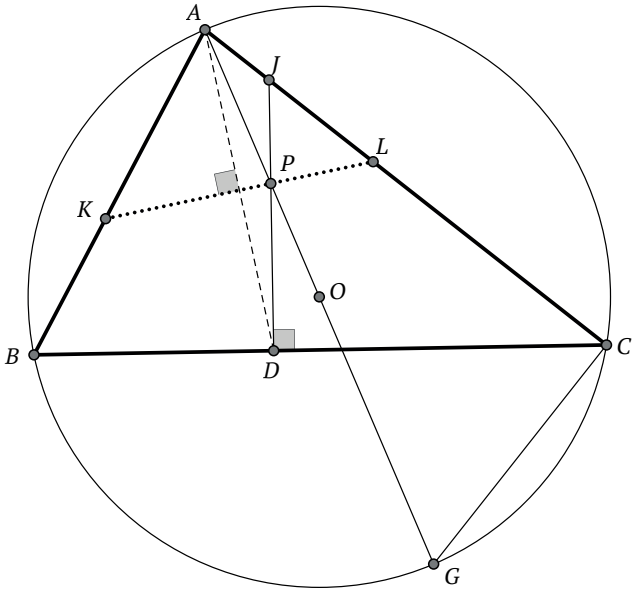


Рисунок Д-112

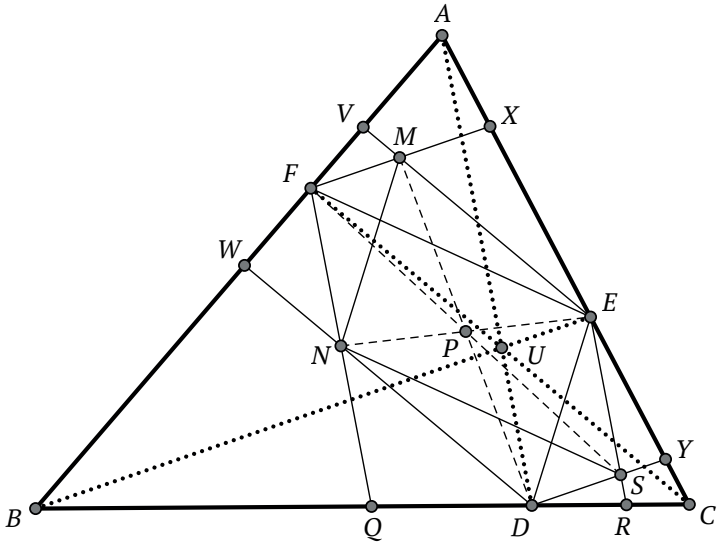


Рисунок Д-113

Пример 114. Удивительное равенство

Рассмотрим треугольники AGE и ABH, показанные на рис. Д-114. Сначала полезно сделать несколько предварительных замечаний. Обозначим $\angle BAC = \alpha$, и поскольку AD делит этот угол пополам, получим $\angle BAD = \angle DAC = \frac{\alpha}{2}$. Этот угол встретится еще несколько раз: так, для вертикальных углов в вершине A имеем $\angle GAE = \angle DAC = \frac{\alpha}{2}$, а поскольку BE параллелен AD, также $\angle BAD = \angle ABE = \frac{\alpha}{2}$. Наконец, в треугольнике AEB также имеем $\angle BEA = \angle BAC - \angle ABE = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Это означает, что треугольник AEB является равнобедренным и $\angle ABE = \angle BEA = \frac{\alpha}{2}$. Заметим, что $\angle EGA = \angle EGD = \angle ECD = \angle ACB$, и в описанной окружности треугольника ABC углы $\angle ACB = \angle AHB$. Следовательно, $\angle EGA = \angle AHB$. Теперь мы готовы вернуться к треугольникам AGE и ABH, где $\angle GAE = \angle BAH = \frac{\alpha}{2}$ и $\angle EGA = \angle AHB$. Это указывает на то, что треугольники AGE и ABH равны, а $AG = AH$, что мы и собирались доказать.

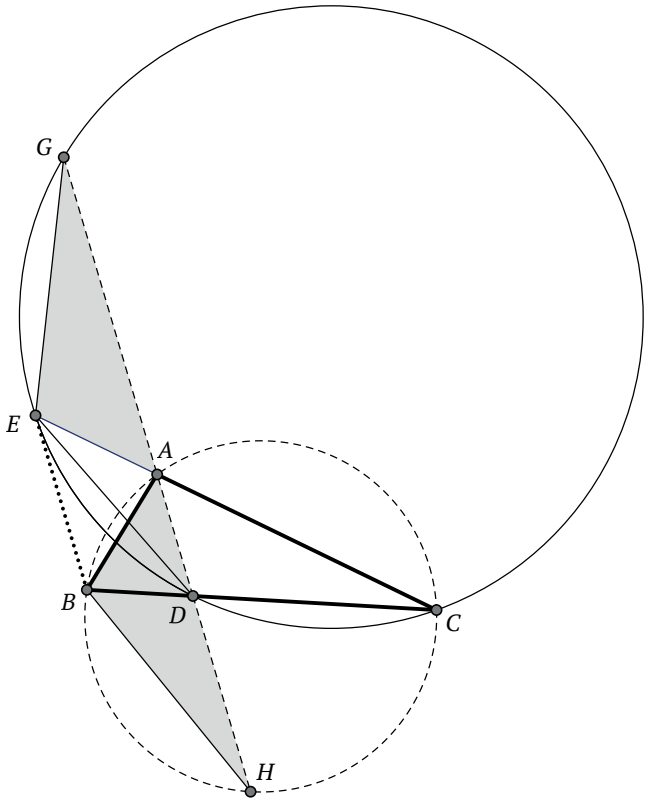


Рисунок Д-114

Пример 115. Непредвиденный сюрприз треугольника

Начнем с того, что проведем несколько вспомогательных линий на рис. Д-115. Продолжим BK до точки D, так что $BK = DK$, и продолжим CH до точки E, так

что $CH = EH$. Затем проведем отрезки AD, CD, AE и BE. Поскольку перпендикуляр AH делит CE пополам, мы находим, что $\triangle AHC$ равен $\triangle AEH$; следовательно, $AC = AE$ и $\angle CAH = \angle HAE$. Аналогично можно показать, что $\triangle AKD$ равен $\triangle ABK$ и $AD = AB$, а также $\angle DAK = \angle KAB$. Вычитанием получаем: $\angle BAE = \angle KAB - \angle HAE = \angle DAK - \angle CAH = \angle CAD$. Затем можно заключить, что $\triangle DAC$ равен $\triangle BEA$ и, следовательно, $CD = BE$. Теперь необходимо рассмотреть $\triangle DBC$, где точки K и M являются средними точками сторон BD и BC соответственно. Следовательно, $MK = \frac{1}{2}CD$. Аналогично в $\triangle CBE$ точки M и H являются средними точками сторон CB и CE соответственно, и имеем $MH = \frac{1}{2}BE$. Поскольку $CD = BE$, получаем $MK = MH$.

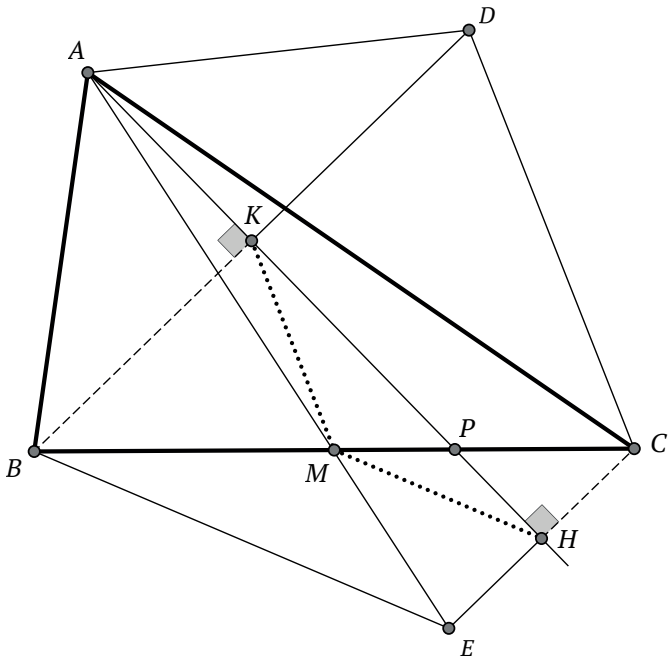


Рисунок Д-115

Пример 116. Замечательное свойство двух треугольников с общим основанием

На рис. Д-116(а) добавлена общая высота AR треугольников ABC и DBC. Прямая AR пересекает EH в точке Q, а AQ — это высота треугольников AEF и DGH. Поскольку $BC \parallel EF$, треугольники ABC и AEF подобны, и, следовательно, имеем $\frac{EF}{BC} = \frac{AQ}{AB}$. Теперь, рассматривая треугольники DBC и DGH, мы видим, что они также подобны, следовательно, $BC \parallel GH$, и имеем $\frac{GH}{BC} = \frac{AQ}{AB}$. Отсюда

$\frac{EF}{BC} = \frac{AQ}{AB} = \frac{GH}{BC}$; следовательно, $EF = GH$. Это равенство не зависит от расстояния между EH и BC и, следовательно, справедливо и для IL. Тогда мы также получаем $IK = JL$, из чего следует, что $IJ + JK = JK + KL$, что эквивалентно $IJ = KL$.

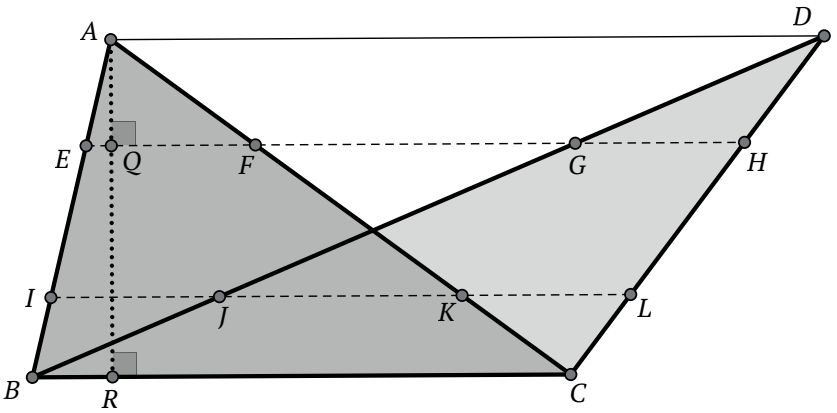


Рисунок Д-116(а)

Рассматривая ситуацию, проиллюстрированную на рис. Д-116(б), видим, что рассуждения, аналогичные приведенным выше, приводят к $\frac{MN}{BC} = \frac{AQ}{AB} = \frac{OP}{BC}$; следовательно, $MN = OP$. Отсюда получаем $MP + PN = OM + MP$, из чего следует $PN = OM$.

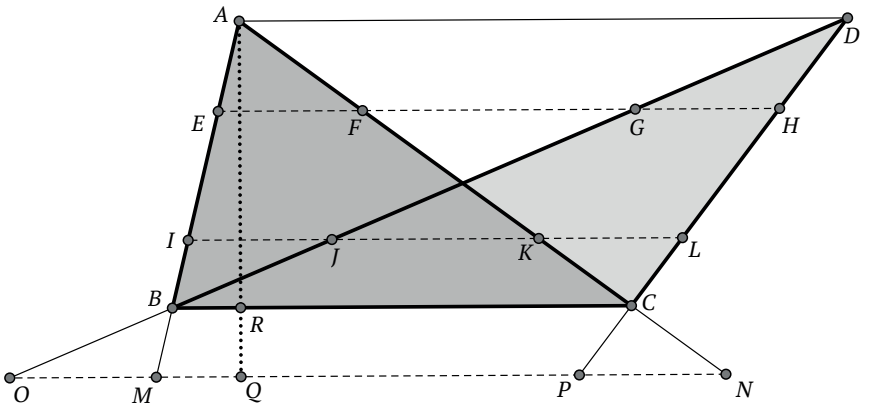


Рисунок Д-116(б)

Пример 117. Неожиданное разбиение на отрезки

На рис. Д-117 добавлены отрезки BE, AF и AG. Поскольку $\angle E$ опирается на дугу, проходящую через концы диаметра BC, имеем $\angle BEC = 90°$. Аналогично, поскольку $\angle F$ опирается на дугу, проходящую через концы диаметра CA, мы

также имеем $\angle CFA = 90°$ и, следовательно, $\angle AFG = 90°$. Учитывая, что $\angle B$ и $\angle G$ опираются на дугу, проходящую через концы хорды CA окружности диаметром AB, которая также является описанной окружностью $\triangle ABC$, мы имеем $\angle CGA = \angle CBA$. Прямоугольные треугольники FAG и CAB, таким образом, подобны, и мы имеем $\frac{FA}{FG} = \frac{CA}{CB}$, или $FA = FG \cdot \frac{CA}{CB}$. Далее, рассматривая треугольники EBC и FCA, отметим, что $\angle ACF = \angle ACB - \angle ECB = 90° - \angle ECB = \angle CBE$. Это означает, что прямоугольные треугольники EBC и FCA также подобны, что подразумевает $\frac{CE}{CB} = \frac{FA}{CA}$, или $CE = FA \cdot \frac{CB}{CA}$. Соответствующая подстановка тогда дает $CE = FG \cdot \frac{CA}{CB} \cdot \frac{CB}{CA} = FG$.

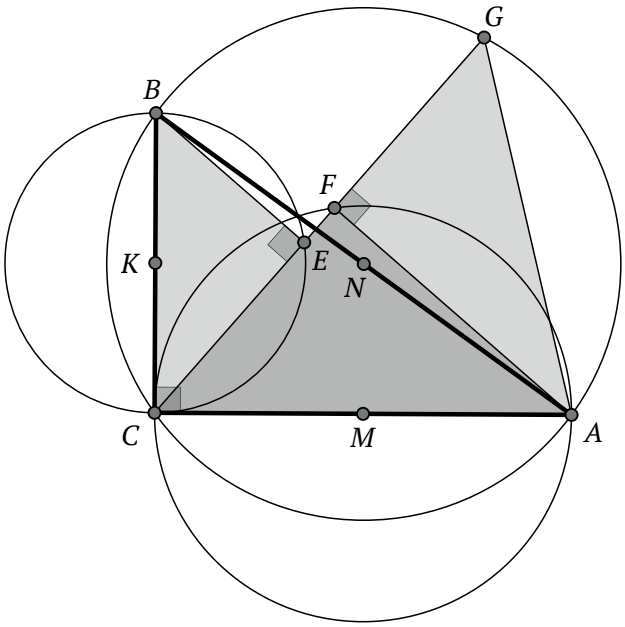


Рисунок Д-117

Пример 118. Скрытое равенство длин отрезков прямой в треугольнике

На рис. Д-118 сразу отмечаем, что четырехугольник $ADHE$ является параллелограммом, так как противоположные стороны параллельны. Диагонали AH и DE пересекают друг друга в точке M. Поскольку $DF \parallel AH \parallel EG$, мы находим, что AH также делит пополам FG, так что $FH = GH$. Через K обозначаем точку пересечения AH с прямой, параллельной BC и проходящей через точку E. Поскольку $EACH$ также является параллелограммом, имеем $FH = GH = EK$. У нас также есть соответственные углы наклона к параллельным прямым $\angle DHF = \angle AEK$ и $\angle HFD = \angle EKA$, откуда $\triangle AKE$ равен $\triangle DFH$. Из этого мы по-

лучаем $AK = DF$. Возвращаясь снова к параллелограмму $EKHG$, где $KH = EG$, имеем $DF + EG = AK + KH = AH$.

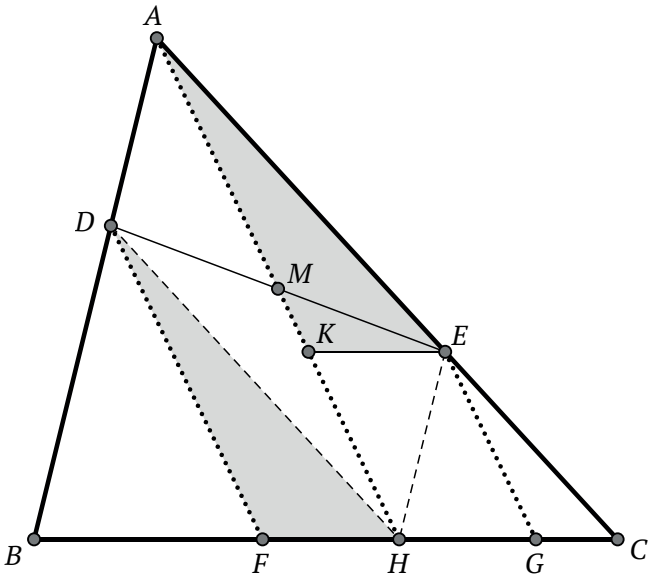


Рисунок Д-118

Пример 119. Неожиданная величина угла

Если описать окружность вокруг треугольника ABC, как показано на рис. Д-119, и провести прямые CD, CF и CE, они пересекутся с описанной окружностью в точках G, H и J соответственно. Поскольку углы в точке C равны, дуги AG, GH, HJ и JB также равны. Следовательно, у нас есть $GJ \parallel AB$, а поскольку AB перпендикулярна CG, получается, что $\angle CGJ$ — прямой угол. Таким образом, отрезок CEJ является диаметром окружности. Поскольку точка E является серединой AB, она должна быть центром описанной окружности треугольника ABC, а AB — ее диаметром. Таким образом, $\angle ACB$ действительно является прямым углом.

Пример 120. Неожиданное равенство в прямоугольном треугольнике

Доказательство равенства треугольников CAQ и CCB принесет нам желаемый результат $PB = QC$. На рис. Д-120, во-первых, отмечаем $\angle CAQ = 180° - \angle DAC$. Так как $\triangle CAD$ подобен $\triangle BCD$, имеем $\angle DAC = \angle BCD$; откуда $\angle CAQ = 180° - \angle BCD$. Из равенства $\angle BCP = 180° - \angle BCD$ также имеем $\angle CAQ = \angle BCP$. Из соотношений $CP = AC$ и $AQ = BC$ вытекает, что $\triangle CQA$ равен $\triangle BPC$, и, таким образом $PB = QC$.

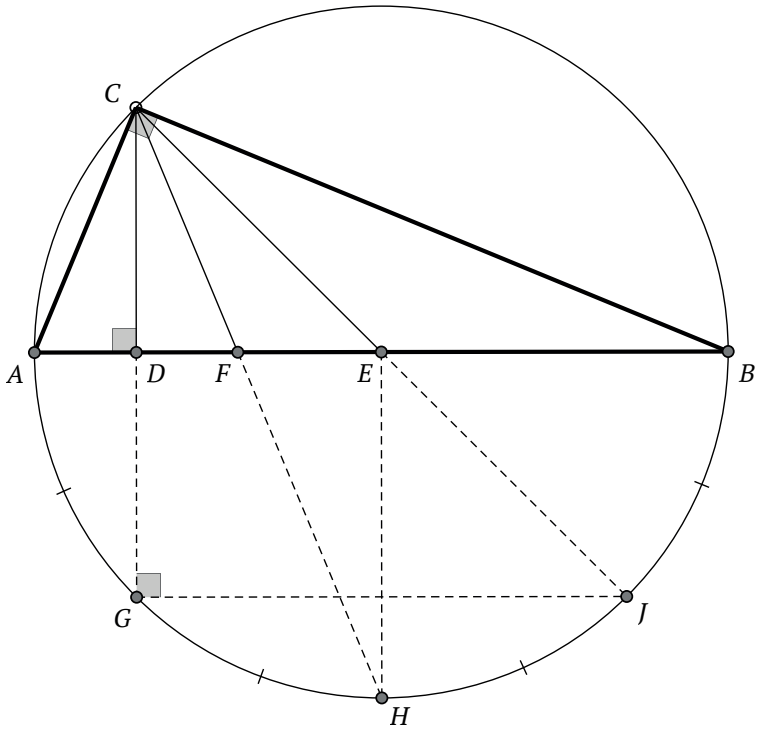


Рисунок Д-119

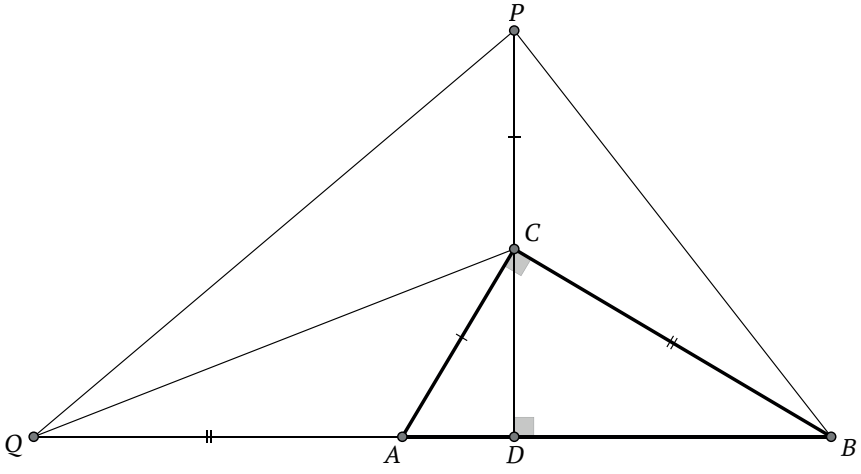


Рисунок Д-120

Пример 121. Загадка: перпендикуляр или параллель

Если BP ориентирован вправо, как показано на рис. Д-121(а), имеем $\angle BPC = 90° - \angle PNB = 90° - \angle CNA$. Так как $BP = BC$, имеем $\angle PCB = \angle BPC = 90° - \angle CNA$, и, следовательно, $\angle PCB = 90° - \angle CNA = 90° - \angle ACN$. Следовательно, $\angle CNA =$

$\angle ACN$, из чего следует, что $AC = AN$. Таким образом, в треугольниках NEA и CAE с общей стороной AE имеем $AN = AC$ и $\angle NAE = \angle EAC$, что позволяет утверждать равенство $\triangle NAE$ и $\triangle EAC$, так что $\angle CAE = \angle AEN$, представляющих собой два равных угла, сумма которых равна 180°. Таким образом, каждый из них равен 90°, так что мы доказали, что $AC \perp PC$.

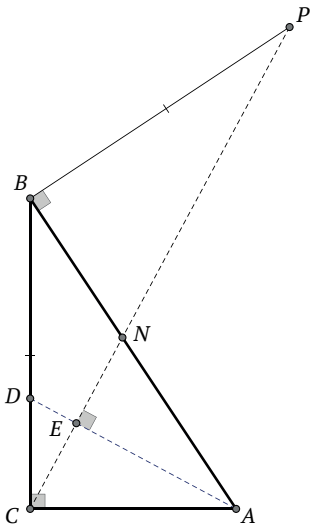


Рисунок 121(а)

Если BP ориентирован влево, как показано на рис. Д-121(б), обнаруживается, что $\angle AFB = 90° - \angle BAF = 90° - 12\angle BAC$ в прямоугольном треугольнике ABF. Для прямоугольного треугольника ABC имеем $\angle CDA = 90° - \angle DAC = 90° - 12\angle BAC$, следовательно, $\angle AFB = \angle CDA = \angle BDF$, из которого мы получаем $BF = BD$. Так как $BP = BC$, мы имеем $\frac{BF}{BP} \cdot \frac{BD}{BC}$. Таким образом, $DF \parallel CF$ и $FA \parallel CP$.

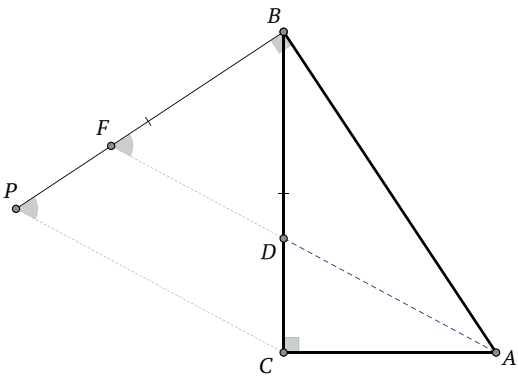


Рисунок 121(б)

Пример 122. Несколько средних точек в прямоугольном треугольнике определяют равные отрезки

Как показано на рис. Д-122, доказательство начинается с проведения прямых *FG*, *GJ*, *JH* и *HF*. В треугольнике *DEB* отрезок *FG* соединяет середины двух сторон *BE* и *DE*, следовательно, равен половине длины третьей стороны и параллелен ей, так что $FG = \frac{1}{2}DB$ и $FG \parallel DB$. Аналогично в треугольнике *DBC* отрезок *HJ* соединяет середины двух сторон треугольника, так что имеем $HJ = \frac{1}{2}DB$ и $HJ \parallel DB$. Следовательно, $FG = HJ$ и $FG \parallel HJ$. Таким образом, можно заключить, что четырехугольник *FGHJ* является параллелограммом, поскольку $AB \perp AC$, $FG \parallel AB$ и $FH \parallel AC$, причем *FH* соединяет середины двух сторон треугольника *EDC*. Следовательно, $FG \perp FH$. Это доказывает, что параллелограмм *FGJH* представляет собой прямоугольник с равными диагоналями, поэтому мы можем заключить, что $GH = FJ$.

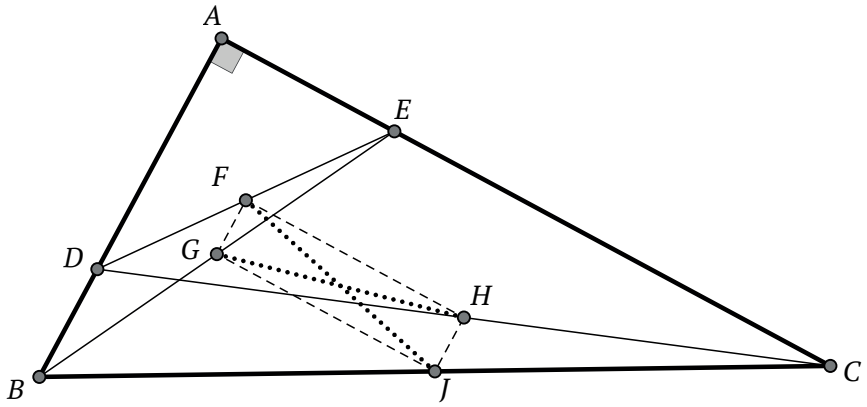


Рисунок Д-122

Пример 123. Перпендикуляры в прямоугольных треугольниках образуют равные углы

Сначала отметим, что $\angle CBA = 90° - \angle BAC = \angle ACD - \angle ECD$, как показано на рис. Д-123. Это означает, что прямоугольные треугольники *ABC* и *CED* подобны и $\frac{DE}{CE} = \frac{CA}{CB}$. Поскольку $DE = CF$, это эквивалентно $\frac{CF}{CE} = \frac{CA}{CB}$, или $\frac{CF}{CA} = \frac{CE}{CB}$, следовательно, прямоугольные треугольники *CAF* и *CEB* также подобны. Это означает, что $\angle CFA = \angle BEC$, и, следовательно, $\angle AEB = 180° - \angle BEC = 180° - \angle CFA = \angle AFB$, как нам и требовалось доказать.

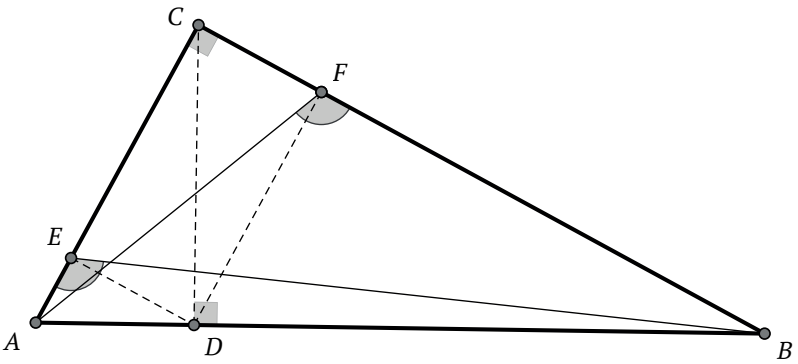


Рисунок Д-123

Пример 124. Прямоугольные треугольники, имеющие общую гипотенузу, приводят к неожиданному равенству

На рис. Д-124 добавлен отрезок *MP* и показано, что треугольники *PCM* и *PMD* равны. Обратите внимание, что *CM* и *DM* являются медианами, проведенными к общей гипотенузе в прямоугольных треугольниках *ACB* и *ADB* соответственно. Мы знаем, что медиана к гипотенузе прямоугольного треугольника равна половине длины этой гипотенузы; таким образом, $CM = \frac{1}{2}AB = DM$. Это означает, что точки *A*, *C*, *B* и *D* лежат на общей окружности с центром *M*, как показано на рис. Д-124. Прямоугольные треугольники *PCM* и *PMD* имеют общую гипотенузу *PM* и *CM* = *DM*, следовательно, они равны, что подразумевает *PC* = *PD*.

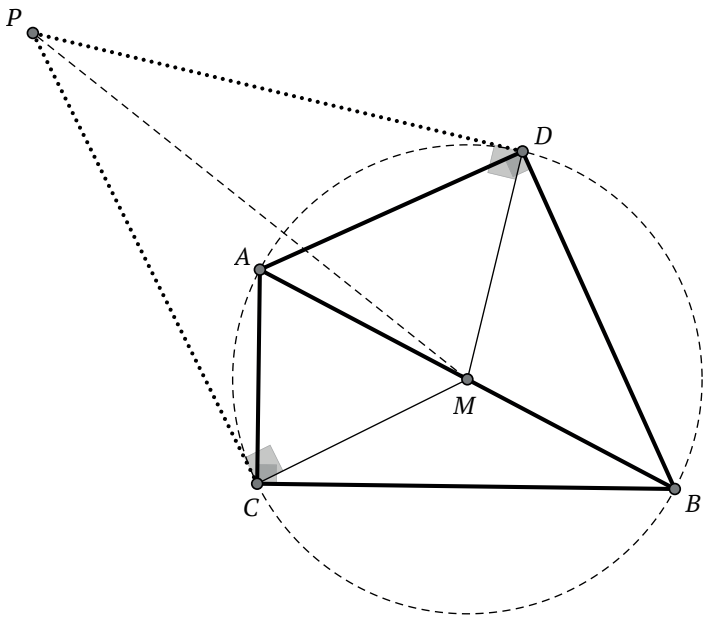


Рисунок Д-124

Пример 125. Теорема Пифагора с геометрической точки зрения

В настоящее время существует более 400 доказательств теоремы Пифагора, и их число продолжает расти. Особенно примечательно, что одно из этих доказательств было разработано 20-м президентом Соединенных Штатов Джеймсом А. Гарфилдом (1831–1881). Будучи членом палаты представителей, Гарфилд, которому нравилось «играть» с элементарной математикой[1], наткнулся на забавное доказательство этой знаменитой теоремы. Впоследствии оно было опубликовано в журнале New England Journal of Education после поддержки двух профессоров из Дартмутского колледжа, где он дал лекцию 7 марта 1876 года.

Доказательство Гарфилда на самом деле довольно простое, поскольку оно начинается с размещения двух равных прямоугольных треугольников *ABE* и *ECD* таким образом, чтобы точки *B*, *C* и *E* лежали на одной прямой, как показано на рис. Д-125. Из-за прямых углов в точках *B* и *C* образуется трапеция *CDAB*. Заметим также, что из $\angle AEB + \angle CED = 90°$ следует $\angle DEA = 180° - (\angle AEB + \angle CED) = 180° - 90° = 90°$, тем самым превращая *AED* в прямоугольный равнобедренный треугольник со сторонами $AE = DE$.

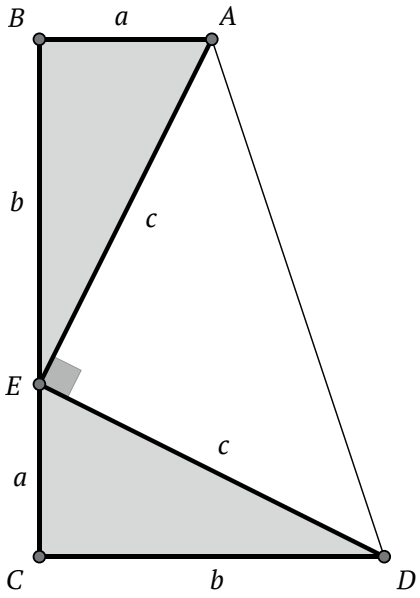


Рисунок Д-125

Теперь можно вычислить площадь трапеции *ABCD* двумя различными способами. Во-первых, используя обычную формулу для вычисления площади трапеции:

[1] 6 октября 1851 года самоучка Гарфилд записал в своем дневнике, что «сегодня я приступил к изучению геометрии один, без класса и учителя». — *Прим. авт.*

$$\textit{площадь трапеции} = \frac{1}{2}\,\textit{сумма оснований} \cdot \textit{высота},$$

имеем:

$$\textit{площадь } ABCD = \frac{1}{2}(a+b)(a+b).$$

С другой стороны, вычисляя сумму площадей трех треугольников, составляющих трапецию, получаем:

$$\textit{площадь } ABCD = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 = ab + \frac{1}{2}c^2.$$

Теперь приравниваем два выражения для площади трапеции и получаем:

$$\frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 = ab + \frac{1}{2}c^2, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}c^2,$$

что после умножения на 2 дает знакомое выражение $a^2 + b^2 = c^2$, известное как теорема Пифагора.

Как упоминалось ранее, сегодня доступно более 400 доказательств теоремы Пифагора[1]; многие из них оригинальны, но некоторые немного обременительны. Однако интересно отметить, что никто никогда не будет использовать тригонометрию для доказательства теоремы Пифагора. Теорема Пифагора не может быть доказана с помощью тригонометрии, поскольку вся дисциплина тригонометрии основана на справедливости теоремы Пифагора. Таким образом, любое такое доказательство с использованием тригонометрии означало бы доказательство той самой теоремы, от которой зависит тригонометрия, что приводит к типичному случаю логического порочного круга[2].

Пример 126. Квадраты на сторонах треугольника могут преподнести интересные сюрпризы

Здесь необходимо доказать три различных утверждения, поэтому мы разделим обсуждение на несколько частей. Во-первых, как показано на рис. Д-126(а),

---

[1] Классический источник — книга Элиши Скотта Лумиса «Предложение Пифагора», в которой представлено 370 доказательств. — *Прим. авт.* Оригинальное издание книги Лумиса (1927) можно найти по адресу *https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED037335.pdf*; переиздание 1968 года: *https://www.amazon.com/Pythagorean-Proposition-Elisha-S-Loomis/dp/0873530365*.

[2] Это рассуждение авторы заимствовали из книги Элиши Лумиса от 1927 года. В 2023 году появилось сообщение о том, что две американские школьницы нашли чисто тригонометрическое доказательство теоремы Пифагора, основываясь на независимой от нее теореме синусов. Доказательство получило одобрение академического сообщества и осенью 2024 года было опубликовано в журнале American Mathematical Monthly. Ознакомиться с его изложением русскоязычные читатели могут здесь: *https://habr.com/ru/articles/730946/*.

утверждается, что отрезки *AD*, *BE* и *CF* параллельны. Затем утверждается, что каждый из этих отрезков перпендикулярен стороне *DEF*, т. е. $AD \perp EF$, $BE \perp DF$ и $CF \perp DE$. Наконец, утверждается, что эти перпендикулярные отрезки имеют одинаковую длину, так что $AD = EF$, $BE = DF$ и $CF = DE$.

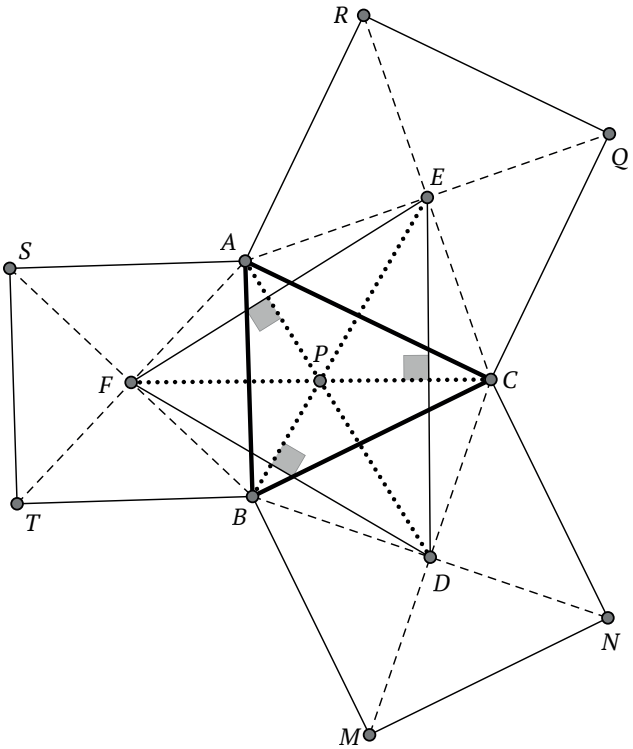


Рисунок Д-126(а)

Если мы сможем показать, что прямые *AD*, *BE* и *CF* перпендикулярны *BC*, *CA* и *AB* соответственно, это будет означать, что они являются высотами $\triangle ABC$; следовательно, они пересекутся в ортоцентре этого треугольника. Затем будет достаточно доказать два других свойства этой конфигурации.

Часть 1. Чтобы подготовить доказательство, нарисуем отрезки *BR* и *CS*, как показано на рис. Д-126(б), и покажем, что они перпендикулярны и имеют одинаковую длину. Для этого рассмотрим треугольники *ABR* и *ASC*. Отметим, что $AR = AC$ и $AB = AS$, а также $\angle BAR = \angle BAC + \angle CAR = \angle BAC + 90° = \angle BAC + \angle SAB = \angle SAC$.

Это означает равенство треугольников *ABR* и *ASC*. Теперь мы можем применить хитрый прием. Отметив, что $AR \perp AC$ и $AB \perp AS$, видим, что поворот $\triangle ABR$ по часовой стрелке на 90° приведет к тому, что $\triangle ABR$ совместится с $\triangle ASC$. Это означает, что поворот *BR* вокруг точки *A* на 90° образует отрезок *SC*. То есть отрезки *BR* и *CS* перпендикулярны и имеют одинаковую длину, что мы и собирались доказать.

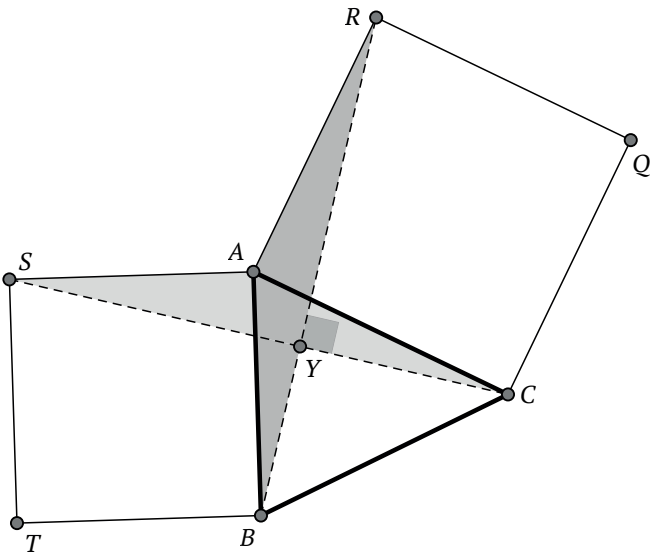


Рисунок Д-126(б)

Часть 2. Далее мы обозначим точку в середине стороны BC буквой Z, как показано на рис. Д-126(в). Нарисуем отрезки ZE и ZF и покажем, что они также перпендикулярны и имеют одинаковую длину.

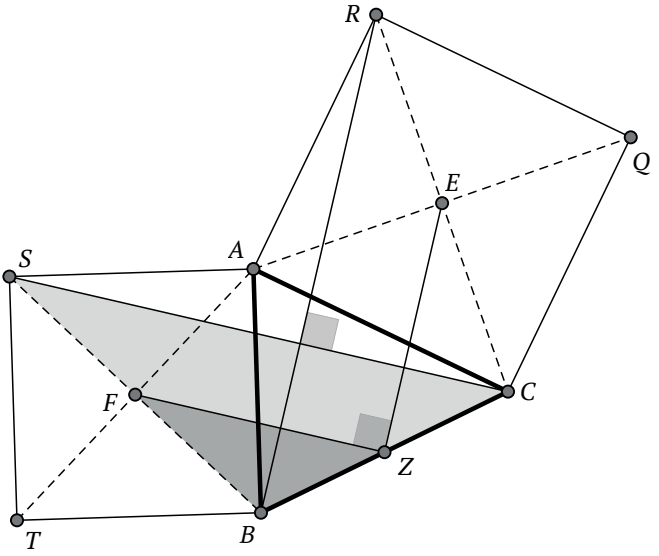


Рисунок Д-126(в)

Рассмотрим треугольники BZF и BCS. Они имеют общий угол в точке B и являются подобными, поскольку $\frac{BZ}{BC} = \frac{BF}{BS} = \frac{1}{2}$. Это означает, что сторона ZF

треугольника BZF параллельна стороне CS треугольника BCS, и $\frac{BZ}{BC} = \frac{ZF}{CS} = \frac{1}{2}$. Другими словами, ZF параллелен CS и при этом вдвое короче. Мы можем повторить это рассуждение с треугольниками CEZ и CRB и увидеть, что EZ параллелен RB и также вдвое короче. Уже установлено, что BR и CS перпендикулярны и имеют одинаковую длину, из чего следует, что ZF и ZE также перпендикулярны и имеют одинаковую длину.

Часть 3. Теперь мы готовы рассмотреть треугольники ZEB и ZFD, показанные на рис. Д-126(г). Сейчас мы можем доказать, что эти два треугольника также равны, следующим образом. Мы только что установили, что $ZE = ZF$, а ZB и ZD вдвое короче, чем BC, и, следовательно, также имеют одинаковую длину. Кроме того, имеется равенство $\angle EZB = \angle EZF + \angle FZB = 90° + \angle FZB = \angle BZD + \angle FZB = \angle FZD$, откуда следует, что треугольники ZEB и ZFD действительно равны. Теперь можно применить тот же прием вращения, использованный в части 1. Поскольку $ZE \perp ZF$ и $ZD \perp ZB$, поворот $\triangle ZEB$ на 90° совместит $\triangle ZEB$ с $\triangle ZFD$, и это означает, что поворот отрезка BE вокруг Z на 90° превратит его в отрезок DF. То есть отрезки BE и DF перпендикулярны и имеют одинаковую длину.

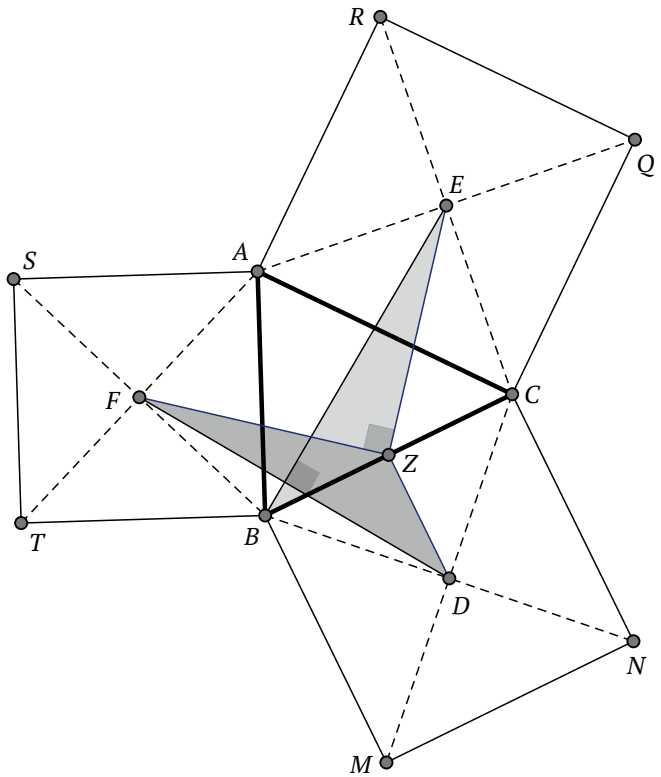


Рисунок Д-126(г)

Эти рассуждения можно повторить совершенно аналогичным образом, чтобы показать, что CF и DE также перпендикулярны и имеют одинаковую длину, как и AD и EF. На этом доказательство завершено: как мы сейчас показали, $AD \perp EF$, $BE \perp DF$ и $CF \perp DE$, а также $AD = EF$, $BE = DF$ и $CF = DE$. Это также означает, что AD, BE и CF пересекаются в ортоцентре треугольника ABC.

Пример 127. Дополнительные свойства, создаваемые квадратами на сторонах треугольника

На рис. Д-127 обозначаем A' на стороне BC как основание перпендикуляра, опущенного из вершины A треугольника ABC. С помощью этой точки мы можем затем определить h как длину высоты AA' в $\triangle ABC$, а также обозначить $m = BA'$ и $n = CA'$. Кроме того, мы определяем X' как основание перпендикуляра от точки X на продолжение AA' и Y' как основание перпендикуляра от точки Y на продолжение AA'. Чтобы доказать, что треугольник AXY является прямоугольным равнобедренным треугольником, сначала покажем, что прямоугольные треугольники AXX' и $AY'Y$ равны.

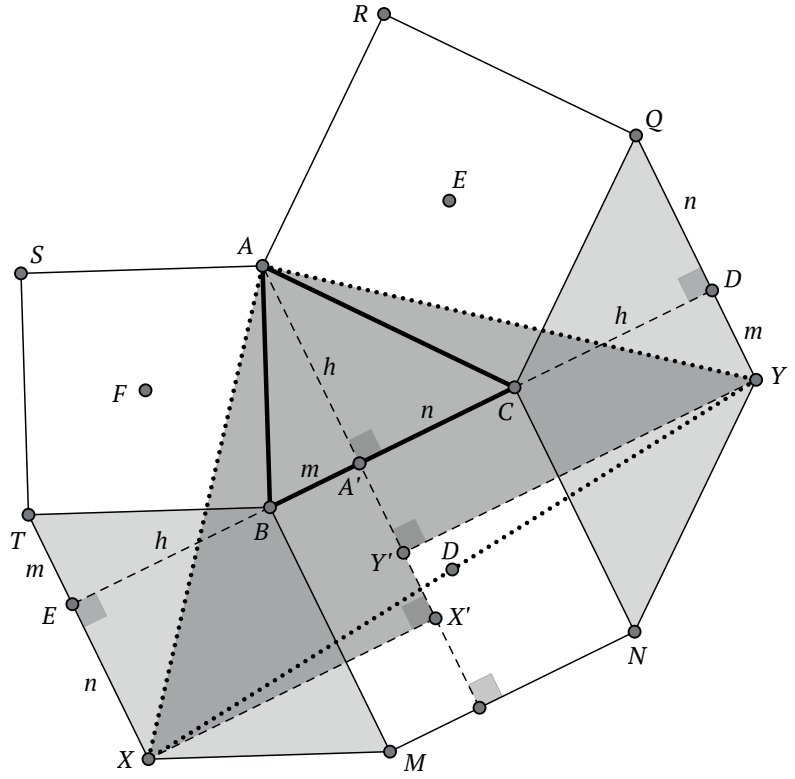


Рисунок Д-127

Так как $AC = QC$ и $\angle ACA' = 180° - \angle DCQ - \angle QCA = 180° - \angle DCQ - 90° = \angle XQD$, имеем равенство $\triangle AA'C$ и $\triangle CDQ$; следовательно, $DQ = A'C = n$ и $CD = AA' = h$. Также имеем $QY = CN = BC = n + m = a$ и $A'Y' = DY = QY - QD = a - n = m$. Из этого следует, что $YY' = DA' = n + h$ и $AY' = m + h$. Следовательно, на другой стороне мы также имеем равенство $\triangle ABA'$ и $\triangle BET$, $BE = AA' = h$ и $TE = BA' = m$. Таким образом, $XX' = A'E = A'B + BE = m + h$. Также $TX = BM = BC = a$ и $A'X = EX = TX - TE = a - m = n$. Отсюда $XX' = m + h = AY'$. В итоге получаем равенство $\triangle AXX'$ и $\triangle AYY'$. Затем имеем $AX = AY$, а также $\angle XAY = \angle XAX' + \angle Y'AY = \angle XAX' + \angle X'XA = 90°$, или $AX \perp AY$, что и требовалось доказать.

Пример 128. Неожиданная перпендикулярность

Если просто переименовать отрезки AM и CT в BR и CS (см. рис. Д-128), окажется, что эту взаимосвязь мы уже доказывали в части 1 примера 126.

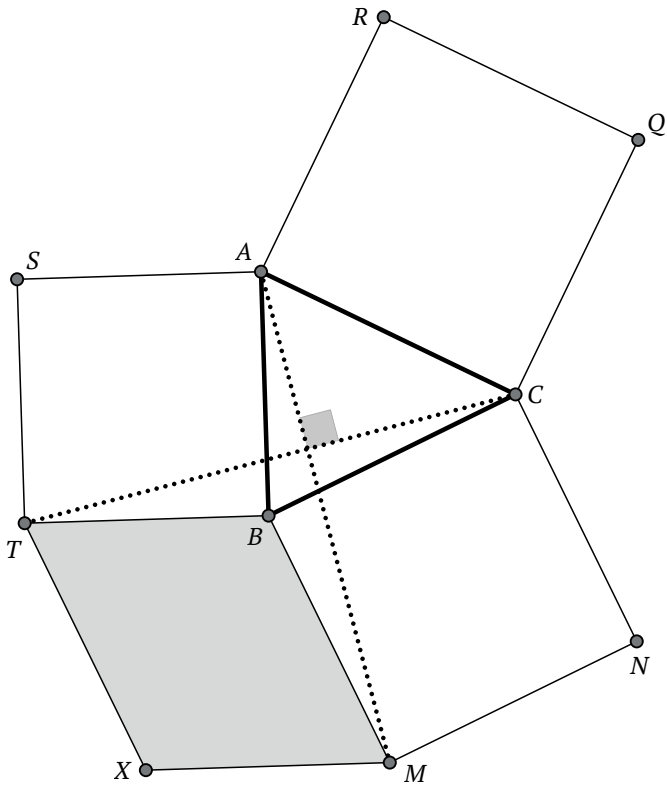


Рисунок Д-128

Пример 129. Удивительное пересечение с участием квадратов на сторонах треугольника

Доказательство этого результата может быть получено путем несколько неожиданного обращения к частям доказательства для примера 126. В части 1 этого доказательства мы имеем, что *BR* и *CS* перпендикулярны и имеют одинаковую длину. Теперь мы можем применить концепцию части 2 доказательства в несколько измененном виде, как показано на рис. Д-129(а). В данном случае мы рисуем отрезки *GE* и *GF* и показываем, что они также перпендикулярны и имеют одинаковую длину. Отметим, что точка *G* — середина параллелограмма *ARZS* и, следовательно, середина отрезка *RS*. Теперь рассмотрим треугольники *RGE* и *RSC*. Они имеют общий угол в точке *R* и подобны, так как $\frac{RG}{RS} = \frac{RE}{RC} = \frac{1}{2}$. Это означает, что сторона *EG* треугольника *RGE* параллельна стороне *CS* треугольника *RSC*, и $\frac{RG}{RS} = \frac{EG}{CS} = \frac{1}{2}$. Другими словами, отрезок *EG* параллелен *CS* и вдвое короче. Мы можем повторить эти рассуждения с треугольниками *SFG* и *SBR* и увидеть, что *GF* параллелен *RB* и также вдвое короче. Мы уже знаем, что *BR* и *CS* перпендикулярны и имеют одинаковую длину, из чего следует, что *GF* и *GE* также перпендикулярны и имеют одинаковую длину.

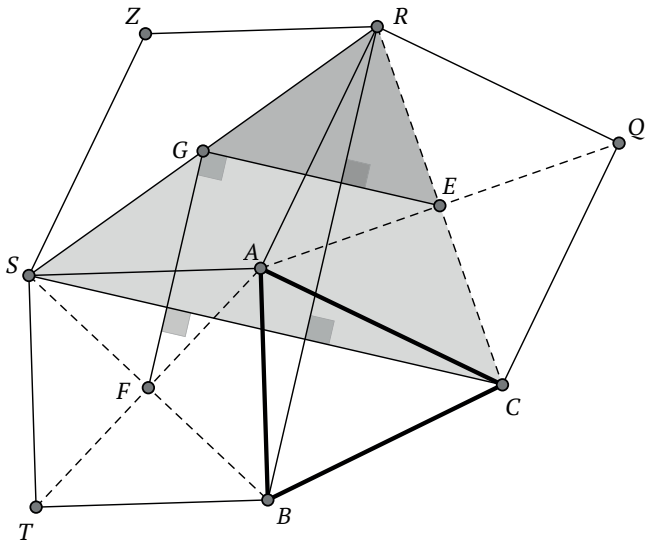


Рисунок Д-129(а)

Непосредственным следствием этого является тот факт, что точка *G* является серединой квадрата *EXYF*, расположенного на отрезке *EF*, как показано на рис. Д-129(б). Поскольку *EGF* представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник, его площадь составляет одну четверть площади этого квадрата, а *G*, следовательно, является его серединой.

Эти рассуждения могут быть повторены точно таким же образом для точек *H* и *J*, и это означает, что середины *G*, *H* и *J* параллелограммов *ARZS*, *BTXM* и *CNYQ* одновременно являются средними точками квадратов, расположенных на сторонах треугольника *DEF*, как показано на рис. Д-129(в). Теперь мы можем завершить доказательство таким же образом, как это сделали в части 3 доказательства примера 126. Мы видим, что *DG*, *EJ* и *FH* — это высоты треугольника *DEF*, и известно, что они пересекаются в ортоцентре *P* треугольника *DEF*, что мы и намеревались доказать.

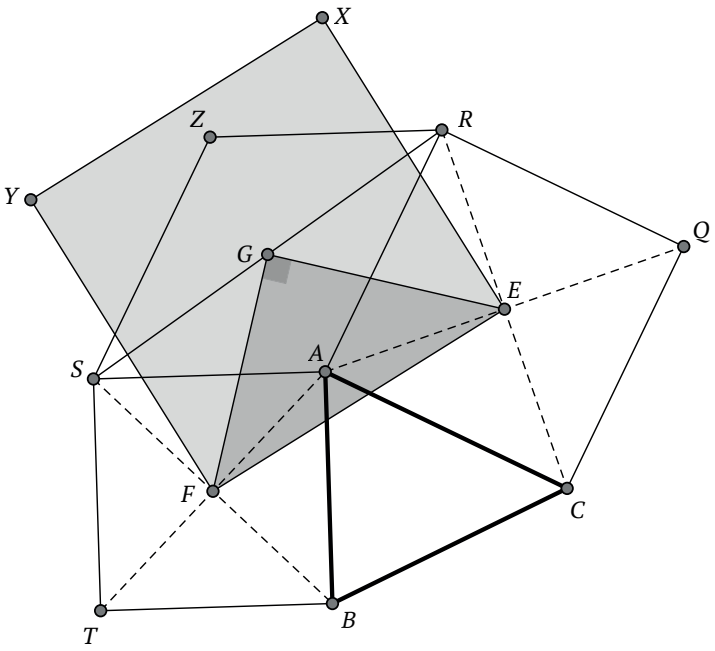


Рисунок Д-129(б)

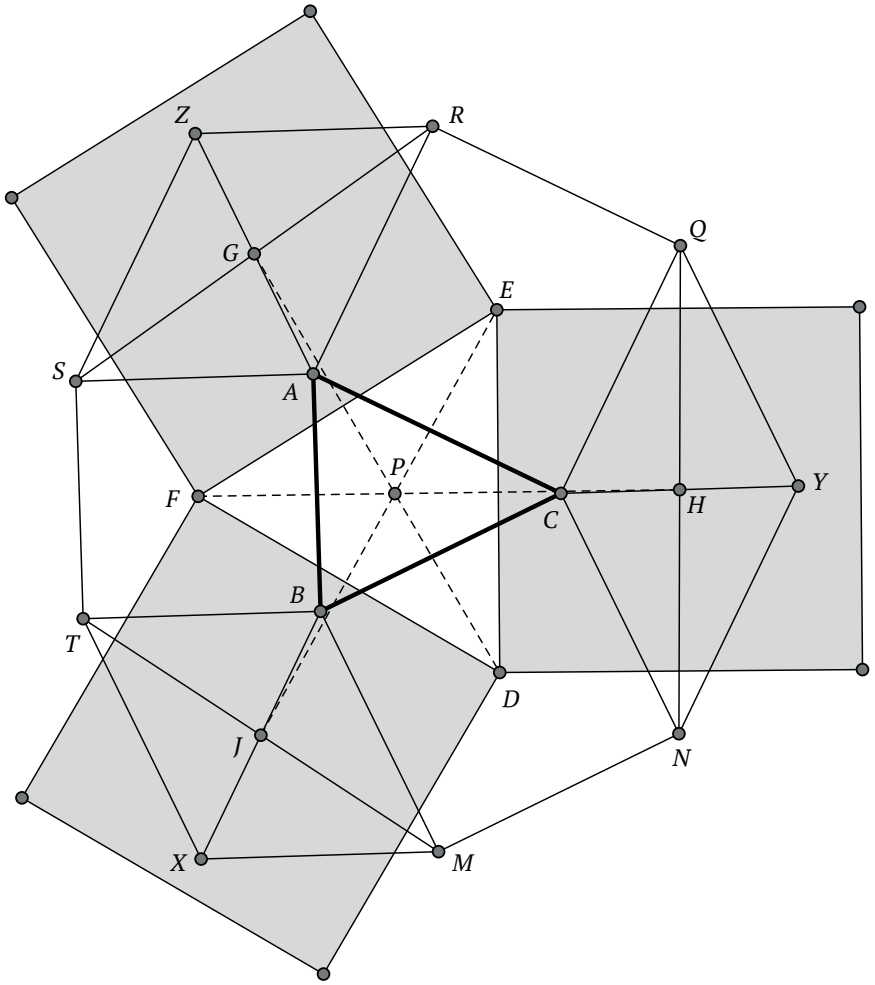


Рисунок 129(в)

Пример 130. Еще одно удивительное совпадение для квадратов на сторонах треугольника

Этот результат можно доказать, скомбинировав результаты примеров 126 и 129. Можно видеть, что прямые *GU*, *JV* и *HW* должны пересекаться в центре окружности треугольника *DEF*. В части 2 доказательства примера 126 показано, что треугольник *EFZ* является прямоугольным равнобедренным треугольником, и это подтверждает, что треугольник *EFU* также является прямоугольным равнобедренным треугольником, а в доказательстве примера 129 показано, что $\triangle EGF$ тоже является прямоугольным равнобедренным треугольником. Таким образом, как видим на рис. Д-130, *EGFU* представляет собой квадрат. Поскольку диагонали квадрата являются перпендикулярами, делящими друг друга пополам, отрезок *GU* делит пополам отрезок *EF*. Аналогично *JV* делит

пополам *FD*, а *HW* — отрезок *DE*, следовательно, три прямые *GU*, *JV* и *HW* пересекаются в центре описанной окружности треугольника *DEF*.

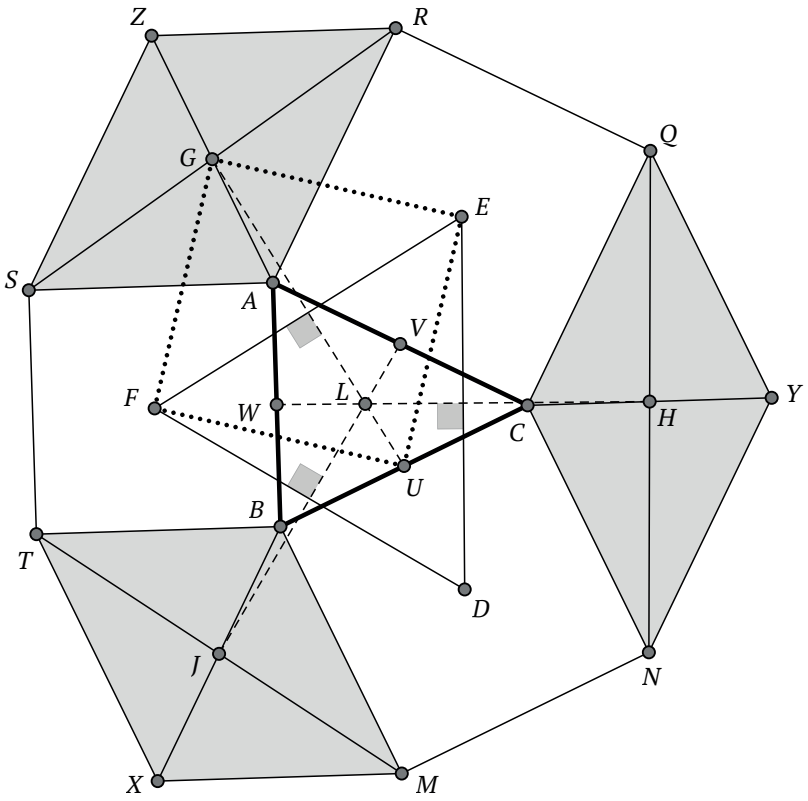


Рисунок Д-130

Пример 131. Использование квадратов на сторонах треугольника для создания еще одного удивительного совпадения

На рис. Д-131 буквой *X* обозначена точка пересечения прямых *ST* и *RQ*, а буквой *Y* — точка пересечения прямых *ST* и *MN*. Далее, пусть *P* обозначает точку пересечения прямых *XA* и *YB*. Поскольку $AB \parallel XY$, треугольники *PAB* и *PXY*, имеющие общие стороны, пересекающиеся в точке *P*, являются подобными, и при этом $\frac{PA}{PX} = \frac{PB}{PY} = \frac{AB}{XY}$. Далее установим точку Z' на продолжении *PC* после точки *C* так, что $\frac{PC}{PZ'} = \frac{AB}{XY}$. Отсюда имеем $\frac{PA}{PX} = \frac{PC}{PZ'}$ и подобие треугольников *PCA* и $PZ'X$, имеющих общие стороны, пересекающиеся в точке *P*. Это означает, что $XZ' \parallel AC$, и, следовательно, Z' находится на прямой *RQ*. Кроме того, треугольники *PBC* и PYZ' также подобны, что дает $YZ' \parallel BC$; и точка Z',

следовательно, также находится на прямой *MN*. Получается, что $Z = Z'$, поскольку это общая точка пересечения *MN* и *RQ*, а прямые *AX*, *BY* и *CZ*, таким образом, проходят через общую точку *P*.

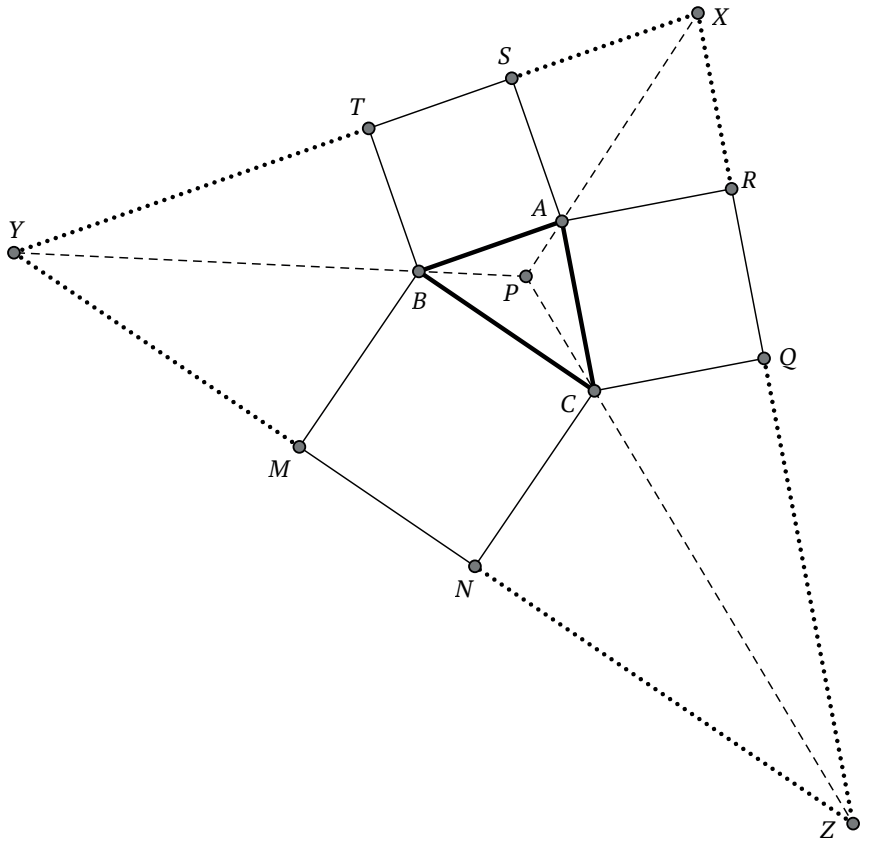


Рисунок Д-131

Пример 132. Квадраты на катетах прямоугольного треугольника дают неожиданное равенство

Как это обычно принято в прямоугольных треугольниках, в прямоугольном треугольнике *ABC*, в котором $\angle ACB = 90°$, обозначим буквой *a* длину отрезка *BC*, а буквой *b* — длину отрезка *CA*, как показано на рис. Д-132. Поскольку треугольники *AJC* и *FJB* оба являются прямоугольными треугольниками и имеют общие вертикальные углы в точке *J*, они подобны, и имеем $\frac{CJ}{BJ} = \frac{AC}{BF} = \frac{b}{a}$. Так как $BJ = BC - CJ = a - CJ$, это равносильно $\frac{CJ}{a - CJ} = \frac{b}{a}$, или $a \cdot CJ = a \cdot b - b \cdot CJ$, или, что то же самое, $CJ = \frac{a \cdot b}{a + b}$. Аналогично треугольники *BCK* и *EAK* также

подобны, и имеем $\frac{CK}{AK} = \frac{BC}{AE} = \frac{b}{a}$, откуда получаем $\frac{CK}{b - CK} = \frac{b}{a}$, или $b \cdot CK = a \cdot b - a \cdot CK$, или $CK = \frac{a \cdot b}{a + b}$. Из чего следует, что $CJ = CK = \frac{a \cdot b}{a + b}$, т. е. два отрезка имеют одинаковую длину, что мы и намеревались доказать.

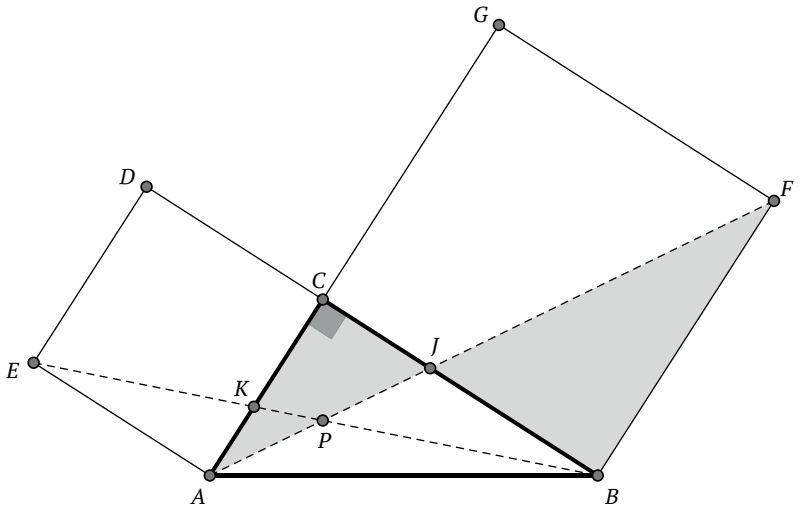


Рисунок Д-132

Пример 133. Подробнее о квадратах на катетах прямоугольного треугольника

На рис. Д-133 сначала строим высоту HC до гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Теперь можно доказать, что $\triangle AES$ равен $\triangle CAH$, следующим образом: $\angle ASE = \angle CHA = 90°$, $AE = AC$, $\angle EAC$ дополнительный к $\angle HAC$ и $\angle ACH$ также дополнительный к $\angle HAC$. Следовательно, $\angle EAS = \angle ACH$. Это доказывает, что $\triangle AES$ равен $\triangle CAH$. Аналогичным образом можно доказать, что $\triangle FBT$ равен $\triangle BCH$. Из первого равенства получаем $ES = AH$, а из второго $FT = BH$. Затем можно заключить, что $ES + FT = AH + BH = AB$. Кроме того, из равных треугольников мы непосредственно получаем *площадь* $\triangle AES$ + *площадь* $\triangle FBT$ = *площадь* $\triangle CAH$ + *площадь* $\triangle BCH$ = *площадь* $\triangle ABC$.

Пример 134. Другие квадраты на сторонах прямоугольных треугольников

Как показано на рис. Д-134, буквой X обозначается основание перпендикуляра DX на продолжение стороны BC. Поскольку $\angle BXD = \angle ACB$, $AB = BD$ и $\angle DBX = 180° - \angle ABD - \angle CBA = 180° - \angle CBA = \angle BAC$, имеем равенство $\triangle BDX$ и $\triangle ABC$. Отсюда следует, что $DX = BC$; следовательно, *площадь* $\triangle LBF = \frac{1}{2}LB \cdot BF = \frac{1}{2}LB \cdot BC = \frac{1}{2}LB \cdot DX$ = *площадь* $\triangle LDB$, что мы и собирались доказать.

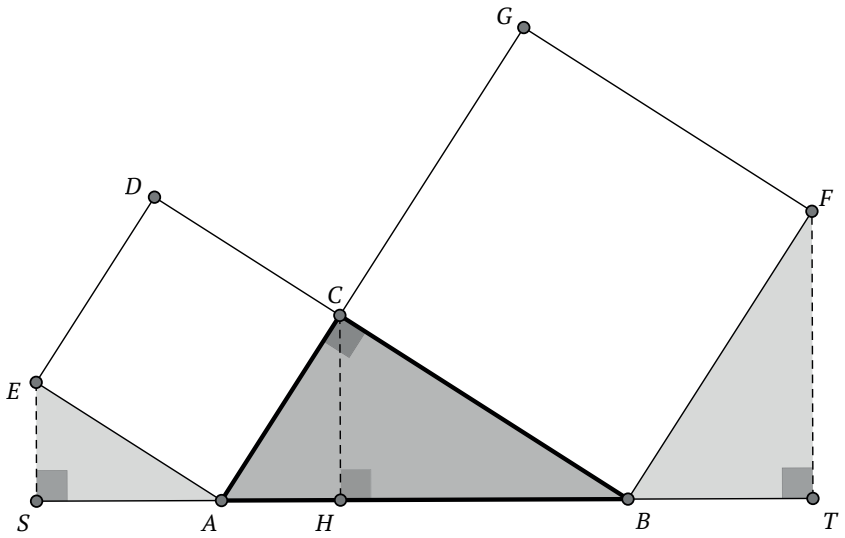


Рисунок Д-133

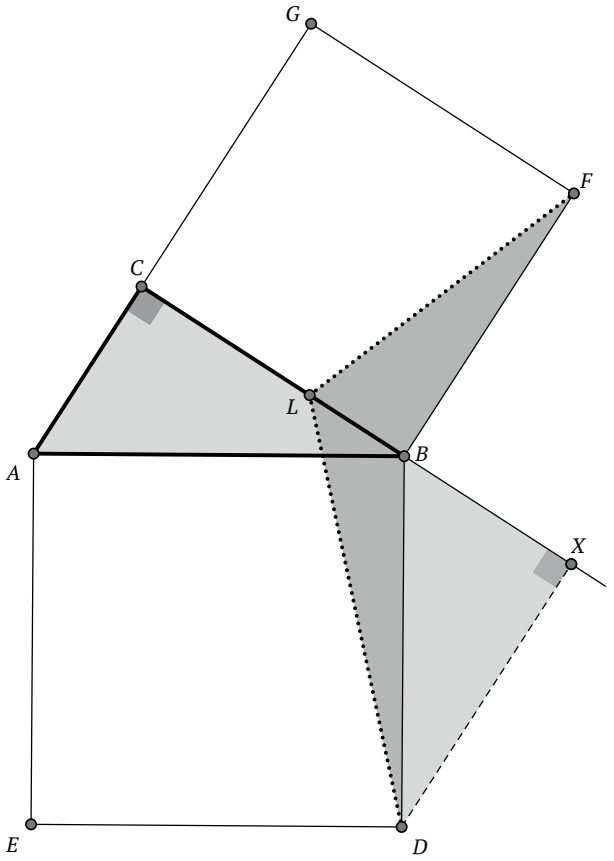


Рисунок Д-134

Пример 135. Еще одно неожиданное равенство площадей

Как показано на рис. Д-135, обозначим точку X на AB и точку Y на DE таким образом, чтобы C, X и Y лежали на одной общей прямой, параллельной сторонам AE и BD квадрата $AEDB$. Кроме того, находим точку P на продолжении AE за пределы точки A такую, что $CP \perp AE$, и точку Q на продолжении DB за пределы точки B такую, что $CQ \perp BD$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
\textit{площадь } \triangle ACE = \textit{площадь } \triangle BCD &= \frac{1}{2} \cdot AE \cdot PC + \frac{1}{2} \cdot BD \cdot QC \\
&= \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AX + \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BX \\
&= \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AX + \frac{1}{2} \cdot AE \cdot XB \\
&= \frac{1}{2} \cdot AE \cdot (AX + XB) \\
&= \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AB \\
&= \frac{1}{2} \textit{ площадь } AEDB,
\end{aligned}$$

что мы и намеревались доказать.

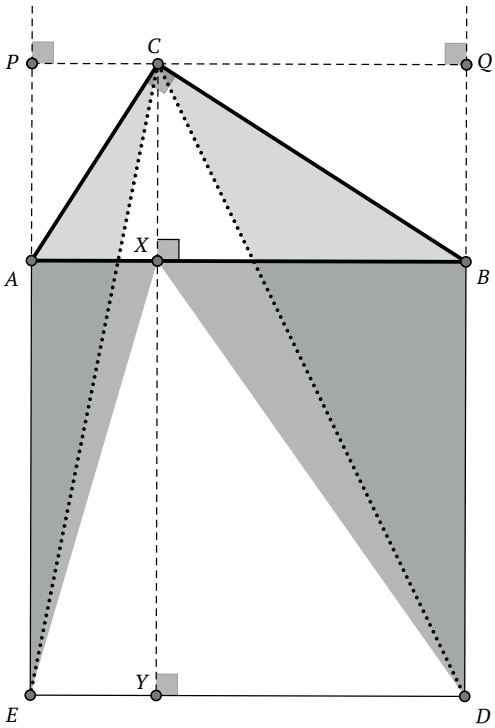


Рисунок Д-135

Пример 136. Квадрат на гипотенузе прямоугольного треугольника

Сначала докажем, что треугольники ADM и BCM равны, как показано на рис. Д-136. Здесь можно заметить, что $MA = MB$, поскольку оба отрезка равны половине диагоналей четырехугольника $ARSB$. Можно заметить также, что оба угла DAR и CBA — дополнительные для угла BAC. Таким образом, $\angle DAR = \angle CBA$. Из равенства $\angle RAM = \angle ABM = 45°$ следует $\angle DAM = \angle CBM$. Имеем также $\angle AMD = \angle BMC$ вследствие того, что каждый из этих углов является результатом вычитания $\angle CMA$ из прямых углов $\angle AMR$ и $\angle BMA$ соответственно. Таким образом, имеем равные треугольники ADM и BCM, и, следовательно, $BC = AD$. Аналогичным образом можем доказать, что равны $\triangle BME$ и $\triangle AMC$, что дает $EB = CA$. Складывая эти два равенства, получаем $CD = CA + AD = ED + BC = EC$, откуда следует, что CDE — равносторонний прямоугольный треугольник. Следовательно, его высота CM является биссектрисой $\angle DCE$.

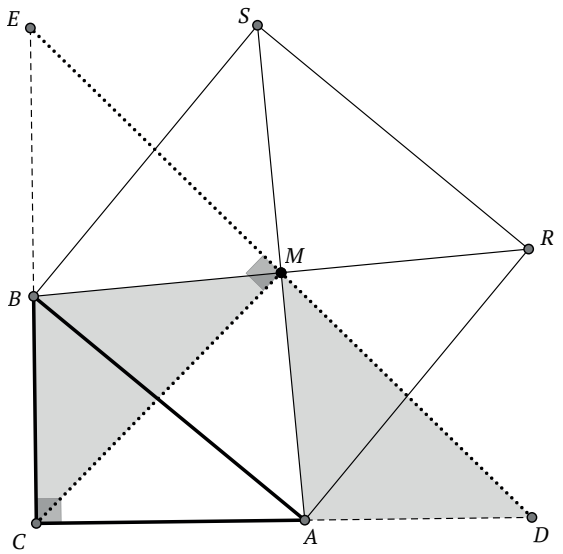


Рисунок Д-136

Пример 137. Действительно неожиданная коллинеарность

На рис. Д-137 сначала отмечаем, что два равносторонних треугольника BEC и DFC имеют основания одинаковой длины, т. е. $EC = FC$. Отсюда $\angle FCE = \angle FCD + \angle DCB - \angle ECB = 60° + 90° - 60° = 90°$. Таким образом, FEC — равнобедренный прямоугольный треугольник. ABE — также равнобедренный треугольник, у которого $\angle EBA = 30°$; следовательно, $\angle AEB = \frac{1}{2}(180° - \angle EBA) = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$. Мы знаем, что $\angle BEC = 60°$, следовательно, $\angle AEB + \angle BEC + \angle CEF = 75° + 60° + 45° = 180°$, и точки A, E и F, таким образом, лежат на одной прямой.

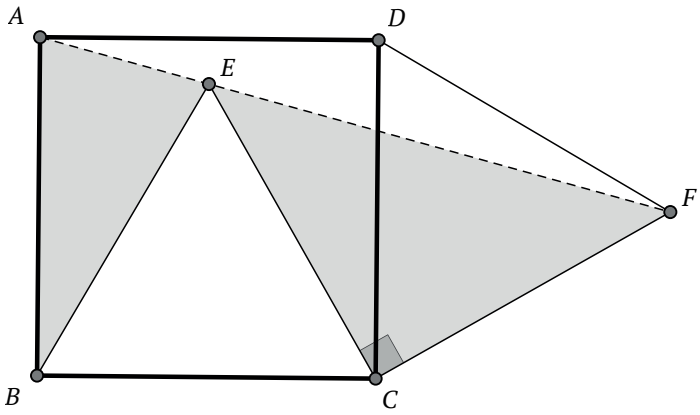


Рисунок Д-137

Пример 138. Необычный способ деления квадрата на две равные части

На рис. Д-138 мы дорисовали окружность с диаметром AD. Так как $\angle AED$ является прямым углом, точка E должна лежать на этой окружности. Пусть M обозначает вторую точку пересечения EL с окружностью. Так как EL есть биссектриса прямого угла $\angle AED$, имеем $\angle MAD = \angle MED = \frac{1}{2}\angle AED = 45°$.

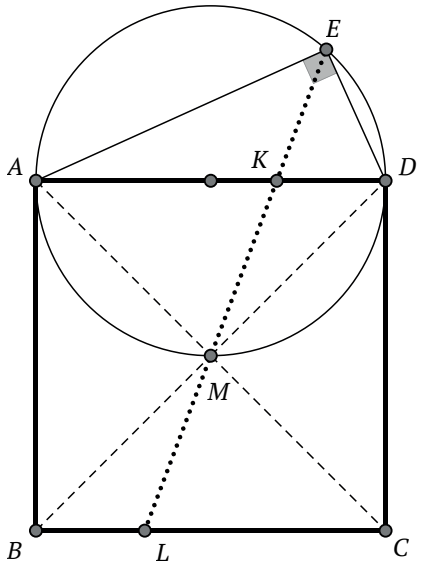


Рисунок Д-138

Поскольку $\angle CAD = 45°$, точка M лежит на диагонали AC квадрата. Можно повторить эти рассуждения для другой стороны, и мы также получим $\angle ADM = \angle AEM = \frac{1}{2}\angle AED = 45° = \angle ADB$, и точка M также будет лежать на диагонали BD.

Это означает, что M является серединой квадрата $ABCD$. Поскольку M лежит на EL, две части $ABLK$ и $DKLC$ квадрата, полученные в результате его деления этой линией, таким образом, симметричны относительно M. Из этого следует, что они равны и, следовательно, имеют равные площади.

Пример 139. Удвоение квадрата

Как видно по рис. Д-139, треугольник ADB является равнобедренным прямоугольным треугольником, поскольку $\angle DAB = 45°$. Следовательно, $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Четырехугольник $BEDC$, где два прямоугольных треугольника BDC и BAC имеют общую гипотенузу BC, имеет описанную окружность. Так как $\angle DCB + \angle DEB = 180°$ и $\angle AED + \angle DEB = 180°$, таким образом, $\angle DCB = \angle AED$, и, следовательно, $\triangle AED$ и $\triangle ABC$ подобны. Отсюда получаем $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Отсюда имеем $BC = DE\sqrt{2}$, следовательно, *площадь* $BGFC = BC^2 = (DE\sqrt{2})^2 = 2 \cdot DE^2 = 2 \cdot$ *площадь* $DHIE$, что мы и хотели доказать.

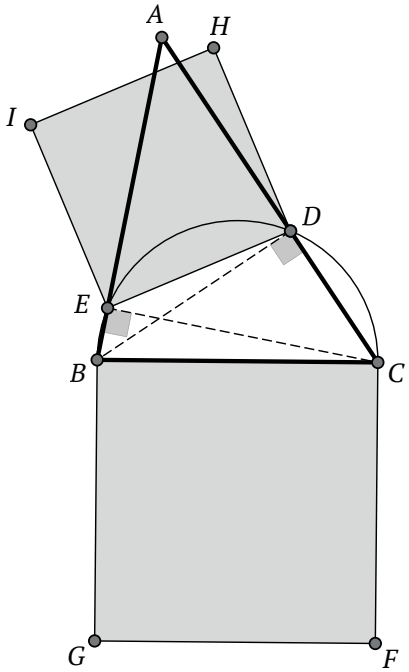


Рисунок Д-139

Пример 140. Странная конструкция из параллельных линий

Задано: треугольник ABC, точка P на стороне AB и медиана AD, как показано на рис. Д-140. G — точка пересечения AD и PC. Определяем точку Q' так, чтобы

треугольники GBC и $GQ'P$ оказались подобными. Так как $\angle GCB = \angle GPQ'$, мы знаем, что PQ' параллелен BC. Аналогично $\angle BGC = \angle Q'GP$, и точки P, G, C лежат на одной прямой, то же самое верно для B, G, и Q'. Остается показать, что Q' лежит на AC, из чего будет следовать совпадение $Q' = Q$.

Пусть K обозначает точку пересечения PQ' с медианой AD. Поскольку $\angle DGC = \angle KGP$ и $\angle GCB = \angle GPQ'$, треугольники GDC и GKP подобны. Так как D — середина BC, это означает, что K — середина PQ'. Однако, поскольку K — точка на медиане AD, точка, симметричная P относительно K, должна лежать на стороне треугольника AC. Это означает, что $Q' = Q$, как мы и предполагали, откуда следует, что PQ параллелен BC.

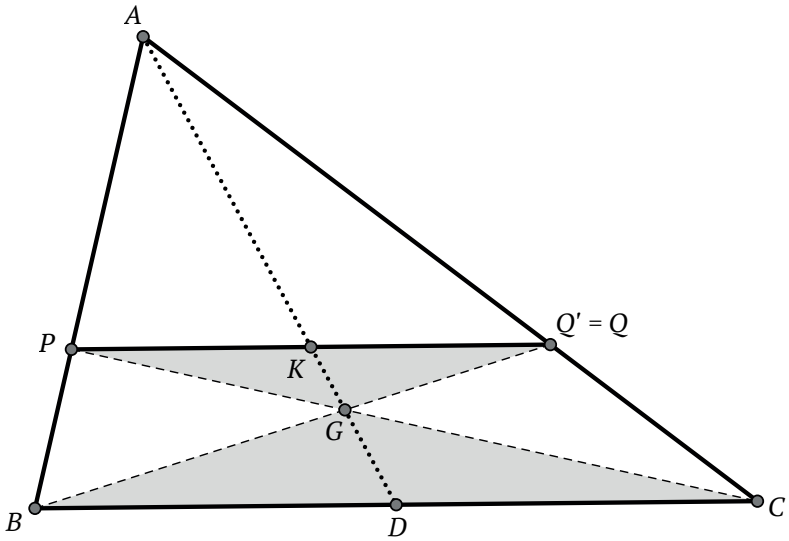


Рисунок Д-140

Пример 141. Необычный способ нахождения середины отрезка

Методы, использованные для этого построения, предусматривают те же вспомогательные линии, что и в предыдущем примере, как показано на рис. Д-141. Нужно отметить, что порядок, в котором дорисовываются линии, влияет на процедуру доказательства. Хотя мы снова рассматриваем подобные треугольники, как и в предыдущем примере, способ, которым мы это делаем, совершенно иной. Давайте рассмотрим треугольники GMC и GNP. Эти треугольники, безусловно, подобны, поскольку PQ и BC параллельны, и поэтому мы имеем $\angle GCM = \angle GPN$ и $\angle CMG = \angle PNG$. Аналогично $\triangle GBM$ и $\triangle GQN$ также подобны, поскольку $\angle MBG = \angle NQG$ и $\angle GMB = \angle GNQ$. Кроме того, эти пары треугольников имеют общие стороны GM и GN, и это дает нам $\frac{BM}{QN} = \frac{MG}{NG} = \frac{CM}{PN}$, или просто $\frac{BM}{QN} = \frac{CM}{PN}$. Это эквивалентно соотношению $\frac{BM}{CM} = \frac{QN}{PN}$. Теперь

повторим эту последовательность рассуждений для разных пар подобных треугольников. Так как $\angle MBA = \angle NBA$ и $\angle AMB = \angle ANP$, мы видим, что треугольники ABM и APN подобны. Также подобны треугольники AMC и ANQ вследствие равенств $\angle CMA = \angle QNA$ и $\angle ACM = \angle AQN$. Так как эти пары треугольников имеют общие стороны AM и AN, получаем $\frac{BM}{PN} = \frac{MA}{NA} = \frac{CM}{QN}$, или просто $\frac{BM}{PN} = \frac{CM}{QN}$, что эквивалентно $\frac{BM}{CM} = \frac{PN}{QN}$. Откуда следует $\frac{QN}{PN} = \frac{PN}{QN}$, или $PN = NQ$, или, что то же самое, $BM = MC$, что мы и собирались доказать.

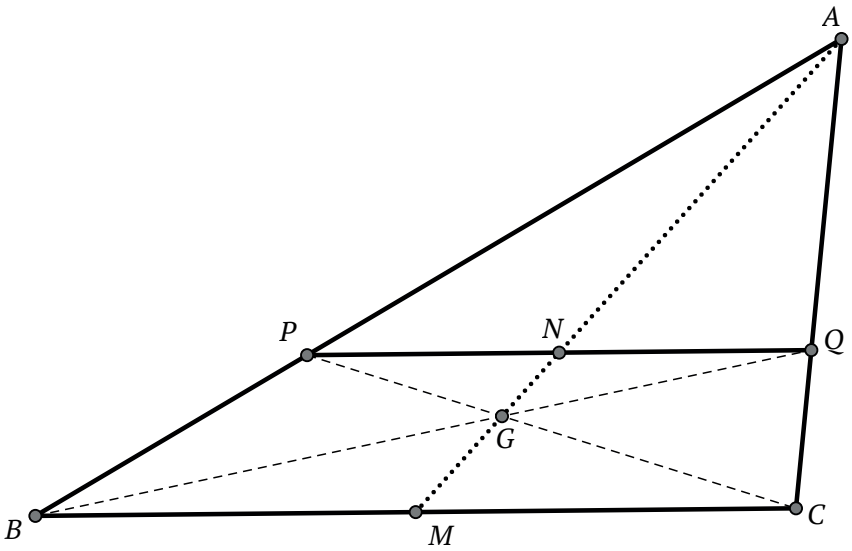


Рисунок Д-141

Пример 142. Неожиданное появление параллельных прямых

Начнем с того, что D, E и F являются средними точками сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, как показано на рис. Д-142. У нас также есть $GD \parallel AB$ и $HD \parallel AC$. Поскольку треугольники EGA и FAH оба имеют стороны на отрезке GH и ранее упомянутые параллели определяют, что $\angle AHF = \angle GAE$ и $\angle HAF = \angle AGE$, так что треугольники EGA и FAH подобны, мы получаем $\frac{GE}{AE} = \frac{AF}{HF}$. Ставим точку P на продолжении CG так, чтобы $CP = 2CG$, как показано на рис. Д-142. Поскольку также уже есть соотношение $CA = 2CE$, треугольники CGE и CPA подобны, т. е. $AP = 2EG$ и $AP \parallel EG$, и это означает, что P лежит на продолжении BA за пределы вершины A. Аналогично если установить точку Q на продолжении BH таким образом, что $BQ = 2BH$, получаются подобные треугольники BFH и BAQ, где $AQ = 2FH$ и точка Q на продолжении CA за пределы вершины A. С учетом ранее выведенной пропорции $\frac{GE}{AE} = \frac{AF}{HF}$ мы получаем

следующее: $\frac{AP}{AC} = \frac{2GE}{2AE} = \frac{2AF}{2HF} = \frac{AB}{AQ}$. Поскольку у треугольников ABC и ACB равны вертикальные углы $\angle BAQ = \angle PAC$ в точке A, треугольники подобны и имеют $\angle ABQ = \angle APC$. Так как это равносильно тому, что $\angle PBQ = \angle BPC$, таким образом мы получаем $PC \parallel QB$, или $GC \parallel HB$.

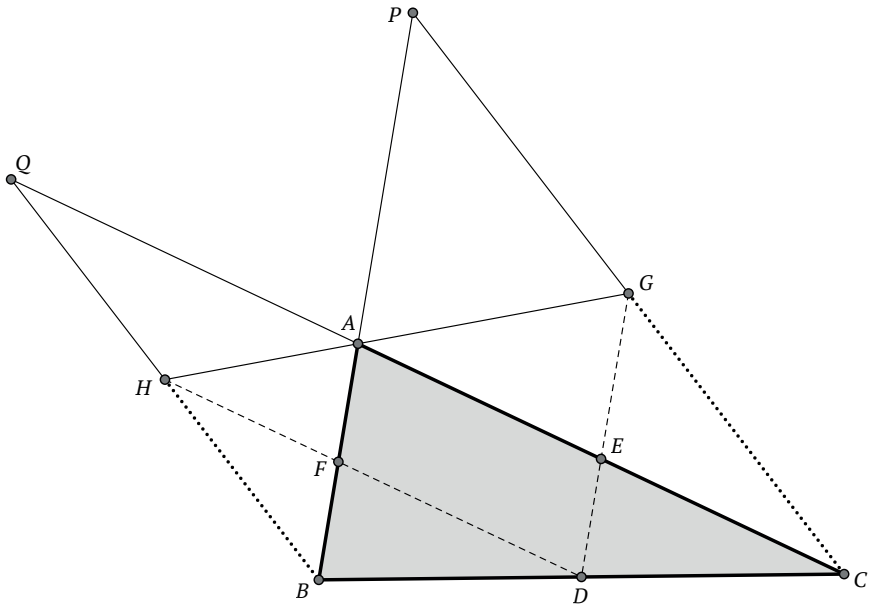


Рисунок Д-142

Пример 143. Неожиданная параллельная прямая

Доказательство начинается с продолжения AD и AE до пересечения с BC в точках F и G соответственно, как показано на рис. Д-143. Поскольку BD перпендикулярен прямой ADF, следовательно, $\triangle ADB$ равен $\triangle FBD$, откуда $AD = DF$. Аналогично поскольку $\triangle ACE$ равен $\triangle GEC$, также имеем $AE = EG$. Заметим, что точки D и E — середины AF и AG соответственно. Из чего следует, что DE параллелен FG, а также что DE параллелен BC.

Пример 144. Удивительная перпендикулярность

Доказательство начинаем с применения теоремы Менелая (см. раздел B3 части 3 «*Инструментарий*») к пересечениям EG с тремя сторонами треугольника ABC, как показано на рис. Д-144. Из этого имеем $\frac{AE}{BE} \cdot \frac{BG}{CG} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$. Из того, что DE и DF являются биссектрисами углов, вытекает, что $\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD}$ и $\frac{CF}{AF} = \frac{CD}{AD}$ соответственно (см. раздел B1 части 3 «*Инструментарий*»). Перемножив эти

два равенства, получаем $\frac{AE}{BE}\cdot\frac{CF}{AF}=\frac{AD}{BD}\cdot\frac{CD}{AD}=\frac{CD}{BD}$. Аналогично из того, что AD есть биссектриса $\angle BAC$, имеем $\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}$. Из теоремы Менелая мы также получаем: $\left(\frac{AE}{BE}\cdot\frac{CF}{AF}\right)\cdot\frac{BG}{CG}=\frac{CD}{BD}\cdot\frac{BG}{CG}=\frac{AC}{AB}\cdot\frac{BG}{CG}=1$, или $\frac{BG}{CG}=\frac{AB}{AC}$. Таким образом, так как H обозначает точку на продолжении EA, AG является биссектрисой $\angle CAH$, являющегося внешним углом треугольника ABC. Поскольку мы знаем, что биссектрисы двух смежных дополнительных углов ($\angle ABC$ и $\angle GAC$) перпендикулярны, $AG\perp AD$.

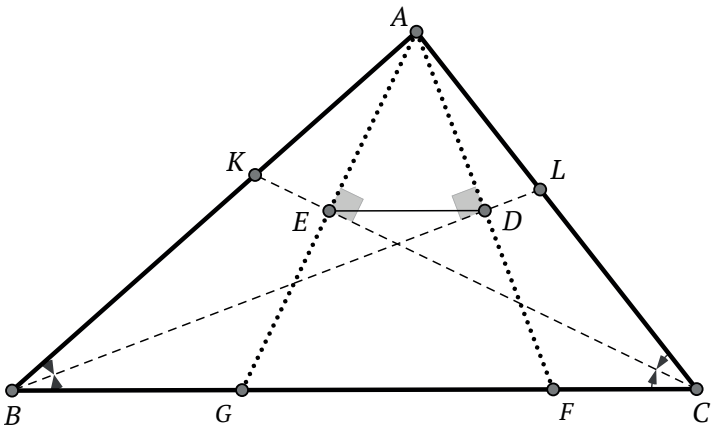


Рисунок Д-143

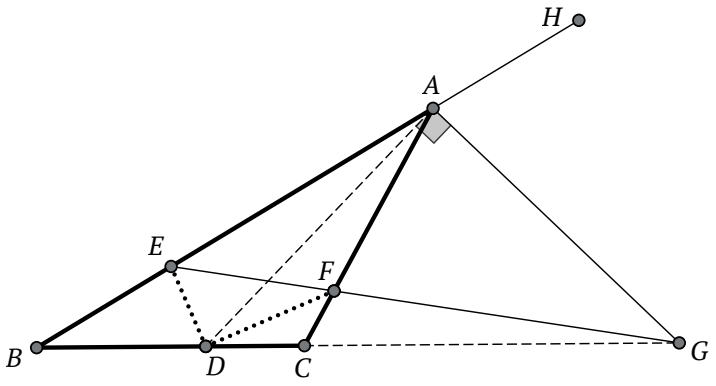


Рисунок Д-144

Пример 145. Другая неожиданная перпендикулярность

Поскольку прямые углы $\angle APB$ и $\angle AHB$ опираются на одну гипотенузу AB, они образуют вписанный в окружность четырехугольник $ABHP$, как показано на рис. Д-145. Противолежащие углы такого четырехугольника являются допол-

нительными (до 180°), т. е. $\angle APH + \angle CBA = 180°$. Так как $\angle QPA$ является дополнительным для $\angle APH$, имеем $\angle CBA = \angle QPA$. Более того, четырехугольник $AHCQ$ также можно вписать в окружность, поскольку противолежащие углы в вершинах H и Q являются дополнительными, и тогда имеем $\angle AQH = \angle ACB$. Таким образом, $\triangle APQ$ подобен $\triangle ABC$. Поскольку AR — это медиана $\triangle APQ$, а AM — соответствующая медиана $\triangle ABC$, мы имеем $\angle ARH = \angle AMH$. Кроме того, у нас есть вписанный в окружность четырехугольник $AHMR$, так как AH образует равные углы в точках R и M. Противолежащие углы такого четырехугольника являются дополнительными, а $\angle MHA$ — прямой угол, из чего следует, что $\angle ARM$ также является прямым углом.

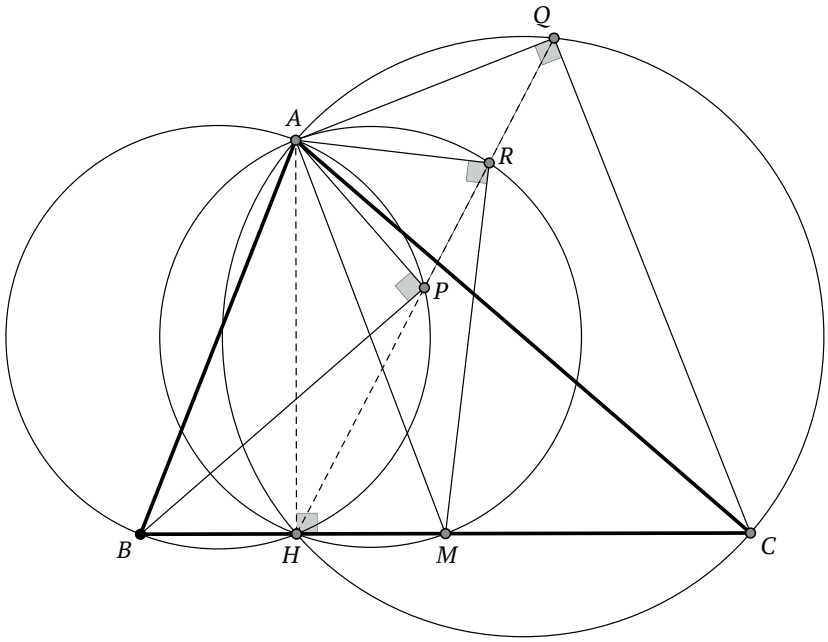


Рисунок Д-145

Пример 146. Еще один неожиданный прямой угол

Чтобы доказать, что угол $\angle HPJ$ является прямым углом, следует показать, что $NJ = NH = NP$, откуда вытекает, что точки J, P и H лежат на окружности с центром N. Из этого следует, что $\angle JPH$ — прямой угол, как показано на рис. Д-146. В треугольнике AOC, где $NH \parallel OC$, мы имеем $\frac{AN}{AH} = \frac{AO}{AC}$. Также в треугольнике AFO, где $NP \parallel OF$, имеем $\frac{AN}{NP} = \frac{AO}{OF}$. Однако $OC = OF$, поскольку они являются радиусами одного и того же круга, и, таким образом, $\frac{AN}{NP} = \frac{AO}{OC}$. Так как $\frac{AO}{AC} = \frac{AN}{AH}$, получаем $\frac{AN}{AH} = \frac{AN}{NP}$, следовательно, $NH = NP$. Поскольку AO —

медиана треугольника ABC, а JH параллелен BC, то $NJ = NH$. Таким образом, мы имеем $NJ = NH = NP$, что мы и намеревались доказать, чтобы установить, что угол JPH вписан в полукруг, диаметр которого равен JH, откуда следует $\angle JPH = 90°$.

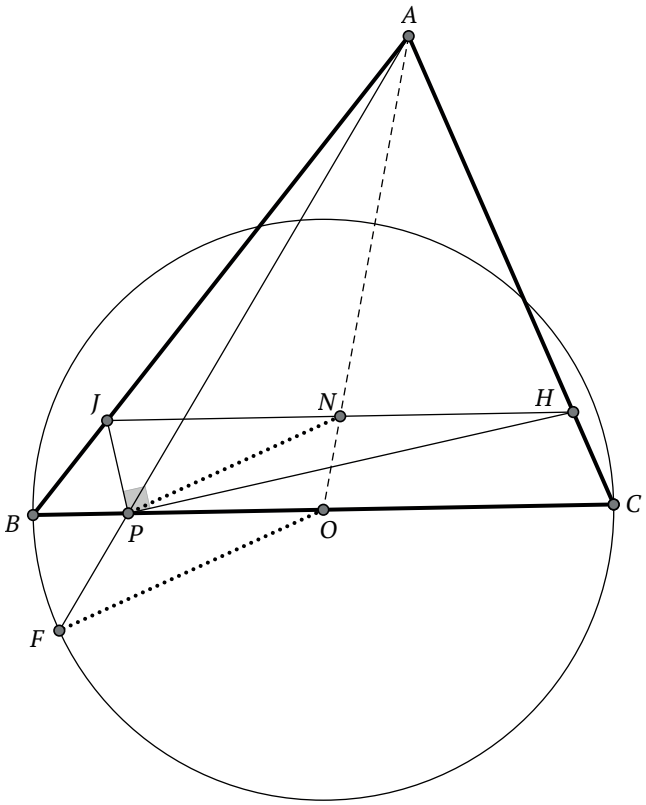


Рисунок Д-146

Пример 147. Четыре точки на одной окружности

Для начала отметим, что четырехугольник $ARHQ$ на рис. Д-147 может быть вписан в окружность, поскольку $\angle HRA = \angle AQH = 90°$. Таким образом, $\angle QHR = 180° - \angle RAQ$. Поскольку $\angle QHR$ и $\angle BHC$ — вертикальные углы, они равны, и мы имеем $\angle BHC = 180° - \angle RAQ = 180° - \angle BAC$. Так как точка K была задана через $PH = PK$ и $HK \perp BC$, треугольники HBC и KCB симметричны относительно BC. Тогда получаем $\angle CKB = \angle BHC = 180° - \angle BAC$, что делает четырехугольник $KBAC$ также вписанным в окружность. Следовательно, точки A, B, K и C лежат на одной общей окружности, что мы и намеревались доказать.

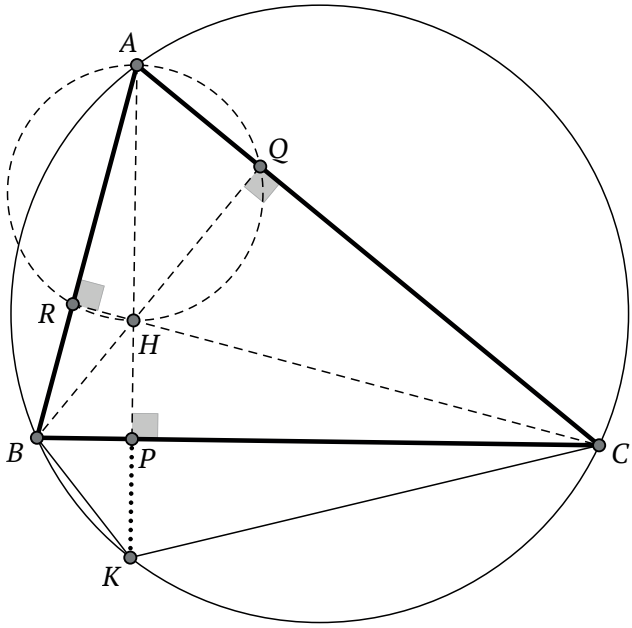


Рисунок Д-147

Пример 148. Еще четыре примечательные точки на одной окружности

На рис. Д-148 отмечаем, что $\angle AOB = 2\angle ACB$, поскольку они оба опираются на одну и ту же дугу AB. В равнобедренном треугольнике ABO имеем $\angle BAO = \frac{1}{2}(180° - \angle AOB) = 90° - \angle ACB$. Высота, опущенная из вершины A, пересекает основание BC в точке G, а буквой H обозначено пересечение OA и EF. В прямоугольном треугольнике AGC имеем $\angle GAC = 90° - \angle ACB$. Следовательно, $\angle BAO = \angle GAC$. Так как $\angle AEH = 90° - \angle BAO$ и $\angle ACB = 90° - \angle GAC$, имеем $\angle AEH = \angle ACB$. Поскольку $\angle AEH$ является дополнительным к $\angle BEF$, $\angle BEF$ — также дополнительный для $\angle ACB$. $\angle BEF$ и $\angle ACB$ — противолежащие углы четырехугольника $BEFC$, и, следовательно, он является четырехугольником, все углы которого лежат на одной окружности.

Пример 149. И еще четыре неожиданные точки на одной окружности

Если провести диаметр описанной окружности треугольника ABC из точки A, как показано на рис. Д-149, он пересечет окружность в точке S, а $\angle ACS$ и $\angle SBA$ окажутся прямыми углами, поскольку они вписаны в полукруги. Следовательно, BH параллелен CS, а BS параллелен CH, что превращает $BSCH$ в паралле-

лограмм. Так как отрезки *HD* и *DS* являются частями одной диагонали *HS*, мы определили, что точки *X*, *H*, *D* и *S* находятся на одной прямой, если *HD* = *DS*. Аналогично также можно показать, что *HF* = *FT*, поскольку они оба являются продолжениями отрезков прямой, соединяющих ортоцентр *H* с серединой стороны треугольника *ABC*.

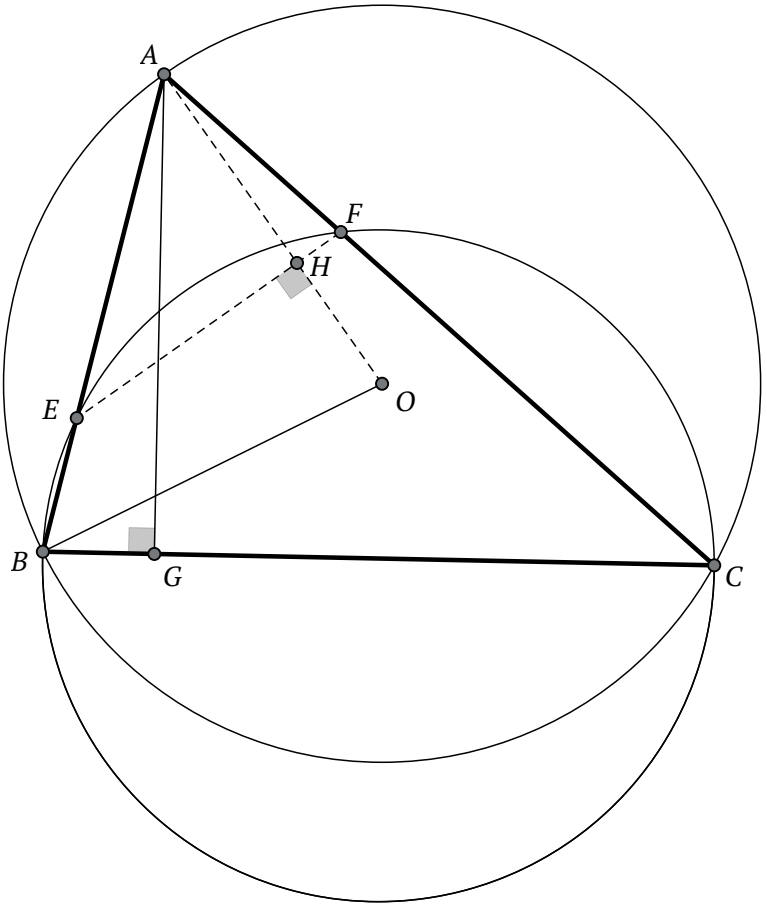


Рисунок Д-148

Используя хорошо известное соотношение, согласно которому произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны, получим $HY \cdot HT = HS \cdot HX$. Поскольку $2HF = HT$, а $2HD = HS$, то путем подстановки получаем $HY \cdot 2HF = 2HD \cdot HX$, или $HY \cdot HF = HD \cdot HX$. Это означает, что поскольку произведения двух пересекающихся отрезков равны, их конечные точки *Y*, *D*, *F* и *X* лежат на одной окружности.

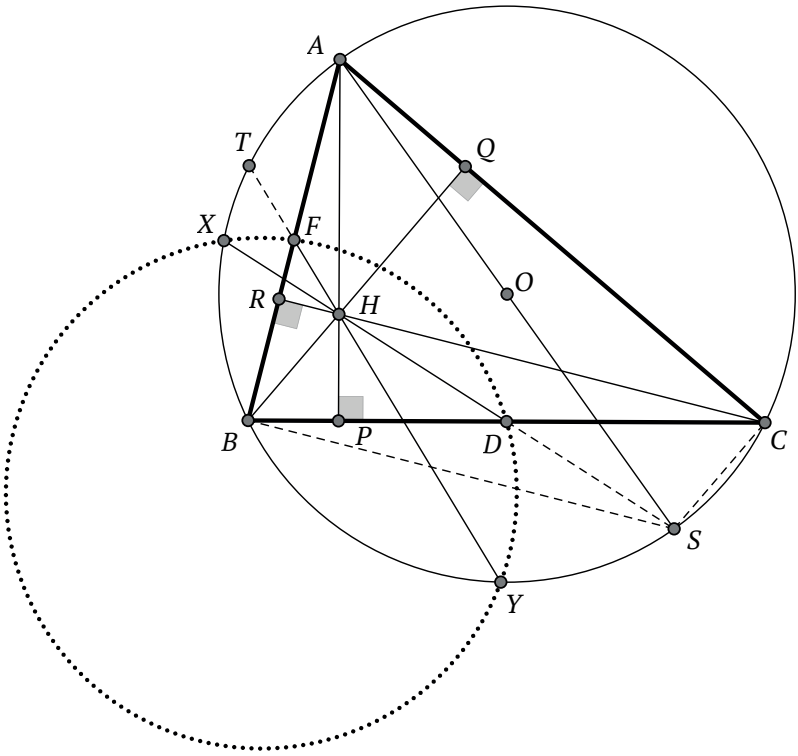


Рисунок Д-149

Пример 150. Перпендикуляры, образующие точки на одной окружности

Чтобы показать, что четырехугольник *EHJG* вписывается в окружность, мы должны показать, что $\angle EGJ$ и $\angle JHE$ дополнительные (до 180°), как показано на рис. Д-150. Треугольник *APQ* — прямоугольный; следовательно, $\angle JPA + \angle AQJ = 90°$. Так как $\angle AJP$ и $\angle AGP$ являются прямыми углами, четырехугольник *APGJ* можно вписать в окружность, из чего следует $\angle JPA = \angle JGA$. Аналогично четырехугольник AJHQ также можно вписать в окружность, из чего следует $\angle AQJ = \angle AHJ$. Так как $\angle AGC = 90° = \angle AEC$, мы имеем другой вписанный в окружность четырехугольник *AGEC*, из чего следует $\angle EGC = \angle EAC$. Аналогично из $\angle AEB = 90° = \angle AHB$ мы имеем другой вписанный в окружность четырехугольник *ABEH*, из чего получаем $\angle BHE = \angle BAE$. Наконец, из $\angle CGA = \angle AHB = 90°$ имеем $\angle JGA + \angle CGJ + \angle AHJ + \angle JHB = 180°$. Так как $\angle JGA + \angle AHJ = \angle JPA + \angle AQJ = 90°$, имеем $\angle CGJ + \angle JHB = 90°$, и это позволяет скомбинировать углы для получения результата: $\angle EGJ + \angle JHE = \angle EGC + \angle BHE + (\angle CGJ + \angle JHB) = \angle EAC + \angle BAE + (\angle CGJ + \angle JHB) = 90° + 90° = 180°$.

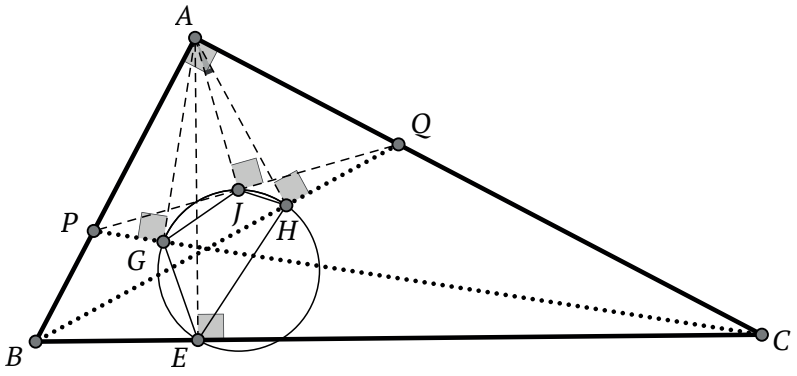


Рисунок Д-150

Отсюда следует, что четырехугольник $EHJG$ можно вписать в окружность, а это означает, что точки E, G, H и J лежат на одной окружности.

Пример 151. Высоты и окружности, которые образуют еще одну окружность

Чтобы доказать это соотношение, мы еще раз применим факт, что произведение отрезков пересекающихся хорд окружности равно. Пусть на рис. Д-151 буквой H обозначен ортоцентр ABC, или, другими словами, точка пересечения высот AP и BQ. В окружности с центром M мы имеем $HL \cdot HK = HA \cdot HP$, а в окружности с центром N — $HR \cdot HS = HB \cdot HQ$. Отметив равенство $\triangle AQB = \triangle APB = 90°$, видим, что P и Q лежат на окружности диаметром AB; следовательно, $HA \cdot HP = HB \cdot HQ$. Из этого получаем $HL \cdot HK = HR \cdot HS$, что указывает на принадлежность всех точек S, L, R и K одной окружности. Точка T — просто основание высоты от вершины C треугольника ABC на сторону AB. Поскольку $\angle CTA = \angle BTC = 90°$, эта точка на отрезке AB, безусловно, лежит на обеих окружностях.

Пример 152. Еще больше неожиданных точек на одной окружности

Так как $RD \perp BC$ и $RF \perp AB$, точки B, D, R и F лежат на одной окружности, как показано на рис. Д-152. Следовательно, $\angle DBR = \angle DFR$. Продлеваем BP до пересечения с RF в точке X. В прямоугольном треугольнике BXF имеем $\angle LFX = \angle FBL$. Из этого следует, что $\angle DFR = \angle XBF$, $\angle CBR = \angle XBA$ и $\angle CBP = \angle RBA$. Перпендикуляр из точки P к стороне BC пересекает BC в точке I, откуда $PI \perp BC$. Имеем $BI \cdot BD = (BP \cdot \cos \angle CBP) \cdot (BR \cdot \cos \angle DBR)$ и $BK \cdot BF = (BP \cdot \cos \angle XBF) \cdot (BR \cdot \cos \angle RBA)$.

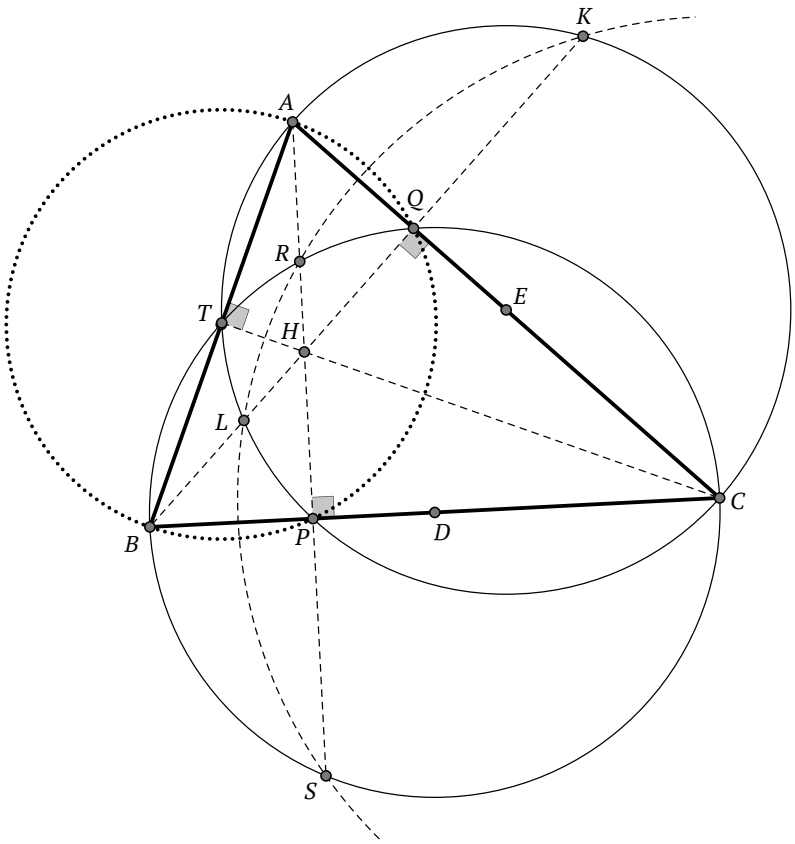


Рисунок Д-151

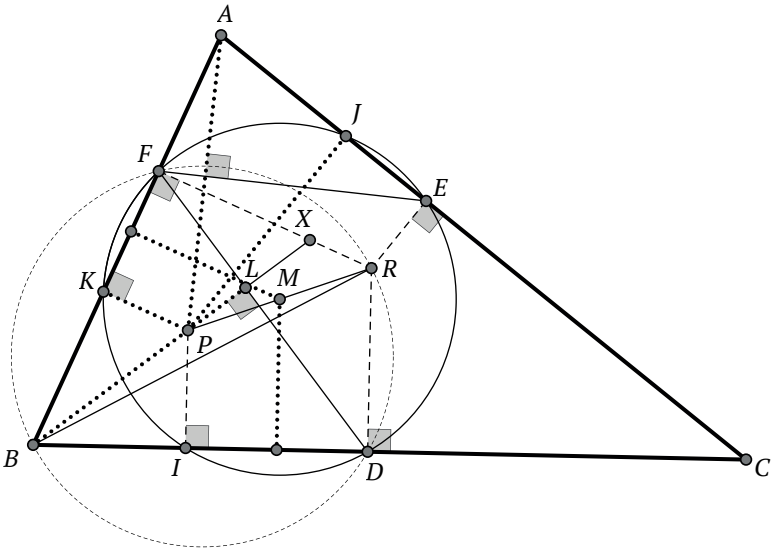


Рисунок Д-152

Отсюда следует, что $BI \cdot BD = BK \cdot BF$; следовательно, точки K, F, D и I лежат на одной окружности по теореме о касательной-секущей. Центр M этой окружности лежит как на срединном перпендикуляре отрезка ID, так и на срединном перпендикуляре отрезка FK и, таким образом, является серединой PR. Если у нас есть точка J на AC, такая что $PK \perp AC$, мы можем точно так же утверждать, что точки E, J, F и K лежат на общей окружности с центром M. Подводя итог, мы доказали, что точки D, E, J, F, K все лежат на одной окружности, что добавляет точки I и J к ранее рассмотренным точкам.

Пример 153. Удивительная окружность с пятью точками

Так как $\angle HPM = 90°$ и угол, вписанный в полусферу, является прямым, точка P лежит на окружности диаметром MH. На рис. Д-153 видим, что то же самое верно для точек E и F. Поскольку M — середина BC и E — середина BQ, получаем, что ME параллелен CQ. Так как $\angle BQC = 90°$, следовательно, мы также имеем $\angle BEM = 90°$, и E, таким образом, тоже лежит на окружности диаметром MH. То же самое справедливо для точки F на высоте CR, и мы видим, что P, F и E лежат на одной окружности диаметром MH.

Остается показать, что треугольники PFE и ABC подобны. Поскольку P, F, H и E лежат на одной окружности, а PCH и BCR — прямоугольные треугольники, мы имеем $\angle PEF = \angle PHF = \angle PHC = 90° - \angle HCP = 90° - \angle RCB = \angle CBA$. Аналогично получаем $\angle EFP = \angle ACB$; следовательно, треугольники PFE и ABC подобны.

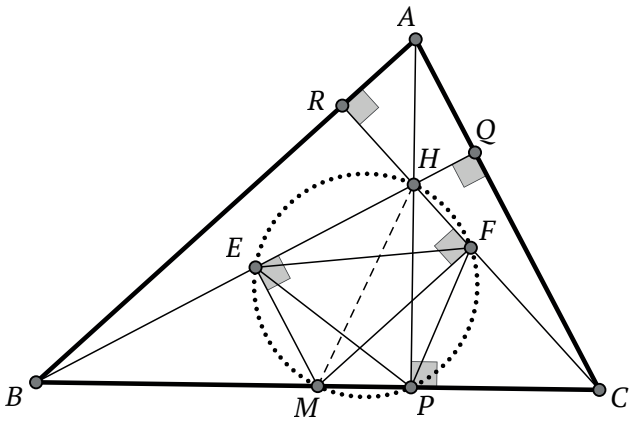


Рисунок Д-153

Пример 154. Знаменитая окружность девяти точек

На рис. Д-154(а) точки K, M и N являются серединами трех сторон, а AD представляет собой высоту треугольника ABC. Поскольку MN — средняя линия[1] тре-

[1] Средние линии треугольника — прямые, проходящие через середины сторон, см. стр. 53.

угольника ABC, мы имеем $BC \parallel MN$. Следовательно, $DKMN$ — трапеция. Кроме того, KM также является средней линией треугольника ABC, так что $KM = \frac{1}{2}$ AB. Поскольку ND — это медиана к гипотенузе прямоугольного треугольника BDA, мы также имеем $ND = \frac{1}{2}AB$. Следовательно, $KM = ND$, и трапеция $DKMN$ — равнобедренная. Напомним, что когда противоположные углы четырехугольника дополняют друг друга (до 180°), как в случае равнобедренной трапеции, четырехугольник можно вписать в окружность. Это относится и к четырехугольнику $DKMN$, следовательно, D лежит на описанной окружности треугольника KMN.

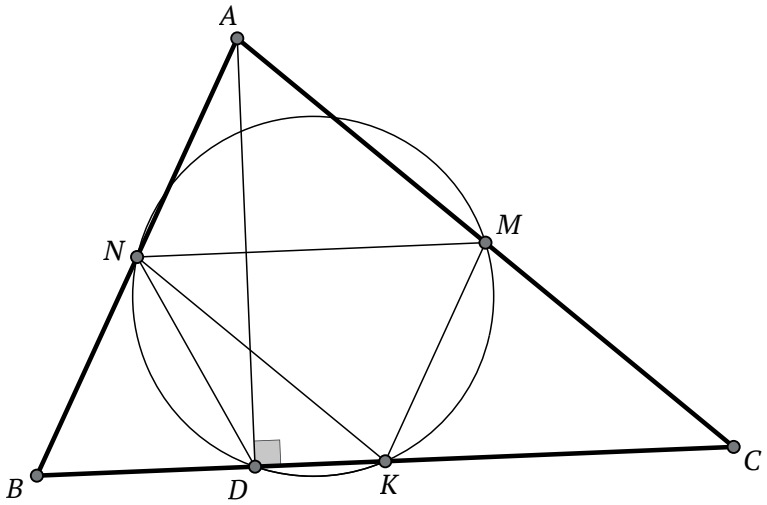


Рисунок Д-154(а)

Используя ту же процедуру, находим, что четырехугольники $ENKM$ и $FNKM$ также являются равнобедренными трапециями и, следовательно, имеют описанную окружность. Из этого следует, что E и F тоже лежат на описанной окружности треугольника KMN.

Теперь обратим внимание на точки X, Y и Z.

Так как H — ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC, следовательно, X — середина AH, как показано на рис. Д-154(б). Отсюда MX, которая является средней линией треугольника AFC, параллельна высоте CF треугольника ABC. Кроме того, KM является средней линией треугольника ABC, из чего вытекает $KM \parallel AB$. Следовательно, поскольку $\angle CFA$ — прямой угол, $\angle XMK = \angle CFA = 90°$. Поскольку $KD \perp AD$, четырехугольник $DKMX$ имеет описанную окружность (напомним, что его противолежащие углы являются дополнительными). Это помещает точку X на окружность, проходящую через точки D, K, M, которую мы уже определили как описанную окружность треугольника KMN. Используя аналогичные рассуждения, мы также поместим Y и Z на окружность треугольника KMN и увидим, что все девять точек K, M, N, D, E, F, X, Y и Z лежат на этой окружности, известной как знаменитая *окружность девяти точек*.

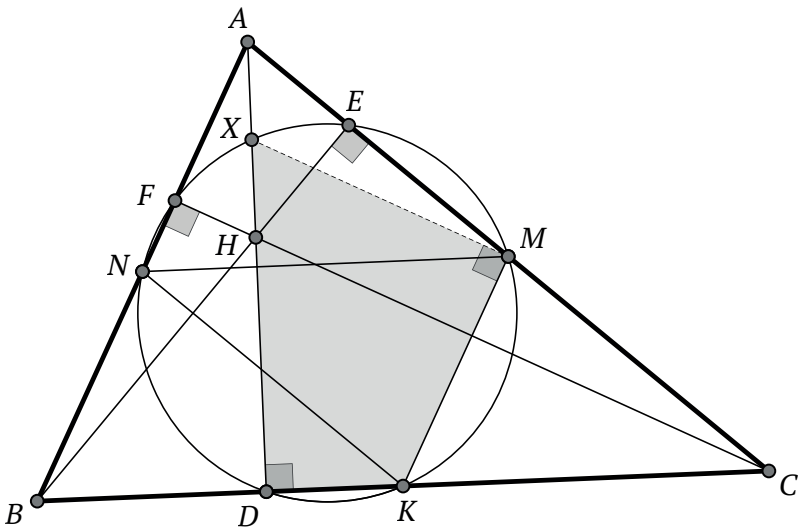


Рисунок Д-154(б)

Пример 155. Коллинеарность с центром окружности девяти точек

Начнем с рис. Д-155, напомнив, что XK — это диаметр окружности девяти точек, а точка R — середина XK. Это следует из того, что $XNKZ$ представляет собой прямоугольник, а диагональ XK — это диаметр его описанной окружности, которая также является окружностью девяти точек. Чтобы показать это, отметим, что N и K являются серединами отрезков BA и BC соответственно, откуда NK параллелен AC, а длина NK вдвое меньше длины AC. Аналогично, поскольку Z и X являются серединами HC и HA соответственно, ZX также параллелен AC и также вдвое ее короче. В результате $XNKZ$ оказывается параллелограммом. Кроме того, поскольку N и X являются серединами AB и AH соответственно, NX параллелен BH. Так как $BH \perp AC$, также имеем $NX \perp ZX$, и, следовательно, параллелограмм $XNKZ$ является прямоугольником.

Теперь, когда установлено, что XK — это диаметр окружности девяти точек, а X, R и K, таким образом, лежат на одной прямой, мы хотим показать, что S также лежит на этом диаметре.

Из определения ортоцентра H в треугольнике ABC и того факта, что точка S является основанием перпендикуляра, проведенного от ортоцентра H к биссектрисе AT угла BAC, мы получаем $FH \perp FA$, $EH \perp EA$ и $SH \perp SA$. Это означает, что все точки F, E и S лежат на окружности диаметром AH. Поскольку X — середина AH, она является центром этой окружности с радиусом XH. Из того, что AT — биссектриса угла BAC, имеем $\angle FAS = \angle BAT = \angle TAC = \angle SAE$; таким образом, $SF = SE$. Это означает, что $XFSE$ является дельтоидом[1], поскольку как

[1] **Дельтоид** — четырехугольник, у которого равны по две смежные стороны (в отличие от параллелограмма, у которого равны противолежащие стороны).

$XF = XE$, так и $SF = SE$. Следовательно, его диагонали перпендикулярны, т. е. $XS \perp FE$. Так как E и F являются точками на окружности девяти точек, мы также имеем $RF = RE$. Таким образом, $XFRE$ также является дельтоидом, поскольку как $XF = XE$, так и $RF = RE$. Его диагонали также перпендикулярны, что дает нам $XR \perp FE$, что означает, что X, S и R лежат на одной прямой. Так как мы уже знаем, что на одной прямой лежат X, R и K, это также верно для S, R и K, что мы и намеревались доказать.

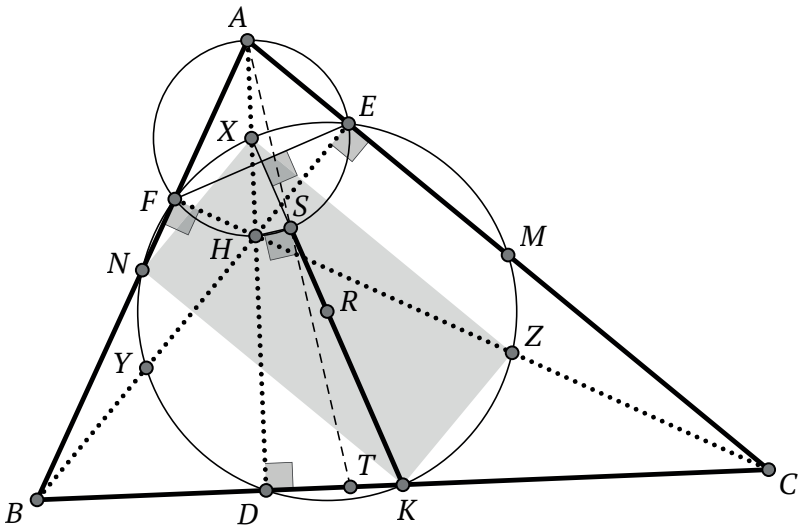


Рисунок Д-155

Пример 156. Встреча трех известных центров треугольника

Чтобы доказать взаимосвязь ортоцентра, центра описанной окружности и геометрического центра, рассмотрим две пары подобных треугольников, показанных на рис. Д-156. Сначала рассмотрим треугольники ABH и DEO. Поскольку D — это средняя точка BC, а E — средняя точка AC, мы знаем, что DE параллелен AB, а также вдвое короче, чем AB. Кроме того, так как AH и DO перпендикулярны BC, они параллельны. Аналогично поскольку и BQ, и EO перпендикулярны AC, они также параллельны. Мы видим, что каждая пара сторон треугольников ABH и DEO параллельна друг другу, следовательно, треугольники подобны. Так как мы уже знаем, что AB в два раза длиннее ED, AH также в два раза длиннее OD.

Если обозначить через G точку пересечения прямой OH и медианы AD, то можно рассмотреть треугольники AHG и DOG. Мы уже установили, что AH и DO параллельны, и так как AG и DG лежат на одной прямой, как и HG и OG, треугольники AHG и DOG также подобны. Поскольку известно, что AH в два раза длиннее OD, получается, что AG также в два раза длиннее DG. Это означает, что точка G на медиане AD является геометрическим центром ABC, так как она

делит медиану в соотношении 2:1. Мы видим, что этот геометрический центр треугольника *ABC* действительно лежит на *OH*, как заявлено, и из-за подобия треугольников *AHG* и *DOG* мы также имеем $OG = \frac{1}{2}HG$. Замечательную прямую, содержащую три точки *O*, *G* и *H*, обычно называют прямой Эйлера, в честь знаменитого швейцарского математика Леонарда Эйлера (1707–1783).

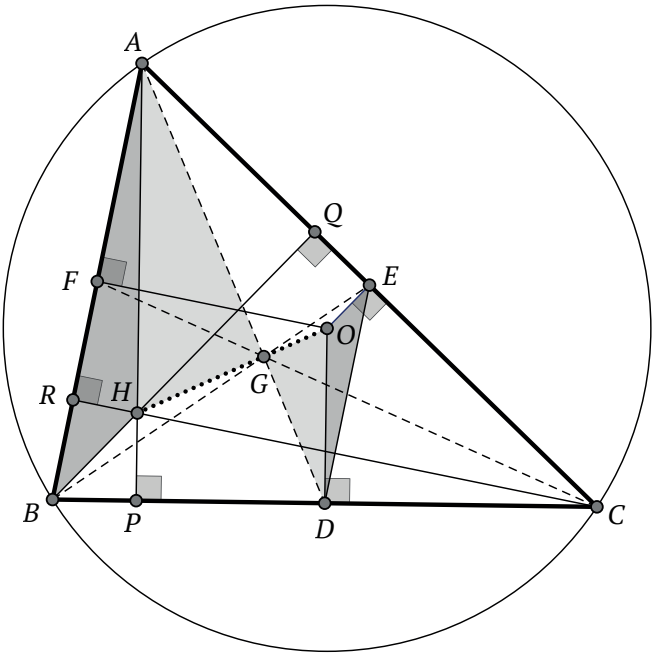


Рисунок Д-156

Пример 157. Свойства окружности девяти точек

Сначала отметим, что центр описанной окружности *O* лежит на перпендикуляре к середине стороны *BC*, а центр окружности девяти точек *R* лежит на перпендикуляре к середине отрезка *DK*. Как видно на рис. Д-157, это означает, что обе эти перпендикулярные линии параллельны высоте *AD* треугольника *ABC*. Мы видим, что четырехугольник *DKOH* представляет собой трапецию с двумя соседними прямыми углами и перпендикуляром к середине отрезка *DK* в качестве средней линии. Эта средняя линия пересекает сторону *OH* в ее середине. Поскольку аналогичное рассуждение справедливо для трапеций *MEHO* и *FNOH*, центр *R* окружности девяти точек является серединой *OH*, как мы и намеревались показать.

Теперь довольно легко понять, почему радиус окружности девяти точек вдвое меньше радиуса описанной окружности. Поскольку *Y* — середина *BH*, а *R* — середина *HO*, имеем $\frac{HY}{HB} = \frac{HR}{HO} = \frac{1}{2}$. Это означает, что треугольники *HYR*

и HBO подобны, а $\frac{RY}{OB} = \frac{1}{2}$, или $OB = 2RY$. Поскольку OB — это радиус описанной окружности, а RY — радиус окружности девяти точек, доказательство завершено.

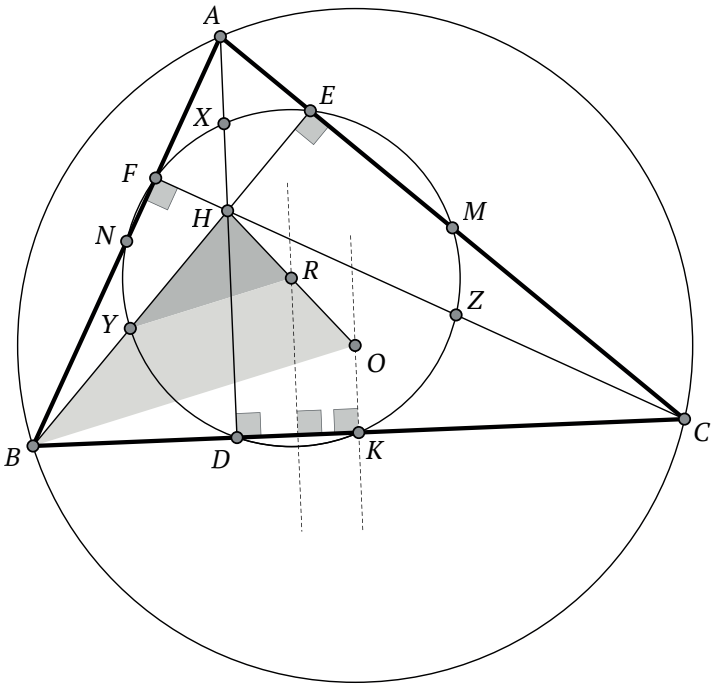


Рисунок Д-157

Пример 158. Еще свойства окружности девяти точек

Этот результат является непосредственным следствием примера 157. Там мы установили справедливость соотношений $\frac{HR}{HO} = \frac{1}{2}$ и $\frac{RY}{OB} = \frac{1}{2}$. Поскольку треугольники HRL и HOJ, показанные на рис. Д-158, имеют общий угол в вершине H, они, следовательно, подобны. Таким образом, $\frac{HL}{HJ} = \frac{1}{2}$, что мы и намеревались показать.

Пример 159. Неожиданная коллинеарность

Неожиданно оказалось, что это свойство является непосредственным следствием существования окружности девяти точек, с которой мы впервые столкнулись в примере 154. Напомним, что эта окружность содержит основания высот, середины сторон треугольника и середины трех отрезков, соединяющих ортоцентр H с вершинами треугольника.

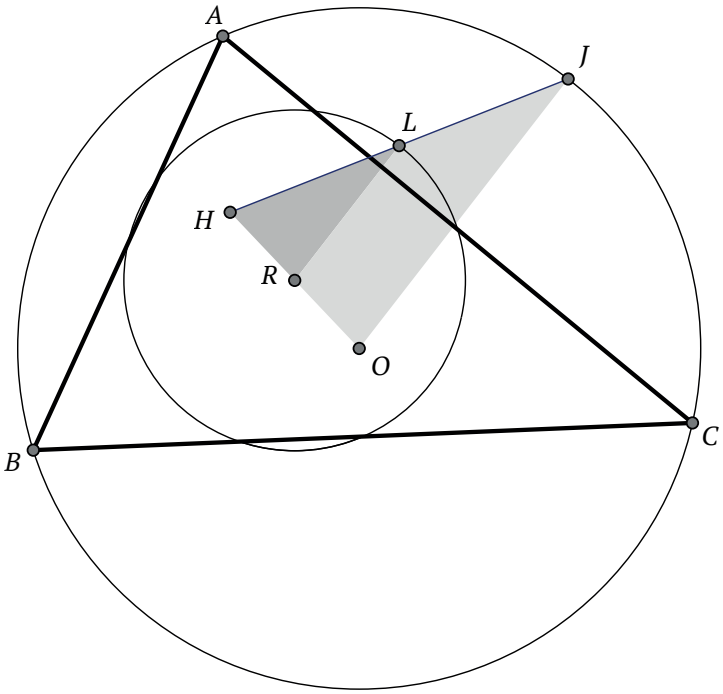


Рисунок Д-158

На рис. Д-159 показана окружность девяти точек с центром R. Можно отметить, что все вершины заштрихованного четырехугольника $OEKY$ лежат на окружности девяти точек. Точки E и K являются серединами сторон CA и BC соответственно, а Y — серединой HB. Мы уже знаем, что O — это центр окружности, проходящей через точки A и H, и поскольку AH должно быть диаметром этой окружности, точка O является серединой AH. Следовательно, O также находится на окружности девяти точек. Поскольку O и Y являются серединами HA и HB соответственно, треугольники HAB и HOY подобны, и мы имеем $OH = \frac{1}{2}AB$ и $OY \parallel AB$. Кроме того, так как E и K являются серединами CA и BC соответственно, треугольники CAB и CEK также подобны, и мы имеем $EK = \frac{1}{2}AB$ и $EK \parallel AB$. Это означает, что поскольку OY и EK имеют одинаковую длину и параллельны, $OEKY$ является параллелограммом. Кроме того, мы отмечаем, что O и E являются серединами AH и AC соответственно треугольника AHC, так что треугольники AHC и AOE похожи. Тогда $OE = \frac{1}{2}HC$ и $OE \parallel HC$. Поскольку высота HC треугольника ABC перпендикулярна стороне AB, то OE перпендикулярна OY, а параллелограмм $OEKY$ также является прямоугольником.

Мы видим, что радиус OE окружности с центром O перпендикулярен EK, таким образом, EK является касательной к окружности O в точке E. Аналогично мы имеем FK как касательную к окружности с центром O в точке F. Это означает, что касательные к окружности O в точках E и F пересекаются в середине K стороны треугольника BC.

Таким образом, не только показано, что эти две касательные пересекаются в точке X на стороне BC, но и более строго: они пересекутся в середине стороны BC точке $K = X$.

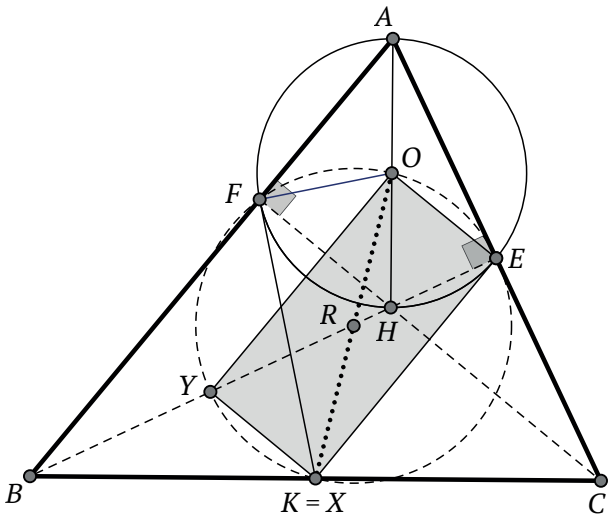


Рисунок Д-159

Пример 160. Пересечение прямых, порождаемое ортоцентрическим треугольником

Чтобы доказать это пересечение, напомним, что окружность девяти точек треугольника ABC является общей описанной окружностью треугольников DEF и MNR, как показано на рис. Д-160. Мы покажем, что прямые JM, KN и LR пересекаются в точке центра P этой окружности. Рассмотрим теперь треугольник EFM. Центр P окружности девяти точек лежит на перпендикуляре к середине его стороны EF. Если мы сможем показать, что треугольник EFM является равнобедренным со сторонами $ME = MF$, то этот перпендикуляр также является высотой MJ треугольника EFM. Из примера 20 уже известно, что $\angle AEF = \angle CBA = \beta$. Кроме того, в окружности девяти точек мы имеем $\angle MEN = \angle MRN = \angle ACB = \gamma$, поскольку стороны треугольника MNR параллельны сторонам треугольника ABC. Это дает $\angle FEM = 180° - \angle AEF - \angle MEN = 180° - \beta - \gamma = \angle BAC = \alpha$. Повторяя эту процедуру для другой стороны, получаем $\angle ECA = \angle ACB = \gamma$, $\angle PKM = \angle PHM = \angle CBA = \beta$ и $\angle MFE = 180° - \angle EFA - \angle RFM = 180° - \gamma - \beta = \angle BAC = \alpha$ и видим, что треугольник EFM равнобедренный со сторонами $ME = MF$, как мы и предполагали. Таким образом, центр P окружности девяти точек лежит на MJ, и поскольку мы можем повторить эти рассуждения как для NK, так и для RL, получаем, что три прямые действительно имеют общую точку P.

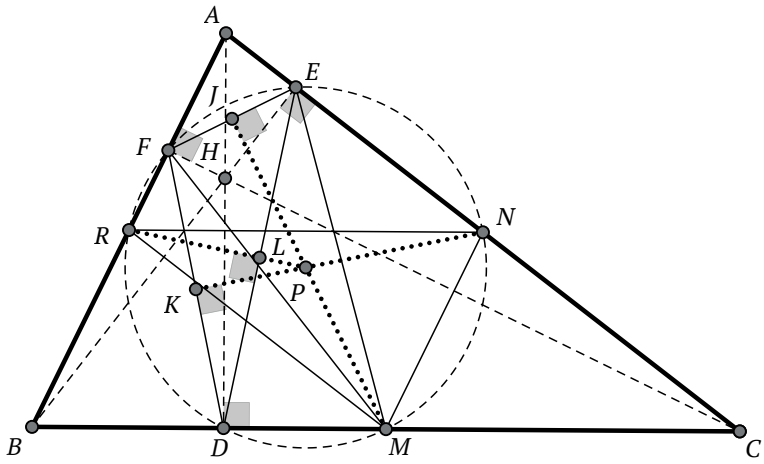


Рисунок Д-160

Пример 161. Высоты создают пересечение в одной точке и равенство

Из примера 154 известно, что середины K, M и N сторон и основания D, E и F высот треугольника ABC, а также середины T, U и V отрезков, соединяющих вершины треугольника ABC с его ортоцентром H, лежат на окружности девяти точек этого треугольника. Нужно показать, что TK, UM и VN являются диаметрами этой окружности, поскольку тогда они, безусловно, пересекаются в своих серединах, а также имеют одинаковую длину.

На рис. Д-161 показан четырехугольник $NUVM$. Поскольку N и M являются серединами AB и AC соответственно, NM параллелен стороне BC и вдвое ее короче. Аналогично, поскольку U и V являются серединами HB и HC, то же самое верно и для UV. Таким образом, мы установили, что $NUVM$ представляет собой параллелограмм. Из того, что U и N являются серединами BA и BH соответственно, следует, что UN также параллельна HA. Поскольку $HA \perp BC$, следовательно, $UN \perp UV$, а параллелограмм $NUVM$ является прямоугольником.

Центром описанной окружности этого прямоугольника является пересечение его диагоналей UM и VN, т. е. эти два отрезка являются диаметрами описанной окружности прямоугольника $NUVM$. Аналогичным образом для четырехугольников $TUKM$ и $TNKV$ также получаем TK как диаметр описанной окружности, и, следовательно, центр P окружности девяти точек является общей средней точкой всех трех отрезков TK, UM и VN, имеющих одинаковую длину.

Пример 162. Вклад Наполеона в математику

Утверждение можно легко обосновать, представив равенство двух треугольников ABE и DBC, показанных заштрихованными на рис. Д-162. Тот факт, что

треугольники ADB и BEC являются равносторонними, дает следующие соотношения: $BA = BD$, $BE = BC$, а также $\angle CBD = \angle CBA + \angle ABD = \angle CBA + 60° = \angle CBA + \angle EBC = \angle EBA$.

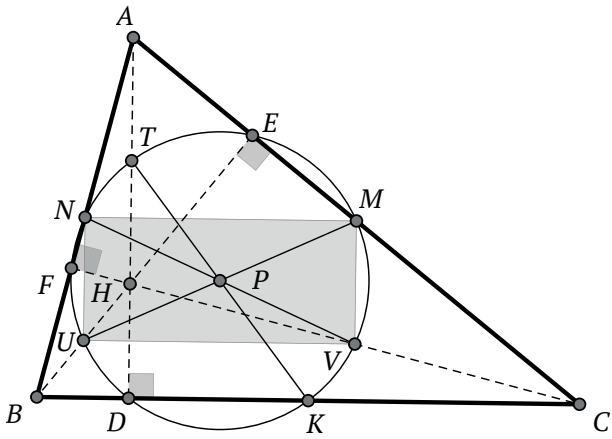


Рисунок Д-161

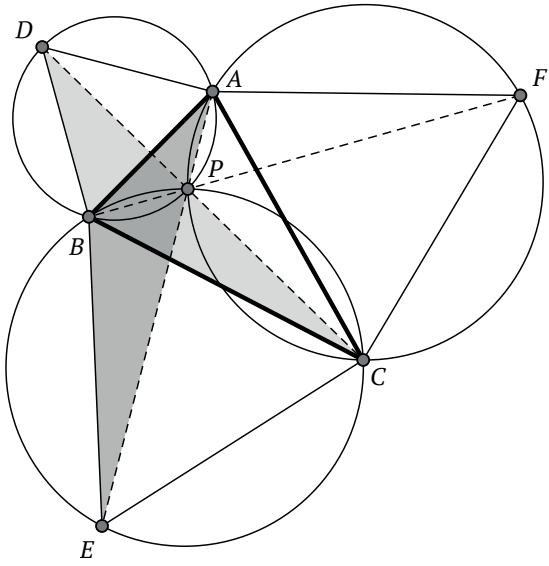


Рисунок Д-162

Следовательно, треугольники ABE и DBC равны. Из этого непосредственно получаем $AE = CD$. Аналогичным образом можно также показать равенство треугольников ABD и ADC, что дает $AE = BF = CD$. То же самое можно было бы сделать, используя $\triangle CFB$ и $\triangle CAE$.

Чтобы показать, что эти три линии имеют общую точку пересечения, необходимо немного подробнее рассмотреть ситуацию.

Обозначая буквой P точку, в которой пересекаются AE и CD, отметим, что $\angle BAP = \angle BAE = \angle BDC = \angle BDP$, поскольку треугольники ABE и DBC равны. Это означает, что точки P, A, D и B лежат на общей окружности, и поэтому получаем $\angle APB = 180° - \angle BDA = 180° - 60° = 120°$. Аналогично имеем $\angle PCB = \angle DCB = \angle AEB = \angle PEB$, т. е. точки P, B, E и C также лежат на одной общей окружности, откуда $\angle BPC = 180° - \angle CEB = 180° - 60° = 120°$. Таким образом, отсюда следует, что $\angle CPA = 360° - \angle APB - \angle BPC = 360° - 120° - 120° = 120°$ и $\angle AEC = 60°$, а точки A, P, C и F также лежат на одной общей окружности. Это означает, что $\angle FPA = \angle FCA = 60°$, из чего заключаем $\angle APB + \angle FPA = 120° + 60° = 180°$. Точка P, таким образом, лежит на BF, и мы имеем эту точку как общую точку пересечения AE, BF и CD.

Пример 163. Точка минимальных расстояний Наполеона (точка Ферма)

Мы уже показывали равенство $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$ в рамках доказательства для примера 162. Теперь покажем, что сумма расстояний от P до трех вершин треугольника $PA + PB + PC$ минимальна среди всех точек внутри треугольника. Чтобы доказать это, выберем любую точку Q (в данном случае находящуюся внутри треугольника), как показано на рис. Д-163.

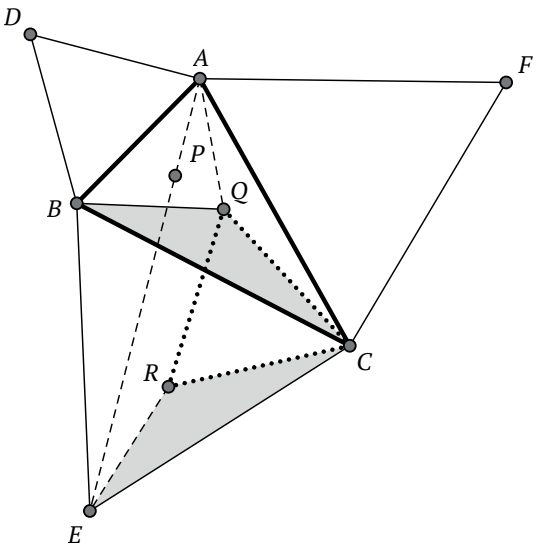


Рисунок Д-163

Мы будем рассматривать сумму расстояний от Q до вершин треугольника, или, другими словами, выражение $QA + QB + QC$. Для упрощения доказательства добавим равносторонний треугольник CQR, как показано на рис. Д-163. Поскольку стороны этого треугольника имеют одинаковую длину, имеем $QC = QR$. Также отметим, что треугольники ABC и REC равны, так как у нас есть $QC =$

RC, $BC = EC$, а также $\angle QCB = \angle QCR - \angle BCR = 60° - \angle BCR = \angle BCE - \angle BCR = \angle RCE$. Отсюда получаем $QB = RE$. Выражение для суммы расстояний преобразуется: $QA + QB + QC = AQ + QR + RE$. Если Q не лежит на прямой AE, то предположение о том, что эта сумма минимальна, очевидно, неверно, поскольку выбор Q на AE приводит к меньшему значению суммы. Иными словами, точка P, для которой сумма $PA + PB + PC$ минимальна, непременно должна лежать на AE. Однако мы можем точно так же рассуждать аналогично для BF и CD, откуда видно, что общая точка P, в которой пересекаются AE, BF и CD, обнаруженная в примере 162, является точкой минимального расстояния, что мы и намеревались доказать.

Пример 164. Точка минимальных расстояний не обязательно находится внутри треугольника

Как мы можем видеть на рис. Д-164(а) и Д-164(б), свойство, описанное в примере 163, не зависит от местоположения выбранной точки Q или величин внутренних углов $\triangle ABC$. Мы видим, что общая точка P пересечения AE, BF и CD всегда является точкой минимального расстояния. Когда угол в вершине A равен 120°, мы имеем $A = P$, так как соблюдается равенство $\angle DPE = \angle EPF = \angle FPD = 120°$. Если угол в вершине A больше 120°, точка P будет лежать за пределами $\triangle ABC$.

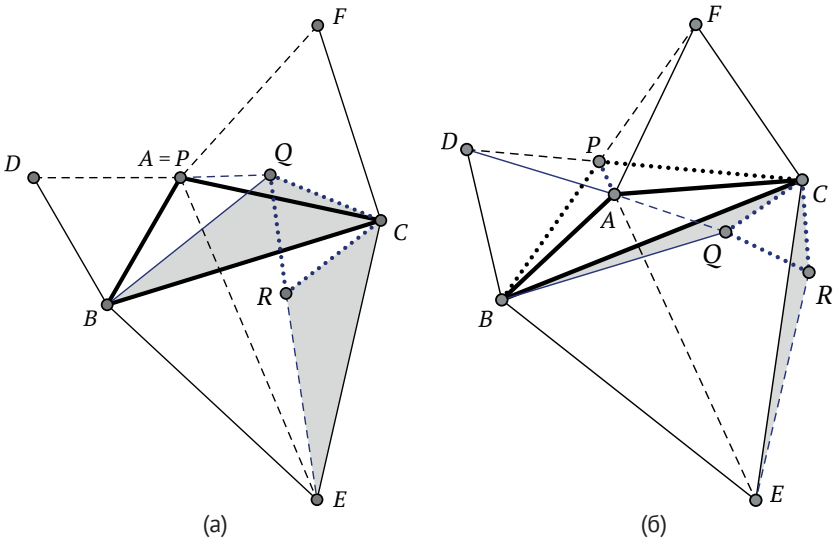


Рисунок Д-164

Пример 165. Расширения теоремы Наполеона

Чтобы доказать, что треугольник KLM является равносторонним, мы покажем, используя рис. Д-165, что стороны пропорциональны равным длинам AE, BF

и CD. Обозначим N середину AC. Поскольку MA делит пополам $\angle CAF$, мы знаем, что $\angle NAM = \angle CAM = 30°$. Точка M при этом является геометрическим центром треугольника ACF; следовательно, $MN \perp AC$, что позволяет идентифицировать треугольник ANM как треугольник с углами 30°–60°–90°. В результате в треугольнике ANM находим, что $\frac{AN}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, или $\frac{AC}{AM} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Аналогично в треугольнике DBA имеем $\frac{AB}{AK} = \sqrt{3}$. Также известно, что $\angle KAM = \angle KAB + \angle BAM = 30° + \angle BAM = \angle BAM + \angle MAF = \angle BAF$, что позволяет установить подобие треугольников AKM и ABF. Из этого следует, что $\frac{BF}{KM} = \frac{AB}{AK} = \sqrt{3}$. Таким же образом можно показать, что $\frac{DC}{KL} = \sqrt{3}$ и $\frac{AE}{ML} = \sqrt{3}$. Отсюда получаем $\frac{BF}{KM} = \frac{DC}{KL} = \frac{AE}{ML}$. Однако поскольку мы знаем, что $BF = DC = AE$, можем сделать вывод, что $KM = LK = ML$; следовательно, треугольник KLM — равносторонний.

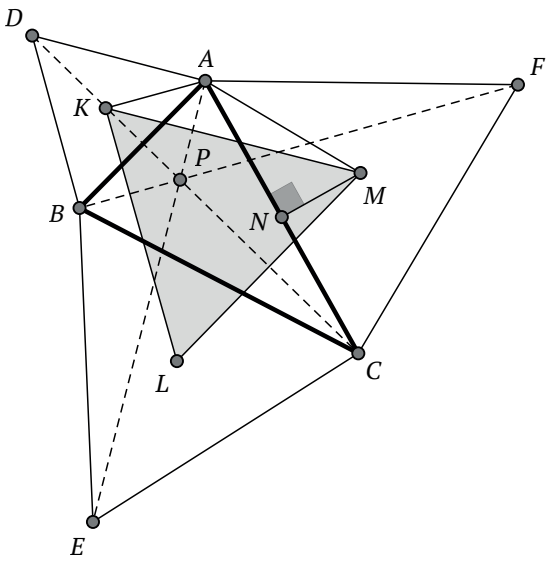


Рисунок Д-165

Пример 166. Пересекающиеся равносторонние треугольники

По сути, доказательство в этом случае такое же, как то, которое мы только что видели для внешних равносторонних треугольников в примере 165, но есть некоторые мелкие детали, из-за которых его стоит рассмотреть отдельно. Прежде всего можно показать, что прямые AE, BF и CD пересекаются в общей точке P, где $AE = BF = CD$. На рис. Д-166 буквой P обозначена точка пересечения отрезков AE и BF. Как и в случае с примером 162, эта точка P является общей точкой описанных окружностей трех равносторонних треугольников ABD,

BCE и *CAF*, что можно показать точно так же, как это делали в доказательстве для примера 162, с помощью равных треугольников *ABE* и *DBC*. Отсюда следует, что *P* лежит на отрезке *CD*, так как и *PD*, и *PC* лежат на биссектрисе угла *FPE*. Это относится и к $\angle FPE = 120°$ по причине того, что $\angle CPE = \angle CBE = 60°$ и $\angle DPA = \angle DBA = 60°$. Кроме того, равные треугольники *ABE*, *BDC* и *BAF* дают *AE* = *BF* = *CD* точно так же, как в доказательстве для примера 162.

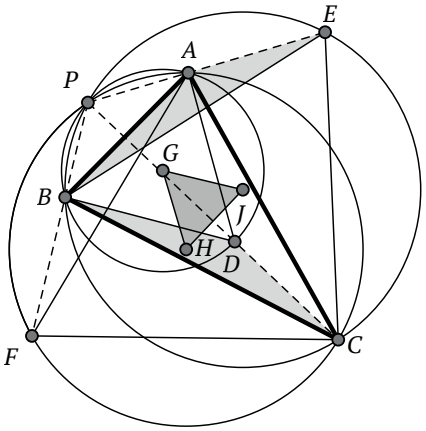


Рисунок Д-166(а)

Теперь покажем, что треугольники *AGH* и *ABF* подобны. Эти треугольники показаны на рис. Д-166(б), и поскольку $\frac{BF}{GH} = \frac{AB}{AG} = \sqrt{3}$, мы можем рассуждать так же, как это делали в доказательстве для примера 165.

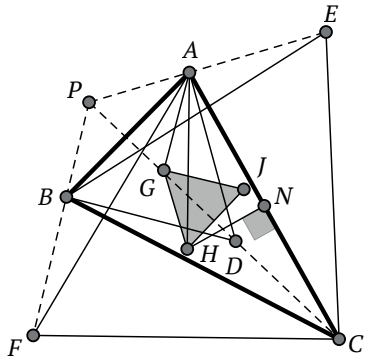


Рисунок Д-166(б)

Из равенств $\frac{DC}{HJ} = \sqrt{3}$ и $\frac{AE}{JG} = \sqrt{3}$ получаем $\frac{BF}{GH} = \frac{DC}{HJ} = \frac{AE}{JG}$. Так как *AE* = *BF* = *CD*, это дает *JG* = *GH* = *HJ*, и треугольник *GHJ*, следовательно, равносторонний.

Пример 167. Удивительное соотношение площадей треугольников

Этот неожиданный результат не только удивителен сам по себе, но и требует умного доказательства, которое следует из относительно простого применения закона косинусов (см. раздел А6 части 3 «*Инструментарий*»).

Сначала рассмотрим треугольник *AKM*, показанный на рис. Д-167. Так как

$$\angle KAM = \angle KAB + \angle BAC + \angle CAM = 30° + \angle BAC + 30° = \angle BAC + 60°,$$

закон косинусов применительно к треугольнику *AKM* дает

$$KM^2 = AK^2 + AM^2 - 2AK \cdot AM \cdot \cos(\angle BAC + 60°).$$

Точно так же в треугольнике *AGH* получаем

$$\angle GAH = \angle BAC - \angle BAG - \angle HAC = \angle BAC - 30° - 30° = \angle BAC - 60°.$$

Применяя закон косинусов к треугольнику *AGH*, получаем

$$GH^2 = AG^2 + AH^2 - 2AG \cdot AH \cdot \cos(\angle BAC - 60°).$$

Отмечая, что $AG = AK$ (G и K симметричны относительно AB), а также $AH = AM$ (поскольку H и M симметричны относительно AC), мы, следовательно, имеем

$$KM^2 - GH^2 = 2AK \cdot AM \cdot (\cos(\angle BAC - 60°) - \cos(\angle BAC + 60°)).$$

В доказательстве примера 165 уже было установлено, что $AK = \frac{AB}{\sqrt{3}}$ и $AM = \frac{AC}{\sqrt{3}}$. Применяя тригонометрическое соотношение $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$ (см. раздел А7 части 3 «*Инструментарий*»), получаем:

$$KM^2 - GH^2 = 2 \cdot \frac{AB}{\sqrt{3}} \cdot \frac{AC}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \sin\angle BAC \cdot \sin 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC,$$

что эквивалентно

$$\frac{\sqrt{3}}{4} KM^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} GH^2 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC.$$

Напомним, что площадь равностороннего треугольника со сторонами длиной a равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, тогда площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC$, что эквивалентно *площадь* $\triangle KLM$ *– площадь* $\triangle GHJ$ *= площадь* $\triangle ABC$, что мы и собирались доказать.

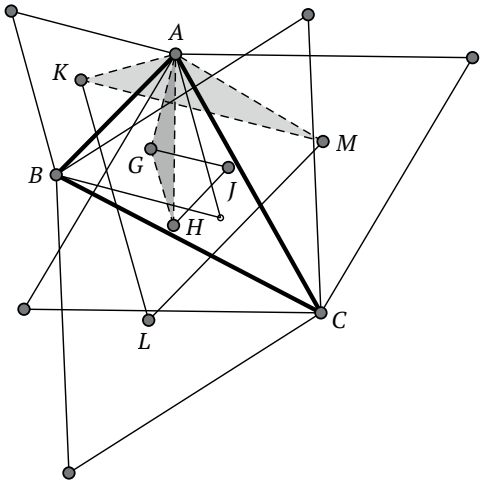


Рисунок Д-167

Пример 168. Геометрический центр возвращает к предыдущей конфигурации

Как показано на рис. Д-168, сначала проводится перпендикуляр к стороне BC через точку L, разделяющий BC пополам в точке X. Затем мы продолжаем LX до точки L' такой, чтобы $XL = XL'$. Кроме того, пусть Y обозначает точку, в которой пересекаются $L'A$ и KM. Треугольник $LL'B$ равносторонний, так как $LB = L'B$ и $\angle LBL' = 2\angle LBX = 2{\cdot}30° = 60°$. Также треугольники KBL и $ML'L$ равны, откуда мы имеем $BL = LL'$, $KL = ML$ и $\angle KLB = \angle L'LB - \angle L'LK = 60° - \angle L'LK = \angle MLK - \angle L'LK = \angle MLL'$. Это дает $AK = KB = ML'$. Аналогично можно показать, что $AM = KL'$, принимая во внимание треугольники MLC и KLL'.

Это означает, что $AKL'M$ — параллелограмм, а так как Y — точка пересечения его диагоналей, то она лежит в середине $L'A$. Поскольку X также является серединой $L'L$, оказывается, что AX и LY являются медианами в треугольнике $L'AL$, и они пересекаются в геометрическом центре $L'AL$. В качестве геометрического центра в этом треугольнике является точка S, разделяющая AX и LY в соотношении 2:1. Поскольку AX является медианой $\triangle ABC$, это означает, что точка S также является геометрическим центром $\triangle ABC$. Кроме того, поскольку LY является медианой $\triangle KLM$, точка S также является геометрическим центром $\triangle KLM$ и, следовательно, средней точкой равностороннего треугольника. Как мы видим, геометрический центр $\triangle ABC$ действительно совпадает с центром $\triangle KLM$, что мы и намеревались доказать.

Пример 169. Появление еще одного равностороннего треугольника

Поскольку $ADCR$ представляет собой параллелограмм, мы имеем $AR = CD$. В примере 162 мы уже установили, что $AE = CD$, и из этого следует $AE = CD = AR$.

Осталось показать, что соотношение $AE = ER$ также справедливо. Чтобы продемонстрировать это, покажем, что треугольники CER и BEA являются равными.

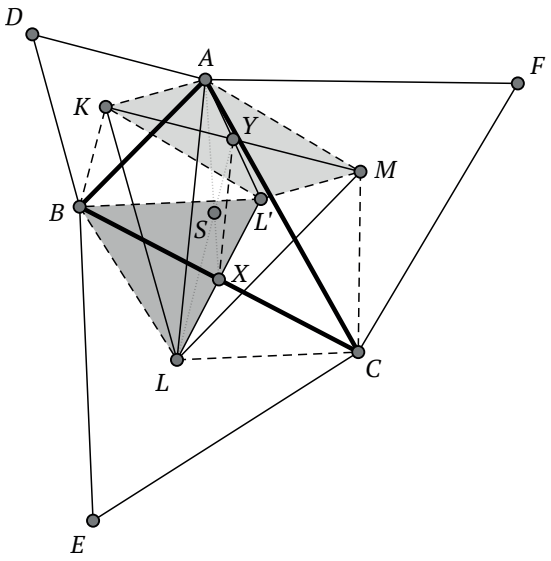


Рисунок Д-168

Из рассмотрения рис. Д-169 ясно, что $CR = AD = AB$ и $CE = BE$ из-за свойств параллелограмма $DCRA$ и равностороннего треугольника BEC. Кроме того, поскольку AC является диагональю параллелограмма $DCRA$, имеем следующее:

$$\angle ECR = 360° - \angle BCE - \angle ACB - \angle RCA,$$
$$\angle ECR = 360° - 60° - \angle ACB - \angle DAC,$$
$$\angle ECR = 300° - \angle ACB - (\angle DAB + \angle BAC),$$
$$\angle ECR = 300° - (\angle ACB + \angle DAB) - 60°,$$
$$\angle ECR = 240° - (180° - \angle CBA),$$
$$\angle ECR = 60° + \angle CBA,$$
$$\angle ECR = \angle EBC + \angle CBA = \angle EBA.$$

Таким образом, мы показали, что треугольники CER и BEA равны; следовательно, $AE = ER$. Подводя итог, имеем $AE = AR = ER$; следовательно, $\triangle AER$ является равносторонним.

Пример 170. Новый способ нахождения центра описанной окружности

Если внимательно посмотреть на конструкцию, показанную на рис. Д-170, то обнаружится, что прямые KD, LE и MF на самом деле являются перпендику-

лярами к серединам трех сторон $\triangle ABC$. Например, отрезок KD, соединяющий вершину D и среднюю точку K, делит пополам сторону AB равностороннего $\triangle ADB$. Аналогично EL делит пополам BC в $\triangle ECB$, а FM делит пополам CA в $\triangle FAC$. Таким образом, три отрезка KD, LE и MF пересекаются в центре O описанной окружности треугольника ABC.

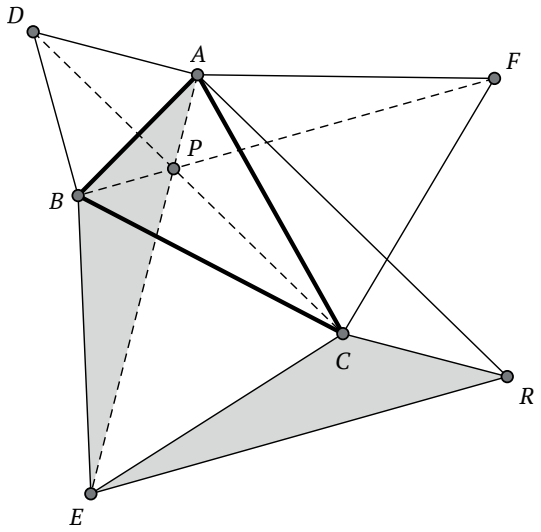


Рисунок Д-169

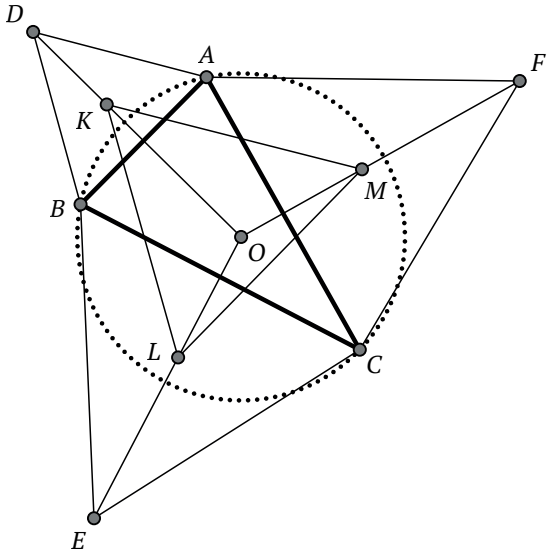


Рисунок Д-170

Пример 171. Точка пересечения окружностей

Чтобы доказать это, нам нужно только вспомнить доказательство в примере 162. В этом доказательстве, как показано на рис. Д-171, точка P определяется как пересечение AE и CD, и показано, что прямым следствием из этого является равенство $\angle APB = \angle BPC = 120°$. Поскольку $\angle BDA = \angle CEA = 60°$, это означает, что P является точкой пересечения описанных окружностей треугольников ADB и BEC. Так как $\angle CPA = 360° - \angle APB - \angle BPC = 360° - 120° - 120° = 120°$ и $\angle AFC = 60° = 180° - 120° = 180° - \angle CPA$, мы видим, что P также лежит на описанной окружности треугольника CFA. Таким образом, P лежит на всех трех окружностях, что доказывает пересечение их в этой точке.

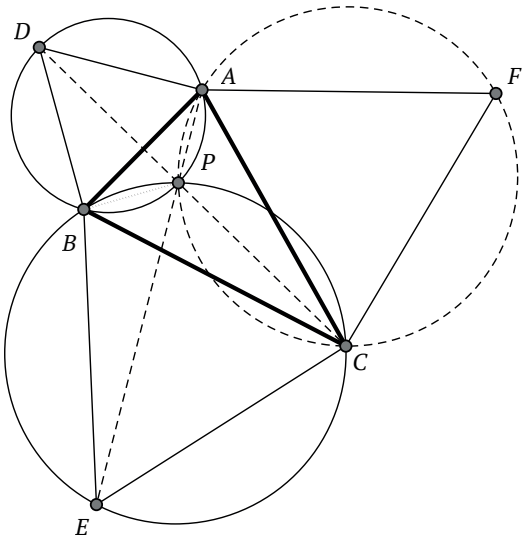


Рисунок Д-171

Пример 172. Знаменитая теорема Микеля

Рассмотрим точки D, E и F на сторонах треугольника ABC, как показано на рис. Д-172. Пусть точка P является пересечением описанных окружностей треугольников BDF и CED. Нам нужно показать, что эта точка P также должна лежать на описанной окружности треугольника AFE. Для этого напомним, что поскольку противолежащие углы четырехугольника, вписанного в окружность, являются дополнительными, $\angle FPD = 180° - \angle B$ и $\angle DPE = 180° - \angle C$. Это означает, что мы также имеем следующее равенство:

$$\begin{aligned}\angle EPF &= 360° - \angle FPD - \angle DPE = 360° - (180° - \angle B) - (180° - \angle C)\\ &= \angle B + \angle C = 180° - \angle A.\end{aligned}$$

Это означает, что точка P лежит на описанной окружности треугольника AFE, что завершает доказательство.

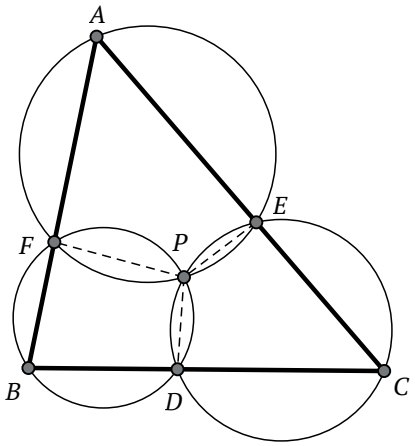


Рисунок Д-172

Пример 173. Подобные треугольники Микеля

Поскольку окружности с центрами в Q и R пересекаются в точках P и F, отрезок RQ является перпендикуляром к середине PF, как показано на рис. Д-173. Аналогично SQ является перпендикуляром к середине PE. Так как треугольники QFP и QP являются равнобедренными при $QF = QP = QE$, RQ также является биссектрисой угла $\angle FQP$, и аналогично SQ является биссектрисой угла $\angle PQE$. Таким образом, мы имеем $\angle Q = \angle RQP + \angle PQS = \frac{1}{2}\angle FQP + \frac{1}{2}\angle PQE = \frac{1}{2}\angle FQE$. Поскольку Q — это центр окружности, содержащей A, F, P и E, то имеем $\angle A = \frac{1}{2}\angle FQE$, так как центральный и вписанный углы опираются на одну дугу $\overset{\frown}{FPE}$. Это дает нам $\angle A = \angle RQS$. Аналогично можно показать, что $\angle B = \angle SRQ$ и $\angle C = \angle QSR$. Таким образом, треугольники ABC и QRS подобны.

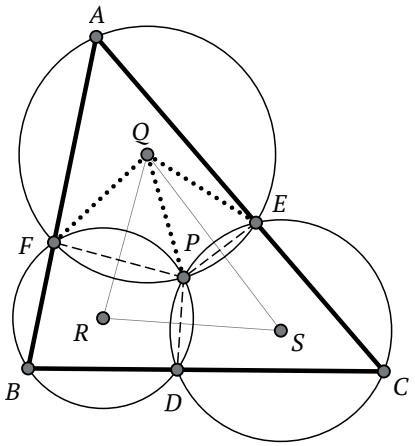


Рисунок Д-173

Пример 174. Поразительная теорема Морли

Поразительный результат этой взаимосвязи стал международной проблемой для математиков. Появилось множество доказательств, одно из которых мы предлагаем здесь.

Допустим, что случайно нарисованный треугольник ABC есть заданный, и введем обозначения: $\frac{1}{3}\angle A = \alpha$, $\frac{1}{3}\angle B$, $= \beta$ и $\frac{1}{3}\angle C = \gamma$. Имеем $\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{3}(\angle A + \angle B + \angle C) = 60°$.

Как показано на рис. Д-174, теперь нарисуем равносторонний треугольник $E'F'G'$ и поставим точки A', B' и C' такие, что $\angle E'F'A' = \beta + 60°$, $\angle A'E'F' = \gamma + 60°$, $\angle F'G'B' = \gamma + 60°$, $\angle B'F'G' = \alpha + 60°$, $\angle G'E'C' = \alpha + 60°$ и $\angle C'G'E' = \beta + 60°$. Мы должны доказать, что треугольник $E'F'G'$ равен треугольнику EFG.

Из приведенных соотношений следует, что $\angle F'A'E' = 180° - (\angle E'F'A' + \angle A'E'F') = 180° - (\beta + 60° + \gamma + 60°) = 60° - (\beta + \gamma) = \alpha$, и аналогично $\angle G'B'F' = \beta$, а также $\angle E'C'G' = \gamma$.

Теперь покажем, что $\angle F'A'B' = \alpha$ и $\angle F'B'A' = \beta$.

Чтобы сделать это, рассмотрим перпендикуляры $F'X$ и $F'Y$ к $A'E'$ и $B'G'$ соответственно. Поскольку $\angle A'E'F' = \angle F'G'B' = \gamma + 60°$, а $E'F' = G'F'$, прямоугольные треугольники $XF'E'$ и $YG'F'$ равны, и тогда $F'X = F'Y = d$.

Теперь рассмотрим длину перпендикуляра h от точки F' до стороны $A'B'$, равную длине отрезка $F'Z$. Если $h < d$, тогда верны следующие соотношения: $\angle B'A'F' < \alpha$ и $\angle F'B'A' < \beta$, и таким образом, $\angle A'F'B' = 180° - \angle B'A'F' - \angle F'B'A' > 180° - (\alpha + \beta)$.

С другой стороны, из $h > d$ следует, что $\angle B'A'F' > \alpha$ и $\angle F'B'A' > \beta$, и, таким образом, $\angle A'F'B' = 180° - \angle B'A'F' - \angle F'B'A' < 180° - (\alpha + \beta)$.

Мы можем подсчитать, однако, что $\angle A'F'B' = 360° - \angle E'F'A' - \angle G'F'E' - \angle B'F'G' = 360° - (\beta + 60°) - 60° - (\alpha + 60°) = 180° - (\alpha + \beta)$, и из этого следует, что $h = d$, $\angle F'A'B' = \alpha$ и $\angle F'B'A' = \beta$.

Аналогичным образом мы также можем показать, что $\angle C'B'G' = \beta$, $\angle G'C'B' = \angle A'C'E' = \gamma$, и $\angle E'A'C' = \alpha$. Мы видим, что $A'E'$ и $A'F'$ делят на три части $\angle B'A'C'$, $B'F'$ и $B'G'$ делят на три части $\angle C'B'A'$, а также $C'G'$ и $C'E'$ делят на три части $\angle A'C'B'$. Так как $\angle B'A'C' = 3\alpha$, $\angle C'B'A' = 3\beta$ и $\angle A'C'B' = 3\gamma$, треугольник $A'B'C'$ подобен первоначально заданному треугольнику ABC. Это подобие распространяется на все возможные конфигурации, и, следовательно, при делении на три части внутренних углов ABC получается внутренний треугольник EFG, подобный $E'F'G'$, причем оба должны быть равносторонними.

Пример 175. Расширение теоремы Морли

Доказательство этого свойства является хорошим примером применения тригонометрической формы теоремы Чевы (см. раздел B5 в части 3 «*Инструментарий*»). Мы хотим показать, что линии AD, BE и CF на рис. Д-175 имеют общую точку, и, согласно теореме Чевы, это эквивалентно

$$\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle BAD}\cdot\frac{\sin\angle EBA}{\sin\angle CBE}\cdot\frac{\sin\angle FCB}{\sin\angle ACF} = 1.$$

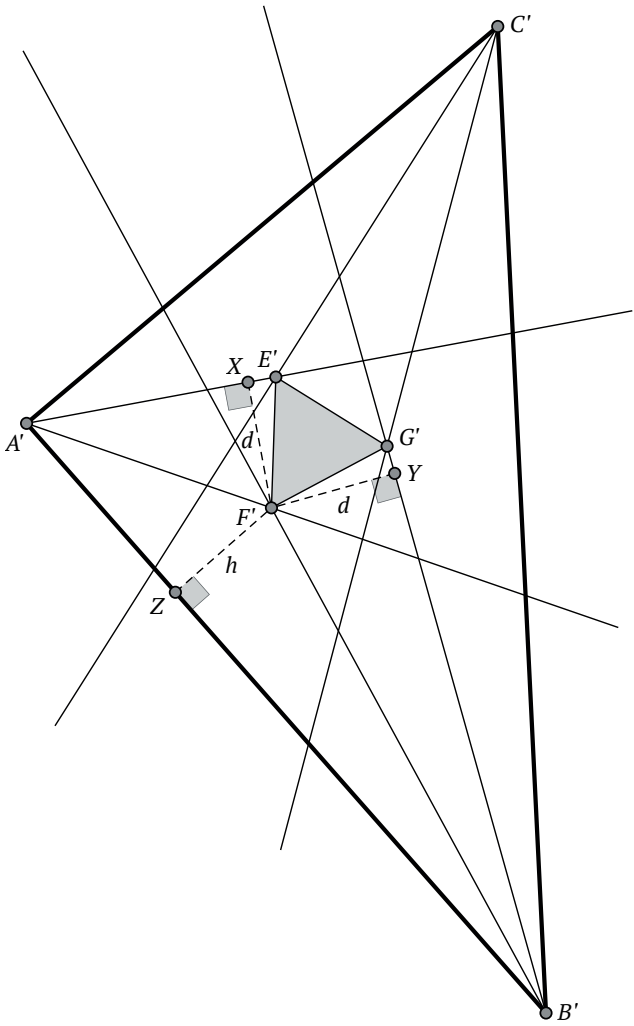


Рисунок Д-174

Согласно той же самой теореме, мы знаем, что

$$\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle BAD}\cdot\frac{\sin\angle DBA}{\sin\angle CBD}\cdot\frac{\sin\angle DCB}{\sin\angle ACD}=1,$$

и это эквивалентно

$$\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle BAD}=\frac{\sin\angle CBD}{\sin\angle DBA}\cdot\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DCB},$$

или

$$\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle BAD}=\frac{\sin\frac{1}{3}\angle CBA}{\sin\frac{2}{3}\angle CBA}\cdot\frac{\sin\frac{2}{3}\angle ACB}{\sin\frac{1}{3}\angle ACB}.$$

Аналогичным образом мы также получаем

$$\frac{\sin\angle DBA}{\sin\angle CBD}=\frac{\sin\frac{1}{3}\angle ACB}{\sin\frac{2}{3}\angle ACB}\cdot\frac{\sin\frac{2}{3}\angle BAC}{\sin\frac{1}{3}\angle BAC}\quad\text{и}\quad\frac{\sin\angle DCB}{\sin\angle ACD}=\frac{\sin\frac{1}{3}\angle ACB}{\sin\frac{2}{3}\angle ACB}\cdot\frac{\sin\frac{2}{3}\angle BAC}{\sin\frac{1}{3}\angle BAC}.$$

Подстановка дает:

$$\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle BAD}\cdot\frac{\sin\angle DBA}{\sin\angle CBD}\cdot\frac{\sin\angle DCB}{\sin\angle ACD}$$
$$=\frac{\sin\frac{1}{3}\angle CBA}{\sin\frac{2}{3}\angle CBA}\cdot\frac{\sin\frac{2}{3}\angle ACB}{\sin\frac{1}{3}\angle ACB}\cdot\frac{\sin\frac{1}{3}\angle ACB}{\sin\frac{2}{3}\angle ACB}\cdot\frac{\sin\frac{2}{3}\angle BAC}{\sin\frac{1}{3}\angle BAC}\cdot\frac{\sin\frac{1}{3}\angle ACB}{\sin\frac{2}{3}\angle ACB}\cdot\frac{\sin\frac{2}{3}\angle BAC}{\sin\frac{1}{3}\angle BAC}=1,$$

и AD, BE, а также CF, таким образом, пересекаются в одной точке.

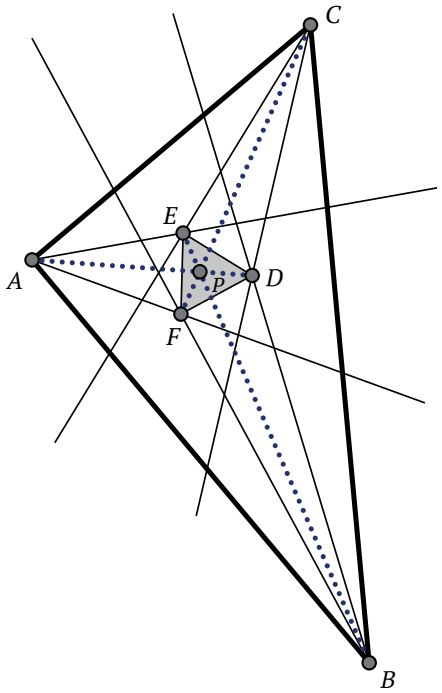


Рисунок Д-175

3

ИНСТРУМЕНТАРИЙ

Введение: набор геометрических инструментов

В интересах предоставления читателям всех необходимых инструментов, которые могут понадобиться для доказательств, представленных в этой книге, и осознавая тот факт, что некоторые читатели, возможно, забыли некоторые основы, представленные в учебной программе по геометрии для средних школ, мы предоставляем этот «*Инструментарий*». Он включает основные понятия, которые помогут вам лучше оценить описанные в первом разделе этой книги удивительные взаимоотношения, которые, как мы надеемся, доставят вам удовольствие.

В первой половине мы здесь рассмотрим некоторые факты и концепции, с которыми вы должны быть знакомы из школьного опыта. Эти результаты представлены без доказательств, поскольку читатель должен их просто вспомнить. Естественно, любой учебник по геометрии для средней школы поможет лучше узнать эти основные понятия.

Далее мы приводим ряд несколько более сложных результатов из базовой тригонометрии и несколько расширенной евклидовой геометрии, которые могут быть знакомы некоторым читателям, а другим — в меньшей степени, но тем не менее легко понятны. Они представлены с доказательствами, предполагающими знание только основных понятий из школьного курса. Для краткости доказательства приведены для самых общих случаев, в то время как для специальных конфигураций могут потребоваться некоторые дополнительные шаги. Заинтересованные читатели, возможно, захотят уточнить некоторые из этих аспектов.

Свойства, описанные во второй части «*Инструментария*», сами по себе могут считаться замечательными свойствами треугольников и вполне могли

бы быть включены в основной раздел этой книги. Причина, по которой они считаются «инструментами», заключается в том, что, как правило, они очень полезны при более сложных геометрических доказательствах. Конечно, это еще больше подчеркивает особенно чарующие аспекты красоты евклидовой геометрии!

A. Инструменты, с которыми вы, вероятно, знакомы из школьного курса геометрии

A1. Равенство треугольников

Равенство треугольников можно доказать, показав, что равны следующие соответственные части:

- две стороны и их внутренний угол (правило SAS[1]);
- два угла и их общая сторона (правило ASA);
- два угла и противолежащая сторона (правило AAS);
- три стороны (правило SSS);
- для прямоугольных треугольников: гипотенуза и катет (правило HL).

A2. Подобие треугольников

Подобие треугольников можно доказать, продемонстрировав любое из следующих эквивалентных свойств:

- соответственные углы равны (правило AAA);
- соответственные стороны пропорциональны;
- две пары соответственных сторон пропорциональны, а прилегающие к ним углы равны.

A3. Свойства прямоугольного треугольника

Для описания следующих свойств мы используем прямоугольный треугольник ABC с прямым углом в точке C (см. рис. A3). Длины сторон, противоположных вершинам A, B и C, обозначаются a, b и c соответственно.

- Теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы: $a^2 + b^2 = c^2$.
- Квадрат высоты h, опущенной на гипотенузу, равен произведению длин отрезков гипотенузы p и q: $h^2 = p \cdot q$.
- Квадрат длины катета a равен произведению длины гипотенузы c на ближайший к нему отрезок гипотенузы q, то есть $a^2 = p \cdot q$, а также $b^2 = c \cdot p$.

---

[1] По-английски угол — *angle*, сторона — *side*, отсюда сокращения правил равенства и подобия: например, SAS расшифровывается как *side – angle – side*.

- Медиана CM, проведенная до гипотенузы прямоугольного треугольника, равна половине длины гипотенузы c.

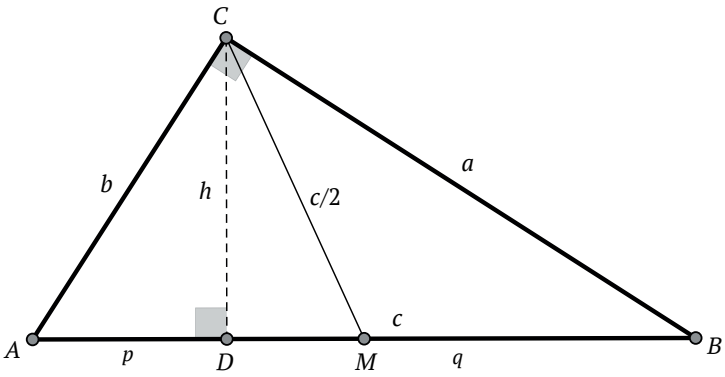


Рисунок А3

А4. Углы, связанные с окружностью

Обозначения см. рис. А4.

- Вписанный угол: $\angle CAB = \frac{1}{2}\angle COB$.
- Угол, сформированный двумя секущими: $\angle CFB = \frac{1}{2}(\angle COB - \angle EOD)$.

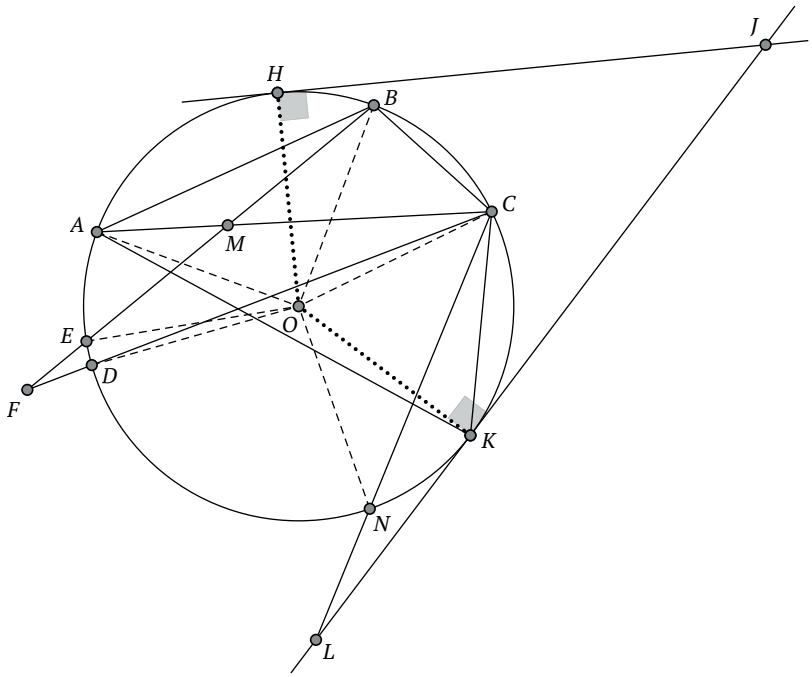


Рисунок А4

- Угол, образованный двумя касательными: $\angle HJK = \frac{1}{2}(180° - \angle KOH)$.
- Угол, образованный секущей и касательной: $\angle KLC = \frac{1}{2}(\angle KOC - \angle NOK)$.
- Угол, образованный двумя хордами, пересекающимися внутри окружности: $\angle AME = \frac{1}{2}(\angle AOE + \angle COB)$.
- Угол, образованный хордой и касательной: $\angle JKC = \frac{1}{2}\angle KOC = \angle KAC$.
- Противолежащие углы в окружности (т. е. противолежащие углы вписанного четырехугольника): $\angle BCK = 180° - \angle KAB$.

A5. Касательные, секущие и хорды: сегменты окружности

Обозначения см. рис. A5.

- Если секущая и касательная исходят из одной и той же внешней точки, то касательная h является средним значением, пропорциональным между всей секущей $e + f$ и ее внешним отрезком: f: $\frac{e+f}{h} = \frac{h}{f}$, или $h^2 = f \cdot (e + f)$.
- Две секущие из одной и той же внешней точки: произведение длины секущей и ее внешнего отрезка равно произведению длины другой секущей и ее внешнего отрезка: $(e + f) \cdot f = (g + k) \cdot k$.
- Для двух хорд, пересекающихся внутри окружности, произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды: $a \cdot b = c \cdot d$.

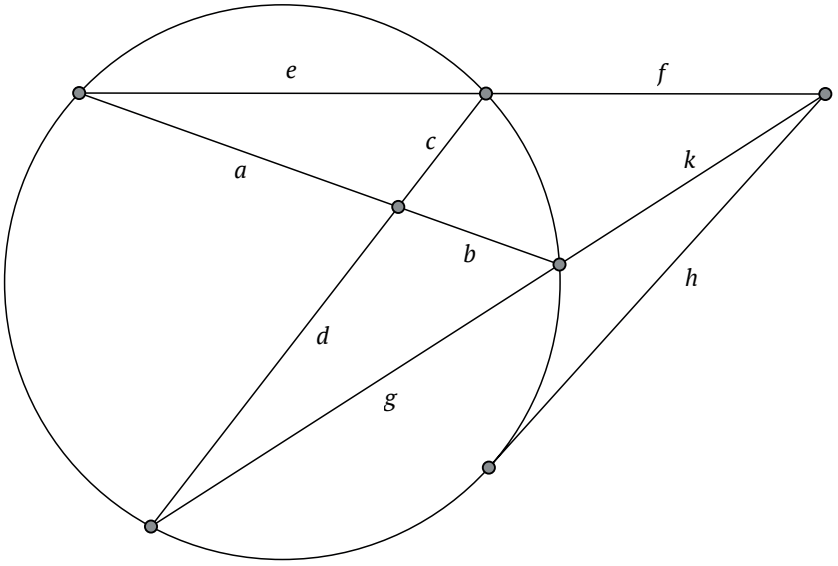


Рисунок A5

A6. Закон синусов и закон косинусов

На рис. A6 в треугольнике ABC длины сторон, противолежащих вершинам A, B и C, обозначены a, b и c соответственно. Тогда $\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}$. Это соотношение известно как закон синусов.

Также $c^2 = a^2 + b^2 - 2a\cdot b\cdot\cos\angle ACB$, и аналогично $a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cdot c\cdot\cos\angle BAC$ и $b^2 = c^2 + a^2 - 2c\cdot a\cdot\cos\angle CBA$. Эти соотношения известны как закон косинусов.

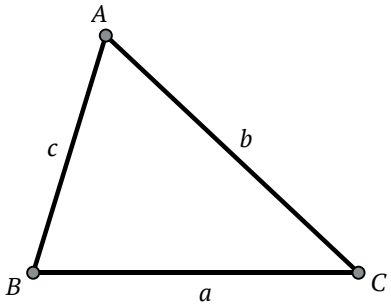


Рисунок A6

A7. Тождества суммы и разности углов

Часто бывает полезно выразить синус или косинус суммы или разности двух углов в виде отдельных синусов и косинусов. Для этой цели можно использовать следующие тождества:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

B. Полезные и увлекательные инструменты, но менее привычные

B1. Внутренняя биссектриса угла в треугольнике

Внутренняя биссектриса угла треугольника разделяет сторону, к которой она проведена, пропорционально двум смежным сторонам разделенного пополам угла. На рис. B1 линия AD является биссектрисой угла BAC, поэтому $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$.

Доказательство. На рис. B1 прямая AD является биссектрисой $\angle BAC$ и $\triangle ABC$. Прямая, параллельная AD, проходящая через точку B, пересекает продолжение стороны CA в точке E. Чтобы упростить задачу, на рисунке отмечены

четыре равных угла. У нас есть $\angle ABE = \angle BAD$, так как это противолежащие внутренние углы параллельных прямых AD и BE. Кроме того, $\angle BAE = \angle DAC$, так как это соответственные углы тех же параллельных линий, а поскольку AD — биссектриса $\angle BAC$, мы также имеем $\angle BAD = \angle DAC$. Таким образом, подстановкой получаем $\angle BAE = \angle ABE$. В результате получится равнобедренный треугольник ABE, где $AE = AB$. Поскольку треугольники ABC и ADC подобны, имеем $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AE}$. Заменив AE на AB, мы получим желаемый результат, а именно $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$.

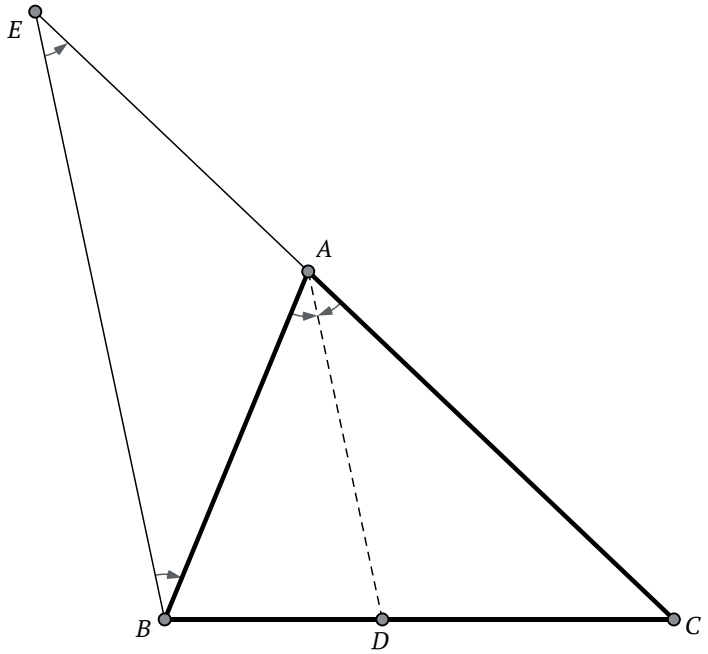


Рисунок B1

B2. Биссектриса внешнего угла в треугольнике

Сумма противолежащей стороны и отрезка, отсекаемого биссектрисой внешнего угла треугольника от продолжения этой стороны, делится прилежащей стороной пропорционально двум смежным сторонам разделенного пополам угла. На рис. B2 линия AD является биссектрисой угла $\angle EAB$, поэтому $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$.

Доказательство. На рис. B2 линия AD является биссектрисой внешнего угла $\angle EAB$ треугольника ABC. Прямая, параллельная AD, проходящая через точку B, пересекает сторону CA в точке E. Как и в предыдущем доказательстве, на рисунке отмечены четыре равных угла.

У нас есть равенство $\angle ABE = \angle DAB$, так как это противолежащие внутренние углы параллельных прямых AD и BE. Кроме того, $\angle EAD = \angle AEB$, потому что они являются соответственными углами этих параллельных, а так как AD — биссектриса $\angle EAB$, также имеем $\angle EAD = \angle DAB$. Таким образом, подстановкой получаем $\angle AEB = \angle EBA$. Это дает равнобедренный треугольник ABE, где $AE = AB$. Поскольку треугольники ABC и ADC подобны, имеем $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AE}$. Заменив AE на AB, получим желаемый результат, а именно $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$.

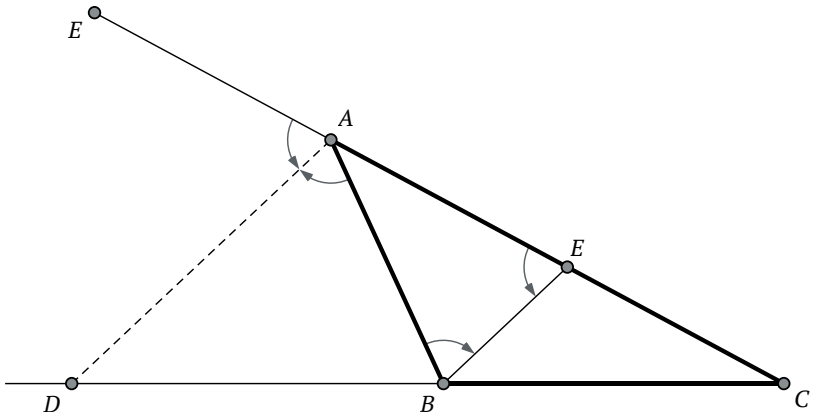


Рисунок B2

B3. Теорема Менелая

На рис. B3(а) показан треугольник ABC с тремя точками D, E и F на продолжении BC, а также сторонах CA и AB соответственно. Теорема Менелая утверждает, что три точки D, E и F являются коллинеарными (лежат на одной прямой) тогда и только тогда, когда отрезки, которые они отсекают на смежных сторонах, имеют равные произведения. Выраженное в виде уравнения, это можно записать в виде $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$[1].

Доказательство. Разделим доказательство этого утверждения на несколько этапов. Прежде всего предполагаем, что D, E и F лежат на одной прямой, и показываем, что из этого следует $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$. На рис. B3(б) через точку C проводим линию, параллельную AB и пересекающую DEF в точке P.

Так как треугольники PCD и FBD подобны, имеем $\frac{CP}{BF} = \frac{CD}{BD}$, или $CP = \frac{BF \cdot CD}{BD}$. Следовательно, треугольники PEC и FEA также подобны, и отсюда

[1] Следует отметить, что в отечественных источниках теорема Менелая обычно представлена в другой форме записи в виде равенства отношений отрезков (см. формулировку далее в конце доказательства).

$\frac{CP}{AF} = \frac{CE}{AE}$, или $CP = \frac{AF \cdot CE}{AE}$. Из этого следует $\frac{BF \cdot CD}{BD} = \frac{AF \cdot CE}{AE}$, что эквивалентно $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$.

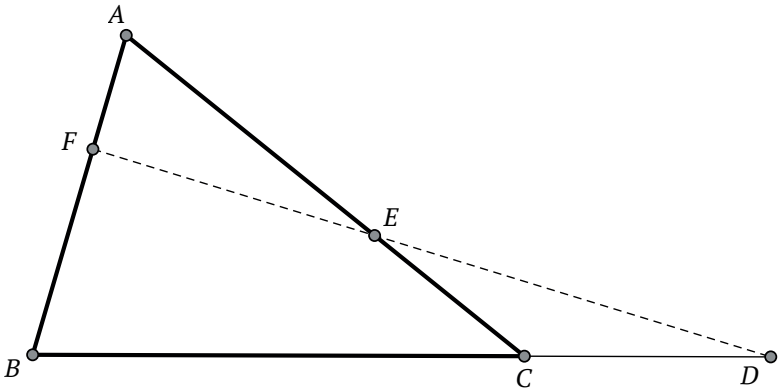


Рисунок B3(а)

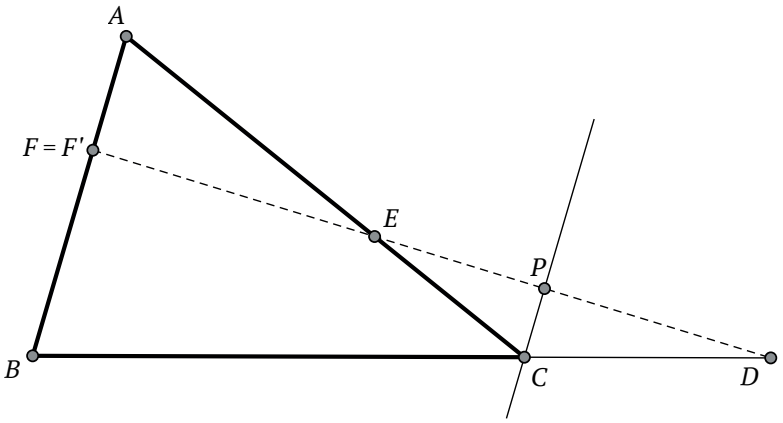


Рисунок B3(б)

Первая часть доказательства закончена.

Далее мы предполагаем, что $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$, и покажем, что точки D, E и F при этом должны размещаться на одной прямой. Пусть точка пересечения AB и DE называется F'. Мы должны доказать, что $F' = F$. Поскольку точки D, E и F' находятся на одной прямой, мы только что показали, что при этом выполняется равенство $AF' \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF' \cdot CD$, которое также можно записать в виде $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF'}{AF'} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$. Поскольку мы предполагаем, что выполняется $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$, что также можно переписать как $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$, отсюда следует, что $\frac{BF'}{AF'} = \frac{BF}{AF}$, и этим мы показали, что $F = F'$.

В качестве последнего шага рассмотрим конфигурацию, показанную на рис. B3(в).

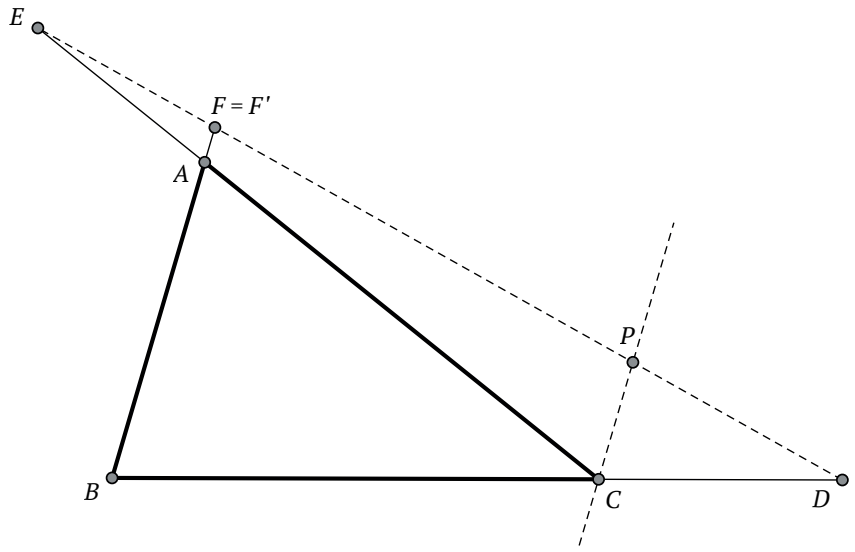


Рисунок B3(в)

Здесь мы имеем треугольник ABC с тремя точками D, E и F на продолжении сторон BC, CA и AB соответственно. В этой ситуации мы также можем показать, что три точки D, E и F лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$. Доказательство в этом случае идентично изложенному ранее.

Таким образом, теорему Менелая можно сформулировать в более общем виде следующим образом. Пусть нам дан треугольник ABC. Точки D, E и F лежат на прямых BC, CA и AB соответственно. Эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда соблюдается равенство $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$, или, что то же самое, $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$.

B4. Теорема Чевы

Общей темой в геометрии треугольников являются прямые, соединяющие вершины треугольника с точками на их противоположных сторонах. Такие прямые часто называют чевианами, по имени итальянского математика Джованни Чевы (1647–1734), который опубликовал свою знаменитую теорему в 1678 году. Результат очень впечатляющий и приводит ко многим геометрическим чудесам. Теорема Чевы гласит, что три чевианы пересекутся в одной точке тогда и только тогда, когда произведения длин чередующихся отрезков, образованных точками пересечения со сторонами, равны между собой. Это проиллюстрировано на рис. B4(а), где треугольник ABC имеет чевианы AD, BE

и *CF*, пересекающиеся со сторонами *BC*, *CA* и *AB* в точках *D, E* и *F* соответственно. На рисунке показано, что они пересекаются в общей точке *P*. Согласно теореме Чевы, это происходит тогда и только тогда, когда $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$, или, что то же самое, $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$.

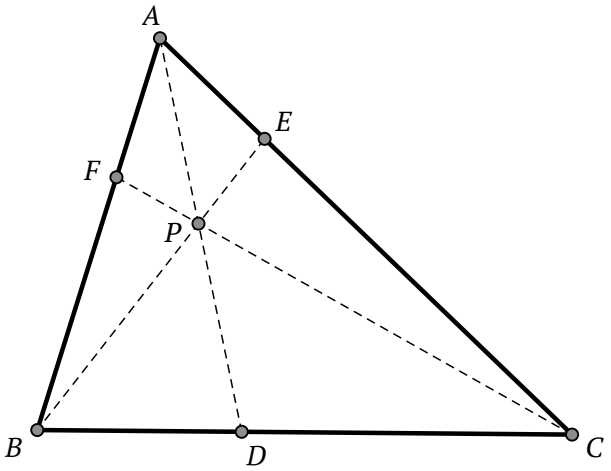


Рисунок B4(a)

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы Менелая, разделим это доказательство на этапы. Сначала предположим, что три чевианы *BC*, *CA* и *AB* сходятся в общей точке *P*. Покажем, что при этом $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$. Чтобы показать это, рассмотрим рис. B4(б). Здесь в сравнении рис. B4(a) мы добавили линию через *A*, параллельную *BC*. Эта линия в точке *R* пересекает продолжение *BE* и продолжение *CF* в точке *S*. Параллельные линии позволяют нам построить несколько пар подобных треугольников, и из этого подобия вытекают соотношения между длинами их сторон. У нас есть

$$\triangle AER \text{ подобен } \triangle CEB, \text{ откуда } \frac{AE}{CE} = \frac{AR}{BC}; \qquad \text{(I)}$$

$$\triangle BCF \text{ подобен } \triangle ASF, \text{ откуда } \frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AS}; \qquad \text{(II)}$$

$$\triangle CPD \text{ подобен } \triangle SPA, \text{ откуда } \frac{CD}{AS} = \frac{DP}{AP}; \qquad \text{(III)}$$

$$\triangle BDP \text{ подобен } \triangle RAP, \text{ откуда } \frac{BD}{AR} = \frac{DP}{AP}. \qquad \text{(IV)}$$

$$\text{Из соотношений (III) и (IV) получаем } \frac{CD}{AS} = \frac{BD}{AR}, \text{ или } \frac{CD}{BD} = \frac{AS}{AR}. \qquad \text{(V)}$$

Теперь, перемножив (I), (II) и (V), получаем желаемый результат:

$$\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{CD}{BD}=\frac{AR}{BC}\cdot\frac{BC}{AS}\cdot\frac{AS}{AR}=1.$$

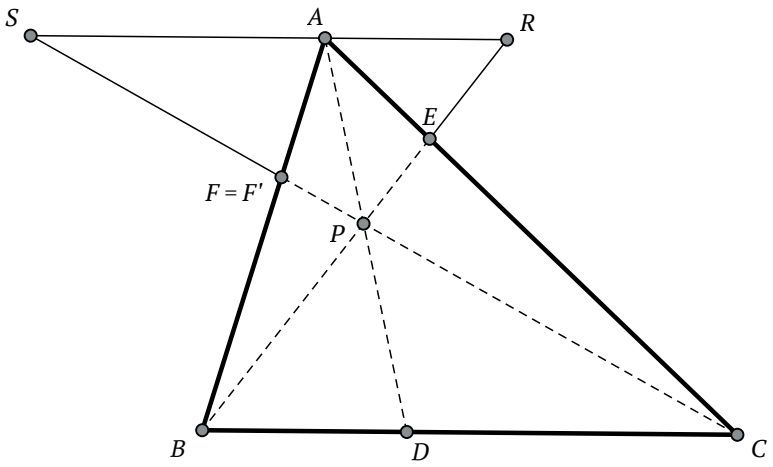


Рисунок B4(б)

Далее мы предполагаем, что точки D, E и F заданы на сторонах BC, CA и AB соответственно треугольника ABC, при этом $\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{CD}{BD}=1$. Мы хотим показать, что отрезки AD, BE и CF имеют общую точку P. Предположим, что AD и BE пересекаются в точке P. Нарисуем CP и обозначим ее пересечение с AB точкой F'. Поскольку AD, BE и CF' параллельны, мы можем использовать часть теоремы Чевы, которую мы уже доказали, чтобы сформулировать следующее соотношение: $\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BF'}{AF'}\cdot\frac{CD}{BD}=1$. Поскольку мы предполагали $\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{CD}{BD}=1$, получаем, что $\frac{BF'}{AF'}=\frac{BF}{AF}$, следовательно, $F=F'$, доказывая пересечение.

B5. Тригонометрическая версия теоремы Чевы

Существует интересная вариация теоремы Чевы, которая была открыта французским математиком Лазаром Карно (1753–1823). Взгляните еще раз на рис. B4(а): в этой версии утверждается, что чевианы AD, BE и CF встречаются в общей точке P тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC}\cdot\frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle EBA}\cdot\frac{\sin\angle ACF}{\sin\angle FCB}=1.$$

Доказательство. Это утверждение эквивалентно обычной версии теоремы, и мы покажем это, применив закон синусов несколько раз следующим образом.

Обращаясь к рис. B4a, рассмотрим треугольник ABC. В этом треугольнике закон синусов дает нам

$$\frac{CD}{CA} = \frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle CDA}, \text{ или } CD = CA\cdot\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle CDA}.$$

Аналогичные соображения в треугольниках BCE, BEA, CAF, CFB и ABD дают нам

$$CE = BC\cdot\frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle BEC}, \quad AE = AB\cdot\frac{\sin\angle EBA}{\sin\angle AEB},$$
$$AF = CA\cdot\frac{\sin\angle ACF}{\sin\angle CFA}, \quad BF = BC\cdot\frac{\sin\angle FCB}{\sin\angle BFC},$$

а также $BD = AB\cdot\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}$ соответственно.

Мы уже установили, что AD, BE и CF встречаются в общей точке P тогда и только тогда, когда $\dfrac{AE}{CE}\cdot\dfrac{BF}{AF}\cdot\dfrac{CD}{BD} = 1$. Подстановка дает:

$$\begin{aligned}
&\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{CD}{BD}\\
&\quad= \left(\frac{AB\cdot\sin\angle EBA\cdot\sin\angle BEC}{BC\cdot\sin\angle CBE\cdot\sin\angle AEB}\right)\cdot\left(\frac{BC\cdot\sin\angle FCB\cdot\sin\angle CFA}{CA\cdot\sin\angle ACF\cdot\sin\angle BFC}\right)\cdot\left(\frac{CA\cdot\sin\angle DAC\cdot\sin\angle ADB}{AB\cdot\sin\angle BAD\cdot\sin\angle CDA}\right)\\
&\quad= \left(\frac{\sin\angle EBA\cdot\sin\angle BEC}{\sin\angle CBE\cdot\sin\angle AEB}\right)\cdot\left(\frac{\sin\angle FCB\cdot\sin\angle CFA}{\sin\angle ACF\cdot\sin\angle BFC}\right)\cdot\left(\frac{\sin\angle DAC\cdot\sin\angle ADB}{\sin\angle BAD\cdot\sin\angle CDA}\right).
\end{aligned}$$

Поскольку мы имеем $\angle ADB = 180^\circ - \angle CDA$, $\angle BEC = 180^\circ - \angle AEB$ и $\angle CFA = 180^\circ - \angle BFC$, мы также имеем $\sin\angle ADB = \sin\angle CDA$, $\sin\angle BEC = \sin\angle AEB$ и $\sin\angle CFA = \sin\angle BFC$, а приведение подобных членов дает:

$$\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{CD}{BD} = \frac{\sin\angle EBA}{\sin\angle CBE}\cdot\frac{\sin\angle FCB}{\sin\angle ACF}\cdot\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle BAD}.$$

Мы видим, что исходное соотношение $\dfrac{AE}{CE}\cdot\dfrac{BF}{AF}\cdot\dfrac{CD}{BD} = 1$ эквивалентно

$$\frac{\sin\angle EBA}{\sin\angle CBE}\cdot\frac{\sin\angle FCB}{\sin\angle ACF}\cdot\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle BAD} = 1,$$

которое может быть записано также как

$$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC}\cdot\frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle EBA}\cdot\frac{\sin\angle ACF}{\sin\angle FCB} = 1,$$

и справедливость этого уравнения, таким образом, эквивалентна пересечению *AD, BE* и *CF* в одной точке.

B6. Расширенная теорема Чевы

Теорема Чевы справедлива и в том случае, когда чевианы *AD*, *BE* и *CF* пересекаются со сторонами *BC*, *CA* и *AB* вне треугольника. На рис. B6(а) чевианы *AD*, *BE* и CF пересекаются со сторонами *BC*, *CA* и *AB* в точках *D*, *E* и *F* соответственно. Здесь точки пересечения оказываются за пределами треугольника. В этом случае также верно, что *AD*, *BE* и *CF* встречаются в общей точке *P* тогда и только тогда, когда $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$.

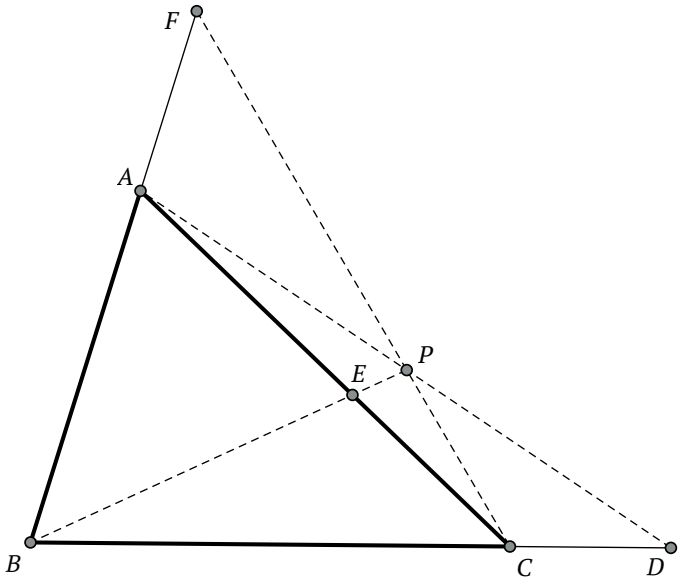


Рисунок B6(а)

Доказательство. Доказательство идентично случаю, когда *P* находится внутри *ABC*. На рис. B6(б) добавлены точки *R* и *S* так же, как на рис. B4(б), и доказательство из случая B4 идентично для этой конфигурации.

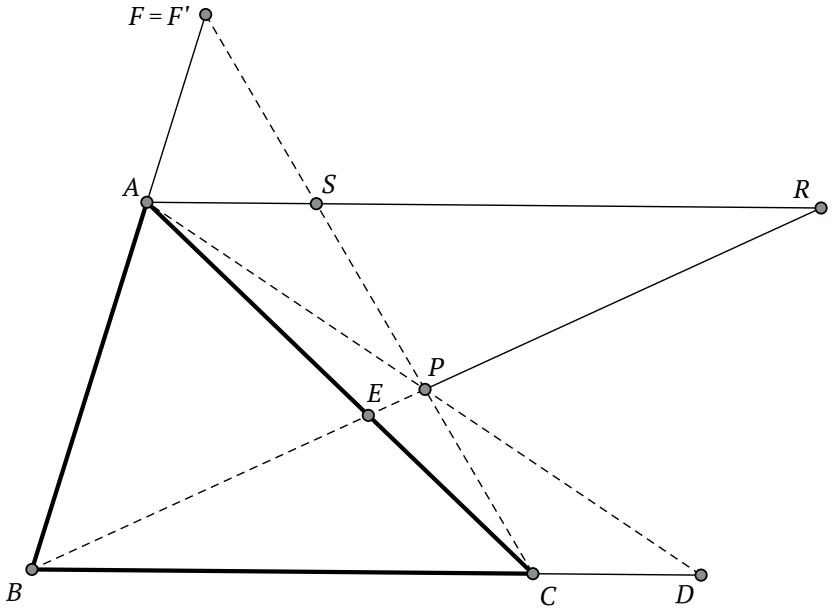


Рисунок B6(б)

B7. Теорема Дезарга

Очень полезная геометрическая зависимость, открытая французским математиком Жераром Дезаргом (1591–1661), впервые была представлена в книге под названием «Manière universelle de M. Desargues, pour pratiquer la perspective»[1].

Теорема включает в себя два треугольника, расположенных таким образом, что три линии, соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке. На рис. B7 $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C$ расположены таким образом, что прямые, соединяющие соответствующие вершины AA', BB' и CC', пересекаются в одной точке P. Примечательно, что в этом случае пары соответственных сторон пересекаются в трех точках, расположенных на одной прямой. Другими словами, точка Q, в которой пересекаются BC и $B'C'$, точка R, в которой пересекаются CA и $C'A'$, и точка S, в которой пересекаются AB и $A'B'$, лежат на одной прямой.

Верно и обратное: если два треугольника ABC и $A'B'C'$ расположены таким образом, что точки Q, R и S лежат на общей прямой, то линии AA', BB' и CC' содержат общую точку P.

---

[1] «*Универсальный способ построения перспективы г-на Дезарга*». Следует отметить, что современник Декарта и Паскаля Жерар Дезарг был больше инженером, чем математиком-теоретиком: в частности, открыл эпициклоиду и применил ее к профилированию зубьев шестеренок, стоял у истоков проективной и начертательной геометрии. Отсюда название его труда.

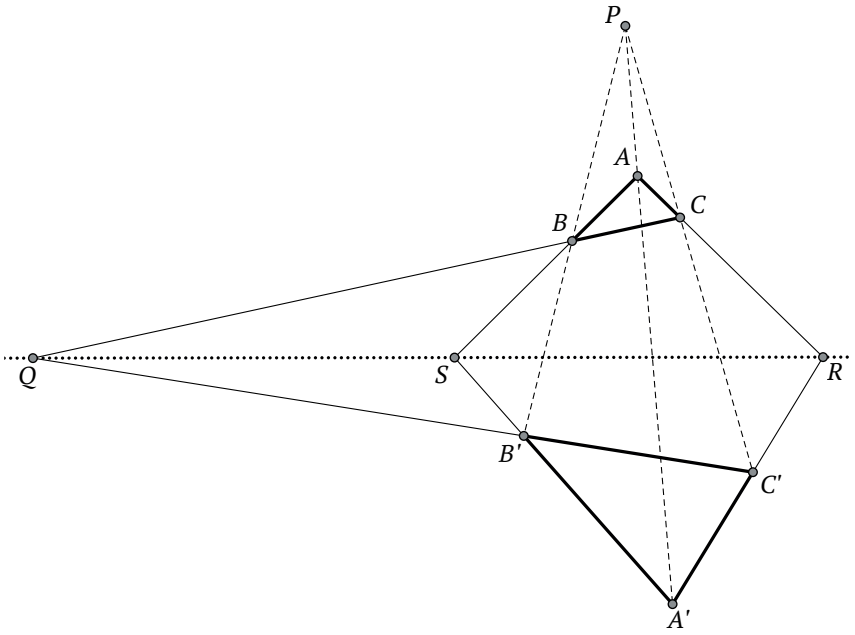


Рисунок B7

Доказательство. Мы докажем теорему Дезарга, применив теорему Менелая несколько раз. Рассмотрим прямую QBC как пересекающую $\triangle PB'C'$. Согласно теореме Менелая, имеем

$$\frac{PB}{BB'}\cdot\frac{B'Q}{QC'}\cdot\frac{C'C}{CP}=1. \tag{I}$$

Аналогично, рассматривая SBA как пересекающую $\triangle PB'A'$, имеем

$$\frac{PA}{AA'}\cdot\frac{A'S}{SB'}\cdot\frac{B'B}{BP}=1, \tag{II}$$

и, рассматривая RCA как пересечение $\triangle PA'C'$, имеем

$$\frac{PC}{CC'}\cdot\frac{C'R}{RA'}\cdot\frac{A'A}{AP}=1. \tag{III}$$

Перемножив (I), (II) и (III), получаем:

$$\left(\frac{PB}{BB'}\cdot\frac{B'Q}{QC'}\cdot\frac{C'C}{CP}\right)\cdot\left(\frac{PA}{AA'}\cdot\frac{A'S}{SB'}\cdot\frac{B'B}{BP}\right)\cdot\left(\frac{PC}{CC'}\cdot\frac{C'R}{RA'}\cdot\frac{A'A}{AP}\right)=1,$$

или

$$\frac{B'Q}{QC'}\cdot\frac{A'S}{SB'}\cdot\frac{C'R}{RA'}=1.$$

Таким образом, согласно теореме Менелая, примененной к $\triangle A'B'C'$, точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

Теперь остается доказать, что верно обратное. Мы предполагаем, что ABC и $A'B'C$ расположены так, что точки Q, R и S лежат на общей прямой, и хотим показать, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в общей точке P. Несколько удивительно, но это является непосредственным следствием того, что мы только что доказали.

Рассмотрим треугольники $SB'B$ и RCC'. Исходя из предположений, мы знаем, что прямые BC, $B'C'$ и RS имеют общую точку, а именно Q. Из версии теоремы Дезарга, которую мы только что доказали, знаем, что пары соответственных сторон $SB'B$ и RCC' пересекаются в трех точках на одной прямой. Другими словами, точка P, в которой пересекаются BB' и CC', точка A, в которой пересекаются BS и CR, и точка A', в которой пересекаются $B'S$ и $C'R$, лежат на одной прямой. Таким образом, прямые AA', BB' и CC' проходят через общую точку P.

B8. Теорема Стюарта

Полезную формулу для определения длины чевианы в данном треугольнике обычно приписывают шотландскому математику Мэтью Стюарту (1717–1785), хотя, возможно, первоначально она была открыта его учителем, знаменитым шотландским геометром Робертом Симсоном (1687–1768).

На рис. B8(а) показан треугольник ABC с обозначениями $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$. Точка D делит BC на два отрезка, с обозначениями $BD = m$, $CD = n$ и $AD = d$. Теорема Стюарта гласит:

$$c^2n + b^2m = a \cdot (d^2 + m \cdot n).$$

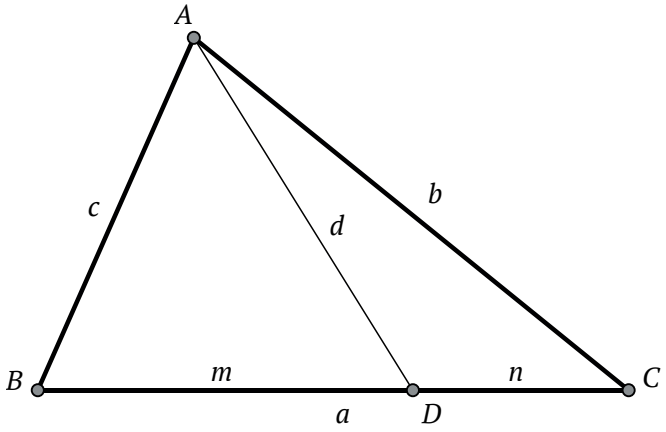


Рисунок B8(а)

Доказательство. На рис. B8(б) имеем точки A, B, C и D, как и на рис. B8(а). Кроме того, дорисована высота $AE = h$ и обозначен отрезок $DE = p$. Сначала применим теорему Пифагора к треугольнику ABE, откуда получаем $AB^2 = AE^2 + BE^2$.

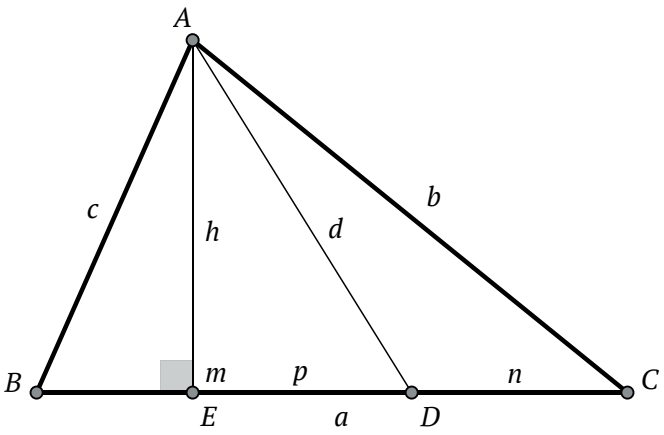


Рисунок B8(б)

Так как $BE = m - p$, это может быть переписано как

$$c^2 = h^2 + (m - p)^2. \quad \text{(I)}$$

Применение теоремы Пифагора к треугольнику AED дает $AE^2 = AD^2 - DE^2$, или $h^2 = d^2 - p^2$. Подставив h^2 в уравнение (I), получаем $c^2 = d^2 - p^2 + (m - p)^2 = d^2 - p^2 + m^2 - 2m \cdot p + p^2$, и таким образом:

$$c^2 = d^2 + m^2 - 2m \cdot p. \quad \text{(II)}$$

Аналогично в треугольнике ACE имеем $AC^2 = AE^2 + CE^2$, и так как $CE = n + p$, получаем:

$$b^2 = h^2 + (n + p)^2. \quad \text{(III)}$$

Подстановка для h^2 в уравнении (III) дает $b^2 = d^2 - p^2 + (n + p)^2$, и таким образом

$$b^2 = d^2 + n^2 + 2n \cdot p. \quad \text{(IV)}$$

Теперь умножим уравнение (II) на n, что даст

$$c^2n = d^2n + m^2n - 2m \cdot n \cdot p, \quad \text{(V)}$$

а умножив (IV) на m, получим

$$b^2m = d^2m + m \cdot n^2 + 2m \cdot n \cdot p. \quad \text{(VI)}$$

Складывая (V) и (VI), получаем $c^2m + b^2n = d^2m + d^2n + m^2n + m \cdot n^2 + 2m \cdot n \cdot p - 2m \cdot n \cdot p$. Отсюда $c^2m + b^2n = d^2(m + n) + m \cdot n \cdot (m + n)$.

Так как $m + n = a$, мы имеем $c^2m + b^2n = d^2a + m \cdot n \cdot a = a \cdot (d^2 + m \cdot n)$, что и есть соотношение, которое мы намеревались доказать.

B9. Теорема Аполлония

Теорема Аполлония гласит, что сумма квадратов любых двух сторон треугольника равна удвоенной сумме квадратов медианы третьей стороны и половины третьей стороны. В треугольнике ABC, где AD — медиана третьей стороны BC, это можно сформулировать как

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2).$$

Доказательство. На рис. B9 изображена точка E на стороне BC таким образом, что отрезок AE — высота треугольника. Чтобы упростить задачу, обозначим $BD = CD = x$, $DE = y$ и $AE = h$. Это дает

$$BE = (x - y) \text{ и } CE = (x + y).$$

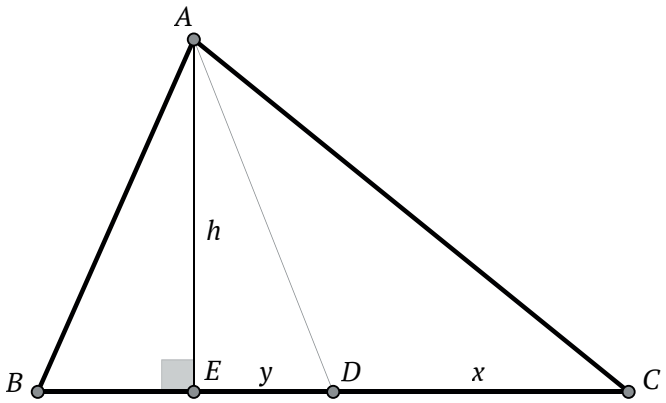


Рисунок B9

Теперь применим теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам ABE и ACE, чтобы получить $AB^2 = AE^2 + BE^2$ и $AC^2 = AE^2 + CE^2$. Складывая эти соотношения, получаем $AB^2 + AC^2 = AE^2 + BE^2 + AE^2 + CE^2 = h^2 + (x - y)^2 + h^2 + (x + y)^2$, или $AB^2 + AC^2 = AE^2 + BE^2 + AE^2 + CE^2 = h^2 + (x - y)^2 + h^2 + (x + y)^2$.

Так как $AD^2 = h^2 + y^2$ и $BD^2 = x^2$, получаем $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

B10. Теорема Птолемея

Произведение длин диагоналей четырехугольника, вписанного в окружность, равно сумме произведений длин пар противоположных сторон. Другими словами, на рис. B10 имеем для четырехугольника $ABCD$ соотношение $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$.

Доказательство. На рис. B10 четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Через точку A проведена прямая, которая пересекает продолжение стороны CD в точке P, так что $\angle BAC = \angle DAP$. Поскольку четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, $\angle CBA$ является дополнительным (до 180°) к $\angle ADC$.

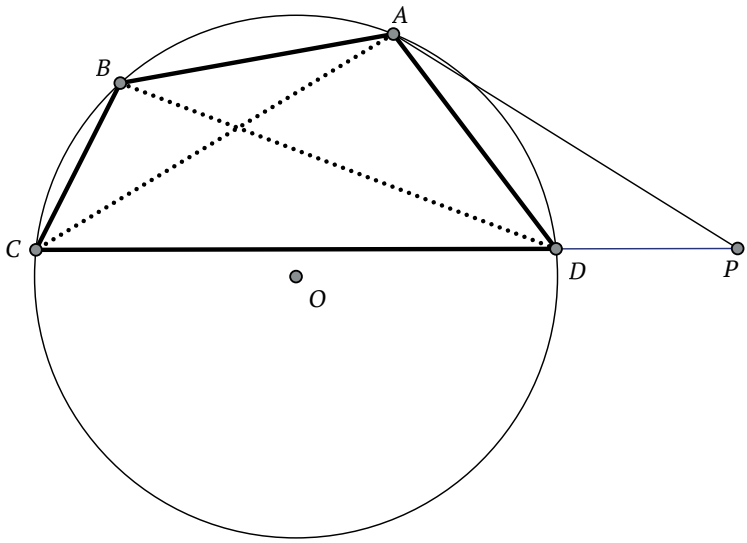


Рисунок B10

Поскольку $\angle PDA$ также является дополнительным к $\angle ADC$, имеем $\angle CBA = \angle PDA$, и вследствие того, каким образом была построена точка P, треугольники BCA и DPA подобны. Тогда мы имеем $\frac{AB}{DA} = \frac{BC}{DP}$, или $DP = \frac{BC \cdot DA}{AB}$. Кроме того, мы также получаем $\frac{AB}{DA} = \frac{AC}{AP}$. Так как $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle DAP + \angle CAD = \angle CAP$, треугольники ABD и ACP также подобны. Из чего получаем $\frac{BD}{CP} = \frac{AB}{AC}$, или $CP = \frac{AC \cdot BD}{AB}$. Мы знаем, что $CP = CD + DP$, и подстановкой для CP и DP имеем $\frac{AC \cdot BD}{AB} = CD + \frac{BC \cdot DA}{AB}$, или $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$.

B11. Изометрия: отражение и вращение

В ходе геометрического доказательства часто бывает полезно определить точечное преобразование, которое преобразует некую конфигурацию точек в равную (конгруэнтную) конфигурацию. Такие преобразования известны как изометрические. Определяющей характеристикой изометрии является тот факт, что она сопоставляет каждую точку на плоскости с другой уникальной точкой таким образом, что расстояние между любыми двумя точками равно расстоянию между их отображениями. Это означает, что любая геометрическая фигура с помощью изометрии всегда будет отображена на равную фигуру.

Двумя важными примерами изометрии являются отражения и повороты. Они проиллюстрированы на следующих рисунках. На рис. B11(a) показано отражение относительно линии n. Мы говорим, что точка P отражается от линии n в точку P', где P' — это точка, симметричная P относительно n. Из точки P прямая, перпендикулярная прямой n, проходит через точку P и пе-

ресекает прямую n в точке L. Точка P' затем определяется как точка на этой прямой, удовлетворяющая условию $LP = LP'$ и $P \neq P'$. (Обратите внимание, что если точка P лежит на прямой n, мы определяем $P = P'$.)

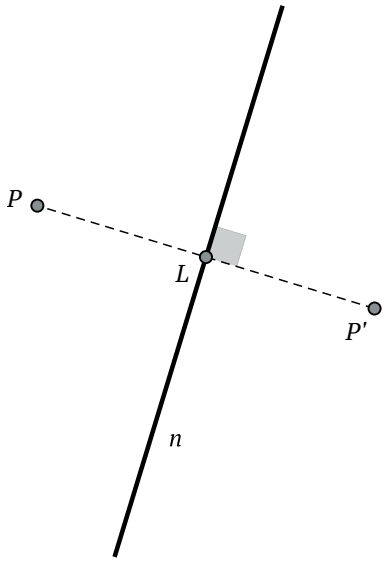


Рисунок B11(а)

На рис. B11(б) показан поворот, определяемый центром O и углом θ. Мы говорим, что точка P поворачивается вокруг центра O на угол θ, переходя в точку P'. Из точки P строится отрезок OP. Точка P' тогда определяется как точка, для которой $\angle POP' = \theta$ и $OP = OP'$. (Для полноты картины обратите внимание, что при повороте точка O отображается сама в себя, независимо от величины угла θ.)

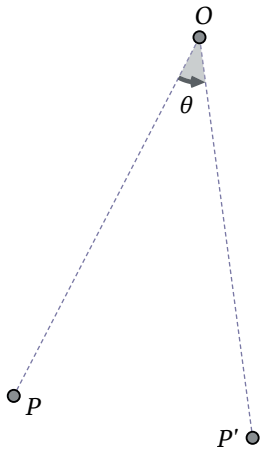


Рисунок B11(б)

Чтобы доказать, что эти преобразования действительно являются изометрическими, мы должны показать, что все отрезки преобразуются в отрезки длиной, равной исходным.

На рис. B11(в) показан отрезок PQ, отраженный от прямой n на отрезок $P'Q'$. Чтобы доказать, что $PQ = P'Q'$, проведем линии MP и MP', где M — точка пересечения прямой n и QQ'. Поскольку $LP = LP'$ и $PP' \perp$ LM (а также n), треугольники LPM и LMP' равны, и мы имеем $MP = MP'$, а также $\angle LMP = \angle P'ML$. Это позволяет нам отметить, что $MQ = MQ'$, $\angle PMQ = \angle LMQ - \angle LMP = \angle Q'ML - \angle P'ML = \angle Q'MP'$ и $MP = MP'$, откуда треугольники MPQ и $MQ'P'$ также равны. Из этого мы видим, что выполняется равенство $PQ = P'Q'$.

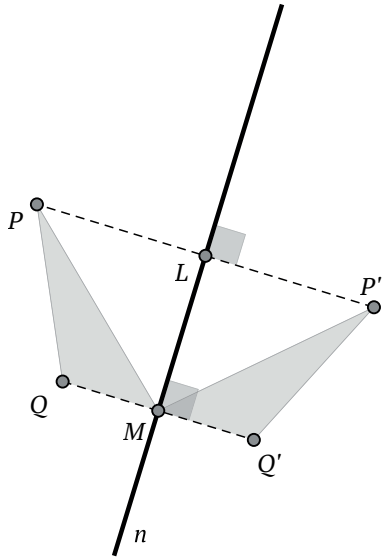


Рисунок B11(в)

Обратите внимание на предположение, что P и Q лежат по одну сторону от n. Если они лежат по разные стороны от прямой n, или одна из них либо обе лежат на прямой n, доказательство должно быть немного изменено, но это оставлено заинтересованному читателю в качестве простого упражнения.

Аналогично на рис. B11(г) показан отрезок PQ, повернутый вокруг центра O на величину угла θ с переходом в отрезок $P'Q'$. Чтобы доказать, что $PQ = P'Q'$, мы рассмотрим треугольники OPQ и $OP'Q'$. Так как $OP = OP'$, $OQ = OQ'$ и $\angle POQ = \angle POP' - \angle QOP' = \theta - \angle QOP' = \angle QOQ' - \angle QOP' = \angle P'OQ'$, мы видим, что треугольники OPQ и $OP'Q'$ равны. Из этого получаем, что $PQ = P'Q'$. Как и выше, следует отметить, что детали доказательства зависят от относительного расположения точек, но для любых других позиций они полностью аналогичны и оставлены на усмотрение заинтересованного читателя.

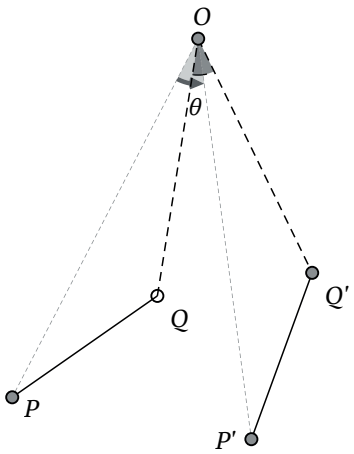


Рисунок B11(г)

B12. Гомотетия и подобие

Несколько более общим преобразованием, которое также часто бывает полезным, является преобразование, которое отображает конфигурацию точек на геометрически подобную конфигурацию. Такие преобразования известны как преобразования подобия. Определяющей характеристикой преобразования подобия является тот факт, что оно отображает каждую точку на плоскости в другую уникальную точку таким образом, что расстояние между любыми двумя точками, умноженное на постоянную величину, равно расстоянию между их отображениями. Это означает, что любая геометрическая фигура всегда будет отображена на подобную фигуру с помощью такого преобразования. Важным примером преобразования подобия является гомотетия. Это показано на рис. B12(а).

Гомотетия — это отображение точек P на плоскости в соответствующие точки P', для которых существует фиксированная точка O (центр гомотетии) и фиксированный множитель a (то есть действительное число $a \neq 0$), такое что $SP' = a \cdot SP$ для всех точек P.

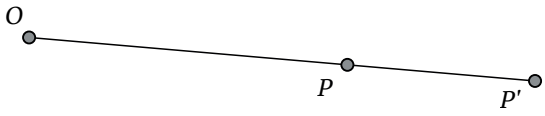


Рисунок B12(а)

Наиболее важным свойством гомотетии является то, что она отображает любой отрезок прямой PQ на отрезок прямой $P'Q'$ при условии $PQ \parallel P'Q'$ и $P'Q' = a \cdot PQ$. Чтобы доказать это, рассмотрим рис. B12(б). Поскольку $OP' = a \cdot OP$ и $OQ' = a \cdot OQ$, а треугольники OPQ и $OP'Q'$ имеют общий угол в точке O,

они подобны. Таким образом, имеем $a = \frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ} = \frac{P'Q'}{PQ}$, откуда следует, что $P'Q' = a \cdot PQ$. Кроме того, так как $\angle QPO = \angle Q'P'O$, также получаем $PQ \parallel P'Q'$.

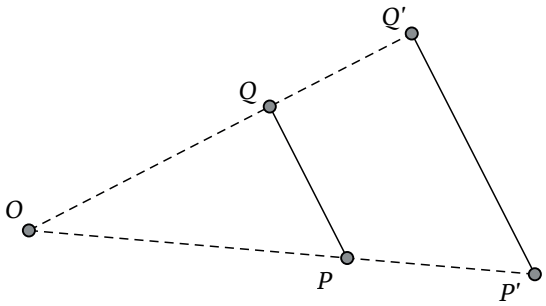


Рисунок B12(б)

B13. Полюсы и поляры

Полюс и поляр относительно окружности с центром O и радиусом r определяются следующим образом. Для любой точки P (отличной от O) существует единственная точка Q на луче OP, для которой $OP \cdot OQ = r^2$. Прямая p, проходящая через Q, перпендикулярная OP, называется *полярой* точки P, а точка P — *полюсом* поляры p. Это показано на рис. B13.

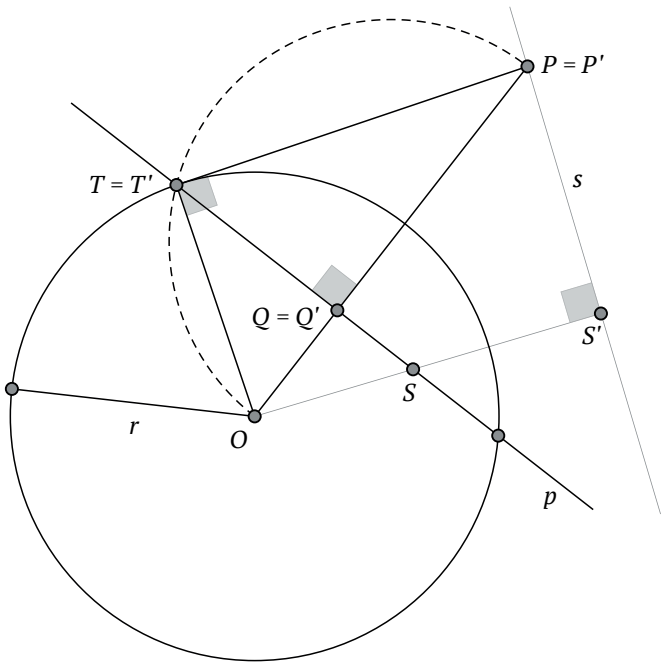


Рисунок B13

Поляры относительно окружности обладают многими интересными свойствами. Вот некоторые из них.

Если P выбрана за пределами окружности с центром O, как показано на рис. B13, и определить T как одно из пересечений окружности с полярой p, то PT является касательной к окружности с центром O. Кроме того, если точка S выбрана на поляре p, полюс P лежит на поляре s точки S относительно окружности с центром O.

Доказательство. Согласно определению поляры, имеем $OP \cdot OQ = r^2$. Теперь рассмотрим точку T' на окружности с центром O, такую что $PT' \perp OT'$. Тогда мы знаем, что PT' является касательной к окружности с центром O и что $OP^2 = OT'^2 + PT'^2$. Далее мы выбираем точку Q' на OP так, чтобы $T'Q' \perp OP$. Поскольку прямоугольные треугольники $T'OP$ и $Q'T'O$ имеют общий угол в точке O, они подобны, и имеем $\frac{OQ'}{OT'} = \frac{OT'}{OP}$. Это эквивалентно $OP \cdot OQ' = OT'^2 = r^2$, и мы видим, что $Q = Q'$, что также означает $T = T'$. Это значит, что PT является касательной к окружности с центром O, как мы и утверждали.

Теперь мы покажем, что поляра s точки S содержит полюс P поляры p, если S выбрано на p. Доказательство этой части удивительно похоже на доказательство первой части. Мы предполагаем, что S' — это точка на луче OS, такая что $OS \cdot OS' = r^2$, а P' — пересечение луча OP с полярой s точки S. Как и прежде, у нас снова есть два подобных прямоугольных треугольника QOS и $S'P'O$ с общим углом в точке O. Это означает, что $\frac{OP}{OS} = \frac{OS}{OQ}$, что эквивалентно $OP' \cdot OQ = OS \cdot OS' = r^2$. Это значит, что $P = P'$, и точка P, таким образом, лежит на s, как мы собирались показать.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Аполлония теорема, 178, 179, 328

Б

Биссектриса, 25, 33, 64, 71–74, 84, 93, 94, 100, 101, 114, 116, 125, 143, 146, 147, 150, 151, 157, 161, 167, 209–214, 232, 233, 246–248, 274, 275, 279, 290, 301, 307
  свойства, 315, 316

В

Ван Ламун, Флорис Майкл, 190
Вивиани, Винченцо, 62
Вписанный угол, 147, 170, 172, 209, 288, 307, 313
Вписанный четырехугольник, 168, 172, 280, 282, 306, 314, 328
Высота, 91, 100, 103, 117, 119, 122, 124, 125, 127, 128, 149, 150, 155, 156, 160–163, 173, 174, 177, 197, 204–209, 218, 219, 223–229, 251, 260, 261, 267, 271, 274, 283, 286, 288, 292–296, 312, 326, 328

Г

Галилей, Галилео, 62
Гарфилд, Джеймс, 259
Геометрический центр, 24, 50, 51, 53, 54, 58, 125, 133, 176, 181, 186, 189, 292, 303
Гомотетия, 142, 158, 180, 195, 224, 332

Д

Дезарга теорема, 157, 166, 324, 326
Дезарг, Жерар, 324

Е

Евклид, 47

Ж

Жергонна точка, 26, 142
Жергонн, Жозеф-Диас, 26

З

Закон косинусов, 302, 315
Закон синусов, 153, 221, 234, 243, 315, 321

И

Изометрия, 329

К

Карно, Лазарь, 321

Коллинеарные точки, 23, 36, 42, 46, 58, 71, 72, 85, 112, 125–127, 157, 189, 209, 211, 233, 274, 290, 293

Л

Ламуна окружность, 190

М

Медиана, 50–53, 57, 78, 114, 162, 166, 177–179, 187, 191, 192, 207, 216, 219, 231, 244, 258, 276, 281, 282, 289, 303, 313, 328
Микель, Огюст, 136
Микеля теорема, 136, 306
Морли теорема, 136, 137, 308
Морли, Фрэнк, 136

Н

Наполеон, 129, 131, 296, 298, 299

О

Окружность
  вневписанная, 140
  вписанная, 24–30, 40, 71, 85, 139, 140, 142, 144–148, 163, 209
  описанная, 24, 27, 30, 31, 34, 38, 43–49, 59, 63, 71, 78, 85–88, 94, 96, 119, 121, 125, 126, 134, 135, 144, 148, 149, 154, 157, 160, 167, 169, 170, 174–176, 179, 189, 191, 193, 194, 199, 209, 220, 232–237, 244, 247, 248, 250, 253, 254, 269, 276, 283, 289–292, 295, 296, 300, 305, 306
Окружность девяти точек, 124–127, 288, 289, 294, 295
Окружность Эйлера, 125
Ортоцентр, 24, 27, 31, 33–36, 48, 85, 88, 119, 121, 122, 125, 127, 129, 150, 154, 155, 160, 166, 237, 261, 264, 267, 284, 286, 289, 290, 291, 293, 296

П

Пифагора теорема, 103, 183, 239, 240, 259, 260, 312, 326, 328
Подобие, 332
  треугольников, 37, 38, 53, 71, 78, 136, 139, 142, 144, 150, 152, 153, 155–157, 160, 169, 170, 172, 177, 181, 200, 207, 211, 212, 216, 217, 219, 220, 225–230, 239, 247, 251, 253, 257, 262, 266, 269–271, 276–278, 288, 291–294, 300, 301, 307, 308, 312, 316, 317, 320, 329, 333, 334
Полюс, 144, 333
Поляра, 145, 333
Понселе, Жан-Виктор, 129
Птолемея теорема, 199, 328

С

Симсона прямая, 48, 49, 172–175
Симсона теорема, 46, 48, 172–174
Симсон, Роберт, 47, 326
Стюарта теорема, 326
Стюарт, Мэтью, 326

Т

Трапеция равнобедренная, 192, 194, 289
Треугольник
  вписанный, 38, 44–46, 78, 158, 220
  неравнобедренный, 43, 167
  ортоцентрический, 36–42, 128, 157–166
  прямоугольный, 24, 52, 76, 98, 100–103, 106, 109–113, 121, 162, 163, 166, 168, 170, 172, 179, 183, 206, 208, 213–216, 226, 228, 230, 237, 239, 244, 253–259, 264, 267, 270, 271, 274, 276, 283, 285, 286, 289, 308, 312, 328, 334
  равнобедренный, 24, 39, 66, 68–70, 106, 139, 143, 147, 148, 150, 154, 160, 161, 163, 167, 174, 199, 202, 204–206, 208–211, 232, 233, 236, 248, 250, 259, 264, 267, 268, 274, 276, 283, 295, 307, 316, 317
  равносторонний, 24, 62–66, 112, 129–136, 197–202, 274, 296, 298–305, 308
Треугольник Жергонна, 26, 143
Трисектор, 84
Трисекция, 74, 81, 83, 214, 225–229

У

Уоллес, Уильям, 46

Ф

Фаньяно, Джованни, 38
Фаньяно задача, 38
Фейербах, Карл Вильгельм, 125
Ферма точка, 130, 298

Ц

Центр масс. См. *Геометрический центр*
Центр тяжести. См. *Геометрический центр*

Ч

Чева, Джованни, 319
Чевиана, 96, 248, 319, 321, 323, 326
Чевы теорема, 142, 146, 157, 234, 236, 241–246, 308, 319, 321, 323

Э

Эйлера прямая, 292
Эйлер, Леонард, 124, 292

Книги издательства «ДМК Пресс»
можно купить оптом и в розницу на складе издательства по адресу:
Москва, ул. Электродная, д. 2, стр. 12, офис 7, тел. **+7 (499) 322-19-38**,
а также заказать на сайте **www.dmkpress.com**
с доставкой в любой регион РФ

Альфред С. Позаментье, Роберт Геретшлегер

Жемчужины геометрии

Треугольники

Главный редактор *Мовчан Д. А.*
dmkpress@gmail.com
Зам. главного редактора *Яценков В. С.*
Перевод *Ревич Ю. В.*
Корректор *Синяева Г. И.*
Верстка *Чаннова А. А.*
Дизайн обложки *Мовчан А. Г.*

Гарнитура PT Serif. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 27,46. Тираж 200 экз.

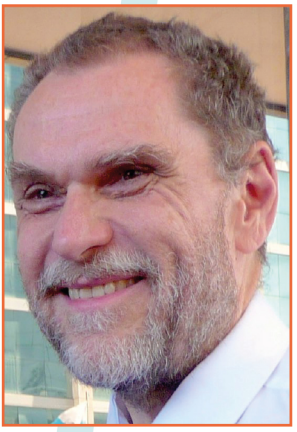
Веб-сайт издательства: **www.dmkpress.com**

Планарная геометрия полна чудес, о которых нам почти не рассказывают на уроках в школе. Даже обычный треугольник – один из основных инструментов геометрии – способен удивить нас неожиданными фактами и закономерностями и дать богатую пищу для размышлений. В этой книге собрана одна из самых больших коллекций любопытных фактов и курьезов, связанных с треугольниками. Исследуя многочисленные неожиданные взаимосвязи, читатели еще больше полюбят геометрию.

Издание рассчитано на широкую аудиторию читателей. Для понимания доказательств и пояснений достаточно знания основ школьной геометрии.



Альфред Позаментье работает преподавателем Технологического колледжа Городского университета Нью-Йорка. Автор и соавтор более 80 книг по математике для учителей, учащихся школ и массового читателя. Часто публикуется в газетах и журналах по темам, связанным с образованием и математикой.



Роберт Геретшлегер – учитель математики и геометрии из Граца, Австрия. Является редактором и соавтором многочисленных книг по популярной математике, а также сборников конкурсных математических задач. В настоящее время выступает с лекциями по геометрии в местном университете.

World Scientific

ДМК ПРЕСС ИЗДАТЕЛЬСТВО

www.дмк.рф

ISBN 978-5-93700-356-0