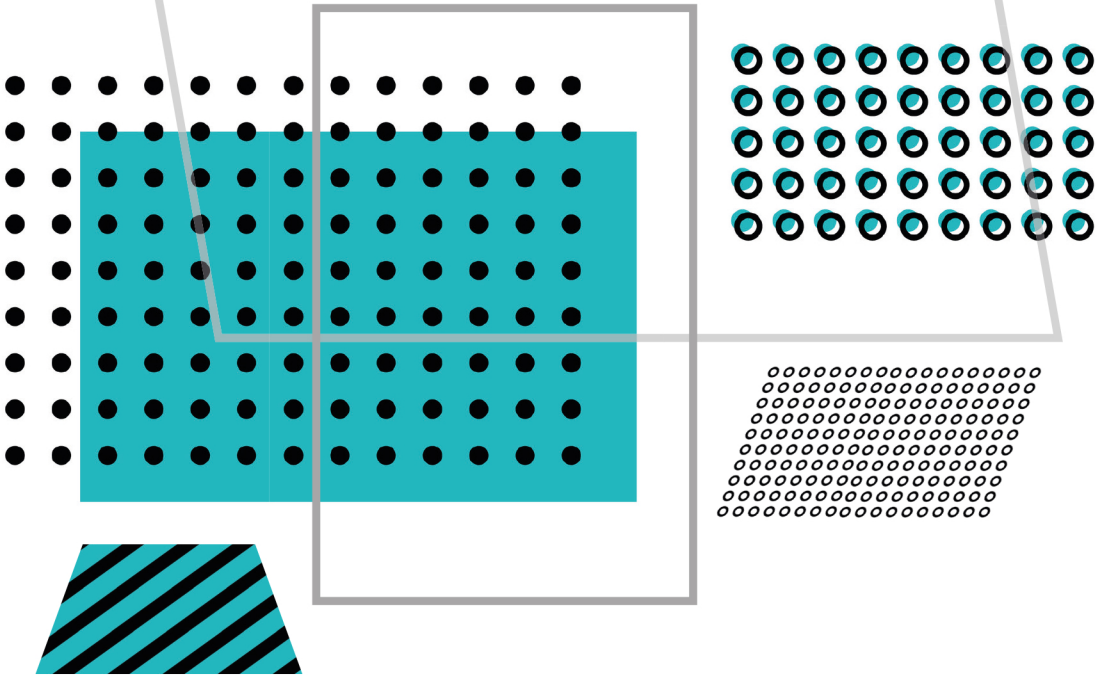
Альфред С. Позаментье
Роберт Геретшлегер

ЖЕМЧУЖИНЫ ГЕОМЕТРИИ



ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

ДМК ПРЕСС
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Альфред С. Позаментье, Роберт Геретшлегер

Жемчужины геометрии

Четырехугольники

GEOMETRIC GEMS

Volume II: The Wonders of Quadrilaterals

Alfred S. Posamentier,
Robert Geretschläger

World Scientific

NEW JERSEY • LONDON • SINGAPORE • BEIJING • SHANGHAI • HONG KONG • TAIPEI • CHENNAI • TOKYO

ЖЕМЧУЖИНЫ ГЕОМЕТРИИ

Четырехугольники

Альфред С. Позаментье,
Роберт Геретшлегер

ДМК Пресс
издательство
Москва, 2026

УДК 514.112.4
ББК 22.151.0
П47

Позаментье А. С., Геретшлегер Р.
П47 Жемчужины геометрии. Четырехугольники / пер. с англ. П. В. Михеева. – М.: ДМК Пресс, 2026. – 262 с.: ил.

ISBN 978-5-93700-445-1

Планарная геометрия полна чудес, о которых нам почти не рассказывают на уроках в школе. Даже обычные четырехугольники способны удивить нас неожиданными фактами и закономерностями и дать богатую пищу для размышлений. В этой книге собрана одна из самых больших коллекций любопытных фактов и курьезов, связанных с четырехугольниками. Исследуя многочисленные неожиданные взаимосвязи, читатели еще больше полюбят геометрию.

Книга рассчитана на широкую аудиторию читателей и будет полезна преподавателям математики. Для понимания доказательств и пояснений достаточно знания основ школьной геометрии.

УДК 514.112.4
ББК 22.151.0

All rights reserved. This book, or parts thereof, may not be reproduced in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or any information storage and retrieval system now known or to be invented, without written permission from the Publisher.

Russian translation arranged with World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-9-81129-229-3 (англ.)

ISBN 978-5-93700-445-1 (рус.)

© Copyright © 2025 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
© Перевод, оформление, издание, ДМК Пресс, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

https://t.me/it_boooks/2

От издательства 15

Об авторах 16

Благодарности 20

Введение 21

Часть 1. Загадки четырехугольников 23

Введение в четырехугольники 23
Пример 1. Четырехугольники в треугольниках 24
Пример 2. Сравнение суммы диагоналей с суммой противоположных сторон четырехугольника 24
Пример 3. Разделение трапеции на две равные по площади области 25
Пример 4. Неожиданный треугольник, площадь которого вдвое меньше площади трапеции 26
Пример 5. Удивительная линия, соединяющая середины диагоналей трапеции 26
Пример 6. Неожиданная коллинеарность в трапеции 27
Пример 7. Удивительная параллельность, создаваемая трапецией 27
Пример 8. Еще одна удивительная конвергенция, порожденная трапецией 28
Пример 9. Любопытное равенство углов 28
Пример 10. Любопытное равенство отрезков 29
Пример 11. Удивительное разбиение общего четырехугольника 29
Пример 12. Разделенные на три части стороны четырехугольника определяют одну треть четырехугольника 30
Пример 13. Разделение четырехугольника пополам 30
Пример 14. Разделение четырехугольника на три равные по площади части 31
Пример 15. Еще одно разделение четырехугольника на три области равной площади 32
Пример 16. Когда два четырехугольника имеют общие середины 32
Пример 17. Определение центра тяжести четырехугольника 33
Пример 18. Центроиды могут создавать подобный четырехугольник в соотношении размеров 1:9 35

Пример 19. Точка минимального расстояния четырехугольника 35
Пример 20. Пример с ромбом 36
Пример 21. Нетривиальное сравнение параллелограммов 36
Пример 22. Пропорциональность параллелограммов 37
Пример 23. Неожиданная параллельность в сопряженных параллелограммах ... 38
Пример 24. Разделение параллелограмма пополам 38
Пример 25. Разделение трапеции пополам 39
Пример 26. Разделение параллелограмма на три части 39
Пример 27. Трисекционное деление диагонали параллелограмма 40
Пример 28. Еще одно остроумное деление диагонали параллелограмма на три части 40
Пример 29. Еще одна точка трисекционного деления на диагонали параллелограмма 41
Пример 30. Связь длин сторон параллелограмма с длинами его диагоналей 41
Пример 31. Неожиданная перпендикулярность в параллелограмме 42
Пример 32. Удивительные сюрпризы, скрытые в параллелограмме 42
Пример 33. Треугольники, образующие параллелограммы без построения параллельных прямых 43
Пример 34. Создание параллелограмма с площадью, составляющей одну девятую от площади исходного параллелограмма 43
Пример 35. Как деление углов параллелограмма пополам и на три части создает другой параллелограмм 44
Пример 36. Использование параллелограмма для построения квадрата 44
Пример 37. Параллелограмм образует равносторонний треугольник 45
Пример 38. Раскрытие секретных произведений вдоль сторон параллелограмма 45
Пример 39. Необычные равные площади, создаваемые в параллелограмме 46
Пример 40. Равные площади треугольников, полученные простым способом с помощью параллелограмма 46
Пример 41. Еще больше равных площадей треугольников, скрытых в параллелограмме 47
Пример 42. Еще один пример равных площадей в параллелограмме 47
Пример 43. Неожиданная перпендикулярность, возникающая из параллелограмма 48
Пример 44. Параллелограмм Вариньона и его особые свойства 48
Пример 45. Поистине впечатляющий параллелограмм 49
Пример 46. Подробнее о центре четырехугольника 50
Пример 47. Еще больше сюрпризов в параллелограмме 50
Пример 48. Особые четырехугольники дают параллелограмм Вариньона 51
Пример 49. Некоторые особенные четырехугольники дают квадрат Вариньона 51
Пример 50. Другие особые четырехугольники могут сформировать ромб Вариньона 52
Пример 51. Параллелограмм Виттенбауэра 52
Пример 52. Удивительное равенство в прямоугольнике 53
Пример 53. Неожиданная константа, связанная с точками на прямоугольнике 54
Пример 54. Неожиданная перпендикулярность в прямоугольнике 54

Пример 55. Особая точка в прямоугольнике, которая генерирует равные суммы площадей квадратов 55
Пример 56. Приравнивание площадей квадрата и прямоугольника, прикрепленных к большему квадрату 56
Пример 57. Расположение квадратов и ромбов 56
Пример 58. При соединении квадратов формируется еще один квадрат 57
Пример 59. Необычное расположение фигур может привести к неожиданным точкам, лежащим на одной окружности 58
Пример 60. Неожиданные точки, лежащие на одной окружности 58
Пример 61. Квадрат на прямоугольном треугольнике 59
Пример 62. Перпендикулярность в квадрате и неожиданное равенство 59
Пример 63. Удивительное совпадение в квадрате 60
Пример 64. Удивительное равенство в квадрате 60
Пример 65. Удивительное равенство квадрата 61
Пример 66. Удивительные соотношения площадей в особом разбиении квадрата 61
Пример 67. Равенство возникает, когда квадрат и прямоугольник имеют общую диагональ 62
Пример 68. Удивительное равенство площадей внутри квадрата 62
Пример 69. Удивительные треугольники равной площади, полученные из квадрата 63
Пример 70. Еще один случай равных площадей, полученных из исходного квадрата 63
Пример 71. Два квадрата приводят к неожиданному равенству 64
Пример 72. Удивительное свойство биссектрис углов полного четырехугольника 65
Пример 73. Перпендикуляры из вершин четырехугольника к случайно проведенной прямой 65
Пример 74. Дополнительные соотношения в четырехугольниках 66
Пример 75. Две равные смежные стороны четырехугольника образуют равные углы 67
Пример 76. Две равные противоположные стороны четырехугольника образуют равные углы 68
Пример 77. Угол, образованный биссектрисами смежных углов четырехугольника 68
Пример 78. Четырехугольник с двумя последовательными прямыми углами имеет перпендикулярные биссектрисы углов 69
Пример 79. Сравнительные площади квадрата на четырехугольнике 69
Пример 80. Квадраты на сторонах четырехугольника образуют треугольники равной площади 70
Пример 81. Равенство пар квадратов на диагоналях и срединных линиях 70
Пример 82. Введение в циклический четырехугольник 71
Пример 83. Еще одно замечательное свойство вписанного четырехугольника 72
Пример 84. Удивительное свойство углов вписанного четырехугольника 73
Пример 85. Построение вписанных четырехугольников 74
Пример 86. Ортоцентр треугольника порождает множество циклических четырехугольников 74

Пример 87. Подробнее о вписанном четырехугольнике 75
Пример 88. Биссектрисы углов четырехугольника создают вписанный в окружность четырехугольник 75
Пример 89. Биссектрисы углов параллелограмма образуют прямоугольник 76
Пример 90. Биссектрисы углов прямоугольника образуют квадрат 76
Пример 91. Неожиданные точки, лежащие на одной окружности с равнобедренной трапецией 77
Пример 92. Неожиданная перпендикулярность внутри циклического четырехугольника 77
Пример 93. Необычные линии, делящие друг друга пополам в циклическом четырехугольнике 78
Пример 94. Еще несколько необычных линий, пересекающих друг друга в циклическом четырехугольнике 78
Пример 95. Разделение четырехугольника на две равные области 79
Пример 96. Еще один сюрприз в циклическом четырехугольнике 80
Пример 97. Интересное свойство ортоцентра в параллелограмме 80
Пример 98. Неожиданный циклический четырехугольник 81
Пример 99. Вписанные центры четырех треугольников циклического четырехугольника определяют прямоугольник 82
Пример 100. Вписанный четырехугольник образует ромб 82
Пример 101. Вписанный четырехугольник образует параллелограмм 83
Пример 102. Неожиданный пример с циклическим четырехугольником 84
Пример 103. Вписанный четырехугольник, образованный другим вписанным четырехугольником 84
Пример 104. Перпендикуляры к диагонали и стороне, проведенные из вершины особого вписанного четырехугольника, определяют середину другой диагонали 85
Пример 105. Перпендикуляры, проведенные из середин вписанного четырехугольника, пересекаются в одной точке 86
Пример 106. Перпендикулярные сюрпризы в циклическом четырехугольнике 86
Пример 107. Вписанный четырехугольник порождает еще одну неожиданную перпендикулярность 87
Пример 108. Неожиданные параллели от перпендикуляров к сторонам циклического четырехугольника 88
Пример 109. Сюрпризы в циклических четырехугольниках с перпендикулярными диагоналями 88
Пример 110. Еще одна неожиданная перпендикулярность циклического четырехугольника 89
Пример 111. Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями образует параллелограмм 90
Пример 112. Еще одно неожиданное свойство циклических четырехугольников с перпендикулярными диагоналями 90
Пример 113. Циклический четырехугольник с перпендикулярными диагоналями образует точки, лежащие на одной окружности 91
Пример 114. Еще одно неожиданное свойство циклических четырехугольников с перпендикулярными диагоналями 92

Пример 115. Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями образует треугольники равной площади 92
Пример 116. Неочевидное свойство четырехугольников с перпендикулярными диагоналями 93
Пример 117. Равные суммы площадей квадратов на противоположных сторонах четырехугольника 94
Пример 118. Неожиданная перпендикулярность возникает в циклическом четырехугольнике 94
Пример 119. Связь между диагоналями и сторонами циклических четырехугольников 95
Пример 120. Знаменитая теорема Птолемея 96
Пример 121. Любопытное соотношение параллелограмма 96
Пример 122. Равносторонний треугольник в циклическом четырехугольнике 97
Пример 123. Биссектрисы углов в циклических четырехугольниках 97
Пример 124. Неожиданная биссектриса угла в особом вписанном четырехугольнике 98
Пример 125. Перпендикуляры к сторонам циклического четырехугольника, проведенные из точки на его описанной окружности 99
Пример 126. Удивительные факты циклического четырехугольника 99
Пример 127. Знаменитая теорема Брахмагупты 100
Пример 128. Странное равенство квадратов 101
Пример 129. Пропорциональность порождает равенство площадей 102
Пример 130. Парные квадраты на сторонах четырехугольника образуют равенство 102
Пример 131. Линия, соединяющая середины диагоналей четырехугольника, – линия Ньютона 103
Пример 132. Разделение четырехугольника на две пары треугольников с равными суммами площадей 104
Пример 133. Описанный четырехугольник 105
Пример 134. Линия Ньютона во вписанном четырехугольнике 106
Пример 135. Подробнее о линии Ньютона в четырехугольнике со вписанной окружностью 106
Пример 136. Поиск площади треугольника, составляющей одну четверть площади соответствующего четырехугольника 107
Пример 137. Середины диагоналей полного четырехугольника 108
Пример 138. Разделение четырехугольника на четыре равные области 108
Пример 139. Разделение четырехугольника на две пары треугольников равной площади 109
Пример 140. Окружность со вписанным и описанным четырехугольниками образует коллинеарные точки 110

Часть 2. Доказательства примеров 111

Пример 1. Четырехугольники в треугольниках 111
Пример 2. Сравнение суммы диагоналей с суммой противоположных сторон четырехугольника 112
Пример 3. Разделение трапеции на две равные по площади области 113

Пример 4. Неожиданный треугольник, площадь которого вдвое меньше площади трапеции ... 113
Пример 5. Удивительная линия, соединяющая середины диагоналей трапеции ... 114
Пример 6. Неожиданная коллинеарность в трапеции ... 114
Пример 7. Удивительная параллельность, создаваемая трапецией ... 115
Пример 8. Еще одна удивительная конвергенция, порожденная трапецией ... 116
Пример 9. Любопытное равенство углов ... 116
Пример 10. Любопытное равенство отрезков ... 117
Пример 11. Удивительное разбиение общего четырехугольника ... 118
Пример 12. Разделенные на три части стороны четырехугольника определяют одну треть четырехугольника ... 119
Пример 13. Разделение четырехугольника пополам ... 120
Пример 14. Разделение четырехугольника на три равные по площади части ... 122
Пример 15. Еще одно разделение четырехугольника на три области равной площади ... 123
Пример 16. Когда два четырехугольника имеют общие середины ... 125
Пример 17. Определение центра тяжести четырехугольника ... 126
Пример 18. Центроиды могут генерировать подобный четырехугольник в соотношении размеров 1:9 ... 129
Пример 19. Точка минимального расстояния четырехугольника ... 130
Пример 20. Пример с ромбом ... 130
Пример 21. Нетривиальное сравнение параллелограммов ... 131
Пример 22. Пропорциональность параллелограммов ... 132
Пример 23. Неожиданная параллельность в сопряженных параллелограммах ... 133
Пример 24. Разделение параллелограмма пополам ... 134
Пример 25. Разделение трапеции пополам ... 135
Пример 26. Разделение параллелограмма на три части ... 135
Пример 27. Трисекционное деление диагонали параллелограмма ... 136
Пример 28. Еще одно остроумное деление диагонали параллелограмма на три части ... 136
Пример 29. Еще одна точка трисекционного деления на диагонали параллелограмма ... 137
Пример 30. Связь длин сторон параллелограмма с длинами его диагоналей ... 137
Пример 31. Неожиданная перпендикулярность в параллелограмме ... 138
Пример 32. Удивительные сюрпризы, скрытые в параллелограмме ... 139
Пример 33. Треугольники, образующие параллелограммы без построения параллельных прямых ... 140
Пример 34. Создание параллелограмма с площадью, составляющей одну девятую от площади исходного параллелограмма ... 140
Пример 35. Как деление углов параллелограмма пополам и на три части создает другой параллелограмм ... 141
Пример 36. Использование параллелограмма для построения квадрата ... 142
Пример 37. Параллелограмм образует равносторонний треугольник ... 143

Пример 38. Раскрытие секретных произведений вдоль сторон параллелограмма 143
Пример 39. Необычные равные площади, создаваемые в параллелограмме 144
Пример 40. Равные площади треугольников, полученные простым способом с помощью параллелограмма 144
Пример 41. Еще больше равных площадей треугольников, скрытых в параллелограмме 145
Пример 42. Еще один пример равных площадей в параллелограмме 146
Пример 43. Неожиданная перпендикулярность, возникающая из параллелограмма 146
Пример 44. Параллелограмм Вариньона и его особые свойства 147
Пример 45. Поистине впечатляющий параллелограмм 149
Пример 46. Подробнее о центре четырехугольника 149
Пример 47. Еще больше сюрпризов в параллелограмме 150
Пример 48. Особые четырехугольники дают параллелограмм Вариньона 152
Пример 49. Некоторые особенные четырехугольники дают квадрат Вариньона 152
Пример 50. Другие особые четырехугольники могут сформировать ромб Вариньона 153
Пример 51. Параллелограмм Виттенбауэра 154
Пример 52. Удивительное равенство в прямоугольнике 157
Пример 53. Неожиданная константа, связанная с точками на прямоугольнике 157
Пример 54. Неожиданная перпендикулярность в прямоугольнике 158
Пример 55. Особая точка в прямоугольнике, которая генерирует равные суммы площадей квадратов 158
Пример 56. Приравнивание площадей квадрата и прямоугольника, прикрепленных к большему квадрату 159
Пример 57. Расположение квадратов и ромбов 160
Пример 58. При соединении квадратов формируется еще один квадрат 161
Пример 59. Необычное расположение фигур может привести к неожиданным точкам, лежащим на одной окружности 162
Пример 60. Неожиданные точки на одной окружности 163
Пример 61. Квадрат на прямоугольном треугольнике 163
Пример 62. Перпендикулярность в квадрате и неожиданное равенство 164
Пример 63. Удивительное совпадение в квадрате 165
Пример 64. Удивительное равенство в квадрате 166
Пример 65. Удивительное равенство квадрата 166
Пример 66. Удивительные соотношения площадей в особом разбиении квадрата 167
Пример 67. Равенство возникает, когда квадрат и прямоугольник имеют общую диагональ 168
Пример 68. Удивительное равенство площадей внутри квадрата 168
Пример 69. Удивительные треугольники равной площади, полученные из квадрата 169
Пример 70. Еще один случай равных площадей, полученных из исходного квадрата 170

Пример 71. Два квадрата приводят к неожиданному равенству 171
Пример 72. Удивительное свойство биссектрис углов полного четырехугольника 171
Пример 73. Перпендикуляры из вершин четырехугольника к случайно проведенной прямой 172
Пример 74. Дополнительные соотношения в четырехугольниках 174
Пример 75. Две равные смежные стороны четырехугольника образуют равные углы 175
Пример 76. Две равные противоположные стороны четырехугольника образуют равные углы 176
Пример 77. Угол, образованный биссектрисами смежных углов четырехугольника 176
Пример 78. Четырехугольник с двумя последовательными прямыми углами имеет перпендикулярные биссектрисы углов 177
Пример 79. Сравнительные площади квадрата на четырехугольнике 177
Пример 80. Квадраты на сторонах четырехугольника образуют треугольники равной площади 178
Пример 81. Равенство пар квадратов на диагоналях и срединных линиях ... 179
Пример 82. Введение в циклический четырехугольник 180
Пример 83. Еще одно замечательное свойство вписанного четырехугольника 181
Пример 84. Удивительное свойство углов вписанного четырехугольника 182
Пример 85. Построение вписанных четырехугольников 183
Пример 86. Ортоцентр треугольника порождает множество циклических четырехугольников 183
Пример 87. Подробнее о вписанном четырехугольнике 184
Пример 88. Биссектрисы углов четырехугольника создают вписанный в окружность четырехугольник 185
Пример 89. Биссектрисы углов параллелограмма образуют прямоугольник 185
Пример 90. Биссектрисы углов прямоугольника образуют квадрат 186
Пример 91. Неожиданные точки, лежащие на одной окружности с равнобедренной трапецией 187
Пример 92. Неожиданная перпендикулярность внутри циклического четырехугольника 188
Пример 93. Необычные прямые, делящие друг друга пополам в циклическом четырехугольнике 188
Пример 94. Еще несколько необычных прямых, пересекающих друг друга в циклическом четырехугольнике 190
Пример 95. Разделение четырехугольника на две равные области 191
Пример 96. Еще один сюрприз в циклическом четырехугольнике 192
Пример 97. Интересное свойство ортоцентра в параллелограмме 192
Пример 98. Неожиданный циклический четырехугольник 194
Пример 99. Вписанные центры четырех треугольников циклического четырехугольника определяют прямоугольник 194
Пример 100. Вписанный четырехугольник образует ромб 196
Пример 101. Вписанный четырехугольник образует параллелограмм 196
Пример 102. Неожиданный пример с циклическим четырехугольником 197

Пример 103. Вписанный четырехугольник, образованный другим вписанным четырехугольником 198
Пример 104. Перпендикуляры к диагонали и стороне, проведенные из вершины особого вписанного четырехугольника, определяют середину другой диагонали 199
Пример 105. Перпендикуляры, проведенные из середин вписанного четырехугольника, пересекаются в одной точке 200
Пример 106. Перпендикулярные сюрпризы в циклическом четырехугольнике 201
Пример 107. Вписанный четырехугольник порождает еще одну неожиданную перпендикулярность 201
Пример 108. Неожиданные параллели от перпендикуляров к сторонам циклического четырехугольника 202
Пример 109. Сюрпризы в циклических четырехугольниках с перпендикулярными диагоналями 203
Пример 110. Еще одна неожиданная перпендикулярность циклического четырехугольника 204
Пример 111. Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями образует параллелограмм 205
Пример 112. Еще одно неожиданное свойство циклических четырехугольников с перпендикулярными диагоналями 206
Пример 113. Циклический четырехугольник с перпендикулярными диагоналями образует точки, лежащие на одной окружности 206
Пример 114. Еще одно неожиданное свойство циклических четырехугольников с перпендикулярными диагоналями 207
Пример 115. Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями образует треугольники равной площади 208
Пример 116. Неочевидное свойство четырехугольников с перпендикулярными диагоналями 208
Пример 117. Равные суммы площадей квадратов на противоположных сторонах четырехугольника 209
Пример 118. Неожиданная перпендикулярность возникает в циклическом четырехугольнике 210
Пример 119. Связь между диагоналями и сторонами циклических четырехугольников 210
Пример 120. Знаменитая теорема Птолемея 211
Пример 121. Любопытное соотношение параллелограмма 212
Пример 122. Равносторонний треугольник в циклическом четырехугольнике 213
Пример 123. Биссектрисы углов в циклических четырехугольниках 213
Пример 124. Неожиданная биссектриса угла в особом вписанном четырехугольнике 214
Пример 125. Перпендикуляры к сторонам циклического четырехугольника, проведенные из точки на его описанной окружности 215
Пример 126. Удивительные факты циклического четырехугольника 216
Пример 127. Знаменитая теорема Брахмагупты 216
Пример 128. Странное равенство квадратов 218
Пример 129. Пропорциональность порождает равенство площадей 219

Пример 130. Парные квадраты на сторонах
четырехугольника образуют равенство 222
Пример 131. Линия, соединяющая середины диагоналей
четырехугольника, – линия Ньютона 223
Пример 132. Разделение четырехугольника на две пары
треугольников с равными суммами площадей 225
Пример 133. Описанный четырехугольник 228
Пример 134. Линия Ньютона во вписанном четырехугольнике 230
Пример 135. Подробнее о линии Ньютона
в четырехугольнике со вписанной окружностью 231
Пример 136. Поиск площади треугольника, составляющей
одну четверть площади соответствующего четырехугольника 232
Пример 137. Середины диагоналей полного четырехугольника 234
Пример 138. Разделение четырехугольника на четыре равные области 234
Пример 139. Разделение четырехугольника на две пары
треугольников равной площади 236
Пример 140. Окружность со вписанным и описанным
четырехугольниками образует коллинеарные точки 239

Часть 3. Инструментарий 240

Введение: инструментарий геометрии 240
A. Инструменты, с которыми читатели, вероятно, знакомы из курса
геометрии для старшей школы 241
A1. Конгруэнтность треугольников 241
A2. Подобие треугольников 241
A3. Свойства прямоугольного треугольника (см. рис. A3) 241
A4. Углы, связанные с окружностью (см. рис. A4) 242
A5. Касательные, секущие и хорды:
сегменты окружности и степень точки (см. рис. A5) 243
A6. Закон синусов и закон косинусов (см. рис. A6) 244
A7. Тождества для суммы и разности углов 245
B. Менее известные инструменты, однако полезные и увлекательные 245
B1. Биссектриса внутреннего угла треугольника 245
B2. Внешняя биссектриса угла в треугольнике 246
B3. Теорема Менелая 247
B4. Теорема Чевы 249
B5. Расширенная теорема Чевы 251
B6. Теорема Дезарга 252
B7. Изометрии: отражение и вращение 254
B8. Гомотетия и подобие 257
B9. Теорема Симсона 258
B10. Формула Герона 259

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте *www.dmkpress.com*, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу *dmkpress@gmail.com*; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу *http://dmkpress.com/authors/publish_book/* или напишите в издательство по адресу *dmkpress@gmail.com*.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг, мы будем очень благодарны, если вы сообщите о ней главному редактору по адресу *dmkpress@gmail.com*. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Нарушение авторских прав

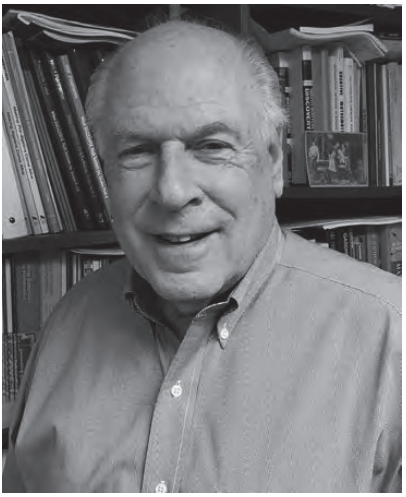
Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты *dmkpress@gmail.com*.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

ОБ АВТОРАХ

Альфред С. Позаментье



Альфред С. Позаментье (Alfred S. Posamentier) в настоящее время является заслуженным лектором в Нью-Йоркском городском колледже технологий Городского университета Нью-Йорка (New York City College of Technology of the City University of New York).

До этого он занимал должность исполнительного директора по интернационализации и финансируемым программам в Университете Лонг-Айленда, Нью-Йорк.

Ранее пять лет проработал деканом Школы образования и профессором математики в Университете Мерси, Нью-Йорк. А еще он 40 лет проработал в Городском колледже Городского университета Нью-Йорка, где в настоящее время является почетным профессором математики и почетным деканом Школы образования. Он является автором и соавтором более 80 книг по математике для учителей, учащихся средних и начальных школ, а также для широкой читательской аудитории. Доктор Позаментье также часто вы-

ступает в качестве комментатора в газетах и журналах по темам, связанным с образованием.

После получения степени бакалавра математики в Хантер-колледже Городского университета Нью-Йорка он занял должность учителя математики в средней школе имени Теодора Рузвельта (Бронкс, Нью-Йорк), где сосредоточил свое внимание на улучшении навыков решения задач у учащихся и одновременно на обогащении их обучения, выходящем далеко за рамки традиционных учебников. За шесть лет работы там он также создал первые в школе математические команды (как на младшем, так и на старшем уровнях). Он до сих пор сотрудничает с учителями математики и руководителями на национальном и международном уровнях, помогая им максимально повысить свою эффективность.

Сразу после поступления на факультет Городского колледжа Нью-Йорка в 1970 году (после получения там степени магистра в 1966 году) он начал разрабатывать курсы повышения квалификации для учителей математики средних школ, включая такие специализированные области, как занимательная математика и решение задач в математике. В качестве декана педагогического факультета Городского колледжа в течение 10 лет его интересы в области образовательных вопросов охватывали весь спектр образовательных проблем. За время своего пребывания на посту декана он вывел педагогический факультет из числа худших в рейтинге штата Нью-Йорк на первое место, получив в 2009 году безупречную аккредитацию NCATE. Он также привлек более 12 миллионов долларов от частного сектора на инновационные образовательные программы. Позаментье повторил этот успешный опыт в колледже Мерси, что позволило ему стать единственным колледжем, получившим одновременно аккредитацию NCATE и TEAC. В 1973 году Альфред Позаментье получил докторскую степень в области математического образования в Фордхэмском университете (Нью-Йорк) и с тех пор стал известен как специалист в области математического образования по Европе. Он был приглашенным профессором в нескольких европейских университетах в Австрии, Англии, Германии, Чехии, Турции и Польше.

В 1990 году он занимал должность профессора по программе Фулбрайта в Венском университете.

В 1989 году ему была присвоена почетная должность научного сотрудника в Южном университете (Лондон, Англия). В знак признания его выдающихся преподавательских заслуг Ассоциация выпускников Городского колледжа назвала его педагогом года в 1994 и 2009 годах. В Нью-Йорке 1 мая 1994 года был учрежден день в его честь президентом городского совета Нью-Йорка. В 1994 году он также был награжден Большой почетной медалью Республики Австрия, а в 1999 году, с одобрения парламента, президент Республики Австрия присвоил ему звание университетского профессора Австрии. В 2003 году ему было присвоено звание почетного члена Венского технического университета, а в 2004 году он был награжден Австрийским почетным крестом за достижения в области искусств и наук от президента Республики Австрия. В 2005 году он был включен в Зал славы выпускников Хантер-колледжа, а в 2006 году был награжден престижной

медалью Таунсенда Харриса Ассоциацией выпускников Городского колледжа. В 2009 году он был включен в Зал славы преподавателей математики штата Нью-Йорк, а в 2010 году был удостоен престижной премии Кристиана Питера Бойта от Технического университета Берлина. В 2017 году Позаментье был удостоен высшей оценки (Summa Cum Laude) от Фонда Себастьяна А. К., Мехико, Мексика.

Он занимал многочисленные важные руководящие должности в сфере математического образования на местном уровне. Был членом экспертной комиссии по экзаменам Math-A Regents при Управлении образования штата Нью-Йорк и Комитета по стандартам математики при Управлении, который пересмотрел стандарты математики для штата Нью-Йорк, а также входил в состав Консультативного совета по математике при канцлере школ Нью-Йорка.

Доктор Позаментье по-прежнему является ведущим комментатором по вопросам образования и продолжает свою давнюю страсть к поиску способов сделать математику интересной для учителей, учеников и широкой общественности, как видно из некоторых его последних книг.

Для получения дополнительной информации и списка его публикаций см.: *https://en.wikipedia.org/wiki/Alfred_S._Posamentier.*

Роберт Геретшлегер



Роберт Геретшлегер (Robert Geretschläger) в настоящее время является преподавателем в Университете Граца, Австрия (University of Graz, Austria). Он преподавал математику и геометрию, проживая в Граце, Австрия. После почти 40 лет работы в должности преподавателя в Федеральной реальной гимназии Кеплерштрассе в Граце он в 2022 году вышел на пенсию.

В настоящее время продолжает преподавать геометрию в рамках педагогического образования в Университете Граца, Австрия.

Родился в Торонто, Канада, в 1957 году, переехал в Австрию в 1972 году, где завершил образование, получив степень магистра в качестве учителя ма-

тематики средней школы со специализацией в геометрии, а затем защитил докторскую диссертацию по математике в Университете Граца.

На протяжении большей части своей карьеры он активно участвовал в организации математических соревнований всех возрастов и уровней сложности.

Среди прочих ролей в этом контексте он был руководителем австрийской команды на Международной математической олимпиаде с 2007 года и ведущим организатором Математического конкурса «Кенгуру» в Австрии с момента его основания в середине 1990-х годов. Он также отвечал за внедрение в Австрии Международного математического турнира городов и Средиземноморского математического конкурса.

На международном уровне, начиная с 2008 года, является членом Исполнительного комитета Всемирной федерации математических соревнований (WFNMC), занимая должность старшего вице-президента с 2018 по 2022 год и президента с 2022 года. Он также является давним членом международного совета Ассоциации «Кенгуру без границ» (AKSF), где в настоящее время занимает должность казначея. Читал лекции на многих международных площадках, будучи приглашенным лектором в Канаде, Австралии, Чехии, Швейцарии, Колумбии и Германии, среди прочих стран.

Он также принимал участие в ряде проектов по математическому образованию на протяжении многих лет. А еще много лет был членом Дидактической комиссии Австрийского математического общества (ÖMG) и ведущим редактором серии учебников по математике для старших классов. Роберт активно участвовал в разработке учебных программ для австрийских средних школ и сыграл активную роль на начальном этапе внедрения исследования PISA в Австрии.

Он является редактором и соавтором многочисленных книг по популярной математике, математике для решения задач (конкурсной математике) и своей особой области исследований – геометрии оригами.

Более подробная информация доступна на его веб-сайте по адресу: *www.rgeretschlaeger.com*.

БЛАГОДАРНОСТИ

Хорошо известно, что математические задачи часто допускают альтернативные решения. Наша цель в этой книге – представить наиболее элегантные и эффективные решения и доказательства некоторых из самых сложных геометрических задач. В этом нам помогли несколько математиков, предложивших замечательные идеи. Среди них: Дэвид Хэнкин, Мориц Хиблер, Ханс Гуменбергер (David Hankin, Moritz Hiebler, Hans Humenberger) и Роберт Серкей (Robert Serkey).

Авторы благодарны за то, что они поделились с ними своими знаниями.

ВВЕДЕНИЕ

Хотя все мы знакомимся с основами геометрии в начальной школе, не всем из нас предоставляется возможность по-настоящему оценить всю мощь и красоту геометрических построений и выводов. Геометрия может стать ключом к пониманию математики, если ее рассматривать как с эстетической, так и с логической точки зрения. В Соединенных Штатах знакомство учащихся с геометрией в течение целого года обучения в средней школе, безусловно, очень познавательно. Однако, учитывая, сколько времени тратится на изучение основных понятий и принципов геометрии, остается мало времени, чтобы по-настоящему оценить некоторые чудеса и загадки, которые предлагает этот предмет. В некоторых странах изучение элементарной геометрии было радикально сокращено в последние десятилетия, и, соответственно, пострадало и понимание ее красоты. Даже в странах с сильной традицией преподавания геометрии в школе подчеркиваются технические аспекты и логика, часто в ущерб признанию ее визуального великолепия.

При исследовании геометрических соотношений можно обнаружить множество удивительных и неожиданных результатов. Многие из них кажутся нелогичными, но тем не менее верны. Простой пример, иногда приводимый на уроках геометрии в средней школе, – это то, что последовательное соединение середин сторон любого случайно выбранного четырехугольника всегда дает параллелограмм. Существует бесчисленное множество подобных неожиданных загадочных явлений, которые являются результатом довольно простых геометрических построений. Эта книга отправит заинтересованных читателей в путешествие к ранее неисследованным соотношениям, которые могут вызвать у них полное изумление. Кроме того, для просвещения читателей в максимально доступной форме приводятся евклидовы доказательства всех этих удивительных результатов. Конечно, многие читатели могут просто восхищаться результатами, не вникая в доказательства. Это вполне допустимо, поскольку понимание доказательств никоим образом не требуется для того, чтобы оценить эти прекрасные свойства.

Мы представляем второй том серии из трех книг, демонстрирующих великолепие геометрии, и он посвящен соотношениям четырехугольников. Первый том посвящен треугольникам, а третий будет посвящен окружностям.

Чтобы извлечь максимальную пользу из чтения этой книги, читатель должен иметь достаточное представление об основных понятиях геометрии, преподаваемых в средней школе. Геометрические теоремы, используемые в некоторых доказательствах, которые могут выходить за рамки школьной геометрии, представлены в части «Инструментарий», где эти понятия разъясняются для широкой читательской аудитории. Не все элементы этого материала выходят за рамки школьной программы, поскольку значительная часть его рассматривает многие основы школьной геометрии. «Инструментарий» предоставляет все необходимое для понимания доказательств, представленных во второй части книги.

Мы старались сделать ваше путешествие по книге максимально приятным и увлекательным. Однако организация отдельных примеров довольно хаотична, хотя есть несколько связанных примеров, расположенных последовательно, чтобы показать развитие определенных концепций. Некоторые из этих последовательных разделов могут касаться коллинеарности точек, пересечения прямых, точек, расположенных на одной окружности, и других тем, обычно не рассматриваемых в школьной программе по геометрии.

Примеры, выбранные в этой книге, довольно необычны и либо были созданы самими авторами, либо представлены в учебниках по геометрии за последние два столетия. Читателям рекомендуется сначала прочитать и оценить удивительные взаимосвязи, которые демонстрирует каждый из этих примеров. В качестве следующего шага заинтересованный читатель может сосредоточиться на доказательстве этих удивительных загадок, особенно после того, как осознает их.

Мы сделали все возможное, чтобы представить все доказательства и дополнения в удобном для читателя виде. Мы приглашаем вас отправиться в это удивительное путешествие по многим скрытым особенностям четырехугольников, которые раскрывают силу и красоту геометрии, а также логику, лежащую в ее основе. Наслаждайтесь!

1

ЗАГАДКИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

https://t.me/it_boooks/2

Введение в четырехугольники

Самая основная геометрическая фигура – это треугольник, удивительные свойства которого представлены в первом томе этой серии книг, «Треугольники». В этой книге мы продолжаем наше путешествие по геометрическим загадкам, рассматривая чудеса четырехугольников. Как и в случае с треугольниками, мы находим некоторые особые точки, линии и окружности с удивительными свойствами, чьи отношения с определенными четырехугольниками приводят к неожиданным выводам.

Пример 1. Четырехугольники в треугольниках

Как мы уже упоминали, самой основной фигурой в планиметрии является треугольник, и вполне уместно начать наше путешествие в мир четырехугольников, связав четырехугольник с треугольником.

Предположим, у нас есть четырехугольник, полностью расположенный внутри треугольника и имеющий общее основание. Такая ситуация показана на рис. 1, где четырехугольник *BCDE* полностью находится внутри треугольника *ABC* и имеет общее основание *BC*. Очевидно ли, что периметр треугольника больше периметра четырехугольника? Некоторые могут утверждать обратное. На самом деле периметр треугольника, безусловно, больше периметра четырехугольника, так что мы имеем

$$AB + BC + CA > BC + CD + DE + EB.$$

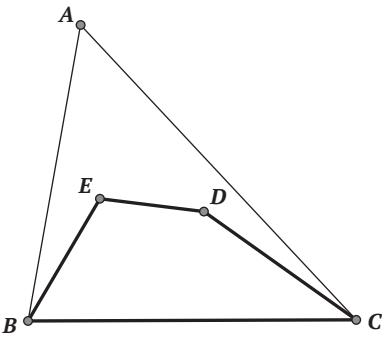


Рисунок 1

Пример 2. Сравнение суммы диагоналей с суммой противоположных сторон четырехугольника

Хорошо известно, что сумма любых двух сторон треугольника больше, чем третья сторона. Аналогичное соотношение существует и для четырехугольников. Для общего выпуклого четырехугольника мы обнаруживаем, что сумма диагоналей больше, чем сумма любой пары противоположных сторон. Применив это к четырехугольнику *ABCD*, показанному на рис. 2, мы можем утверждать, что:

$$AC + BD > AB + CD \text{ и } AC + BD > AD + BC.$$

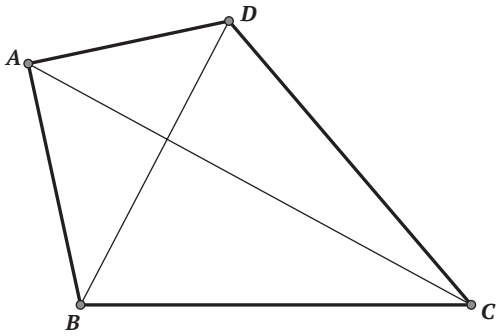


Рисунок 2

Пример 3. Разделение трапеции на две равные по площади области

Существует множество способов разделить случайно выбранную трапецию на два четырехугольника равной площади. Рассмотрим трапецию *ABCD*, показанную на рис. 3, у которой параллельные стороны *AB* и *DC*. Чтобы разделить трапецию на два четырехугольника равной площади, мы можем найти середину *P* средней линии *MN*, которая представляет собой линию, соединяющую середины двух непараллельных сторон. (Напомним, что длина средней линии трапеции равна среднему значению длин двух параллельных сторон.) Тогда любая линия, проведенная через точку *P* и пересекающая две параллельные стороны *AB* и *CD*, разделит трапецию на две области равной площади. На рис. 3 у нас есть четырехугольник *AEFD*, равный по площади четырехугольнику *BCFE*.

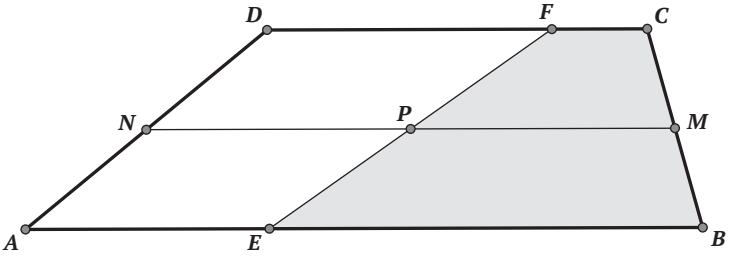


Рисунок 3

Пример 4. Неожиданный треугольник, площадь которого вдвое меньше площади трапеции

Найти треугольник, площадь которого вдвое меньше площади данной трапеции, довольно легко. Все, что нам нужно сделать, – это найти середину P стороны AD трапеции $ABCD$, у которой параллельны стороны AB и CD, как показано на рис. 4, и затем нарисовать BP и CP. В результате площадь треугольника

$[BCP] = ½$ площади четырехугольника $[ABCD]$.

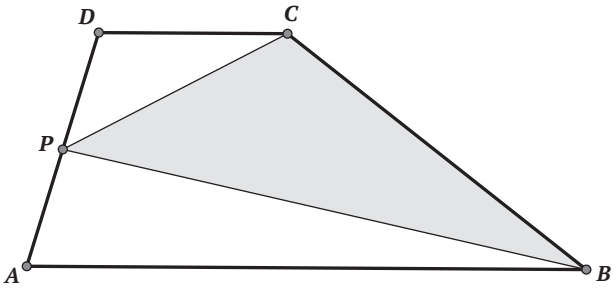


Рисунок 4

Пример 5. Удивительная линия, соединяющая середины диагоналей трапеции

Существует любопытная взаимосвязь между линией, соединяющей середины диагоналей трапеции, и длиной ее оснований.

Мы видим это на рис. 5, где точки E и F являются серединами диагоналей AC и BD соответственно. В результате длина линии, соединяющей середины диагоналей, равна половине разности длин их оснований, то есть $EF = ½ (AB - CD)$. Это интересно сравнивается с длиной средней линии трапеции, длина которой равна половине суммы ее оснований.

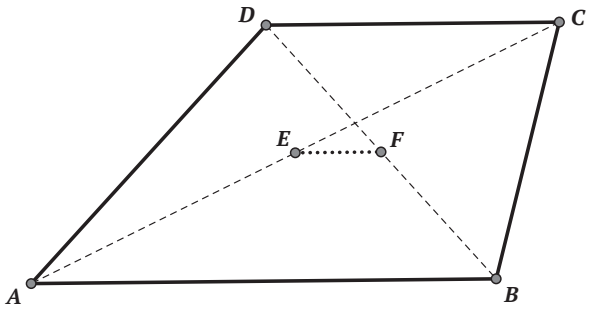


Рисунок 5

Пример 6. Неожиданная коллинеарность в трапеции

Раз уж мы заговорили о случайно выбранных трапециях, то действительно неожиданно, что линия, соединяющая середины оснований (двух параллельных сторон) трапеции, всегда будет содержать точку пересечения диагоналей трапеции. Это видно на рис. 6, где точки *E* и *F* являются серединами параллельных линий *AB* и *DC* соответственно и определяют линию *EF*, которая коллинеарна с точкой пересечения диагоналей *AC* и *BD*. Независимо от формы трапеции, линия *EF* всегда будет содержать точку пересечения *P*.

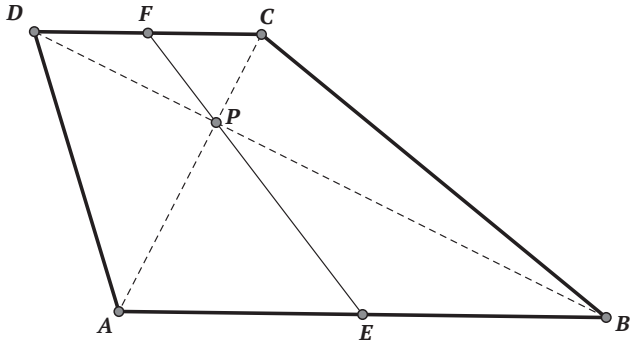


Рисунок 6

Пример 7. Удивительная параллельность, создаваемая трапецией

Случайно нарисованная трапеция также может неожиданным образом привести к совпадению трех прямых. Это можно увидеть на примере трапеции *ABCD* на рис. 7, где диагонали *AC* и *DB* пересекаются в точке *F*, а продолжения *DA* и *CB* – в точке *E*. Далее мы проводим прямую через точку *E*, параллельную *AB*, так что продолжения *CA* и *DB* пересекают эту прямую в точках *G* и *H* соответственно. Неожиданно мы обнаруживаем, что прямые *CH*, *DG* и *EF* пересекаются в одной точке, поскольку все они имеют общую точку *P*.

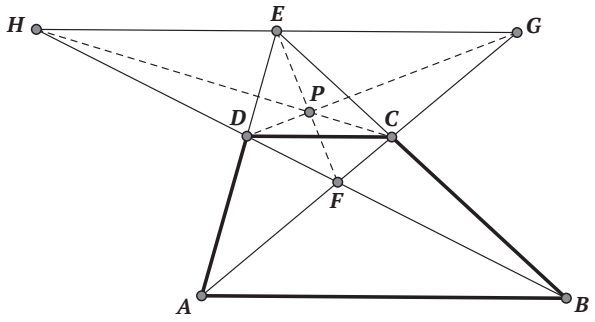


Рисунок 7

Пример 8. Еще одна удивительная конвергенция, порожденная трапецией

Трапеции продолжают демонстрировать довольно неожиданные параллельные операции. Одна из конфигураций, приводящих к такой удивительной параллельной операции, показана на рис. 8. Здесь точка E – любая точка на стороне BC трапеции $ABCD$. Точка F – точка пересечения DE и AC. Прямая, параллельная AB и проходящая через точку F, пересекает AD в точке G. Прямая GB пересекает прямую AC в точке H. Затем продолженная EH пересекает AD в точке I. Удивительно, но мы обнаруживаем следующую параллельную операцию: прямые BI, EG и CD пересекаются в общей точке R. На первый взгляд это может показаться несколько искусственным, но это показывает, как можно обнаружить параллельные операции, которые совершенно не ожидаются.

Возможно, заинтересованный читатель захочет поискать другие параллельные операции с трапециями.

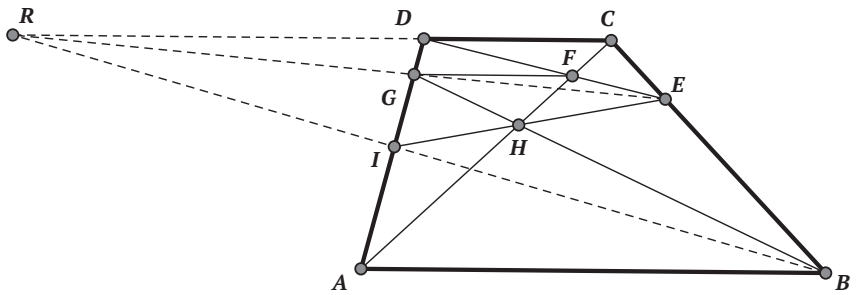


Рисунок 8

Пример 9. Любопытное равенство углов

Трапеции могут давать еще более странные соотношения. На рис. 9 мы видим общую трапецию $ABCD$, где $AB \parallel CD$. Точки E и F расположены на сторонах BC и DA соответственно, так что $\angle ADE = \angle FCB$. Неожиданно другая пара углов также окажется равной, поскольку мы обнаруживаем, что $\angle DEA = \angle BFC$.

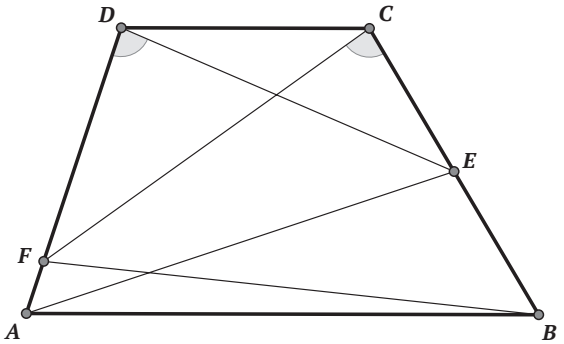


Рисунок 9

Пример 10. Любопытное равенство отрезков

Особое свойство проявляется при рассмотрении равнобедренной трапеции, у которой боковые стороны имеют одинаковую длину. Мы можем увидеть такой четырехугольник на рис. 10, где равнобедренная трапеция *ABCD* имеет *AD* = *BC*. В этой равнобедренной трапеции, где диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *E*, нам дано, что ∠*CED* = 60°. Это приводит к удивительному любопытству, заключающемуся в том, что отрезок, соединяющий середины отрезков *BE* и *AD* соответственно, вдвое короче длин сторон *AD* и *BC*. Таким образом, мы имеем *FG* = *AG*.

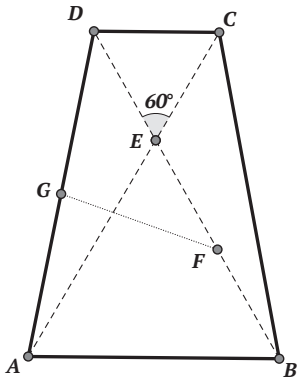


Рисунок 10

Пример 11. Удивительное разбиение общего четырехугольника

Интересный аспект, который мы можем рассмотреть в общих четырехугольниках, – это равенство площадей. Рассмотрим общий четырехугольник *ABCD*, где точки *E* и *F* являются серединами противоположных сторон *AB* и *DC* соответственно, как показано на рис. 11. Неожиданно мы обнаруживаем, что сумма площадей двух заштрихованных треугольников равна площади четырехугольника в центре. То есть мы имеем площадь четырехугольника [*EHFG*] = площадь треугольника [*AGD*] + площадь треугольника [*BCH*].

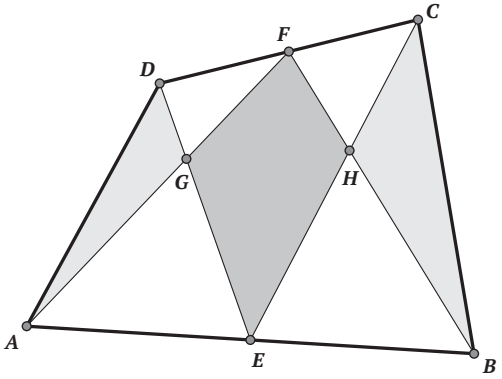


Рисунок 11

Пример 12. Разделенные на три части стороны четырехугольника определяют одну треть четырехугольника

На этот раз вместо работы с серединами мы рассмотрим точки, разделяющие на три части пару противоположных сторон общего четырехугольника.

И снова это приведет к еще одному любопытному соотношению. На рис. 12 стороны *BC* и *AD* четырехугольника *ABCD* разделены на три части точками *E*, *F* и *G*, *H* соответственно. Удивительно, но мы обнаруживаем, что площадь четырехугольника *EFGH* составляет одну треть площади четырехугольника *ABCD*.

Хотя такое разделение прямых на три части может указывать на то, что площади будут вести себя аналогично, этот результат на самом деле довольно удивителен.

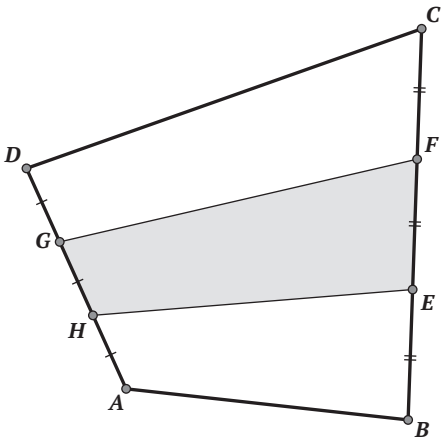


Рисунок 12

Пример 13. Разделение четырехугольника пополам

Разделение данного четырехугольника на две равновеликие части можно сделать довольно просто, как мы видим на примере четырехугольника *ABCD*, показанного на рис. 13. *M* – середина диагонали *BD*, а прямая, проходящая через *M*, параллельная диагонали *AC*, пересекает *AB* в точке *E* и *BC* в точке *F*. Мы тогда обнаруживаем, что прямая *CE* делит четырехугольник *ABCD* на две равные по площади области, а именно

площадь четырехугольника [*AECD*] = площадь треугольника [*EBC*].

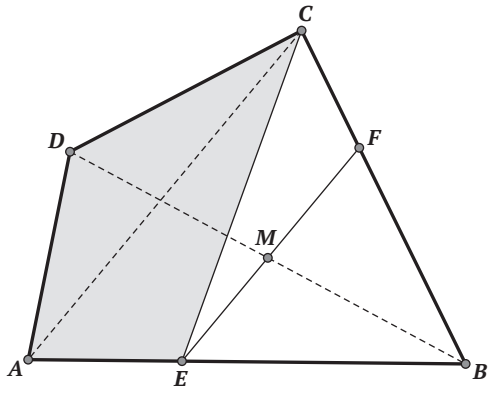


Рисунок 13

Пример 14. Разделение четырехугольника на три равные по площади части

Существует множество интересных способов разделить четырехугольник на три области равной площади. На рис. 14 показан один из возможных способов разделить четырехугольник любой формы на три области равной площади всего двумя прямыми, исходящими из одной из вершин. Две прямые, *AK* и *AL*, исходят из вершины *A* и делят четырехугольник *ABCD* так, что площадь треугольника [*ABK*] = площади треугольника [*AKL*] = площади четырехугольника [*ALCD*]. Чтобы найти точки *K* и *L*, мы сначала строим прямую, параллельную диагонали *AC*, проходящую через точку *B*. Точка, где продолжение *CD* пересекает эту параллельную прямую, – это точка *E*. Точки *F* и *G* являются точками трехсекционного деления прямой *ED*, так что *EF* = *FG* = *GD*. Через точки *F* и *G* проводятся прямые, параллельные прямой *AC*, пересекающие *BC* в точках *K* и *L* соответственно, определяя таким образом точки, к которым проводятся прямые, исходящие из вершины *A*, чтобы получить

площадь треугольника [*ABK*] = площади треугольника [*AKL*] =
площади четырехугольника [*ALCD*].

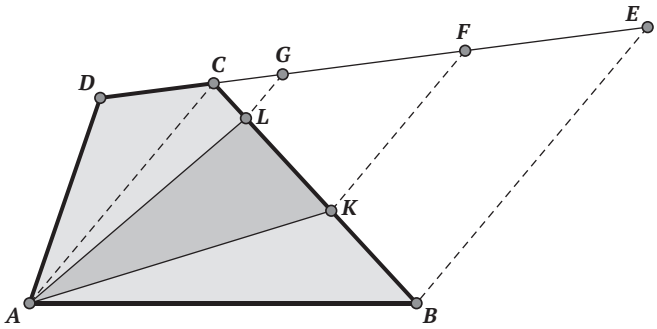


Рисунок 14

Пример 15. Еще одно разделение четырехугольника на три области равной площади

На этот раз мы попытаемся разделить четырехугольник на три области равной площади, используя две прямые, исходящие из точки на одной стороне, а не из вершины. На рис. 15 случайным образом выбирается точка *P* на стороне *AB* четырехугольника *ABCD*. Мы строим отрезок *BF*, параллельный *PC*, так что он пересекает отрезок *CD*, продолженный в точке *F*. Затем строим отрезок *AE*, параллельный *PD*, так что он пересекает отрезок *CD*, продолженный в точке *E*. Далее отрезок *EF* делится на три части точками *K* и *G*, так что *EK* = *KG* = *GF*.

Линия *GL* проведена параллельно *PC* и пересекает *BC* в точке *L*. Критические точки теперь *K* и *L*. Таким образом, мы имеем *PK* и *PL*, разделяющие исходный четырехугольник *ABCD* на три области равной площади, где

площадь четырехугольника [*APKD*] = площади четырехугольника [*PLCK*] = площади треугольника [*PBL*].

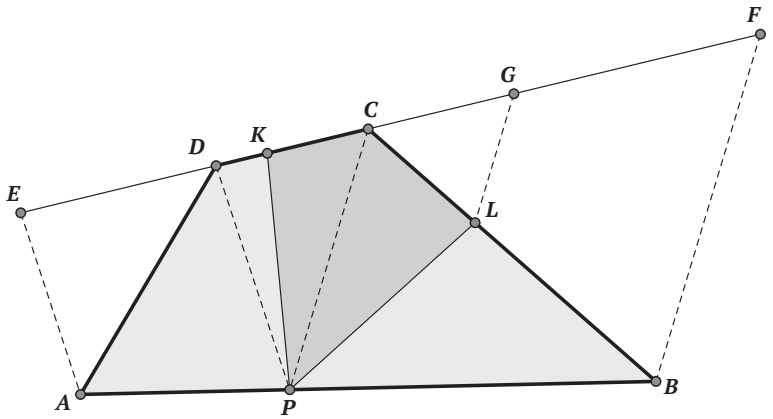


Рисунок 15

Пример 16. Когда два четырехугольника имеют общие середины

Наиболее удивительный результат получается, когда стороны двух четырехугольников имеют общие середины. Мы иллюстрируем это на рис. 16, где серединами сторон *AB*, *BC*, *CD* и *DA* четырехугольника *ABCD* являются точки *J*, *K*, *L* и *M* соответственно. Эти же четыре точки *J*, *K*, *L* и *M* также являются серединами сторон *EF*, *FG*, *GH* и *HE* соответственно четырехугольника *EFGH*. Удивительный результат заключается в том, что два четырехугольника *ABCD* и *EFGH* имеют равные площади. Любой другой четырехугольник, имеющий эти четыре точки в качестве середин сторон, также имел бы ту же площадь, что и эти два четырехугольника.

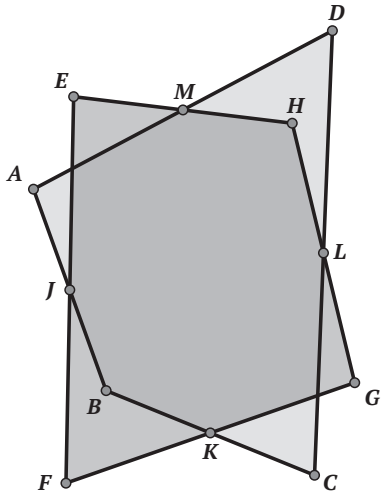


Рисунок 16

Пример 17. Определение центра тяжести четырехугольника

Предположим, мы хотим уравновесить случайно сконструированный картонный четырехугольник на кончике булавки. Существует только одна точка, в которой мы можем это сделать. Мы называем эту точку центр тяжести четырехугольника. Как мы можем найти эту точку, если четырехугольник совершенно случайный? Чтобы решить данную задачу, сначала рассмотрим центр тяжести треугольника, который является точкой пересечения трех медиан треугольника. (Напомним, что медиана треугольника – это линия, соединяющая вершину треугольника с серединой противоположной стороны.) На рис. 17a точка *G* является точкой пересечения трех медиан *AD*, *BE* и *CF* треугольника *ABC*.

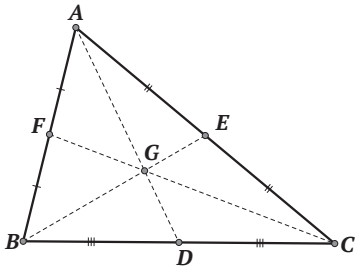


Рисунок 17a

Чтобы найти центроид четырехугольника *ABCD*, который является точкой, в которой картонный четырехугольник можно уравновесить на кончике булавки, мы применяем следующий метод. Пусть точки *M* и *N* являются центроидами ΔACD и ΔABC соответственно, начертим отрезок *MN*, как показано на рис. 17b.

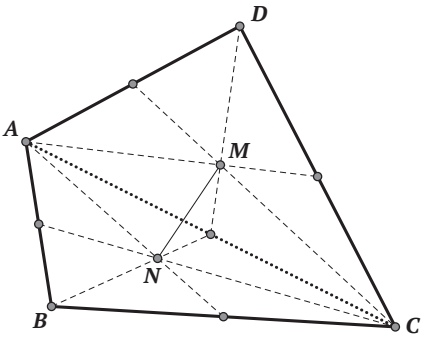


Рисунок 17b

Кроме того, пусть точки *K* и *L* будут центроидами Δ*ABD* и Δ*BCD* соответственно, проведем отрезок *KL*, как показано на рис. 17c.

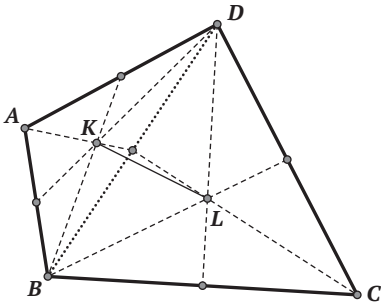


Рисунок 17c

Тогда центроидом, или центром тяжести, четырехугольника *ABCD* является точка *G*, определяемая пересечением отрезков *MN* и *KL*, как показано на рис. 17d.

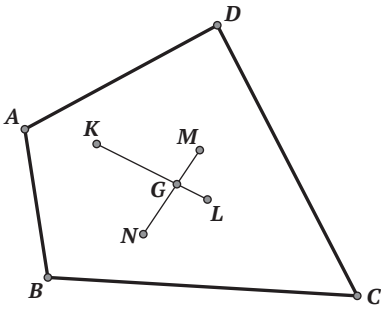


Рисунок 17d

Пример 18. Центроиды могут создавать подобный четырехугольник в соотношении размеров 1:9

Помимо создания центроида, или точки равновесия, четырехугольника, четыре точки *K*, *N*, *L* и *M*, показанные на рис. 17d, определяют неожиданный четырехугольник, как видим на рис. 18. Стороны этого вновь образованного четырехугольника *KNLM* параллельны соответствующим сторонам исходного четырехугольника: *AB* || *LM*, *BC* || *MK*, *CD* || *KN* и *DA* || *NL*. Как будто этого недостаточно, чтобы удивить, мы также можем показать, что эти четырехугольники подобны, причем площадь четырехугольника *ABCD* в девять раз больше площади четырехугольника *KNLM*.

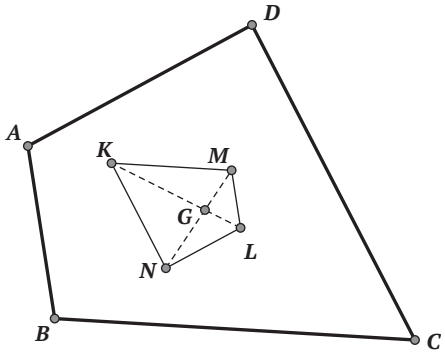


Рисунок 18

Пример 19. Точка минимального расстояния четырехугольника

Диагонали четырехугольника пересекаются в точке, где сумма расстояний до каждой из четырех вершин наименьшая по сравнению с любой другой точкой внутри четырехугольника. На рис. 19 точка *Q* – это точка пересечения диагоналей, а точка *P* – это случайно выбранная точка в четырехугольнике *ABCD*. Мы можем показать, что $PA + PB + PC + PD > QA + QB + QC + QD$, что доказывает, что точка *Q* является точкой минимального расстояния в четырехугольнике *ABCD*.

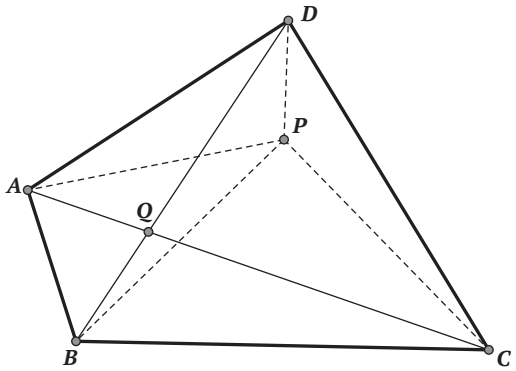


Рисунок 19

Пример 20. Пример с ромбом

Равнобедренные треугольники могут появляться в самые неожиданные моменты. Один из таких примеров показан на рис. 20, где мы строим прямую, проходящую через точку *D*, параллельную диагонали *AC* ромба *ABCD*. Из любой точки *E* вдоль этой прямой проводится другая прямая, параллельная стороне *AD*, которая пересекает сторону *CD*, продолженную в точке *G*, и диагональ *AC*, продолженную в точке *F*. Любопытно, что эта конструкция приводит к двум неожиданным равнобедренным треугольникам, а именно ΔGFC и ΔGED.

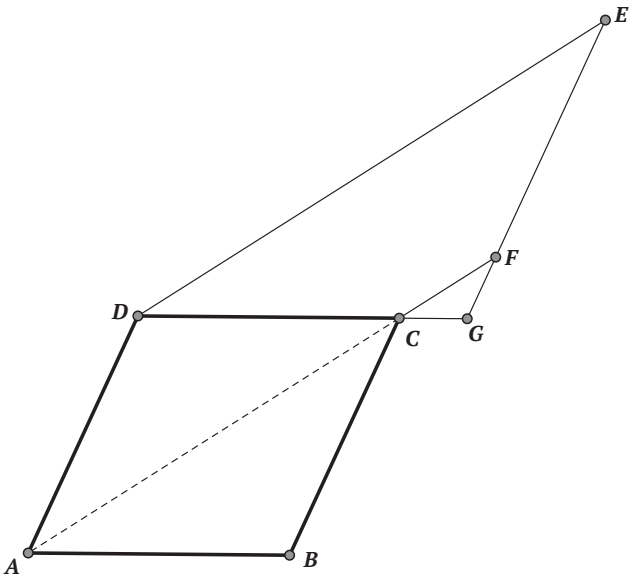


Рисунок 20

Пример 21. Нетривиальное сравнение параллелограммов

В несколько необычной конфигурации мы можем показать, что два параллелограмма, имеющие общую вершину и расположенные на одной стороне друг от друга, имеют одинаковую площадь. Мы видим это на рис. 21, где два параллелограмма *ABCD* и *EAFG* имеют вершину в точке *A* и где вершина *E* лежит на стороне *CD*, а вершина *B* лежит на стороне *FG*. Эти два параллелограмма *ABCD* и *EAFG* имеют равные площади.

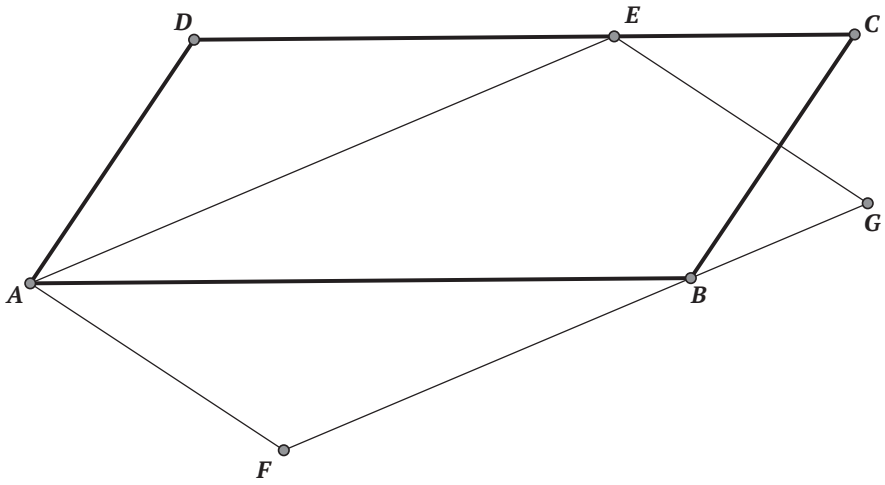


Рисунок 21

Пример 22. Пропорциональность параллелограммов

Сравнение площадей двух параллелограммов, имеющих общий угол вершины в точке A и параллельные стороны, может оказаться неожиданным. Мы обнаруживаем, что параллелограммы $ABCD$ и $AEFG$ на рис. 22 имеют неожиданную взаимосвязь, а именно $\frac{\text{площадь}[ABCD]}{\text{площадь}[AEFG]} = \frac{PC}{PF}$.

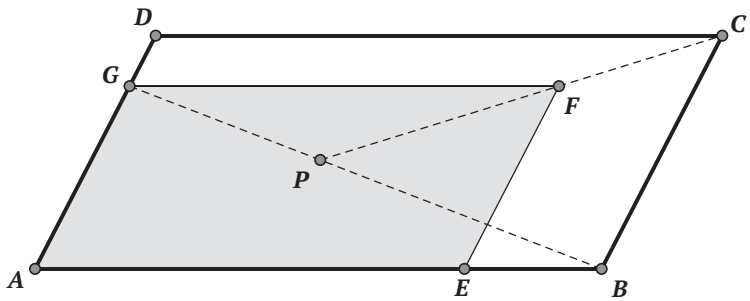


Рисунок 22

Пример 23. Неожиданная параллельность в сопряженных параллелограммах

Конфигурация, показанная на рис. 22, приводит к неожиданной параллельности, которую мы можем увидеть на рис. 23. Когда мы добавляем *DE* к диаграмме, оказывается, что она параллельно выполняется с *BG* и *CF* в точке *P*. Многие из необычных соотношений, продемонстрированных здесь, могут быть расширены для получения дальнейших удивительных свойств.

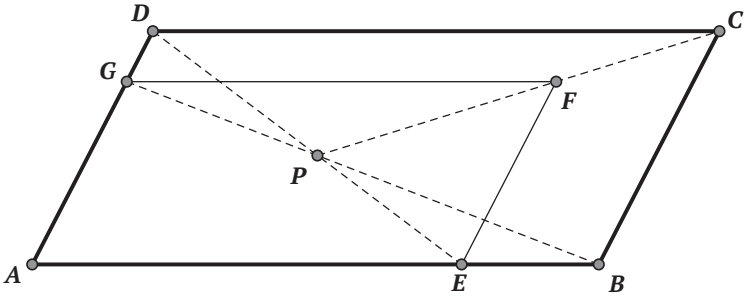


Рисунок 23

Пример 24. Разделение параллелограмма пополам

Некоторые особые четырехугольники обладают необычными и удивительными свойствами.

Например, если мы выберем любую точку *P* внутри параллелограмма, как показано на рис. 24, и соединим точку *P* с каждой из четырех вершин параллелограмма, то получим два треугольника (заштрихованные области), сумма площадей которых равна половине площади исходного параллелограмма:

площадь треугольника [*CPD*] + площадь треугольника [*ABP*] =
½ площади четырехугольника [*ABCD*].

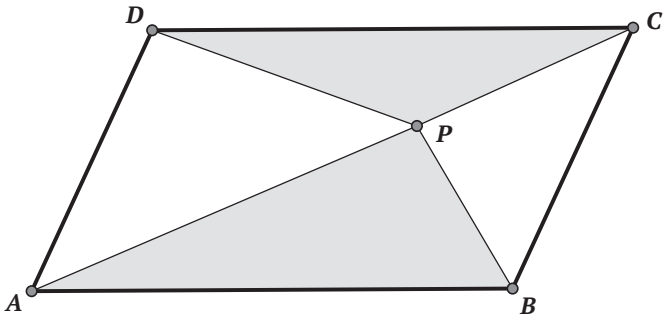


Рисунок 24

Пример 25. Разделение трапеции пополам

Результат, аналогичный показанному в примере 24, получается, если мы выберем любую точку *P* вдоль средней линии трапеции (которая является отрезком, соединяющим середины двух непараллельных сторон), как показано на рис. 25, и соединим точку *P* с каждой из четырех вершин трапеции. Мы снова создаем два треугольника (заштрихованные области), площадь которых равна половине площади исходной трапеции.

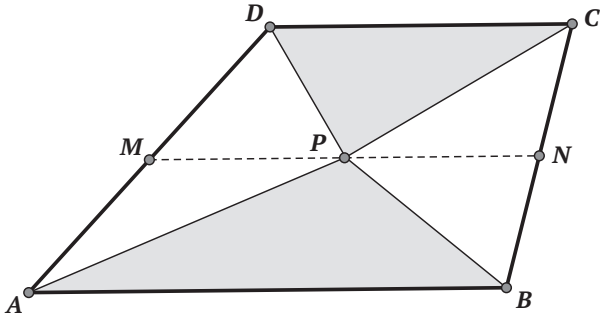


Рисунок 25

Пример 26. Разделение параллелограмма на три части

Мы знаем, что диагональ параллелограмма делит его на два треугольника равной площади, но как можно разделить параллелограмм на три части? Вот один из способов это сделать. Рассмотрим параллелограмм *ABCD* с диагоналями *AC* и *BD*, пересекающимися в точке *O*, как показано на рис. 26. Точка *P* расположена на отрезке *DO* так, что $PO = \frac{1}{2} PD$. Если затем провести линии *AP* и *CP*, то площадь четырехугольника *ABCP* будет вдвое больше площади четырехугольника *APCD*, то есть

площадь четырехугольника [*APCD*] = ⅓ площади четырехугольника [*ABCD*].

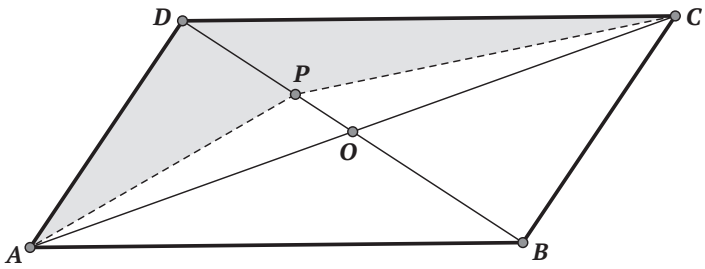


Рисунок 26

Пример 27. Трисекционное деление диагонали параллелограмма

Необычный способ трисекции (разбиения на три части) заданного отрезка с помощью параллелограмма показан на рис. 27. Начнем с параллелограмма *ABCD* и найдем середины двух его смежных сторон. Здесь точка *M* – середина стороны *BC*, а точка *N* – середина стороны *CD*. Для трисекции диагонали стороны *BD* параллелограмма мы просто проводим отрезки *AM* и *AN*. Их соответствующие точки пересечения *E* и *F* с диагональю *BD* являются точками трисекции *BD*, так что *BE* = *EF* = *FD*.

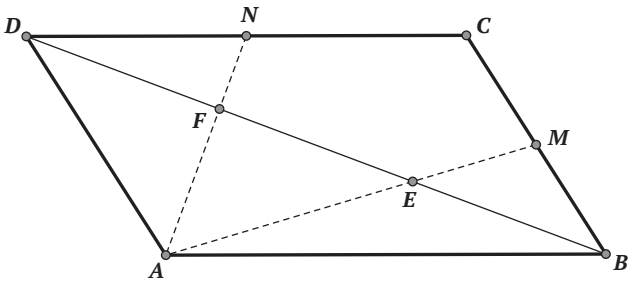


Рисунок 27

Пример 28. Еще одно остроумное деление диагонали параллелограмма на три части

Очень похожий на пример 27 результат показан на рис. 28, где точки *E* и *F* являются серединами противоположных сторон, *CD* и *AB* соответственно, параллелограмма *ABCD*. Две прямые *AE* и *CF* пересекают диагональ *DB* в точках *G* и *H* соответственно, которые являются точками деления диагонали *DB* на три части, так что *DG* = *GH* = *HB*.

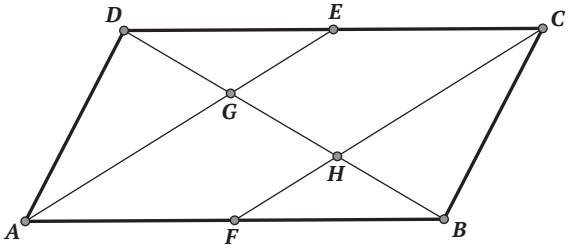


Рисунок 28

Пример 29. Еще одна точка трисекционного деления на диагонали параллелограмма

Иногда даже очень простые конфигурации дают удивительные результаты. Рассмотрим параллелограмм *ABCD*, показанный на рис. 29, где *CB* продолжен до точки *E* так, что *BC* = *BE*. Прямая *DE* пересекает диагональ *AC* в точке *G*. Любопытно, что точка *G* является точкой трисекционного деления отрезка *DE*, так что $DG = \frac{1}{3} DE$. Кроме того, точка *G* также является точкой трисекционного деления диагонали *AC*, где $AG = \frac{1}{3} AC$. Как видите, точки трисекционного деления могут возникать довольно неожиданно.

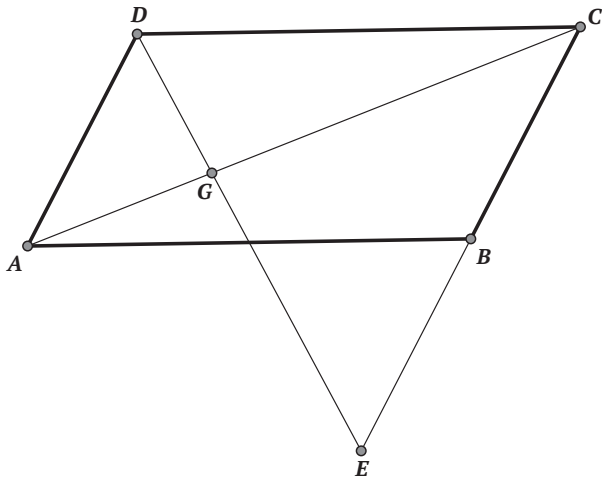


Рисунок 29

Пример 30. Связь длин сторон параллелограмма с длинами его диагоналей

Рассматривая длины сторон параллелограмма, мы можем обнаружить удивительную взаимосвязь между длинами сторон и длинами диагоналей. Обращаясь к параллелограмму *ABCD*, показанному на рис. 30, мы видим, что сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей, то есть $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$.

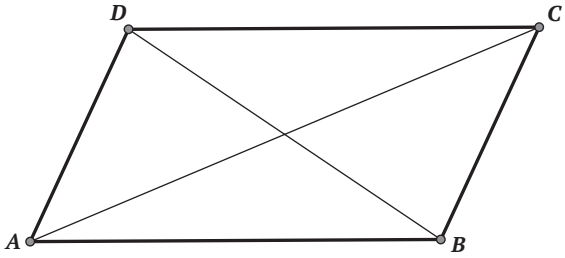


Рисунок 30

Пример 31. Неожиданная перпендикулярность в параллелограмме

Параллелограммы, кажется, таят в себе бесконечные сюрпризы. На рис. 31 точка M является серединой стороны BC параллелограмма $ABCD$. Точка E находится на отрезке DM так, что $AB = EB$. Неожиданно, но мы обнаруживаем, что AE перпендикулярен DM.

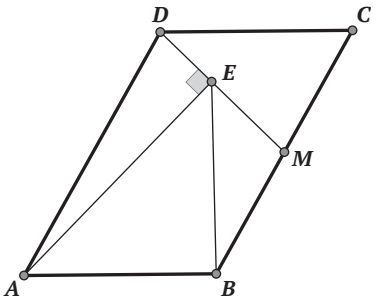


Рисунок 31

Пример 32. Удивительные сюрпризы, скрытые в параллелограмме

Геометрия удивляет нас многими способами, и еще один такой пример можно увидеть на примере параллелограмма $ABCD$, показанного на рис. 32. Здесь отрезок AE перпендикулярен диагонали параллелограмма BD, а продолжение AE пересекает в точке P прямую, проходящую через точку C и параллельную диагонали BD. Также отрезок PB пересекает сторону CD в точке M, а отрезок AP пересекает CD в точке N. Эта конфигурация приводит к двум неожиданным соотношениям: точка M оказывается серединой CN, так что $NM = MC$, а также верно соотношение $BD = CP + 2DE$.

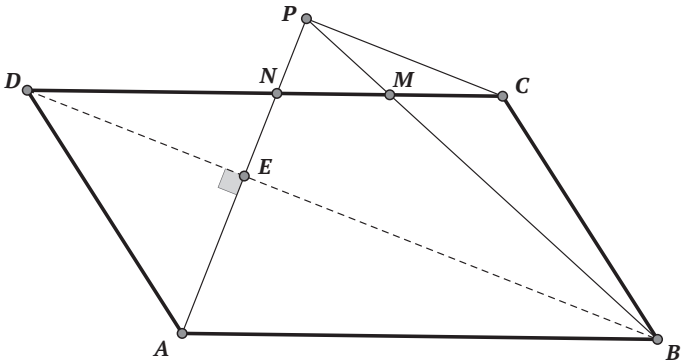


Рисунок 32

Пример 33. Треугольники, образующие параллелограммы без построения параллельных прямых

Параллелограмм также можно построить из случайно выбранного треугольника без преднамеренного построения параллельных линий. Рассмотрим треугольник *ABC*, показанный на рис. 33, где точка *D* – любая точка на стороне *BC*.

Рассматривая середины отрезков *DC*, *CA*, *AB* и *BD* соответственно, мы обнаруживаем, что четырехугольник *PQRS* всегда будет параллелограммом. Что делает это особенно примечательным, так это то, что точка *D* была выбрана случайным образом как любая точка на стороне *BC*.

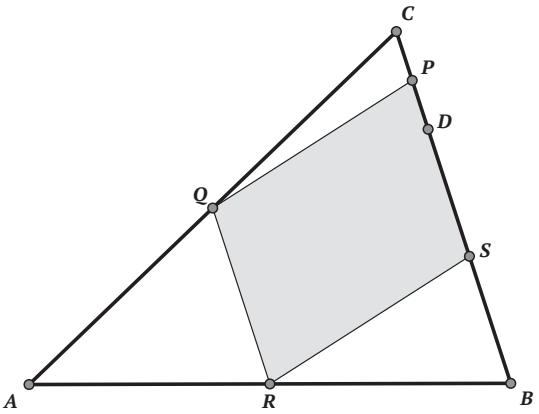


Рисунок 33

Пример 34. Создание параллелограмма с площадью, составляющей одну девятую от площади исходного параллелограмма

Нередко необходимо построить геометрические фигуры, которые вдвое меньше заданных фигур. Однако сейчас мы начнем путь к построению параллелограмма, площадь которого в девять раз меньше площади исходного параллелограмма.

Мы начинаем с параллелограмма *ABCD* с диагоналями *AC* и *BD*, показанного на рис. 34. Затем мы находим середины сторон *AB* и *DC* соответственно и проводим отрезки *AF*, *BF*, *CE* и *DE*. Каждый из этих отрезков пересекает диагональ, обозначенную точками *G*, *H*, *I* и *J*. Эти четыре точки образуют четырехугольник *GHIJ*. Удивительно, но мы обнаруживаем, что площадь[GHIJ] = ⅑ площади [ABCD].

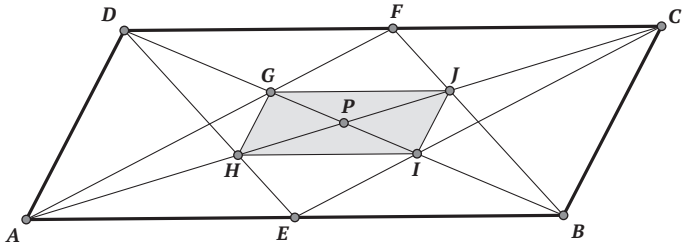


Рисунок 34

Пример 35. Как деление углов параллелограмма пополам и на три части создает другой параллелограмм

Еще один сюрприз раскрывается в параллелограмме *ABCD*, показанном на рис. 35. Здесь одна пара противоположных углов делится на три части, а другая пара противоположных углов делится пополам. Более конкретно: отрезки *DK* и *DG* делят угол *ADF* на три части, а отрезки *BJ* и *BH* делят угол *CBA* на три равных угла. Кроме того, отрезок *AF* делит угол *BAD* на две равные части, а отрезок *CE* делит угол *DCB* на две равные части. Соединение точек пересечения, как показано на рис. 35, приводит к построению четырехугольника *GHJK*, который также является параллелограммом, поскольку его стороны *KJ* и *GH* параллельны сторонам *AB* и *CD* параллелограмма *ABCD*.

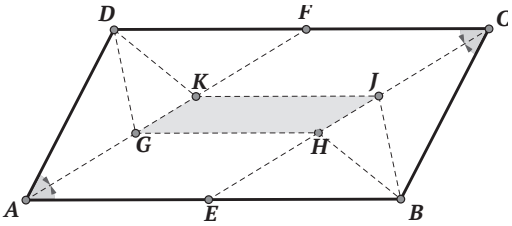


Рисунок 35

Пример 36. Использование параллелограмма для построения квадрата

Параллелограммы могут еще больше очаровать нас, помогая в построении квадрата, хотя и несколько запутанным способом. На рис. 36 мы снова начинаем с параллелограмма *ABCD*. Мы строим внешний равнобедренный прямоугольный треугольник с каждой стороны параллелограмма, причем гипотенуза каждого треугольника является стороной параллелограмма. Соединение вершин четырех прямых углов образует квадрат *EFGH*.

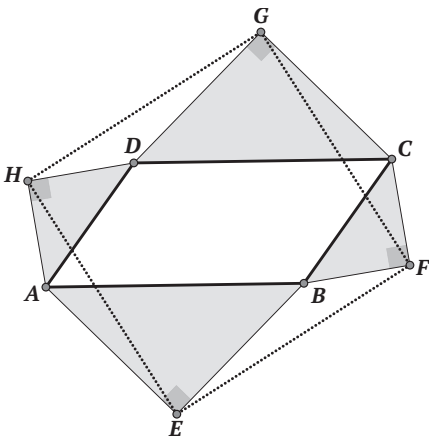


Рисунок 36

Пример 37. Параллелограмм образует равносторонний треугольник

Подобным образом, как и в случае с примером 36, мы также можем построить равносторонний треугольник, используя параллелограмм. Рассмотрим параллелограмм *ABCD*, показанный на рис. 37, где мы построили внешние равносторонние треугольники *AEB* и *DFA* на двух смежных сторонах параллелограмма. Удивительно, но получившийся треугольник *CFE* также является равносторонним.

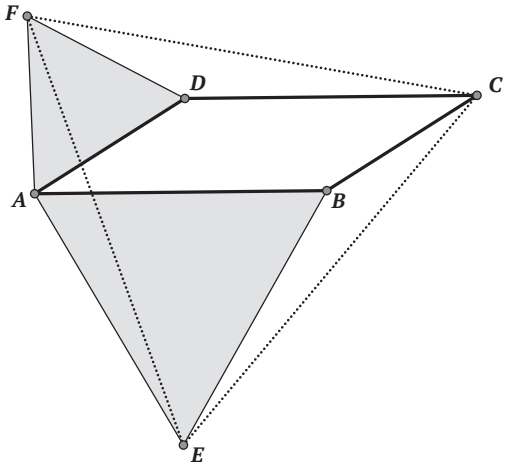


Рисунок 37

Пример 38. Раскрытие секретных произведений вдоль сторон параллелограмма

Существует малоизвестное постоянное произведение длин, включающее стороны (и продолженные стороны) параллелограмма. Мы можем увидеть это на рис. 38, где рассматриваем две случайно проведенные линии из вершины *D* параллелограмма *ABCD*. Одна из этих линий (*DEF*) пересекает стороны *AB* и *BC*, продолженные в точках *E* и *F* соответственно, а другая линия (*DGH*) пересекает *AB* и *BC*, продолженные в точках *G* и *H* соответственно. Неожиданно, но мы обнаруживаем, что $AE \cdot CF = AG \cdot CH$.

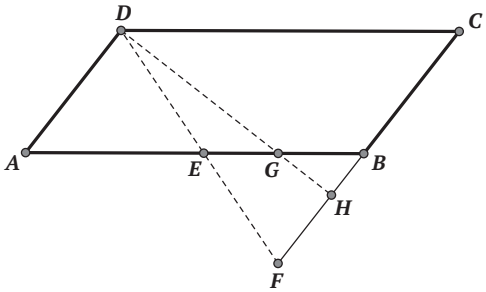


Рисунок 38

Пример 39. Необычные равные площади, создаваемые в параллелограмме

Четырехугольники иногда дают равные площади довольно сложными способами, которые тем не менее интересны для рассмотрения. Например, на рис. 39 мы имеем параллелограмм *ABCD*, диагонали которого пересекаются в точке *E*. Точка *P* – любая точка, выбранная внутри треугольника *BCE*. Неожиданно получается следующее соотношение площадей:

площадь [*PDA*] = площадь [*PBC*] + площадь [*PCA*] + площадь [*PDB*].

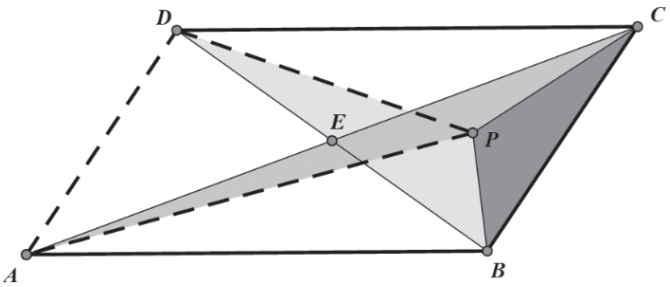


Рисунок 39

Пример 40. Равные площади треугольников, полученные простым способом с помощью параллелограмма

Параллелограммы также хорошо подходят для сравнения площадей, как мы видим на примере параллелограмма *ABCD*, показанного на рис. 40. Здесь из точки *D* проведена случайно выбранная линия, которая пересекает сторону *BC* в точке *E* и сторону *AB*, продолженную в точке *F*. Вопреки интуиции мы обнаруживаем, что

площадь [*EAB*] = площади [*EFC*].

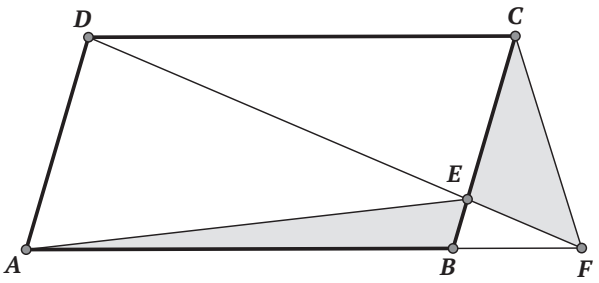


Рисунок 40

Пример 41. Еще больше равных площадей треугольников, скрытых в параллелограмме

Еще одна удивительная пара треугольников с равной площадью возникает внутри параллелограмма, показанного на рис. 41. Здесь P – середина диагонали BD, и проведена прямая MPN, которая пересекает сторону AB в точке M и сторону DC в точке N. Прямая EF, проходящая через точку P и параллельная стороне AB, пересекает DM в точке R. В результате площади треугольников $[RMB]$ и $[RND]$ равны.

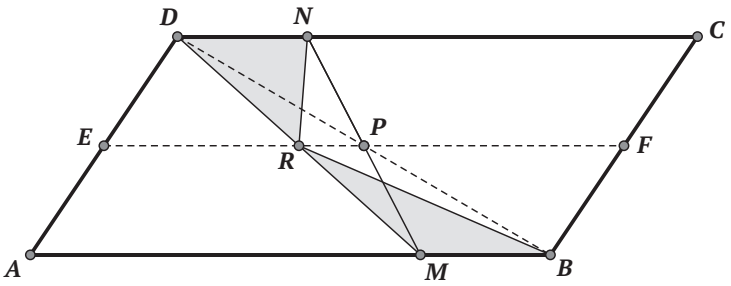


Рисунок 41

Пример 42. Еще один пример равных площадей в параллелограмме

Создание равных площадей треугольников внутри параллелограмма всегда является интересной задачей. Мы предлагаем еще один пример на рис. 42, где выбираем любую точку F на стороне AB параллелограмма $ABCD$ и продолжаем отрезок DF до точки пересечения с продолжением стороны BC в точке E. Затем мы обнаруживаем, что треугольник FAE и треугольник BCF имеют равные площади.

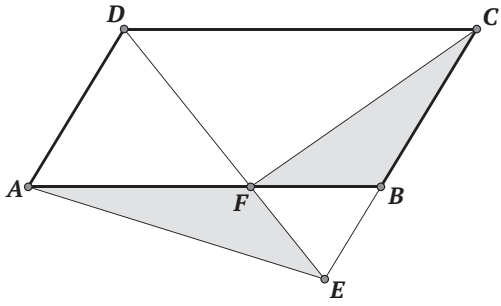


Рисунок 42

Пример 43. Неожиданная перпендикулярность, возникающая из параллелограмма

На рис. 43 параллелограмм *ABCD* имеет соотношение сторон $AB = 2AD$, а сторона *BC* продолжена в обоих направлениях так, что $EB = BC = CF$. Удивительно, но мы обнаруживаем, что отрезки *AF* и *DE* перпендикулярны.

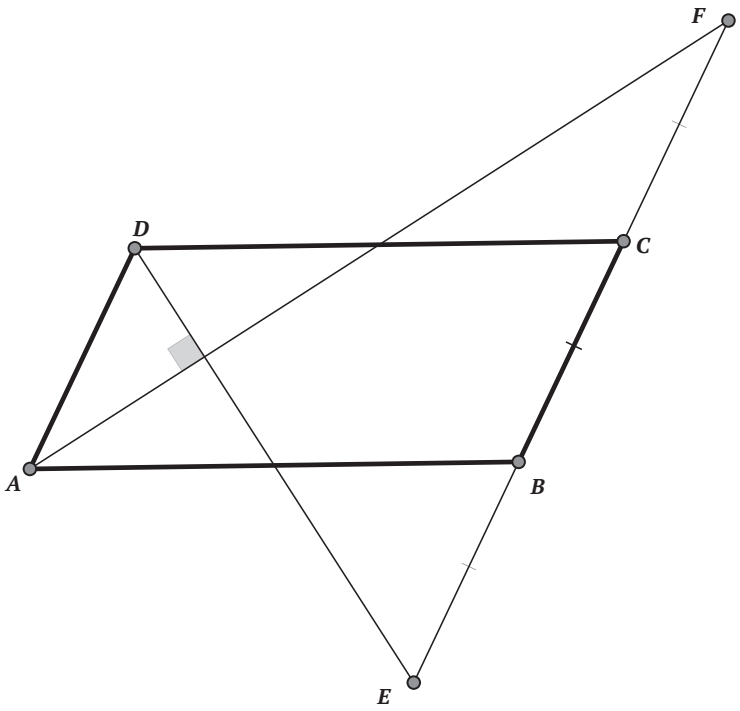


Рисунок 43

Пример 44. Параллелограмм Вариньона и его особые свойства

В дополнение к центроиду (см. пример 17) мы также определяем центр четырехугольника, который является точкой пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника. Это можно увидеть на рис. 44, где *EG* и *FH* – два отрезка, соединяющих середины противоположных сторон, и точка их пересечения, *P*, является центром. И оказывается, что центр *P* – это середина каждого из этих отрезков *EG* и *FH*. Еще более удивительно то, что четырехугольник *EFGH*, образованный последовательным соединением середин сторон, является параллелограммом независимо от формы исходного четырехугольника. Этот параллелограмм часто называют параллелограммом Вариньона, в честь французского математика Пьера Вариньона (1654–1722). Его площадь равна половине площади исходного четырехугольника *ABCD*, а его периметр равен сумме диагоналей исходного четырехугольника. Символически это записывается так: $EF + FG + GH + HE = AC + BD$.

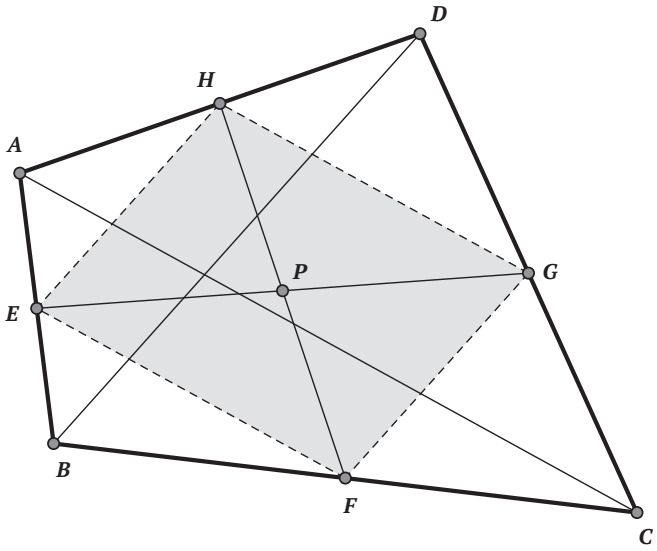


Рисунок 44

Пример 45. Поистине впечатляющий параллелограмм

Параллелограммы порождают, казалось бы, безграничное количество геометрических сюрпризов. На рис. 45 мы начинаем с параллелограмма *ABCD* и строим четыре дополнительных параллелограмма *PBEA*, *PBFC*, *PCGD* и *PDHA*, используя внешнюю точку *P* в качестве общей вершины и сторону параллелограмма *ABCD* в качестве диагонали каждого нового параллелограмма. Это определяет вершины нового четырехугольника *EFGH*, который неожиданно также оказывается параллелограммом. Как будто этого недостаточно, параллелограмм *EFGH* имеет вдвое большую площадь, чем исходный параллелограмм *ABCD*. Это поистине неожиданный результат!

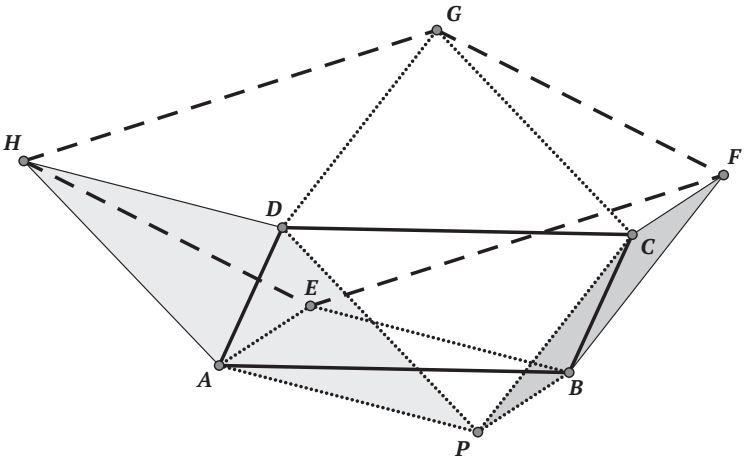


Рисунок 45

Пример 46. Подробнее о центре четырехугольника

Центральная точка играет еще одну неожиданную роль. Как мы видим на рис. 46, когда мы определяем середины *X* и *Y* диагоналей *AC* и *BD* соответственно исходного четырехугольника *ABCD*, центральная точка *P* делит отрезок *XY* пополам. Мы также отмечаем, что четырехугольник *FXHY* является параллелограммом.

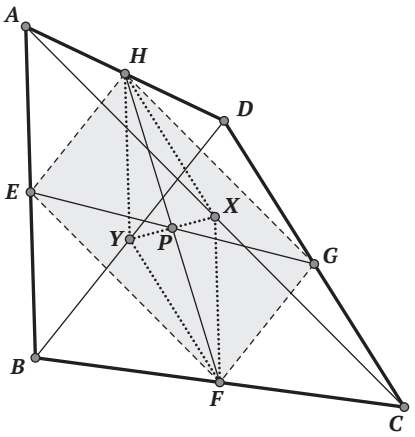


Рисунок 46

Пример 47. Еще больше сюрпризов в параллелограмме

Мы можем немного развить обнаруженные свойства параллелограмма из примера 46. Соединив середины *E*, *F*, *G* и *H* противоположных сторон исходного четырехугольника *ABCD*, чтобы определить центральную точку *P*, мы с приятным удивлением обнаруживаем, что диагонали *FH* и *XY* параллелограмма *FXHY* пересекаются в точке *P*, как видим на рис. 47. Мы также можем оценить тот факт, что прямая *FH* тоже делится пополам в точке *P*. В этой конфигурации есть еще одно чудо, которое заслуживает внимания, поскольку мы замечаем, что $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = EG^2 + FH^2 + XY^2$.

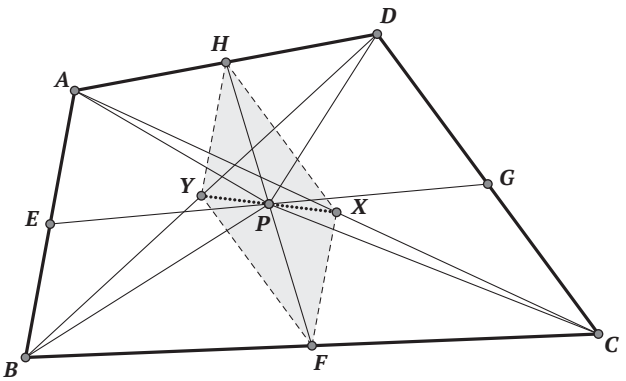


Рисунок 47

Пример 48. Особые четырехугольники дают параллелограмм Вариньона

Какими свойствами должен обладать четырехугольник, чтобы иметь прямоугольник в качестве параллелограмма Вариньона? На рис. 48 мы видим, что противоположные стороны параллелограмма Вариньона *EFGH* параллельны диагоналям исходного четырехугольника *ABCD*. Таким образом, когда диагонали *AC* и *BD* исходного четырехугольника *ABCD* перпендикулярны, смежные стороны четырехугольника *EFGH* также будут перпендикулярны и, следовательно, образуют прямоугольник.

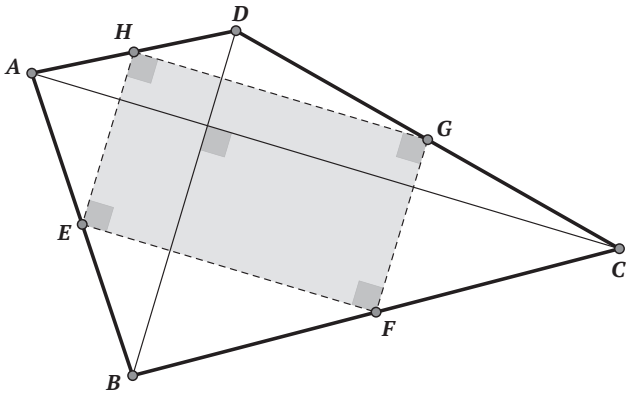


Рисунок 48

Пример 49. Некоторые особенные четырехугольники дают квадрат Вариньона

Если следовать логике предыдущего примера, то если диагонали *AC* и *BD* четырехугольника *ABCD* перпендикулярны и имеют одинаковую длину, то получившийся прямоугольник будет квадратом, как показано на рис. 49.

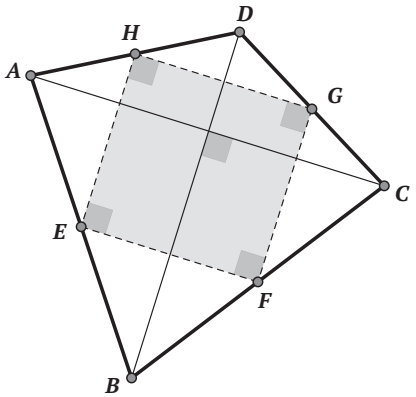


Рисунок 49

Пример 50. Другие особые четырехугольники могут сформировать ромб Вариньона

Если вернуться на шаг назад, то если диагонали *AC* и *BD* четырехугольника *ABCD* имеют одинаковую длину, но не перпендикулярны, то последовательное соединение середин сторон исходного четырехугольника приведет к ромбу, как показано на рис. 50.

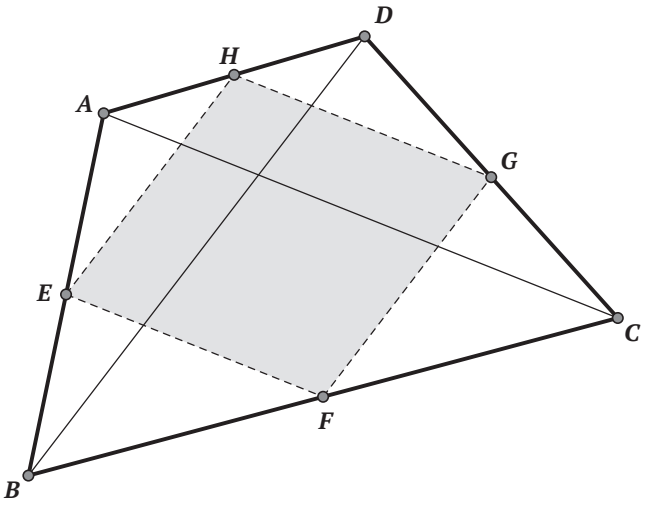


Рисунок 50

Пример 51. Параллелограмм Виттенбауэра

Следующая конфигурация обладает довольно удивительным свойством. Если мы поделим каждую сторону четырехугольника *ABCD* на три части точками *O*, *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *U* и *V*, как показано на рис. 51, то, проведя линии через эти точки деления, как показано на рисунке, мы, к нашему удивлению, получаем параллелограмм *WXYZ*, который часто называют параллелограммом Виттенбауэра, поскольку он был открыт австрийским математиком Фердинандом Виттенбауэром (1857–1922). Само открытие параллелограмма в несколько случайно нарисованном четырехугольнике уже удивительно, но эта конфигурация преподносит еще больше сюрпризов.

Пересечение диагоналей вновь образованного параллелограмма совпадает с центроидом исходного четырехугольника *ABCD* (как определено в примере 17). Напомним, что точки *K*, *L*, *M* и *N* являются центроидами треугольников *ABD*, *CDB*, *ACD* и *ABC* соответственно. Мы замечаем, что стороны параллелограмма *WXYZ* параллельны соответственно прямым *KL* и *MN*. Еще более удивительным результатом является то, что площадь этого вновь образованного параллелограмма равна $^{8}/_{9}$ площади исходного четырехугольника *ABCD*.

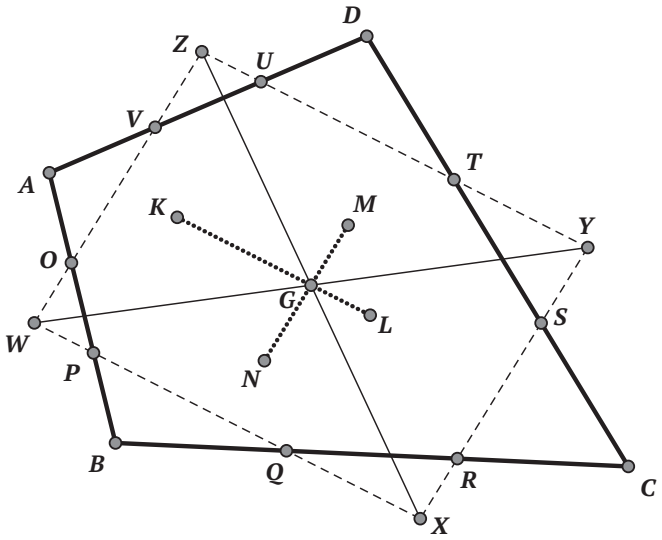


Рисунок 51

Пример 52. Удивительное равенство в прямоугольнике

Прямоугольники также предоставляют нам некоторые удивительные взаимосвязи. Например, рассмотрим прямоугольник *ABCD*, в котором точка *P* выбрана в любой точке вдоль *CD*, как показано на рис. 52. Из точки *P* проведены перпендикуляры к каждой из двух диагоналей, пересекающие диагональ *AC* в точке *K* и диагональ *BD* в точке *M*. Третий перпендикуляр проведен из вершины *D* к диагонали *AC*, пересекающей *AC* в точке *N*. Независимо от того, где расположена точка *P* на *CD*, сумма длин отрезков *PK* + *PM* всегда будет равна длине отрезка *DN*.

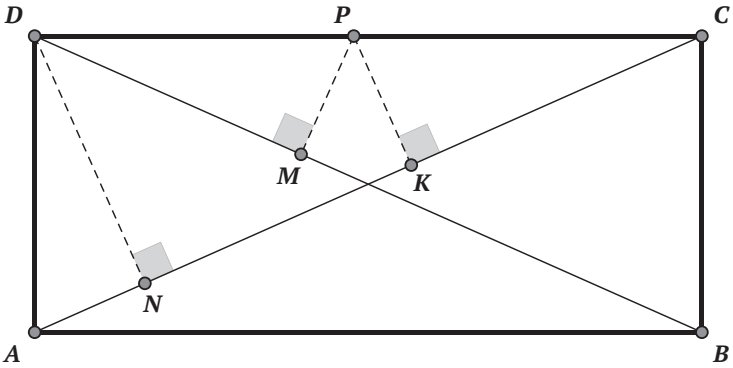


Рисунок 52

Пример 53. Неожиданная константа, связанная с точками на прямоугольнике

Продолжая схему, представленную в примере 52, мы обнаруживаем неявное свойство, заложенное во всех прямоугольниках. Сумма расстояний от любой точки на сторонах прямоугольника до двух диагоналей одинакова. На рис. 53 точки *P*, *R* и *Q* выбраны случайным образом точками на сторонах прямоугольника *ABCD*. Сумма перпендикулярных расстояний от каждой из этих точек до двух диагоналей одинакова, что *PE* + *PF* = *QG* + *QH* = *RJ* + *RK*.

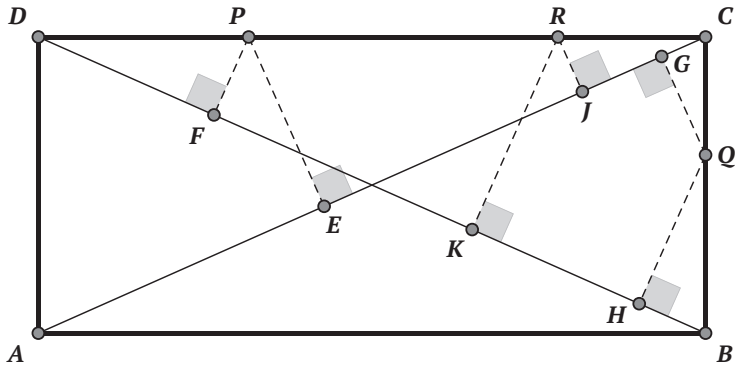


Рисунок 53

Пример 54. Неожиданная перпендикулярность в прямоугольнике

На рис. 54 представлен прямоугольник *ABCD*, длина которого вдвое больше его ширины, или *AD* = 2*AB*. На стороне *AD* выбрана точка *P* так, что *AD* = 4*AP*.

Тогда оказывается, что отрезок *PB* перпендикулярен отрезку *AC*.

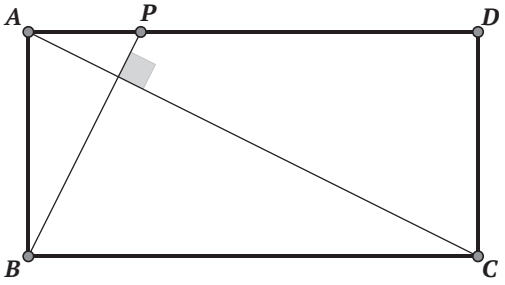


Рисунок 54

Пример 55. Особая точка в прямоугольнике, которая генерирует равные суммы площадей квадратов

Удивительно, что мы можем получить квадраты с равными суммами площадей, просто выбрав случайную точку внутри прямоугольника и соединив ее с четырьмя вершинами прямоугольника. Суммы площадей квадратов на линиях, ведущих к противоположным вершинам, тогда равны.

Это показано на рис. 55, где мы выбрали случайную точку *P* внутри прямоугольника *ABCD*. Из этой точки *P* мы проводим линии *PA*, *PB*, *PC* и *PD* к каждой из четырех вершин прямоугольника и затем строим квадрат на каждой из этих линий. Суммы площадей квадратов на линиях, проведенных к противоположным вершинам, тогда равны, то есть

площадь [*APEF*] + площадь [*CPIJ*] = площадь [*BPGH*] + площадь [*DKLP*].

Этот результат можно также наглядно представить в символической форме как $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$.

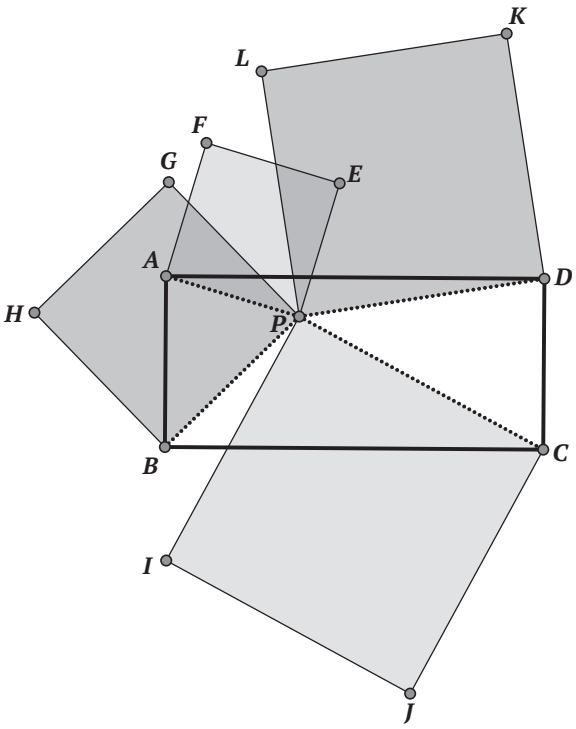


Рисунок 55

Пример 56. Приравнивание площадей квадрата и прямоугольника, прикрепленных к большему квадрату

Начнем с квадрата *ABCD*, показанного на рис. 56. Точка *E* – середина отрезка *AD*, а точка *F* расположена на прямой *EB* так, что *EF* = *EA*. Точка *G* выбрана на стороне *AB* так, что *BF* = *BG*, а сторона *DA* продолжена до точки *K*, так что *AK* = *AG*. И неожиданно мы обнаруживаем, что площадь прямоугольника *AKLB* равна площади квадрата *GBJH*.

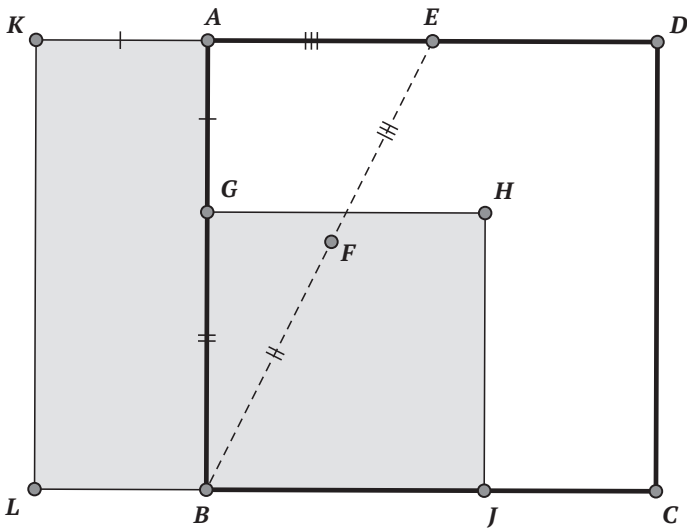


Рисунок 56

Пример 57. Расположение квадратов и ромбов

Особое расположение квадратов и ромбов иногда может приводить к очень специфической величине угла. На рис. 57 у нас есть квадрат *ABCD* и ромб *BFED*, расположенные таким образом, что они имеют общую вершину *B*, а диагональ *BD* квадрата *ABCD* является стороной ромба *BFED*. Кроме того, вершины *E* и *F* ромба коллинеарны с вершиной *C* квадрата. Здесь возникают два любопытных факта, которые весьма неожиданны: площадь ромба *BFED* равна площади квадрата *ABCD*, а $\angle FBD = 30°$.

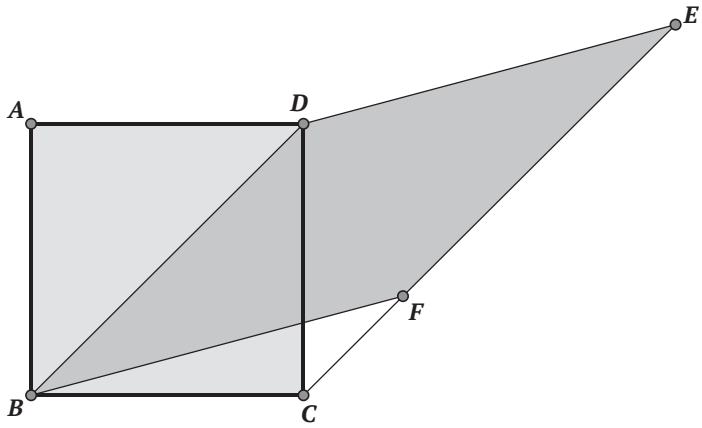


Рисунок 57

Пример 58. При соединении квадратов формируется еще один квадрат

На рис. 58 мы видим два квадрата *ABCD* и *DEFG*, которые не обязательно равны по размеру, но имеют одну общую черту: они имеют общую вершину в точке *D*. Отрезки, соединяющие вершины *AG* и *CE*, имеют свои середины в точках *M* и *N* соответственно. Центрами двух квадратов являются точки *P* и *R*. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что четырехугольник *PNRM* оказывается еще одним квадратом.

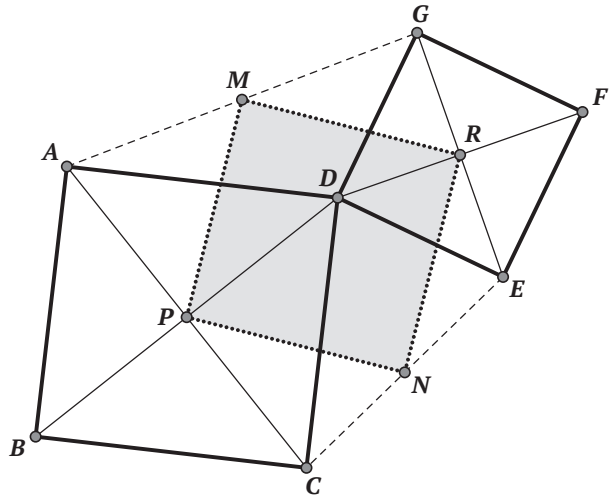


Рисунок 58

Пример 59. Необычное расположение фигур может привести к неожиданным точкам, лежащим на одной окружности

Мы начинаем эту необычную иллюстрацию с квадрата *ABCD*, показанного на рис. 59. Мы продолжаем его диагональ *AC* до точки *P*, так что *PC* = *BC*. Затем строим прямоугольник *ACEF* на диагонали *AC* так, что *EC* = *PC* = *BC*. Когда мы потом строим квадрат *BGHP* на отрезке *BP*, то обнаруживаем, что точки *F*, *E*, *P* и *G* лежат на одной окружности.

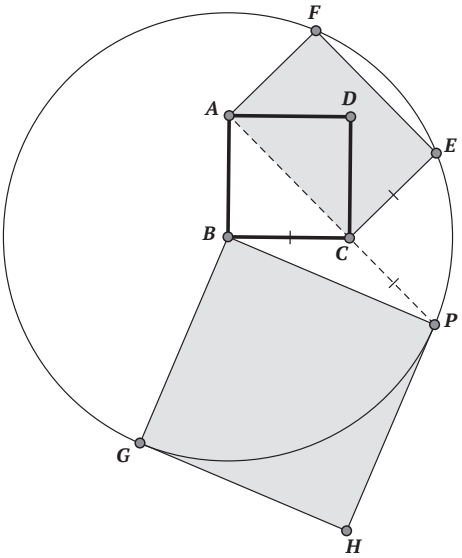


Рисунок 59

Пример 60. Неожиданные точки, лежащие на одной окружности

Наличие более трех точек, лежащих на одной окружности, всегда примечательно. Это наблюдается, когда мы рассматриваем прямоугольник *ABCD*, показанный на рис. 60, где *BC* = 3*AB*, а точки *M* и *N* являются точками трисекционного деления стороны *BC*. Точка *E* – точка пересечения диагонали *AC* и прямой *DM*. Точки *D*, *E*, *N* и *C* неожиданно лежат на одной окружности, что снова доставляет нам эстетическое удовольствие.

В качестве еще одного сюрприза мы обнаруживаем, что пересечение окружности со стороной *AD* в точке *F* неожиданно образует квадрат *FNDC*.

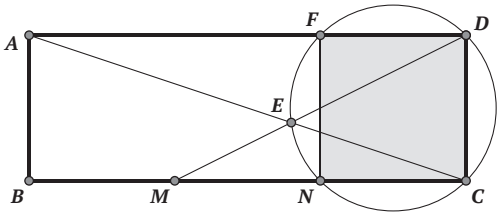


Рисунок 60

Пример 61. Квадрат на прямоугольном треугольнике

На рис. 61 изображен прямоугольный треугольник *ABC* с квадратом *ACEF*, построенным на гипотенузе *AC*. Поскольку диагонали квадрата пересекаются в точке *D*, мы обнаруживаем, что *DB* делит прямой угол *ABC* пополам.

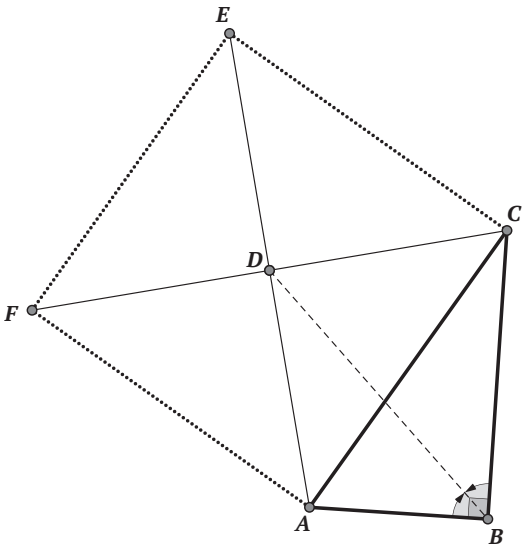


Рисунок 61

Пример 62. Перпендикулярность в квадрате и неожиданное равенство

На рис. 62 представлен квадрат *ABCD* с диагоналями *AC* и *BD* и отрезком *CP*, проведенным перпендикулярно биссектрисе *DF* угла *ADB*. Если отрезок *CP* пересекает диагональ *BD* в точке *R*, то получается неожиданное равенство *PD* = *RD*.

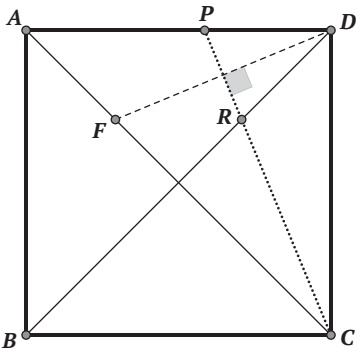


Рисунок 62

Пример 63. Удивительное совпадение в квадрате

Квадраты могут создавать совпадения, когда этого меньше всего ожидаешь. Такова ситуация на рис. 63, где прямые *EG* и *FH* параллельны сторонам *BC* и *AB* квадрата *ABCD* соответственно. Прямые *FH* и *EG* пересекаются в точке *R*. Мы с удивлением обнаруживаем, что прямые *BH*, *DE* и *CR* пересекаются в общей точке *P*.

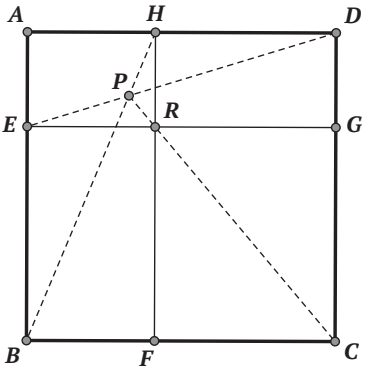


Рисунок 63

Пример 64. Удивительное равенство в квадрате

Рассмотрим квадрат *ABCD* на рис. 64, где середины отрезков *AB* и *BC* – это точки *E* и *F* соответственно. Когда мы проведем прямые *DF* и *CE*, которые пересекаются в точке *P*, мы, к нашему удивлению, получим *AP* = *AB*.

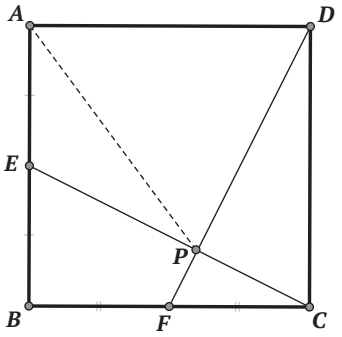


Рисунок 64

Пример 65. Удивительное равенство квадрата

Еще одно удивительное свойство квадрата показано на рис. 65, где квадрат *ABCD* в четыре раза больше квадрата *AEFG*. Точка *F* – это центр большого квадрата *ABCD*. Когда мы строим описанную окружность вокруг квадрата *AEFG* и проводим касательную из точки *C* к этой окружности в точке *T*, неожиданно длина касательной *CT* оказывается такой же длины, что и сторона квадрата *ABCD*, или *CT* = *AB*.

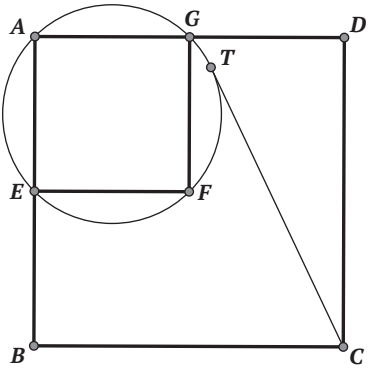


Рисунок 65

Пример 66. Удивительные соотношения площадей в особом разбиении квадрата

Крайне необычно видеть, как середина одной стороны квадрата может образовывать треугольники с похожими площадями внутри квадрата. На рис. 66 точка *E* – середина стороны *AD* квадрата *ABCD*. Линия *BE* пересекает диагональ *AC* в точке *F*. Сравнивая площади различных треугольников, вложенных в квадрат, мы получаем следующие соотношения:

площадь [*AFE*] = ½ площади [*CEF*], площадь [*AFE*] = ⅓ площади [*ABE*],
площадь [*AFE*] = ¼ площади [*BCF*].

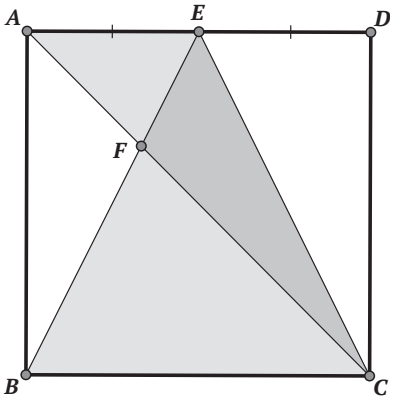


Рисунок 66

Пример 67. Равенство возникает, когда квадрат и прямоугольник имеют общую диагональ

На рис. 67 квадрат *ABCD* и прямоугольник *BFDE* имеют общую диагональ *BD*. Расположив точки *E* и *A* по одну сторону от *BD*, мы находим точку *G* на *BE* так, что *AG* перпендикулярна *AE*. Неожиданно мы обнаруживаем, что *ED* = *BG*.

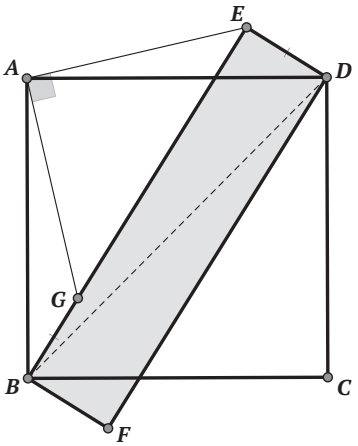


Рисунок 67

Пример 68. Удивительное равенство площадей внутри квадрата

Интересное равенство площадей в квадрате *ABCD* показано на рис. 68, где точка *P* выбрана на диагонали *AC* так, что длина *AP* составляет одну четверть длины *AC*. Когда мы строим квадрат *AEFP* с отрезком *AP* в качестве одной стороны, мы неожиданно обнаруживаем, что точка *F* является серединой *AB*. Кроме того, площадь квадрата *AEFP* составляет половину площади четырехугольника *ABPD*.

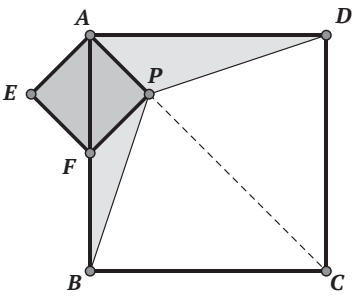


Рисунок 68

Пример 69. Удивительные треугольники равной площади, полученные из квадрата

Еще одно неожиданное равенство площадей, полученное из квадрата, показано на рис. 69, где у нас есть квадрат *ABCD* и окружность с центром *A*, содержащая точки *B* и *D*. Окружность пересекает диагональ *AC* в точке *F*. Точка *E* находится на окружности, так что *BF* = *FD* = *DE*. Это создает равенство площадей треугольников, а именно

площадь треугольника [*ABE*] = площади треугольника [*AFD*].

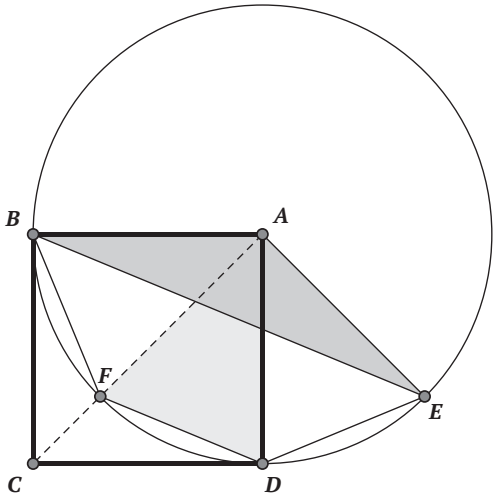


Рисунок 69

Пример 70. Еще один случай равных площадей, полученных из исходного квадрата

Квадрат *ABCD*, показанный на рис. 70, имеет диагональ *AC*, продолженную до точки *P* так, что выполняется *BC* = *PC*. Построен прямоугольник *APML* со стороной *AC* = *AL*. Затем построен квадрат *BGHP* со стороной *BP*. В этой необычной конфигурации площадь прямоугольника *APML* равна площади квадрата *BGHP*.

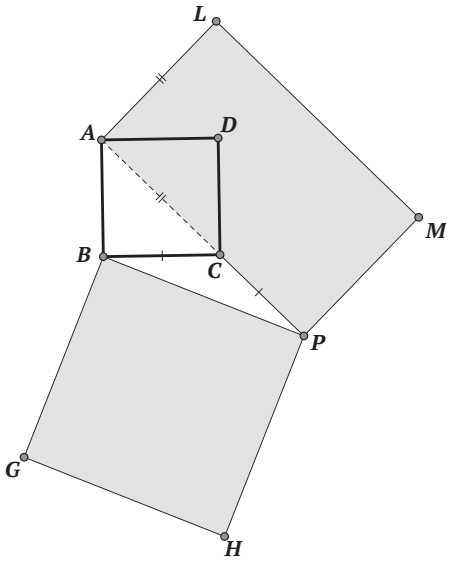


Рисунок 70

Пример 71. Два квадрата приводят к неожиданному равенству

На рис. 71 показано неожиданное деление пополам, где мы начинаем с двух квадратов, *ABCD* и *AEFG*, стороны которых лежат на прямых *AEB* и *AGD*, а также имеют общую вершину *A*. Когда из точки *A* проводится перпендикуляр к отрезку *DE* и продолжается до пересечения с отрезком *BG* в точке *M*, мы неожиданно обнаруживаем, что *M* является серединой отрезка *BG*.

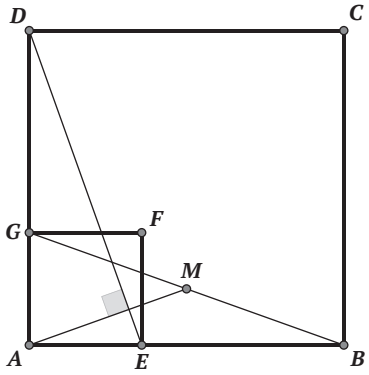


Рисунок 71

Пример 72. Удивительное свойство биссектрис углов полного четырехугольника

Продолжив стороны четырехугольника *ABCD* так, чтобы они пересекались в точках *E* и *F*, как показано на рис. 72, мы получаем полный четырехугольник. Биссектрисы углов ∠*BEC* и ∠*AFB* пересекаются в точке *P*. Угол *FPE* тогда имеет довольно неожиданное свойство, а именно ∠*FPE* = ½ (∠*CBA*+∠*ADC*).

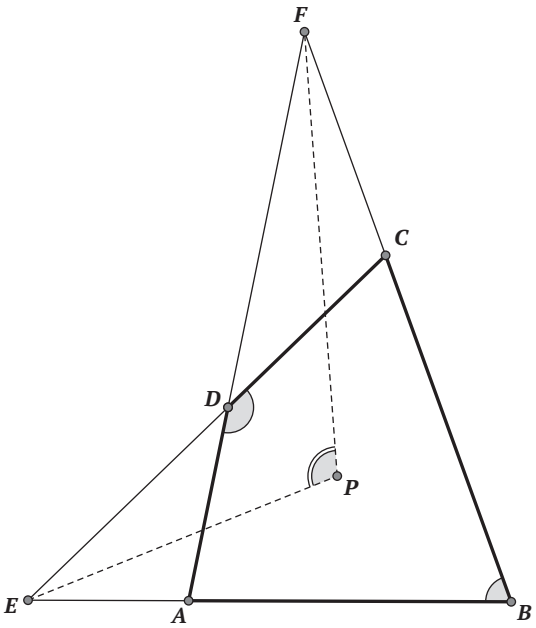


Рисунок 72

Пример 73. Перпендикуляры из вершин четырехугольника к случайно проведенной прямой

При проведении прямой, пересекающей пару противоположных сторон четырехугольника *ABCD*, как показано на рис. 73а, проявляется весьма неожиданное свойство. Отрезок *MN* пересекает стороны *AB* и *CD* четырехугольника *ABCD* в точках *M* и *N* соответственно. Отрезки *RT* и *QS*, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, пересекаются в точке *P*. Перпендикуляр из точки *P* пересекается с отрезком *MN* в точке *X*. Расстояния от вершин четырехугольника до отрезка *MN* неожиданно связаны с расстоянием между точкой пересечения *P* и прямой *MN*, а именно верно соотношение:

$$(AE + DH) - (BF + CG) = 4PX.$$

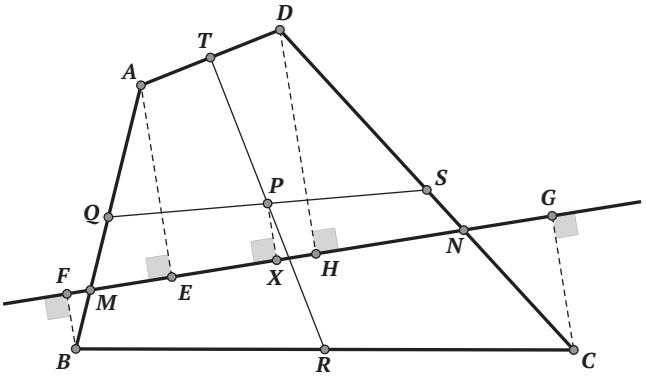


Рисунок 73a

Интересная конфигурация возникает, когда линия *MN* проведена, как показано на рис. 73b, и не пересекает четырехугольник. Тогда расстояния от четырех вершин четырехугольника *ABCD* до линии *MN* дают еще одно неожиданное соотношение: их сумма равна четырехкратному расстоянию от точки *P*, точки пересечения средних линий четырехугольника, до линии *MN*. Это дает соотношение отрезков $4PX = AE + BF + CG + DH$.

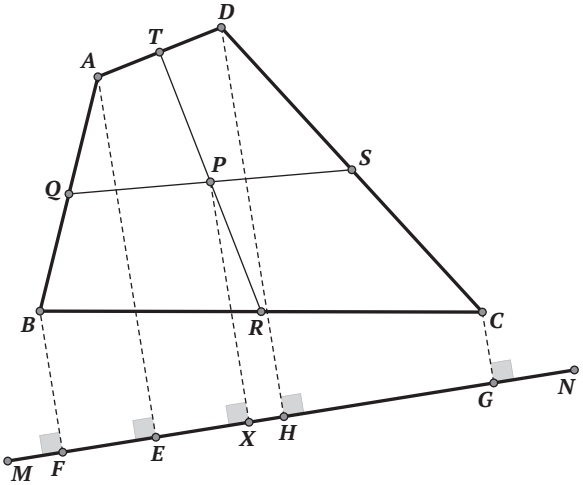


Рисунок 73b

Пример 74. Дополнительные соотношения в четырехугольниках

Мы также обнаруживаем интересное соотношение, связывающее суммы квадратов диагоналей любого выпуклого четырехугольника. На рис. 74 мы видим, что сумма квадратов диагоналей выпуклого четырехугольника *ABCD* равна удвоенной сумме квадратов отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон. Символически это выглядит так:

$$AC^2 + BD^2 = 2(EG^2 + FH^2).$$

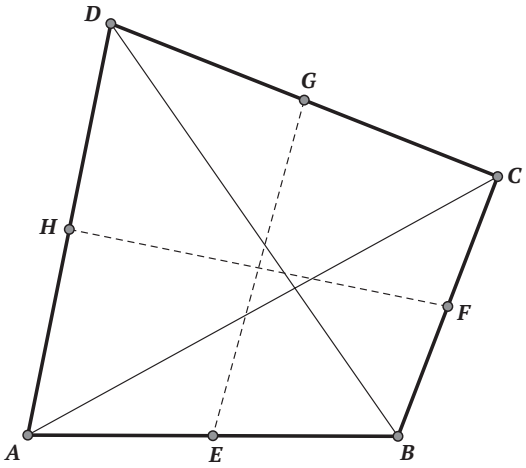


Рисунок 74

Пример 75. Две равные смежные стороны четырехугольника образуют равные углы

Рассмотрим четырехугольник, у которого две стороны – либо смежные, либо противоположные – имеют одинаковую длину. В обоих случаях линия, соединяющая середины двух сторон, не имеющих одинаковой длины, пересекает продолжения сторон равной длины под равными углами.

Мы видим это на рис. 75, где четырехугольник $ABCD$ имеет две равные смежные стороны $AB = AD$. Их продолжения пересекают линию, соединяющую середины M и N двух неравных сторон BC и DC соответственно, в точках F и E. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что $\angle AEF = \angle EFA$.

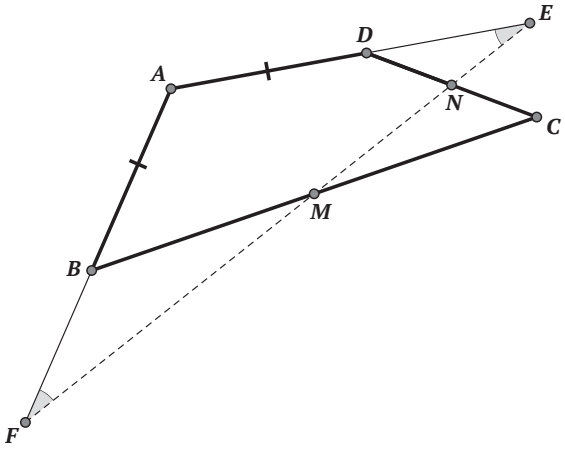


Рисунок 75

Пример 76. Две равные противоположные стороны четырехугольника образуют равные углы

На рис. 76 четырехугольник *ABCD* имеет пару противоположных сторон равной длины, а именно *AB* = *DC*. Точки *M* и *N* являются серединами сторон *BC* и *AD* соответственно. Когда продолжение отрезка *MN* пересекает продолжения сторон *AB* и *DC* в точках *E* и *F* соответственно, мы обнаруживаем, что ∠*BEM* = ∠*MFC*.

Таким образом, пара равных углов появляется в самый неожиданный момент!

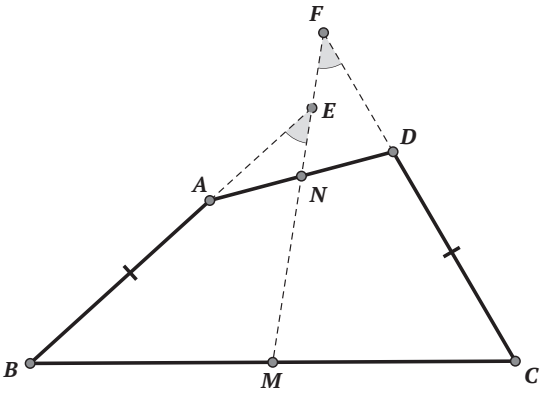


Рисунок 76

Пример 77. Угол, образованный биссектрисами смежных углов четырехугольника

При рассмотрении биссектрис углов четырехугольника интересно отметить, как угол, образованный биссектрисами двух последовательных углов, связан с двумя другими углами четырехугольника. На рис. 77 мы нарисовали общий четырехугольник *ABCD*. Прямые *AE* и *DE* являются биссектрисами углов *A* и *D* соответственно. Удивительный результат заключается в том, что ∠*DEA* = ½(∠*CBA* + ∠*DCB*).

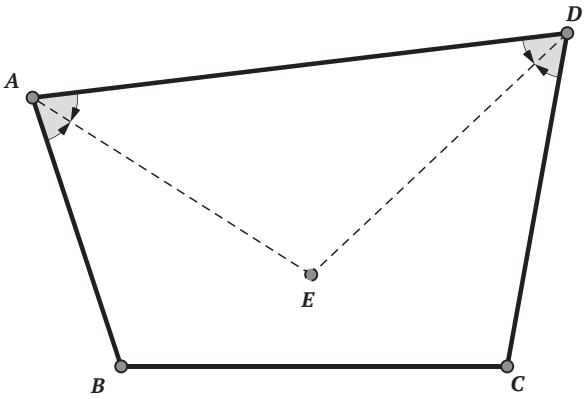


Рисунок 77

Пример 78. Четырехугольник с двумя последовательными прямыми углами имеет перпендикулярные биссектрисы углов

Непосредственным следствием примера 77 является рис. 78. Здесь нам дан четырехугольник *ABCD*, стороны которого *AB* и *BC*, а также *DC* и *BC* образуют перпендикулярные углы, и заданы биссектрисы AE и *DE* углов *A* и *D* соответственно. В такой конфигурации биссектрисы *AE* и *DE* также перпендикулярны.

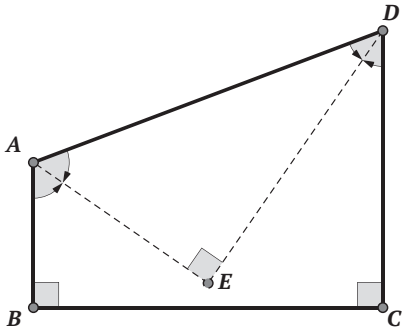


Рисунок 78

Пример 79. Сравнительные площади квадрата на четырехугольнике

На рис. 79 отрезки *AC* и *BD* перпендикулярны и имеют одинаковую длину, пересекаясь друг с другом в произвольной точке. Мы строим квадрат *BDEF* и неожиданно обнаруживаем, что площадь четырехугольника [*ABCD*] = ½ площади четырехугольника [*BDEF*]. Примечательно то, что результат не зависит от точки пересечения двух перпендикулярных прямых.

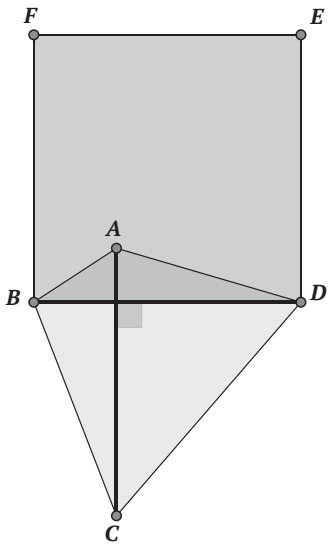


Рисунок 79

Пример 80. Квадраты на сторонах четырехугольника образуют треугольники равной площади

Неожиданные соотношения возникают, когда квадрат строится на каждой стороне случайно выбранного четырехугольника, как это видно на примере четырехугольника *ABCD* на рис. 80. Четыре квадрата – *AEFB*, *BGHC*, *CIJD* и *DKLA*. При соединении смежных вершин образуются четыре треугольника. Эти четыре треугольника затем связаны следующим соотношением:

площадь треугольника [*ALE*] + площадь треугольника [*CHI*] =
площадь треугольника [*BFG*] + площадь треугольника [*DJK*].

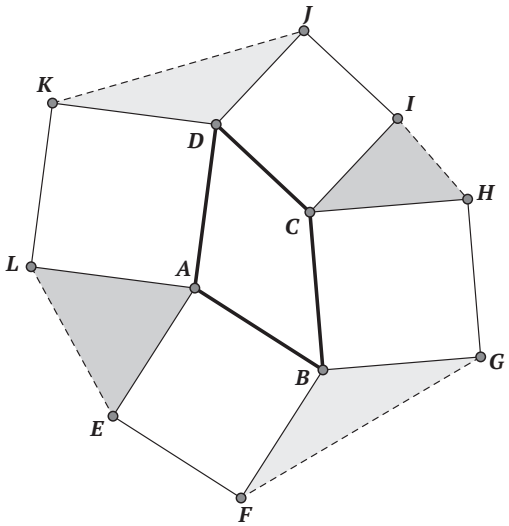


Рисунок 80

Пример 81. Равенство пар квадратов на диагоналях и срединных линиях

Существует множество других способов, которыми можно построить квадраты, на различных четырехугольниках приводящих к неожиданным равенствам. Еще один такой способ показан на рис. 81, где четырехугольник *ABCD* имеет квадраты *MPRS* и *NTUQ*, возведенные на его срединных линиях *MP* и *NQ* соответственно. Кроме того, квадраты *AEFC* и *BDGH* возведены на диагоналях *AC* и *BD* четырехугольника соответственно. Площади этих квадратов связаны следующим образом:

площадь [*AEFC*] + площадь [*BDGH*] = 2 · (площадь [*MPRS*] + площадь [*NTUQ*]).

Это можно выразить и другим способом: сумма квадратов длин средних линий четырехугольника равна одной второй сумме квадратов длин диагоналей, или $AC^2 + BD^2 = 2 \cdot (MP^2 + NQ^2)$.

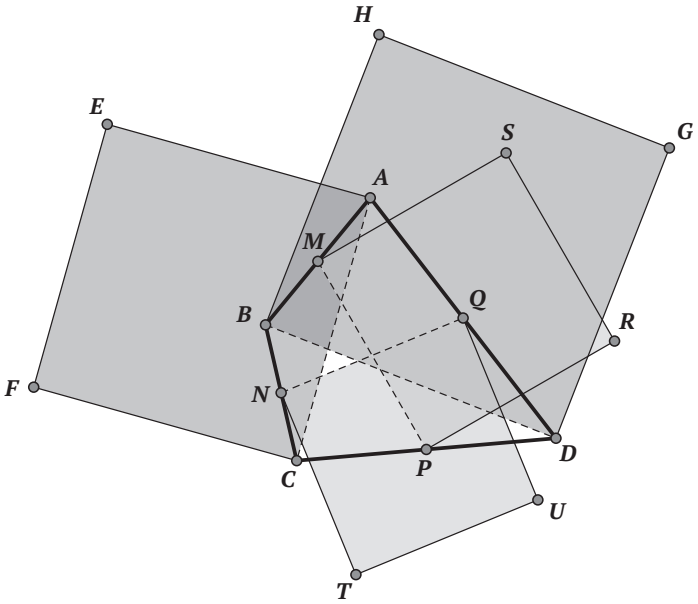


Рисунок 81

Пример 82. Введение в циклический четырехугольник

Хотя мы уже разбирали конциклические точки, теперь рассмотрим их в контексте четырехугольников. Мы знаем, что любые три неколлинеарные точки всегда будут определять единственную окружность, но четыре неколлинеарные точки не обязательно лежат на общей окружности. Когда четыре точки лежат на одной окружности, они являются вершинами циклического четырехугольника. Такие особые четырехугольники демонстрируют разнообразие интересных соотношений, некоторые из которых известны на протяжении тысячелетий.

Иные из самых элементарных свойств циклических четырехугольников представлены в геометрии средней школы. Одна из важных характеристик циклических четырехугольников заключается в том, что их противоположные углы всегда в сумме являются дополнительными углами. Это следует из того факта, что эти углы измеряются половиной меры двух пересекающихся дуг, сумма которых составляет всю окружность. Таким образом, сумма двух противоположных углов равна $\frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$, что делает их дополнительными. Обратное также верно, то есть если два противоположных угла четырехугольника являются дополнительными, то четырехугольник может быть вписан в окружность и, следовательно, является вписанным четырехугольником.

Связанное свойство заключается в том, что четырехугольник является вписанным тогда и только тогда, когда одна сторона образует равные углы в двух других вершинах.

На рис. 82 мы можем увидеть пример этого с двумя углами, противоположными стороне *AB*. Четырехугольник *ABCD* является вписанным тогда и только тогда, когда $\angle ACB = \angle ADB$, что оправдано тем фактом, что углы измеряются одной и той же дугой *AB*.

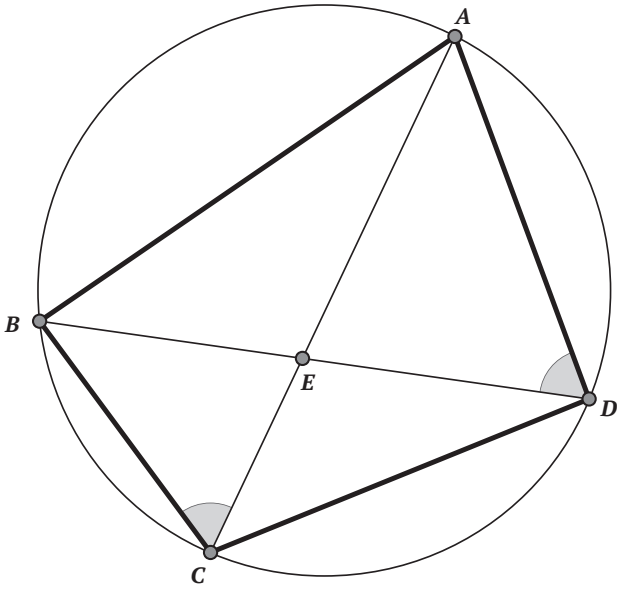


Рисунок 82

Еще одно интересное свойство вписанного четырехугольника также проиллюстрировано на рис. 82, где точка пересечения *E* диагоналей *AC* и *BD* порождает равные произведения отрезков, а именно $AE \cdot EC = BE \cdot ED$, тогда и только тогда, когда он вписан.

Пример 83. Еще одно замечательное свойство вписанного четырехугольника

Несколько похожее на пример 82 свойство проиллюстрировано на рис. 83. Если точка *P* является точкой пересечения продолженных сторон *AB* и *CD*, мы обнаруживаем, что $AP \cdot BP = CP \cdot DP$, что справедливо для четырехугольника *ABCD* тогда и только тогда, когда он вписан в окружность.

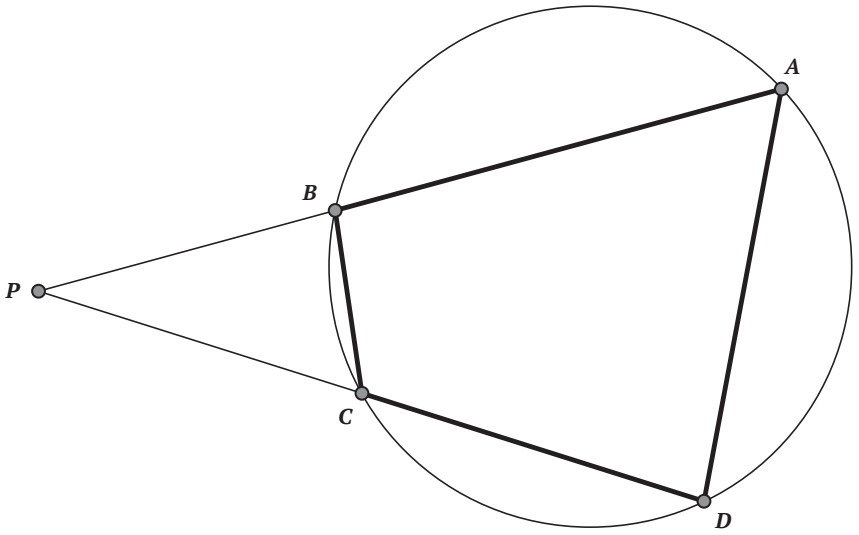


Рисунок 83

Пример 84. Удивительное свойство углов вписанного четырехугольника

Еще один интересный способ определить, является ли четырехугольник вписанным, показан на рис. 84. Точка P – это точка пересечения сторон AB и CD. Биссектриса угла $\angle APD$ пересекает сторону AD в точке F и сторону BC в точке G. Если углы $\angle CGF$ и $\angle GFD$ равны, то отсюда следует, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным.

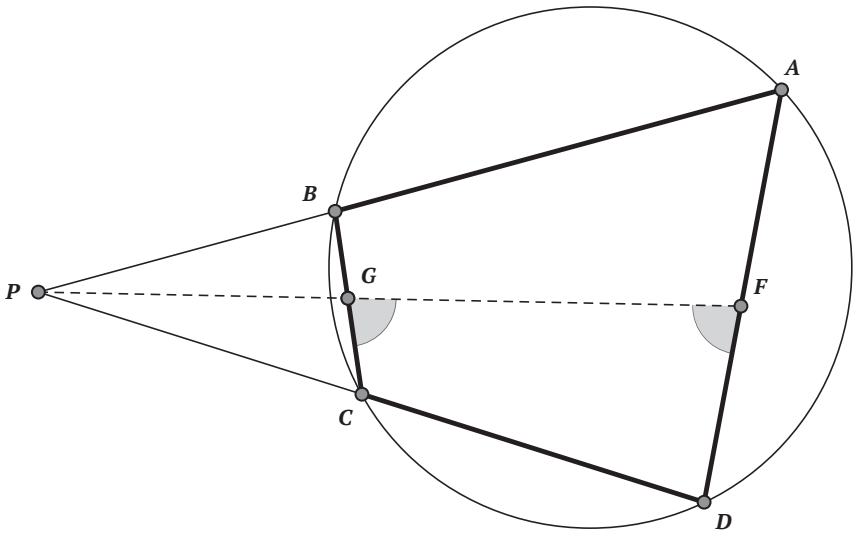


Рисунок 84

Пример 85. Построение вписанных четырехугольников

Простой способ построения второго вписанного четырехугольника из заданного вписанного четырехугольника показан на рис. 85. Здесь четырехугольник *ABCD* вписан в окружность, а точки *E* и *F* выбраны на сторонах *AB* и *DC* соответственно, так что отрезок *EF* параллелен стороне *BC*. В этом случае четырехугольник *AEFD* также является вписанным четырехугольником.

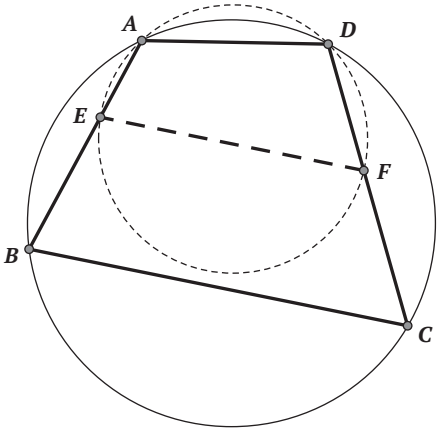


Рисунок 85

Пример 86. Ортоцентр треугольника порождает множество циклических четырехугольников

На рис. 86 мы видим шесть циклических четырехугольников в треугольнике *ABC* с высотами *AD*, *BE* и *CF*, сходящимися в ортоцентре *H*. Четырехугольники *AFHE*, *BDHF*, *CEHD*, *ABDE*, *BCEF* и *CAFD* являются циклическими четырехугольниками.

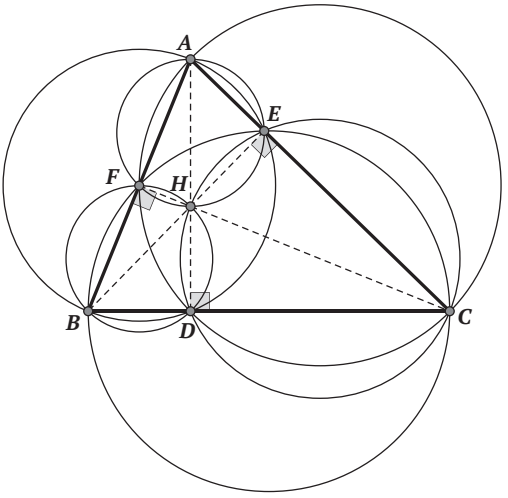


Рисунок 86

Пример 87. Подробнее о вписанном четырехугольнике

Начиная с равнобедренного треугольника *ADB*, как показано на рис. 87, где *AB* = *AD*, вписанный четырехугольник может быть образован четвертой точкой *C* интересным способом. Когда линия, проведенная из точки *C* к вершине угла равнобедренного треугольника *ADB*, также является биссектрисой угла *BCD*, так что ∠*ACB* = ∠*DCA*, а еще *CB* ≠ *CD*, результирующий четырехугольник *ABCD* является вписанным четырехугольником.

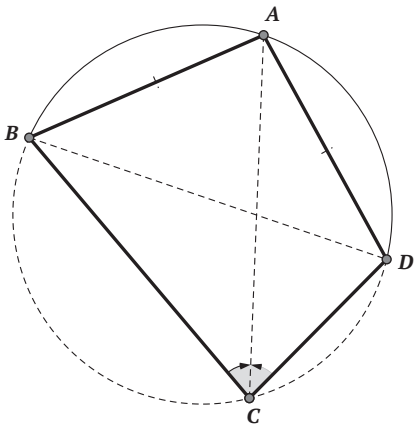


Рисунок 87

Пример 88. Биссектрисы углов четырехугольника создают вписанный в окружность четырехугольник

Теперь рассмотрим, как случайно выбранный четырехугольник может породить циклический четырехугольник. На рис. 88 мы рассматриваем случайно выбранный четырехугольник *ABCD* и строим биссектрисы каждого из его углов. Эти четыре биссектрисы углов пересекаются, как показано, в точках *E*, *F*, *G* и *H*, образуя четырехугольник *EFGH*, который оказывается циклическим четырехугольником.

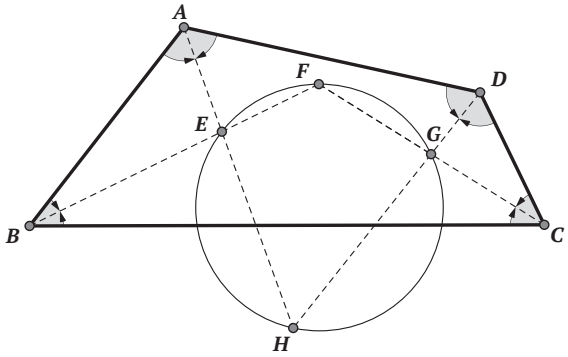


Рисунок 88

Пример 89. Биссектрисы углов параллелограмма образуют прямоугольник

Из результатов примера 88 мы знаем, что пересечения биссектрис углов четырехугольника *ABCD* определяют вершины вписанного четырехугольника *EFGH*. Что может произойти, если четырехугольник *ABCD* является параллелограммом? Результатом по-прежнему является вписанный четырехугольник, но на этот раз это особый вписанный четырехугольник, а именно прямоугольник, как мы видим на рис. 89. Мы обнаруживаем, что диагонали *EG* и *FH* прямоугольника параллельны сторонам параллелограмма. Также, что довольно удивительно, мы обнаруживаем, что длины диагоналей *EF* и *GH* равны разности пары смежных сторон параллелограмма. То есть $EG = FH = BC - AB$.

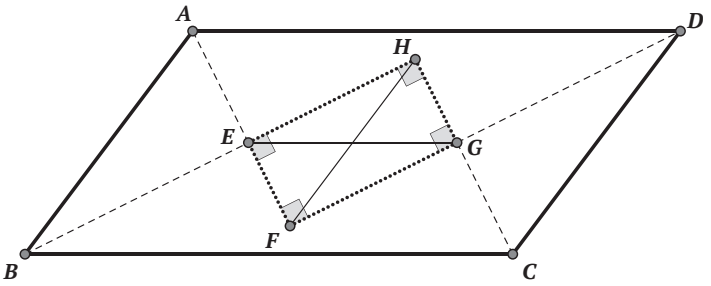


Рисунок 89

Пример 90. Биссектрисы углов прямоугольника образуют квадрат

Мы можем еще больше сузить результат примера 89. На рис. 90 мы начинаем с прямоугольника *ABCD*, и когда мы находим точки пересечения биссектрис углов, результатом является квадрат *EFGH*. Еще раз мы обнаруживаем, что $EG = FH = BC - AB$.

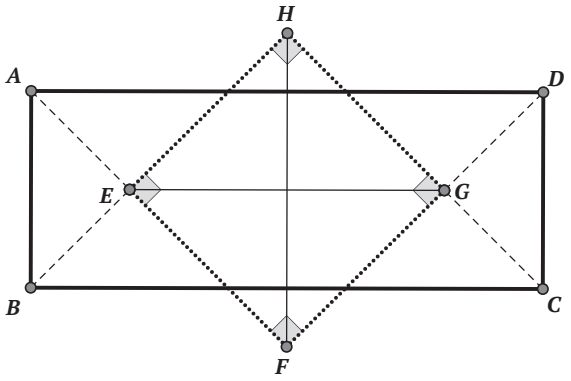


Рисунок 90

Пример 91. Неожиданные точки, лежащие на одной окружности с равнобедренной трапецией

Мы начинаем это приключение с равнобедренной трапеции *ABCD*, строя перпендикулярные прямые из вершин *B* и *C* к сторонам *AC* и *AB*, пересекающие диагонали *AC* и *AB* в точках *F* и *E* соответственно, как показано на рис. 91. Затем мы располагаем точку *G* на стороне *AB* так, чтобы выполнялось соотношение *AE* = *BG*, и точку *H* на отрезке *AC* так, чтобы выполнялось соотношение *AF* = *CH*. Эти, казалось бы, не связанные между собой шаги дают набор из четырех точек, лежащих на одной окружности, а именно точек *G*, *H*, *D* и *A*. Кроме того, в этой конфигурации существует еще один набор точек, лежащих на одной окружности, причем точки *B*, *C*, *F* и *E* лежат на окружности с диаметром *BC*.

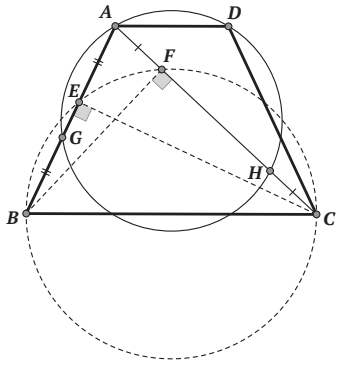


Рисунок 91

Пример 92. Неожиданная перпендикулярность внутри циклического четырехугольника

Неожиданно, но линии, соединяющие середины противоположных дуг описанной окружности циклического четырехугольника, окажутся перпендикулярными. Однако это действительно так. Мы видим это на рис. 92, где линии *EG* и *FH*, соединяющие середины дуг, определяемых противоположными сторонами циклического четырехугольника *ABCD*, перпендикулярны, причем *EG* ⊥ *FH*.

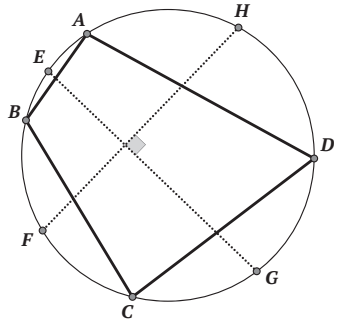


Рисунок 92

Пример 93. Необычные линии, делящие друг друга пополам в циклическом четырехугольнике

На рис. 93 представлен циклический четырехугольник *ABCD*. Ортоцентры треугольников Δ*ABC*, Δ*BCD*, Δ*DBA* и Δ*ACD* – *E*, *F*, *G* и *H* соответственно. (Чтобы избежать излишнего усложнения диаграммы, мы не нарисовали ни одной из высот треугольников, точки пересечения которых определяют ортоцентры.) Мы обнаруживаем, что когда проводим линии, соединяющие каждый из этих ортоцентров с соответствующей вершиной четырехугольника вне соответствующего треугольника, а именно *AF*, *BH*, *CG* и *DE*, то они делят друг друга пополам. Это неожиданное свойство является еще одним примером удивительных свойств циклического четырехугольника.

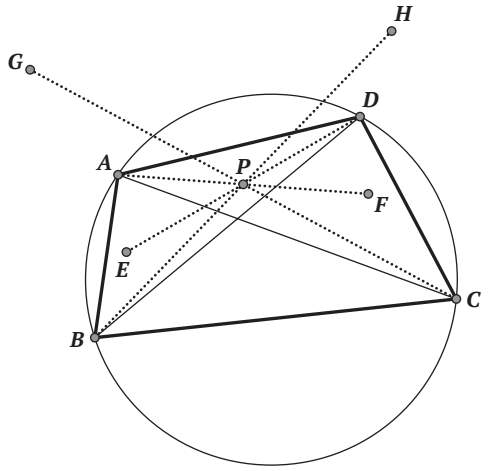


Рисунок 93

Пример 94. Еще несколько необычных линий, пересекающих друг друга в циклическом четырехугольнике

А теперь немного невероятного! Если мы изменим конфигурацию, разобранную в примере 93, и рассмотрим четыре ортоцентра как вершины четырехугольника *EFGH*, то исходные точки *A*, *B*, *C* и *D* будут ортоцентрами четырех треугольников *HGE*, *GEF*, *EFH* и *FHG* соответственно. На рис. 94 это показано на примере высот в треугольнике *HGE*.

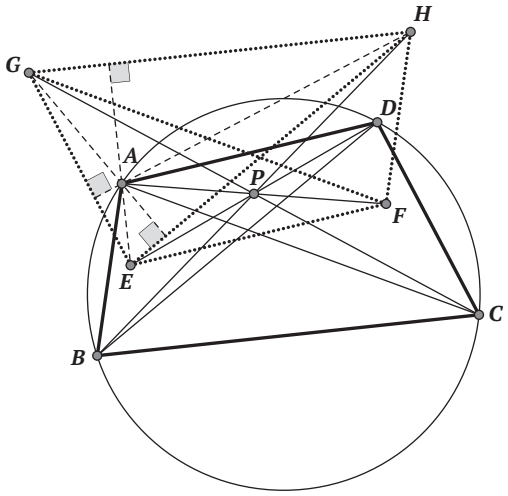


Рисунок 94

Пример 95. Разделение четырехугольника на две равные области

Простое равенство площадей показано на рис. 95, где мы имеем четырехугольник *ABCD*, диагональ которого *BD* делит пополам другую диагональ *AC* в точке *M*. Неожиданно, но *BD* делит четырехугольник на два треугольника равной площади. То есть

площадь треугольника [*ABD*] = площади треугольника [*CDB*].

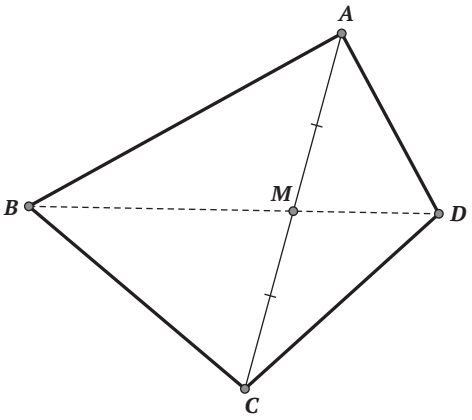


Рисунок 95

Пример 96. Еще один сюрприз в циклическом четырехугольнике

Продолжая описание конфигурации, представленной в примере 93, мы обнаруживаем еще один необычный факт. На рис. 96 мы снова видим циклический четырехугольник *ABCD*. Как и в примере 93, ортоцентры треугольников ΔABC, ΔBCD, ΔDBA и ΔADC – это *E*, *F*, *G* и *H* соответственно. Удивительный результат заключается в том, что эти четыре ортоцентра не только концикличны (то есть лежат на одной окружности), но и окружность, на которой они лежат, имеет ту же длину и радиус, что и описанная окружность четырехугольника *ABCD*.

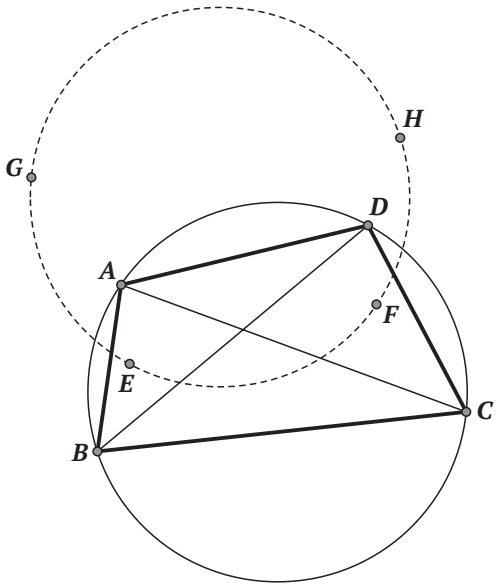


Рисунок 96

Пример 97. Интересное свойство ортоцентра в параллелограмме

На рис. 97 нам дан параллелограмм *ABCD*. Точка *R* является ортоцентром треугольника *ABC*, вписанного в окружность *O*. Поскольку диагональ параллелограмма делит параллелограмм на два конгруэнтных треугольника, описанные окружности двух треугольников ΔACD и ΔABC равны по размеру. Однако, совершенно неожиданно, ортоцентр *R* лежит на описанной окружности треугольника *ACD*. Кроме того, где точка *E* обозначает середину диагонали *AC*, мы находим, что $BR = 2 \cdot OE$.

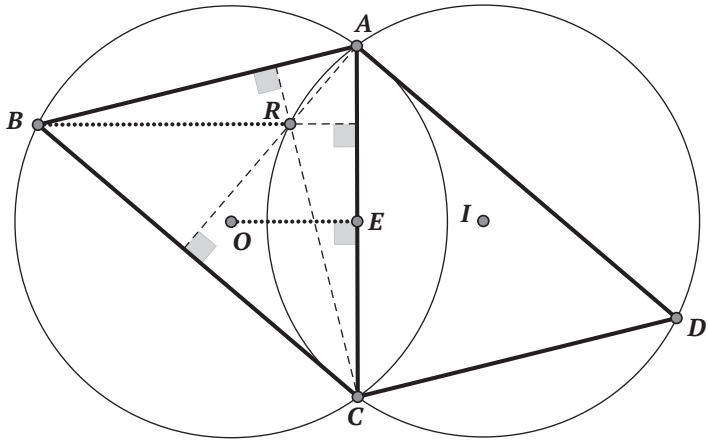


Рисунок 97

Пример 98. Неожиданный циклический четырехугольник

Циклические четырехугольники могут возникать совершенно неожиданно в геометрических построениях. Рассмотрим окружность O с касательными PQ и PR из точки P, как показано на рис. 98. В любой точке A на окружности O строится касательная к окружности. Затем через точку P строится прямая, параллельная этой касательной. Эта параллельная прямая пересекает продолжение отрезков AQ и AR в точках B и C соответственно. Удивительно, но точки C, R, Q и B находятся на одной окружности и, следовательно, образуют циклический четырехугольник $CRQB$.

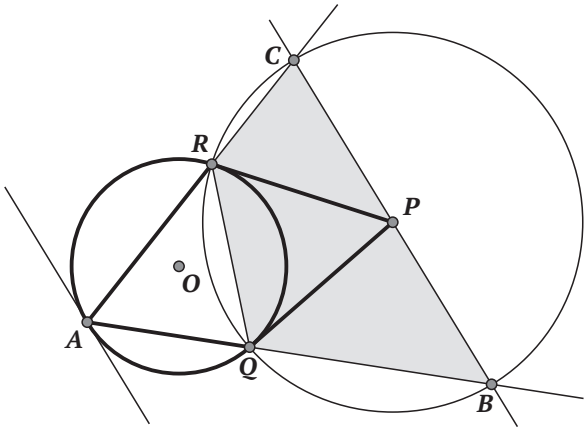


Рисунок 98

Пример 99. Вписанные центры четырех треугольников циклического четырехугольника определяют прямоугольник

Рассмотрев ортоцентры четырех треугольников циклического четырехугольника, теперь рассмотрим вписанные центры *E*, *F*, *G* и *H* четырех треугольников *BCD*, *CDA*, *DAB* и *ABC* соответственно, как показано на рис. 99.

Когда мы соединяем точки *E*, *F*, *G* и *H*, мы неожиданно получаем прямоугольник *EFGH*. Имейте в виду, что, как и во многих подобных неожиданных результатах, этот результат справедлив для всех циклических четырехугольников.

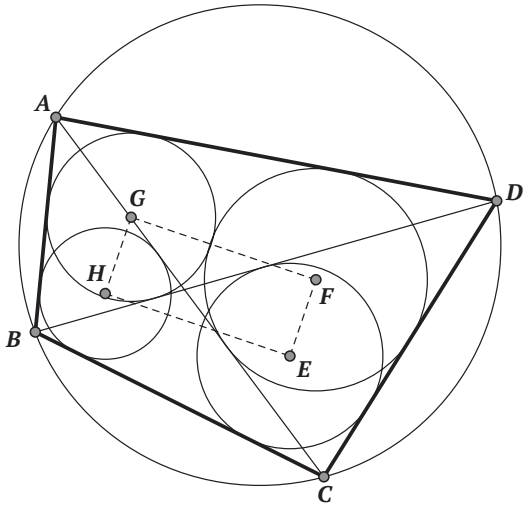


Рисунок 99

Пример 100. Вписанный четырехугольник образует ромб

Ромб может возникнуть и в самой неожиданной ситуации. На рис. 100 мы начинаем со вписанного четырехугольника *ABCD*, стороны которого продолжены так, что продолжения сторон *AB* и *CD* пересекаются в точке *E*, а продолжения сторон *BC* и *DA* пересекаются в точке *F*. Биссектриса угла $\angle DEA$ пересекает сторону *BC* в точке *H* и пересекает сторону *AD* в точке *J*. Кроме того, биссектриса угла $\angle AFB$ пересекает сторону *CD* в точке *I* и пересекает сторону *AB* в точке *G*. Удивительно, но эти точки пересечения определяют ромб *GHIJ*. Неожиданно мы можем заметить, что эти две биссектрисы углов перпендикулярны, то есть $FG \perp EJ$.

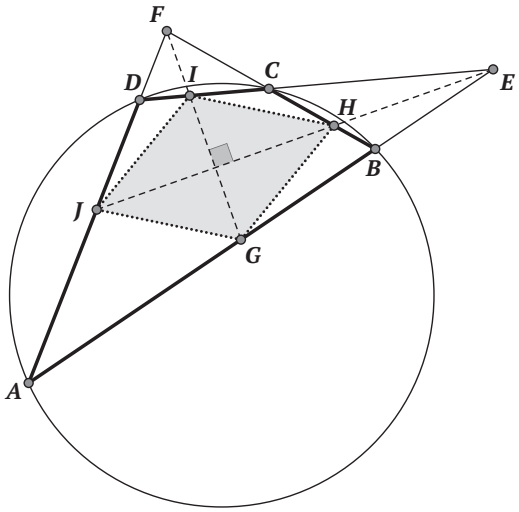


Рисунок 100

Пример 101. Вписанный четырехугольник образует параллелограмм

Параллелограмм может неожиданно образоваться в особом типе вписанного четырехугольника. На рис. 101 мы имеем вписанный четырехугольник *ABCD* с центром описанной окружности *O*. Отрезок *AE* касается окружности *O* в точке *A*, и мы имеем *AD* = *AE*. Середина дуги *ABCD* – точка *B*. Удивительно, но четырехугольник *AECB* в этом случае является параллелограммом.

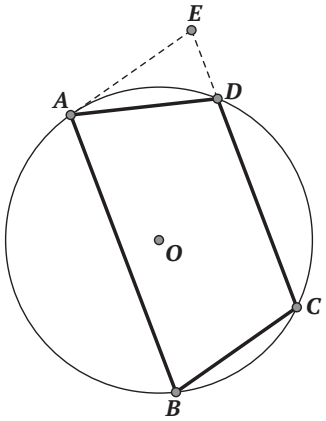


Рисунок 101

Пример 102. Неожиданный пример с циклическим четырехугольником

Циклические четырехугольники иногда показывают удивительные факты самым простым способом. На рис. 102 диагонали *AC* и *BD* циклического четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *P*. Проведем хорду *EF* описанной окружности четырехугольника *ABCD* так, чтобы она была разделена пополам в точке *P*. Пусть точки *G* и *H* обозначают точки пересечения хорды *EF* с противоположными сторонами *ABCD*.

Независимо от того, где *EF* пересекает эти противоположные стороны четырехугольника, мы обнаруживаем, что *PG* = *PH*.

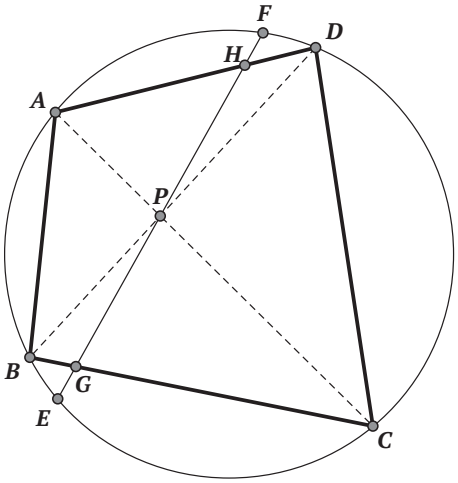


Рисунок 102

Пример 103. Вписанный четырехугольник, образованный другим вписанным четырехугольником

На рис. 103 изображен вписанный четырехугольник *ABCD* с прямым углом в вершине *A*. Биссектрисы углов в вершинах *B* и *C* пересекаются в точке *P*. Отрезок *EP* перпендикулярен стороне *AB* в точке *E* и пересекает сторону *CD* в точке *F*. Неожиданным результатом этого построения является то, что выполняется соотношение *EF* = *BE* + *CF*. В качестве дополнительного бонуса мы также обнаруживаем, что четырехугольник *BCFE* также является вписанным.

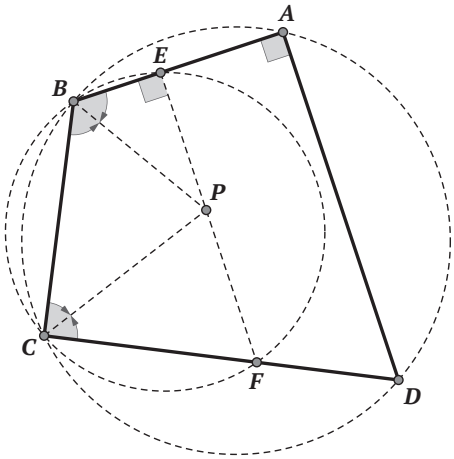


Рисунок 103

Пример 104. Перпендикуляры к диагонали и стороне, проведенные из вершины особого вписанного четырехугольника, определяют середину другой диагонали

Еще один сюрприз, приводящий к вписанному четырехугольнику с прямым углом, можно увидеть в построении, показанном на рис. 104. Как и в предыдущем случае, вписанный четырехугольник *ABCD* имеет прямой угол в точке *A*. Перпендикуляр *CE* к стороне *AB* пересекает ее в точке *E*, а отрезок *CF* перпендикулярен диагонали *DB* и пересекает ее точке *F*. Когда мы проводим продолжение отрезка *EF*, оно пересекает диагональ *AC* в ее середине *M*.

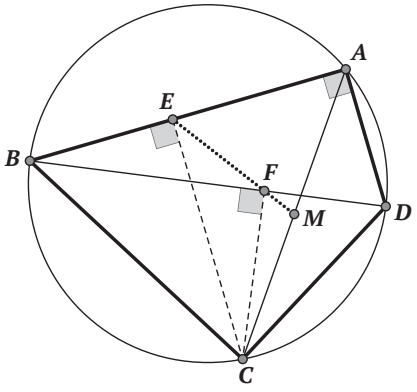


Рисунок 104

Пример 105. Перпендикуляры, проведенные из середин вписанного четырехугольника, пересекаются в одной точке

На рис. 105 показано удивительное совпадение четырех прямых, где *K*, *L*, *M* и *N* – середины сторон *AB*, *BC*, *CD* и *DA* соответственно вписанного четырехугольника *ABCD*. Перпендикуляры, проведенные из этих середин к противоположным сторонам *CD*, *DA*, *AB* и *BC* четырехугольника *ABCD*, пересекают их в точках *W*, *X*, *Y* и *Z* соответственно.

В результате получаются пересекающиеся отрезки *KW*, *LX*, *MY* и *NZ*. Восхищаясь красотой этого неожиданного совпадения, важно помнить, что это справедливо для любого вписанного четырехугольника.

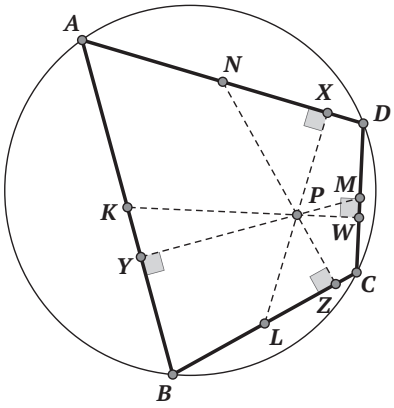


Рисунок 105

Пример 106. Перпендикулярные сюрпризы в циклическом четырехугольнике

Авантюрный читатель может захотеть поэкспериментировать с другими свойствами ситуации, показанной на рис. 105. Пример того, к чему можно прийти, показан на рис. 106. Как и в примере 105, нам дан циклический четырехугольник *ABCD*. Снова точка *L* – середина стороны *BC*, точка *N* – середина стороны *DA*, отрезок *LX* перпендикулярен стороне *AD* в точке *X*, а отрезок *NZ* перпендикулярен стороне *BC* в точке *Z*. Эти два перпендикуляра пересекаются в точке *P*. У нас также есть точка *Q*, которая является пересечением продолжений сторон четырехугольника *DA* и *BC*. Неожиданно, но линия *PQ* в этом случае тогда перпендикулярна линии *LN*.

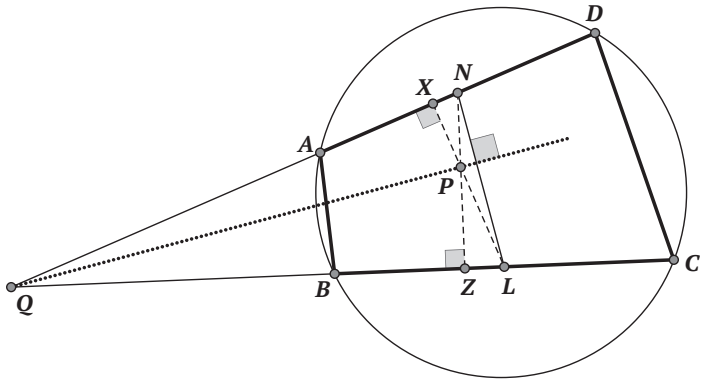


Рисунок 106

Пример 107. Вписанный четырехугольник порождает еще одну неожиданную перпендикулярность

Как мы видим, вписанный четырехугольник предлагает широкий спектр неожиданных соотношений. Далее рассмотрим вписанный четырехугольник *ABCD*, показанный на рис. 107. В этой конфигурации диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *R*, из которой проведены перпендикуляры к сторонам *AB* и *CD*, пересекающие их в точках *E* и *F* соответственно. Точка *P* является пересечением отрезков *EC* и *BF*. Неожиданно при продолжении отрезка *PR* мы обнаруживаем, что он перпендикулярен отрезку *EF* в точке *H*.

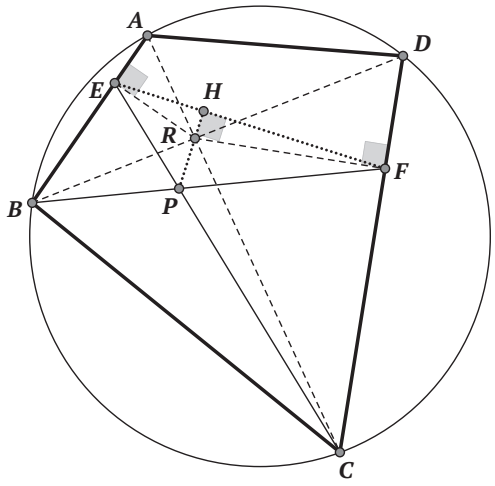


Рисунок 107

Пример 108. Неожиданные параллели от перпендикуляров к сторонам циклического четырехугольника

В общем циклическом четырехугольнике *ABCD* может образоваться непредвиденная пара параллельных линий, как показано на рис. 108. Перпендикуляр к стороне *BC* в вершине *B* пересекает сторону *AD* в точке *E*, а перпендикуляр к стороне *AD* в вершине *D* пересекает продолжение стороны *BC* в точке *F*. К нашему удивлению, мы обнаруживаем, что диагональ *AC* параллельна отрезку *EF*.

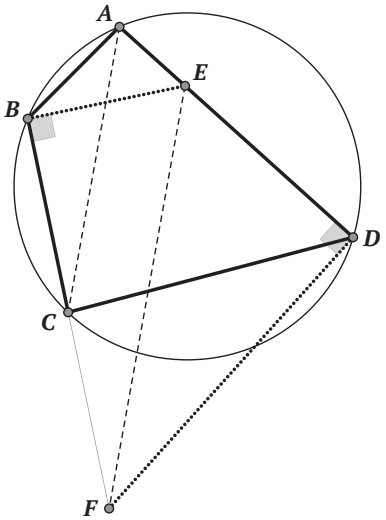


Рисунок 108

Пример 109. Сюрпризы в циклических четырехугольниках с перпендикулярными диагоналями

Похожая ситуация может быть установлена в циклическом четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями. Рассмотрим циклический четырехугольник *ABCD*, показанный на рис. 109, где диагонали *AC* и *BD* перпендикулярны и пересекаются в точке *P*. Здесь мы имеем следующий неожиданный результат.

Когда мы проводим перпендикуляр к одной из сторон, скажем *CD*, четырехугольника из точки пересечения, *P*, его диагоналей, продолжение будет пересекать противоположную сторону *AB* в ее середине, *M*. Это удивительное соотношение приписывается индийскому математику Брахмагупте (598–668 гг. н. э.).

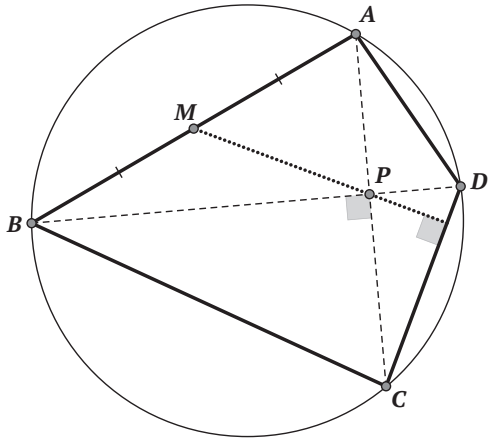


Рисунок 109

Пример 110. Еще одна неожиданная перпендикулярность циклического четырехугольника

Несколько озадачивающий факт того, какие совпадения могут возникать с циклическими четырехугольниками, показан на рис. 110, где мы представляем центр *O* описанной окружности на сторонах *AB* и *CD* циклического четырехугольника *ABCD*. Это означает, что отрезок *OR* перпендикулярен стороне *AB* и делится пополам стороной *AB*. Аналогично отрезок *OS* перпендикуляре стороне *CD* и делится ею пополам. Точка *P* – это точка пересечения прямых, проведенных из середин *L* и *N* противоположных сторон *BC* и *AD* соответственно и перпендикулярных их соответствующим противоположным сторонам. Удивительно, но точки *R* и *S* коллинеарны с этой точкой пересечения *P*.

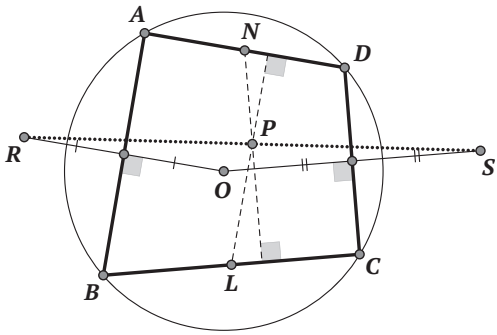


Рисунок 110

Пример 111. Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями образует параллелограмм

Вот еще один способ, которым вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями представляет нам неожиданное явление. На рис. 111 четырехугольник *ABCD*, вписанный в окружность *O*, имеет перпендикулярные диагонали *AC* и *BD*, которые пересекаются в точке *P*. Середины сторон *AB* и *CD* – это точки *M* и *N* соответственно. Когда мы соединяем точки *M*, *O*, *N* и *P*, результатом является параллелограмм *MONP*.

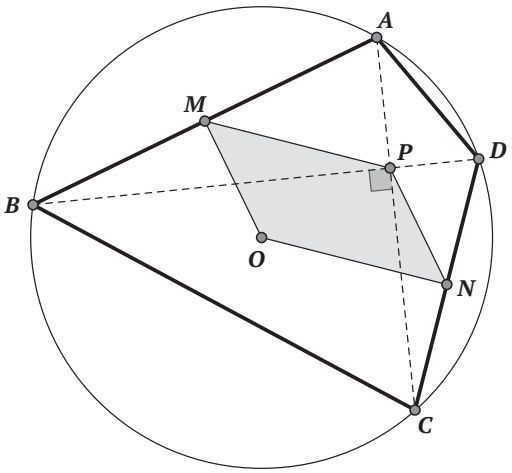


Рисунок 111

Пример 112. Еще одно неожиданное свойство циклических четырехугольников с перпендикулярными диагоналями

Мы можем пойти дальше в изучении результатов Брахмагупты. Возвращаясь к циклическому четырехугольнику с перпендикулярными диагоналями на рис. 112, мы можем обнаружить еще одно неожиданное соотношение. Когда мы проводим перпендикуляр из центра *O* описанной окружности четырехугольника к одной из сторон, как в данном случае с $OE \perp BC$, то обнаруживаем, что $OE = \frac{1}{2} AD$. Естественно, это можно сделать с любой из сторон, и длина перпендикуляра к одной из сторон всегда равна половине длины противоположной стороны четырехугольника.

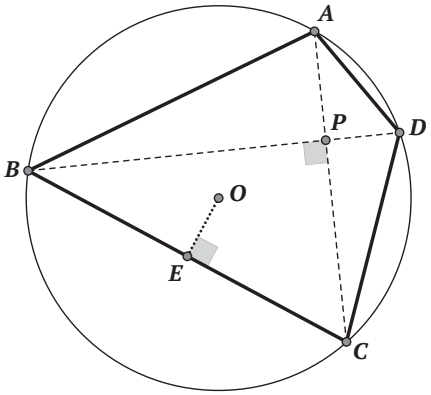


Рисунок 112

Пример 113. Циклический четырехугольник с перпендикулярными диагоналями образует точки, лежащие на одной окружности

Замечательный результат, который мы могли бы рассматривать как комбинацию примеров 110 и 111, показан на рис. 113. Здесь нам снова дан циклический четырехугольник *ABCD* с перпендикулярными диагоналями, пересекающимися в точке *P*. Точки *K*, *L*, *M* и *N* являются серединами сторон *AB*, *BC*, *CD* и *DA* соответственно. Точки *E*, *F*, *G* и *H* являются основаниями перпендикуляров из точки *P* к сторонам *AB*, *BC*, *CD* и *DA* соответственно. Из примера 109 мы знаем, что точка *P* лежит на отрезках *EM*, *FN*, *GK* и *HL*. Удивительно, но все восемь точек *E*, *F*, *G*, *H*, *K*, *L*, *M* и *N* лежат на общей окружности.

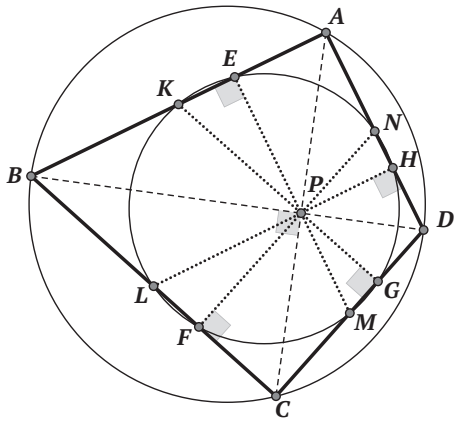


Рисунок 113

Пример 114. Еще одно неожиданное свойство циклических четырехугольников с перпендикулярными диагоналями

Еще одно замечательное соотношение вытекает из циклического четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны. На рис. 114 мы видим циклический четырехугольник *ABCD* с перпендикулярными диагоналями *AC* и *BD*. Прямая, проведенная из вершины *A* через центр описанной окружности *O*, пересекает окружность во второй раз в точке *E*. Тогда оказывается, что *DC* = *BE*. Этот результат можно получить, если начать построение с любой вершины четырехугольника.

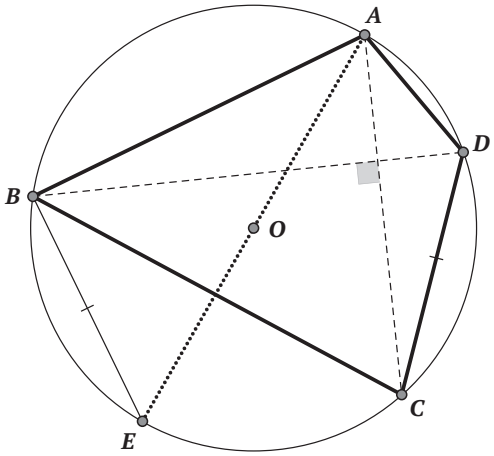


Рисунок 114

Пример 115. Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями образует треугольники равной площади

Еще одно явление, возникающее из вписанного четырехугольника с перпендикулярными диагоналями, можно увидеть на рис. 115. Здесь четырехугольник *ABCD* имеет перпендикулярные диагонали *AC* и *BD*, пересекающиеся в точке *P*, и описан окружностью с центром *O*. Кроме того, *AB* и *CD* не параллельны. Совершенно неожиданно два треугольника Δ*OAB* и Δ*OCD*, которые, казалось бы, имеют очень мало общего, на самом деле имеют равные площади.

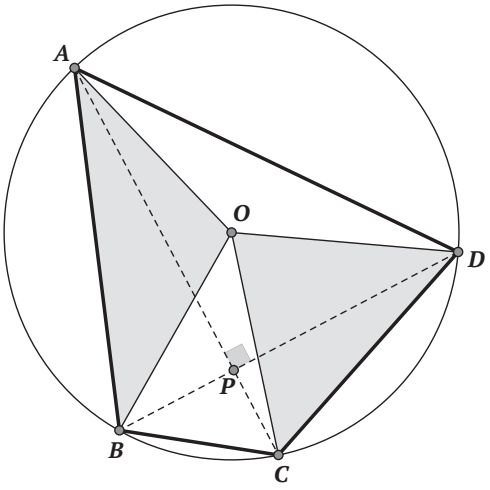


Рисунок 115

Пример 116. Неочевидное свойство четырехугольников с перпендикулярными диагоналями

Любой четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны, обладает двумя важными характеристиками, которые показаны на рис. 116. Во-первых, прямые, соединяющие середины противоположных сторон, равны. Во-вторых, суммы квадратов длин каждой пары противоположных сторон четырехугольника равны. На рис. $AC \perp BD$, а точки E, F, G и H являются серединами сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Тогда

$$EG = FH \text{ и } AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2.$$

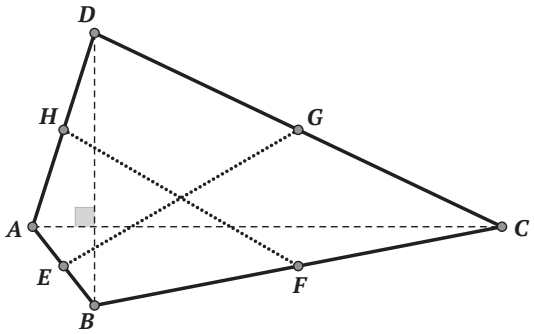


Рисунок 116

Пример 117. Равные суммы площадей квадратов на противоположных сторонах четырехугольника

Еще раз: мы разместим квадраты на каждой стороне четырехугольника, однако в этом частном случае расстояния между серединами противоположных сторон равны. На рис. 117 четырехугольник *ABCD*, серединами его сторон *AB*, *BC*, *CD* и *DA* являются точки *M*, *N*, *P* и *Q* соответственно, и мы имеем *MP* = *NQ*. В этом случае, весьма любопытно, мы обнаруживаем, что суммы площадей квадратов на противоположных сторонах исходного четырехугольника равны. То есть мы имеем соотношение площадь [*AEFB*] + площадь [*CIJD*] = площадь [*BGHC*] + площадь [*DKLA*]. Этот результат также можно символически представить как $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

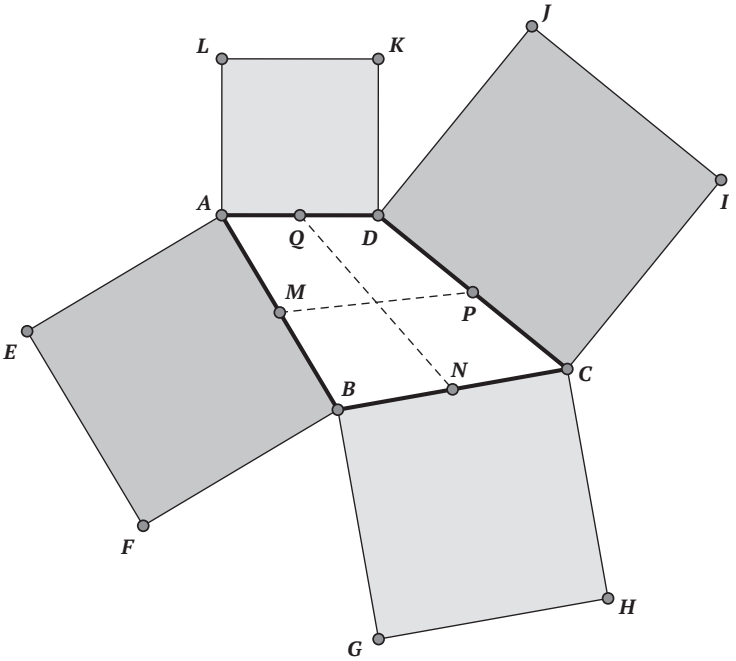


Рисунок 117

Пример 118. Неожиданная перпендикулярность возникает в циклическом четырехугольнике

На рис. 118 мы рассматриваем общий циклический четырехугольник *ABCD* и его описанную окружность с центром в точке *O*. Точки *K*, *L*, *M* и *N* являются серединами сторон *AB*, *BC*, *CD* и *DA* соответственно, а прямые *LN* и *KM* пересекаются в точке *P*. Когда мы продлеваем отрезок *OP* на свою длину до точки *E*, возникает удивительная ситуация. Из середины любой стороны (в данном случае мы выбираем середину *N* стороны *DA*) прямая, проведенная через точку *E* к противоположной стороне, будет перпендикулярна этой стороне. На рис. 118 продолжение отрезка *NE* перпендикулярно стороне *BC* в точке *F*. Заинтересованный читатель может повторить это с серединами остальных

трех сторон, чтобы убедиться, что линии, соединяющие их с точкой E, также перпендикулярны соответствующим противоположным сторонам.

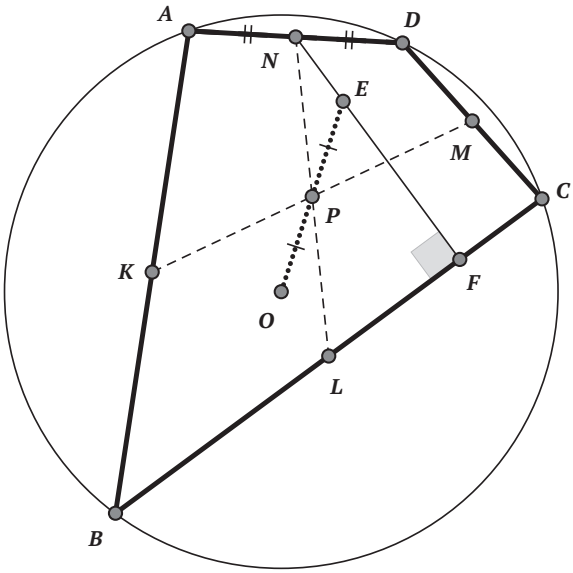


Рисунок 118

Пример 119. Связь между диагоналями и сторонами циклических четырехугольников

По мере дальнейшего исследования циклических четырехугольников мы обнаруживаем множество необычных соотношений. Одно из них связано с пересечением диагоналей, как показано на рис. 119, где четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность O, а диагонали AC и BD пересекаются в точке E. В результате возникает следующее необычное соотношение: $\left(\frac{BE}{DE}\right)^2 = \frac{AB \cdot BC}{CD \cdot DA}$.

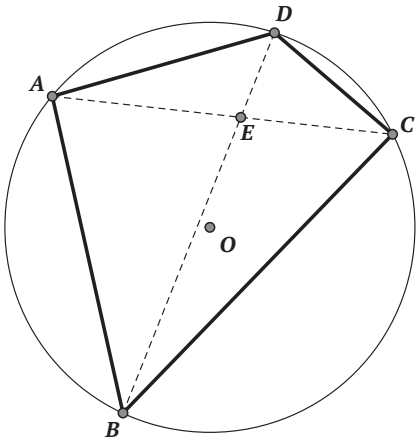


Рисунок 119

Пример 120. Знаменитая теорема Птолемея

Одно из наиболее известных соотношений, касающихся вписанных четырехугольников, известно как теорема Птолемея, названная в честь египетского математика Клавдия Птолемея (ок. 100–170 гг. н. э.). Она связывает длины диагоналей с длинами сторон вписанного четырехугольника следующим образом: произведение длин диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений длин пар его противоположных сторон. На рис. 120 для вписанного четырехугольника $ABCD$ мы имеем: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$. Обратное утверждение также верно.

То есть если четырехугольник $ABCD$ обладает свойством

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA,$$

то этот четырехугольник является вписанным четырехугольником.

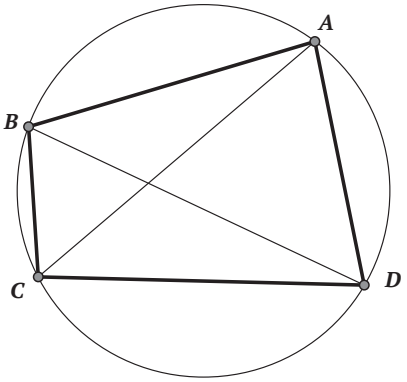


Рисунок 120

Пример 121. Любопытное соотношение параллелограмма

На рис. 121 мы рассматриваем произвольный параллелограмм $ABCD$ и выбираем точку P внутри параллелограмма так, чтобы $\angle DPA$ был дополнительным к $\angle BPC$. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что $AB \cdot AD = AP \cdot CP + BP \cdot DP$.

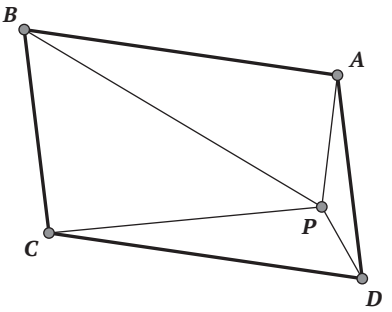


Рисунок 121

Пример 122. Равносторонний треугольник в циклическом четырехугольнике

Циклический четырехугольник обладает некоторой особенностью, когда содержит равносторонний треугольник, как показано на рис. 122. Здесь циклический четырехугольник $ABCD$ имеет равносторонний треугольник ABD, образованный двумя его сторонами и одной из его диагоналей, так что мы имеем $AC = BC + CD$. Более того, в этой конфигурации возникает еще одна особенность, а именно если E – точка пересечения диагоналей AC и BD, мы получаем

$$\frac{1}{CE} = \frac{1}{CB} + \frac{1}{CD}.$$

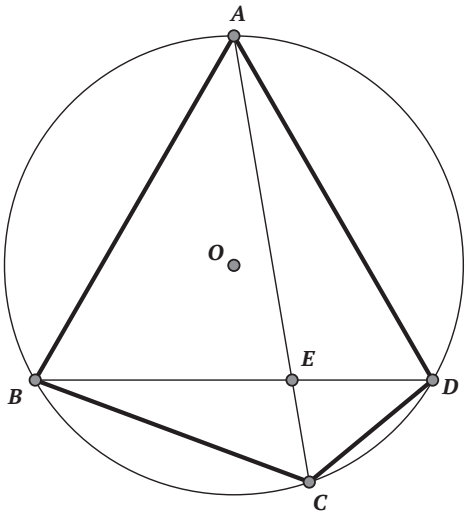


Рисунок 122

Пример 123. Биссектрисы углов в циклических четырехугольниках

Существует множество любопытных соотношений, порождаемых циклическими четырехугольниками. Например, на рис. 123 нам дан циклический четырехугольник $ABCD$ и точка P такие, что отрезок BP делит угол CBD пополам и отрезок AP делит угол CAD пополам.

Неожиданно мы обнаруживаем, что точка P лежит на описанной окружности $ABCD$. Кроме того, также верно соотношение

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AD+AC}{BD+BC}.$$

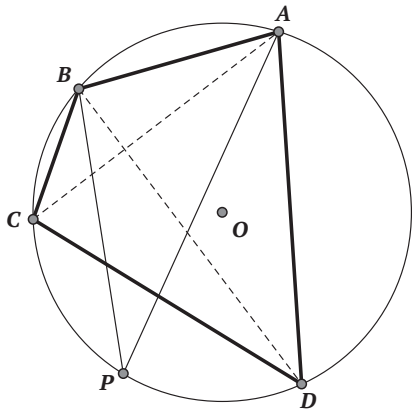


Рисунок 123

Пример 124. Неожиданная биссектриса угла в особом вписанном четырехугольнике

Рассмотрим вписанный четырехугольник, имеющий одну пару противоположных прямых углов и пару смежных сторон к одному из прямых углов равной длины. Такой вписанный четырехугольник $ABCD$ показан на рис. 124. В этом особом случае, когда $\angle BAD = \angle DCB = 90°$ и $AB = AD$, неожиданно мы обнаруживаем, что AC делит угол $\angle DCB$ пополам.

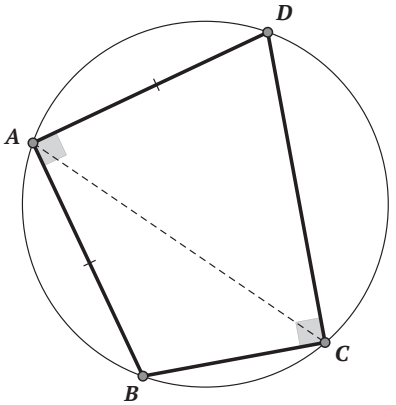


Рисунок 124

Пример 125. Перпендикуляры к сторонам циклического четырехугольника, проведенные из точки на его описанной окружности

Когда из случайной точки на описанной окружности вписанного четырехугольника проводятся перпендикуляры к каждой из его четырех сторон, возникает очень интересное соотношение. Это показано на рис. 125, где перпендикуляры из случайной точки P на описанной окружности четырехугольника $ABCD$ проводятся к каждой из четырех сторон, AB, BC, CD и DA, пересекая их в точках F, G, H и I соответственно. Длины этих перпендикуляров имеют соотношение

$$PF \cdot PH = PG \cdot PI.$$

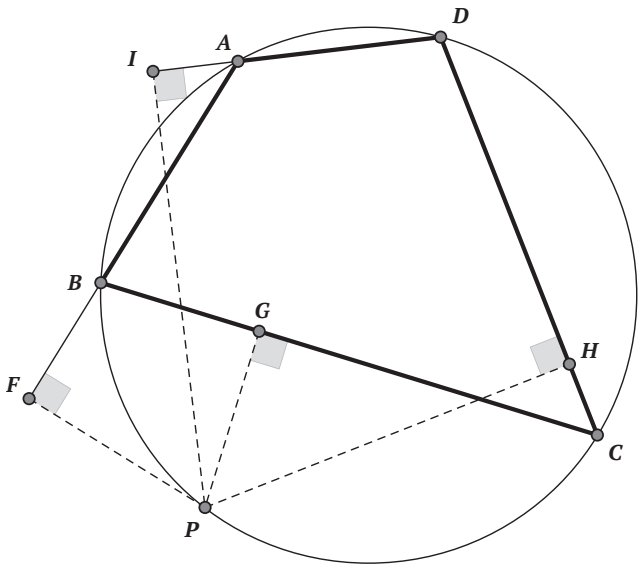


Рисунок 125

Пример 126. Удивительные факты циклического четырехугольника

На рис. 126 продолжения сторон BA и CD циклического четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Мы выбираем любые две точки F и G на стороне CD так, чтобы все четыре точки A, B, F и G находились на одной окружности. Когда мы находим центр описанной окружности M треугольника AGD и центр описанной окружности N треугольника BCF, мы неожиданно обнаруживаем, что точки M и N лежат на одной прямой с точкой P.

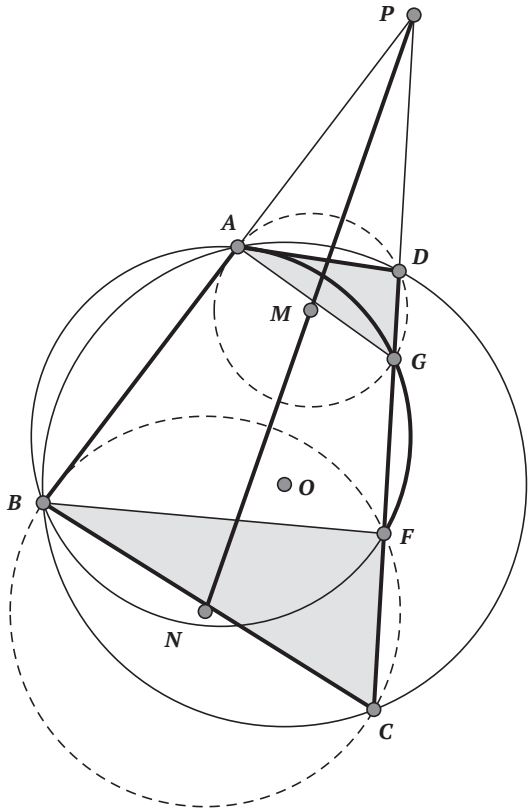


Рисунок 126

Пример 127. Знаменитая теорема Брахмагупты

Одно из наиболее известных соотношений, касающихся циклических четырехугольников, приписывается индийскому математику Брахмагупте (598 г. н. э. – 668 г. н. э.), который в 628 году опубликовал ее в своей книге «Brahma-sphuta-siddhanta» («Пересмотренная система Брахмы»). Прежде чем мы представим открытие Брахмагупты, стоит вспомнить знаменитую формулу для площади треугольника, разработанную греческим математиком Героном Александрийским (10 г. н. э. – 70 г. н. э.). Формула Герона для нахождения площади треугольника *ABC* (показанного на рис. 127a), стороны которого имеют длины *a*, *b* и *c*, а полупериметр равен $s = \frac{a+b+c}{2}$, имеет вид: площадь $[ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Брахмагупта рассматривал вписанный четырехугольник *ABCD* как своего рода обобщенную версию треугольника, вписанного в окружность, как показано на рис. 127b. Если четырехугольник имеет стороны *a*, *b*, *c* и *d*, а полупериметр $s = \frac{a+b+c+d}{2}$, он обнаружил поразительную формулу для площади четырехугольника *ABCD*: площадь $[ABCD] = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

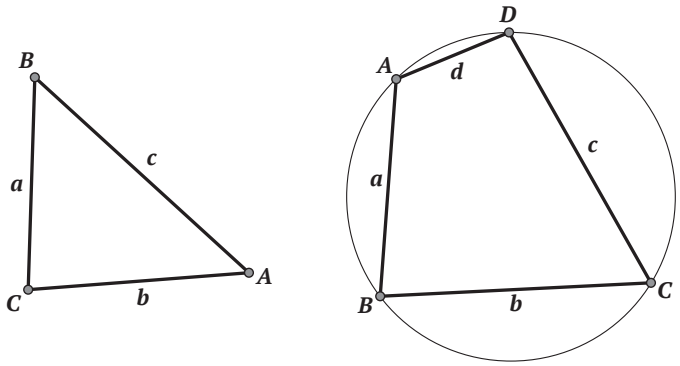


Рисунок 127a–b

Пример 128. Странное равенство квадратов

Соотношения суммы площадей могут возникать в самых необычных обстоятельствах. На рис. 128 мы начинаем с окружности с диаметром *AB* и центром *M*. Мы строим хорду *CD*, параллельную стороне *AB*, образуя вписанный четырехугольник *ABCD*, который также является равнобедренной трапецией.

Далее мы строим прямую *BP*, перпендикулярную стороне *BC* и пересекающую продолжение стороны *CD* в точке *P*. Затем строим квадраты *BEFP*, *BDGH*, *BMIJ* и *PKLM* на прямых *BP*, *BD*, *BM* и *PM* соответственно. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что

площадь квадрата [*PKLM*] = площадь квадрата [*BEFP*] +
площадь квадрата [*BDGH*] + площадь квадрата [*BMIJ*].

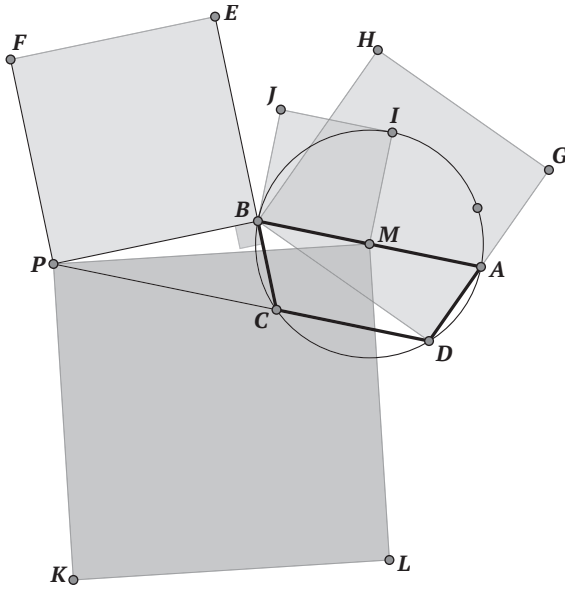


Рисунок 128

Пример 129. Пропорциональность порождает равенство площадей

Здесь мы рассмотрим четырехугольник с пропорциональными отрезками, которые неожиданно приведут к равенству площадей. На рис. 129 нам дан четырехугольник *ABCD* с точками *P* и *Q*, выбранными на сторонах *CD* и *AB* соответственно, так что $\frac{CP}{PD} = \frac{AQ}{QB}$. Совершенно неожиданно мы обнаруживаем, что

площадь треугольника [*ABP*] + площадь треугольника [*CDQ*] =
площади четырехугольника [*ABCD*].

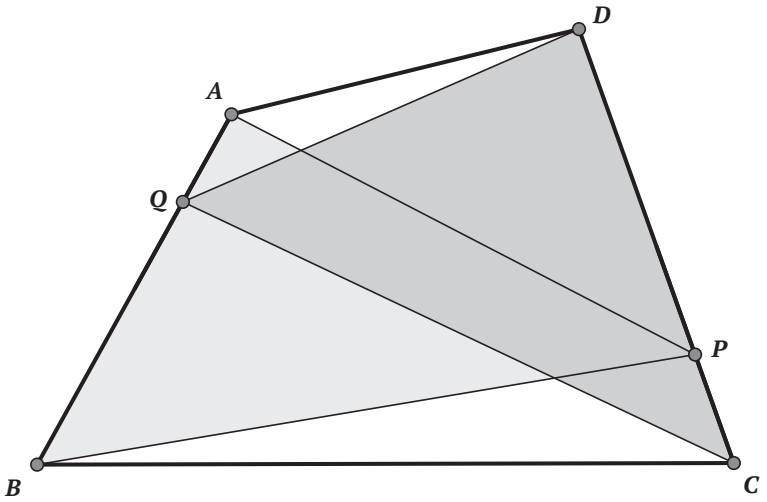


Рисунок 129

Пример 130. Парные квадраты на сторонах четырехугольника образуют равенство

Происходит нечто неожиданное, когда мы выбираем любой четырехугольник и размещаем на его противоположных сторонах квадраты так, что суммы площадей квадратов на противоположных сторонах равны. Мы показываем это на рис. 130, где сумма площадей квадратов *AEFB* и *CIJD* на противоположных сторонах *AB* и *CD* четырехугольника *ABCD* равна сумме площадей квадратов *BGHC* и *DKLA* на другой паре противоположных сторон *BC* и *DA*. Мы обнаруживаем, что прямые, соединяющие центры противоположных квадратов, равны, то есть *WY* = *XZ*. Кроме того, мы обнаруживаем, что эти два отрезка *WY* и *XZ* перпендикулярны.

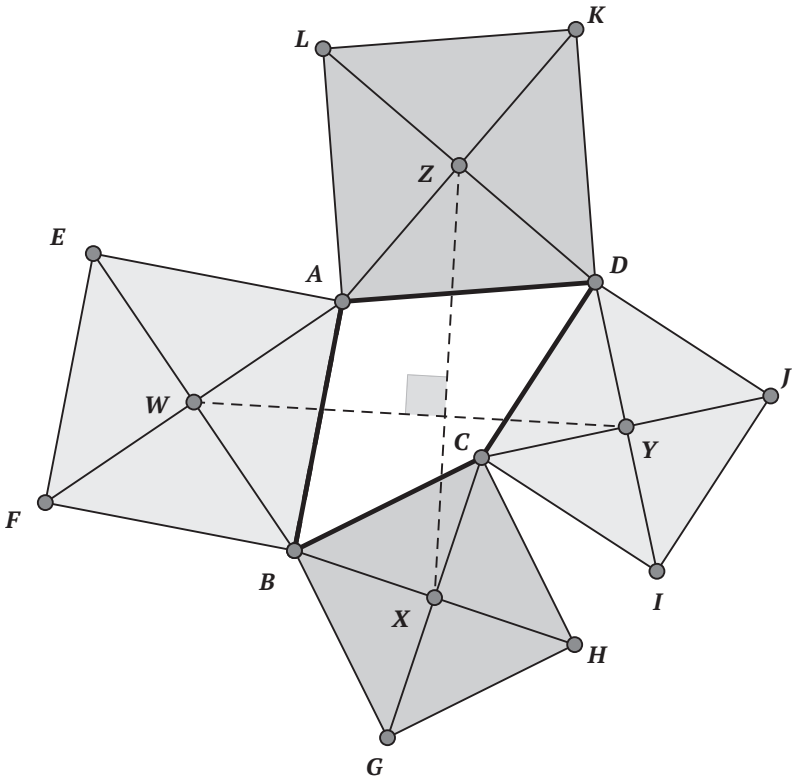


Рисунок 130

Пример 131. Линия, соединяющая середины диагоналей четырехугольника, – линия Ньютона

И снова, рассматривая произвольные четырехугольники, которые не обязательно являются циклическими, мы обнаруживаем еще одно довольно неожиданное обстоятельство. Сумма квадратов длин сторон любого четырехугольника равна сумме квадратов длин диагоналей плюс четыре длины отрезка, соединяющего рассматриваемые диагонали. Это проиллюстрировано на рис. 131, где в четырехугольнике $ABCD$ точки E и F являются серединами диагоналей AC и BD соответственно. То есть верно соотношение $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$. Отрезок EF, соединяющий середины диагоналей четырехугольника, представляет собой ньютоновскую линию четырехугольника, названную в честь английского математика Исаака Ньютона (1643–1727).

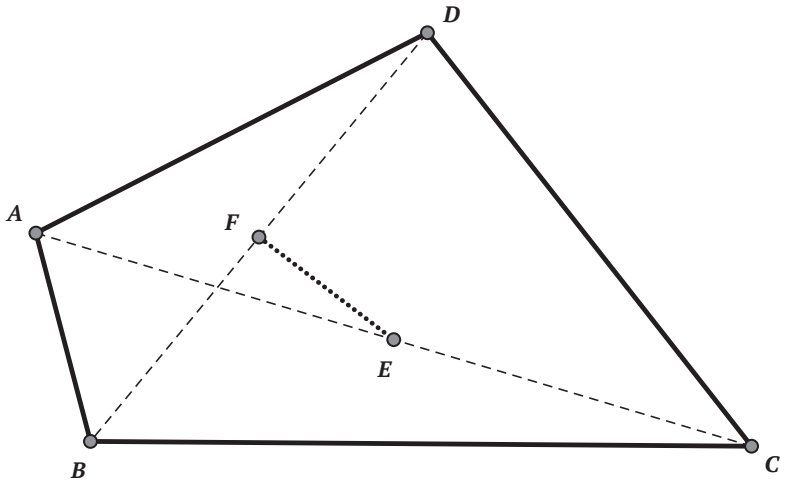


Рисунок 131

Пример 132. Разделение четырехугольника на две пары треугольников с равными суммами площадей

На рис. 132 мы начинаем с четырехугольника *ABCD*, который не является параллелограммом. Затем выбираем точку *P* в любом месте на линии Ньютона, которая является прямой, соединяющей середины *E* и *F* диагоналей *AC* и *BD* четырехугольника. Соединив точку *P* с каждой из четырех вершин четырехугольника, мы получаем четыре треугольника и, что удивительно, обнаруживаем, что

площадь треугольника [*PAB*] + площадь треугольника [*PCD*] =
площадь треугольника [*PBC*] + площадь треугольника [*PDA*].

Более того, верно и обратное: если точка *P* обладает свойством, что

площадь треугольника [*PAB*] + площадь треугольника
[*PCD*] = площадь треугольника [*PBC*] + площадь треугольника [*PDA*],

она должна лежать на прямой Ньютона. Этот довольно любопытный результат был впервые обнаружен французским математиком Пьером-Леоном Анном (1806–1850).

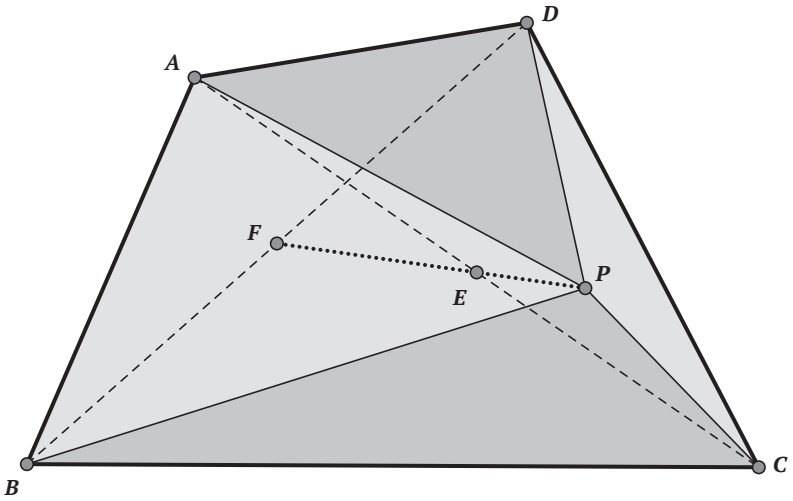


Рисунок 132

Пример 133. Описанный четырехугольник

Четырехугольник считается описанным, если существует окружность, которой он касается всеми четырьмя сторонами. На рис. 133 окружность с центром *O* касается сторон *AB*, *BC*, *CD* и *DA* четырехугольника *ABCD* в точках *E*, *F*, *G* и *H* соответственно. Одна из особенностей описанного четырехугольника заключается в том, что суммы пар противоположных сторон равны. То есть $AB + CD = BC + DA$. Обратное утверждение также верно, а именно если суммы пар противоположных сторон равны, то четырехугольник описан.

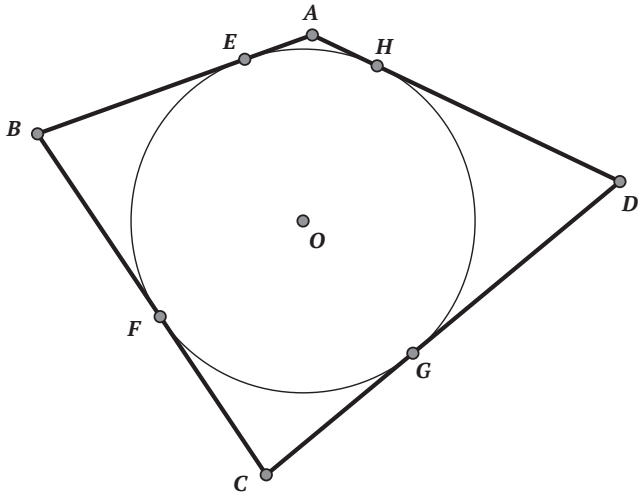


Рисунок 133

Пример 134. Линия Ньютона во вписанном четырехугольнике

Примечательно, что центр вписанной окружности *O* четырехугольника *ABCD* лежит на линии Ньютона этого четырехугольника. Как видно на рис. 134, точка *O* лежит на линии Ньютона *MN*, которая соединяет середины диагоналей четырехугольника *ABCD*.

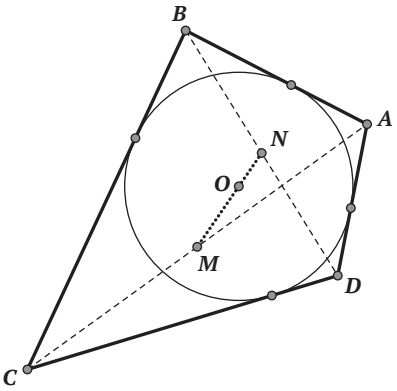


Рисунок 134

Пример 135. Подробнее о линии Ньютона в четырехугольнике со вписанной окружностью

Линия Ньютона *MN* в описанном четырехугольнике обладает еще одним интересным и неожиданным свойством. Мы видим это на рис. 135, где середина *G* линии Ньютона *MN* также является точкой пересечения диагоналей параллелограмма *WXYZ*, который образован соединением середин сторон исходного четырехугольника *ABCD*. (Напомним, что мы впервые столкнулись с этим параллелограммом, известным как параллелограмм Вариньона, в примере 44.)

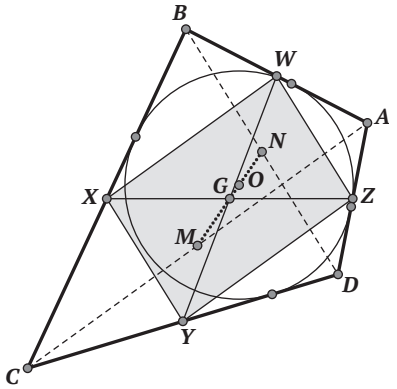


Рисунок 135

Пример 136. Поиск площади треугольника, составляющей одну четверть площади соответствующего четырехугольника

Неожиданный результат появляется при исследовании четырехугольника с парой противоположных сторон, продолжения которых пересекаются. На рис. 136 стороны *AB* и *CD* четырехугольника *ABCD* продолжены и пересекаются в точке *E*. После определения линии Ньютона, соединяющей середины точек *M* и *N* диагоналей *AC* и *BD* соответственно, появляется довольно неожиданное соотношение. Любопытно, что площадь треугольника *ENM* равна одной четверти площади исходного четырехугольника, а именно

площадь [ENM] = ¼ площади [ABCD].

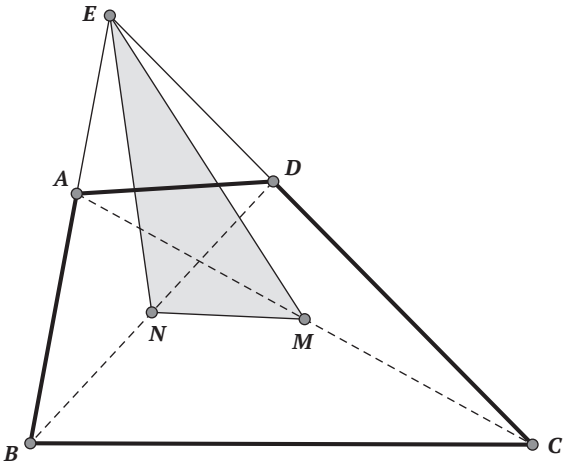


Рисунок 136

Пример 137. Середины диагоналей полного четырехугольника

Когда мы продолжаем противоположные стороны четырехугольника, который не является параллелограммом или трапецией, то обнаруживаем, что противоположные стороны будут пересекаться. Полученная конфигурация, состоящая из четырех прямых *EAB*, *BCF*, *CDE* и *FDA* вместе с шестью точками их пересечения *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *F*, называется полным четырехугольником. На рис. 137 полный четырехугольник образуется, когда стороны четырехугольника *ABCD* продолжаются, так как стороны *BA* и *CD* пересекаются в точке *E*, а стороны *AD* и *BC* пересекаются в точке *F*. В полном четырехугольнике есть три диагонали, а именно известные диагонали *AC* и *BD*, а также вновь образованная диагональ *EF*. Удивительно, но середины *M*, *N* и *R* трех диагоналей *AC*, *BD* и *EF* соответственно лежат на одной прямой. Другими словами, линия Ньютона содержит все три середины диагоналей.

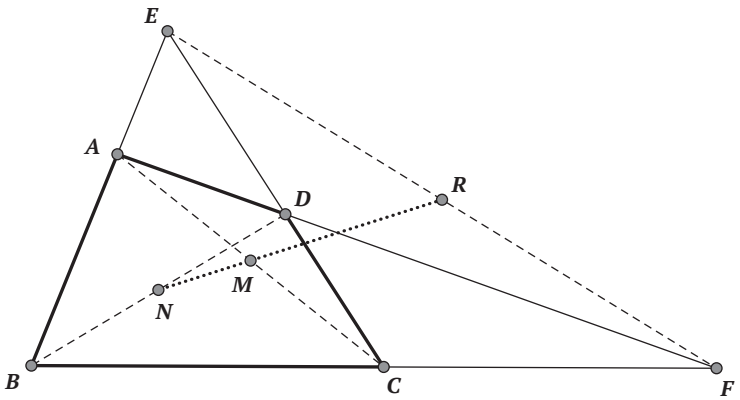


Рисунок 137

Пример 138. Разделение четырехугольника на четыре равные области

Еще одно интересное свойство площади получается, когда мы сосредоточиваемся на серединах сторон и серединах диагоналей четырехугольника *ABCD*. Середины диагоналей *AC* и *BD* – это *M* и *N* соответственно, а середины сторон *AB*, *BC*, *CD* и *DA* – это *W*, *X*, *Y* и *Z* соответственно, как показано на рис. 138. Мы проводим прямую, параллельную *AC*, через *N*, и прямую, параллельную *BD*, через *M*. Эти две прямые пересекаются в точке *P*. Соединив точку *P* с серединами каждой из сторон четырехугольника, мы получаем отрезки *PW*, *PX*, *PY* и *PZ*. Неожиданно выясняется, что таким способом мы делим четырехугольник *ABCD* на четыре области равной площади, причем

площадь [*AWPZ*] = площади [*BXPW*] = площади [*CYPX*] = площади [*DZPY*].

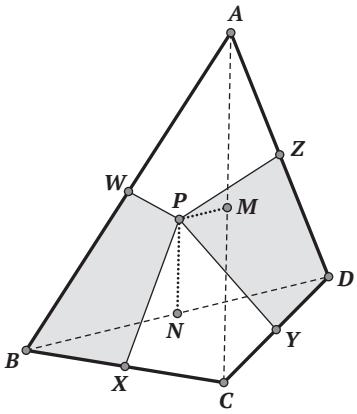


Рисунок 138

Пример 139. Разделение четырехугольника на две пары треугольников равной площади

Еще одно замечательное свойство вытекает из конфигурации, которую мы рассматривали в примере 138. Как видно на рис. 139, мы можем соединить точку *P*, установленную в примере 138, с вершинами четырехугольника *ABCD*. Затем мы обнаруживаем, что полученные пары противоположных треугольников имеют равные площади. То есть

площадь треугольника [*PAB*] = площади треугольника [*PCD*]

и

площадь треугольника [*PBC*] = площади треугольника [*PDA*].

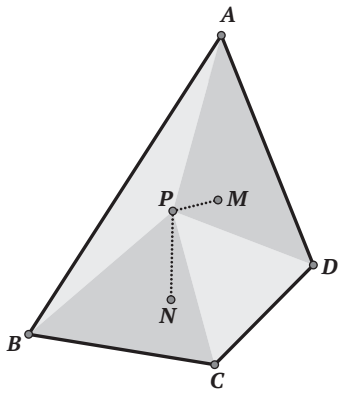


Рисунок 139

Пример 140. Окружность со вписанным и описанным четырехугольниками образует коллинеарные точки

На рис. 140 мы имеем вписанный четырехугольник $ABCD$, который порождает описанный четырехугольник $EFGH$, так что прямые HE, EF, FG и GH касаются описанной окружности $ABCD$ в точках A, B, C и D соответственно. Любопытно отметить, что продолжение диагонали FH четырехугольника $EFGH$ и продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в общей точке R. Аналогично продолжение диагонали EG четырехугольника $EFGH$ и продолжения сторон BC и AD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в общей точке S.

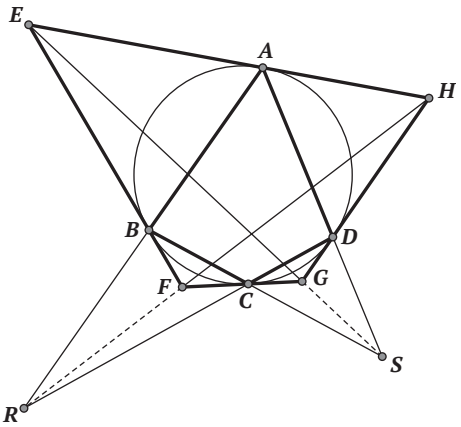


Рисунок 140

2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРИМЕРОВ

Пример 1. Четырехугольники в треугольниках

Этот пример является непосредственным следствием неравенства треугольника. Вспомним, что сумма длин двух сторон в треугольнике всегда больше длины третьей стороны, и применим это к данной ситуации следующим образом. На рис. 1-Р мы продлеваем BE и CD до точки P. Поскольку отрезок BP находится внутри угла $\angle CBA$, а отрезок CD находится внутри угла $\angle ACB$, эта точка P, безусловно, находится внутри треугольника ABC. Следовательно, мы можем провести прямую, параллельную BC, через точку P, и эта прямая пересекает AB в точке X и CA в точке Y.

Теперь мы можем применить неравенство треугольника к нескольким из полученных треугольников. В треугольнике AXY мы имеем $AX + AY >$ XY. В ΔXBP у нас $XB + XP > BP$, а в ΔYPC у нас $YP + YC > PC$. Наконец, в ΔPED у нас $PE + PD > DE$. Из этих неравенств получаем:

$$AB + BC + CA = (AX + XB) + BC + (AY + YC) =$$

$$(AX + AY) + XB + YC + BC > XY + XB + YC + BC =$$

$$(XP + YP) + XB + YC + BC = (XP + YP) + XB + YC + BC =$$

$$(XB + XP) + (YP + YC) + BC > PB + PC + BC =$$

$$(PE + EB) + (PD + CD) + BC =$$

$$BC + CD + (PE + PD) + EB > BC + CD + DE + EB.$$

Это показывает, что $AB + BC + CA > BC + CD + DE + EB$, как мы и пытались доказать.

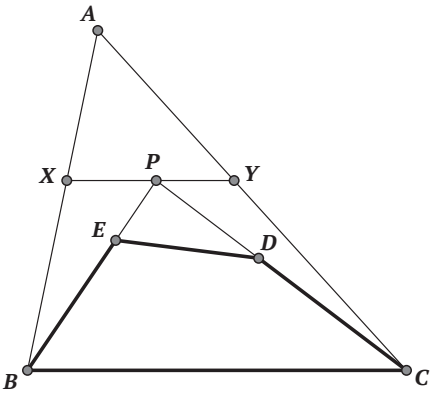


Рисунок 1-Р

Пример 2. Сравнение суммы диагоналей с суммой противоположных сторон четырехугольника

Начнем с применения неравенства треугольника к четырехугольнику *ABCD*, показанному на рис. 2-Р. В треугольнике *PAB* точка пересечения диагоналей *AC* и *BD* имеет вид $PA + PB > AB$, а в треугольнике *PCD* имеет вид $PC + PD > CD$. Складывая, получаем $AC + BD = (PA + PC) + (PB + PD) = (PA + PB) + (PC + PD) > AB + CD$.

Аналогично в треугольнике *PAD* имеет вид $PA + PD > AD$, а в треугольнике *PBC* имеет вид $PB + PC > BC$. Складывая, получаем $AC + BD = (PA + PC) + (PB + PD) = (PA + PD) + (PB + PC) > AD + BC$.

Следовательно, сумма диагоналей четырехугольника больше, чем сумма любой пары противоположных сторон.

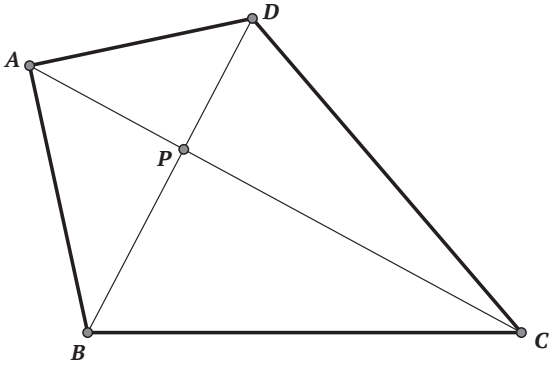


Рисунок 2-Р

Пример 3. Разделение трапеции на две равные по площади области

Площадь трапеции вычисляется как произведение высоты и среднего значения длин оснований. На рис. 3-P длина медианы *MN* равна среднему значению длин оснований *AB* и *CD*. Поскольку площадь каждой из двух трапеций *AEFD* и *BCFE* равна произведению одинаковой высоты с равными медианами *MP* = *NP*, то, следовательно, площади двух трапеций равны.

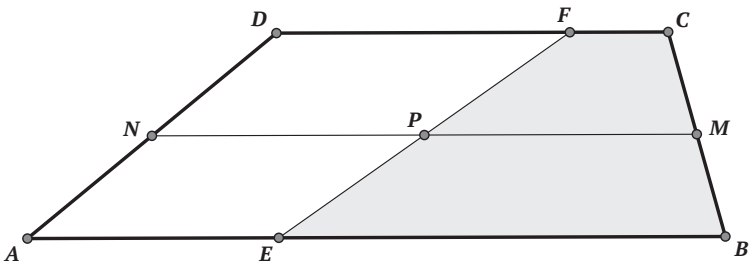


Рисунок 3-P

Пример 4. Неожиданный треугольник, площадь которого вдвое меньше площади трапеции

Начнем с проведения прямой через середину *P* треугольника *DA*, параллельной основанию *AB*, которая пересекает *BC* в точке *R*. Также проведем высоту *CH* перпендикулярно стороне *AB* в точке *H* и пересекающую *PR* в точке *G*. Для удобства длины отрезков, как показано на рис. 4-P, обозначим сторону *AB* как *a*, сторону *CD* как *c*, отрезок *CG* = *h* = *GH* и отрезок *PR* = *m*. Поскольку площадь треугольника [*CPR*] = ½ *mh* = площади треугольника [*BRP*].

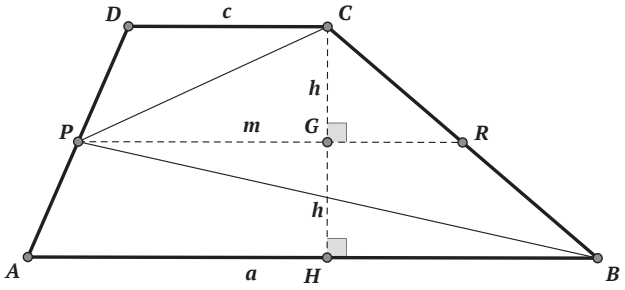


Рисунок 4-P

Сумма площадей двух треугольников Δ*CPR* и Δ*BRP* равна площади треугольника [*BCP*] = площадь треугольника[*CPR*] + площадь треугольника[*BRP*] = *mh*. Однако поскольку *P* является серединой стороны *DA*, мы имеем площадь [*ABCD*] = 2*mh*, и сумма площадей двух треугольников равна, следовательно, половине площади трапеции, при этом

площадь треугольника [*BCP*] = ½ площади четырехугольника [*ABCD*].

Пример 5. Удивительная линия, соединяющая середины диагоналей трапеции

Средняя линия треугольника – это линия, соединяющая середины двух сторон треугольника, параллельная третьей стороне и равная половине длины третьей стороны.

На рис. 5-Р точка G – середина BC, а точки E и F – середины диагоналей AC и BD соответственно. В треугольнике ABC отрезок EG является средней линией, поэтому $EG = \frac{1}{2}AB$. Также линия FG является средней линией BCD, поэтому $FG = \frac{1}{2}CD$.

Поскольку $EF = EG - FG$, то, подставляя значения, получаем

$$EF = EG - FG = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}(AB - CD).$$

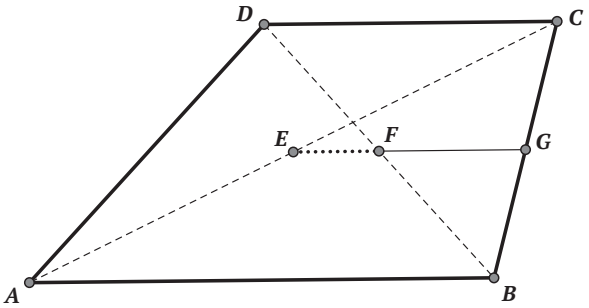


Рисунок 5-Р

Пример 6. Неожиданная коллинеарность в трапеции

Мы легко можем заметить, что $\Delta PAB \sim \Delta PCD$ в результате их параллельных оснований и равных вертикальных углов, как показано на рис. 6-Р. Следовательно, $\frac{AP}{CP} = \frac{AB}{CD}$. Поскольку точки E и F являются серединами сторон AB и CD соответственно, мы также имеем $\frac{AP}{CP} = \frac{AE}{CF}$. Вместе с равенством $\angle EAP = \angle FCP$ получаем $\Delta PAE \sim \Delta PCF$. Следовательно, $\angle APE = \angle CPF$. Поскольку APC – прямая линия, тогда следует, что EPF также является прямой линией, что доказывает коллинеарность точек E, P и F.

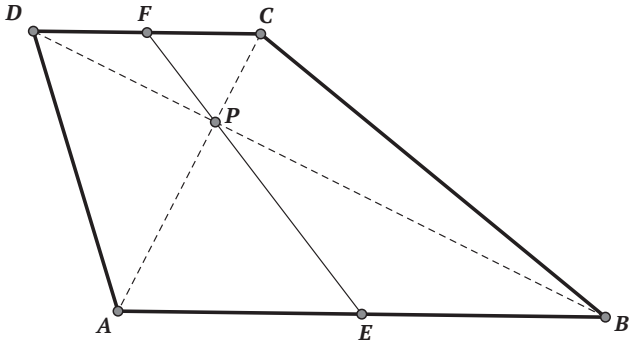


Рисунок 6-Р

Пример 7. Удивительная параллельность, создаваемая трапецией

На рис. 7-P мы сначала строим отрезок *RS* через точку *F* параллельно стороне *AB*, где *R* на *DA* и *S* на *BC*. Пусть *h* обозначает высоту трапеции *ABCD*, а *j* – высоту треугольника *FAB* относительно основания *AB*, заметим, что *h* также является расстоянием обоих треугольников *ACD* и *BCD* относительно основания *CD*. Кроме того, линия *j* тоже является высотой обоих треугольников *AFR* и *BSF* относительно их оснований *FR* и *SF* соответственно.

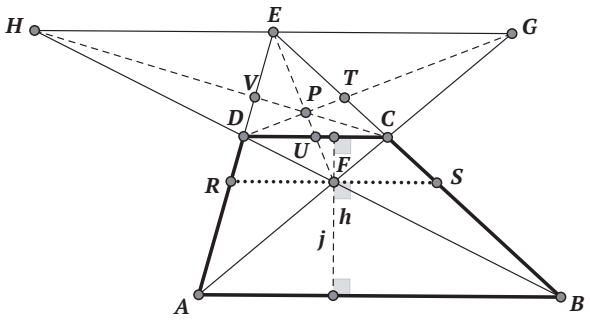


Рисунок 7-P

Поскольку мы выбрали *RFS*, параллельный стороне *AB* (а также стороне *CD*), имеем $\Delta ACD \sim \Delta AFR$ и $\Delta BCD \sim \Delta BSF$, и, следовательно, выполняется $\frac{RF}{CD} = \frac{j}{h} = \frac{SF}{CD}$, из чего получаем $RF = SF$.

Теперь обозначим точку *T* как пересечение *DG* и *CE*, точку *U* как пересечение *CD* и *EF*, а точку *V* как пересечение *CH* и *DE*. Тогда имеем $\Delta DCT \sim \Delta GET$ и $\Delta ACD \sim \Delta AGE$ и приходим к выражению $\frac{ET}{TC} = \frac{EG}{DC} = \frac{EA}{DA}$. Аналогично у нас также есть $\Delta DCV \sim \Delta EHV$ и $\Delta BCD \sim \Delta BEH$, что дает $\frac{DV}{VE} = \frac{CD}{EH} = \frac{BC}{EB}$. Однако поскольку $\Delta EDC \sim \Delta EAB$, мы получаем выражение $\frac{EA}{DA} = \frac{EB}{BC}$, откуда следует, что верно $\frac{ET}{TC} \cdot \frac{DV}{VE} = \frac{EA}{DA} \cdot \frac{BC}{EB} = 1$. Теперь, используя *RS* и подобные треугольники $\Delta EDU \sim \Delta ERF$ и $\Delta EUC \sim \Delta EFS$, мы получаем выражение $\frac{DU}{RF} = \frac{EU}{EF} = \frac{UC}{FS}$. Поскольку $RF = FS$, это означает, что $DU = UC$, или $\frac{DU}{UC} = 1$. Таким образом, мы имеем: $\frac{DV}{VE} \cdot \frac{ET}{TC} \cdot \frac{CU}{UD} = \frac{DV}{VE} \cdot \frac{ET}{TC} \cdot \frac{FS}{RF} = 1$. И по теореме Чевы (см. «Инструментарий») в треугольнике ΔCDE мы имеем *CH*, *DG* и *EF* как пересекающиеся прямые.

Пример 8. Еще одна удивительная конвергенция, порожденная трапецией

Теорема Дезарга (см. «Инструментарий») позволяет нам доказать эту конвергенцию. Наша цель – показать, что прямые *CD*, *GE* и *BI*, которые соединяют соответствующие вершины ΔDIE и ΔCGB, показанные на рис. 8-P, пересекаются. Чтобы применить теорему Дезарга, мы должны сначала показать, что точки пересечения сторон этих треугольников являются коллинеарными. Мы определяем точку пересечения сторон *AD* и *BC* как точку *P*, а точку пересечения отрезков *CG* и *DE* как точку *Q*. У нас есть условие параллельности отрезков *AB*, *GF* и *DC*.

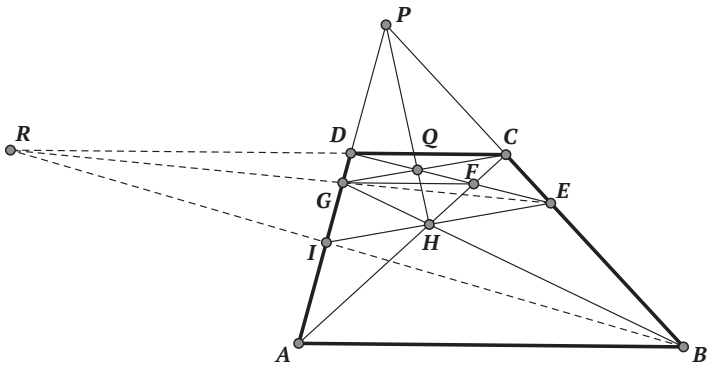


Рисунок 8-P

Следовательно, $\frac{DQ}{FQ} = \frac{CD}{FG}$, $\frac{FH}{AH} = \frac{FG}{AB}$ и $\frac{AP}{DP} = \frac{AB}{CD}$. Таким образом выполняется соотношение $\frac{DQ}{FQ} \cdot \frac{FH}{AH} \cdot \frac{AP}{DP} = \frac{CD}{FG} \cdot \frac{FG}{AB} \cdot \frac{AB}{CD} = 1$, и, применяя теорему Менелая (см. «Инструментарий») к треугольнику *DFA*, мы видим, что *Q*, *H* и *P* коллинеарны. Затем, применяя теорему Дезарга к треугольникам ΔDIE и ΔCGB, мы находим, что прямые *CD*, *EG* и *BI* пересекаются в точке *R*.

Пример 9. Любопытное равенство углов

На рис. 9-P показано что $\angle ADE = \angle FCB$, мы имеем $\angle FDE = \angle FCE$, *и четырехугольник FECD*, *таким образом*, *является вписанным*, *поскольку эти два равных угла были бы вписаны в одну и ту же дугу. Тогда мы имеем* $\angle FDC = \angle FEB$, поскольку оба являются дополнительными к $\angle CEF$. Поскольку $\angle FDC = \angle BAD = 180°$, мы тогда имеем $\angle FBE = \angle BAF = 180°$, что доказывает, что *ABEF* является вписанным четырехугольником. Так как $\angle CFD = \angle CED$ и $\angle AFB = \angle AEB$ в циклических четырехугольниках *FECD* и *ABEF* соответственно, получаем соотношения $\angle BFC = 180° - \angle CFD - \angle AFB = 180° - \angle CED - \angle AEB = \angle DEA$, что завершает доказательство.

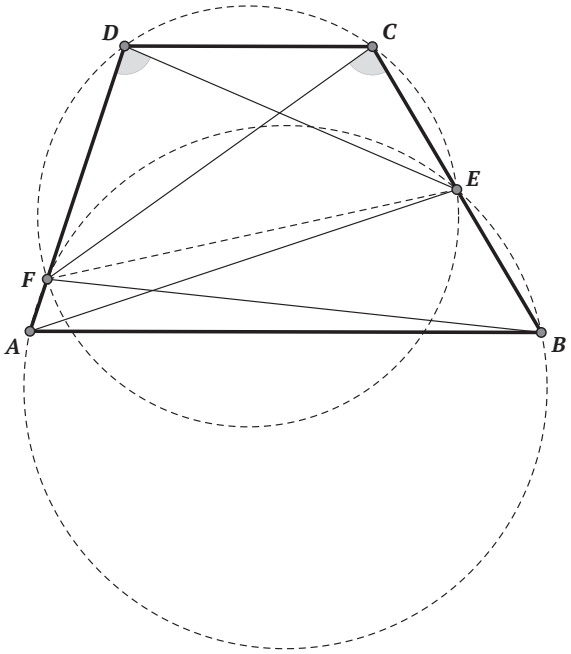


Рисунок 9-Р

Пример 10. Любопытное равенство отрезков

Как показано на рис. 10-Р, *ABCD* – равнобедренная трапеция, поэтому мы имеем $\angle BAD = \angle CBA$ и $BC = DA$. Отсюда следует, что $\Delta ABD \cong \Delta ABC$, где $\angle DBA = \angle BAC$. Поскольку $\angle AEB = \angle CED = 60°$, треугольник *ABE* является равносторонним.

Так как *F* – середина *BE*, мы находим, что $AF \perp BE$ в равностороннем треугольнике *ABE*. Кроме того, *FG* – медиана, проведенная к стороне *AD* прямоугольного треугольника *AFD*. Следовательно, $FG = \frac{1}{2}AD = AG$.

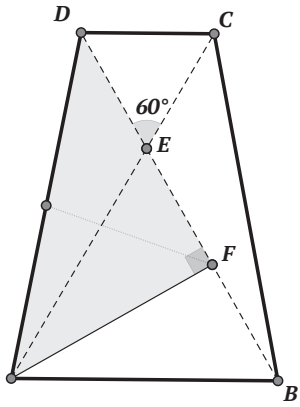


Рисунок 10-Р

Пример 11. Удивительное разбиение общего четырехугольника

На рис. 11a-P мы начинаем с построения отрезка *EF*, который, как медиана треугольников *ABF* и *CDE*, делит оба треугольника на две равные площади. Для упрощения нашего обсуждения мы определим площади малых треугольников, как показано на рис. 11a-P, как *p*, *q*, *r*, *s*, *u* и *v*. Это дает соотношения $p + u = v + q$ и $r + u = v + s$, а путем вычитания получаем выражения $p - r = q - s$, или $p + s = r + q$.

На рис. 11b-P мы начинаем с построения отрезка *BD*, а затем сосредоточиваемся на треугольниках *ABD* и *BCD*. Отрезок *DE* является медианой треугольника *ABD* и, следовательно, делит его площадь пополам. Аналогично отрезок *BF* является медианой треугольника *BCD* и делит его площадь пополам. По аналогии с рис. 11a-P, мы снова определим площади малых треугольников и четырехугольников, показанных на рис. 11b-P, как *a*, *b*, *d*, *e*, *f*, *h*, *i*, *j*, *q* и *r*. Поскольку медианы делят площади треугольников пополам, мы получаем $f + a + i = q + h$ и $d + r = e + b + j$. Эти уравнения можно переписать как $a = q + h - f - i$ и $b = d + r - e - j$ соответственно. В результате сложения получаем $a + b = q + d + h + r - f - i - e - j = q + d + h + r - (f + i + e + j)$. Возвращаясь к рис. 11a-P, замечаем, что верны выражения $p = e + f$ и $s = i + j$. Поскольку мы вывели соотношение $p + s = r + q$, то верно $e + f + i + j = r + q$, и, подставляя это выражение в предыдущее соотношение $a + b$, получаем $a + b = q + d + h + r - (r + q) = d + h$. Следовательно,

площадь четырехугольника [*EHFG*] = площадь треугольника [*AGD*] + площадь треугольника [*BCH*].

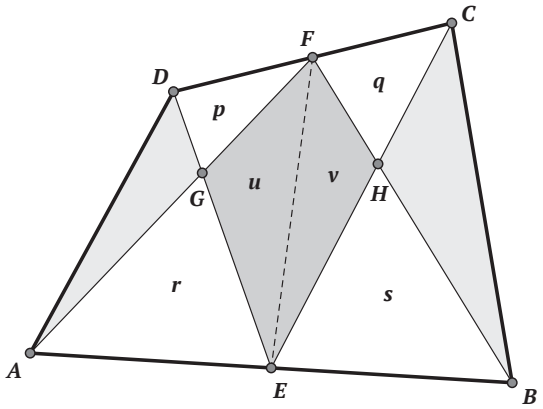


Рисунок 11a-P

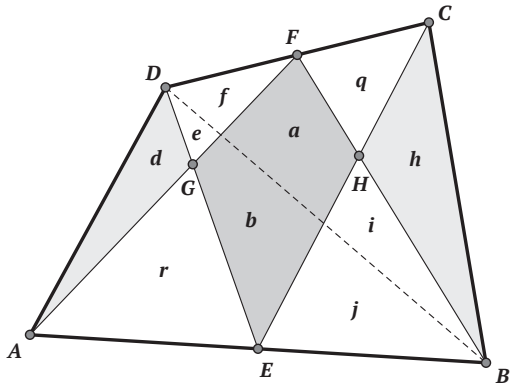


Рисунок 11b-P

Пример 12. Разделенные на три части стороны четырехугольника определяют одну треть четырехугольника

Начнем с того, что нарисуем линии *DF*, *FH* и *HB*, как показано на рис. 12a-P. Используя соотношение, согласно которому медиана делит треугольник на две равные площади, получим:

площадь треугольника [*GHF*] = ½ площади треугольника [*DHF*]

и

площадь треугольника [*EFH*] = ½ площади треугольника [*BFH*].

Отсюда следует, что

площадь четырехугольника [*EFGH*] = площадь треугольника [*GHF*] + площадь треугольника [*EFH*] = ½ площади треугольника [*DHF*] + ½ площади треугольника [*BFH*] = ½ площади четырехугольника [*BFDH*].

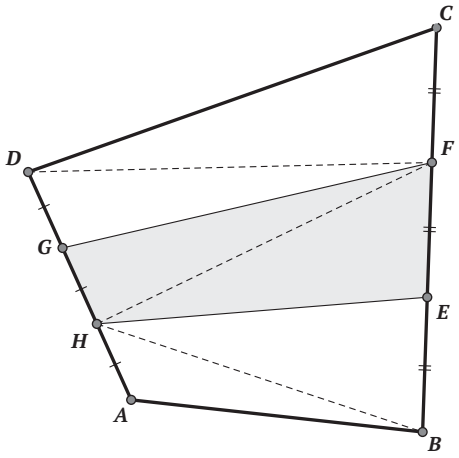


Рисунок 12a-P

Далее рассмотрим рис. 12b-P, где верны соотношения $DH = 2HA$ и $BF = 2FC$, так что

площадь четырехугольника [*BFDH*] = площадь треугольника [*DHB*] + площадь треугольника [*BFD*] = ⅔ площади треугольника [*DAB*] + ⅔ площади треугольника [*BCD*] = ⅔ площади четырехугольника [*ABCD*].

Поскольку нам уже известно, что

площадь четырехугольника [*EFGH*] = ½ площади четырехугольника [*BFDH*],

отсюда следует, что

площадь четырехугольника [EFGH] = ½ площади четырехугольника [*BFDH*] = ½ · ⅔ площади четырехугольника [*ABCD*] = ⅓ площади четырехугольника [*ABCD*].

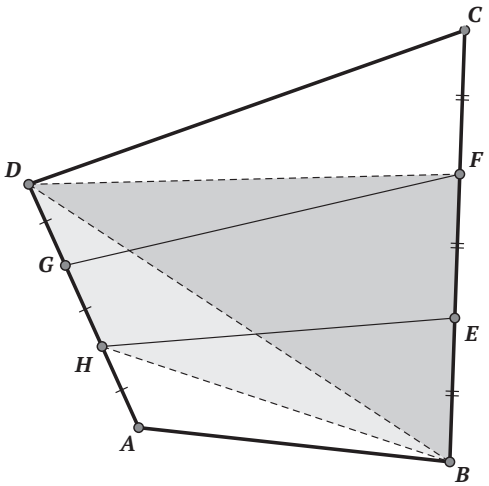


Рисунок 12b-P

Пример 13. Разделение четырехугольника пополам

На рис. 13-P отрезок *CM* является медианой треугольника *BCD*, поэтому

площадь треугольника [*DMC*] = площадь треугольника [*MBC*].

Аналогично для треугольника *BAD*

площадь треугольника [*DAM*] = площадь треугольника [*MAB*].

Путем сложения получаем, что

площадь четырехугольника [*AMCD*] = площадь треугольника [*DMC*] +
площадь треугольника [*DAM*] = площадь треугольника [*MBC*] +
площадь треугольника [*MAB*] = площадь четырехугольника [*ABCM*].

Поскольку треугольники Δ*EMA* и Δ*EMC* имеют общее основание *EM* и их вершины лежат на прямой, параллельной основанию, это указывает на одинаковую высоту.

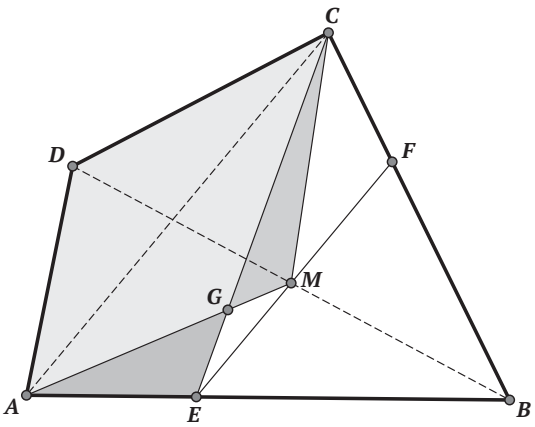


Рисунок 13-P

Если

площадь треугольника [*EMA*] = площадь треугольника [*EMC*],

то

площадь треугольника [*AEG*] = площадь треугольника [*EMA*].

Если точка пересечения отрезков *AM* и *CE* находится в точке *G*, как показано на рис. 13-P, то

площадь треугольника [*AEG*] = площадь треугольника [*EMA*] –
площадь треугольника [*EMG*] = площадь треугольника [*EMC*] –
площадь треугольника [*EMG*] = площадь треугольника [*CGM*].

Это позволяет нам заключить, что

площадь четырехугольника [*AECD*] = площадь [*AMCD*] –
площадь треугольника [*CGM*] + площадь треугольника [*AEG*] =
площадь четырехугольника [*ABCM*] + площадь треугольника [*CGM*] –
площадь треугольника [*AEG*] = площадь треугольника [*EBC*],

или

площадь четырехугольника [*AECD*] = площадь треугольника [*EBC*].

Пример 14. Разделение четырехугольника на три равные по площади части

Начнем доказательство с проведения отрезка *DM* параллельно отрезку *AC*, где точка *M* – это пересечение этой параллельной линии с продолжением стороны *BC*, как показано на рис. 14-Р. Поскольку *DG* = *GF* = *FE*, то верно соотношение *ML* = *LK* = *KB*, и, следовательно,

площадь треугольника [*ALM*] = площадь треугольника [*AKL*] = площадь треугольника [*ABK*].

Точка *N* – это пересечение отрезков *CD* и *AM*. Теперь нам нужно показать, что

площадь треугольника [*AND*] = площадь треугольника [*CMN*].

Мы знаем, что отрезок *DM* параллелен отрезку *AC*, поэтому

площадь треугольника [*ACD*] = площадь треугольника [*ACM*].

Из этого получаем:

площадь треугольника [*AND*] = площадь треугольника [*ACD*] – площадь треугольника [*ACN*] = площадь треугольника [*ACM*] – площадь треугольника [*ACN*] = площадь треугольника [*CMN*].

Таким образом, мы имеем

площадь четырехугольника [*ALCD*] = площадь треугольника [*ALM*] – площадь треугольника [*CMN*] + площадь треугольника [*AND*].

Поскольку у нас есть три треугольника равной площади,

площадь [*ALM*] = площадь треугольника [*AKL*] = площадь треугольника [*ABK*],

мы заключаем, что

площадь четырехугольника [*ALCD*] = площадь треугольника [*AKL*] = площадь треугольника [*ABK*],

что и пытались доказать.

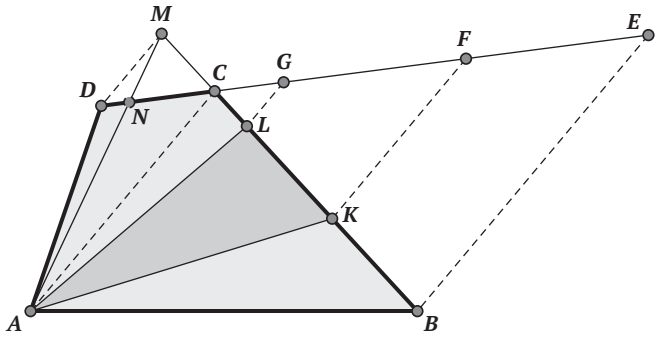


Рисунок 14-P

Пример 15. Еще одно разделение четырехугольника на три области равной площади

На рис. 15-P отрезок *PE* пересекает сторону четырехугольника *DA* в точке *X*, а отрезок PG пересекает сторону *BC* в точке *Y*. Также отрезок *KM* проведен параллельно отрезку *PC*, пересекая сторону *BC* в точке *M*. Наконец, отрезки *CD* и *PM* пересекаются в точке *N*. Сначала отметим, что поскольку *KM*, *LG* и *BF* параллельны и *KG* = *GF*, то *ML* = *LB*, и, следовательно,

площадь треугольника [*PLM*] = площадь треугольника [*PBL*].

Поскольку отрезки *KM* и *PC* параллельны, то

площадь треугольника [*PCK*] = площадь треугольника [*PCM*],

так как они имеют общее основание и вершины на параллельных линиях. Затем мы получаем:

площадь треугольника [*PNK*] = площадь треугольника [PCK] –
площадь треугольника [PCN] = площадь треугольника [PCM] –
площадь треугольника [*PCN*] = площадь треугольника [*CMN*],

и из этого получаем:

площадь четырехугольника [*PLCK*] = площадь четырехугольника [*PLCN*] +
площадь треугольника [*PNK*] = площадь четырехугольника [*PLCN*] +
площадь треугольника [*CMN*] = площадь треугольника [*PLM*],

что дает:

площадь четырехугольника [*PLCK*] = площадь треугольника [*PLM*] =
площадь треугольника [*PBL*].

Далее отметим, что отрезки *EK* = *KG*, и, следовательно,

площадь треугольника [*PKE*] = площадь треугольника [*PGK*].

Поскольку отрезки AE и *PD* параллельны, мы имеем

площадь треугольника [PDA] = площадь треугольника [PDE],

и, следовательно,

площадь треугольника [*PXA*] = площадь треугольника [*PDA*] –
площадь треугольника [*PDX*] = площадь треугольника [*PDE*] –
площадь треугольника [*PDX*] = площадь треугольника [*DEX*].

Кроме того, поскольку отрезки *LG* и *PC* параллельны, мы имеем

площадь треугольника [*CPL*] = площадь треугольника [*CPG*],

и, следовательно,

площадь треугольника [*PLY*] = площадь треугольника [*CPL*] –
площадь треугольника [*CPY*] = площадь треугольника [*CPG*] –
площадь треугольника [*CPY*] = площадь треугольника [*CYG*].

Подставляя, получаем:

площадь четырехугольника [*APKD*] = площадь треугольника [*PXA*] +
площадь [*PKDX*] = площадь треугольника [*DEX*] +
площадь четырехугольника [*PKDX*] = площадь треугольника [*PKE*] =
площадь треугольника *[PGK*] = площадь треугольника [*CYG*] +
площадь четырехугольника [*PYCK*] = площадь треугольника [*PLY*] =
площадь четырехугольника [*PYCK*] = площадь четырехугольника [*PLCK*].

Это дает нам:

площадь четырехугольника [*APKD*] = площадь четырехугольника [*PLCK*],

и, следовательно, мы имеем

площадь четырехугольника [*APKD*] =
площадь четырехугольника [*PLCK*] = площадь треугольника [*PBL*].

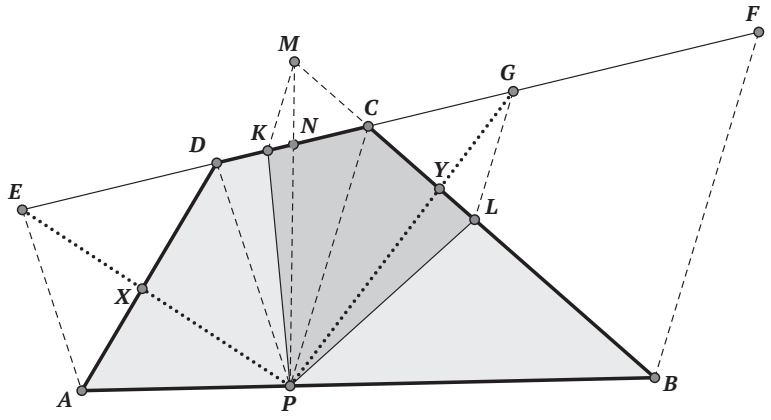


Рисунок 15-P

Пример 16. Когда два четырехугольника имеют общие середины

Прежде чем приступить к искомому доказательству, рассмотрим четырехугольник *JKLM*, вершины которого находятся в серединах сторон четырехугольника *ABCD*, как показано на рис. 16а-Р. Также проведем диагональ *BD* четырехугольника *ABCD*. Поскольку *J* и *M* являются серединами сторон AB и *DA* соответственно, треугольники *AJM* и *ABD* подобны с соотношением площадей треугольника [*AJM*] = ¼ площади треугольника [*ABD*]. Аналогично *L* и *K* являются серединами *CD* и *BC* соответственно, а треугольники *CLK* и *CDB* подобны с соотношением площадей треугольника [*CLK*] = ¼ площади треугольника [*CBD*]. Мы складываем площади, чтобы получить:

площадь треугольника [*AJM*] + площадь треугольника [*CLK*] =
¼ площади треугольника [*ABD*] + ¼ площади треугольника [*CDB*] =
¼ площади треугольника [*ABD*] + площадь треугольника [*CDB*]) =
¼ площади четырехугольника [*ABCD*].

Аналогично мы можем использовать диагональ *AC*, чтобы определить, что

площадь треугольника [*BKJ*] + площадь треугольника [*DML*] =
¼ площади четырехугольника [*ABCD*].

Из этого мы получаем:

площадь четырехугольника [JKLM] = площадь четырехугольника [ABCD] –
(площадь треугольника [AJM] + площадь треугольника [CLK]) –
(площадь треугольника [BKJ] + площадь треугольника [DML]) =
площадь четырехугольника [*ABCD*] – ¼ площади четырехугольника [*ABCD*] –
¼ площади четырехугольника [*ABCD*] = ¼ площади четырехугольника [*ABCD*].

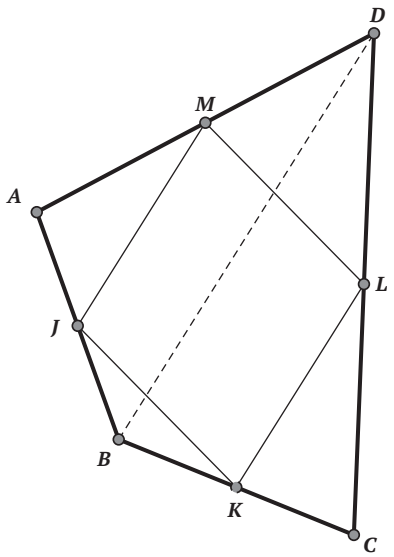


Рисунок 16а-Р

Мы видим, что площадь четырехугольника *JKLM* ровно вдвое меньше площади четырехугольника *ABCD*.

На рис. 16b-P мы рассматриваем ситуацию, описанную в исходном примере. Если два четырехугольника *ABCD* и *EFGH* образуют один и тот же четырехугольник *JKLM* при соединении середин их сторон, то их площади равны удвоенной площади *JKLM*. Следовательно, их площади также должны быть равны. Кстати, на этом этапе должно быть очевидно, что четырехугольник *JKLM* всегда будет параллелограммом!

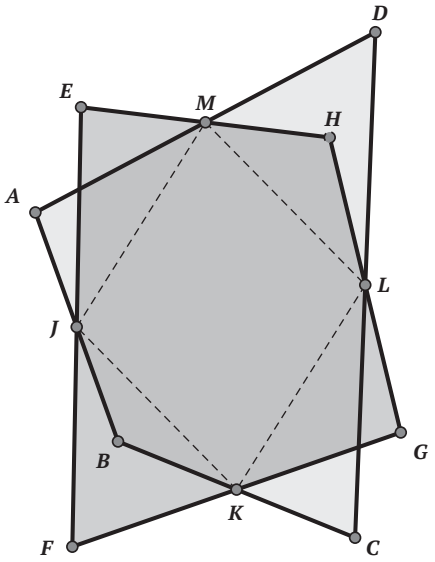


Рисунок 16b-P

Пример 17. Определение центра тяжести четырехугольника

Этот пример отличается от других, которые мы доказываем, тем, что рассматриваемое свойство, центр тяжести, имеет несколько физическую природу. В конце концов, «балансирование на кончике булавки» – это не совсем математическое понятие в строгом смысле слова.

Давайте сначала рассмотрим значение этого понятия применительно к треугольнику, показанному на рис. 17a-P. Центр тяжести *G* треугольника *ABC* определяется как точка пересечения трех медиан *AD*, *BE* и *CF*. Если мы поместим треугольник *ABC* на тонкую грань вдоль линии *AD*, то треугольник будет уравновешен, поскольку площади треугольников *ABD* и *ADC* равны.

Аналогично если его поместить вдоль медианы *BE*, он также будет уравновешен, поскольку площади треугольников *BCE* и *BEA* равны, и он также будет уравновешен, если его поместить вдоль медианы *CF*.

Здесь возможны некоторые (легкие) физические рассуждения. Если существуют две такие линии, вдоль которых фигура будет находиться в равновесии, то фигура также должна находиться в равновесии, если ее поместить на кон-

чик булавки в точке пересечения этих линий. В случае треугольника *ABC* это центроид *G*.

Следствием этого является также то, что треугольник будет находиться в равновесии, если его поместить вдоль любой линии, проходящей через центроид *G*.

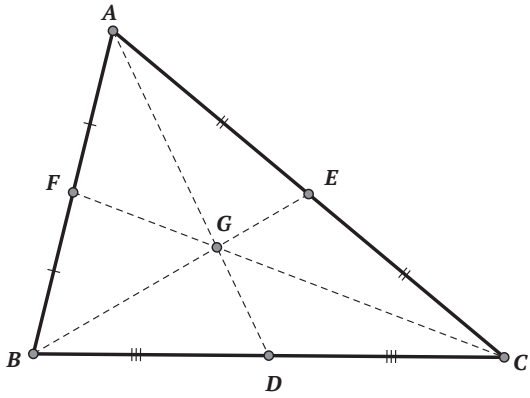


Рисунок 17a-P

Теперь рассмотрим конструкцию, показанную на рис. 17b-P. Поскольку *M* является центроидом треугольника *ACD*, этот треугольник будет находиться в равновесии, если его расположить на любой стороне, проходящей через *M*. Аналогично поскольку *N* является центроидом треугольника *ABC*, этот треугольник будет находиться в равновесии, если его расположить на любой стороне, проходящей через *N*.

Это означает, что оба треугольника *ABC* и *ACD*, а следовательно, и четырехугольник *ABCD* будут находиться в равновесии, если их расположить на прямой *MN*.

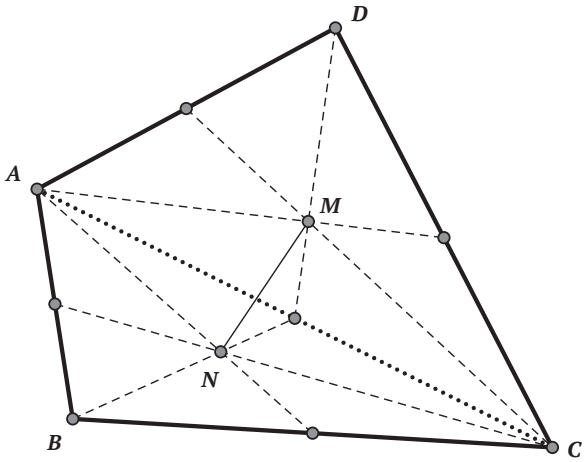


Рисунок 17b-P

Далее рассмотрим аналогичную ситуацию, изображенную на рис. 17c-P.

Поскольку *K* является центроидом треугольника *ABD*, этот треугольник будет находиться в равновесии, если его расположить на любой стороне, проходящей через *K*. Аналогично поскольку *L* является центроидом треугольника *BCD*, этот треугольник будет находиться в равновесии, если его расположить на любой стороне, проходящей через *L*. Это означает, что оба треугольника, *ABD* и *BCD*, и, следовательно, четырехугольник *ABCD* будут находиться в равновесии, если их расположить на прямой *KL*.

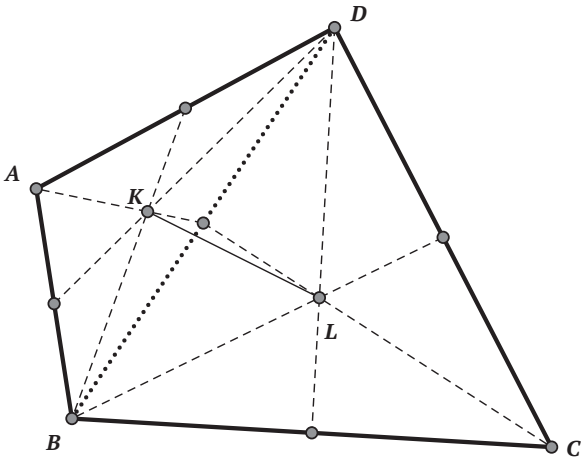


Рисунок 17c-P

Поскольку точка *G* является точкой пересечения *KL* и *MN*, как показано на рис. 17d-P, следовательно, мы видим, что четырехугольник *ABCD* будет находиться в равновесии, если его поместить на кончик булавки в точке *G*, как мы и хотели показать.

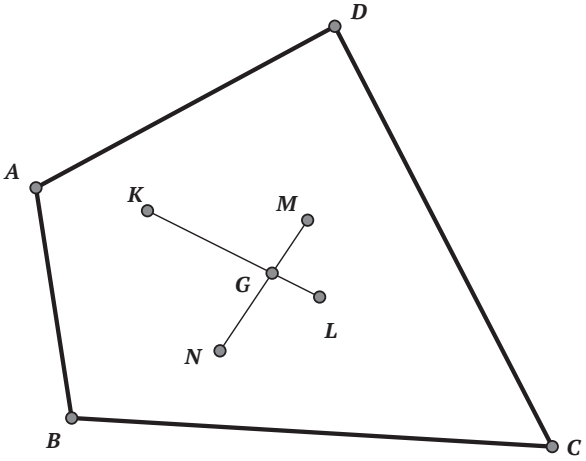


Рисунок 17d-P

Пример 18. Центроиды могут генерировать подобный четырехугольник в соотношении размеров 1:9

На рис. 18-P мы сложили середины отрезков *P*, *Q* и *R* отрезков *BD*, *AD* и *CD* соответственно. Используя эти точки, мы можем применить несколько гомотетий (см. «Инструментарий») для получения результата.

Сначала мы получаем отрезок *QP* из *AB*, применяя гомотетию с центром *D* и множителем ½. Мы видим, что *QP* параллелен *AB*, причем $QP = \frac{1}{2}AB$. Поскольку *M* является центроидом треугольника *ACD*, он разделяет медиану *CD* таким образом, что $CM = \frac{2}{3}CQ$. Аналогично поскольку *L* является центроидом треугольника *BCD*, он разделяет медиану *CP* таким образом, что $CL = \frac{2}{3}CP$. Это означает, что отрезок *ML* получается из *QP* путем гомотетии с центром *C* и множителем ⅔ и *ML* параллелен *QP*, причем $ML = \frac{2}{3}QP$. В итоге получаем $ML \| QP \| AB$, где $ML = \frac{2}{3}QP = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{3}AB$. Аналогично поскольку *AR* является медианой треугольника *ACD*, а *K* – центроид треугольника *ABD*, получаем также $MK \| RP \| CB$, где $MK = \frac{2}{3}RP = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}CB = \frac{1}{3}CB$.

Поскольку $ML \| AB$ с $ML = \frac{1}{3} \cdot AB$ и $MK \| CB$ с $MK = \frac{1}{3}CB$, треугольники *LMK* и *ABC* подобны, и поскольку длины сторон треугольника *LMK* равны ⅓ длинам сторон треугольника *ABC*, площадь треугольника *LMK* равна $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ площади треугольника *ABC*.

Теперь мы можем рассуждать аналогично для треугольников *KNL* и *CDA*, так что $\Delta KNL \sim \Delta CDA$. Длины сторон треугольника *KNL* равны ⅓ длинам сторон *CDA*, а площадь треугольника *KNL* равна $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ площади треугольника *CDA*. Поскольку четырехугольник *ABCD* состоит из треугольников *ABC* и *ACD*, а четырехугольник *KNLM* подобен треугольникам *LMK* и *KNL*, мы видим, что четырехугольники *ABCD* и *KNLM* подобны, причем площадь четырехугольника [*ABCD*] = 9 · площадь четырехугольника [*KNLM*].

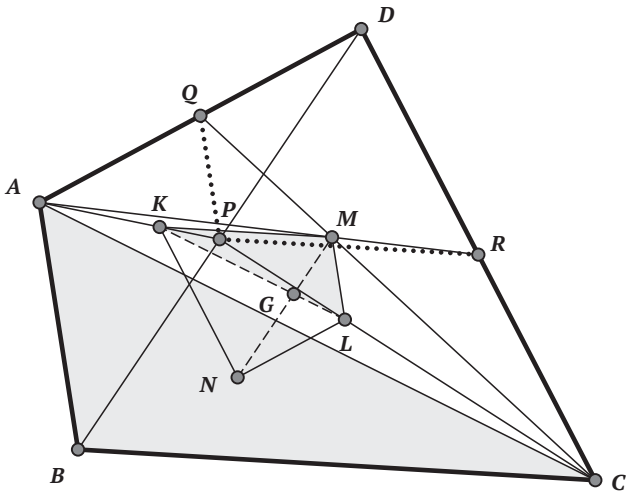


Рисунок 18-P

Пример 19. Точка минимального расстояния четырехугольника

Как мы уже видели в примерах 1 и 2, существуют соотношения, которые вытекают из неравенства треугольника, которое гласит, что сумма длин любых двух сторон треугольника больше длины третьей стороны. В ΔPDB, который мы видим на рис. 19-Р, у нас $PB + PD > BD = QB + QD$, а в ΔPAC у нас $PA + PC > AC = QA + QC$. Следовательно, путем сложения получаем $PA + PB + PC + PD > QA + QB + QC + QD$.

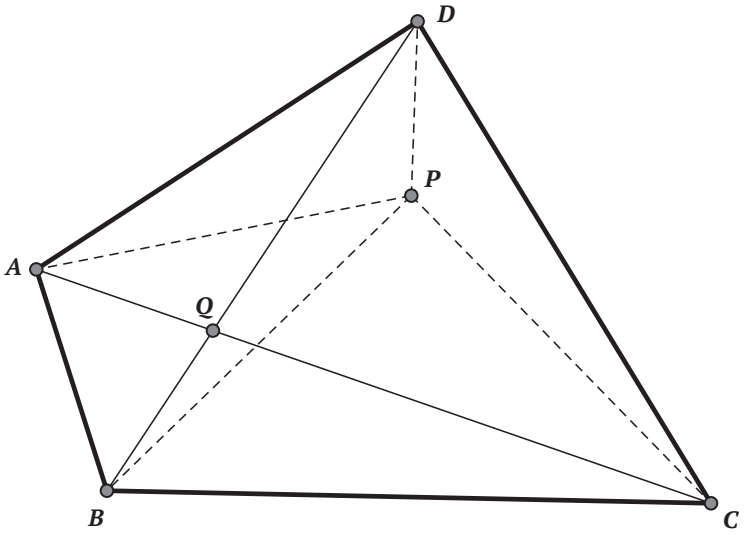


Рисунок 19-Р

Пример 20. Пример с ромбом

Два треугольника ΔGFC и ΔGED на рис. 20-Р окажутся равнобедренными, поскольку у них равные углы при основании. Мы сразу же понимаем, что четырехугольник *AFED* является параллелограммом, так как его противоположные стороны параллельны. Также мы знаем, что диагональ ромба делит его внутренний угол на два равных угла. Следовательно, мы имеем $\angle DEG = \angle DEF = \angle FAD = \angle CAD = \angle BAC = \angle CDE = \angle GDE$, и поэтому мы знаем, что треугольник *GED* равнобедренный. Поскольку отрезок *CF* параллелен *DE*, мы можем заключить, что треугольники ΔGFC и ΔGED подобны, и, следовательно, ΔGFC также равнобедренный.

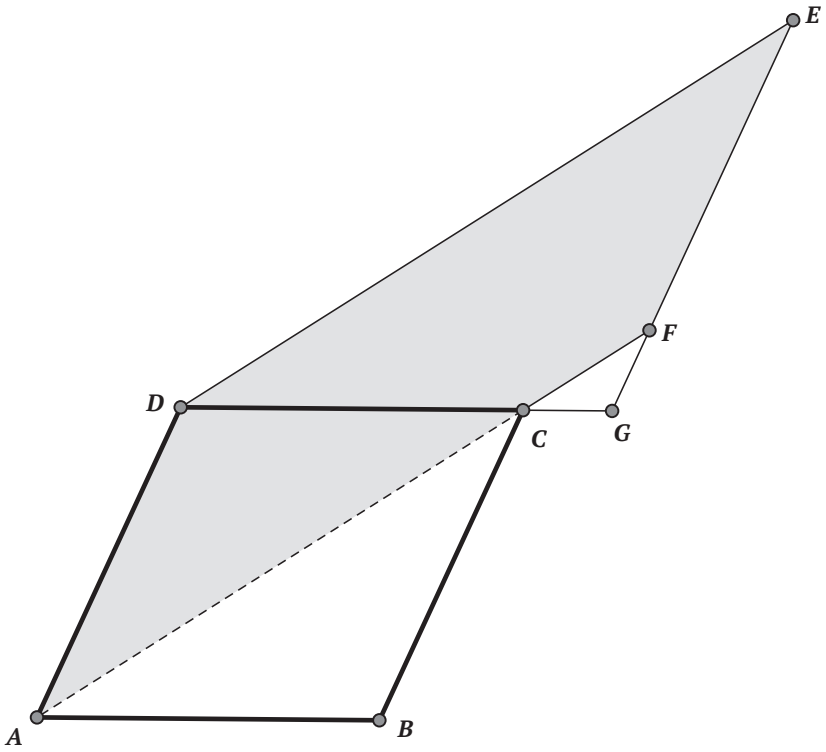


Рисунок 20-Р

Пример 21. Нетривиальное сравнение параллелограммов

Чтобы доказать, что площади двух параллелограммов на рис. 21-Р равны, нам достаточно заметить, что треугольник *EAB* представляет собой половину площади каждого из двух параллелограммов. Поскольку треугольник *EAB* имеет общее основание *AB* и высоту от точки *E* до стороны *AB* с параллелограммом *ABCD*, площадь треугольника *EAB* составляет половину площади параллелограмма *ABCD*. Аналогично треугольник *EAB* имеет общее основание *EA* и перпендикуляр от вершины *B* до отрезка *EA* с параллелограммом *EAFG*. Следовательно, его площадь также составляет половину площади параллелограмма *EAFG*. Таким образом, два параллелограмма *ABCD* и *EAFG* имеют одинаковую площадь, поскольку каждый из них в два раза больше площади треугольника *EAB*.

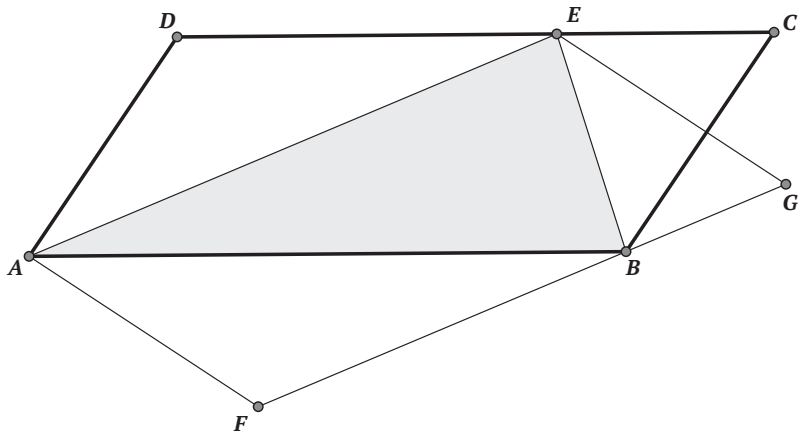


Рисунок 21–P

Пример 22. Пропорциональность параллелограммов

На рис. 22-P у нас есть отрезок *PX*, параллельный стороне *AD*, и отрезок *PR*, параллельный стороне *AB*, причем отрезок *PX* пересекает сторону AB в точке *X*, отрезок *PR* пересекает сторону *BC* в точке *R* и отрезок *PR* также пересекает отрезок *EF* в точке *Q*.

Тогда четырехугольник *PXBR* также является параллелограммом. Для упрощения доказательства обозначим следующие точки: $AB = CD = a$, $BC = DA = b$, $AE = FG = c$, $EF = GA = d$, $AX = x$ и $XP = y$. Теперь мы замечаем, что треугольники *BPX* и *BPX* подобны, поскольку *PX* параллелен *GA*. Это дает нам соотношение $\frac{PX}{GA} = \frac{XB}{AB}$ или $\frac{y}{d} = \frac{a-x}{a}$, и, следовательно, верно $y = d\left(1 - \frac{x}{a}\right)$.

Также треугольники *PQF* и *PRC* подобны, поскольку отрезки *QF* и *RC* параллельны. Это дает нам выражение $\frac{RC}{QF} = \frac{PR}{PQ}$. Поскольку $RC = BC - BR = b - y$, $QF = EF - EQ = d - y$, $PR = XB = AB - AX = a - x$, и $PQ = XE = AE - AX = c - x$, то подстановка дает нам соотношение $\frac{b-y}{d-y} = \frac{a-x}{c-x}$. Мы установили, что $y = d\left(1 - \frac{x}{a}\right)$, и можем подставить выражение для *y* в предыдущее уравнение, что дает нам выражение $\frac{b-d\left(1-\frac{x}{a}\right)}{d-d\left(1-\frac{x}{a}\right)} = \frac{a-x}{c-x}$.

Это эквивалентно соотношению $\frac{ab-ad+dx}{dx} = \frac{a-x}{c-x}$, или $abc - acd + cdx - abx + adx - dx^2 = adx - dx^2$, и, решая относительно *x*, получаем выражение $x = \frac{abc-acd}{ab-cd}$.

Теперь вернемся к подобным треугольникам *PQF* и *PRC*. Здесь мы получаем $\frac{PC}{PF} = \frac{PR}{PQ} = \frac{a-x}{c-x}$, и, подставляя *x*, получаем выражение:

$$\frac{PC}{PF} = \frac{a - \dfrac{abc - acd}{ab - cd}}{c - \dfrac{abc - acd}{ab - cd}} = \frac{a^2b - acd - abc + acd}{abc - c^2d - abc + acd} = \frac{ab(a-c)}{cd\ a-c} = \frac{ab}{cd}.$$

Теперь рассмотрим площади четырехугольников *ABCD* и *AEFG*. Эти площади можно вычислить, умножив длины их сторон на синусы углов между ними, так что $\frac{\text{площадь } [ABCD]}{\text{площадь } [AEFG]} = \frac{ab \cdot \sin \angle BAD}{cd \cdot \sin \angle EAG} = \frac{ab}{cd}$, что дает соотношение $\frac{\text{площадь } [ABCD]}{\text{площадь } [AEFG]} = \frac{PC}{PF}$.

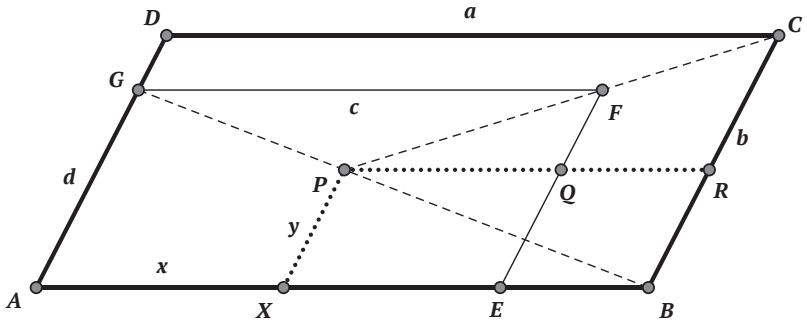


Рисунок 22-Р

Пример 23. Неожиданная параллельность в сопряженных параллелограммах

Поскольку мы рассматриваем ту же конфигурацию, что и в примере 22, мы можем использовать те же обозначения точек и линий на рис. 23-Р, что и на рис. 22-Р. Из предыдущего доказательства мы знаем, что $x = \frac{abc - acd}{ab - cd}$.

Чтобы показать, что точки *D*, *P* и *E* лежат на общей прямой, мы применяем теорему Менелая (см. «Инструментарий») для точек на сторонах треугольника *ABG*. Из теоремы Менелая мы знаем, что точки *D*, *P* и *E* коллинеарны тогда и только тогда, когда верно соотношение $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BP}{PG} \cdot \frac{GD}{DA} = 1$. Поскольку треугольники *BPX* и *BGA* подобны, то мы имеем выражение $\frac{BP}{PG} = \frac{BX}{BA} = \frac{a-x}{x}$, и, подставляя длины отрезков, получаем соотношение

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BP}{PG} \cdot \frac{GD}{DA} = \frac{c}{a-c} \cdot \frac{a-x}{x} \cdot \frac{b-d}{b} = \frac{c}{a-c} \cdot \frac{a - \dfrac{abc - acd}{ab - cd}}{\dfrac{abc - acd}{ab - cd}} \cdot \frac{b-d}{b} =$$

$$= \frac{c}{a-c} \cdot \frac{a2b - acd - abc + acd}{abc - acd} \cdot \frac{b-d}{b} = \frac{c}{a-c} \cdot \frac{ab(a-c)}{ac(b-d)} \cdot \frac{b-d}{b} = 1.$$

Следовательно, теорема Менелая доказывает, что точки *D*, *P* и *E* лежат на одной прямой.

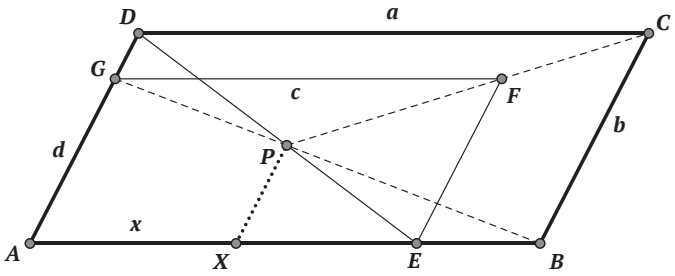


Рисунок 23-Р

Пример 24. Разделение параллелограмма пополам

Начнем с того, что проведем высоту *EF* параллелограмма *ABCD* через точку *P*, как показано на рис. 24-Р. Площади треугольников *ABP* и *CDP* равны:

$$\text{площадь треугольника } [ABP] = \tfrac{1}{2}\, AB \cdot EP$$

и

$$\text{площадь треугольника } [CDP] = \tfrac{1}{2}\, CD \cdot PF.$$

Сумма этих площадей равна

$$\tfrac{1}{2}\, AB \cdot EP + \tfrac{1}{2}\, CD \cdot PF = \tfrac{1}{2}\, AB(EP + PF) = \tfrac{1}{2}\, AB \cdot EF,$$

что составляет половину площади параллелограмма *ABCD*.

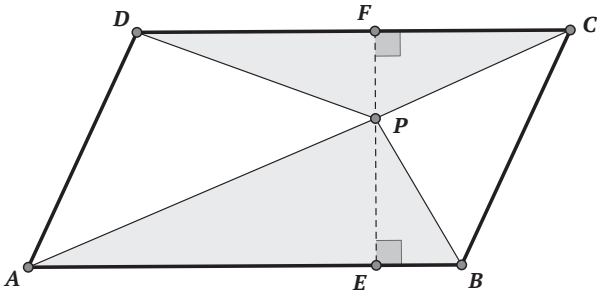


Рисунок 24-Р

Пример 25. Разделение трапеции пополам

На рис. 25-P высота EF трапеции $ABCD$ делится пополам средней линией в точке P, так что $EP = FP$. Как и в примере 24, мы получаем площади треугольников ABP и CDP как площадь треугольника $[ABP] = \frac{1}{2}AB \cdot EP$ и площадь треугольника $[CDP] = \frac{1}{2}CD \cdot PF$. Сумма этих площадей равна

$$\frac{1}{2}AB \cdot EP + \frac{1}{2}CD \cdot PF = \frac{1}{2}AB\left(\frac{1}{2}EF\right) + \frac{1}{2}CD\left(\frac{1}{2}EF\right) = \frac{1}{4}EF(AB + CD).$$

Поскольку площадь трапеции $ABCD$ равна $\frac{1}{2}EF(AB + CD)$, сумма площадей двух треугольников равна половине площади трапеции.

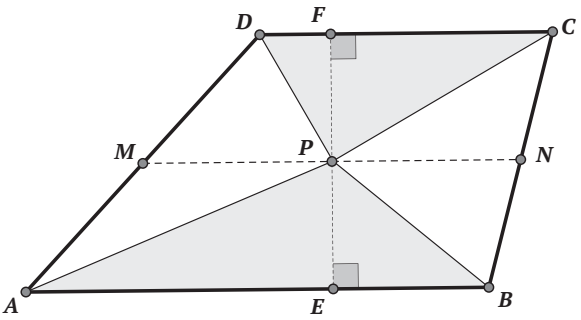


Рисунок 25-P

Пример 26. Разделение параллелограмма на три части

Начнем рис. 26-P с построения высот DG и PH до общего основания AC треугольников ACD и ACP соответственно. Поскольку $\Delta PHO \sim \Delta DGO$ и $PO = \frac{1}{3}DO$, мы имеем соотношение для отрезка $PH = \frac{1}{3}DG$. Следовательно, мы получаем:

площадь треугольника $[ACP] = \frac{1}{3}$ площади треугольника $[ACD]$.

Из этого мы заключаем, что

площадь четырехугольника $[APCD] = \frac{2}{3}$ площади треугольника $[ACD] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$ площади параллелограмма $[ABCD]$ = площади параллелограмма $[ABCD]$.

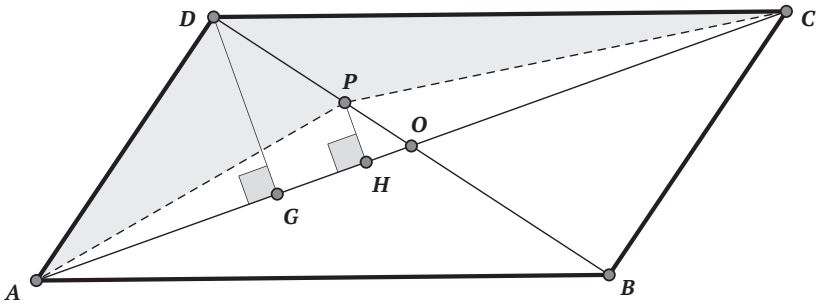


Рисунок 26-P

Пример 27. Трисекционное деление диагонали параллелограмма

На рис. 27-P мы проводим диагональ *AC*, пересекающую диагональ *BD* в точке *P*. В треугольнике *ABC* две медианы *BP* и *AM* пересекаются в точке центроида *E*.

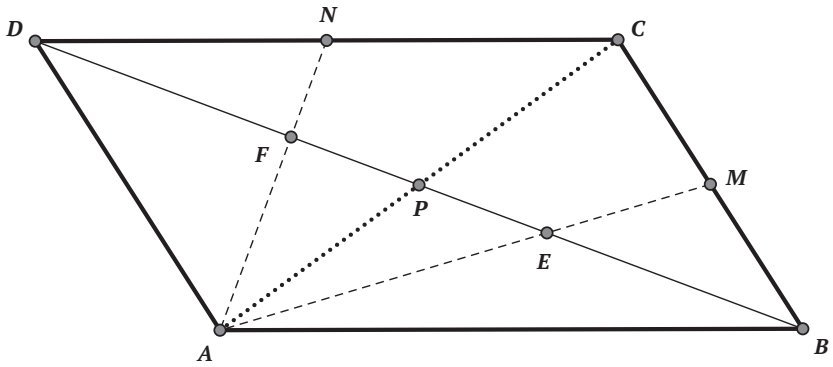


Рисунок 27-P

Поскольку медианы треугольника делят друг друга на три части, мы имеем $EP = \frac{1}{3}BP = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{1}{6}BD$. Аналогично мы можем также показать, что $FP = \frac{1}{6}BD$, следовательно, $EP + FP = \frac{2}{6}BD = \frac{1}{3}BD$. Поскольку точка *P* является серединой отрезка *BD*, две другие части отрезка *BD* также равны, так что верно соотношение $BE = EF = FD$.

Пример 28. Еще одно остроумное деление диагонали параллелограмма на три части

Доказательство этого примера аналогично доказательству примера 27. На рис. 28-P мы снова проводим диагональ *AC*, которая пересекает диагональ *BD* в точке *P*. Точки *G* и *H* являются центроидами треугольников *ACD* и *ABC* соответственно. Снова получаем $GP = \frac{1}{3}DP = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{1}{6}BD$ и $HP = \frac{1}{6}BD$. Сумма $GP + HP = \frac{2}{6}BD = \frac{1}{3}BD$, и, следовательно, $DG = GH = HB$.

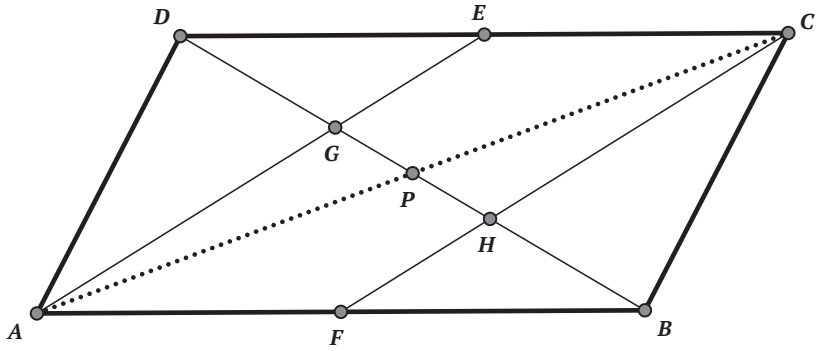


Рисунок 28-P

Пример 29. Еще одна точка трисекционного деления на диагонали параллелограмма

Удобно, что этот пример является непосредственным следствием примеров 27 и 28. На рис. 29-Р точка F является пересечением AB и DE, а треугольники ECD и EBF подобны, так как отрезок BF параллелен стороне DC. Поскольку точка B является серединой отрезка EC, точка F является серединой отрезка DE. Из примеров 27 и 28 мы уже знаем, что прямая, соединяющая вершину параллелограмма с серединой стороны, трисекционно делит диагональ, и $DG = \frac{1}{3}DE$. Также $\Delta AGD \sim \Delta CGE$, так как вертикальные углы $\angle AGD$ и $\angle CGE$ равны и отрезки AD и CE параллельны. Поскольку $GD = \frac{1}{2}GE$, мы имеем $GA = \frac{1}{2}GC$. Следовательно, мы можем заключить, что верно равенство $AG = \frac{1}{3}AC$.

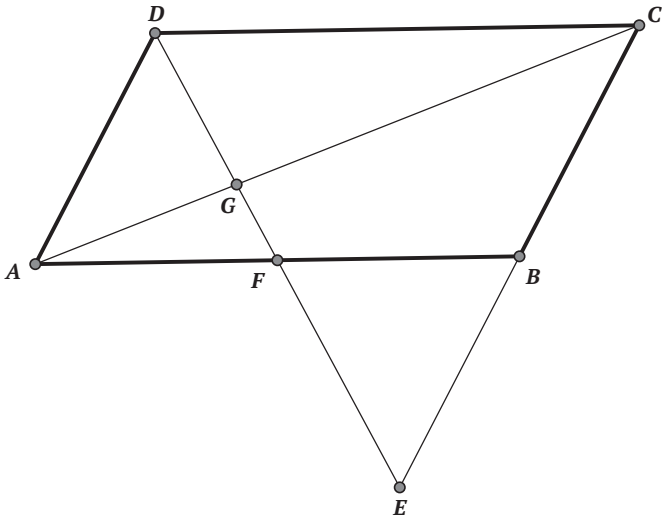


Рисунок 29-Р

Пример 30. Связь длин сторон параллелограмма с длинами его диагоналей

На рис. 30-Р точки P и Q расположены на стороне AB так, что $CP \perp AB$ и $DQ \perp AB$. Поскольку $AD \| BC$, $AB \| CD$, $CP \| DQ$ и $AD = BC$, треугольники AQD и BPC конгруэнтны, и, следовательно, $AQ = BP = x$ и $CP = DQ = y$. Применяя теорему Пифагора к треугольнику APC, получаем $AP^2 + CP^2 = AC^2$, или $AC^2 = (AB + x)^2 + y^2 = AB^2 + 2x \cdot AB + x^2 + y^2$.

Аналогично мы применяем теорему Пифагора к треугольнику BDQ, получая: $BQ^2 + DQ^2 = BD^2$, или $BD^2 = (AB - x)^2 + y^2 = AB^2 - 2x \cdot AB + x^2 + y^2$.

Складывая эти уравнения, получаем: $AC^2 + BD^2 = (AB^2 + 2x \cdot AB + x^2 + y^2) + (AB^2 - 2x \cdot AB + x^2 + y^2) = 2AB^2 + 2x^2 + 2y^2$.

Поскольку стороны $AB = CD$ в параллелограмме $ABCD$, применение теоремы Пифагора к треугольникам AQD и BPC приводит к $DA^2 = BC^2 = x^2 + y^2$. Затем с соответствующей подстановкой получаем

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2x^2 + 2y^2 = AB^2 + CD^2 + (x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) = AB^2 + CD^2 + BC^2 + DA^2,$$

из чего следует: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$.

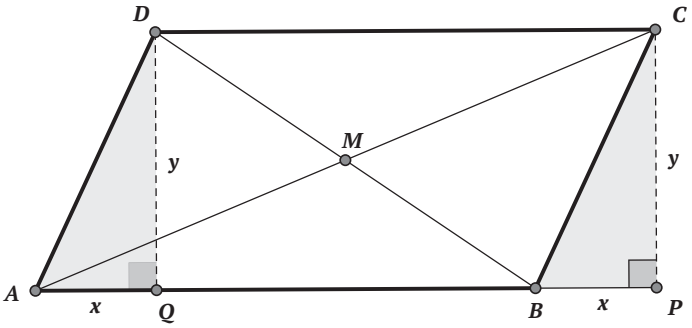


Рисунок 30–P

Пример 31. Неожиданная перпендикулярность в параллелограмме

На рис. 31-P мы продолжаем сторону AB до точки P, где она пересекается с продолжением отрезка DM. Поскольку вертикальные углы $\angle BMP$ и $\angle CMD$ равны, $MB = MC$, и поскольку $CD \| BP$ подразумевает $\angle DCM = \angle PBM$, мы можем заключить, что $\Delta MCD \cong \Delta MBP$. Следовательно, у нас есть равенство $CD = BP$, и поскольку $CD = AB$, то получаем соотношение $AB = BP$. Было дано, что $EB = AB$, поэтому EB является медианой ΔAPE к стороне AP. Когда медиана треугольника равна половине длины стороны, к которой он приведен, треугольник является прямоугольным. Следовательно, $\angle AEM$ является прямым углом.

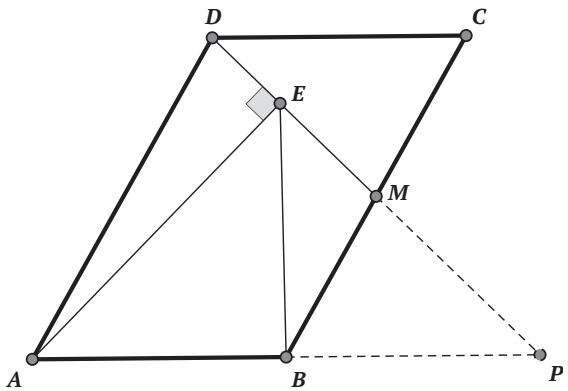


Рисунок 31–P

Пример 32. Удивительные сюрпризы, скрытые в параллелограмме

На рис. 32-P мы проводим отрезок *CG* перпендикулярно параллельным линиям *BD* и *CP*, с точкой *G* на диагонали *BD*. Поскольку отрезок *PC* параллелен диагонали *BD*, а отрезок *AP* перпендикулярен диагонали *BD*, мы имеем прямоугольник *PEGC* и стороны *PE* = *CG*. Поскольку диагональ *BD* делит параллелограмм *ABCD* на конгруэнтные треугольники *ABD* и *CDB*, мы также имеем *AE* = *CG*, так как это соответствующие высоты в конгруэнтных треугольниках. Из этого мы получаем *AE* = *PE*, и, следовательно, прямоугольные треугольники *EAB* и *EBP* также конгруэнтны, ∠*DBA* = ∠*EBA* = ∠*PBE* = ∠*PBD*.

Поскольку выполняется AB||*CD* и *BD*||*CP*, мы имеем следующие равенства углов: ∠*MPC* = ∠*BPC* = ∠*PBD* = ∠*DBA* = ∠*DBC* = ∠*PCD* = ∠*PCM*.

Это доказывает, что треугольник *MCP* равнобедренный, *MC* = *MP*. Поскольку ∠*NPC* = 90°, мы также имеем ∠*NPM* = ∠*NPC* − ∠*MPC* = 90° − ∠*PCM* =∠*CNP* = ∠*MNP*. Треугольник *MPN* также равнобедренный, *MP* = *MN*, и мы тогда имеем *MC* = *MP* = *MN*. Следовательно, точка *M* является серединой отрезка *CN*.

Остается показать, что *BD* = *CP* + 2*DE*. Очевидно, что выполняется *BD* = *DE* + *EG* + *GB*. Кроме того, мы уже установили, что *PEGC* – это прямоугольник, и *CP* = *EG*. Теперь нам нужно показать, что *GB* = *DE*. Треугольники *GCD* и *EBP* конгруэнтны, поскольку мы уже установили, что ∠*CGD* = ∠*BEP* = 90°, *PE* = *CG* и ∠*GDC* = ∠*BDC* = ∠*PBD* = ∠*PBE*.

Это дает нам *EB* = *DG*, и, следовательно, *GB* = *EB* – *EG* = *DG* – *EG* = *DE*. В итоге мы имеем *BD* = *DE* + *EG* + *GB* = *DE* + *CP* + *DE* = *CP* + 2*DE*.

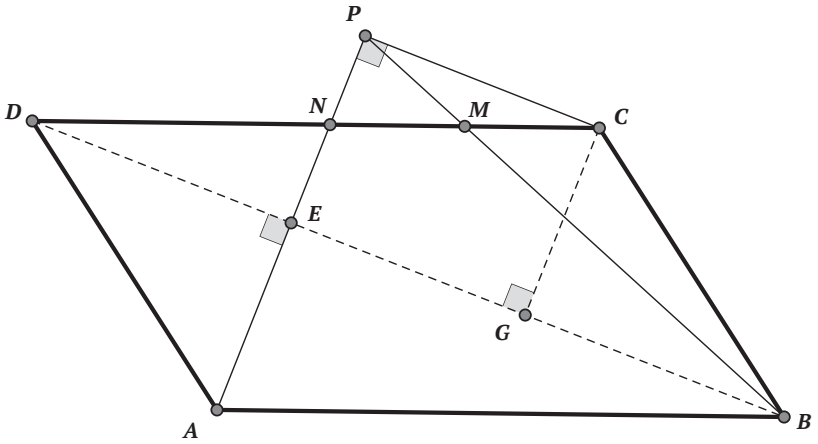


Рисунок 32–P

Пример 33. Треугольники, образующие параллелограммы без построения параллельных прямых

Поскольку QR – прямая, соединяющая середины сторон AC и AB треугольника ABC, она параллельна третьей стороне, BC, и равна половине ее длины, как показано на рис. 33-Р. То есть $QR \| BC$, и $QR = \frac{1}{2}BC$. Кроме того, $PD = \frac{1}{2}CD$ и $DS = \frac{1}{2}DB$. Тогда $PS = PD + DS = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2}(CD + DB) = \frac{1}{2}CB$ и $QR = PS$, благодаря чему мы установили, что $PQRS$ – параллелограмм, поскольку это четырехугольник с одной парой противоположных сторон, равных и параллельных.

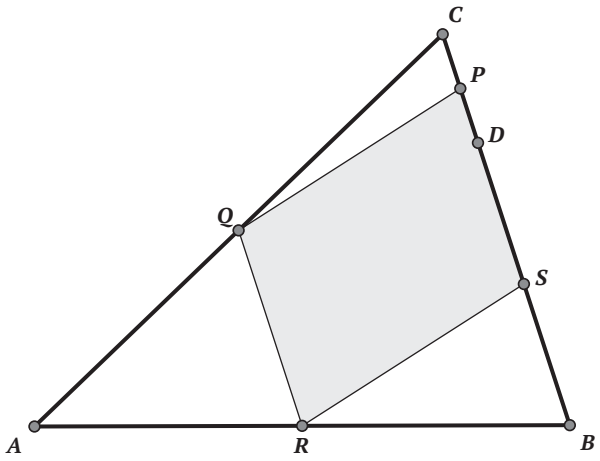


Рисунок 33–Р

Пример 34. Создание параллелограмма с площадью, составляющей одну девятую от площади исходного параллелограмма

Как мы видели в примере 27, линия, соединяющая вершину параллелограмма с серединой противоположной стороны, делит на три равные части пересекающуюся диагональ. Применительно к рис. 34-Р линии AF и CE делят на три равные части диагональ BD в точках G и I соответственно. Следовательно, $DG = GI = IB$. На другой диагонали AC мы аналогично получаем $AH = HJ = JC$. Мы также знаем, что две диагонали делят друг друга пополам, так что $GP = PI$ и $HP = PJ$. Таким образом, четырехугольник $GHIJ$ является параллелограммом.

Мы также имеем $\Delta PAB \sim \Delta PHI$, отношение длин их сторон равно 1:3. Соотношение их площадей тогда равно 1:9, так что

площадь треугольника $[PHI] = \frac{1}{9}$ площади треугольника $[PAB]$.

Аналогично мы получаем

площадь треугольника [*PIJ*] = ⅑ площади треугольника [*PBC*],
площадь треугольника [*PJG*] = ⅑ площади треугольника [*PCD*]

и

площадь треугольника [*PGH*] = ⅑ площади треугольника [*PDA*].

Складывая эти площади, мы получаем

площадь параллелограмма [*GHIJ*] = площадь треугольника *[PHI*] +
площадь треугольника [*PIJ*] + площадь треугольника [*PJG*] +
площадь треугольника [*PGH*] = ⅑ (площадь треугольника [*PAB*] +
площадь треугольника [*PBC*] + площадь треугольника *[PCD*] +
площадь треугольника [*PDA*]) = ⅑ площади параллелограмма [*ABCD*].

В итоге мы имеем площадь параллелограмма [*GHIJ*] = ⅑ площади параллелограмма [ABCD], что мы и пытаемся доказать.

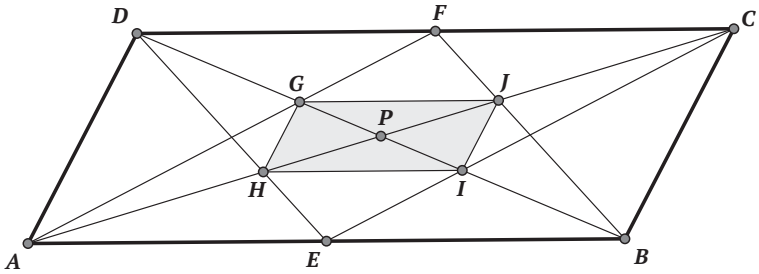


Рисунок 34-P

Пример 35. Как деление углов параллелограмма пополам и на три части создает другой параллелограмм

Поскольку *ABCD* – параллелограмм, у нас есть ∠*BAD* = ∠*DCB*, и поскольку отрезок *AF* делит ∠*BAD* пополам, у нас есть ∠*BAD* = ∠*FAD* = ∠*BAF*. Так как *AB*||*CD*, внутренние накрест лежащие углы равны, и ∠*BAF* = ∠*DFA*. Как мы видим на рис. 35-P, треугольник *DAF* – равнобедренный, углы при основании равны половине ∠*BAD*. Треугольник *BCE* также равнобедренный, углы при основании равны половине ∠*DCB*, что равно ∠*BAD*. Поскольку *BC* и *AD* – противоположные стороны параллелограмма, они равны, и мы получаем Δ*DAF* ≅ Δ*BCE*. Мы теперь знаем, что *BE* = *BC* = *DA* = *DF* и *AB* = *CD*. Вычитая, мы находим, что *AE* = *AB* – *BE* = *CD* – *DF* = *CF*. Это доказывает, что четырехугольник *AECF* является параллелограммом, и поэтому *GK*||*HJ*. Теперь мы можем легко показать, что Δ*DKF* ≅ Δ*BHE* (*ASA*). Таким образом, *DK* = *BH*, и аналогично Δ*DAG* ≅ Δ*BCJ*, так что Δ*DG* = *BJ*. Следовательно, Δ*DGK* ≅ Δ*BJH*, что дает нам *GK* = *JH*. Следовательно, поскольку одна пара сторон, *GK* и *HJ*, равны и параллельны, мы показали, что четырехугольник *GHJK* является параллелограммом.

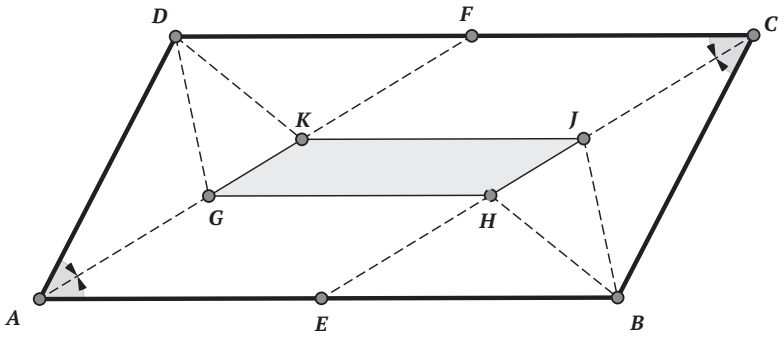


Рисунок 35-Р

Пример 36. Использование параллелограмма для построения квадрата

Мы можем легко показать конгруэнтность равнобедренных прямоугольных треугольников $\Delta ADH \cong \Delta CBF$ и $\Delta AEB \cong \Delta CGD$, и тогда мы получим $AH = BF$ и $AE = BE$, как показано на рис. 36-Р. Поскольку $ABCD$ – параллелограмм, то имеем: $\angle EAH = \angle EAB + \angle BAD + \angle DAH = 45° + (180° - \angle CBA) + 45° = 270° - \angle CBA = 360° - 45° - 45° - \angle CBA = 360° - \angle ABE - \angle CBA - \angle FBC = \angle EBF$.

Это позволяет доказать, что $\Delta AEH \cong \Delta BEF$, так что $HE = EF$. Аналогичным образом можно показать, что другие смежные стороны четырехугольника $EFGH$ равны. Из того, что $\Delta AEH \cong \Delta BEF$, следует, что $\angle HEA = \angle FEB$, и, следовательно, $\angle FEH = \angle FEB + \angle BEH = \angle HEA + \angle BEH = \angle BEA = 90°$. Таким образом, мы заключаем, что четырехугольник $EFGH$ является ромбом с $\angle FEH = 90°$, что делает его квадратом.

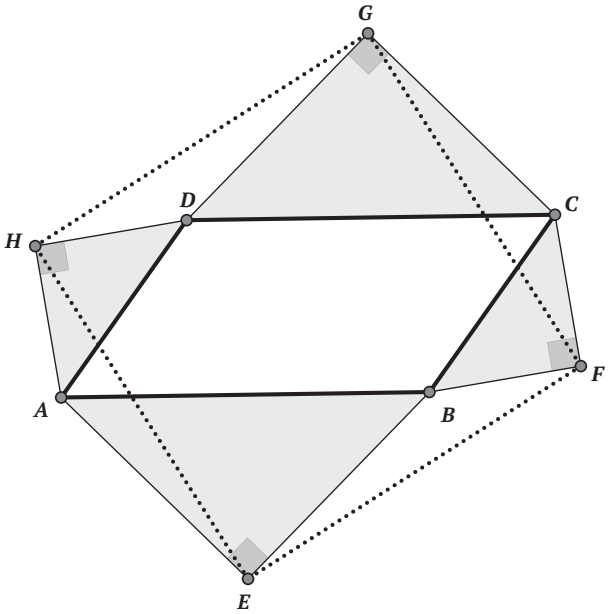


Рисунок 36-Р

Пример 37. Параллелограмм образует равносторонний треугольник

Показав, что треугольники *AEF*, *BEC* и *DCF* конгруэнтны, мы сможем установить, что треугольник *EFC* равносторонний, поскольку *EF* = *CE* = *FC*, как показано на рис. 37-Р. Начнем с того, что противоположные стороны *AD* и *BC* параллелограмма равны, как и стороны *AF* и *DF* равностороннего треугольника *ADF*, так что *AF* = *DF* = *DA* = *BC*. Мы также можем показать, что *AE* = *BE* = *DC*. Теперь рассмотрим прилежащие углы. Поскольку *ABCD* – параллелограмм, то $\angle CBA = \angle ADC$ и $\angle BAD = 180° - \angle CBA$.

Поэтому $\angle EBC = 360° - \angle ABE - \angle CBA = 360° - 60° - \angle CBA = 300° - \angle CBA$ и $\angle CDF = 360° - \angle FDA - \angle ADC = 360° - 60° - \angle CBA = 300° - \angle CBA$, и, таким образом, $\angle EBC = \angle CDF$. Также имеем $\angle EAF = \angle EAB + \angle BAD + \angle DAF = 60° + (180° - \angle CBA) + 60° = 300° - \angle CBA$.

Таким образом, три треугольника *AEF*, *BEC* и *DCF* конгруэнтны, так что *EF* = *CE* = *FC*, а треугольник *CEF* является равносторонним.

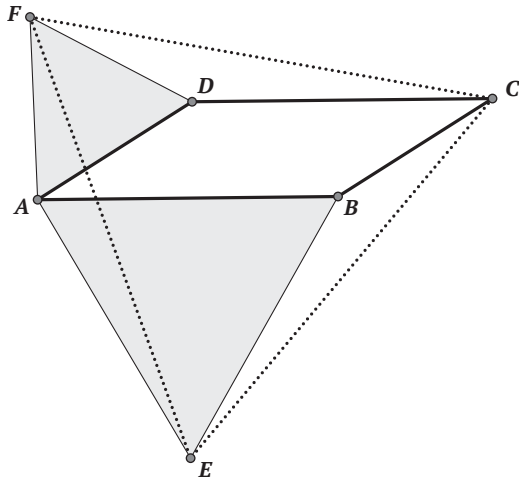


Рисунок 37-Р

Пример 38. Раскрытие секретных произведений вдоль сторон параллелограмма

Начнем с того, что $\angle BAD = \angle DCB$ и что накрест лежащие внутренние углы *ADE* и *CFD* параллельных прямых *AD* и *BC* равны, так что $\Delta AED \sim \Delta CDF$, как видно на рис. 38-Р. Это подобие порождает соотношение $\frac{AD}{CF} = \frac{AE}{CD}$, или $AE \cdot CF = AD \cdot CD$. Аналогично у нас также есть $\Delta AGD \sim \Delta CDH$, и для этих треугольников верно $\frac{AD}{CH} = \frac{AG}{CD}$, или $AG \cdot CH = AD \cdot CD$. Таким образом, мы имеем: $AE \cdot CF = AD \cdot CD = AG \cdot CH$, что мы и пытались доказать.

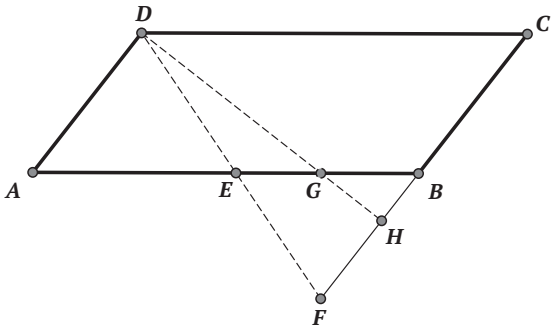


Рисунок 38-Р

Пример 39. Необычные равные площади, создаваемые в параллелограмме

Для упрощения доказательства обозначим площади различных областей в параллелограмме *ABCD* буквами, как показано на рис. 39-Р. Начнем с того, что $\Delta EDA \cong \Delta EBC$, поскольку *E* является серединой параллелограмма *ABCD*, и, следовательно, *ED* = *EB*, *EA* = *EC* и *DA* = *BC*. Используя наши буквенные обозначения, получим площадь треугольника [*EDA*] = площади треугольника [*EBC*], или $a = d + e + f + g$. Если мы добавим $b + d + c$ к обеим сторонам этого уравнения, мы получим $a + b + d + c = d + e + f + g + b + d + c$, что можно записать как $a + b + d + c = (g) + (e + d + c) + (b + d + f)$, что и является желаемым результатом:

площадь [*PDA*] = площадь [*PBC*] + площадь [*PCA*] + площадь [*PDB*].

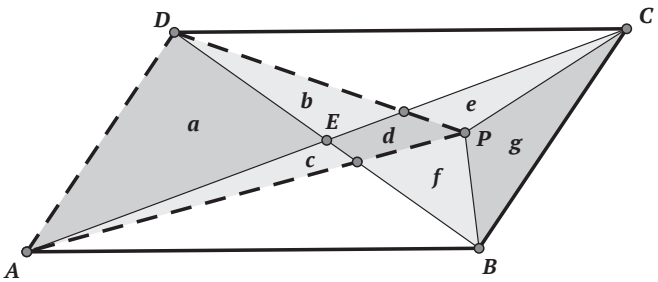


Рисунок 39-Р

Пример 40. Равные площади треугольников, полученные простым способом с помощью параллелограмма

Начнем с рис. 40-Р, построив перпендикуляр из точки *F* к *BC*, пересекающий сторону *BC* в точке *H*, и перпендикуляр из точки *A* к *BC*, пересекающий продолжение стороны *BC*, в точке *G*.

Поскольку это внутренние накрест лежащие углы параллельных прямых, $\angle DCE = \angle FBC$ и $\angle EDC = \angle EFB$, и, следовательно, $\Delta EBF \sim \Delta ECD$. Заметим, что AG – высота треугольника ECD. В подобных треугольниках соответствующие высоты находятся в том же соотношении, что и соответствующие стороны, так что теперь мы имеем соотношение $\frac{EB}{FH} = \frac{EC}{AG}$, что можно записать как $EB \cdot AG = EC \cdot FH$. Из этого получаем площадь треугольника $[EAB] = \frac{1}{2}EB \cdot AG = \frac{1}{2}EC \cdot FH$ = площади треугольника $[EFC]$. Это доказывает, что площади треугольников EAB и EFC равны.

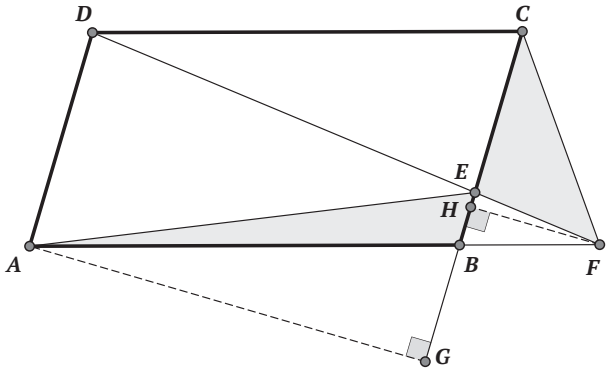


Рисунок 40-P

Пример 41. Еще больше равных площадей треугольников, скрытых в параллелограмме

На рис. 41-P мы сначала отмечаем, что треугольники PND и PMB конгруэнтны.

Это следует из конгруэнтных вертикальных углов в точке P и того факта, что P является серединой параллелограмма $ABCD$, что подразумевает $PB = PD$ и $PM = PN$. Следовательно, $BM = DN$. Перпендикулярная линия YRZ к сторонам AB и DC делится пополам средней линией EF в точке R, так что $RY = RZ$. Отсюда следует, что площадь треугольника $[RMB] = \frac{1}{2}\, BM \cdot RY = \frac{1}{2}\, DN \cdot RZ$ = площади треугольника $[RND]$, доказывая, что площади треугольников RMB и RND равны.

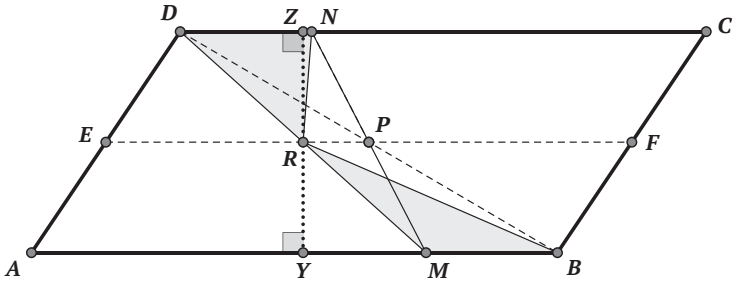


Рисунок 41-P

Пример 42. Еще один пример равных площадей в параллелограмме

Начнем рис. 42-P с построения перпендикуляров *DM* и *EN* к стороне *AB*. Из параллельных отрезков *AD*||*BE* получаем соотношение для внутренних накрест лежащих углов $\angle FAD = \angle FBE$ и $\angle ADF = \angle BEF$, и, следовательно, $\Delta AFD \sim \Delta BFE$. Поскольку высоты этих подобных треугольников пропорциональны длинам их соответствующих сторон, имеем соотношение $\frac{AF}{DM} = \frac{BF}{EN}$, или $AF \cdot EN = BF \cdot DM$.

Отсюда получаем: площадь треугольника [*FAE*] = ½*AF*·*EN* = ½*BF*·*DM* = площади треугольника [*BCF*], следовательно, заключаем, что треугольники *FAE* и *BCF* имеют равные площади.

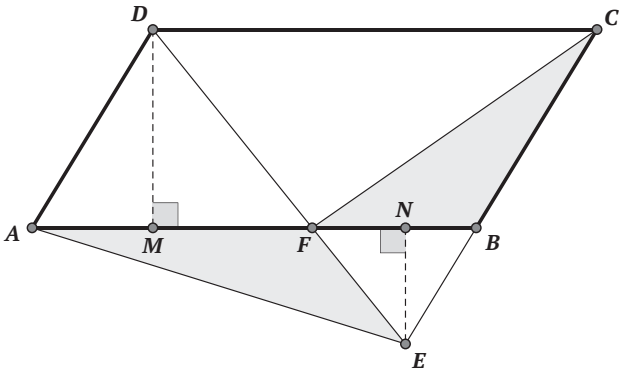


Рисунок 42-P

Пример 43. Неожиданная перпендикулярность, возникающая из параллелограмма

На рис. 43-P отметим, что *AD* = *BC* = *EB*, $\angle ADJ = \angle BEJ$ и $\angle JAD = \angle JBE$, поскольку *AD*||*BC*. Таким образом, мы получаем $\Delta AJD \cong \angle BJE$, откуда следует, что *AJ* = *BJ* = *AD*, так что треугольник *AJD* равнобедренный. Далее мы отметим, что поскольку *AD*||*EF*, внутренние накрест лежащие углы тоже равны, причем $\angle FAD = \angle AFE$. Также поскольку *AB* = 2*AD* = *BC* + *CF* = *BF*, треугольник *BFA* равнобедренный, причем $\angle BAF = \angle AFB = \angle AFE$. Затем мы видим, что $\angle FAD = \angle BAF$. Это означает, что *AF* делит угол $\angle JAD$ пополам. Однако поскольку *AF* является биссектрисой угла равнобедренного треугольника *AJD*, отрезок *AF* перпендикулярен основанию *DJ*, и мы приходим к выводу, что $AF \perp DE$.

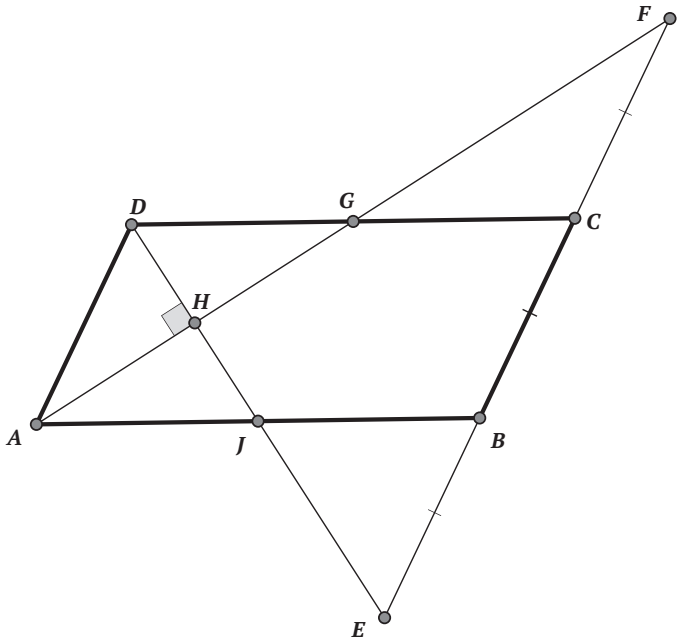


Рисунок 43-Р

Пример 44. Параллелограмм Вариньона и его особые свойства

Чтобы доказать, что четырехугольник *EFGH* является параллелограммом, отметим в Δ*ABD*, что поскольку *E* – середина стороны *AB*, а *H* – середина стороны *AD*, мы имеем соотношение $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD} = \frac{1}{2}$. Следовательно, треугольники *AEH* и *ABD* подобны с отношением подобия, равным ½. Отрезок *EH* параллелен отрезку *BD* и равен половине его длины, как показано на рис. 44-Р. То же самое верно для Δ*CDB*, где отрезок *FG* параллелен стороне *BD* и равен половине его длины. Следовательно, *FG* = *EH* и *FG*||*EH*, и четырехугольник *EFGH*, таким образом, является параллелограммом.

То же самое можно сделать для треугольников *BCA* и *DAC*, где и отрезки *EF*, и отрезки *HG* параллельны диагонали *AC* и равны половине ее длины. Таким образом, мы получаем *EF* + *FG* + *GH* + *HE* = 2(½*BD* + ½*AC*) = *BD* + *AC*.

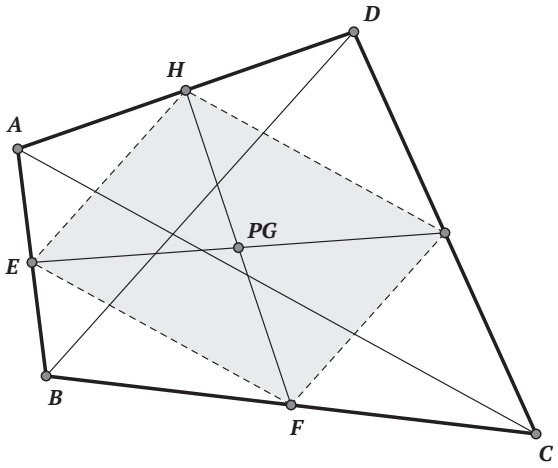


Рисунок 44-P

Остается показать, что площадь треугольника *EFGH* равна половине площади треугольника *ABCD*. Вспомним, что отношение подобия треугольников *AEH* и *ABD* равно ½. Таким образом, получаем площадь треугольника [*AEH*] = ¼ площади треугольника [*ABD*].

Поскольку у нас также есть площадь треугольника [*CGF*] = ¼ площади треугольника [*CDB*], то имеем:

площадь треугольника [*AEH*] + площадь треугольника [*CGF*] =
¼ (площадь треугольника [*ABD*] + площадь треугольника [*CDB*]) =
¼ площади четырехугольника [*ABCD*].

Аналогичный аргумент, основанный на диагонали *AC*, дает нам соотношение:

площадь треугольника [*BFE*] + площадь треугольника [*DHG*] =
¼ площади [*ABCD*],

и, следовательно, имеем

площадь четырехугольника [*EFGH*] = площадь четырехугольника [*ABCD*] –
(площадь треугольника [*AEH*] + площадь треугольника [*CGF*]) –
(площадь треугольника [*BFE*] + площадь треугольника [*DHG*) =
площадь четырехугольника [*ABCD*] s – ¼ площади четырехугольника [*ABCD*] –
¼ площади четырехугольника [*ABCD*] = ½ площади четырехугольника [*ABCD*].

Мы видим, что площадь *EFGH* составляет половину площади *ABCD*.

Пример 45. Поистине впечатляющий параллелограмм

На рис. 45-P обозначим *WXYZ* как параллелограмм, образованный серединами сторон *ABCD*. Как мы установили в примере 44, параллелограмм *WXYZ* имеет половину площади параллелограмма *ABCD*. Каждая вершина параллелограмма *WXYZ* является серединой диагонали одного из параллелограммов, используемых для определения точек *E*, *F*, *G* и *H*. Например, точка *W* является серединой стороны *AB*, которая выступает диагональю параллелограмма *PBEA*. Это означает, что эти точки *W*, *X*, *Y* и *Z* также являются серединами диагоналей *PE*, *PF*, *PG и PH* соответственно. Мы видим, что четырехугольник *WXYZ* получается из параллелограмма *EFGH* по гомотетии (см. «Инструментарий») с центром *P* и множителем ½. Таким образом, площадь *EFGH* будет в $2^2 = 4$ раза больше площади *WXYZ*, или в два раза больше площади *ABCD*.

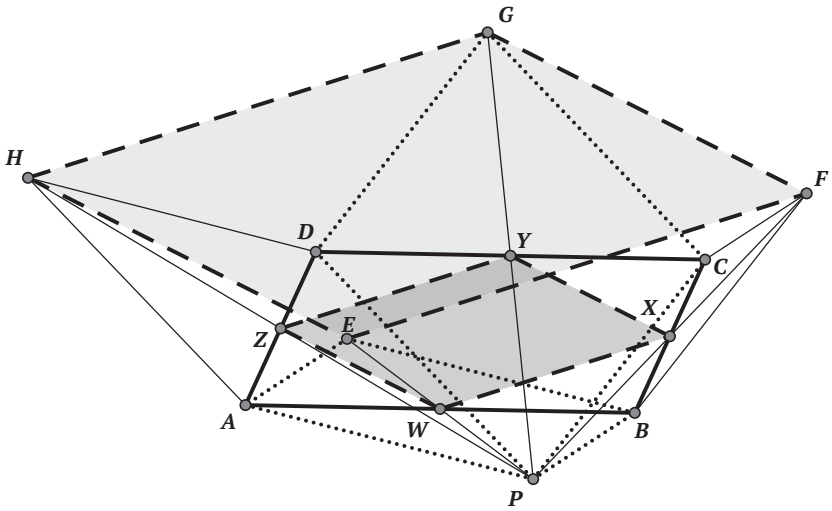


Рисунок 45-P

Пример 46. Подробнее о центре четырехугольника

Отрезок *HY*, соединяющий середины сторон *DA* и *DB* треугольника *DAB*, параллелен третьей стороне *AB* и равен половине ее длины. Аналогично отрезок *XF* соединяет середины сторон *CA* и *CB* треугольника *CAB*, так что отрезок *XF* также параллелен стороне *AB* и равен половине длины *AB*. Следовательно, четырехугольник *FXHY* является параллелограммом. Его диагональ *FH*, середина которой, как мы уже знаем, является центром *P* треугольника *ABCD*, делит пополам диагональ *XY*.

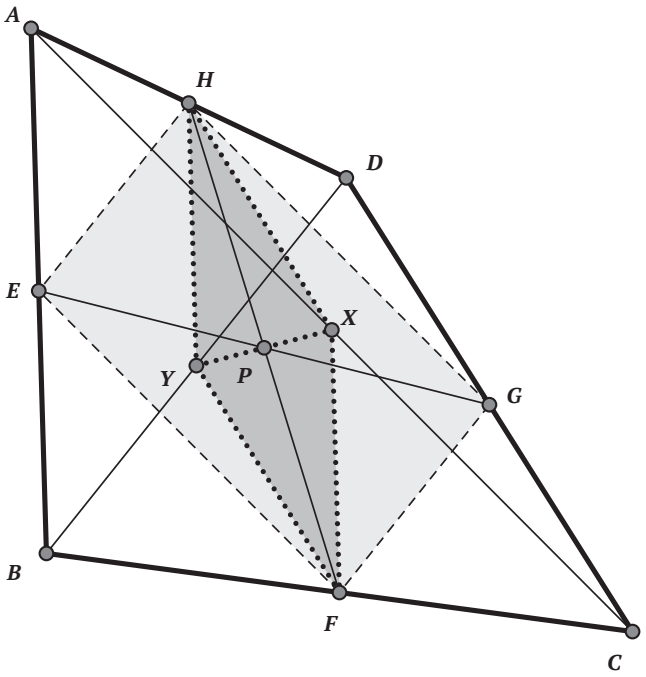


Рисунок 46-Р

Пример 47. Еще больше сюрпризов в параллелограмме

В доказательстве к примеру 46 мы показали, что диагонали FH и XY параллелограмма $FXHY$ пересекаются в точке P. Остается показать, что $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = EG^2 + FH^2 + XY^2$. Для этого рассмотрим несколько треугольников на рис. 47-Р, а также их медианы. Начнем с рассмотрения треугольника ABD. Поскольку Y является серединой BD, отрезок AY является медианой этого треугольника, и мы имеем $BY = DY$. По закону косинусов (см. «Инструментарий»), мы имеем

$$AB^2 = AY^2 + BY^2 - 2AY \cdot BY \cdot \cos\angle AYB$$

и

$$AD^2 = AY^2 + DY^2 - 2AY \cdot DY \cdot \cos(180° - \angle AYB) = AY^2 + DY^2 + 2AY \cdot DT \cdot \cos(\angle AYB).$$

Поскольку $BY = DY$, сложение этих двух уравнений дает нам $AB^2 + AD^2 = 2AY^2 + 2BY^2$. Это общий результат, который окажется полезным в данном конкретном контексте. В любом треугольнике сумма квадратов длин двух смежных сторон равна удвоенному квадрату медианы из общей вершины плюс удвоенному квадрату половины длины противоположной стороны. Применив это к противоположному треугольнику CDB, получаем: $CB^2 + CD^2 = 2CY^2 + 2BY^2$, а сложение этих двух выражений дает: $AB^2 + AD^2 + CB^2 + CD^2 = 2AY^2 + 2CY^2 + 4BY^2$.

Применив это к треугольнику YCA, получаем: $AY^2 + CY^2 = 2XY^2 + 2AX^2$ или $2AY^2 + 2CY^2 = 4XY^2 + 4AX^2$, и, следовательно, подстановка дает: $AB^2 + AD^2 + CB^2 + CD^2 = 2AY^2 + 2CY^2 + 4BY^2 = 4XY^2 + 4AX^2 + 4BY^2 = AC^2 + BD^2 + 4XY^2$, так как $2AX = AC$ и $2BY = BD$.

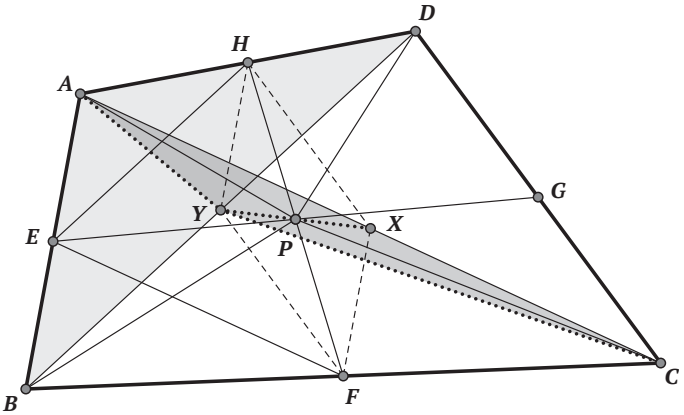


Рисунок 47-P

Далее применим ту же идею к треугольникам PAB, PBC, PCD и PDA соответственно, чтобы получить:

$$PA^2 + PB^2 = 2PE^2 + 2AE^2,$$
$$PB^2 + PC^2 = 2PF^2 + 2BF^2,$$
$$PC^2 + PD^2 = 2PG^2 + 2CG^2,$$
$$PD^2 + PA^2 = 2PH^2 + 2DH^2.$$

Сложение этих выражений и умножение на 2 дает:

$$4(PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2) =$$
$$4(PE^2 + PF^2 + PG^2 + PH^2) + 4(AE^2 + BF^2 + CG^2 + DH^2) =$$
$$(EG^2 + HF^2 + EG^2 + HF^2) + (AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2) =$$
$$2(EG^2 + HF^2) + (AC^2 + BD^2 + 4XY^2).$$

После подстановки $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4XY^2$. Мы уже знаем, что $AC = 2EF$ и $BD = 2EH$, а в треугольнике EFH мы знаем, что $EF^2 + EH^2 = 2PE^2 + 2PF^2$. Подставляя это, получаем:

$$2(EG^2 + HF^2) + (AC^2 + BD^2 + 4XY^2) =$$
$$2(EG^2 + HF^2) + 4EF^2 + 4EH^2 + 4XY^2 =$$
$$2(EG^2 + HF^2) + 8PE^2 + 8PF^2 + 4XY^2 =$$
$$2(EG^2 + HF^2) + 2EG^2 + 2HF^2 + 4XY^2 =$$
$$4(EG^2 + HF^2 + XY^2), \text{ or } 4(PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2) =$$
$$4(EG^2 + HF^2 + XY^2).$$

После деления на 4 получаем выражение $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = EG^2 + HF^2 + XY^2$.

Пример 48. Особые четырехугольники дают параллелограмм Вариньона

Из доказательства примера 44 мы знаем, что стороны параллелограмма Вариньона *EFGH* параллельны диагоналям четырехугольника *ABCD*. Если эти диагонали перпендикулярны, то стороны параллелограмма Вариньона *EFGH* также должны быть перпендикулярны, что дает прямоугольник, как показано на рис. 48-Р.

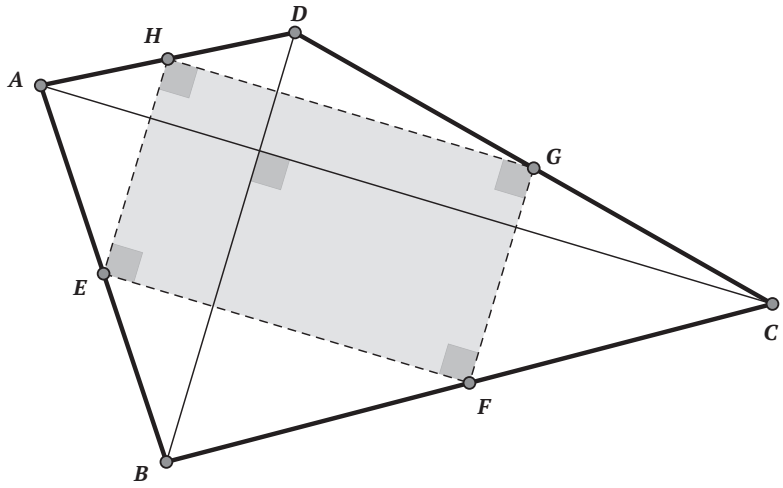


Рисунок 48-Р

Пример 49. Некоторые особенные четырехугольники дают квадрат Вариньона

Опять же, возвращаясь к доказательству примера 44, если диагонали *AC* и *BD* четырехугольника *ABCD* имеют одинаковую длину и перпендикулярны, то полученный параллелограмм Вариньона *EFGH* будет квадратом, как показано на рис. 49-Р, поскольку его стороны перпендикулярны и равны половине длины равных диагоналей *ABCD*.

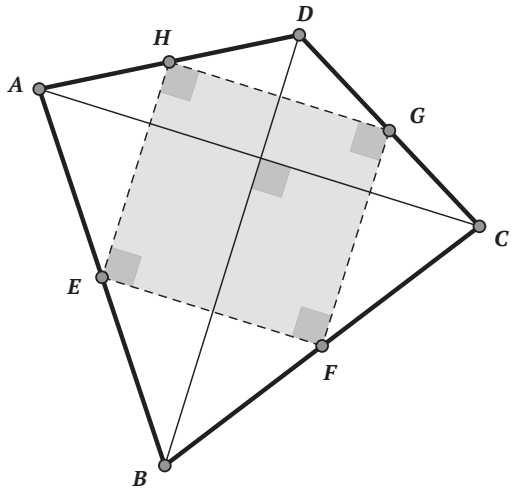


Рисунок 49-Р

Пример 50. Другие особые четырехугольники могут сформировать ромб Вариньона

Доказательство этого результата, показанное на рис. 50-Р, также является непосредственным следствием доказательства для примера 44. Там мы продемонстрировали, что стороны параллелограмма Вариньона *EFGH* вдвое короче, чем диагонали четырехугольника *ABCD*. Если эти диагонали имеют одинаковую длину, то стороны параллелограмма Вариньона *EFGH* также имеют одинаковую длину, и, следовательно, это ромб.

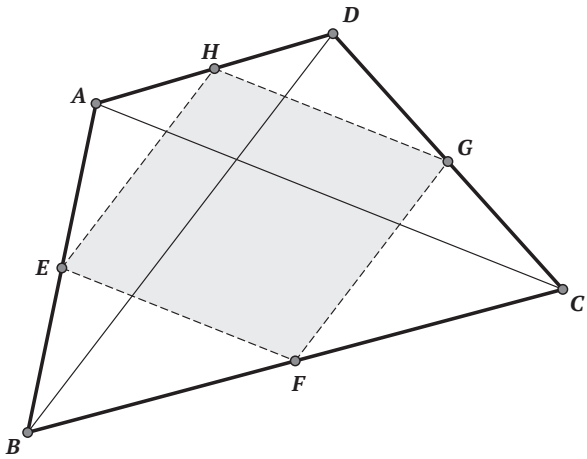


Рисунок 50 –Р

Пример 51. Параллелограмм Виттенбауэра

На рис. 51a-P, поскольку *VO* соединяет точки деления сторон *AB* и *AD* треугольника *ABD*, мы имеем выражение $\frac{AV}{AD} = \frac{AO}{AB} = \frac{1}{3}$. Треугольники *AOV* и *ABD*, следовательно, подобны, и отсюда следует, что отрезок *VO* параллелен отрезку *BD* и составляет одну треть его длины. Аналогично отрезок *RS* соединяет точки деления сторон *CD* и *CB* треугольника *CBD* и, следовательно, параллелен его основанию *BD* и составляет одну треть его длины. Таким образом, мы имеем: отрезки *VO* и *RS* параллельны. Аналогичное рассуждение можно привести, чтобы доказать, что отрезок *UT* параллелен отрезку *PQ*. Это доказывает, что четырехугольник *WXYZ* – параллелограмм.

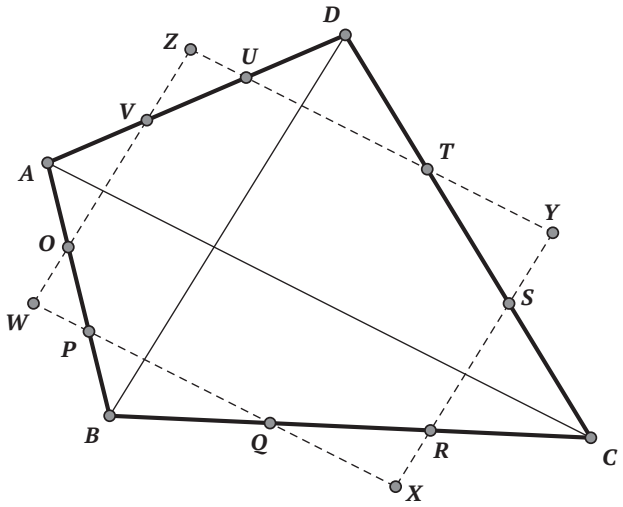


Рисунок 51a-P

Чтобы показать, что точка пересечения диагоналей параллелограмма *WXYZ* совпадает с центром тяжести исходного четырехугольника *ABCD* и что стороны *WXYZ* параллельны прямым *KL* и *MN*, рассмотрим рис. 51b-P.

На рис. 51b-P точка *N* – центроид треугольника *ABC*, а точка *M* – центроид треугольника *ACD*. (Напомним, что центроид треугольника – это точка пересечения медиан треугольника и делит каждую медиану на три части.) Поскольку отрезок *OR* соединяет точки деления сторон *AB* и *BC* треугольника *ABC* на три части, она также делит отрезок *BH* на три части в точке *N*, так как *N* – центроид треугольника *ABC* и отрезки *ON*||*AH*. Аналогичным образом отрезки *NR*||*CH*. Таким образом, *ONR* – отрезок, параллельный *AC* и составляющий две трети его длины. Кроме того, поскольку *AH* = *HC*, *ON* = $^2/_3$ *AH* и *NR* = $^2/_3$ *HC*, получаем *ON* = *NR*. Аналогично отрезок *VS* делит отрезок *DH* на три равные части в точке *M*. Мы знаем, что *VS* = *OR*, поэтому теперь у нас есть *ON* = *NR* = *MS* = *VM*, поскольку каждый отрезок составляет две трети длины половины *AC*. Ключевой

момент здесь заключается в том, что прямые, соединяющие точки деления на три равные части двух сторон треугольника, параллельны третьей стороне, поэтому у нас отрезки *WX*, *AC* и *YZ* параллельны.

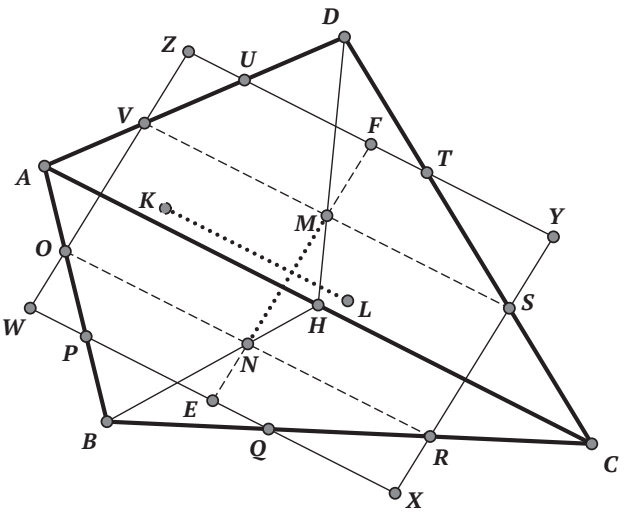


Рисунок 51b-P

Поскольку *OV* = *RS*, мы знаем, что *ORSV* – параллелограмм, и так как мы определили, что *N* – середина *OR*, а *M* – середина *SV*, мы видим, что *MN* – середина параллелограмма *ORSV*.

Мы уже знаем, что прямые *OV* и *RS* параллельны *BD*, и мы видим, что отрезок *MN* также параллелен отрезку *BD*.

Мы уже знаем, что отрезки *OV* и *RS* параллельны отрезку *BD*, и мы видим, что отрезок *MN* также параллелен отрезку *BD*.

Аналогично линия, соединяющая центроиды *K* и *L*, лежит на другой средней линии параллелограмма Виттенбауэра и также параллельна его двум другим сторонам. Пересечение средних линий параллелограмма также является пересечением его диагоналей, и поскольку центроид четырехугольника *ABCD* лежит на каждом из отрезков, соединяющих центроиды его треугольных разложений (то есть прямых *MN* и *KL*), этот центроид должен быть в одной и той же точке.

Теперь остается показать, что площадь параллелограмма Виттенбауэра равна площади четырехугольника *ABCD*. Рассмотрим рис. 51c-P, где *AC* и *ZW* пересекаются в точке *J*, а точка пересечения отрезков *AC* и *XY* – точка *I*. Очевидно, что площадь [*WXYZ*] = площадь [*WXIJ*] + площадь [*JIYZ*].

Поскольку *AO* и *OP* равны одной трети *AB*, а *AC*||*WX* подразумевает ∠*OAJ* = ∠*OPW* и ∠*AJO* = ∠*PWO*, то Δ*AOJ* ≅ Δ*POW*, что означает, что площади этих треугольников равны. С другой стороны, мы видим, что треугольники *CIR* и *QXR* также конгруэнтны и имеют равные площади.

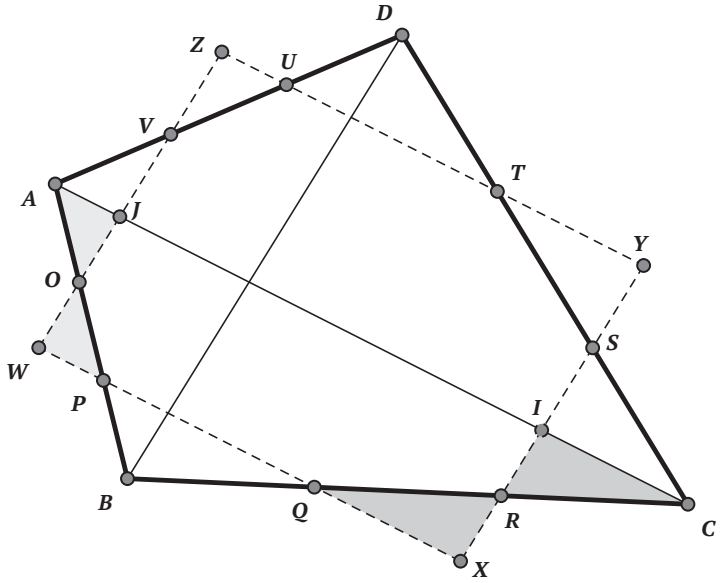


Рисунок 51c-P

Это дает нам выражение:

площадь [*WXIJ*] = площадь [*POW*] + площадь [*PQRIJO*] + площадь [*QXR*] = площадь [*AOJ*] + площадь [*PQRIJO*] + площадь [*CIR*] = площадь [*APQC*].

Аналогично мы также можем показать, что верно соотношение: площадь четырехугольника [*JIYZ*] = площади четырехугольника [*ACTU*]. Еще раз, вспоминая, что *PQ* соединяет точки деления на три части двух сторон треугольника *ABC* и, следовательно, составляет одну треть длины *AC*, мы знаем, что треугольники *BQP* и *BCA* подобны с коэффициентом подобия ⅓, так что площадь [*BQP*] = ⅑ площади [*BCA*]. Тогда мы получаем:

площадь четырехугольника [*APQC*] = площадь треугольника [*BAC*] – площадь треугольника [*BPQ*] = площадь треугольника [*BAC*] – ⅑ площади [*BAC*] = площади треугольника [*BAC*].

Аналогично мы также находим

площадь четырехугольника [*ACTU*] = ⅘ площади треугольника [*DAC*],

и получаем выражение

площадь [*WXYZ*] = площадь[*WXIJ*] + площадь [*JIYZ*] = ⅘ площади [*BCA*] + ⅘ площади [*DA C*] = ⅘ площади [*ABCD*].

Таким образом, мы видим, что площадь параллелограмма *WXYZ* равна восьми девятым площади исходного четырехугольника *ABCD*, как мы и пытались доказать.

Пример 52. Удивительное равенство в прямоугольнике

Ключ к обоснованию этого соотношения начинается с проведения перпендикуляра из точки *P* в точку *DN*, который пересекает *DN* в точке *F* и пересекает *BD* в точке X, как показано на рис. 52-P. Четырехугольник *PFNK* является прямоугольником, так что *PK* = *FN*. Кроме того, мы видим, что прямоугольные треугольники *PDM* и *DFP* конгруэнтны, поскольку они имеют общую гипотенузу *PD*, и у нас есть ∠*DPF* = ∠*DCA* = ∠*BDC* = ∠*MDP*. Следовательно, у нас также есть *PM* = *DF*, и из этого мы получаем *PM* + *PK* = *DF* + *FN* = *DN*.

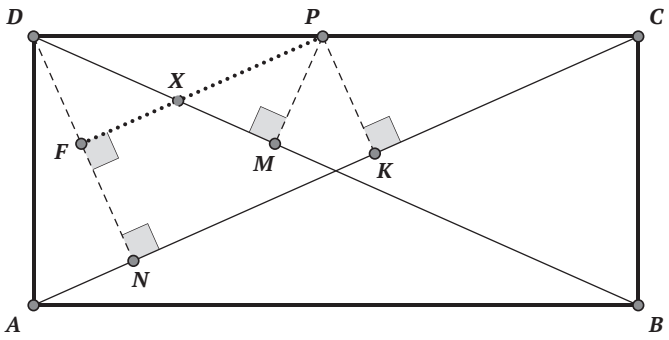


Рисунок 52-P

Пример 53. Неожиданная константа, связанная с точками на прямоугольнике

Чтобы доказать эту любопытную находку, мы воспользуемся методом, который применяли в примере 52. Проведя перпендикуляры, как показано на рис. 53-P, мы уже знаем из примера 52, что *PE* + *PF* = *DN*. Аналогично мы можем также показать, что поскольку Δ*RDK* ≅ Δ*DYR*, то *RJ* + *RK* = *YN* + *DY* = *DN*. Для точки *Q* аналогично имеем Δ*QCS* ≅ Δ*CGQ*, так что *QG* + *QH* =*CS* + *ST* = *CT*. Поскольку *DN* = *CT*, получаем *PE* + *PF* = *QG* + *QH* = *RJ* + *RK*.

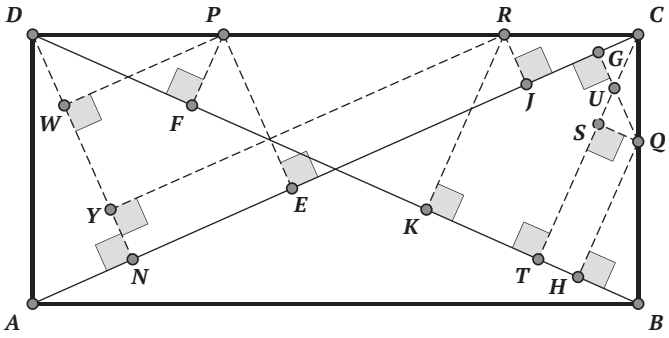


Рисунок 53-P

Пример 54. Неожиданная перпендикулярность в прямоугольнике

На рис. 54-Р прямые AC и BP пересекаются в точке Q. Теперь рассмотрим треугольники ACD и BPA. Поскольку $AD = 2AB = 2CD$, мы видим, что ACD – прямоугольный треугольник, у которого один катет вдвое длиннее другого. Кроме того, так как $AD = 4AP = 2AB$, мы имеем $2AP = AB$, и BPA также является прямоугольным треугольником, у которого один катет вдвое длиннее другого. Из этого мы знаем, что $\Delta BPA \sim \Delta ACD$, и поэтому $\angle PBA = \angle CAD$. Теперь рассмотрим треугольник BQA, у которого $\angle BAQ = \angle BAD - \angle CAD = 90° - \angle PBA = 90° - \angle QBA$. Это означает, что $\angle AQB = 180° - \angle QBA - \angle BAQ = 180° - \angle QBA - (90° - \angle QBA) = 90°$, и тогда $PB \perp AC$.

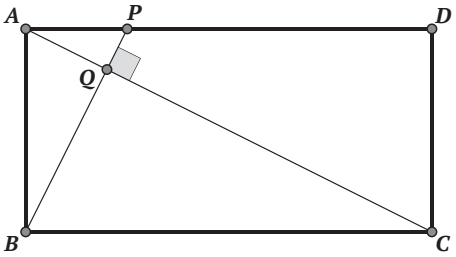


Рисунок 54-Р

Пример 55. Особая точка в прямоугольнике, которая генерирует равные суммы площадей квадратов

Для упрощения доказательства того, что

площадь прямоугольника [$APEF$] + площадь прямоугольника [$CPIJ$] = площадь прямоугольника [$BPGH$] + площадь прямоугольника [$DKLP$],

мы будем использовать обозначения линий, показанные на рис. 55-Р.

Линии WX и YZ, проходящие через точку P, параллельны сторонам прямоугольника, и мы можем затем применить теорему Пифагора к различным треугольникам на рисунке. В треугольнике PWA у нас выполняется выражение $a^2 = w^2 + y^2$, а в треугольнике PXC у нас выполняется выражение $c^2 = x^2 + z^2$, что дает $a^2 + c^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Аналогично в треугольнике PYB мы имеем $b^2 = x^2 + y^2$, а в треугольнике PDW мы имеем $d^2 = w^2 + z^2$, что дает $b^2 + d^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Таким образом, мы имеем $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, что можно интерпретировать геометрически как площадь прямоугольника [$APEF$] + площадь прямоугольника [$CPIJ$] = площадь прямоугольника [$BPGH$] + площадь прямоугольника [$DKLP$].

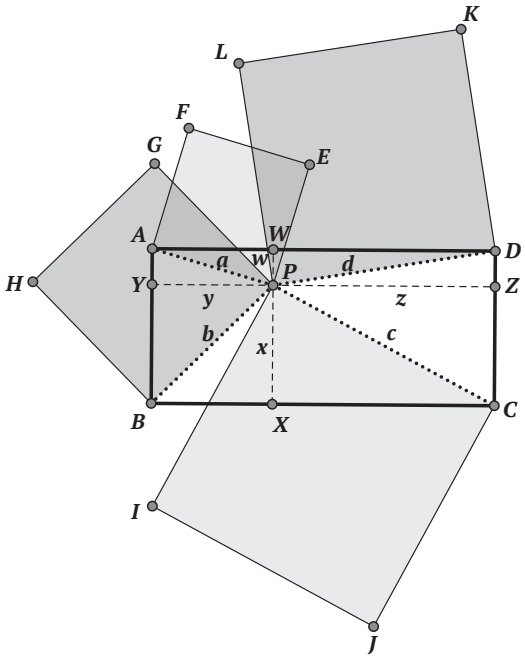


Рисунок 55-P

Пример 56. Приравнивание площадей квадрата и прямоугольника, прикрепленных к большему квадрату

Для упрощения обозначим различные отрезки, как показано на рис. 56-P, где $BF = BG = x$, $AE = ED = EF = y$ и $AK = AG = z$. Применим теорему Пифагора к треугольнику BAE и получим: $(x + z)^2 + y^2 = (x + y)^2$, что упрощается до $2xz + z^2 = 2xy$. Поскольку стороны квадрата равны, получаем $2y = x + z$, и, умножив на x, получаем $2xy = x^2 + xz$. Подставив это в предыдущее уравнение, получаем: $2xz + z^2 = x^2 + xz$. Следовательно, $xz + z^2 = x^2$, или $z(x + z) = x^2$.

Таким образом, поскольку площадь квадрата $GHJB$ равна x^2, а площадь прямоугольника $ABLK$ равна $z(x + z)$, мы можем заключить, что эти две фигуры имеют равные площади.

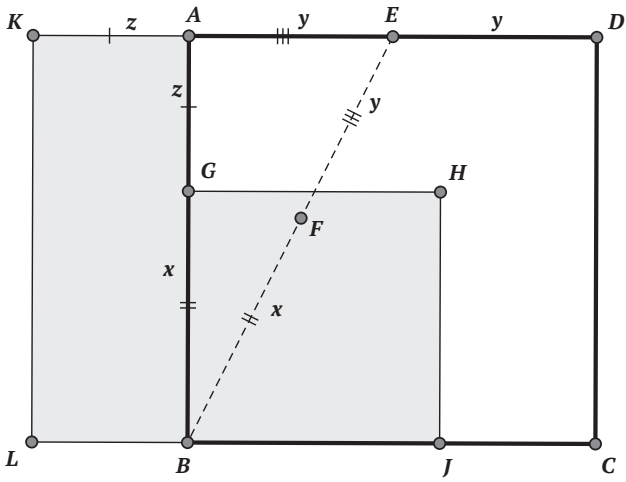


Рисунок 56-Р

Пример 57. Расположение квадратов и ромбов

Начнем с рис. 57-Р, проведя перпендикуляр из точки *F* к диагонали *BD*, пересекающий *BD* в точке *G*. В квадрате *ABCD* перпендикуляры диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *M*. Тогда отрезки *GF*||*AC*, поэтому мы можем заключить, что *GF* = *CM* = ½*AC*. Поскольку нам дано, что *AC* = *BD* = *BF*, в прямоугольном треугольнике *BFG* мы имеем *GF* = ½*BF*. Отсюда следует, что *BFG* – это треугольник с углами 30° – 60° – 90°, где ∠*FBG* = ∠*FBD* = 30°.

Рассматривая площадь ромба *BFED*, мы замечаем, что диагональ *DF* делит ромб на две конгруэнтные части, так что площадь ромба [*BFE*D] = 2 площадям треугольника [*BFD*]. Кроме того, поскольку диагональ *BD* делит квадрат *ABCD* на две равные половины, мы находим, что

площадь треугольника [*BFD*] = ½ *BD*·*GF* = ½ *BD*·*MC* =
площади треугольника [*BCD*],

и отсюда получаем

площадь ромба [*BFED*] = 2 площадям треугольника [*BFD*] =
2 площадям треугольника [*BCD*] = площади квадрата [*ABCD*].

Затем мы заключаем, что площадь ромба *BFED* равна площади квадрата *ABCD*, как мы и пытались доказать.

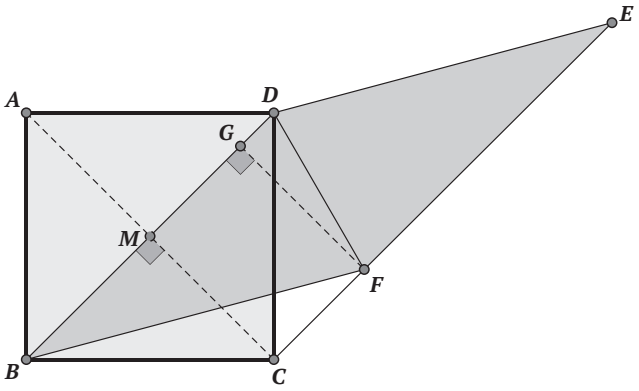


Рисунок 57-P

Пример 58. При соединении квадратов формируется еще один квадрат

Как мы видим на рис. 58-P, мы начинаем это доказательство с построения параллелограммов *ADGL* и *CKED*, используя стороны данных квадратов. Теперь мы рассмотрим, что получим, когда повернем параллелограмм *ADGL* на 90° вокруг точки *P* по часовой стрелке. Поскольку диагонали *AC* и *BD* квадрата *ABCD* перпендикулярны, точка *A* поворачивается в точку *D*, а точка *D* поворачивается в точку *C*. Так как $\angle CDE = 360° - \angle EDG - \angle GDA - \angle ADC = 360° - 90° - \angle GDA - 90° = 180° - \angle GDA$ и $\angle DAL = 180° - \angle GDA$ в параллелограмме *ADGL*, мы имеем $\angle DAL = \angle CDE$. Наконец, мы также имеем $DA = DC$ и $AL = DG = DE$. Это означает, что параллелограммы *ADGL* и *CKED* конгруэнтны, и поскольку *AD* поворачивается в *DC*, мы видим, что весь параллелограмм *ADGL* поворачивается в параллелограмм *CKED*. Это означает, что центр *M* треугольника *ADGL* вращается к центру *N* треугольника *CKED*, и, следовательно, мы имеем $PM = PN$ и $PM \perp PN$. Таким образом, треугольник *PNM* является равнобедренным прямоугольным треугольником.

Теперь мы можем повторить этот процесс, вращая параллелограмм *ADGL* вокруг точки *R* на 90° против часовой стрелки. Аналогичным образом мы обнаруживаем, что *M* вращается к *N*, и, следовательно, треугольник *RMN* также является равнобедренным прямоугольным треугольником. Поскольку четырехугольник *PNRM* состоит из двух равнобедренных прямоугольных треугольников *PNM* и *RMN*, то такой четырехугольник должен быть квадратом.

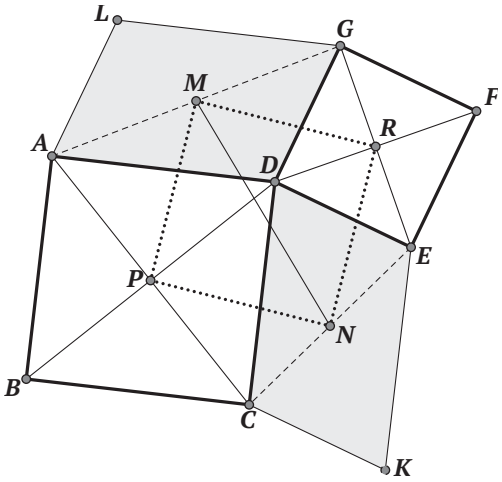


Рисунок 58-Р

Пример 59. Необычное расположение фигур может привести к неожиданным точкам, лежащим на одной окружности

Поскольку $CB = CP = CE$, отсюда следует, что $\angle BCP = 180° - \angle ACB = 180° - 45° = 135°$ и $\angle ECB = \angle ACB + \angle ECA = 45° + 90° = 135°$, как показано на рис. 59-Р, и поэтому $\Delta CEB \cong \Delta CBP$. Аналогично мы также имеем $AB = AF = BC = CP$ и $\angle BAF = 135°$, так что $\Delta ABF \cong \Delta CBP$. Это дает $BP = BE = BF$. Поскольку $BPHG$ – квадрат, то $BP = BG$, и, следовательно, все точки F, E, P и G лежат на общей окружности с центром B.

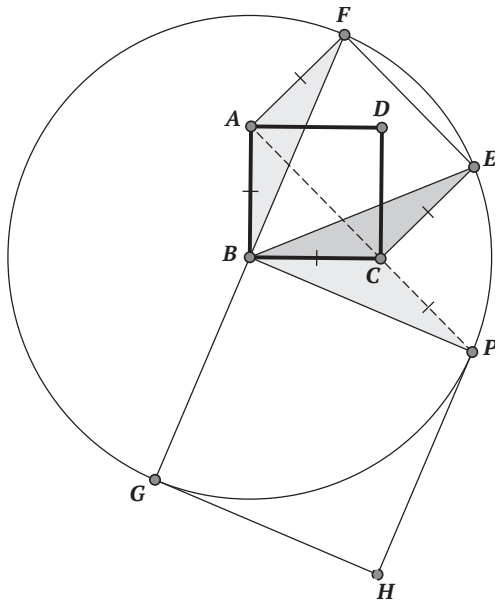


Рисунок 59-Р

Пример 60. Неожиданные точки, лежащие на одной окружности

На рис. 60-P начнем с проведения линии *EN*. Из параллельных линий *AD* и *MC* получаем $\Delta EDA \sim \Delta EMC$ и, следовательно, $\frac{MC}{AD} = \frac{ME}{ED} = \frac{2}{3}$. Это позволяет нам записать $ME = 2y$ и $ED = 3y$. Поскольку нам дано, что $DC = NC = MN$, мы также можем записать $DC = NC = MN = x$. Применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику *DMC*, получаем $DC^2 + MC^2 = MD^2$, или $x^2 + (2x)^2 = (5y)^2 = 25y^2$, что упрощается до $x^2 = 5y^2$. Это эквивалентно $\frac{x}{5y} = \frac{y}{x}$, или $\frac{2x}{5y} = \frac{2y}{x}$, что дает нам $\frac{MC}{MD} = \frac{ME}{MN}$. Отсюда следует, что $\Delta EMN \sim \Delta CDM$, и $\angle MEN = 90° = \angle NED$. Теперь у нас есть четырехугольник *DENC* с парой противоположных (прямых) углов, которые являются дополнительными, что затем доказывает, что четырехугольник *DENC* является вписанным.

Остается лишь показать, что точка пересечения *F* с описанной окружностью *DENC* на стороне *AD* является вершиной квадрата *CDFN*. Поскольку и $\angle NFD$, и $\angle NED$ измеряются полудугой *DCN*, мы имеем $\angle NFD = \angle NED = 90°$. Мы уже знаем, что $NC = DC$, и, следовательно, четырехугольник *CDFN* является квадратом.

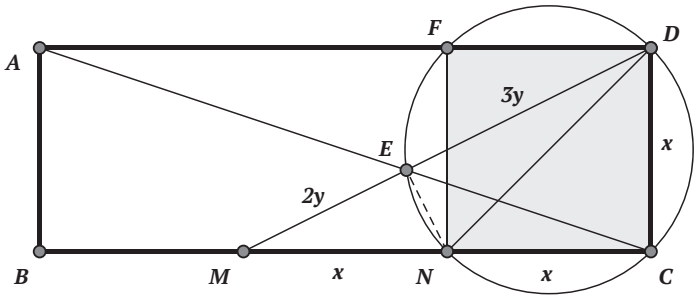


Рисунок 60-P

Пример 61. Квадрат на прямоугольном треугольнике

Поскольку $\angle ADC$ и $\angle CBA$ являются прямыми углами, как показано на рис. 61-P, четырехугольник *ABCD* является вписанным, так как его противоположные углы являются дополнительными.

Поскольку диагонали делят друг друга пополам, $AD = DC$, и отсюда следует, что длина дуги *AD* = длине дуги *DC*. Углы *DBA* и *CBD* равны половинным дугам *AD* и *DC* соответственно, и тогда мы получаем, что $\angle DBA = \angle CBD$, что доказывает, что отрезок *BD* делит прямой угол *ABC* пополам.

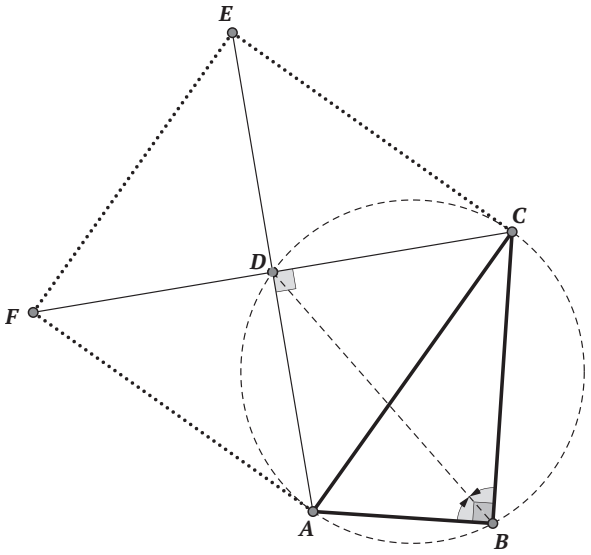


Рисунок 61-Р

Пример 62. Перпендикулярность в квадрате и неожиданное равенство

На рис. 62-Р обозначим точку пересечения отрезков *CP* и *DF* через *H*, а точку *R* – через точку пересечения отрезков *CP* и *BD*. Поскольку *DF* является биссектрисой $\angle ADB$, мы имеем $\angle PDH = \angle ADF = \angle FDB = \angle HDR$. Так как $CP \perp DF$, мы знаем, что $\angle DHP = \angle RHD$, и поскольку треугольники *HDP* и *HRD* имеют общую сторону *DH*, они конгруэнтны, и, следовательно, *PD* = *RD*.

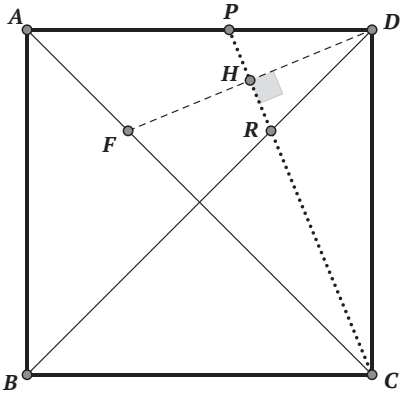


Рисунок 62-Р

Пример 63. Удивительное совпадение в квадрате

На рис. 63-P точка *X* – это точка пересечения отрезков *BH* и *EG*, точка *Y* – это точка пересечения отрезков *DE* и *FH*, а точка Z – это точка пересечения отрезка *EH* – это точка пересечения с продолжением отрезка *CR*. Кроме того, отрезок *EG* перпендикулярен отрезку *ZU* в точке *U*. Для упрощения обозначений мы обозначили отрезки $AE = HR = DG = a$, отрезки $EB = RF = GC = b$, отрезки $AH = ER = BF = c$ и отрезки $HD = RG = FC = d$.

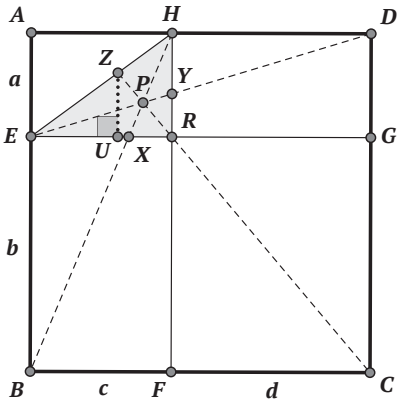


Рисунок 63-P

Треугольники *XEB* и *XRH* подобны, потому что у них параллельные стороны и пара вертикальных углов в точке *X*, следовательно, верно соотношение $\frac{EX}{XR} = \frac{EB}{HR} = \frac{b}{a}$. Аналогично треугольники *YDH* и *YER* также подобны, поскольку у них тоже параллельные стороны и пара вертикальных углов в точке *Y*, так что выполняется $\frac{RY}{YH} = \frac{ER}{HD} = \frac{c}{d}$. Кроме того, мы видим, что треугольники *ZUR* и *RFC* подобны с параллельными сторонами, так что у нас верны соотношения $\frac{RU}{ZU} = \frac{FC}{FR} = \frac{d}{b}$, или $RU = ZU \cdot \frac{d}{b}$.

Аналогично треугольники *ZEU* и *HER* также подобны с парой параллельных сторон, что приводит нас к формуле $\frac{UE}{ZU} = \frac{ER}{HR} = \frac{d}{a}$, или $UE = ZU \cdot \frac{c}{a}$.

Подобие треугольников *ZEU* и *HER* дает нам соотношение

$$\frac{HZ}{ZE} = \frac{RU}{UE} = \frac{ZU \cdot \frac{d}{b}}{ZU \cdot \frac{c}{a}} = \frac{ad}{bc}.$$

Применим теорему Чевы (см. «Инструментарий») к треугольнику *ERH* и увидим, что выполняется $\frac{EX}{XR} \cdot \frac{RY}{YH} \cdot \frac{HZ}{ZE} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{ad}{bc} = 1$, что означает, что прямые *BH*, *DE* и *CR* пересекаются в общей точке *P*.

Пример 64. Удивительное равенство в квадрате

Как показано на рис. 64-P, мы продолжаем отрезок CE до пересечения с продолжением стороны *DA* в точке *Q*. Поскольку отрезки $AE = EB$ и $\angle AEQ = \angle BEC$, мы обнаруживаем, что прямоугольные треугольники *EBC* и *EAQ* конгруэнтны (по признаку *ASA*). Следовательно, $AQ = BC$, и поскольку у нас есть AD = BC, у нас также есть AQ = AD.

Мы также замечаем, что $\Delta EBC \cong \Delta FCD$, что приводит к равенству $\angle CFP + \angle PCF = \angle CFD + \angle ECB = 90°$, и, следовательно, $\angle FPC = 90°$. Это означает, что ΔQPB – прямоугольный треугольник, где *AP* – медиана гипотенузы, которая, следовательно, равна половине длины гипотенузы.

Это дает $AP = \frac{1}{2}QD = AB$, поэтому мы можем заключить, что $AP = AB$.

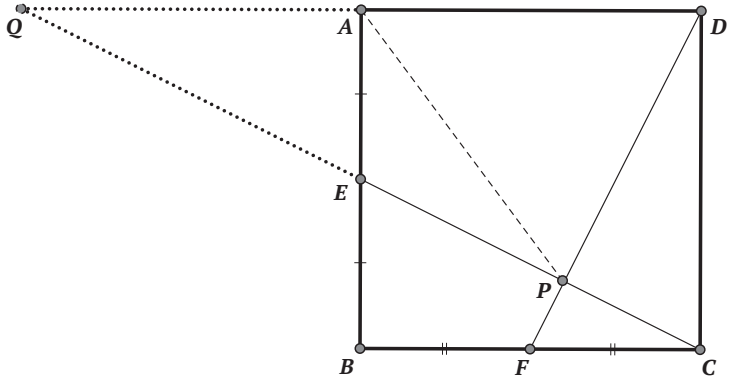


Рисунок 64-P

Пример 65. Удивительное равенство квадрата

На рис. 65-P мы сначала отмечаем, что $CT^2 = CA \cdot CF$ по теореме о степени точки (см. «Инструментарий»). Это можно переписать как $CT^2 = CA \cdot \frac{1}{2}CA = \frac{1}{2}CA^2$. Применив теорему Пифагора к треугольнику *BCA*, получим: $CA^2 = BC^2 + AB^2 = 2AB^2$.

Следовательно, $CT^2 = \frac{1}{2}CA^2 = \frac{1}{2} \cdot 2AB^2 = AB^2$, что позволяет нам заключить, что $CT = AB$.

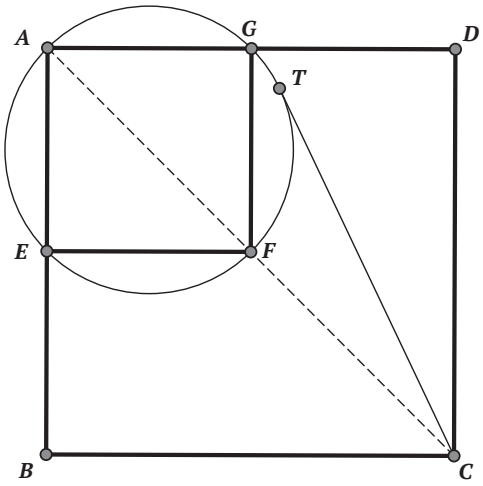


Рисунок 65-Р

Пример 66. Удивительные соотношения площадей в особом разбиении квадрата

Как мы видим на рис. 66-Р, параллельные стороны *BC* и *DA* в квадрате *ABCD* дают нам внутренние накрест лежащие углы $\angle FAE = \angle FCB$ и $\angle AEF = \angle CBF$. Отсюда следует, что $\Delta FEA \sim \Delta FBC$, и поскольку $BC = 2AE$, мы имеем $AF = 12 \cdot FC$.

Треугольники *AFE* и *CEF* имеют одинаковую высоту от точки *E* до диагонали *AC*, поэтому мы приходим к соотношению: площадь треугольника [*AFE*] = ½ площади треугольника [*CEF*]. Аналогично мы также имеем $BF = 2EF$, и, следовательно, $BE = BF + EF = 2EF + EF = 3EF$. Треугольники *AFE* и *ABE* имеют одинаковую высоту от *A* до отрезка *EB*, и мы можем заключить, что площадь треугольника [*AFE*] = ⅓ площади треугольника [*ABE*]. Наконец, поскольку стороны двух подобных треугольников *AFE* и *BCF* находятся в соотношении 1:2, соотношение их площадей равно 1:4, поэтому площадь треугольника [*AFE*] = ¼ площади треугольника [*BCF*].

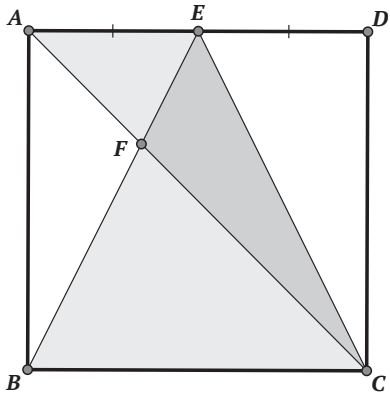


Рисунок 66-Р

Пример 67. Равенство возникает, когда квадрат и прямоугольник имеют общую диагональ

Как мы видим на рис. 67-P, у нас одновременно выполняются условия $\angle BAG = 90° - \angle GAD$ и $\angle DAE = 90° - \angle GAD$, и, следовательно, $\angle BAG = \angle DAE$. Кроме того, рассматривая внешний угол треугольника AEG, мы имеем $\angle AGB = 90° + \angle AEG$. Поскольку у нас также есть $\angle AED = 90° + \angle AEG$, мы получаем равенство $\angle AGB = \angle AED$. Так как четырехугольник $ABCD$ – квадрат, у нас есть $AB = AD$, и, следовательно, $\Delta ABG \cong \Delta ADE$, откуда следует, что $ED = BG$.

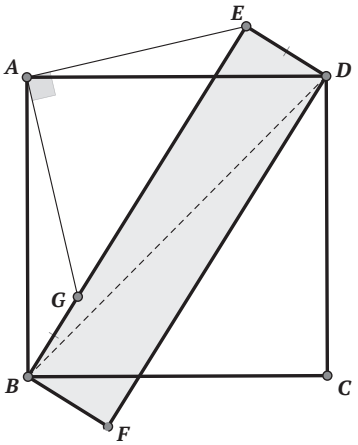


Рисунок 67-P

Пример 68. Удивительное равенство площадей внутри квадрата

Применим теорему Пифагора к треугольнику ABC на рис. 68-P, чтобы получить $AB^2 + BC^2 = CA^2$. Поскольку $AB = BC$ и $CA = 4 \cdot PA$, то приходим к соотношению $2 \cdot AB^2 = 16 \cdot PA^2$, или $AB = 2 \cdot \sqrt{2}PA$. Применив теорему Пифагора к треугольнику AFP, получим соотношение $PA^2 + PF^2 = AF^2$. Из равенства отрезков $PA = PF$ следует, что $2 \cdot PA^2 = AF^2$, или $AF = PA\sqrt{2}$. Следовательно, $AF = \frac{1}{2}AB$. Точка F является серединой стороны AB.

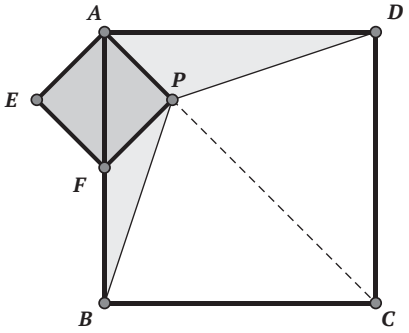


Рисунок 68-P

Медиана *PF* к стороне *AB* в треугольнике *ABP* делит треугольник *ABP* на две равные по площади фигуры. То есть в треугольнике *ABP* мы находим, что площадь треугольника [*AFP*] = ½ площади треугольника [*ABP*]. В силу симметрии у нас есть $\Delta APB \cong \Delta ADP$, а также площадь треугольника [*AFP*] = ½ площади треугольника [*APD*]. Это дает нам

площадь квадрата [*AEFP*] = 2 площади треугольника [*AFP*] =
½ площади треугольника [*ABP*] + ½ площади треугольника [*APD*] =
½ площади четырехугольника [ABPD].

Следовательно, площадь квадрата *AEFP* равна половине площади четырехугольника *ABPD*.

Пример 69. Удивительные треугольники равной площади, полученные из квадрата

Поскольку отрезок AC является диагональю квадрата *ABCD*, показанного на рис. 69-P, мы имеем $\angle BAF = \angle FAD = 45°$. Напомним, что точка *E* была помещена на окружность с центром *A* и точками *B* и *D* так, что *BF* = *FD* = *DE*.

Это означает, что мы также имеем $\angle DAE = \angle BAF = \angle FAD = 45°$, и, следовательно, $\angle BAE = \angle BAF + \angle FAD + \angle DAE = 45° + 45° + 45° = 135°$.

Формула площади треугольника – это половина произведения двух сторон и синуса угла между ними. Следовательно, площадь треугольника [*ABE*] = ½*AB*·*AE*·sin (135°) = ½*AB*·*AE*·sin (45°), и площадь треугольника [AFD] = ½*AF*·*AD*·sin (45°). Поскольку *AB* = *AE* = *AF* = *AD*, так как все они являются радиусами окружности, мы имеем равенство: площадь треугольника [*ABE*] = площади треугольника [*AFD*].

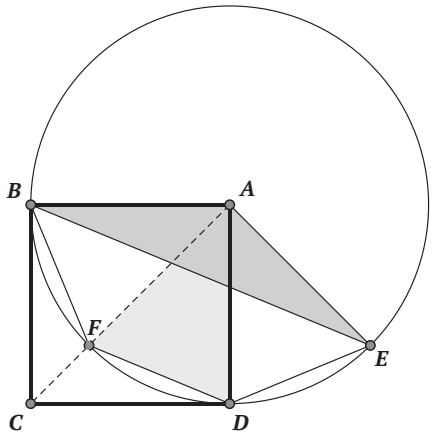


Рисунок 69-P

Пример 70. Еще один случай равных площадей, полученных из исходного квадрата

На рис. 70-P точка E – это точка пересечения диагоналей AC и BD квадрата $ABCD$. Мы обозначили $EA = EB = EC = ED = d$, поскольку диагонали квадрата перпендикулярны и делят друг друга пополам. Кроме того, мы обозначили $CB = CP = a$, $AL = 2d$ и $BP = s$. Поскольку ΔBPE – прямоугольный треугольник, теорема Пифагора дает нам соотношение $d^2 + (d + a)^2 = s^2$, или $s^2 = 2d^2 + 2ad + a^2$, учитывая, что s^2 представляет площадь квадрата $BGHP$. Площадь прямоугольника $APML$ равна $2d \cdot (2d + a) = 4d^2 + 2ad$. Поскольку применение теоремы Пифагора к прямоугольному треугольнику BCE дает нам $2d^2 = d^2 + d^2 = a^2$, подставляя это значение вместо a^2 в уравнение для площади квадрата, получаем $s^2 = 4d^2 + 2ad$, что совпадает с площадью прямоугольника. Следовательно, площадь прямоугольника $APML$ равна площади квадрата $BGHP$.

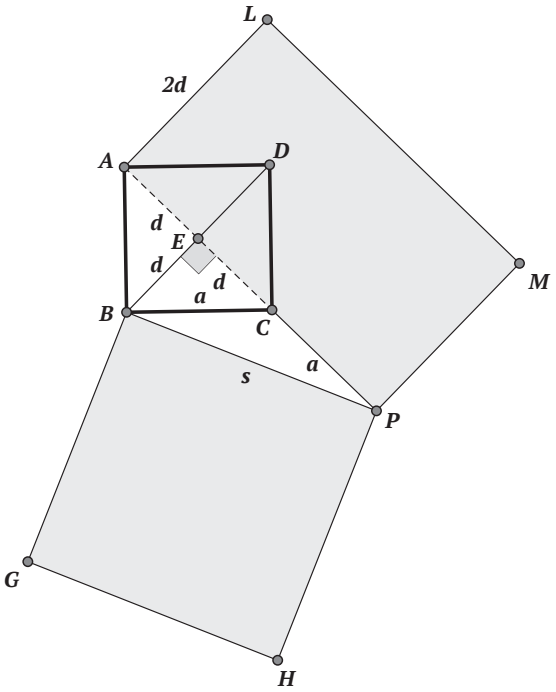


Рисунок 70-P

Пример 71. Два квадрата приводят к неожиданному равенству

На рис. 71-Р мы видим следующие соотношения. В силу заданных перпендикулярностей $AM \perp DE$ и $AB \perp AD$ мы находим, что $\angle ADE = \angle BAM$. Поскольку прямоугольные треугольники ABG и AED имеют общие стороны с квадратами, мы имеем $\Delta ABG \cong \Delta AED$ и $\angle ADE = \angle GBA$. Таким образом, $\angle BAM = \angle GBA = \angle MBA$, так что отрезки $MA = MB$. Мы также имеем $\angle BAM = \angle GBA = \angle BGF$, поскольку отрезки $FG \| AB$. Следовательно, выполняются соотношения $\angle MAG = 90° - \angle BAM = 90° - \angle BGF = \angle AGM$, что делает MGA равнобедренным треугольником со сторонами $MG = MA$. Таким образом, $MA = MB = MG$, определяя M как середину отрезка BG.

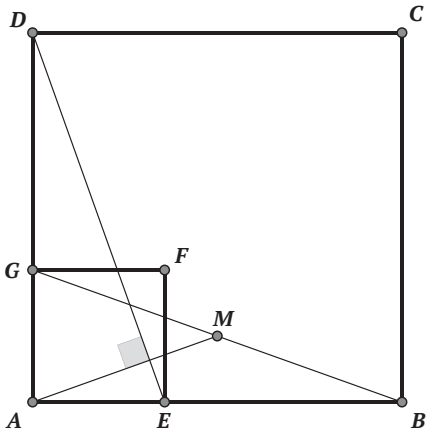


Рисунок 71-Р

Пример 72. Удивительное свойство биссектрис углов полного четырехугольника

Для упрощения обозначений обозначим некоторые углы, как показано на рис. 72-Р: $\angle BEP = \angle PEC = e$, $\angle AFP = \angle PFB = f$, $\angle FAE = a$, $\angle CBA = b$, $\angle ADC = d$ и $\angle FPE = p$. Обозначим точку пересечения отрезков AF и PE как G и угол $\angle FGE = g$. Применяя соотношение, согласно которому внешний угол треугольника равен сумме двух удаленных внутренних углов, получаем следующие выражения:

для треугольника EGD: $d = e + g$, (I)

для треугольника FGP: $g = f + p$, (II)

для треугольника ABF: $a = 2f + b$, (III)

для треугольника ADE: $d = 2e + a$; (IV)

из выражений I и II мы получаем, что $d = e + f + p$; (V)

из выражений III и IV мы получаем, что $d = 2e + 2f + b$; (VI)

умножив выражение V на 2, приходим к выражению $2d = 2e + 2f + 2p$, (VII)

и мы вычитаем выражение VI из выражения VII, чтобы найти $d = 2p - b$.

Мы можем записать это как $p = 12(b + d)$, или $\angle FPE = ½ (\angle CBA + \angle ADC)$, что завершает доказательство.

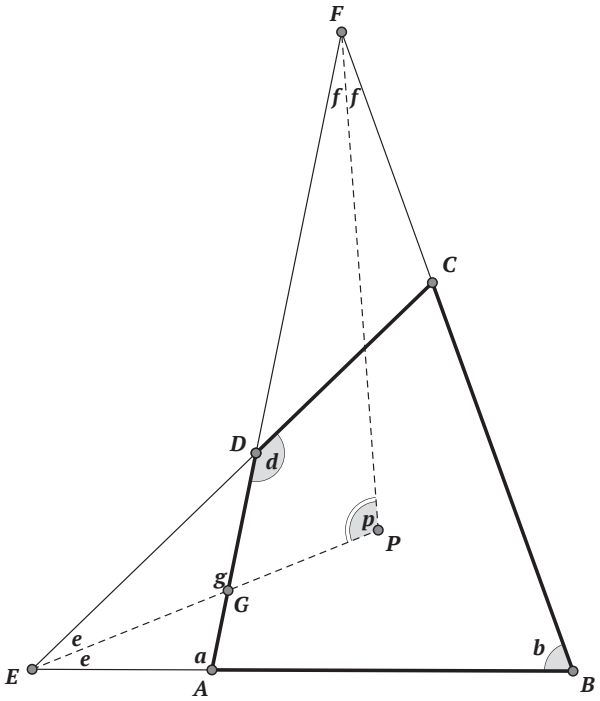


Рисунок 72-P

Пример 73. Перпендикуляры из вершин четырехугольника к случайно проведенной прямой

На рис. 73a-P перпендикуляры из точек *Q*, *R*, *S* и *T* к прямой *FMNG* пересекают ее в точках *I*, *J*, *K* и *L* соответственно. Затем мы строим перпендикуляр из точки *P* к отрезку *TL*, пересекающий ее в точке *Z*, и перпендикуляр из *P* к продолжению отрезка *RJ*, пересекающий ее в точке *Y*. Заметив, что отрезки *AE* и *DH* оба перпендикулярны отрезку *MN*, мы видим, что четырехугольник *AEHD* является прямой трапецией. Поскольку точка *T* – середина стороны *AD*, а отрезок *TL* перпендикулярен отрезку *MN*, мы находим, что отрезок *TL* является средней линией этой трапеции, что дает нам $AE + DH = 2TL$. С другой стороны, *MN* мы аналогично получаем *CGFB* как прямоугольную трапецию со средней линией *RJ*, что дает нам $BF + CG = 2RJ$. Тогда мы имеем $(AE + DH) - (BF + CG) = 2TL - 2RJ$.

Теперь мы замечаем, что $TL = TZ + ZL$ и $RJ = RY - YJ$. Из данных примера 44 мы знаем, что *QRST* – параллелограмм и что точка пересечения *P* его диагоналей – середина диагонали *RT*, или $RP = TP$. Поскольку *TZ* и *RY* перпендикулярны *MN*, мы знаем, что треугольники *PTZ* и *PRY* конгруэнтны, что дает

нам $TZ = RY$. Так как $YZLH$ – прямоугольник с точкой P в качестве середины его стороны YZ, мы имеем $YJ = PX = ZL$. Собрав всю эту информацию вместе, мы получаем

$$(AE + DH) - (BF + CG) = 2TL - 2RJ =$$
$$2(TL - RJ) = 2(TZ + ZL - (RY - YJ)) =$$
$$2(TZ + PX - TZ + PX) = 4PX,$$

и тогда верно соотношение $(AE + DH) - (BF + CG) = 4PX$.

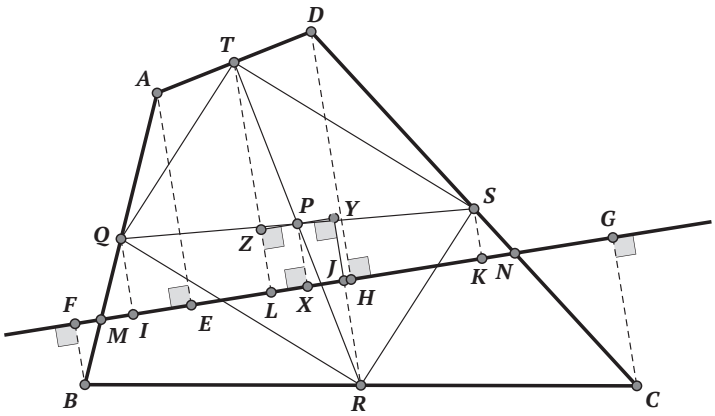


Рисунок 73a-P

На рис. 73b-P мы рассматриваем случай, когда прямая MN не пересекает четырехугольник $ABCD$. Точки I, J, K, L, Y и Z были добавлены таким же образом, как и на рис. 73a-P, и мы можем вывести необходимые соотношения точно таким же образом. Как и выше, $AEHD$ и $CGFB$ являются прямыми трапециями, причем $AE + DH = 2TL$ и $BF + CG = 2RJ$, так что мы имеем $AE + BF + CG + DH = (AE + DH) + (BF + CG) = 2TL + 2RJ$.

Так же, как и прежде, мы имеем $TL = TZ + ZL$, с небольшим отличием, что $RJ = YJ - RY$. Мы снова имеем $TZ = RY$ и $YJ = PX = ZL$. Используя эти соотношения, мы получаем выражения:

$$(AE + DH) + (BF + CG) = 2TL + 2RJ =$$
$$2(TL + RJ) = 2(TZ + ZL + YJ - RY) =$$
$$2(TZ + PX + PX - TZ) = 4PX,$$

и в итоге получаем, что $AE + BF + CG + DH = 4PX$.

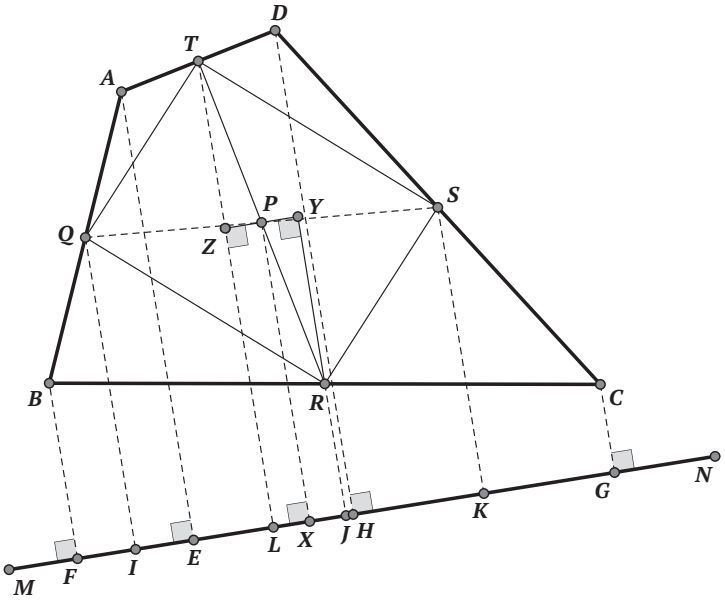


Рисунок 73b-P

Пример 74. Дополнительные соотношения в четырехугольниках

Этот результат представляет собой комбинацию нескольких любопытных фактов, с которыми мы уже столкнулись. Как видно на рис. 74-P, четырехугольник *EFGH* является параллелограммом Вариньона четырехугольника *ABCD*, с которым мы впервые столкнулись в примере 44. Из доказательства этого результата мы знаем, что $EF = GH = \frac{1}{2}AC$ и $FG = HE = \frac{1}{2}BD$. Это дает нам соотношения $EF^2 = GH^2 = \frac{1}{4}AC^2$ и $FG^2 = HE^2 = \frac{1}{4}BD^2$.

Из доказательства примера 30 мы знаем, что сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов диагоналей. В параллелограмме Вариньона *EFGH* это дает нам соотношение $EF^2 + FG^2 + GH^2 + HE^2 = EG^2 + FH^2$, или $\frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BD^2 + \frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BD^2 = EG^2 + FH^2$, что затем можно записать как $\frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}BD^2 = EG^2 + FH^2$, или $AC^2 + BD^2 = 2(EG^2 + FH^2)$.

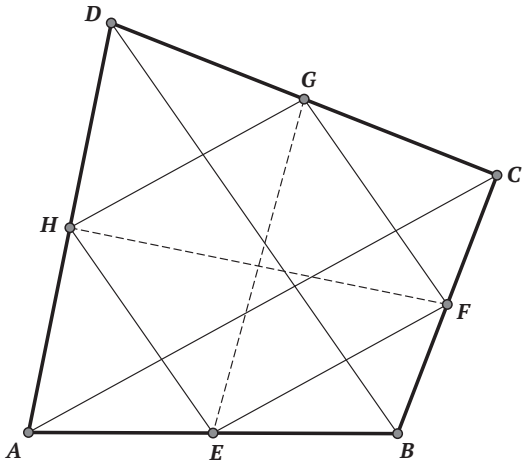


Рисунок 74-Р

Пример 75. Две равные смежные стороны четырехугольника образуют равные углы

Проведя отрезок *DB* на рис. 75-Р, мы видим, что треугольник *ABD* равнобедренный, при этом стороны *AB* = *AD* и ∠*ADB* = ∠*DBA*. Поскольку точка *M* – середина стороны *CB*, а точка *N* – середина стороны *CD*, внутри треугольника *DCB* выполняется *MN*||*BD*, следствием этого является соотношение EF||*BD*. Таким образом, соответствующие углы параллельных прямых равны: ∠*AEF* = ∠*ADB* = ∠*DBA* = ∠*EFA*, и поэтому мы доказали, что ∠*AE*F = ∠*EFA*.

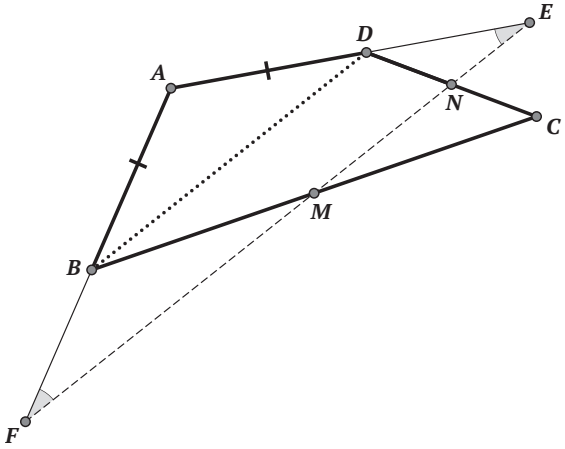


Рисунок 75-Р

Пример 76. Две равные противоположные стороны четырехугольника образуют равные углы

На рис. 76-Р треугольник $C'F'M'$ образуется в результате поворота треугольника CFM на 180° вокруг середины N линии стороны AD. Это означает, что $\angle M'F'C' = \angle MFC$.

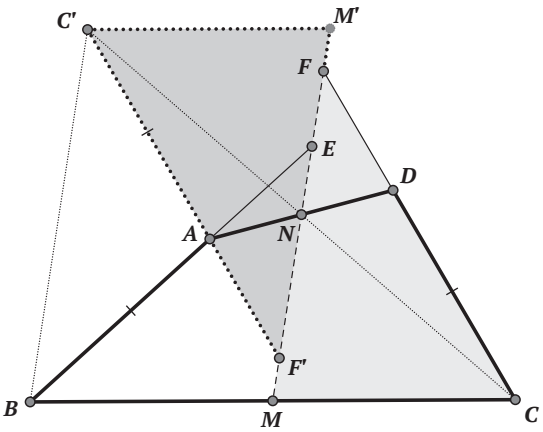


Рисунок 76-Р

Вращение приводит к тому, что точка D на стороне FC совпадает с точкой A, так что $AC' = DC = AB$, следовательно, треугольник $AC'B$ равнобедренный, и $\angle ABC' = \angle BC'A$.

Также поскольку отрезки $AN = DN$ и $\angle C'NA = \angle CND$, мы имеем $\Delta ANC' \cong \Delta DNC$, что делает N серединой отрезка CC'. Принимая точку M за середину CB, прямая MN соединяет середины двух сторон треугольника $BC'C$ так, что $\Delta CC'B \sim \Delta$CNM, и выполняется $MN \| C'B$ и $MF \| C'B$. Это дает нам следующие равенства: $\angle BEM = \angle AEF' = \angle ABC' = \angle BC'A = \angle EF'A = \angle M'F'C'$. Поскольку $\angle M'F'C' = \angle MFC$, тогда мы имеем $\angle BEM = \angle MFC$.

Пример 77. Угол, образованный биссектрисами смежных углов четырехугольника

На рис. 77-Р мы снова обозначим углы для наглядности. Сумма углов четырехугольника $ABCD$ равна 360°, и, следовательно, $2a + b + c + 2d = 360°$. В треугольнике AED мы имеем $a + d = 180° - e$. Подставляя это в предыдущее уравнение, получаем $2(180° - e) + b + c = 360°$, что упрощается до $2e = b + c$, или $e = \frac{1}{2}(b + c)$, что и является желаемым результатом: $\angle DEA = 12(\angle CBA + \angle DCB)$.

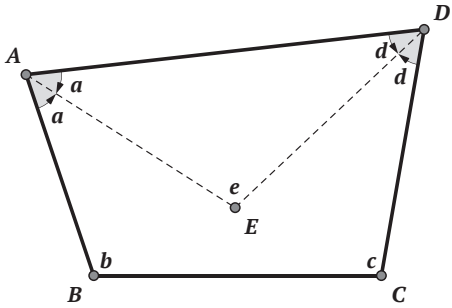


Рисунок 77-Р

Пример 78. Четырехугольник с двумя последовательными прямыми углами имеет перпендикулярные биссектрисы углов

Из доказательства примера 77 известно, что $\angle DEA = \frac{1}{2}(\angle CBA + \angle DCB)$. Применив этот результат к рис. 78-Р, получаем $\angle DEA = \frac{1}{2}(90° + 90°) = 90°$, и, следовательно, биссектрисы углов *AE* и *DE* перпендикулярны.

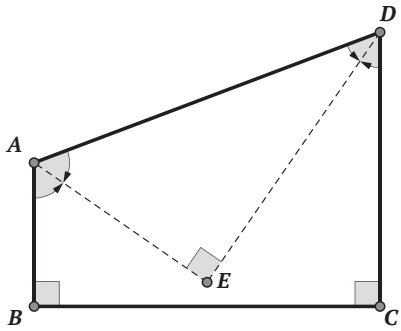


Рисунок 78-Р

Пример 79. Сравнительные площади квадрата на четырехугольнике

На рис. 79-Р точка *P* – это точка пересечения отрезков *AC* и *BD*, и мы затем обозначим $PA = x$, $PC = y$ и $BD = BF = AC = a = x + y$. Заметим, что площадь треугольника $[ABD] = \frac{1}{2}BD \cdot PA = \frac{1}{2}ax$ и площадь треугольника $[CDB] = \frac{1}{2}\ BD\ PC = \frac{1}{2}ay$. Следовательно,

площадь четырехугольника [*ABCD*] = площадь треугольника [*ABD*] + площадь треугольника $[CDB] = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay = \frac{1}{2}\ a\ (x + y) = \frac{1}{2}a^2$.

Поскольку площадь квадрата *BDEF* равна $BD \cdot BF = a^2$, площадь четырехугольника *ABCD* составляет половину площади квадрата *BDEF*.

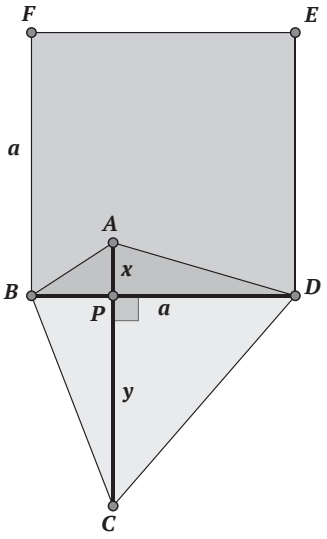


Рисунок 79-P

Пример 80. Квадраты на сторонах четырехугольника образуют треугольники равной площади

Начнем с того, что проведем диагонали *AC* и *BD* четырехугольника *ABCD*, как показано на рис. 80-P. Также обозначим $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$.

В каждом из четырех квадратов *AEFB*, *BGHC*, *CIJD* и *DKLA* все четыре стороны равны по длине. Теперь отметим, что углы $\angle BAD$ и $\angle LAE$ являются дополнительными, так как $\angle LAE = 360° - \angle EAB - \angle BAD - \angle DAL = 360° - 90° - \angle BAD - 90° = 180° - \angle BAD$. Аналогично углы $\angle CBA$ и $\angle FBG$ также являются дополнительными, как и углы $\angle DCB$ и $\angle HCI$, а также углы $\angle ADC$ и $\angle JDK$. Теперь мы можем выразить площадь четырехугольника *ABCD* двумя способами. С одной стороны, разделив площадь четырехугольника *ABCD* на диагональ *BD*, мы получаем:

площадь четырехугольника [*ABCD*] = площадь треугольника [*ABD*] + площадь [*CDB*] = $\frac{1}{2}ad\cdot\sin(\angle BAD) + \frac{1}{2}bc\cdot\sin(\angle DCB) = \frac{1}{2}ad\cdot\sin(\angle LAE) + \frac{1}{2}bc\cdot\sin(\angle HCI)$ = площадь треугольника [*ALE*] + площадь треугольника [*CHI*].

С другой стороны, разделив площадь четырехугольника *ABCD* на диагональ *AC*, получаем выражение:

площадь треугольника [*ABCD*] = площадь треугольника [*BCA*] + площадь треугольника [*DAC*] = $\frac{1}{2}ab\cdot\sin(\angle CAB) + \frac{1}{2}cd\cdot\sin(\angle ADC) = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\angle FBG + \frac{1}{2}cd\cdot\sin\angle JDK$ = площадь треугольника [*BFG*] + площадь треугольника [*DJK*].

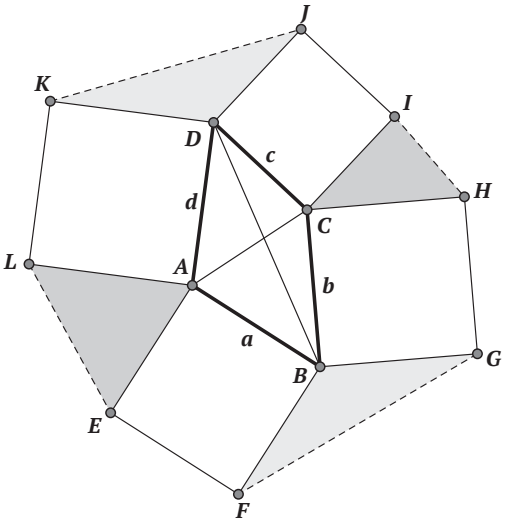


Рисунок 80-Р

Поскольку оба значения равны площади четырехугольника *ABCD*, мы, следовательно, получаем выражение:

площадь треугольника [*ALE*] + площадь треугольника [*CHI*] =
площадь треугольника [*BFG*] + площадь треугольника [*DJK*].

Пример 81. Равенство пар квадратов на диагоналях и срединных линиях

На рис. 81-Р вершины четырехугольника *MNPQ* являются серединами сторон четырехугольника *ABCD*. Как мы знаем из доказательства примера 44, *MNPQ* является параллелограммом Вариньона четырехугольника *ABCD*. Его стороны параллельны диагоналям *ABCD* и равны половине их длины, или $MN||PQ||AC$ и $NP||QM||BD$, где $MN = PQ = \frac{1}{2}AC$ и $NP = QM = \frac{1}{2}BD$.

Применив теорему косинусов (см. «Инструментарий») к треугольникам *MNP* и *NPQ*, мы можем выразить диагонали треугольника *MNPQ* как $MP^2 = MN^2 + NP^2 - 2\cos(\angle PNM)$ и $NQ^2 = NP^2 + PQ^2 - 2\cos(\angle QPN)$.

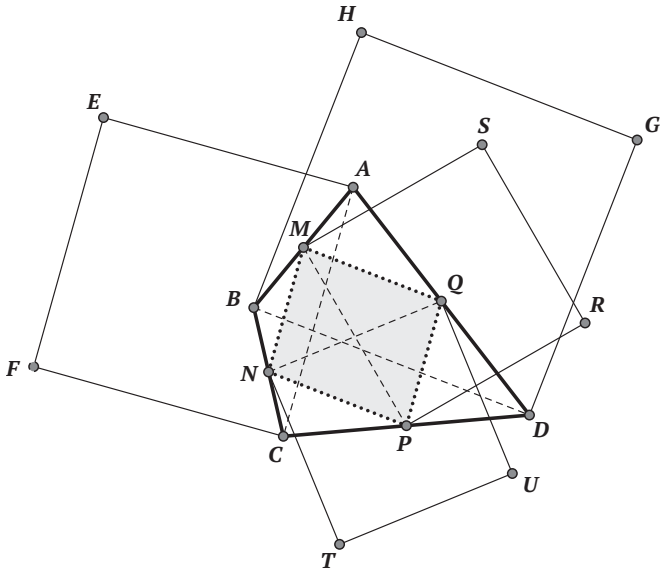


Рисунок 81-Р

Поскольку верно равенство $\angle PNM = 180° - \angle QPN$, получается, что $MNPQ$ является параллелограммом, а также $MN = PQ$ и $NP = QM$, мы имеем выражение:

$$MP^2 + NQ^2 =$$
$$(MN^2 + NP^2 - 2\cos(\angle PNM)) + (NP^2 + PQ^2 - 2\cos(\angle QPN)) =$$
$$(MN^2 + NP^2 + 2\cos(\angle QPN)) + (NP^2 + MN^2 - 2\cos(\angle QPN)) =$$
$$2MN^2 + 2NP^2.$$

Подставляя результат вычислений для MN и NP, получаем выражение:

$$MP^2 + NQ^2 = 2MN^2 + 2NP^2 = 2(\tfrac{1}{2} AC)^2 + 2(\tfrac{1}{2} BD)^2,$$

или

$$MP^2 + NQ^2 = AC^2 + BD^2.$$

Пример 82. Введение в циклический четырехугольник

Сначала предположим, что $ABCD$ является циклическим четырехугольником, и, следовательно, как мы видим на рис. 82-Р, $\angle ECB = \angle ACB = \angle ADB = \angle ADE$. Поскольку вертикальные углы в точке E равны, мы также имеем $\angle BEC = \angle DEA$, и, следовательно, $\Delta EBC \sim \Delta EDA$. Это приводит к выражению $\frac{AE}{BE} = \frac{ED}{EC}$, что затем дает нам $AE \cdot EC = BE \cdot ED$.

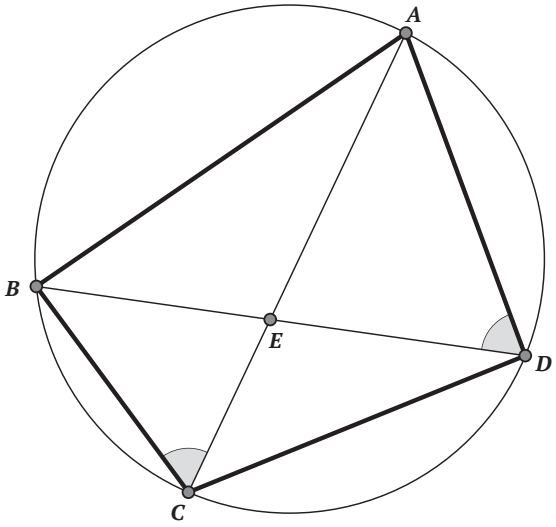


Рисунок 82-P

Этот аргумент работает и в обратном направлении. Если нам дано $AE \cdot EC = BE \cdot ED$ в четырехугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке E, это эквивалентно выражению $\frac{AE}{BE} = \frac{ED}{EC}$, и тогда мы имеем $\Delta EBC \sim \Delta EDA$. Это означает, что $\angle ECB = \angle ACB = \angle ADB = \angle ADE$, и, таким образом, $ABCD$ является вписанным четырехугольником.

Пример 83. Еще одно замечательное свойство вписанного четырехугольника

Как и в примере 82, мы сначала предполагаем, что четырехугольник $ABCD$, показанный на рис. 83-P, является вписанным. Тогда $\angle PBC = 180° - \angle CBA = \angle ADC = \angle ADP$. Поскольку треугольники PCB и PBA имеют общий угол в точке P, они подобны, и мы получаем выражение $\frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP}$, из которого следует, что $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.

С другой стороны, если нам дано $AP \cdot BP = CP \cdot DP$ в четырехугольнике $ABCD$, стороны которого AB и CD, продолженные, пересекаются в точке P, это эквивалентно выражению $\frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP}$, и тогда мы имеем $\Delta PCB \sim \Delta PBA$. Это означает, что $\angle CBA = 180° - \angle PBC = 180° - \angle ADC$, и, следовательно, $ABCD$ является вписанным четырехугольником.

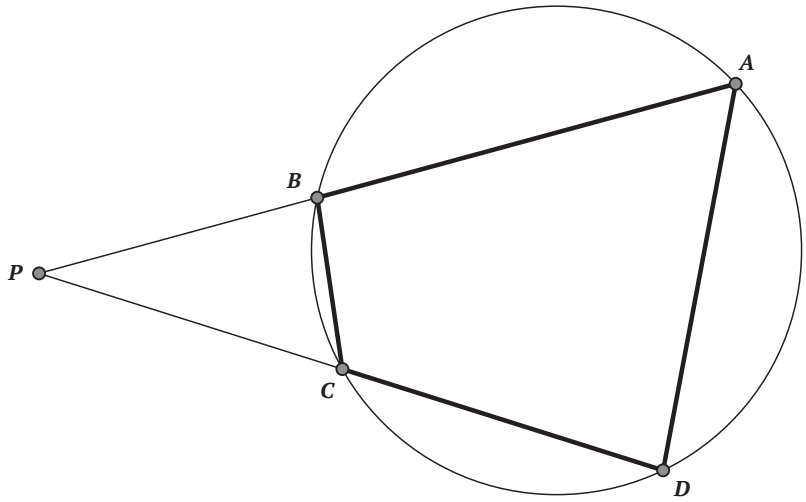


Рисунок 83-Р

Пример 84. Удивительное свойство углов вписанного четырехугольника

В соответствии с мерами углов, указанными на рис. 84-Р, мы имеем: $\angle DPF = \angle FPA = x$, поскольку PF является биссектрисой $\angle DPA$, и $\angle PGC = 180° - \angle CGF = 180° - \angle GFD = \angle AFG = y$. В треугольнике CGP мы имеем: $\angle DCB = \angle CPG + \angle PGC = x + y$, а в треугольнике APF мы имеем: $\angle PAF = 180° - \angle FPA - \angle AFP$ $180° - (x + y)$. Следовательно, $\angle BAD$ является дополнительным к $\angle DCB$, что делает четырехугольник $ABCD$ вписанным в окружность.

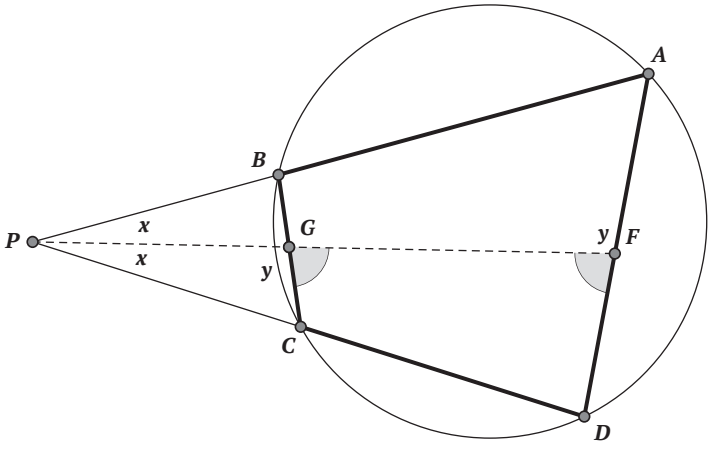


Рисунок 84-Р

Пример 85. Построение вписанных четырехугольников

На рис. 85-Р нам дано, что четырехугольник *ABCD* является вписанным, поэтому у нас есть $\angle CBA = 180° - \angle ADC$. Поскольку *EF* параллелен *BC*, у нас есть $\angle FEA = \angle CBA$, и путем подстановки получаем: $\angle FEA = 180° - \angle ADC$, что означает, что четырехугольник *AEFD* также является вписанным.

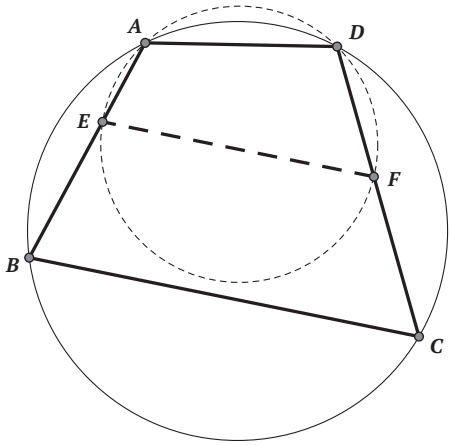


Рисунок 85-Р

Пример 86. Ортоцентр треугольника порождает множество циклических четырехугольников

Когда мы смотрим на рис. 86-Р, то замечаем, что некоторые из этих циклических четырехугольников образуются потому, что пара противоположных углов являются дополнительными.

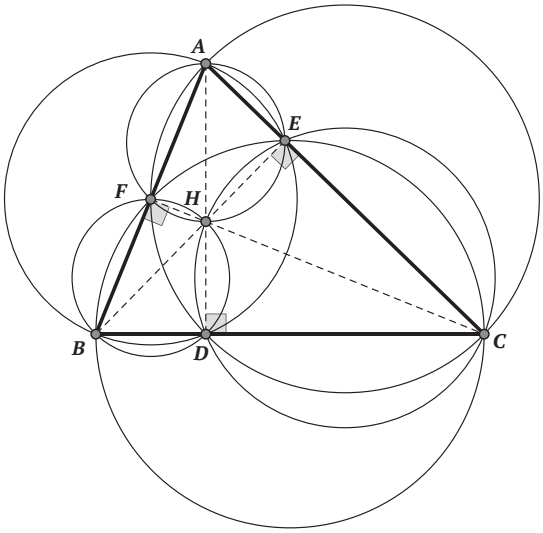


Рисунок 86-Р

Например, пара противоположных углов $\angle AEH = \angle HFA = 90°$ в четырехугольнике $AFHE$ являются дополнительными, и этот четырехугольник является вписанным.

Аналогичный аргумент можно привести и для четырехугольников $BDHF$ и $CEHD$. Три других четырехугольника определяются двумя перекрывающимися прямоугольными треугольниками, имеющими общую гипотенузу. Например, в четырехугольнике $BCEF$ мы имеем $\angle BEC = \angle BFC = 90°$, и поэтому E и F лежат на окружности с диаметром BC. Аналогичный аргумент можно привести и для четырехугольников $CAFD$ и $ABDE$, которые также являются вписанными четырехугольниками.

Пример 87. Подробнее о вписанном четырехугольнике

На рис. 87-P мы определяем P как точку пересечения отрезка AC с описанной окружностью треугольника ABD. Поскольку выполняется соотношение $AB = AD$, то имеем: $\angle APB = \angle ADB = \angle DBA = \angle DPA$. Если, как показано на рисунке, точка P лежит между A и C (другие случаи аналогичны), то имеем: $\angle BPC = 180° - \angle APB = 180° - \angle DPA = \angle CPD$. Если предположить, что $C \neq P$, то имеем: $\angle ACB = \angle DCA$, и треугольники PBC и PCD, таким образом, конгруэнтны. Это означает, что $CB = CD$, что, как мы предполагали, не соответствует действительности, что приводит к противоречию. Следовательно, должно выполняться условие $C = P$, и, таким образом, четырехугольник $ABCD$ является циклическим.

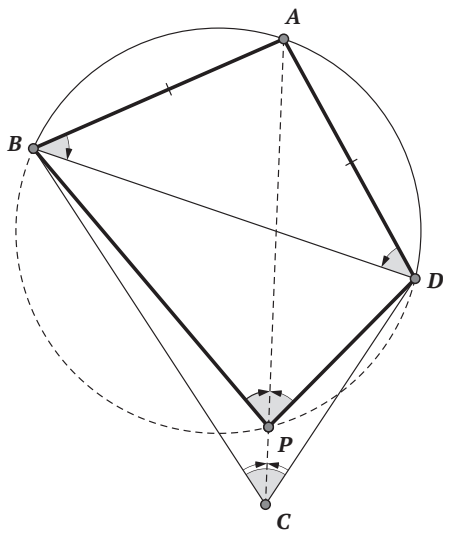


Рисунок 87-P

Пример 88. Биссектрисы углов четырехугольника создают вписанный в окружность четырехугольник

На рис. 88-Р отмечены несколько углов для облегчения доказательства. Для треугольника ABE имеем $e = \angle AEB = 180° - (\angle BAE + \angle EBA) = 180° - (a + b)$, а для треугольника DGC имеем $g = \angle CGD = 180° - (\angle DCG + \angle GDC) = 180° - (c + d)$.

Однако для четырехугольника $ABCD$ известно, что $2a + 2b + 2c + 2d = 360°$, или $a + b + c + d = 180°$. Следовательно, получаем соотношение:

$$\angle HEF + \angle FGH = e + g = 180° - (a + b) + 180° - (c + d) = 360° - (a + b + c + d) = 360° - 180° = 180°.$$

Поскольку противоположные углы E и G четырехугольника $EHGF$ являются дополнительными, мы знаем, что четырехугольник $EHGF$ является циклическим.

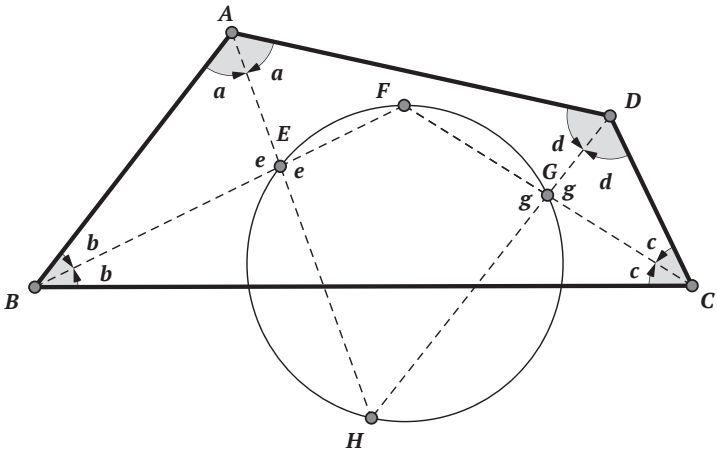


Рисунок 88-Р

Пример 89. Биссектрисы углов параллелограмма образуют прямоугольник

Как видно на рис. 89-Р, биссектрисы AF и BH дополнительных углов $\angle BAD$ и $\angle CBA$ соответственно перпендикулярны, так что $\angle AEB = 90°$. Аналогичное рассуждение справедливо и для других трех углов четырехугольника $EFGH$, и, следовательно, четырехугольник $EFGH$ является прямоугольником.

Диагонали EG и FH этого прямоугольника имеют одинаковую длину, но мы все же должны показать, что они параллельны сторонам параллелограмма и что $EG = BC - AB$. Если Q – точка пересечения биссектрисы BH со стороной AD, мы можем легко установить, что четырехугольник $EGDQ$ является параллелограммом, где $EG = QD$. Поскольку $\angle EAQ = \angle BAE$ и $\angle QEA = \angle AEB = 90°$, то $\Delta EAB \cong \Delta EQA$ (ASA). Следовательно, треугольник ABQ равнобедренный, при-

чем $AB = AQ$. Тогда $EG = QD = AD - AQ = BC - AB$, что и требовалось доказать. Кроме того, если R – точка пересечения биссектрисы AF и стороны BC, то $\angle EBA = \angle RBE$ и $\angle AEB = \angle BER = 90°$, то $\Delta EAB \cong \Delta EQA \cong \Delta EBR$. Поскольку конгруэнтные прямоугольные треугольники EAQ и EBR имеют гипотенузы на параллельных прямых AD и BC, точка E лежит на среднем параллелограмме $ABCD$. Аналогичное рассуждение для точки G показывает, что отрезок EG лежит на средней линии параллелограмма $ABCD$, и мы можем таким же образом утверждать, что прямая FH является другой средней параллелограмма.

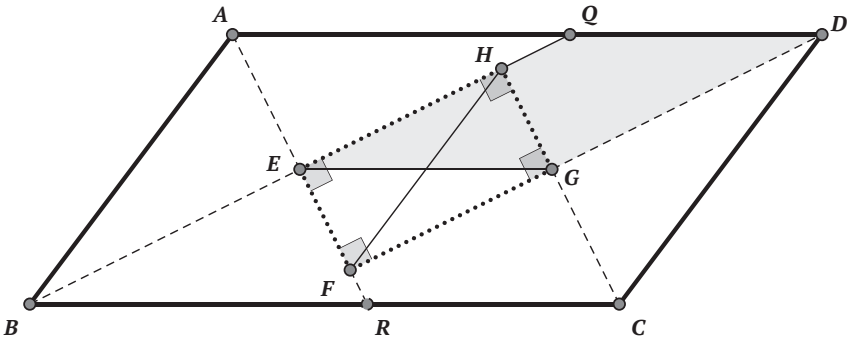


Рисунок 89-Р

Пример 90. Биссектрисы углов прямоугольника образуют квадрат

Значительная часть доказательства этого примера была рассмотрена в доказательстве примера 89. Мы уже установили, что $EFGH$ – это прямоугольник с диагоналями равной длины, параллельными сторонам $ABCD$. В частном случае, который мы видим на рис. 90-Р, эти диагонали перпендикулярны, что делает $EFGH$ прямоугольником с перпендикулярными диагоналями, то есть квадратом.

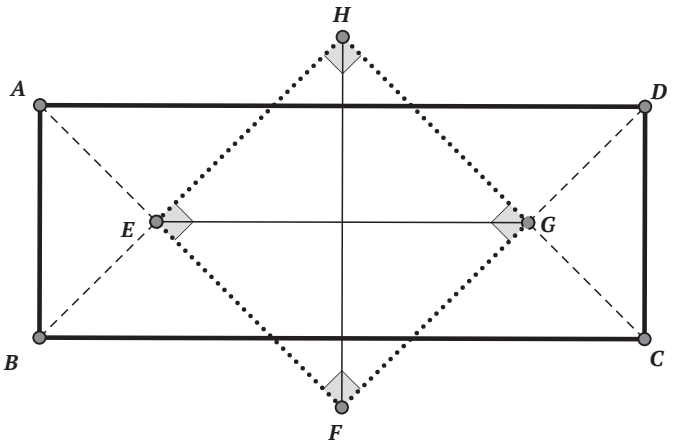


Рисунок 90-Р

Пример 91. Неожиданные точки, лежащие на одной окружности с равнобедренной трапецией

Поскольку два треугольника *BCE* и *BCF* являются прямоугольными треугольниками, имеющими общую гипотенузу, точки *B*, *C*, *F* и *E* лежат на одной окружности, а *BC* – диаметр описанной окружности. Теперь рассмотрим другой набор точек, лежащих на одной окружности, показанный на рис. 91-P.

Поскольку нам дано, что *ABCD* – равнобедренная трапеция, то она симметрична относительно общего перпендикуляра *MN*, биссектрисы угла, образованного сторонами *BC* и *AD*. Отражая точку *G*, лежащую на стороне *AB*, относительно перпендикуляра *MN*, мы получаем точку *P* на стороне *CD*. Тогда верно соотношение *PC* = *BG* = *AE*. Поскольку прямоугольные треугольники *AEC* и *ABF* имеют общий угол *EAF*, они подобны, и отсюда следует, что $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$. Кроме того, так как *AF* = *HC* и *AB* =*DC*, мы получаем выражение $\frac{PC}{AC} = \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{HC}{DC}$, или $PC \cdot DC = HC \cdot AC$. Это говорит нам о том, что точки *A*, *D*, *P* и *H* лежат на одной окружности, как мы установили в примере 83.

Поскольку *AGPD* – равнобедренная трапеция, она также является вписанным четырехугольником, и мы можем заключить, что точки *A*, *D*, *P*, *H* и *G* лежат на одной окружности.

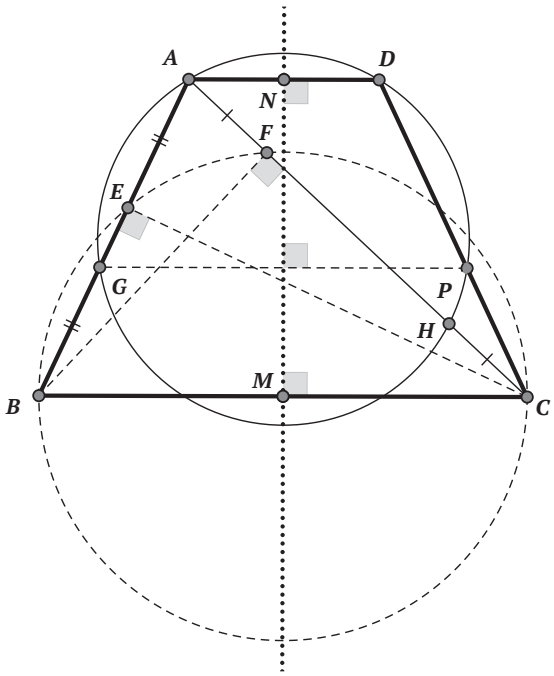


Рисунок 91-P

Пример 92. Неожиданная перпендикулярность внутри циклического четырехугольника

Для упрощения доказательства этой перпендикулярности отметим равные дуги, как показано на рис. 92-P. Очевидно, что сумма всех этих дуг равна 360°, так что $2u + 2x + 2y + 2z = 360°$, или $u + x + y + z = 180°$. Теперь рассмотрим треугольник *GHP*, точка *P* которого является точкой пересечения хорд *EG* и *FH*. Поскольку $\angle PHG = \angle FHG = \frac{1}{2}(x + y)$ и $\angle HGP = \angle HGE = \frac{1}{2}(w + z)$, мы получаем $\angle GPH = 180° - (\angle PHG + \angle HGP) = 180° - \frac{1}{2}(w + x + y + z) = 180° - \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$, и, следовательно, $EG \perp FH$.

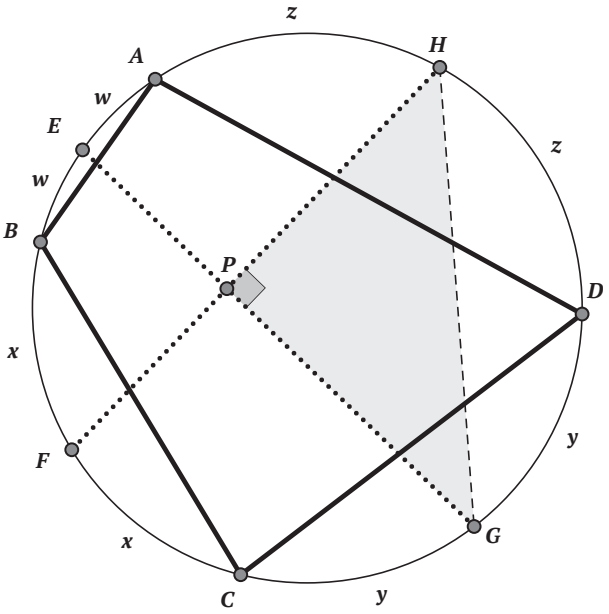


Рисунок 92-P

Пример 93. Необычные прямые, делящие друг друга пополам в циклическом четырехугольнике

На рис. 93-P нам нужно показать, что четырехугольник *AEFD* является параллелограммом. Отрезок *AEJ* является высотой в треугольнике *ABC*, и отрезок *DFK* является высотой в треугольнике *DBC*. Поскольку обе перпендикулярны общей стороне *BC*, у нас есть $AE \| DF$. Пусть *X* обозначает точку пересечения отрезков *BE* и *AC*. Поскольку $\angle ABX$ – прямоугольный треугольник, у нас есть $\cos \angle BAX = \frac{AX}{AB}$, так что $AX = AB \cdot \cos(\angle BAX) = AB \cdot \cos(\angle BAC)$. Также поскольку $\angle AEX$ – прямоугольный треугольник, мы имеем

$$AE = \frac{AX}{\cos \angle EAX} = \frac{AX}{\cos(90° - \angle ACB)} = \frac{AX}{\sin \angle ACB}.$$

Подставляя в это выражение, получаем

$$AE = \frac{AB \cdot \cos \angle BAC}{\sin \angle ACB} = \frac{AB}{\sin \angle ACB} \cdot \cos \angle BAC.$$

Учитывая, что закон синусов (см. «Инструментарий») дает нам выражение $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$ в треугольнике ABC, мы, следовательно, имеем

$$AE = \frac{AB}{\sin \angle ACB} \cdot \cos \angle BAC \frac{BC}{\sin \angle BAC} \cdot \cos \angle BAC = BC \cdot \tan \angle BAC.$$

Аналогичный расчет в треугольнике DBC дает $DF = BC \cdot \text{tg}\,(\angle BDC)$. Поскольку $ABCD$ является циклическим и $\angle BAC = \angle BDC$, мы получаем $AE = BC \cdot \text{tg}\,(\angle BAC) = BC \cdot \text{tg}\,(\angle BDC) = DF$. Поскольку $AEFD$ – четырехугольник с параллельными сторонами AE и DF равной длины, $AEDF$ является параллелограммом.

Таким образом, мы показали, что диагонали AF и DE делят друг друга пополам в точке пересечения P. Поскольку мы можем привести аналогичные аргументы для любых двух вершин четырехугольника $ABCD$, это верно для любой пары отрезков из AF, BH, CG и DE, как мы и стремились доказать.

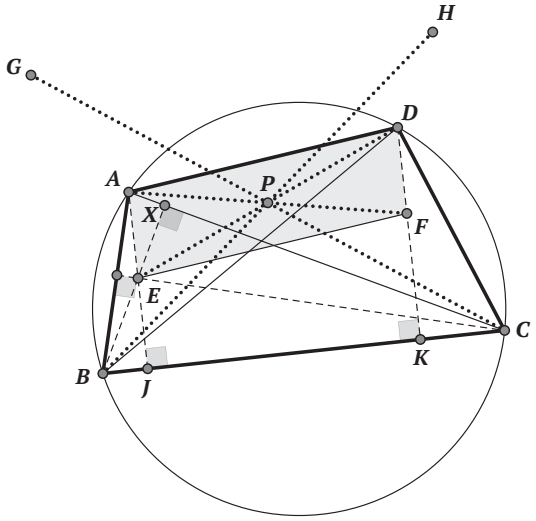


Рисунок 93-P

Пример 94. Еще несколько необычных прямых, пересекающих друг друга в циклическом четырехугольнике

Наша цель здесь – показать, что точка A является ортоцентром треугольника EHG, как показано на рис. 94-P. Аналогичные результаты следуют для других трех вершин $ABCD$.

В доказательстве примера 93 мы показали, что выполняется $AD \| EF$. Затем мы также имеем $AB \| FH$, $BC \| GH$, $CD \| EG$, $BD \| EH$ и $AC \| FG$. Отрезок AEJ является высотой в треугольнике ABC и перпендикулярен стороне BC в точке J. Мы уже установили, что сторона BC параллельна отрезку GH, и отсюда следует, что отрезок AEJ также перпендикулярен отрезку GH и пересекает его в точке K, следовательно, он является высотой треугольника EHG. Аналогичным образом можно показать, что отрезки LAH и GAN также являются высотами треугольника EHG, поскольку они перпендикулярны $CD \| EG$ и $BD \| EH$ соответственно. Точка пересечения этих трех высот, A, является ортоцентром треугольника EHG. Этот результат для остальных трех точек B, C и D можно доказать, используя аналогичные рассуждения.

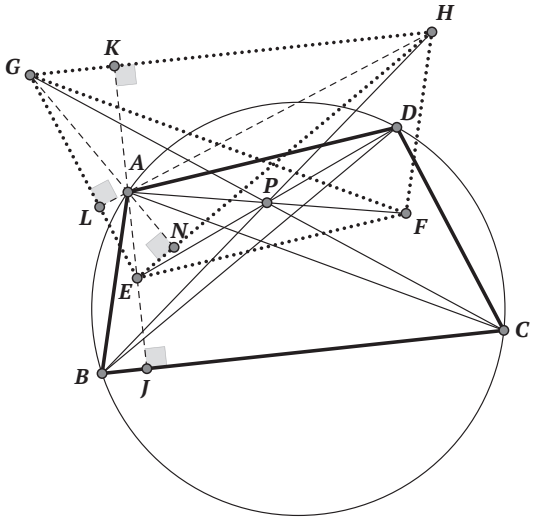


Рисунок 94-P

Пример 95. Разделение четырехугольника на две равные области

На рис. 95-Р медиана *BM* разделяет треугольник *ABC* на две равные области, при этом площадь треугольника [*MAB*] = площади треугольника [*MBC*]. Аналогично медиана *DM* разделяет треугольник *ACD* на две равные области, при этом площадь треугольника [*MDA*] = площади треугольника [*MCD*]. Следовательно,

площадь треугольника [*ABD*] = площадь треугольника [*MAB*] +
площадь треугольника [*MDA*] = площадь треугольника [*MBC*] +
площадь треугольника [*MCD*] = площади треугольника [*CDB*].

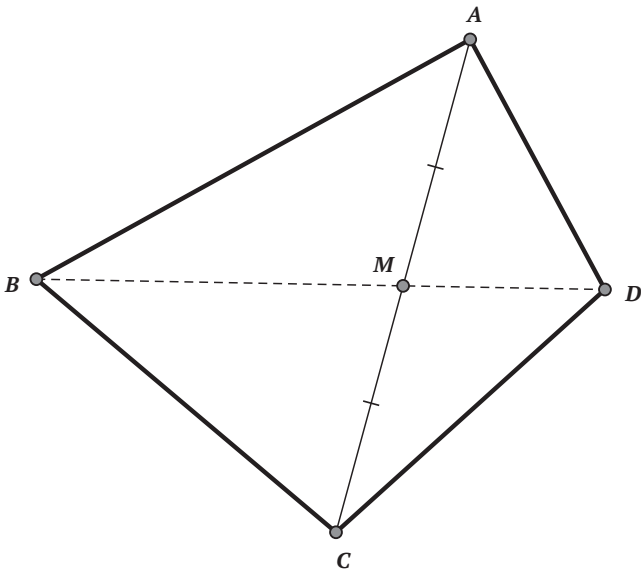


Рисунок 95-Р

Пример 96. Еще один сюрприз в циклическом четырехугольнике

Это непосредственное следствие доказательства примера 93. Как мы видим на рис. 96-P, отрезки *AF*, *BH*, *CG* и *DE* пересекаются в точке *P*. Поворот этой конфигурации на 180° вокруг точки *P* отображает точки *A* в *F*, *B* в *H*, *C* в *G* и *D* в *E*. Таким образом, описанная окружность *ABCD* одновременно отображается на описанную окружность *EFGH*. Это показывает, что точки *E*, *F*, *G* и *H* находятся на одной окружности, и радиус их описанной окружности равен радиусу описанной окружности *ABCD*.

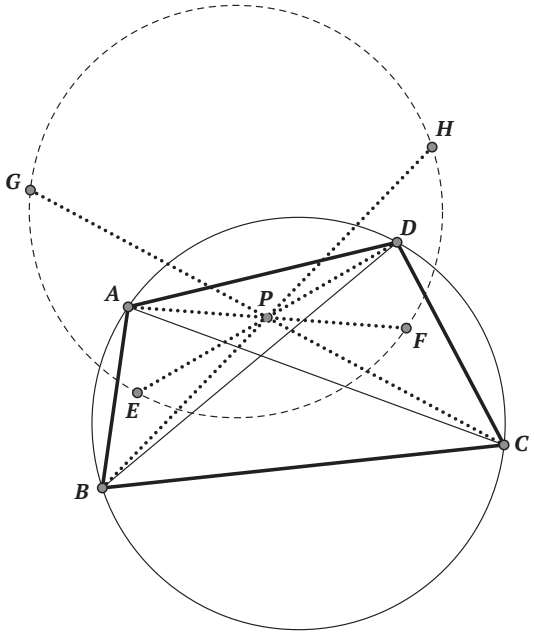


Рисунок 96-P

Пример 97. Интересное свойство ортоцентра в параллелограмме

На рис. 97-P перпендикуляр из вершины *C* пересекает сторону *AB* в точке *X*. Также перпендикуляр из вершины *A* пересекает *BC* в точке *Y*. Кроме того, у нас есть середины сторон *AB* (*F*) и *BC* (*G*). Сначала отметим, что ΔAXC и ΔAYC – прямоугольные треугольники, что дает нам выражение $\angle ACR = \angle ACX = 90° - \angle BAC$ и $\angle RAC = \angle YAC = 90° - \angle ACB$. В треугольнике *ARC*, следовательно, выполняется, $\angle CRA = 180° - \angle RAC - \angle ACR = 180° - (90° - \angle ACB) - (90° - \angle BAC) = \angle ACB + \angle BAC = 180° - \angle CBA$.

Треугольники *BCA* и *DAC* конгруэнтны, и $\angle ADC = \angle CBA$, поэтому мы видим, что точка *R* лежит на описанной окружности треугольника *ACD*.

Чтобы доказать вторую часть этого любопытного утверждения, рассмотрим треугольник *EFG*. Поскольку каждая сторона этого треугольника соединяет середины двух сторон треугольника *ABC*, каждая сторона параллельна третьей стороне *ABC* и вдвое короче. Это означает, что треугольники *ABC* и *GEF* подобны. Мы знаем, что центр описанной окружности *O* треугольника *ABC* является точкой пересечения перпендикулярных биссектрисе сторон треугольника *ABC*. Поскольку стороны треугольника *GEF* параллельны сторонам треугольника *ABC*, то отрезки *GO*, *EO* и *FO* также перпендикулярны сторонам треугольника GEF, что означает, что *O* является ортоцентром треугольника *GEF*.

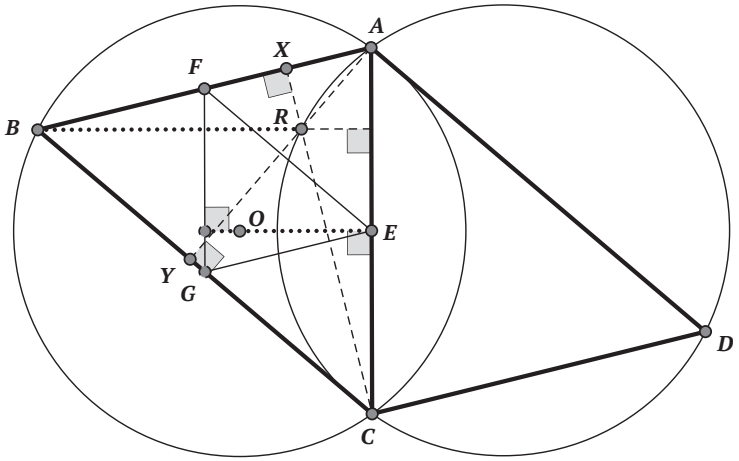


Рисунок 97-P

Поскольку мы уже установили, что каждая сторона треугольника *GEF* равна половине длины соответствующей стороны треугольника *ABC*, отрезок, соединяющий *E* с ортоцентром *O* треугольника *GEF*, вдвое короче, чем отрезок, соединяющий *B* с ортоцентром *R* треугольника *ABC*. Следовательно, мы находим, что длина отрезка $BR = 2OE$.

Пример 98. Неожиданный циклический четырехугольник

Начнем с того, что отметим $\angle QAR = \angle PQR = z$, как показано на рис. 98-Р, поскольку оба угла измеряются половиной дуги RQ. Аналогично с точками D и E, выбранными на касательной к окружности O в точке A, мы также имеем $\angle RAD = \angle RQA = x$, поскольку оба угла измеряются половиной дуги AR. Определив $\angle EAQ = y$, мы теперь замечаем, что $x + y + z = \angle RAD + \angle EAQ + \angle QAR = 180°$.

Поскольку у нас также выполняется условие $\angle BQP = 180° - \angle PQR - \angle RQA = 180° - x - z = y$, следовательно, у нас есть $\angle BQR = \angle BQP + \angle PQR = y + z$. Так как BC и DE параллельны, у нас также есть $\angle RCB = \angle RAD = x$, и тогда $\angle RCB + \angle BQR = x + y + z = 180°$. Таким образом, мы установили пару дополнительных противоположных углов четырехугольника $CRQB$, что делает его вписанным в окружность четырехугольника.

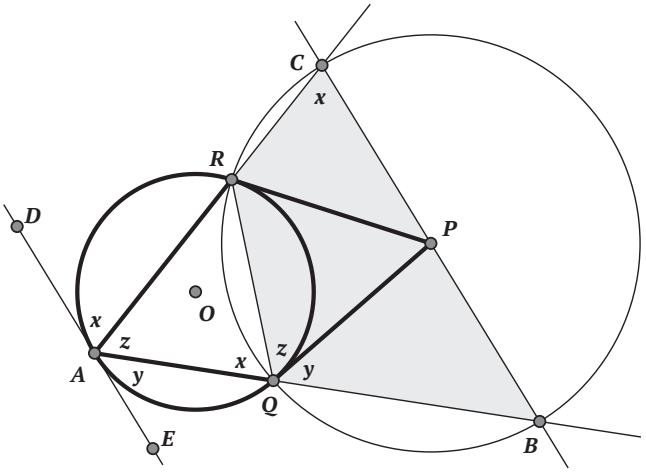


Рисунок 98-Р

Пример 99. Вписанные центры четырех треугольников циклического четырехугольника определяют прямоугольник

На рис. 99-Р мы сначала рассматриваем точку E как вписанный центр, или центр вписанной окружности треугольника BCD. Поскольку инцентр треугольника является общей точкой его внутренних биссектрис углов, верно соотношение:

$$\angle CED = 180° \angle DCE \angle EDC = 180° \cdot ½ (\angle DCB \angle BDC) =$$
$$180° \cdot ½ (180° \angle CBD) = 180° - 90° + ½\angle CBD = 90° + ½\angle CBD.$$

Аналогично если точка F является инцентром треугольника ACD, мы получаем: $\angle CFD = 90° + ½\angle$CAD. Поскольку $ABCD$ – вписанный четырехугольник,

$\angle CBD = \angle CAD$, и, следовательно, $\angle CED = \angle CFD$. Четырехугольник $CDFE$, следовательно, также вписан, и тогда $\angle EFD = 180° - \angle DCE = 180° - ½ \cdot \angle DCB$. Аналогичным образом мы видим, что четырехугольник $DAGF$ тоже вписан, что дает нам $\angle DFG = 180° - \angle GAD = 180° - ½ \cdot \angle BAD$. Это означает, что

$$\angle GFE = 360° - \angle EFD - \angle DFG = 360° - (180° - ½ \angle BAD) =$$
$$½ (\angle DCB + \angle BAD) = ½ \, 180° = 90°.$$

Аналогично можно показать, что $\angle HGF = \angle FHG = \angle FEH = 90°$. Тогда следует вывод, что четырехугольник $EFGH$ является прямоугольником.

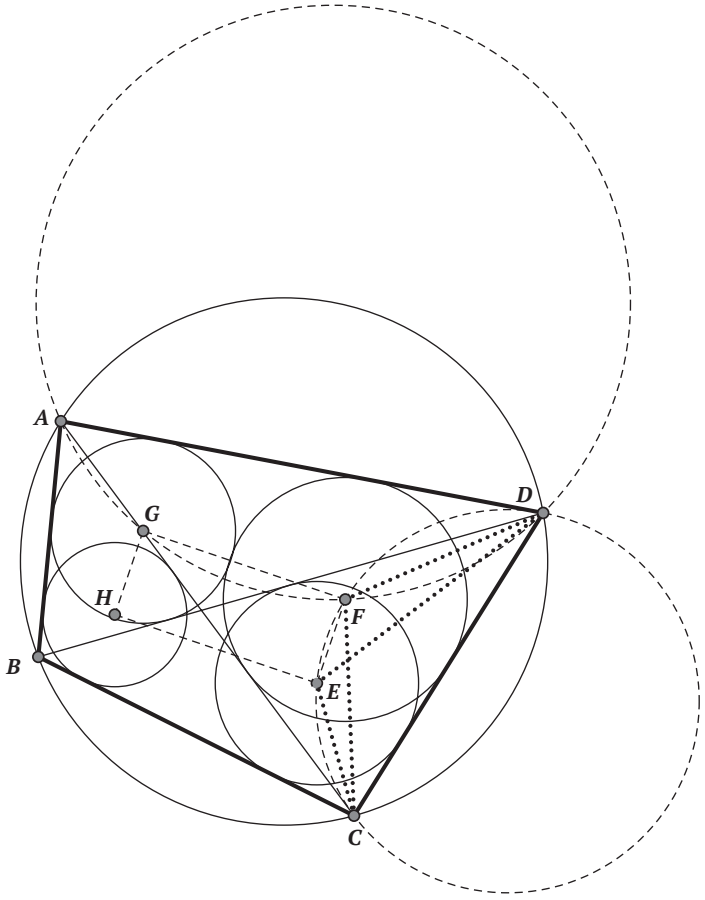


Рисунок 99-P

Пример 100. Вписанный четырехугольник образует ромб

На рис. 100-P показана точка M – точка пересечения двух биссектрис углов. Для упрощения обозначим углы $\angle BAD = a$ и $\angle CBA = b$. Поскольку четырехугольник $ABCD$ вписан, имеем $\angle DCB = 180° - a$ и $\angle ADC = 180° - b$. В треугольнике AED выполняется соотношение $\angle DEA = 180° - \angle EAD - \angle ADE = 180° - a - (180° - b) = b - a$, и поскольку EH является биссектрисой угла $\angle DEA$, то, следовательно, $\angle CEH = \angle DEH = ½(b - a)$. В треугольнике HEC верно соотношение $\angle CHJ = \angle HCE + \angle CEH = a + ½ (b - a) = ½ (a + b)$. Теперь рассмотрим треугольник JED. У нас есть соотношение $\angle DJE = 180° - \angle JDE - \angle DEJ = 180° - (180° - b) = ½(b - a) = ½(a + b)$. Отсюда следует, что $\angle HJF = \angle EJD = ½(a + b) = \angle CHJ = \angle FHJ$, и, следовательно, треугольник FJH равнобедренный, причем стороны $FJ = FH$. Поскольку треугольники MFJ и MHF имеют общую сторону MF и $\angle JFM = \angle MFH$, мы видим, что выполняется $\Delta MFJ \cong \Delta MHF$, что дает нам $MJ = MH$ и $FM \perp JH$.

Просто поменяв местами роли E и F, мы можем аналогично показать, что $MI = MG$ и $EM \perp IG$. Мы видим, что диагонали JH и IG четырехугольника $JGHI$ делят друг друга пополам и перпендикулярны, что означает, что $JGHI$ – ромб.

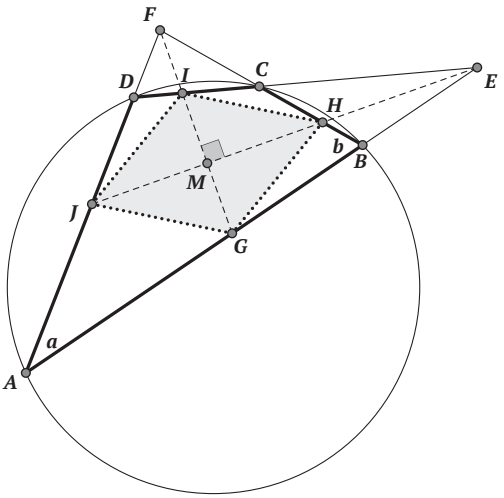


Рисунок 100-P

Пример 101. Вписанный четырехугольник образует параллелограмм

Треугольник ADE на рис. 101-P равнобедренный, с $AD = AE$ и $\angle AED = \angle EDA$. Поскольку углы $\angle EDA$ и $\angle CBA$ являются дополнительными к $\angle ADC$, они равны, и мы имеем $\angle AED = \angle EDA = \angle CBA$.

Кроме того, выполняются соотношения:

$$\angle BCD = \tfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD}),$$
$$\angle DAE = \tfrac{1}{2}\overset{\frown}{AD} \text{ и}$$
$$\angle DAE = \tfrac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}.$$

Из-за того, что точка B является средней точкой дуги $\overset{\frown}{ABCD}$, следует, что $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BCD}$ и верно соотношение

$$\angle BAE = \angle BAD + \angle DAE = \tfrac{1}{2}(\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{AD}) = \tfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD}) = \angle BCD.$$

Противоположные углы четырехугольника $ABCE$ попарно равны, таким образом, четырехугольник является параллелограммом.

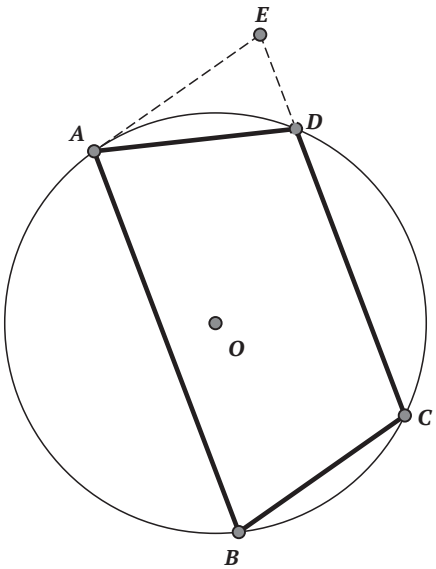


Рисунок 101-P

Пример 102. Неожиданный пример с циклическим четырехугольником

На рис. 102-P прямая, проходящая через точку G и параллельная AD, пересекает отрезок AC в точке L и продолжение отрезка BD в точке K. Поскольку $\angle AHP = \angle LGP$ и $\angle PAH = \angle PLG$, то верно $\Delta PHA \sim \Delta PGL$, и, следовательно, $\frac{GL}{AH} = \frac{PG}{PH}$. Аналогично так как $\angle HDP = \angle GKP$ и $\angle PHD = \angle PGK$, то выполняется $\Delta PDH \sim \Delta PKG$ и $\frac{KG}{HD} = \frac{PG}{PH}$. Мы умножаем эти два уравнения, чтобы получить

$$\frac{GL \cdot KG}{AH \cdot HD} = \frac{PG^2}{PH^2}. \qquad \text{(I)}$$

Теперь, учитывая, что $\angle GKB = \angle GKD = \angle ADB = \angle ACB = \angle LCG$ и $\angle BGK = \angle CGL$, мы приходим к выводу, что $\Delta GBK \sim \Delta GCL$. Таким образом, верно $\frac{GL}{GC} = \frac{GB}{KG}$, или $GL \cdot KG = GC \cdot GB$. Подставляя это в уравнение (I), получаем

$$\frac{GC\cdot GB}{AH\cdot HD}=\frac{PG^2}{PH^2}. \qquad \text{(II)}$$

Как мы знаем из данных примера 82, у нас верно равенство $GC \cdot GB = GE \cdot GF$, так и $AH \cdot HD = HF \cdot HE$.

Теперь, сделав соответствующие подстановки в уравнение (II), получаем:

$$\frac{PG^2}{PH^2}=\frac{GE\cdot GF}{HF\cdot HE}=\frac{(PE-PG)\cdot(PF+PG)}{(PF-PH)\cdot(PE+PH)}=\frac{(PE-PG)\cdot(PF+PG)}{(PF-PH)\cdot(PE+PH)}=\frac{PE^2-PG^2}{PE^2-PH^2},$$

поскольку $PE = PF$. Это эквивалентно выражению $PG^2(PE^2 - PH^2) = PH^2(PE^2 - PG^2)$, или $PG^2 \cdot PE^2 = PH^2 \cdot PE^2$, что дает нам равенство $PG^2 = PH^2$, или $PG = PH$.

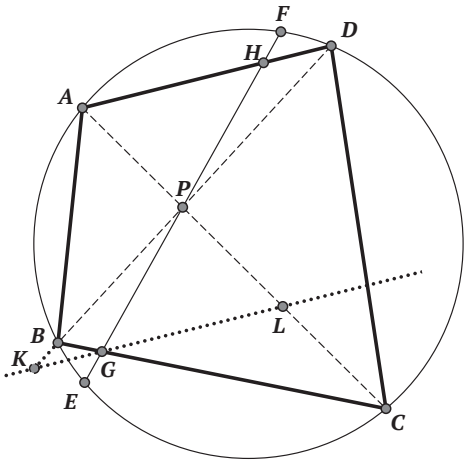


Рисунок 102-P

Пример 103. Вписанный четырехугольник, образованный другим вписанным четырехугольником

Мы уже показали в примере 85, что четырехугольник $BCFE$ является циклическим, поскольку EF и AD перпендикулярны AB и, следовательно, параллельны. Чтобы доказать связь между отрезками, выберем точку R на отрезке FE на рис. 103-P так, чтобы $CF = RF$. Треугольник CFR является равнобедренным, с углами $\angle FCR = \angle CRF$. Поскольку $\angle DFR$ является внешним углом треугольника CFR, мы приходим к соотношению $\angle DFR = \angle FCR + \angle CRF$. Так как отрезки EF и AD параллельны, то верно соотношение $\angle DFE = 180° - \angle ACD = \angle CBA$, и, следовательно, $\angle CRP = \angle CRF = ½\ \angle DFE = ½\angle CBA = \angle CBP$. Это доказывает, что точки B, C, P и R находятся на одной окружности. Поскольку четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то верны соотношения $\angle DCB = 180° - \angle BAD = 180° - 90° = 90°$, и, следовательно, $\angle PCB = ½\ \angle DCB = ½ \cdot 90° = 45°$. Поскольку четырехугольник $BCPR$ вписан в окружность, следовательно, имеем $\angle ERB = \angle PCB = 45°$. Так как $\angle BER = 90°$, мы видим, что треугольник EBR является прямоугольным равнобедренным треугольником с $EB = ER$, и приходим к выражению $EF = ER + RF = EB + CF$.

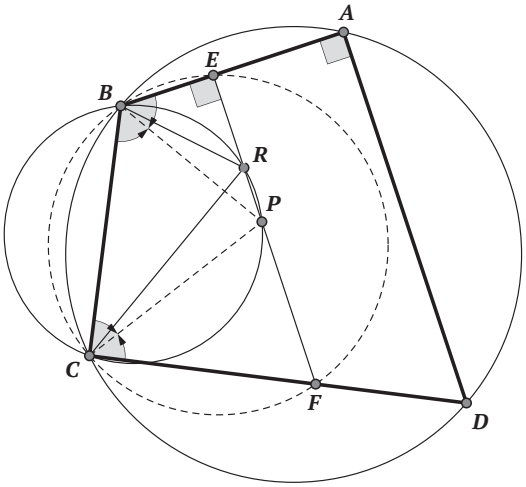


Рисунок 103-P

Пример 104. Перпендикуляры к диагонали и стороне, проведенные из вершины особого вписанного четырехугольника, определяют середину другой диагонали

На рис. 104-P мы строим перпендикуляр из вершины *C*, который пересекает продолжение стороны *AD* в точке *P,* и образуется прямоугольник *AECP*. Рассматривая треугольник Δ*ABD*, мы замечаем, что существуют перпендикуляры *CE*, *CF* и *CP*, проведенные из точки *C* на описанной окружности к каждой из трех сторон треугольника. По теореме Симпсона (см. «Инструментарий»), основания этих перпендикуляров коллинеарны, определяя линию Симсона. Отрезок *EFP* является диагональю прямоугольника *AECP*, и поскольку диагонали прямоугольника делятся пополам, мы знаем, что точка *M* должна быть серединой другой диагонали *AC*.

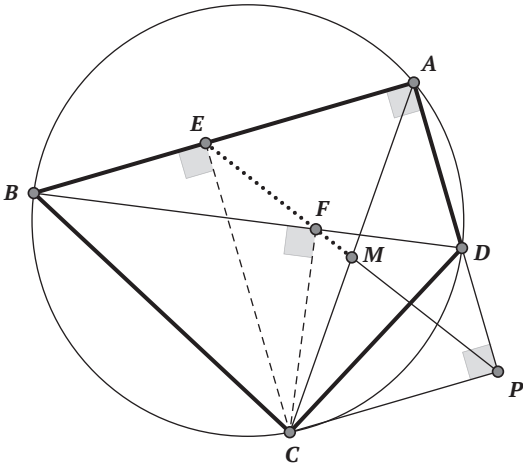


Рисунок 104-P

Пример 105. Перпендикуляры, проведенные из середин вписанного четырехугольника, пересекаются в одной точке

На рис. 105-P мы добавили центр *O* описанной окружности четырехугольника *ABCD*, а также параллелограмм Вариньона *KLMN*, с которым мы впервые столкнулись в примере 44. Точка пересечения *J* диагоналей *KM* и *LN* параллелограмма *KLMN* является общей серединой как для отрезка *KM*, так и для отрезка *LN*.

Прямая, проведенная из центра описанной окружности к середине хорды, перпендикулярна хорде. Следовательно, отрезок *OL* перпендикулярен стороне *BC*, и мы имеем *OL*||*NZ*. Это дает внутренние накрест лежащие углы параллельных прямых: $\angle JLO = \angle JNP$ и $\angle LOJ = \angle NPL$. Поскольку *JN* = *JL*, мы имеем $\Delta JOL \cong \Delta JPN$, где *P* – точка на прямой *OJ*, для которой *с JO* = *JP*. Эта точка лежит на отрезке *NZ*. Аналогично мы можем показать, что эта точка *P* также лежит на отрезках *YM*, *XL* и *WK*, используя отрезки *OK*, *ON* и *OM* соответственно. Таким образом, эта точка *P* является общей для всех четырех прямых *NZ*, *YM*, *XL* и *WK*, что устанавливает желательную конвергенцию.

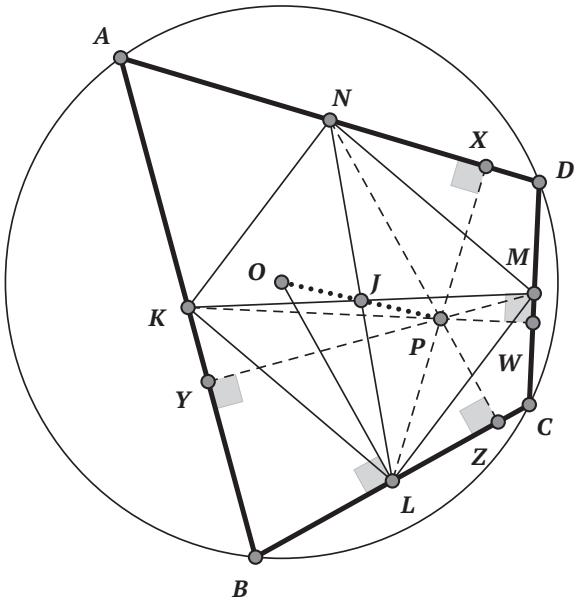


Рисунок 105-P

Пример 106. Перпендикулярные сюрпризы в циклическом четырехугольнике

Отрезки *LX* и *NZ* являются высотами треугольника *QLN* на рис. 106-P. Точка их пересечения *P* является ортоцентром треугольника *QLN*, и, следовательно, прямая от точки *Q* через точку *P* должна быть третьей высотой треугольника *QMN* и перпендикулярна *NL*.

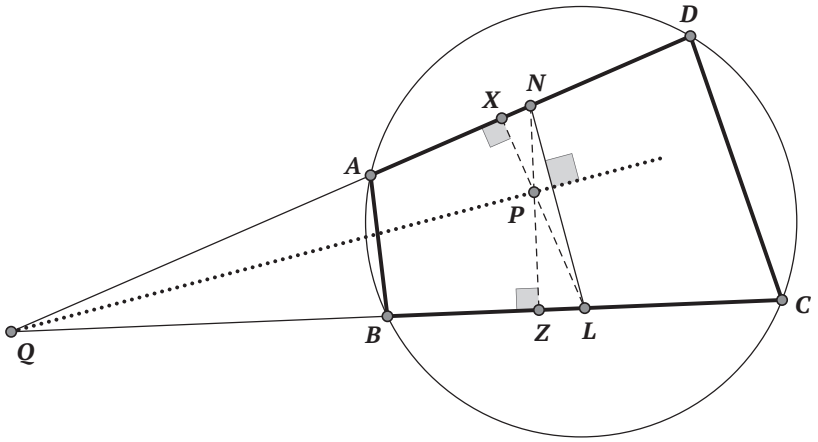


Рисунок 106-P

Пример 107. Вписанный четырехугольник порождает еще одну неожиданную перпендикулярность

Начнем рис. 107-P с проведения перпендикуляра *RH* к *EF* в точке *H*. Затем проведем перпендикуляр из точки *R* к *CE* в точке *X* и перпендикуляр из точки *R* к *BF* в точке *Y*. Из-за прямых углов у нас теперь есть точки *R*, *H*, *E* и *X*, находящиеся на одной окружности, а также точки *R*, *Y*, *F* и *H*. Поскольку $\angle RXE = \angle FYR = 90°$, если мы можем показать, что $\angle FXR = \angle RYE$, то получим $\angle FXE = \angle FYE$. Поскольку $\angle BER = \angle RYB = 90°$, точки *B*, *Y*, *R* и *E* лежат на одной окружности, поэтому у нас есть $\angle RYE = \angle RBE = \angle DBA$. Аналогично мы можем также получить $\angle FXR = \angle FCR = \angle DCA$, так как точки *C*, *F*, *R* и *X* тоже лежат на одной окружности. Мы знаем, что $\angle DBA = \angle DCA$, поскольку четырехугольник *ABCD* лежит на одной окружности, и это дает нам соотношения $\angle FXR = \angle DCA = \angle DBA = \angle RYE$. Тогда мы имеем: точки *E*, *X*, *Y* и *F* также лежат на одной окружности.

Теперь отметим, что *EX* – это радикальная ось описанных окружностей отрезков *EXRH* и *EXYF*, *FY* – это радикальная ось описанных окружностей отрезков *FHRY* и *EXYF*, а *HR* – это радикальная ось описанных окружностей отрезков *EXRH* и *FHRY*. Поскольку точка *P* является пересечением прямых *EX* и *FY*, то она, следовательно, совпадает с прямой *HR* в точке *P*. Это завершает доказательство, так как прямая *PRH* перпендикулярна *EF*.

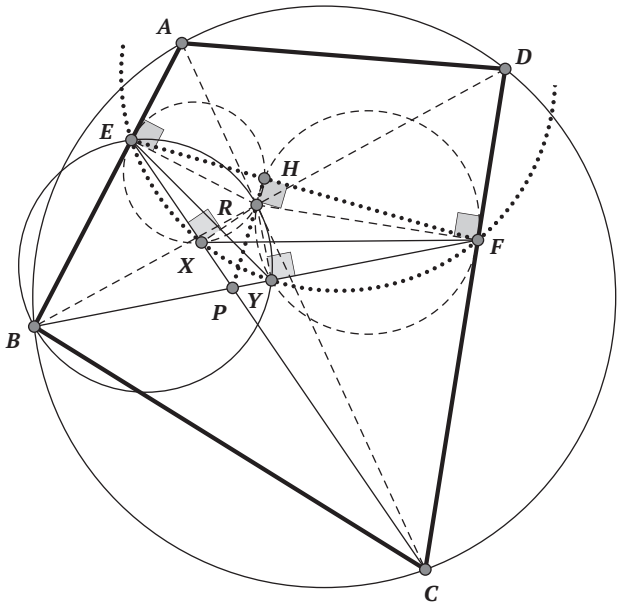


Рисунок 107-P

Пример 108. Неожиданные параллели от перпендикуляров к сторонам циклического четырехугольника

Это доказательство в значительной степени основано на том факте, что противоположные углы циклического четырехугольника являются дополнительными. На рис. 108-P мы имеем циклический четырехугольник *ABCD*, где $\angle CBA + \angle ADC = 180°$, и так как $\angle FBE = \angle EDF = 90°$, четырехугольник *BFDE* также является циклическим. Поскольку $\angle CBA = 180° - \angle ADC$, циклический четырехугольник *ABCD* дает нам $\angle DCA = \angle DBA = \angle CBA - \angle CBD = 180° - \angle ADC - \angle CBD$. Пусть *G* обозначает точку пересечения отрезков *CD* и *EF*. Сумма углов в треугольнике *DEG* приводит нас к выражению $\angle DGE = 180° - \angle EDG - \angle GED = 180° - \angle ADC - \angle FED$. Поскольку *BFDE* является циклическим углом, мы имеем $\angle CBD = \angle FBD = \angle FED$, и теперь мы можем суммировать: $\angle DCA = 180° - \angle ADC - \angle CBD$ и $\angle CBD = \angle FED$, чтобы получить $\angle DCA = 180° - \angle ADC - \angle CBD = 180° - \angle ADC - \angle FED = 180° - \angle EDG - \angle GED$. Углы в треугольнике *DEG* дают нам $180° - \angle EDG - \angle GED = \angle DGE$, следовательно, $\angle DCA = \angle DGE$, и мы видим, что *AC* параллельна *EF*.

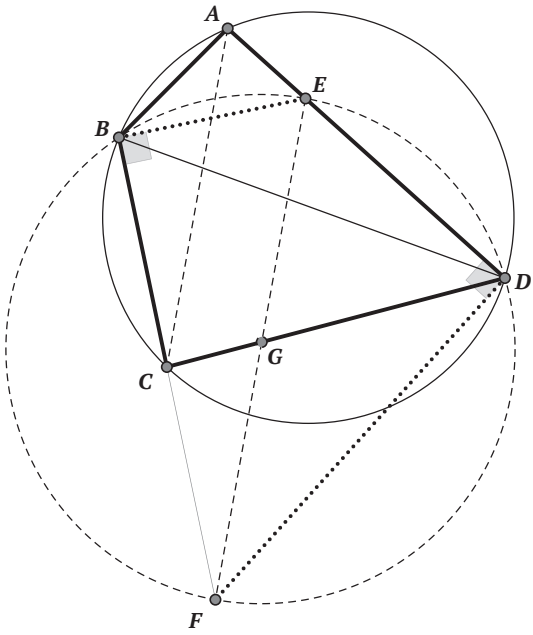


Рисунок 108-P

Пример 109. Сюрпризы в циклических четырехугольниках с перпендикулярными диагоналями

Поскольку четырехугольник *ABCD* является циклическим, то выполняется соотношение $\angle PBA = \angle DBA = \angle DCA$. С помощью условия $PH \perp CD$ в точке *H* мы продолжаем *PH* до пересечения с *AB* в точке *M*, как на рис. 109-P. Мы видим, что треугольники *CDP* и *CHP* являются прямоугольными треугольниками, что дает нам соотношение $\angle DCA = \angle HCP = 90° - \angle CPH = 90° - (90° - \angle HPD) = \angle HPD$. Поскольку $\angle HPD$ и $\angle MPD$ – вертикальные углы, они также равны, и мы имеем $\angle PBM = \angle DBA = \angle DCA = \angle HCP = \angle HPD = \angle MPB$. Таким образом, мы имеем равнобедренный треугольник *MBP* со сторонами $MB = MP$. Аналогичным образом мы также видим, что $\angle MAP = \angle CPH = \angle APM$, что делает треугольник *MPA* равнобедренным с $MP = MA$.

Это дает нам $MB = MP = MA$, и, следовательно, *M* является серединой *AB*.

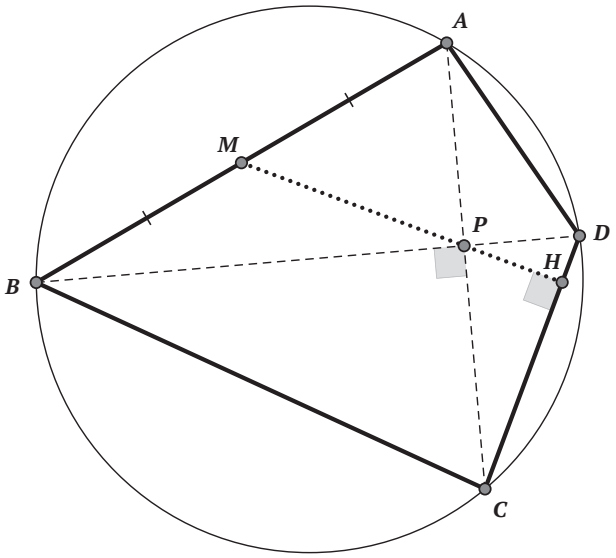


Рисунок 109-P

Пример 110. Еще одна неожиданная перпендикулярность циклического четырехугольника

На рис. 110-P мы начнем с добавления нескольких точек. Точки *K*, *L*, *M* и *N* являются серединами сторон *AB*, *BC*, *CD* и *DA* соответственно, а точки *E*, *F*, *G* и *H* являются основаниями перпендикуляров из точки *P* к сторонам *AB*, *BC*, *CD* и *DA* соответственно. Из примера 109 мы знаем, что *P* лежат на всех четырех отрезках *EM*, *FN*, *GK* и *HL*, поскольку каждая из них содержит точку пересечения диагоналей циклического четырехугольника *ABCD*. Мы продолжаем отрезок *KO* перпендикулярно стороне *AB* в точке *R* так, что *KO* = *KR*. Аналогично мы также продолжаем *OM* перпендикулярно *DC* до точки *S* так, что *OM* = *SM*. Затем строим параллелограмм *OSTR* со сторонами *OS* и *OR*, тем самым образуя точку *T*. Поскольку *ME* и *OR* перпендикулярны *AB*, мы имеем *OR*||*ME*||*ST*. Аналогично, поскольку *KG* и *OS* перпендикулярны *CD*, мы имеем *OS*||*KG*||*RT*. Так как *M* – середина *OS*, прямая *ME* равноудалена от сторон *OR* и *ST* параллелограмма *OSTR*, и поскольку *K* – середина *OR*, мы имеем: *KG* равноудалена от сторон *OS* и RT параллелограмма OSTR.

Эти две линии пересекаются в точке *P*, которая, следовательно, является серединой параллелограмма *OSTR*. Это означает, что диагонали *RS* и *OT* также пересекаются в точке *P*, и точки *R* и *S* впоследствии коллинеарны с точкой пересечения *P*.

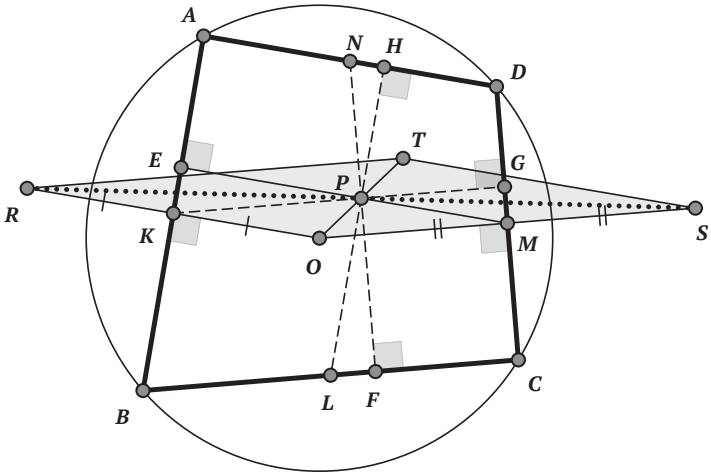


Рисунок 110-P

Пример 111. Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями образует параллелограмм

Применяя теорему Брахмагупты, которую мы впервые представили в примере 109, мы знаем, что продолжение перпендикуляра из точки *P* к стороне *CD* пересекает сторону *AB* в ее середине *M*, как мы видим на рис. 111-P. Поскольку отрезки *MPH* и *ON* перпендикулярны стороне *DC*, мы получаем параллельность *MP*||*ON*. Аналогично перпендикуляр из точки *P* к стороне *AB* продолжается до пересечения с *DC* в ее середине *N*. Следовательно, мы также получаем параллельность *NP*||*OM*, так что четырехугольник *MONP* является параллелограммом.

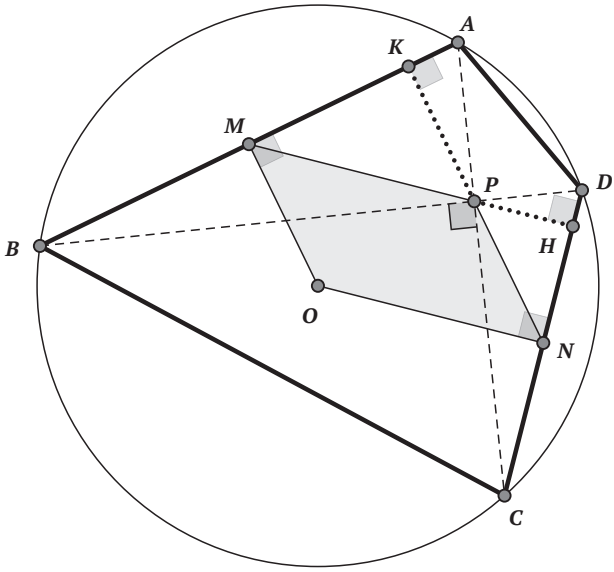


Рисунок 111-P

Пример 112. Еще одно неожиданное свойство циклических четырехугольников с перпендикулярными диагоналями

Этот пример является еще одним непосредственным следствием теоремы Брахмагупты (пример 109). Как мы видим на рис. 112-P, как отрезок *OE*, так и прямая, соединяющая *P* с серединой *F* стороны *AD*, перпендикулярны стороне *BC*, что дает нам свойство параллельности *OE*||*FP*. Аналогично как отрезки *OF*, так и *EP* перпендикулярны стороне *AD*, что дает нам параллельность *OF*||*EP*. Таким образом, четырехугольник *OEPF* является параллелограммом с *OE* = *FP*. Напомним, что поскольку угол ∠*DPA* = 90°, точка *P* лежит на окружности с диаметром *AD*, что приводит к соотношению $FP = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$. Поскольку верно *OE* = *FP*, то приходим к $OE = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$.

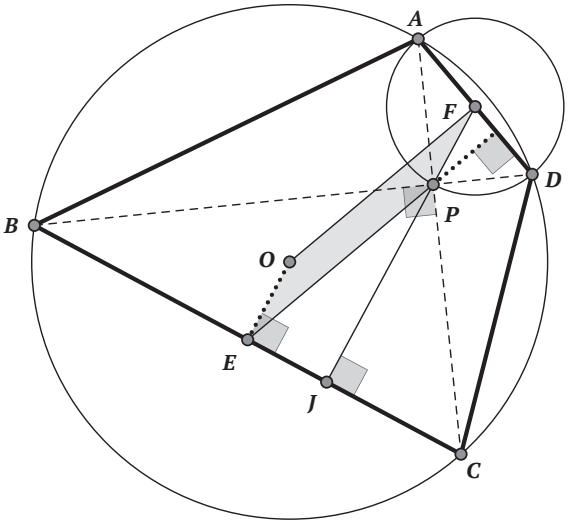


Рисунок 112-P

Пример 113. Циклический четырехугольник с перпендикулярными диагоналями образует точки, лежащие на одной окружности

Два равных угла, вершины которых лежат на одной окружности и пересекают одну и ту же дугу на окружности, определяют четыре точки, лежащие на одной окружности. На рис. 113-P показаны прямоугольные треугольники *KEM* и *KGM* с общим отрезком *MK*, поэтому точки *M*, *G*, *E* и *K* лежат на одной окружности с диаметром *MK*. Тот же аргумент можно привести для прямоугольных треугольников *NFL* и *NHL* с общим отрезком *LN*, и точки *L*, *F*, *H* и *N* лежат на одной окружности с диаметром *LN*. Из доказательства примера 48 мы знаем, что параллелограмм Вариньона *KLMN*, соединяющий середины сторон четырехугольника *ABCD* с перпендикулярными диагоналями, является прямоугольником. Это означает, что обе диагонали *MK* и *LN* являются диаметрами описанной окружности этого прямоугольника, и окружности с диаметрами *MK* и *LN* идентичны. Таким образом, мы можем заключить, что все восемь точек *E*, *K*, *L*, *F*, *M*, *G*, *H* и *N* лежат на одной окружности.

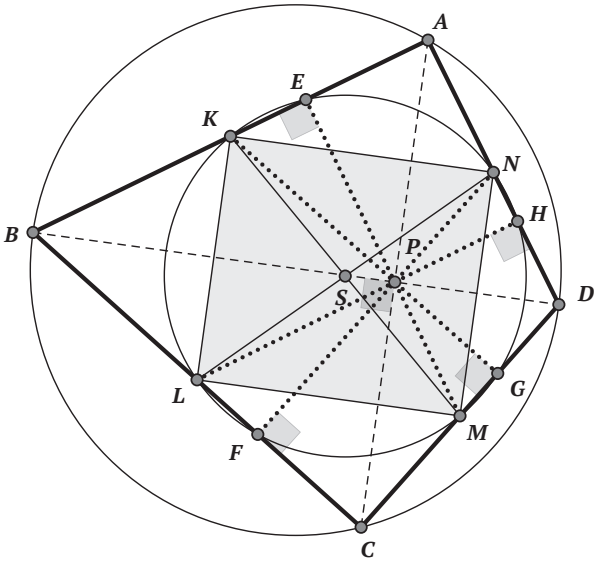


Рисунок 113-P

Пример 114. Еще одно неожиданное свойство циклических четырехугольников с перпендикулярными диагоналями

На рис. 114-P сначала отметим равенство $\angle DEA = \angle DBA$, поскольку они оба пересекаются одной и той же дугой AD, и пусть точка P обозначает пересечение перпендикулярных диагоналей AC и BD. Тогда мы получаем соотношение $\angle BAC = \angle BAP = 90° - \angle PBA = 90° - \angle DBA = 90° - \angle DEA = \angle EAD$, поскольку отрезок AE является диаметром описанной окружности $ABCD$, и мы имеем значение $\angle ADE = 90°$.

Из предыдущего равенства $\angle BAC = \angle EAD$ следует выражение $\angle BAE = \angle BAC - \angle EAC = \angle EAD - \angle EAC = \angle CAD$. Это означает, что равны отрезки $BE = DC$, поскольку равные вписанные углы отсекают равные дуги на окружности.

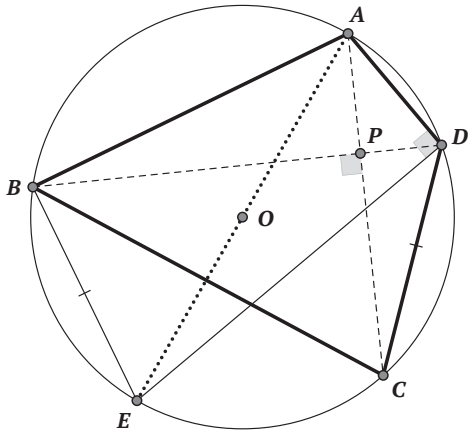


Рисунок 114-P

Пример 115. Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями образует треугольники равной площади

Когда мы используем тригонометрическую формулу для нахождения площадей каждого из треугольников, мы получаем площадь треугольника $[OAB] = \frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin(\angle AOB)$ и площадь треугольника $[OCD] = \frac{1}{2}OC \cdot OD \cdot \sin(\angle COD)$. Как показано на рис. 115-Р, если знаем, что $OA = OB = OC = OD$, тогда нам нужно только показать, что $\sin(\angle AOB) = \sin(\angle COD)$, чтобы эти площади треугольников были равны. Поскольку O является центром описанной окружности треугольника ABC, то $\angle AOB = 2\angle ACB$, а так как O также является центром описанной окружности треугольника BCD, то $\angle COD = 2\angle CBD$. Поскольку треугольник BCP – прямоугольный, то $\angle AOB = 2\angle ACB = 2(90° - \angle CBD) = 180° - 2\angle CBD = 180° - \angle COD$.

Затем мы можем установить, что $\sin(\angle AOB) = \sin(\angle COD)$, что позволяет нам заключить, что площадь треугольника $[OAB]$ = площади треугольника $[OCD]$.

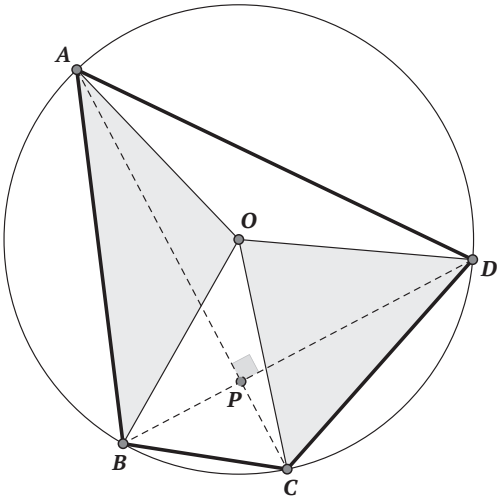


Рисунок 115-Р

Пример 116. Неочевидное свойство четырехугольников с перпендикулярными диагоналями

Как видно на рис. 116-Р, соединение середин четырех сторон четырехугольника $ABCD$ приводит к построению прямоугольника. Это в точности то, что было показано в решении примера 48, и поскольку диагонали прямоугольника имеют равную длину, мы получаем $EG = FH$.

Чтобы показать, что $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$, пусть P обозначает точку пересечения перпендикулярных диагоналей AC и BD. Применяя теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам PAB, PBC, PCD и PDA, приходим к выражению $AB^2 + CD^2 = (PA^2 + PB^2) + (PC^2 + PD^2) = (PA^2 + PD^2) + (PB^2 + PC^2) = DA^2 + BC^2$.

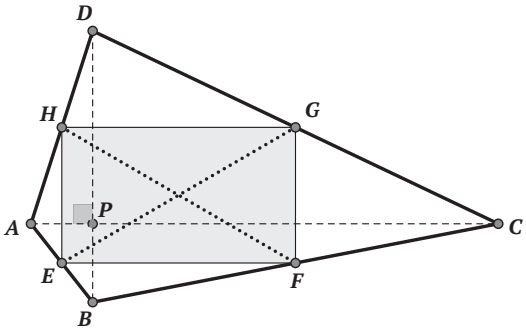


Рисунок 116-P

Пример 117. Равные суммы площадей квадратов на противоположных сторонах четырехугольника

Это удивительное свойство непосредственно следует из доказательства примера 116. На рис. 117-P представлен четырехугольник *MNPQ*, вершины которого являются серединами сторон четырехугольника *ABCD*. Из доказательства примера 44 мы знаем, что это параллелограмм Вариньона четырехугольника *ABCD* и что его стороны параллельны диагоналям *ABCD*. В этом частном случае нам дано, что диагонали параллелограмма Вариньона *MNPQ* имеют одинаковую длину и параллелограмм с диагоналями равной длины должен быть прямоугольником. Поскольку стороны этого прямоугольника перпендикулярны и параллельны диагоналям четырехугольника *ABCD*, мы видим, что диагонали *AC* и *BD* также должны быть перпендикулярны, как показано на рисунке. Это завершает доказательство, так как из доказательства примера 116 мы знаем, что отсюда следует: $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

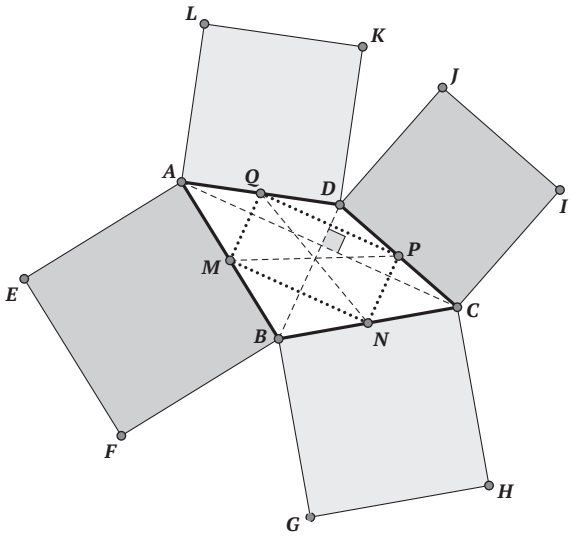


Рисунок 117-P

Пример 118. Неожиданная перпендикулярность возникает в циклическом четырехугольнике

На рис. 118-P мы добавили прямую *OL*, которая перпендикулярна стороне *BC*. Теперь рассмотрим треугольники *POL* и *PEN*. В силу определения точки *E*, имеем *PO* = *PE* и ∠*OPL* = ∠*EPN*. Из доказательства примера 44 мы знаем, что *KLMN* – параллелограмм Вариньона для четырехугольника *ABCD*, и поскольку *P* – точка пересечения его диагоналей, то верно соотношение *PL* = *PN*. Таким образом, мы установили, что треугольники *POL* и *PEN* конгруэнтны, и, следовательно, ∠*PLO* = ∠*PNE*. Это означает, что отрезки *OL* и *NE* параллельны, и поскольку отрезок *OL* перпендикулярен стороне *BC*, отсюда следует, что *NE* также должна быть перпендикулярна *BC*.

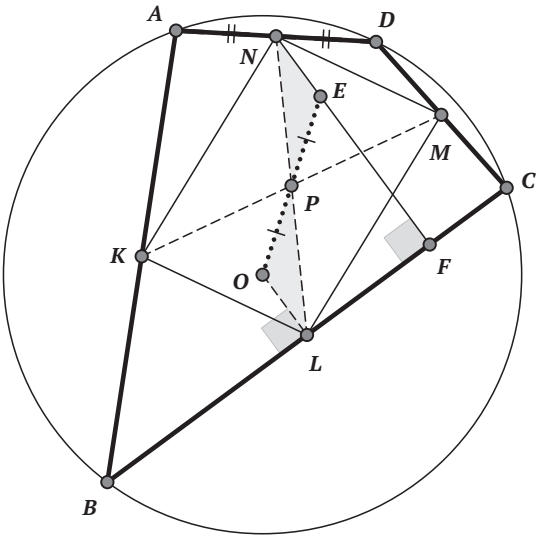


Рисунок 118-P

Пример 119. Связь между диагоналями и сторонами циклических четырехугольников

Поскольку вписанные углы, измеренные одной и той же дугой, равны, то верны равенства: ∠*BAE* = ∠*BAC* = ∠*BDC* = ∠*EDC* и ∠*EBA* = ∠*DBA* = ∠*DCA* = ∠*DCE*. Тогда мы получаем Δ*ABE* ~ Δ*CDE*. Следовательно, $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$, как показано на рис. 119-P. Аналогично поскольку ∠*ADE* = ∠*ADB* = ∠*ACB* = ∠*ECB* и ∠*EAD* = ∠*CAD* = ∠*CBD* = ∠*CBE*, мы получаем Δ*AED* ~ Δ*BCE* и $\frac{BE}{DE} = \frac{BC}{DA}$.

Умножив эти две пропорции, получим $\left(\frac{BE}{DE}\right)^2 = \frac{AB \cdot BC}{CD \cdot DA}$.

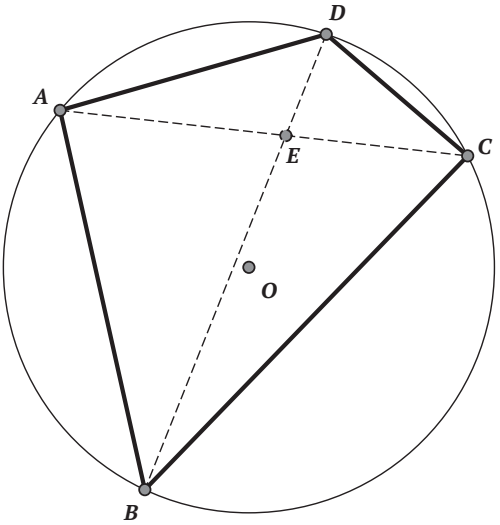


Рисунок 119-P

Пример 120. Знаменитая теорема Птолемея

На рис. 120-P нам дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Через вершину A проведена прямая, пересекающая продолжение стороны CD в точке P, так что $\angle BAC = \angle DAP$. Поскольку четырехугольник $ABCD$ является вписанным, $\angle CBA$ является дополнительным к $\angle ADC$. Однако угол $\angle PDA$ также является дополнительным к углу $\angle ADC$. Следовательно, $\angle CBA = \angle ADP$, и, таким образом, $\Delta ABC \sim \Delta ADP$. Из этого получаем соотношение $\frac{AB}{DA} = \frac{BC}{DP}$, или $DP = \frac{DA \cdot BC}{AB}$. Подобные треугольники также дают нам равенство $\frac{AB}{DA} = \frac{AC}{AP}$. Из условия $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle DAP + \angle CAD = \angle CAP$ и $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AP}$ получаем $\Delta ABD \sim \Delta ACP$, так что $\frac{BD}{CP} = \frac{AB}{AC}$ или $CP = \frac{AC \cdot BD}{AB}$. Подставляя в $CP = CD + DP$, получаем $\frac{AC \cdot BD}{AB} = CD + \frac{DA \cdot BC}{AB}$, или $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$, что является известной теоремой Птолемея.

Обратное утверждение также верно, как мы можем видеть из следующего доказательства. Предположим, что $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$ верно, четырехугольник $ABCD$ на рис. 120-P не является вписанным в окружность и треугольник ADP был построен подобным треугольнику ABC. Поскольку четырехугольник $ABCD$ считается не вписанным в окружность и верно $\angle PDA = \angle CBA$, то $\angle ADC$ не является дополнительным к $\angle CBA$, так что точки C, D и P не коллинеарны. Однако это означало бы, что $CP < CD + DP$. Повторение приведенной выше подстановки дает выражение $\frac{AC \cdot BD}{AB} < CD + \frac{DA \cdot BC}{AB}$, или $AC \cdot BD < AB \cdot CD + BC \cdot DA$, что противоречит предположению, что $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ является циклическим.

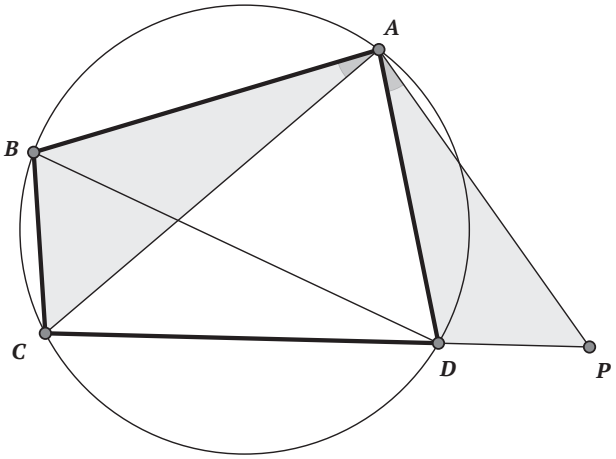


Рисунок 120-P

Пример 121. Любопытное соотношение параллелограмма

Как мы видим на рис. 121-P, мы проводим точку P' вне параллелограмма $ABCD$ так, что $\Delta AP'B \cong \Delta DPC$. Поскольку угол $\angle DPA$ является дополнительным к углу $\angle BPC$, а углы $\angle BP'A = \angle CPD$, то верны соотношения $\angle BP'A + \angle APB = \angle CPD + \angle APB = 360° - (\angle DPA + \angle BPC) = 360° - 180° = 180°$. Таким образом, четырехугольник $AP'BP$ является вписанным. Теперь мы можем применить теорему Птолемея, с которой мы познакомились при доказательстве примера 120, к вписанному четырехугольнику $AP'BP$, получив равенство $AB \cdot P'P = AP \cdot BP' + BP \cdot AP'$. Поскольку известно, что $\Delta AP'B \cong \Delta DPC$, то верны равенства $BP' = CP$ и $AP' = DP$. Также так как $\angle P'AB = \angle PDC$, $AB \| CD$ и $AP' = DP$, мы видим, что четырехугольник $AP'PD$ является параллелограммом, причем $P'P = AD$. В итоге верно равенство $AB \cdot P'P = AP \cdot BP' + BP \cdot AP'$, из чего следует соотношение $AB \cdot AD = AP \cdot CP + BP \cdot DP$, что мы и пытались показать.

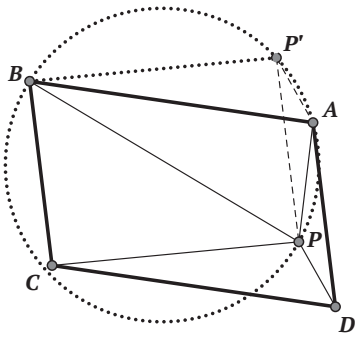


Рисунок 121-P

Пример 122. Равносторонний треугольник в циклическом четырехугольнике

Поскольку четырехугольник $ABCD$ на рис. 122-Р является циклическим, мы можем применить теорему Птолемея, представленную в примере 120, из которой следует соотношение $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$. Нам дано, что треугольник ΔABD равносторонний и $BD = DA = AB$. Следовательно, мы можем записать $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$ как $AC \cdot BD = CD \cdot BD + BC \cdot BD$, или $AC = CD + BC$.

Чтобы показать, что верно выражение $\frac{1}{CE} = \frac{1}{CB} = \frac{1}{CD}$, рассмотрим тот факт, что $BD = BE + ED$. Поскольку четырехугольник $ABCD$ является вписанным в окружность, то верно утверждение, что $\angle EDC = \angle BDC = \angle BAC = \angle BAE$ и $\angle CED = \angle AEB$. Следовательно, треугольники ECD и EAB подобны, и верно соотношение $\frac{CD}{AB} = \frac{CE}{BE}$, или $BE = \frac{AB \cdot CE}{CD}$. Аналогично поскольку мы имеем $\angle CBE = \angle CBD = \angle CAD = \angle EAD$ и $\angle BEC = \angle DEA$, треугольники EBC и EDA подобны, и верно соотношение $\frac{CB}{AD} = \frac{CE}{ED}$, или $ED = \frac{AD \cdot CE}{CB}$. Подставляя $BD = BE + ED$, получаем выражение $BD = \frac{AB \cdot CE}{CD} + \frac{AD \cdot CE}{CB}$, а поскольку $BD = AB = AD$, это эквивалентно $\frac{1}{CE} = \frac{1}{CB} + \frac{1}{CD}$.

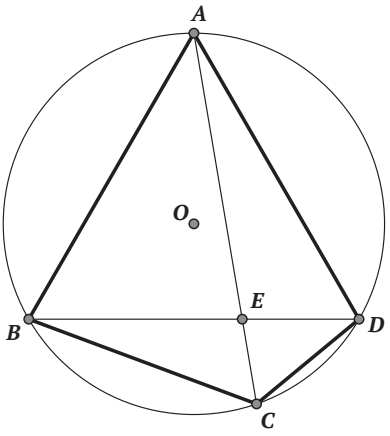


Рисунок 122-Р

Пример 123. Биссектрисы углов в циклических четырехугольниках

На рис. 123-Р обозначим через P' точку пересечения биссектрисы угла $\angle CAD$ с описанной окружностью четырехугольника $ABCD$. Поскольку $\angle CAP' = \angle P'AD$, мы видим, что отрезки $P'C = P'D$.

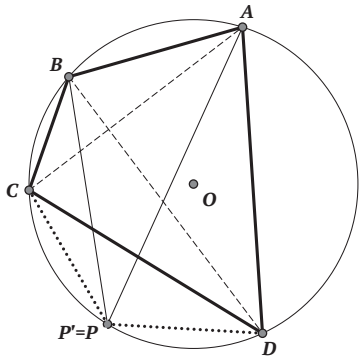


Рисунок 123-P

Отсюда мы определяем $\angle CBP' = \angle P'BD$, и тогда P' лежит на биссектрисе угла $\angle CAD$ и $\angle CBD$. Это означает, что совпадают $P' = P$, и P лежит на описанной окружности четырехугольника $ABCD$.

Нам еще нужно показать, что верно равенство $\frac{AP}{BP} = \frac{AD+AC}{BD+BC}$. Применяя теорему Птолемея (которую мы представили в примере 120) к циклическому четырехугольнику $ACPD$, получаем $AP \cdot CD = PC \cdot AD + PD \cdot AC$, и, вспоминая тот факт, что отрезки $PC = PD$, мы можем записать это как выражение $AP \cdot CD = PC \cdot (AD + AC)$. Аналогично применим теорему Птолемея к циклическому четырехугольнику $BCPD$, чтобы получить следующее равенство: $BP \cdot CD = PC \cdot BD + PD \cdot BC$, или $BP \cdot CD = PC \cdot (BD + BC)$. Разделив эти два уравнения, мы приходим к желаемому выводу, что верно равенство $\frac{AP \cdot CD}{BP \cdot CD} = \frac{PC \cdot (AD+AC)}{PC \cdot (BD+BC)}$, или $\frac{AP}{BP} = \frac{AD+AC}{BD+BC}$.

Пример 124. Неожиданная биссектриса угла в особом вписанном четырехугольнике

Как видно на рис. 124-P, нам дано, что стороны $AB = AD$, так что равны дуги $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AD}$. Следовательно, углы $\angle ACB = \angle ACD$, поскольку оба угла измеряются равными дугами. Это означает, что диагональ AC делит угол $\angle DCB$ пополам, как мы и хотели доказать.

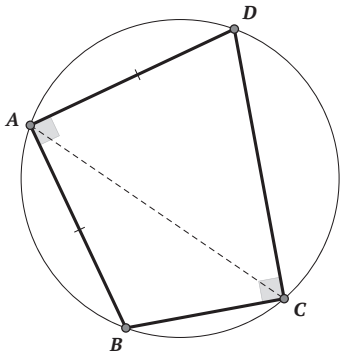


Рисунок 124-P

Пример 125. Перпендикуляры к сторонам циклического четырехугольника, проведенные из точки на его описанной окружности

Как показано на рис. 125-P, будет полезно рассмотреть треугольники PIF и PHG. Сначала отметим, что $PI \perp AI$ и $PF \perp AF$, что приводит к вписанному четырехугольнику $PAIF$. Поскольку оба угла вписаны в дугу FI, мы имеем равенство $\angle IPF = \angle IAF$. Аналогично мы также имеем равенство $\angle FIP = \angle FAP$. Так как $PG \perp BC$ и $PH \perp CD$, мы обнаруживаем, что четырехугольник $PCHG$ является вписанным четырехугольником, и мы снова имеем равенство двух вписанных углов, имеющих общую дугу, и верны равенства $\angle HPG = \angle DCB$ и $\angle GHP = \angle GCP$. Мы также имеем равенство $\angle IAF = \angle DCB$, так как четырехугольник $ABCD$ является вписанным и оба угла являются дополнительными к углу $\angle BAD$, и, следовательно, $\angle IPF = \angle HPG$. Вспоминая, что точки A, B, C, D и P лежат на общей окружности, мы имеем $\angle FAP = \angle BAP = \angle BCP = \angle GCP$, и тогда мы видим, что $\angle FIP = \angle FAP = \angle GCP = \angle GHP$. Таким образом, у нас есть подобные треугольники PIF и PHG, так что верно соотношение $\frac{PF}{PI} = \frac{PG}{PH}$, или $PF \cdot PH = PG \cdot PI$.

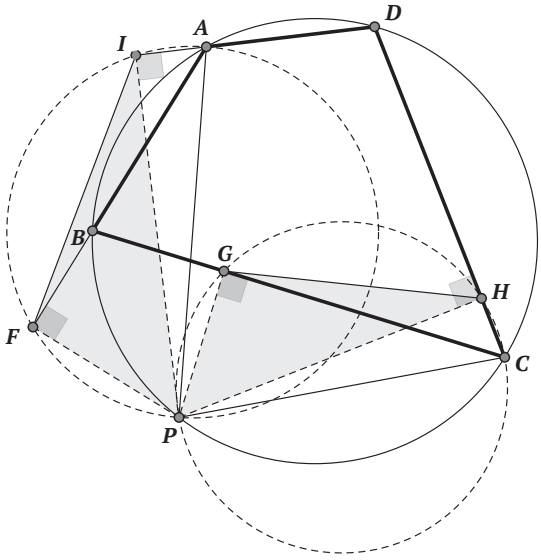


Рисунок 125-P

Пример 126. Удивительные факты циклического четырехугольника

На рис. 126-P точки A, B, C и D находятся на одной окружности, как и точки A, B, F и G. Поэтому мы можем отметить несколько свойств углов, а именно равенства: $\angle GAD = \angle BAD - \angle BAG$, $\angle BAD = 180° - \angle DCB$ и $\angle BAG = \angle BFC$. Объединив эти свойства, мы получаем соотношение $\angle GAD = \angle BAD - \angle BAG = 180° - \angle DCB - \angle BFC = \angle CBF$ в треугольнике BCF. В окружности с центром M имеем $\angle GMD = 2 \cdot \angle GAD$, а в окружности с N имеем $\angle CNF = 2 \cdot \angle CBF$. Следовательно, $\angle GMD = \angle CNF$, и поскольку треугольники MGD и NCF являются равнобедренными, они подобны. Теперь рассмотрим степень P относительно описанных окружностей вписанных четырехугольников $ABCD$ и $ABFG$ (см. «Инструментарий»). Поскольку верны равенства $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ и $PA \cdot PB = PF \cdot PG$, имеем $PC \cdot PD = PF \cdot PG$, или $\frac{PF}{PD} = \frac{PC}{PG} = f$. Гомотетика с центром P и фактором f (см. «Инструментарий») отображает D в F и G в C, а поскольку треугольники MGD и NCF подобны, она также отображает M в N. Таким образом, точки M, N и P коллинеарны, что мы и пытались доказать.

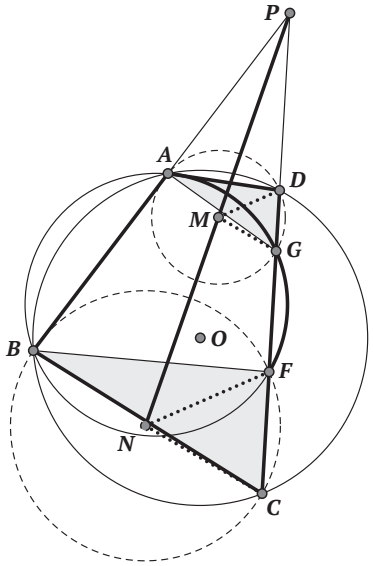


Рисунок 126-P

Пример 127. Знаменитая теорема Брахмагупты

Сначала рассмотрим случай, когда четырехугольник $ABCD$ является прямоугольником с условием $a = c$ и $b = d$. В этом частном случае верно выражение $s = \frac{a+b+a+b}{2} = a + b$, и, подставляя его в выражение, получаем

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$
$$= \sqrt{(a+b-a)(a+b-b)(a+b-a)(a+b-b)}$$
$$= \sqrt{a^2b^2} = ab.$$

Поскольку произведение *ab* является площадью прямоугольника, то формула Брахмагупты справедлива в этом случае. Теперь рассмотрим любой непрямоугольный вписанный четырехугольник *ABCD*. Такой четырехугольник, безусловно, имеет пару противоположных сторон, продолжения которых пересекаются, поскольку в противном случае он был бы вписанным параллелограммом (то есть прямоугольником). Мы продолжаем стороны *DA* и *CB* до точки *P*, образуя треугольник ΔDCP, как показано на рис. 127-P.

Обозначим $PC = x$ и $PD = y$. Согласно формуле Герона для площади треугольника *ABC* (см. «Инструментарий»), стороны которого имеют длины *a*, *b* и *c*, а полупериметр равен $s = \frac{a+b+c}{2}$, получаем значение его площади: площадь $[ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Тогда для площади треугольника *PCD* мы имеем выражение

$$\text{площадь } [PCD] = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+c)(-x+y+c)(x-y+c)(x+y-c)}. \qquad \text{(I)}$$

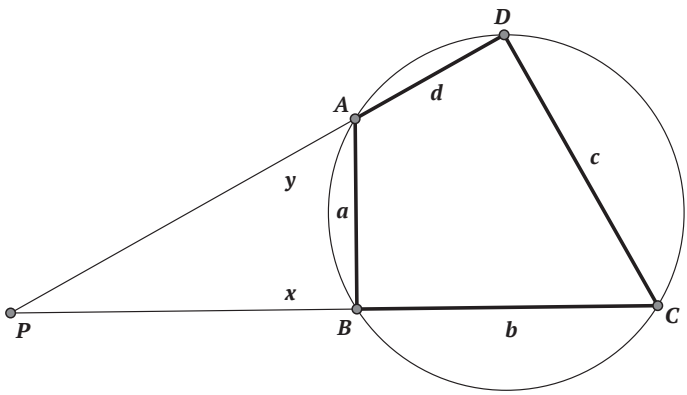


Рисунок 127-P

Поскольку угол $\angle ADC$ является дополнительным к углу $\angle CBA$, а $\angle ABP$ также является дополнительным к $\angle CBA$, то $\angle ADC = \angle ABP$. Следовательно, треугольники $\Delta PBA \sim \Delta PCD$. Сторона, противоположная вершине *P* в треугольнике *PBA*, имеет длину *a*, а сторона, противоположная вершине *P* в треугольнике *PCD*, имеет длину *c*. Это дает нам выражение $\frac{\text{площадь } \Delta PBA}{\text{площадь } \Delta PCD} = \frac{a^2}{c^2}$, из которого мы получаем равенство

$$\frac{\text{площадь}\,[ABCD]}{\text{площадь}\,[PCD]} = \frac{\text{площадь}\,[PCD] - \text{площадь}\,[PBA]}{\text{площадь}\,[PCD]} =$$

$$\frac{\text{площадь}\,[PCD]}{\text{площадь}\,[PCD]} - \frac{\text{площадь}\,[PBA]}{\text{площадь}\,[PCD]} = \frac{c^2}{c^2} - \frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2 - a^2}{c^2}.$$

Из подобных треугольников $\Delta PBA \sim \Delta PCD$ мы также получаем равенства $\frac{x}{c} = \frac{y-d}{a}$ и $\frac{y}{c} = \frac{x-b}{a}$. После сложения имеем: $\frac{x+y}{c} = \frac{x+y-b-d}{a}$, и, следовательно, приходим к соотношениям $x + y = \frac{c}{c-a}(b+d)$ и $x + y + c = \frac{c}{c-a}(-a+b+c+d)$.

Используя аналогичные методы, мы получаем равенства

$-x - y + c = \frac{c}{c+a}(a+b+c-d)$, $x - y + c = \frac{c}{c+a}(a+b+c-d)$ и $x + y - c = \frac{c}{c-a}(a+b-c+d)$.

Подставляя их в уравнение (I), получаем равенство

$$\text{площадь}\,[PCD] = \frac{c^2}{4(c^2 - a^2)} \times \sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}.$$

Поскольку мы уже показали, что верно соотношение

$$x + y - c = \frac{c}{c-a}(a+b-c+d),$$

это означает, что

$$\text{площадь}\,[ABCD] = \frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Пример 128. Странное равенство квадратов

Для упрощения доказательства начнем с обозначения отрезков следующим образом: $MA = MB = r$, $BP = b$, $BD = d$ и $MP = p$. Также обозначим $\angle CBM = \angle MAD = \alpha$, как показано на рис. 128-Р. Мы хотим показать, что площадь квадрата [*PKLM*] = площадь квадрата [*BEFP*] + площадь квадрата [*BDGH*] + площадь квадрата [*BMIJ*], что теперь можно просто записать как $p^2 = b^2 + d^2 + r^2$. Поскольку сторона *AB* является диаметром описанной окружности равнобедренной трапеции *ABCD*, а *ABC* – прямоугольный треугольник с $\angle ACB = 90°$, и тогда мы имеем $d = BD = CA = AB \cdot \sin(\angle CBA) = 2r \cdot \sin\alpha$. Поскольку верно, $PC \| AB$, мы имеем равенство $\angle BCP = \angle CBA = \alpha$, и так как треугольники *BPC* и *ABC* являются прямоугольными треугольниками с парой равных внутренних углов и общей стороной *BC*, они конгруэнтны. Мы получаем равенство $b = BP = CA = 2r \cdot \sin\alpha$, а площадь квадрата *EFPB* равна $4r^2 \cdot \sin^2\alpha$, что то же самое, что и для квадрата *DGHB*.

Далее рассмотрим треугольник BPM. По закону косинусов (см. «Инструментарий»), мы имеем $PM^2 = BP^2 + BM^2 - 2BP \cdot BM \cdot \cos(\angle PBM)$. Для углов верно соотношение $\angle PBM = \angle PBC + \angle CBM = 90° + \alpha$, откуда следует, что $p^2 = b^2 + r^2 - 2br \cdot \cos(90° + \alpha) = 4r^2 \cdot sin^2\alpha + r^2 - 2(2r \cdot \sin\alpha) \cdot r \cdot (-sin\,\alpha) = 8r^2 \cdot \sin^2\alpha + r^2$. Мы можем перегруппировать наши предыдущие результаты, чтобы получить выражение $p^2 = 8r^2 \cdot \sin^2\alpha + r^2 = (4r^2 \cdot \sin^2\alpha) + (4r^2 \cdot \sin^2\alpha) + r^2 = b^2 + d^2 + r^2$, что и требовалось доказать.

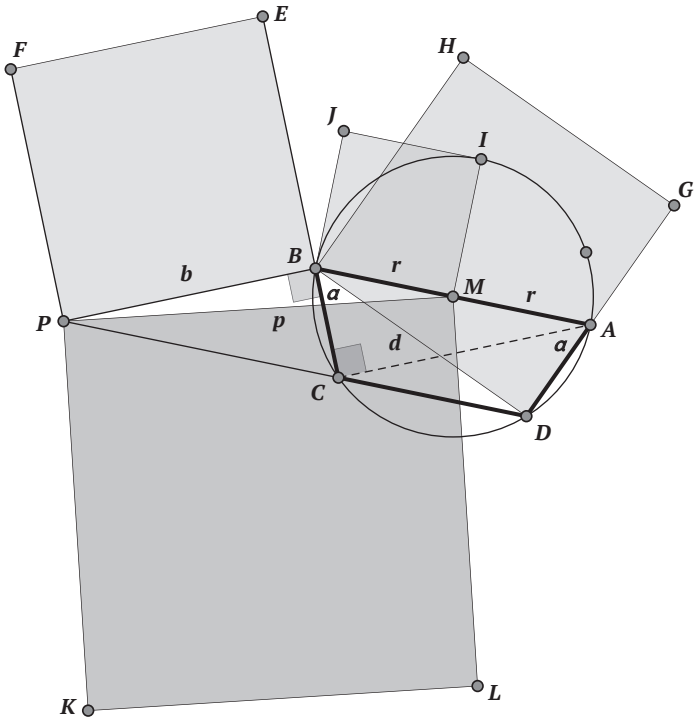


Рисунок 128-P

Пример 129. Пропорциональность порождает равенство площадей

Для упрощения обозначений определим отношение $\frac{CP}{PD} = \frac{AQ}{QB} = x$. На рис. 129-P сначала рассмотрим связь между площадью треугольника ABP и площадями треугольников ABC и ABD. Для этого построим прямую, проходящую через точку P параллельно стороне AB, и ее продолжение. Определим точки C' и D' на прямой, параллельной стороне AB, так что $CC' \perp AB$ и $DD' \perp AB$ в точках C'' и D'' соответственно. Также у нас есть точка P'' на продолжении стороны AB такая, что $CC'' \perp AB$, $DD'' \perp AB$ и $PP'' \perp AB$. Наконец, мы обозначим длину отрезка DD' как y, как показано на рис. 129-P.

Теперь отметим, что прямоугольные треугольники $PC'C$ и $PD'D$ подобны, поскольку имеют общие вертикальные углы в точке P. Это означает, что у нас

есть выражение $\frac{CP}{PD} = \frac{CC'}{DD'} = x$, или $CC' = x \cdot DD' = xy$. Таким образом, мы можем записать $C''C = C''C' + C'C' = P''P + xy$ и $D''D = D''D' - D'D = P''P - y$. Это позволяет нам определить площадь треугольника $[ABP] = \frac{1}{2}\, AB\, P''P$, площадь треугольника $[ABC]\ \frac{1}{2}\, AB\, C''C = \frac{1}{2}\, AB\, (P''\, P + xy)$ и площадь треугольника $[ABD] = \frac{1}{2}\, AB\, D''\, D = \frac{1}{2}\, AB\, (P''P - y)$.

Поскольку

площадь треугольника $[ABC] = \frac{1}{2}AB\cdot(P''P + xy) = \frac{1}{2}AB\cdot P''P + \frac{1}{2}AB\cdot xy =$ площадь треугольника $(ABP) + \frac{1}{2}AB\cdot xy$,

следовательно, мы получаем

площадь треугольника $[ABC]$ – площадь треугольника $(ABP) = \frac{1}{2}AB\cdot xy$,

и поскольку

площадь треугольника $[ABD] = \frac{1}{2}AB\cdot(P''P - y) = \frac{1}{2}AB\cdot P''P - \frac{1}{2}AB\cdot y =$ площадь треугольника $(ABP) - \frac{1}{2}AB\cdot y$,

мы получаем выражение:

площадь треугольника $[ABD]$ – площадь треугольника $(ABP) = -\frac{1}{2}AB\cdot y$,

что приводит к равенству

$x \cdot$ (площадь треугольника $[ABD]$ – площадь треугольника $[ABP]$) + (площадь треугольника $[ABC]$ – площадь треугольника $[ABP]$) = 0.

Мы можем записать это как выражение

$x \cdot$ площадь треугольника $[ABD] - x \cdot$ площадь треугольника $[ABP] +$ площадь треугольника $[ABC]$ – площадь треугольника $[ABP] = 0$

или

$$\text{площадь } [ABP] = \frac{x \cdot \text{площадь } [ABD] + \text{площадь } [ABC]}{1 + x}.$$

Мы можем повторить этот шаг аналогичным образом на стороне CD, чтобы получить $\text{площадь } [CDQ] = \frac{x \cdot \text{площадь } [CDB] + \text{площадь } [CDA]}{1 + x}$. Поскольку верно соотношение:

площадь треугольника $[ABD]$ + площадь треугольника $[CDB] =$ площадь треугольника $[ABC]$ + площадь треугольника $[CDA] =$ площадь четырехугольника $[ABCD]$,

следовательно, мы получаем выражение

$$\text{площадь треугольника}\,[ABP] + \text{площадь треугольника}\,[CDQ] =$$

$$\frac{x \cdot \text{площадь треугольника}\,[ABD] + \text{площадь треугольника}\,[ABC]}{1+x} +$$

$$\frac{x \cdot \text{площадь треугольника}\,[CDB] + \text{площадь треугольника}\,[CDA]}{1+x} =$$

$$\frac{x}{1+x} \cdot (\text{площадь треугольника}\,[ABD] + \text{площадь треугольника}\,[CDB] +$$

$$\frac{1}{1+x} \cdot (\text{площадь треугольника}\,[ABC] + \text{площадь треугольника}\,[CDA])) =$$

$$\frac{x}{1+x} \cdot \text{площадь четырехугольника}\,[ABCD] +$$

$$\frac{1}{1+x} \cdot \text{площадь четырехугольника}\,[ABCD] =$$

$$\text{площадь четырехугольника}\,[ABCD],$$

что дает нам:

площадь треугольника [*ABP*] + площадь треугольника [*CDQ*] =
площадь четырехугольника [*ABCD*].

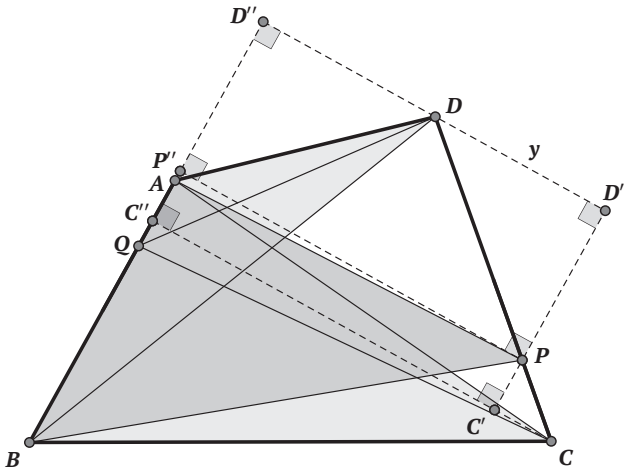


Рисунок 129-Р

Пример 130. Парные квадраты на сторонах четырехугольника образуют равенство

Мы докажем этот пример в три этапа. Во-первых, начертим диагонали *AC* и *BD* в четырехугольнике *ABCD*, как показано на рис. 130a-P.

Мы определим точки *P* и *Q* на диагонали *BD* так, что $AP \perp AD$ и $CQ \perp BD$. Нам дано $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$. Поскольку ΔPAB, ΔPDA, ΔQBC и ΔQCD являются прямоугольными треугольниками, мы можем применить теорему Пифагора.

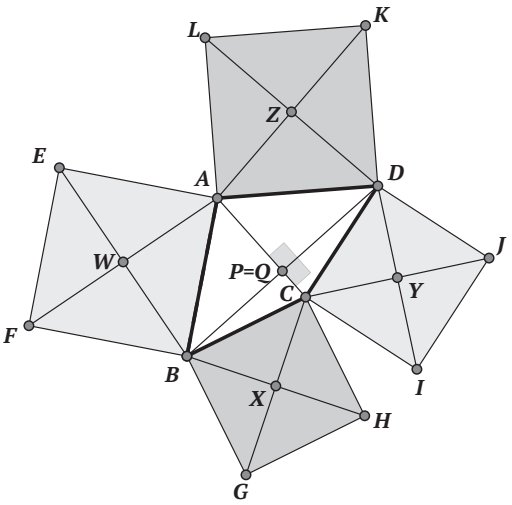


Рисунок 130a-P

Применим теорему к каждому из треугольников, чтобы получить $(AP^2 + BP^2) + (CQ^2 + DQ^2) = (AP^2 + DP^2) + (CQ^2 + BQ^2)$, что сводится к равенству $BP^2 + DQ^2 = BQ^2 + DP^2$.

Если предположить, что отрезки $P \neq Q$, то можно предположить, без потери общности, что точки *B*, *P*, *Q* и *D* лежат на прямой *BD* в таком порядке. В этом случае верны неравенства $BP < BQ$ и $DQ < DP$, что приводит к противоречию в соотношении $BP^2 + DQ^2 < BQ^2 + DP^2$. Тогда мы видим, что точки *P* и *Q* фактически являются одной и той же точкой, что означает, что диагонали *AC* и *BD* перпендикулярны в точке *P*.

На втором шаге рассмотрим четырехугольник *AWBP* на рис. 130b-P. Мы только что установили перпендикулярность $PA \perp PB$. Поскольку отрезки *AF* и *BE* являются диагоналями квадрата *AEFB*, они перпендикулярны, и мы также имеем соотношение $WA \perp WB$. Отсюда следует, что точки *P* и *W* лежат на окружности с диаметром *AB*.

Поскольку *WA* и *WB* являются полудиагоналями квадрата *AEFB*, мы имеем равенство $WA = WB$, и поэтому $\angle APW = \angle WPB$. Так как $\angle APB = 90°$, это дает нам выражение $\angle APW = \angle WPB = 45°$. Аналогично в четырехугольнике *BGHC* мы получаем $\angle BPX = \angle XPC = 45°$, и, следовательно, $\angle WPX = \angle WPB + \angle BPX = 45° + 45° = 90°$. Аналогичные рассуждения дают нам $\angle XPY = 90°$, $\angle YPZ = 90°$ и $\angle ZPW = 90°$. Это означает, что *W*, *P* и *Y* коллинеарны, как и *X*, *P* и *Z*, причем $WPY \perp XPZ$.

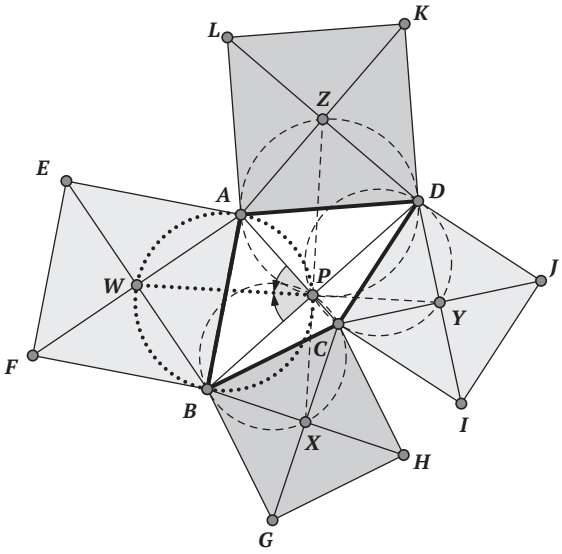


Рисунок 130b-P

Для третьего шага нашего доказательства остается показать, что отрезки $WY = XZ$. Мы применяем теорему Птолемея (см. пример 120) к четырехугольнику $AWBP$ на рис. 130b-P, чтобы получить выражение $AW \cdot BP + BW \cdot AP = AB \cdot PW$. Поскольку точка W является центром квадрата $AFEB$, мы имеем соотношение $AW = BW = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot AB$, и подстановка затем дает нам равенство $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot AB \cdot BP + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot AB \cdot AP = AB \cdot PW$, или $PW = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (AP + BP)$. Также в четырехугольнике $CIJD$ мы получаем выражение $PY = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (CP + DP)$ и, сложив эти два выражения, получаем равенство $WY = PW + PY = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (AP + BP) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (CP + DP) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (AC + BD)$.

Повторив эти вычисления в четырехугольниках $BGHC$ и $DKLA$, мы получаем $XZ = PX + PZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (AC + BD)$ и приходим к выводу, что $WY = XZ$.

Пример 131. Линия, соединяющая середины диагоналей четырехугольника, – линия Ньютона

Прежде чем приступить к доказательству, кратко рассмотрим треугольник ABC, как показано на рис. 131a-P. У нас есть перпендикулярность $CD \perp AB$. Стороны треугольника, противоположные вершинам A, B и C, обозначены соответственно a, b и c, и у нас обозначения для отрезков $CD = h$, $AD = b'$ и $BD = a'$. Заметим на рис. 131a-P, что точка D лежит между точками A и B, и поэтому верно соотношение $c^2 = (b' + a')^2 = b'^2 + 2b'a' + a'^2$. Поскольку DCA и DBC – прямоугольные треугольники, то также верны равенства $a^2 = a'^2 + h^2$ и $b^2 = b'^2 + h^2$. Таким образом, приходим к выражению $c^2 + b^2 - a^2 = (b'^2 + 2b'a' + a'^2) + (b'^2 + h^2) - (a'^2 + h^2) = 2b'^2 + 2b'a' = 2b'c$, или $a^2 = b^2 + c^2 - 2b'c$. Заметим, что если D лежит вне отрезка AB, то результирующее соотношение будет $a^2 = b^2 + c^2 - 2a'c$, что можно показать аналогично.

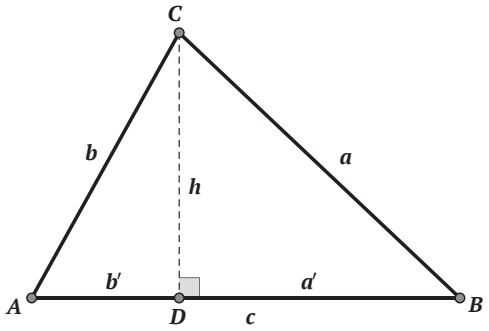


Рисунок 131a-P

На следующем шаге мы рассмотрим рис. 131b-P, на котором к конфигурации на рис. 131a-P добавлены середина M стороны AB и медиана CM.

Из нашего предыдущего результата в треугольнике MCA мы имеем выражение $m^2 = b^2 + \frac{1}{4}c^2 - b'c$, поскольку $MA = \frac{1}{2}c$. Аналогично в (тупом) треугольнике MBC мы имеем выражение $m^2 = a^2 + \frac{1}{4}c^2 - a'c$, и сложение этих двух выражений дает нам выражение $2m^2 = a^2 + b^2 + \frac{1}{2}c^2 - (b' + a')c$, или $2m^2 = a^2 + b^2 + \frac{1}{2}c^2 + 2m^2$.

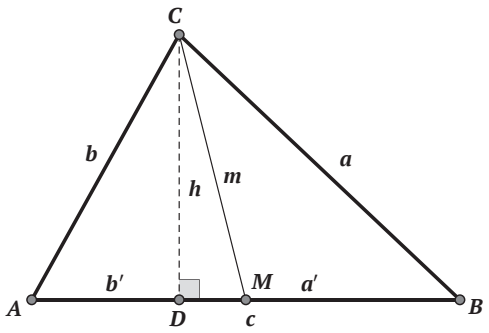


Рисунок 131b-P

Теперь мы готовы рассмотреть исходную задачу. На рис. 131c-P мы соединили точку F с двумя вершинами A и C четырехугольника $ABCD$. Поскольку F является серединой BD, для треугольника ABD мы получаем соотношение $AB^2 + DA^2 = \frac{1}{2}BD^2 + 2AF^2$, а для треугольника CDB получаем соотношение $BC^2 + CD^2 = \frac{1}{2}BD^2 + 2CF^2$. Складывая эти два выражения, получаем $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = BD^2 + 2AF^2 + 2CF^2$. Теперь, учитывая, что E является серединой стороны AC, треугольник ACF дает нам $AF^2 + CF^2 = \frac{1}{2}AC^2 + 2EF^2$.

Подстановка дает нам выражение

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = BD^2 + 2AF^2 + 2CF^2 = BD^2 + 2(AF^2 + CF^2) = BD^2 + 2(\tfrac{1}{2}AC^2 + EF^2) = AC^2 + BD^2 + 4EF^2.$$

Именно это мы и стремились доказать.

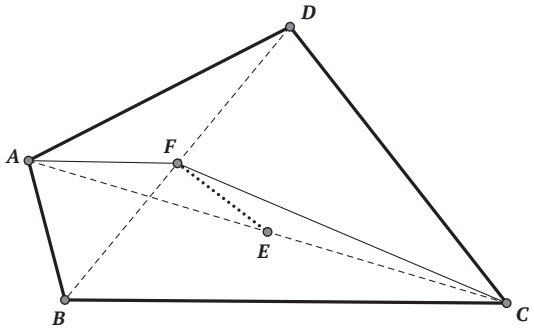


Рисунок 131 с-Р

Пример 132. Разделение четырехугольника на две пары треугольников с равными суммами площадей

В качестве первого шага доказательства мы покажем, что верно соотношение:

площадь треугольника [*EBC*] + площадь треугольника [*EDA*] =
½ площади четырехугольника [*ABCD*].

На рис. 132а-Р точка *E* – середина стороны *AC*, так что

площадь треугольника [*EDA*] = ½ площади треугольника [*CDA*]

и

площадь треугольника [*EBC*] = ½ площади треугольника [*ABC*].

Сложение этих выражений дает нам желаемый результат, так как мы имеем:

площадь треугольника [*EBC*] + площадь треугольника [*EDA*] =
½ площади треугольника [*CDA*] + ½ площади треугольника [*ABC*] =
½ площади четырехугольника [*ABCD*].

Мы также можем аналогичным образом показать, что верно соотношение:

площадь треугольника [*FBC*] + площадь треугольника [*FDA*] =
½ площади четырехугольника [*ABCD*].

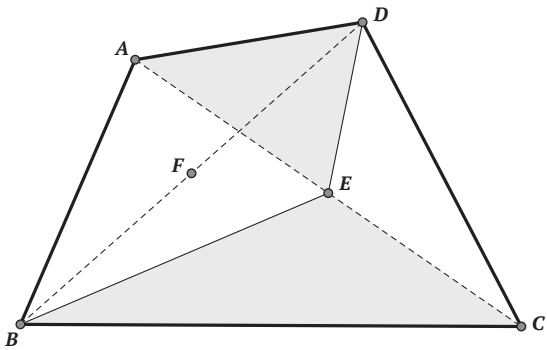


Рисунок 132а-Р

Теперь выберем случайную точку P на отрезке EF, как показано на рис. 132b-P. Мы хотим показать, что

площадь треугольника [PAB] + площадь треугольника [PCD] =
площадь треугольника [PBC] + площадь треугольника [PDA].

Как видно на рисунке, мы добавили точки E', F' и P', которые являются основаниями перпендикуляров, проведенных из точек E, F и P к стороне BC соответственно. Также мы добавили точки E'' и F'' на отрезке FF', такие что $FF' \perp PF''$ и $FF' \perp EE''$. Поскольку мы хотим доказать свойство, касающееся площади треугольника PBC, будет полезно найти свойство высоты PP' этого треугольника относительно основания BC. Отметим, что определения различных точек дают нам $FE'' = FF' - EE'$ и $FF'' = FF' - PP'$. Прямоугольные треугольники $FF''P$ и $FE''E$ подобны, потому что они имеют общий угол в точке F, и верно выражение $p = \frac{PF}{EF} = \frac{FF''}{FE''}$, где p определено как отношение расстояний от F до P и E. Следовательно, мы приходим к выражению $p = \frac{FF''}{FE''} = \frac{FF'-PP'}{FF'-EE'}$, из которого можно выразить $FF' - PP' = p(FF' - EE')$, или $PP' = p \cdot EE' + (1 - p) \cdot FF'$. Поскольку PP', EE' и FF' – это высоты треугольников PBC, EBC и FBC соответственно относительно общего основания BC, это дает нам выражение $\frac{1}{2}BC \cdot PP' = p \cdot \frac{1}{2}BC \cdot EE' + (1 - p) \cdot \frac{1}{2}BC \cdot FF'$, что можно привести к выражению:

площадь треугольника [PBC] = p · площадь треугольника [EBC] +
$(1 - p)$ · площадь треугольника [FBC].

Аналогично мы можем провести высоты треугольников PDA, EDA и FDA перпендикулярно их общему основанию DA и получить выражение:

площадь треугольника [PDA] = p · площадь треугольника [EDA] +
$(1 - p)$ · площадь треугольника [FDA].

Остается только сложить эти два выражения, чтобы найти

площадь треугольника [PBC] + площадь треугольника [PDA] =
p · площадь треугольника [EBC] + $(1 - p)$ · площадь треугольника [FBC] +
p · площадь треугольника [EDA] + $(1 - p)$ · площадь треугольника [FDA] =
p · (площадь треугольника [EBC] + площадь треугольника [EDA]) +
$(1 - p)$ · (площадь треугольника [FBC] + площадь треугольника [FDA]) =
p · (½ площади четырехугольника [$ABCD$]) +
$(1 - p)$ · (½ площади четырехугольника [$ABCD$]) =
½ площади четырехугольника [$ABCD$].

В результате получаем:

площадь треугольника [PBC] + площадь треугольника [PDA] =
½ площади четырехугольника [$ABCD$],

как мы и намеревались доказать.

Наконец, мы покажем, что верно и обратное утверждение. Другими словами, если четырехугольник $ABCD$ не является параллелограммом и точка P внутри него обладает свойством, что

площадь треугольника [*PAB*] + площадь треугольника [*PCD*] =
площадь треугольника [*PBC*] + площадь треугольника [*PDA*],

то она должна лежать на прямой Ньютона четырехугольника *ABCD*.

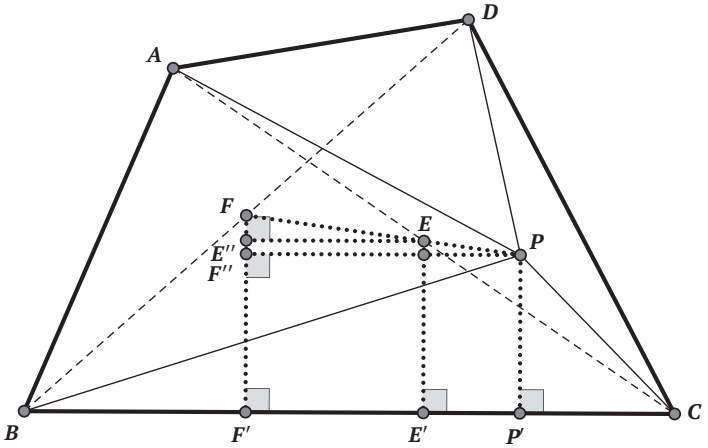


Рисунок 132b-P

Это иллюстрируется на рис. 132c-P. Поскольку четырехугольник *ABCD* не является параллелограммом, мы можем предположить без потери общности, что стороны *BC* и *DA* не параллельны. Если *P* – точка внутри четырехугольника *ABCD*, не лежащая на прямой Ньютона, мы можем провести через *P* прямую, параллельную *BC*, и эта прямая пересечет прямую Ньютона в точке *Q*. (Обратите внимание, что прямая Ньютона не может быть параллельной *BC*, так как это означало бы, что *DA* также должна быть параллельна *BC*, поскольку *EA* = *EC* и *FB* = *FD*.)

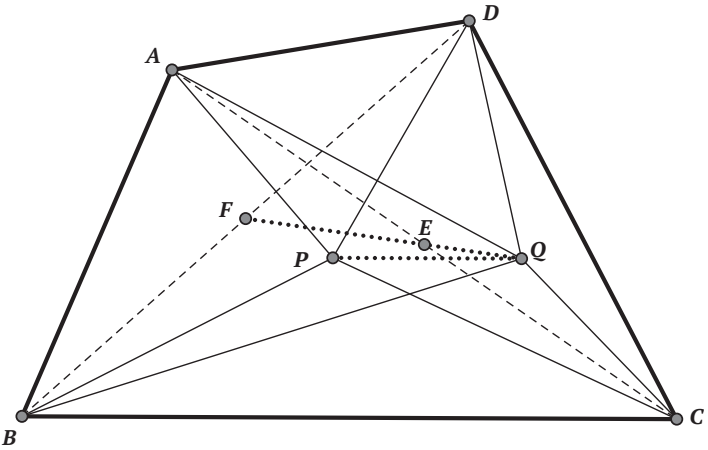


Рисунок 132c-P

Из первой части доказательства мы знаем, что сумма площадей треугольников *QBC* и *QDA* равна половине площади четырехугольника *ABCD*. Поскольку

отрезок *PQ* параллелен стороне *BC*, то площади треугольников *PBC* и *QBC* равны, но поскольку отрезок *PQ* не параллелен *DA*, площади треугольников *PDA* и *QDA* не равны. Следовательно, сумма площадей треугольников *PBC* и *PDA* не может быть равна сумме площадей треугольников *QBC* и *QDA* и, таким образом, не равна половине площади четырехугольника *ABCD*. Мы получаем противоречие, и поэтому *P* должна лежать на линии Ньютона.

Пример 133. Описанный четырехугольник

Чтобы упростить первую часть этого доказательства, мы обозначили касательные, как показано на рис. 133a-P, который изображает окружность с центром *O*, вписанную в четырехугольник *ABCD*. Поскольку касательные, проведенные к той же окружности из внешней точки, равны, мы имеем соотношения $AH = AE = w$, $BE = BF = x$, $CF = CG = y$ и $DG = DF = z$. Следовательно, верно выражение $AB + CD = (w + x) + (y + z) = (x + y) + (z + w) = BC + DA$, и, таким образом, $AB + CD = BC + DA$.

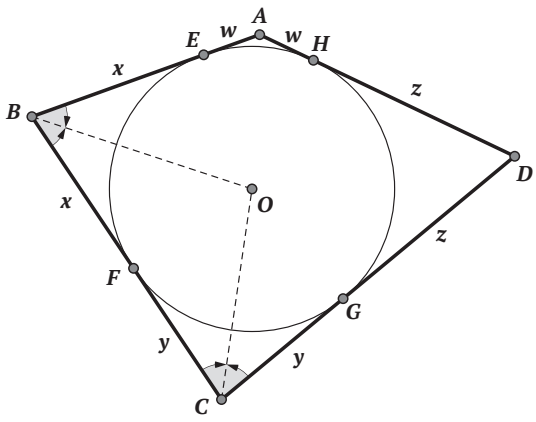


Рисунок 133a-P

Для доказательства обратного утверждения предположим, что *ABCD* – четырехугольник, в котором $AB + CD = BC + DA$. Мы хотим показать, что должна существовать окружность, касательная ко всем четырем сторонам четырехугольника. Теперь рассмотрим рис. 133b-P и 133c-P, где, без потери общности, предположим, что *DA* – кратчайшая из сторон четырехугольника *ABCD*. Тогда верно либо выражение $AB = DA$, либо выражение $AB > DA$. Если $AB = DA$, то также $BC = AB + CD - DA = AB + CD - AB = CD$, и четырехугольник *ABCD*, следовательно, является дельтовидной фигурой (или дельтовидным четырехугольником). Как показано на рис. 133b-P, такой рисунок содержит вписанную окружность с центром на диагонали *AC* и на биссектрисах углов *B* и *D*.

Затем мы можем предположить, что $AB > DA$, как показано на рис. 133c-P. В этом случае мы также имеем $BC = AB + CD - DA > AB + CD - AB = CD$. Отсюда следует, что существуют точки *X* на отрезке *AB* и *Y* на отрезке *BC* такие, что $AX = DA$ и $CY = CD$. Теперь отметим, что $BX = AB - AX = AB - DA = (BC + DA - CD) - DA = BC -$

$CD = BC - CY = BY$, и мы можем определить три равнобедренных треугольника AXD, BYX и CDY, при этом $AX = AD$, $BY = BX$ и $CD = CY$ соответственно. Это означает, что биссектрисы углов $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ четырехугольника $ABCD$ также разделяют пополам отрезки DX, XY и YD соответственно, поскольку они являются основаниями соответствующих равнобедренных треугольников. Пересечение этих трех перпендикулярных биссектрис является центром описанной окружности треугольника DXY, и мы видим, что биссектрисы углов $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ четырехугольника $ABCD$ пересекаются в общей точке O. Следовательно, эта общая точка имеет одинаковое расстояние до каждой из сторон DA, AB, BC и CD четырехугольника, и, таким образом, должна существовать окружность с центром O, касающаяся всех четырех сторон четырехугольника, что и требовалось доказать.

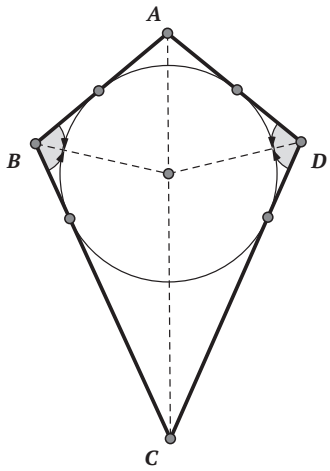


Рисунок 133b-P

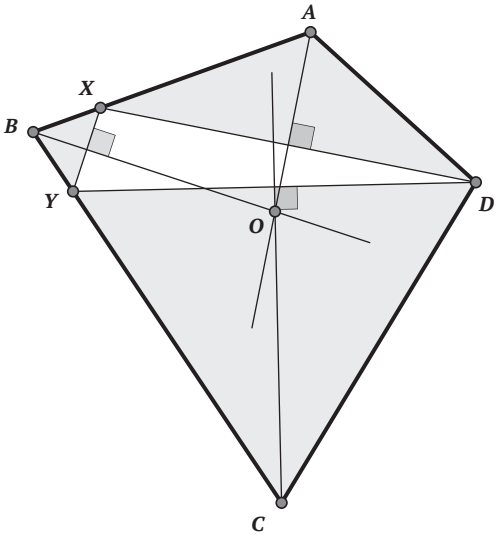


Рисунок 133c-P

Пример 134. Линия Ньютона во вписанном четырехугольнике

Как мы знаем из решения примера 132, точка O лежит на линии Ньютона четырехугольника $ABCD$ тогда и только тогда, когда

площадь треугольника [OAB] + площадь треугольника [OCD] =
площадь треугольника [OBC] + площадь треугольника [ODA] =
½ площади четырехугольника [$ABCD$].

На рис. 134-Р мы провели линии, соединяющие точку O с вершинами четырехугольника $ABCD$, а также высоты OE, OF, OG и OH треугольников OAB, OBC, OCD и ODA соответственно. Поскольку точки E, F, G и H лежат на общей окружности с центром O, то верно равенство $OE = OF = OG = OH = r$, и, следовательно, выполняется соотношение

площадь треугольника [OAB] + площадь треугольника [OCD] =
$\frac{1}{2}AB \cdot OE + \frac{1}{2}CD \cdot OG = \frac{1}{2}r\,(AB + CD) = \frac{1}{2}r(BC + DA) = \frac{1}{2}BC \cdot OF + \frac{1}{2}DA \cdot OH =$
площадь треугольника [OBC] + площадь треугольника [ODA].

Это означает, что точка O должна лежать на линии Ньютона.

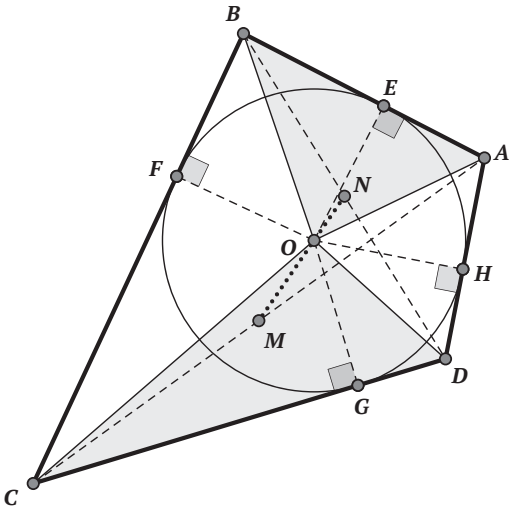


Рисунок 134-Р

Пример 135. Подробнее о линии Ньютона в четырехугольнике со вписанной окружностью

На рис. 135-P сначала вспомним, что параллелограмм Вариньона *WXYZ* в четырехугольнике *ABCD* образуется путем соединения середин сторон четырехугольника и может быть установлен следующим образом. В любом треугольнике линия, соединяющая середины двух сторон треугольника, равна половине длины треугольника и параллельна третьей стороне. В треугольнике *ABD* у нас $WZ = \frac{1}{2}BD$ и параллельны отрезки $WZ||BD$, а в треугольнике *CDB* у нас $XY = \frac{1}{2}BD$ и параллельны отрезки $XY||BD$.

Таким образом, четырехугольник *WXYZ* является параллелограммом с параметрами $WZ = XY$ и $WZ||XY$, диагонали которого *XZ* и *WY* делят друг друга пополам. Аналогично четырехугольник *WMYN* также является параллелограммом, поскольку в треугольнике *CDA* мы получаем соотношение $MY = \frac{1}{2}AD$ и $MY||AD$, а в треугольнике *ABD* выполняется соотношение $WN = \frac{1}{2}AD$ и $WN||AD$. Кроме того, четырехугольник *XMZN* также является параллелограммом, поскольку в треугольнике *CBA* верно выражение $XM = \frac{1}{2}AB$ и $XM||AB$, а в треугольнике *DBA* выполняется условие $ZN = \frac{1}{2}AB$ и $ZN||AB$. Диагонали в каждом из этих параллелограммов также делят друг друга пополам, так что *MN* и *WY* делят друг друга пополам в точке *G*, а отрезки *XZ* и *MN* делят друг друга пополам в точке *G*. Следовательно, точка *G* является общей точкой деления пополам отрезков *MN*, *XZ* и *WY*.

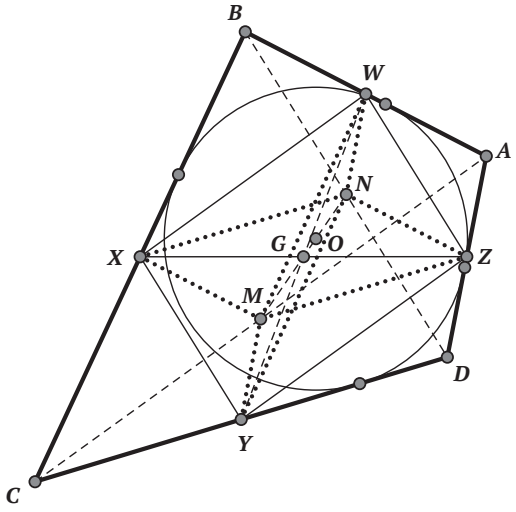


Рисунок 135-P

Пример 136. Поиск площади треугольника, составляющей одну четверть площади соответствующего четырехугольника

Начнем с построения прямых *MD*, *MB*, *NA* и *NC*, как показано на рис. 136-P. Поскольку отрезок *EM* является медианой треугольника *ACE*, мы имеем соотношение: площадь треугольника [*EMC*] = ½ площади треугольника [*EAC*]. Аналогично поскольку отрезок *BM* является медианой треугольника *ABC*, мы имеем:

площадь треугольника [*BCM*] = ½ площади треугольника [*ABC*].

Следовательно, выполняется соотношение

площадь треугольника [*EMC*] + площадь треугольника [*BCM*] = ½ · (площадь треугольника [*EAC*] + площадь треугольника [*ABC*]) = площадь [*EBC*]. (I)

Также отрезок *DM* является медианой треугольника *ACD*, что дает: площадь треугольника [*DMC*] = ½ площади треугольника [*ACD*]. Следовательно, верно выражение

площадь треугольника [*DMC*] + площадь треугольника [*BCM*] = ½ · (площадь треугольника [ACD] + площадь треугольника [ABC]) = ½ площади четырехугольника [*ABCD*]. (II)

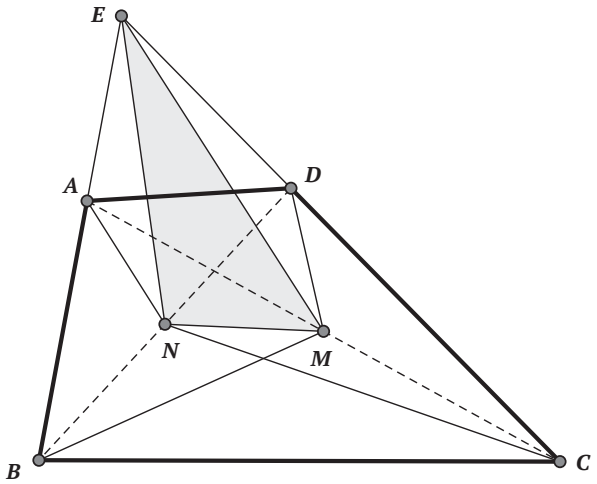


Рисунок 136-P

Вычитая (II) из (I), получаем выражение:

площадь треугольника [*EMD*] = площадь треугольника [*EMC*] – площадь треугольника [*DMC*] = ½ · (площадь треугольника [*EBC*] – площадь четырехугольника [*ABCD*]) = ½ площади треугольника [*EAD*].

Аналогичным образом на другой стороне треугольника *EBC* получаем выражение:

площадь треугольника [*EAN*] = площадь треугольника [*EBN*] – площадь треугольника [*ABN*] = ½ · (площадь треугольника [*EBC*] – площадь четырехугольника [*ABCD*]) = ½ площади треугольника [*EAD*].

Далее отметим, что у нас также верно выражение

площадь четырехугольника [*ABCN*] = площадь треугольника [*ABN*] + площадь треугольника [*NBC*] = ½ · (площадь треугольника [*ABD*] – площадь треугольника [*DBC*]) = ½ площади четырехугольника [*ABCD*],

поскольку *AN* – медиана в треугольнике *ABD*, а *CN* – медиана в треугольнике *CDB*.

Это означает, что

площадь четырехугольника [*EANC*] = площадь треугольника [*EAD*] + площадь треугольника [*ANDC*] = площадь треугольника [*EAD*] + ½ площади четырехугольника [*ABCD*],

и мы можем записать выражение:

½ площади четырехугольника [*ABCD*] = площадь четырехугольника [*EANC*] – площадь треугольника [*EAD*] = площадь четырехугольника [*EANC*] – ½ площади треугольника [EAD] – ½ площади треугольника [EAD] = площадь четырехугольника [EANC] – площадь треугольника [*EMD*] – площадь треугольника [*EAN*] = площадь треугольника [*ENM*] + площадь треугольника [*DMC*] + площадь треугольника [*NCM*].

В качестве заключительного шага отметим, что

площадь треугольника [*DMC*] + площадь треугольника [*NMC*] = ½ · (площадь треугольника [*DAC*] + площадь треугольника [*NCA*]) = ½ площади четырехугольника [*ANCD*] = ¼ площади четырехугольника [*ABCD*] = площадь треугольника [*ENM*] + ¼ площади четырехугольника [*ABCD*],

или выполняется выражение:

площадь треугольника [*ENM*] = ¼ площади четырехугольника [*ABCD*].

Пример 137. Середины диагоналей полного четырехугольника

В примере 136 мы установили, что площадь треугольника [*ENM*] = ¼ площади четырехугольника [*ABCD*]. Мы можем аналогично показать, что площадь треугольника [*FMN*] = ¼ площади четырехугольника [*ABCD*], и мы приходим к равенству площадь треугольника [*ENM*] = площади треугольника [*FMN*]. Поскольку треугольники имеют общее основание *MN*, их высоты до этого основания равны, и мы имеем равенство отрезков *EK* = *FL*. Прямоугольные треугольники *REK* и *RFL* также имеют равные вертикальные углы в точке *R*, и они, таким образом, конгруэнтны, так что *RK* = *RL*. Следовательно, точка *R* является серединой отрезка *KL*, что означает, что точки *N*, *K* и *R* коллинеарны.

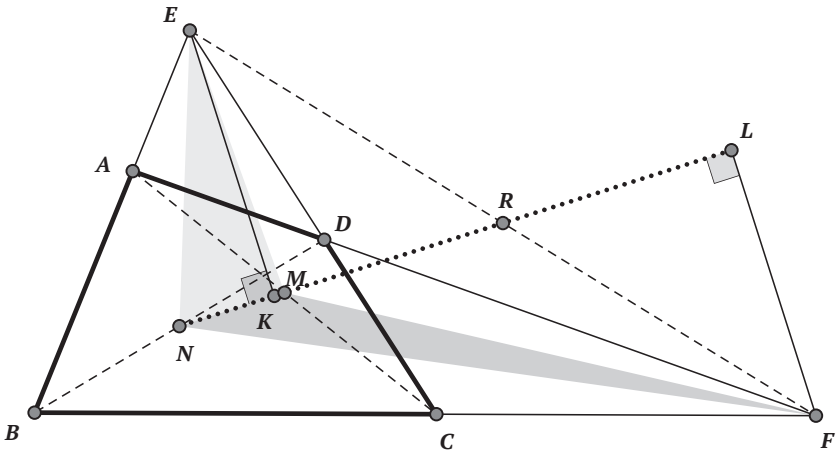


Рисунок 137-Р

Пример 138. Разделение четырехугольника на четыре равные области

Обращаясь к рис. 138-Р, мы покажем, что площадь четырехугольника [*AWPZ*] = ¼ площади четырехугольника [*ABCD*], и этот метод доказательства затем будет применен к трем другим площадям четырехугольников.

Как мы видим на рисунке, отрезок *WZ* делит четырехугольник *AWPZ* на два треугольника таким образом, что

площадь четырехугольника [*AWPZ*] = площадь треугольника [*AWZ*] + площадь треугольника [*PZW*].

Поскольку точка *W* является серединой стороны *AB*, а точка *Z* – серединой стороны *AD*, треугольники *AWZ* и *ABD* подобны, причем стороны треугольника Δ*AWZ* равны половине длины соответствующих сторон треугольника Δ*ABD*. Это дает нам соотношение: площадь треугольника [*AWZ*] = ¼ площади треугольника [*ABD*].

Теперь рассмотрим треугольник *MZW*. Поскольку точка *M* также является серединой стороны *AC*, то треугольник *MZW* получается из треугольника *CDB* путем гомотетии (см. «Инструментарий») с центром *A* и множителем ½, что означает, что площадь треугольника [*MZW*] = ¼ площади треугольника [*CDB*]. Поскольку отрезок *PM* параллелен стороне *WZ*, треугольники *PZW* и *MZW* имеют равную площадь, и мы получаем выражение:

площадь четырехугольника [*AWPZ*] = площадь треугольника [*AWZ*] +
площадь треугольника [*PZW*] = площадь треугольника [*AWZ*] +
площадь треугольника [*MZW*] = ¼ площади треугольника [*ABD*] +
¼ площади треугольника [*CBD*] = ¼ площади четырехугольника [*ABCD*].

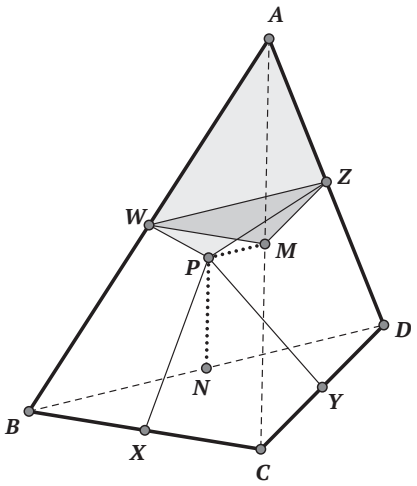


Рисунок 138-P

Поскольку аналогичным образом мы можем также показать, что

площадь четырехугольника [*BXPW*] = площадь четырехугольника [*CYPX*] +
площадь четырехугольника [*DZPY*] = ¼ площади четырехугольника [*ABCD*],

мы, следовательно, получаем выражение:

площадь четырехугольника [*AWPZ*] =
площади четырехугольника [*BXPW*] =
площади четырехугольника [*CYPX*] =
площади четырехугольника [*DZPY*].

Пример 139. Разделение четырехугольника на две пары треугольников равной площади

Как показано на рис. 139-P, мы обозначаем точку пересечения диагоналей AC и BD как точку S, а расстояния от S до вершин четырехугольника обозначим как $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ и $SD = d$. Кроме того, для упрощения обозначений мы обозначим s площадь треугольника SMN. Для последующих вычислений будет полезно отметить, что $MA = MC = ½(a + c)$, $SM = ½(a - c)$, $MB = ½(b + d)$ и $SN = ½(b - d)$, поскольку точка M – середина стороны AC, а точка N – середина стороны BD. (Мы предполагаем, без потери общности, что $a \geqslant c$ и $b \geqslant d$.)

Теперь рассмотрим треугольник SAN. Поскольку треугольники SAN и SMN имеют общую сторону SN, а точки S, M и A лежат на одной прямой, то верно выражение:

$$\text{площадь треугольника } [SAN] = \text{площадь треугольника } [SMN] \cdot \frac{SA}{SM} = s \cdot \frac{a}{\frac{a-c}{2}} = \frac{2as}{a-c}.$$

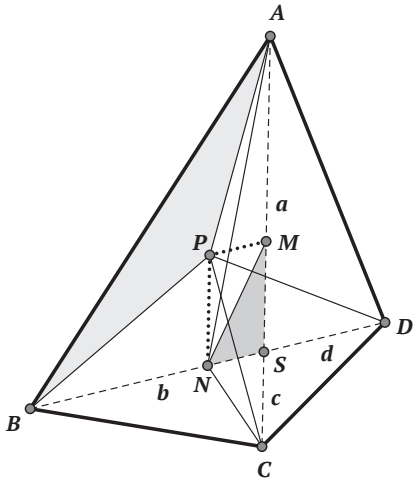


Рисунок 139-P

Аналогично рассуждая, мы также получаем выражение:

$$\text{площадь треугольника } [SAB] = \text{площадь треугольника } [SAN] \cdot \frac{SB}{SN} =$$

$$\frac{2as}{a-c} \cdot \frac{b}{\frac{b-d}{2}} = \frac{4abs}{(a-c)(b-d)}.$$

Поскольку отрезки равны $SN = MP$, $SN \| MP$ и точки S, M и A коллинеарны, то верно выражение:

$$\text{площадь треугольника } [MAP] = \text{площадь треугольника } [SMN] \cdot \frac{MA}{SM} = s \cdot \frac{\frac{a+c}{2}}{\frac{a-c}{2}} = \frac{(a+c)s}{a-c}.$$

Так как отрезки равны $SM = NP$, $SM \| NP$ и S, N B коллинеарны, также выполняется соотношение:

$$\text{площадь треугольника } [MAP] = \text{площадь треугольника } [SMN] \cdot \frac{NB}{SN} = s \cdot \frac{\frac{b+d}{2}}{\frac{b-d}{2}} = \frac{(b+d)s}{b-d}.$$

Диагональ NM делит параллелограмм $SMPN$ на два треугольника равной площади. Если углы равны, то площадь четырехугольника $[SMPN] = 2$ площади треугольника $[SMN] = 2s$, и это приводит к выражению:

$$\begin{gathered}\text{площадь треугольника } [PAB] = \text{площадь треугольника } [SAB] - \\ \text{площадь треугольника } [MAP] - \text{площадь треугольника } [NPB] - \\ \text{площадь четырехугольника } [SMPN] = \\ \frac{4abs}{(a-c)(b-d)} - \frac{(a+c)s}{a-c} - \frac{(b+d)s}{b-d} - 2s = \frac{(2ad+2bc)s}{(a-c)(b-d)}.\end{gathered}$$

Аналогичным образом площадь треугольника SCD теперь можно выразить через те же переменные. Для этого сначала рассмотрим треугольник SNC. Поскольку треугольники SNC и SMN имеют общую сторону SN, а точки S, M и C коллинеарны, то выполняется соотношение:

$$\text{площадь треугольника } [SNC] = \text{площадь треугольника } [SMN] \cdot \frac{SC}{SM} = s \cdot \frac{c}{\frac{a-c}{2}} = \frac{2cs}{a-c}.$$

Применяя те же рассуждения, что и выше, получаем выражение:

$$\text{площадь треугольника } [SDC] = \text{площадь треугольника } [SNC] \cdot \frac{SD}{SN} = \frac{2cs}{a-c} \cdot \frac{d}{\frac{b-d}{2}} = \frac{4cds}{(a-c)(b-d)}.$$

Поскольку M – середина стороны AC, мы имеем

$$\text{площадь треугольника } [MPC] = \text{площадь треугольника } [MAP] = \frac{(a+c)s}{a-c},$$

а поскольку N – середина BD, мы также имеем

площадь треугольника [*PND*] = площадь треугольника [*PBN*] = $\frac{(b+d)s}{b-d}$.

Мы используем эти выводы, чтобы получить выражение:

площадь треугольника [*PCD*] = площадь треугольника [*SCD*] + площадь треугольника [*MPC*] + площадь треугольника [*PND*] – площадь четырехугольника [*SMPN*] =

$$\frac{4cds}{(a-c)(b-d)} - \frac{(a+c)s}{a-c} - \frac{(b+d)s}{b-d} - 2s = \frac{(2ad+2bc)s}{(a-c)(b-d)}.$$

Площади обоих треугольников *PAB* и *PCD* равны, поскольку каждая из них равна $\frac{(2ad+2bc)s}{(a-c)(b-d)}$.

Рассуждение для другой пары противоположных треугольников, *PBC* и *PDA*, весьма аналогично. Применяя аналогичное рассуждение, как и прежде, мы получаем

площадь треугольника [*SBC*] = площадь треугольника [*SNC*] $\cdot \frac{SB}{SN}$ =

$$\frac{2cs}{a-c} \cdot \frac{b}{\frac{b-d}{2}} = \frac{4bcs}{(a-c)(b-d)}.$$

и далее

площадь треугольника [*PBC*] = площадь треугольника [*SBC*] – площадь треугольника [*PCM*] + площадь треугольника [*PBN*] + площадь четырехугольника [*SMPN*] =

$$\frac{4bcs}{(a-c)(b-d)} - \frac{(a+c)s}{a-c} - \frac{(b+d)s}{b-d} + 2s = \frac{(2ad+2cd)s}{(a-c)(b-d)}.$$

Аналогичным способом получаем

площадь треугольника [*SDA*] = площадь треугольника [*SAN*] $\cdot \frac{SD}{SN}$ =

$$\frac{2as}{a-c} \cdot \frac{d}{\frac{b-d}{2}} = \frac{4ads}{(a-c)(b-d)},$$

и, следовательно,

площадь треугольника [*PDA*] = площадь треугольника [*SDA*] + площадь треугольника [*PMA*] – площадь треугольника [*PND*] + площадь четырехугольника [*SMPN*] =

$$\frac{4ads}{(a-c)(b-d)} + \frac{(a+c)s}{a-c} - \frac{(b+d)s}{b-d} + 2s = \frac{(2ab+2cd)s}{(a-c)(b-d)}.$$

Поскольку площади треугольников *PBC* и *PDA* равны выражению $\frac{(2ab+2cd)s}{(a-c)(b-d)}$, то площади этих двух треугольников равны.

Пример 140. Окружность со вписанным и описанным четырехугольниками образует коллинеарные точки

На рис. 140-P мы определим точку S' как точку пересечения прямых *BC* и *EG*, а точку S'' как точку пересечения прямых *AD* и *EG*. Мы покажем, что $S' = S''$. Для упрощения обозначим $EA = EB = w$, $FB = FC = x$ и $GC = GD = y$. Поскольку касательные из каждой точки вне окружности всегда имеют одинаковую длину, мы имеем $HD = HA = z$.

Применяя теорему Менелая (см. «Инструментарий») к отрезку *BC* относительно треугольника *EFG*, получаем выражение $\frac{FB}{BE} \cdot \frac{GC}{CF} \cdot \frac{ES'}{GS'} = 1$, которое можно записать как $\frac{x}{w} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{ES'}{GS'} = 1$, или $\frac{ES'}{GS'} = \frac{w}{y}$. Аналогично, применяя теорему Менелая к отрезку *AD* относительно треугольника *EGH*, получаем выражение $\frac{HA}{AE} \cdot \frac{ES''}{GS''} \cdot \frac{GD}{DH} = 1$, которое можно записать как $\frac{z}{w} \cdot \frac{ES''}{GS''} \cdot \frac{y}{z} = 1$, или $\frac{ES''}{GS''} = \frac{w}{y}$. Поскольку выполняется соотношение $\frac{ES'}{GS'} = \frac{w}{y} = \frac{ES''}{GS''}$, мы получаем $S' = S'' = S$ и видим, что точка пересечения прямых *BC* и *AD* лежит на прямой *EG*.

Аналогично мы можем применить теорему Менелая к прямым *AB* и *CD* в треугольниках *HEF* и *HFG* соответственно и найти, что точка пересечения *R* прямых *AB* и *CD* лежит на прямой *FH*.

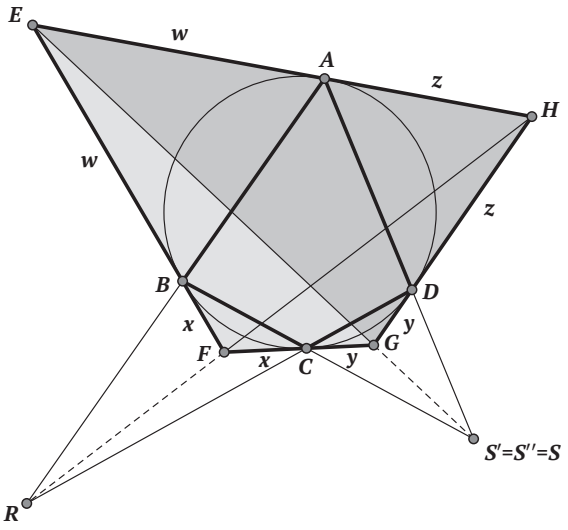


Рисунок 140-P

3

ИНСТРУМЕНТАРИЙ

Введение: инструментарий геометрии

В интересах предоставления читателям всего необходимого «оборудования» для доказательств в этой книге и учитывая тот факт, что некоторые читатели могли забыть некоторые основы из программы средней школы по геометрии, мы представляем этот «Инструментарий». Данный материал содержит ряд элементарных понятий, которые помогут оценить удивительные взаимосвязи, с которыми, как мы надеемся, вы с удовольствием познакомились в первой части нашей книги. Сначала мы рассмотрим некоторые факты и принципы, которые вы должны знать из уроков геометрии.

Результаты в данной части представлены без доказательств, в расчете на память читателей и предыдущий опыт. Естественно, любой учебник геометрии для старшей школы обеспечит дальнейшее понимание этих основных понятий. Далее мы представим ряд более сложных теорем из базовой тригонометрии и продвинутой евклидовой геометрии, которые могут быть знакомы одним читателям и менее знакомы другим, но тем не менее легко понятны. Доказательства, сопровождающие эти теоремы, требуют лишь знания основных понятий из школьной геометрии. Для краткости доказательства приводятся для наиболее общих случаев, в то время как для специальных конфигураций могут потребоваться дополнительные шаги. Заинтересованные читатели при желании могут изучить некоторые из этих аспектов. Свойства во второй части «Инструментария» сами по себе являются замечательными «четырехугольными примерами» и могли бы быть включены в основной материал этой книги. Они считаются «инструментами», потому что полезны в более сложных геометрических доказательствах. Конечно, это еще больше усиливает завораживающую красоту евклидовой геометрии!

A. Инструменты, с которыми читатели, вероятно, знакомы из курса геометрии для старшей школы

A1. Конгруэнтность треугольников

Конгруэнтность треугольников можно доказать, показав, что соответствующие части равны:

- Две стороны и угол между ними (*SAS*).
- Два угла и сторона, примыкающая к ним (*ASA*).
- Два угла и сторона, не примыкающая к ним (*AAS*).
- Три стороны (*SSS*).
- Для прямоугольных треугольников: гипотенуза и катет (*HL*).

A2. Подобие треугольников

Подобие треугольников можно доказать, показав любое из следующих свойств эквивалентности:

- Соответствующие углы равны (*AAA*).
- Соответствующие стороны пропорциональны.
- Две пары соответствующих сторон пропорциональны, и примыкающие углы равны.

A3. Свойства прямоугольного треугольника (см. рис. A3)

Для описания следующих свойств мы будем использовать прямоугольный треугольник ABC с прямым углом в точке C. Длины сторон, противоположных вершинам A, B и C, обозначены как a, b и c соответственно. Высота CD, лежащая на гипотенузе, имеет длину h и делит гипотенузу на отрезки AD и DB, длины которых равны p и q соответственно.

- Теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы: $a^2 + b^2 = c^2$.
- Квадрат высоты h, лежащей на гипотенузе, равен произведению длин отрезков p и q на гипотенузе: $h^2 = p \cdot q$.
- Квадрат длины a катета равен произведению длины c гипотенузы и прилежащего к ней отрезка высоты q: $a^2 = c \cdot q$, также $b^2 = c \cdot p$.
- Медиана CM, примыкающая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине длины c гипотенузы.

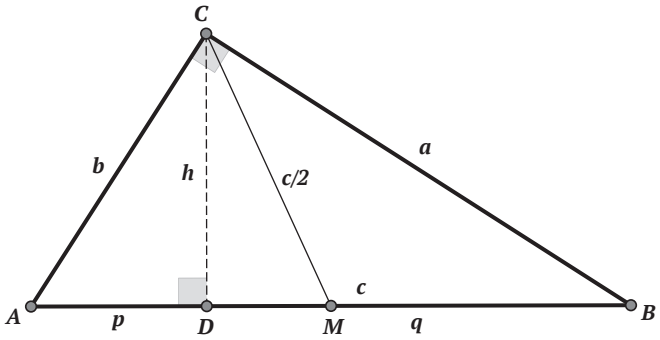


Рисунок А3

А4. Углы, связанные с окружностью (см. рис. А4)

Эти соотношения приведены в двух различных общепринятых обозначениях, среди множества используемых на международном уровне, в надежде, что одно из них будет достаточно знакомо любому читателю.

- Вписанный угол: $\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ (или $CAB = \frac{1}{2}COB$).
- Угол, образованный двумя секущими: $\angle F = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DE})$ (или $\angle CFB = \frac{1}{2} \cdot (\angle COB - \angle EOD)$).
- Угол, образованный двумя касательными: $\angle J = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{HAK} - \overset{\frown}{HCK}) = 180° - \overset{\frown}{HCK}$ (или $\angle HJK = \frac{1}{2}\,(180° - \angle KOH)$).
- Угол, образованный секущей и касательной: $\angle L = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CK} - \overset{\frown}{NK})$ (или $\angle KLC = \frac{1}{2}(\angle KOC - \angle NOK)$).
- Угол, образованный двумя хордами, пересекающимися внутри окружности: $\angle AME = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{BC})$ (или $\angle AME = \frac{1}{2}(\angle AOE - \angle COB)$).
- Угол, образованный хордой и касательной: $JKC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{KC} = \angle KAC$ (или $JKC = \frac{1}{2}\,\angle KOC = \angle KAC$).
- Противоположные углы в окружности (т. е. противоположные углы вписанного четырехугольника): $\angle BCK = 180° - \angle KAB$.

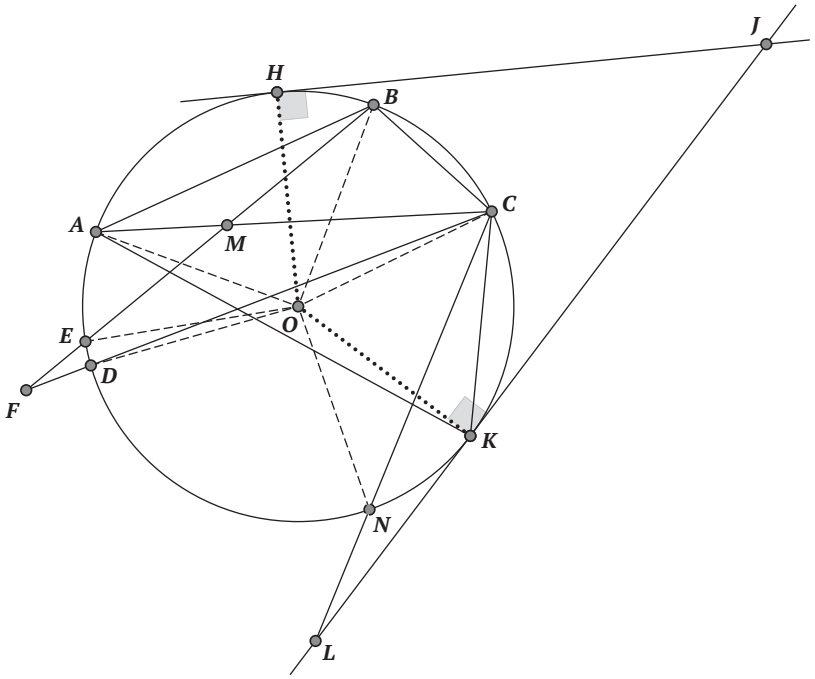


Рисунок А4

А5. Касательные, секущие и хорды: сегменты окружности и степень точки (см. рис. А5)

- Из одной и той же внешней точки касательная является средней пропорциональной между всей секущей и ее внешним сегментом: $\frac{e+f}{h} = \frac{h}{f}$.
- Из одной и той же внешней точки для двух секущих: произведение длины секущей и ее внешнего сегмента равно произведению длины другой секущей и ее внешнего сегмента: $(e + f) \cdot f = (g + k) \cdot k$.
- Для двух хорд, пересекающихся внутри окружности: произведение сегментов одной хорды равно произведению сегментов другой хорды: $a \cdot b = c \cdot d$.

Произведения $(e + f) \cdot f = (g + k) \cdot k$ и $a \cdot b = c \cdot d$ называются степенью точки пересечения секущих и хорд соответственно.

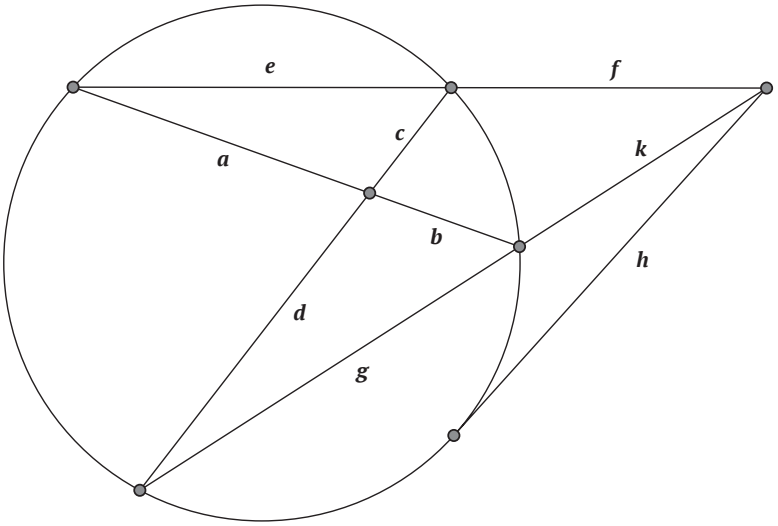


Рисунок А5

А6. Закон синусов и закон косинусов (см. рис. А6)

В треугольнике ABC обозначим a, b и c длины сторон, противолежащих вершинам A, B и C соответственно. Тогда верно соотношение $\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}$. Это соотношение известно как закон синусов.

Также верны формулы $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\angle ACB)$, и аналогично $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\angle BAC)$ и $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos(\angle CBA)$. Эти соотношения известны как закон косинусов.

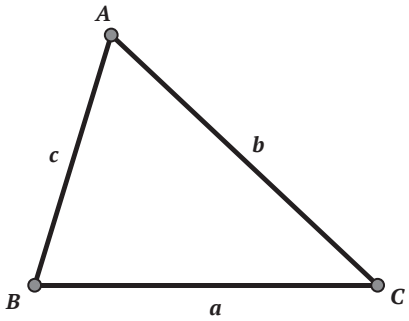


Рисунок А6

A7. Тождества для суммы и разности углов

Часто бывает полезно выразить синус или косинус суммы или разности двух углов через отдельные синусы и косинусы. Для этой цели мы можем использовать следующие тождества:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

B. Менее известные инструменты, однако полезные и увлекательные

B1. Биссектриса внутреннего угла треугольника

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит сторону, на которую она проведена, пропорционально двум смежным сторонам делимого угла. На рис. B1 прямая AD является биссектрисой угла $\angle BAC$, и, следовательно, $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$.

Доказательство. На рис. B1 прямая AD является биссектрисой угла $\angle BAC$ треугольника ABC. Прямая, параллельная AD и проходящая через точку B, пересекает продолжение стороны CA в точке E. Для упрощения мы отметили на рисунке четыре угла, все из которых равны. У нас $\angle ABE = \angle BAD$, поскольку это накрест внутренние углы параллельных прямых AD и BE. Кроме того, $\angle BEA = \angle DAC$, поскольку это соответствующие углы этих параллельных линий, и так как AD является биссектрисой $\angle BAC$, мы также имеем $\angle BAD = \angle DAC$. Следовательно, путем подстановки получаем $\angle BEA = \angle ABE$. Это дает равнобедренный треугольник ABE, где $AE = AB$. Поскольку треугольники EBC и ADC подобны, верна пропорция $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AE}$. Теперь подставим AB вместо AE, чтобы получить желаемый результат, а именно $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$.

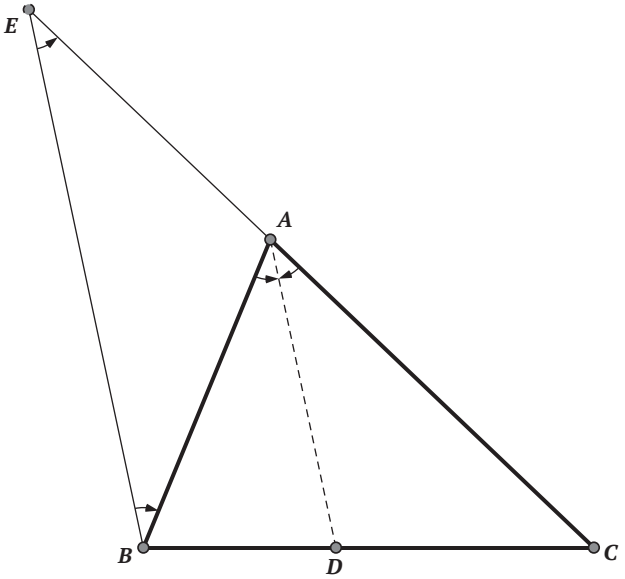


Рисунок B1

B2. Внешняя биссектриса угла в треугольнике

Внешняя биссектриса угла треугольника делит прямую, содержащую противоположную сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные двум смежным сторонам делимого угла. На рис. B2 прямая AD является биссектрисой угла $\angle EAB$, и, следовательно, верно соотношение $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$.

Доказательство. На рис. B2 прямая AD является биссектрисой внешнего угла $\angle EAB$ треугольника ABC. Прямая, параллельная AD и проходящая через точку B, пересекает сторону CA в точке E. Как и в предыдущем доказательстве, мы отметили четыре угла на рисунке, все они равны. У нас $\angle ABE = \angle DAB$, так как это внутренние накрест лежащие углы параллельных прямых AD и BE. Кроме того, $\angle EAD = \angle AEB$ – соответствующие углы этих параллельных прямых, и поскольку AD – биссектриса $\angle EAB$, то $\angle EAD = \angle DAB$. Следовательно, подстановкой получаем $\angle AEB = \angle EBA$. Это дает равнобедренный треугольник ABE, где $AE = AB$. Поскольку треугольники EBC и ADC подобны, то верна пропорция $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AE}$. Подставляем AB вместо AE и снова получаем желаемый результат, а именно $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$.

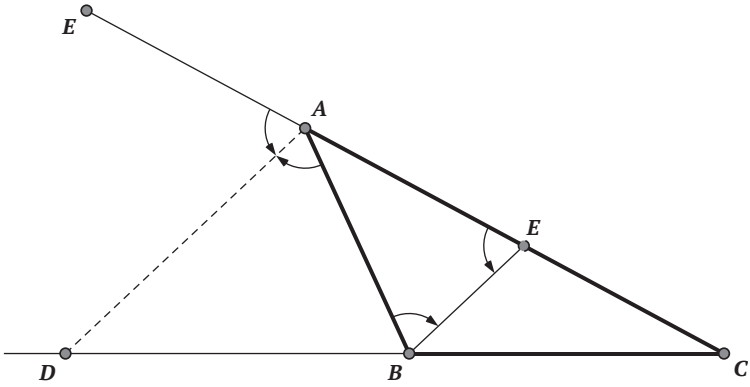


Рисунок B2

B3. Теорема Менелая

На рис. B3a изображен треугольник ABC с тремя точками D, E и F, лежащими на продолжениях сторон BC, CA и AB соответственно. Теорема Менелая гласит, что три точки D, E и F лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда произведения накрест лежащих отрезков, которые они образуют на сторонах треугольника, равны. Это можно выразить уравнением: $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$.

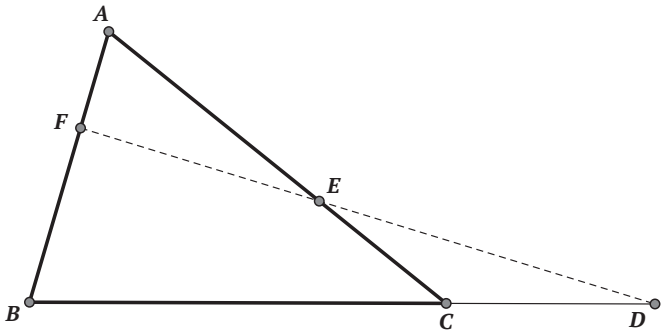


Рисунок B3a

Доказательство. Мы разделим это доказательство на несколько этапов. Прежде всего предположим, что D, E и F коллинеарны, и покажем, что из этого должно следовать $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$. На рис. B3b мы проводим прямую, проходящую через точку C, параллельную AB и пересекающую отрезок DEF в точке P.

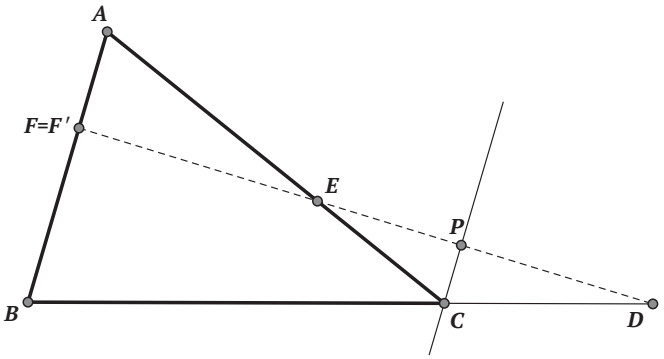


Рисунок B3b

Поскольку треугольники *PCD* и *FBD* подобны, то верны пропорции $\frac{CP}{BF} = \frac{CD}{BD}$, или $CP = \frac{BF \cdot CD}{BD}$. Кроме того, треугольники *PEC* и *FEA* также подобны, и, следовательно, верна формула $\frac{CP}{AF} = \frac{CE}{AE}$, или $CP = \frac{AF \cdot CE}{AE}$. Из этого следует соотношение $\frac{BF \cdot CD}{BD} = \frac{AF \cdot CE}{AE}$, что эквивалентно $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$. Это доказывает первую часть теоремы Менелая.

Далее, предположим, что $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$, и покажем, что точки *D*, *E* и *F* должны быть коллинеарными. Пусть точка пересечения *AB* и *DE* будет точкой F'. Тогда нам нужно доказать, что $F' = F$. Поскольку точки *D*, *E* и F' коллинеарны, мы только что показали, что выполняется соотношение $AF' \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF' \cdot CD$, которое также можно записать как $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF'}{AF'} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$. Так как мы предполагаем, что $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$, которое также можно записать как $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$, следовательно, мы имеем $\frac{BF'}{AF'} = \frac{BF}{AF}$, и таким образом мы показали, что $F = F'$.

В качестве последнего шага рассмотрим конфигурацию, изображенную на рис. B3c.

Здесь у нас есть треугольник *ABC* с тремя точками *D*, *E* и *F* на продолженных сторонах *BC*, *CA* и *AB* соответственно. В этой ситуации мы можем также показать, что три точки *D*, *E* и *F* коллинеарны тогда и только тогда, когда $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$. Доказательство в этом случае идентично ранее показанному. Мы видим, что теорему Менелая можно сформулировать в более общем виде следующим образом. Нам дан треугольник *ABC*. Точки *D*, *E* и *F* лежат на прямых *BC*, *CA* и *AB* соответственно. Эти точки коллинеарны тогда и только тогда, когда $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$, или верна пропорция $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$.

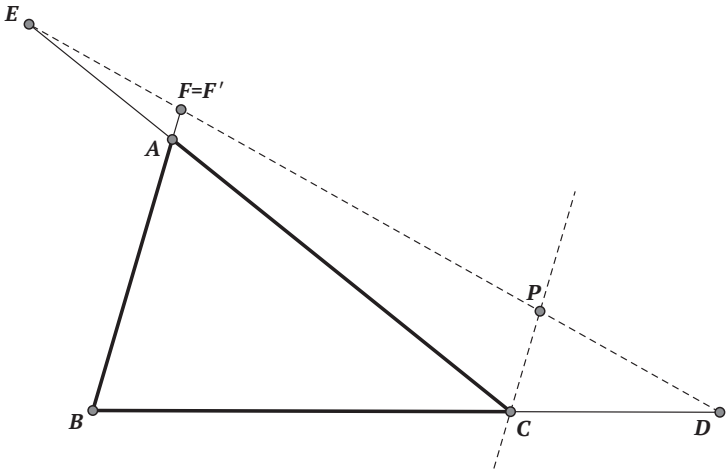


Рисунок B3c

B4. Теорема Чевы

Распространенная тема в геометрии треугольников касается прямых, соединяющих вершины треугольника с точками на противоположных сторонах. Такие прямые часто называют чевианами, в честь итальянского математика Джованни Чевы (1647–1734), опубликовавшего свою знаменитую теорему в 1678 году. Этот результат очень важен и приводит ко многим геометрическим чудесам. Теорема Чевы гласит, что три чевианы пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда произведение длин накрест лежащих отрезков, образованных точками соприкосновения на сторонах, равно. Это показано на рис. B4a, где треугольник *ABC* имеет чевианы *AD*, *BE* и *CF*, пересекающие стороны *BC*, *CA* и *AB* в точках *D*, *E* и *F* соответственно. На рисунке показано, что они пересекаются в общей точке *P*. Согласно теореме Чевы, отрезки Чевы *BC*, *CA* и *AB* пересекаются в общей точке *P* тогда и только тогда, когда верно выражение $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$, или, эквивалентно, $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$.

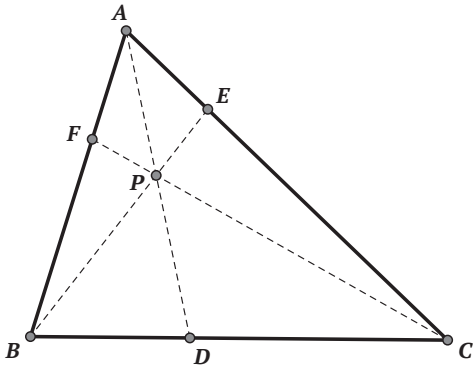


Рисунок B4a

Доказательство. Как и в случае доказательства теоремы Менелая, мы разделим это доказательство на этапы. Во-первых, предположим, что три чевианы *BC*, *CA* и *AB* пересекаются в общей точке *P*. Мы покажем, что выполняется соотношение $\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{CD}{BD}=1$. Для доказательства этого рассмотрим рис. B4b. Здесь, начиная с конфигурации на рис. B4a, мы добавили линию, параллельную стороне *BC*, проходящую через *A*. Эта линия пересекает продолжение отрезка *BE* в точке *R* и продолжение отрезка *CF* в точке *S*.

Параллельные линии позволяют нам установить несколько пар подобных треугольников и соотношения между длинами их сторон, вытекающие из этих подобий. Мы имеем соотношения:

$\Delta AER - \Delta CEB$, следовательно, $\frac{AE}{CE}=\frac{AR}{BC}$, (I)

$\Delta BCF - \Delta ASF$, следовательно, $\frac{BF}{AF}=\frac{BC}{AS}$, (II)

$\Delta CPD - \Delta SPA$, следовательно, $\frac{CD}{AS}=\frac{DP}{AP}$, (III)

$\Delta BDP - \Delta RAP$, следовательно, $\frac{BD}{AR}=\frac{DP}{AP}$. (IV)

Из формул (III) и (IV) получаем $\frac{CD}{AS}=\frac{BD}{AR}$, или $\frac{CD}{BD}=\frac{AS}{AR}$. (V)

Теперь умножим (I), (II) и (V), чтобы получить желаемый результат: $\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{CD}{BD}=\frac{AR}{BC}\cdot\frac{BC}{AS}\cdot\frac{AS}{AR}=1.$

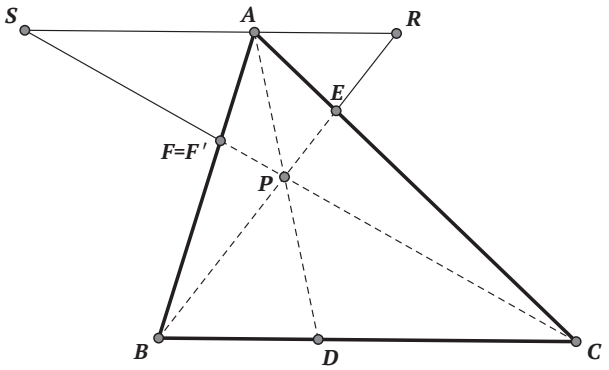


Рисунок B4b

Далее предположим, что точки D, E и F заданы на сторонах BC, CA и AB соответственно треугольника ABC, причем верно условие $\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{CD}{BD}=1$. Мы хотим показать, что отрезки AD, BE и CF пересекаются в общей точке P. Предположим, что AD и BE пересекаются в точке P. Проведем отрезок CP и назовем точку его пересечения F' с точкой AB. Поскольку AD, BE и CF' являются параллельными, мы можем использовать часть теоремы Чевы, которую уже доказали, чтобы утверждать, что верна формула $\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BF'}{AF'}\cdot\frac{CD}{BD}=1$. Так как наша гипотеза гласит, что верно соотношение $\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{CD}{BD}=1$, то мы приходим к результату $\frac{BF'}{AF'}=\frac{BF}{AF}$, и, таким образом, совпадают $F=F'$, доказывая параллельность.

B5. Расширенная теорема Чевы

Теорема Чевы также верна, даже когда чевианы пересекаются вне треугольника. На рис. B5a чевианы AD, BE и CF пересекают стороны BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Здесь конфигурация такова, что они пересекаются вне треугольника. В этом случае также верно, что AD, BE и CF пересекаются в общей точке P тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{CD}{BD}=1$.

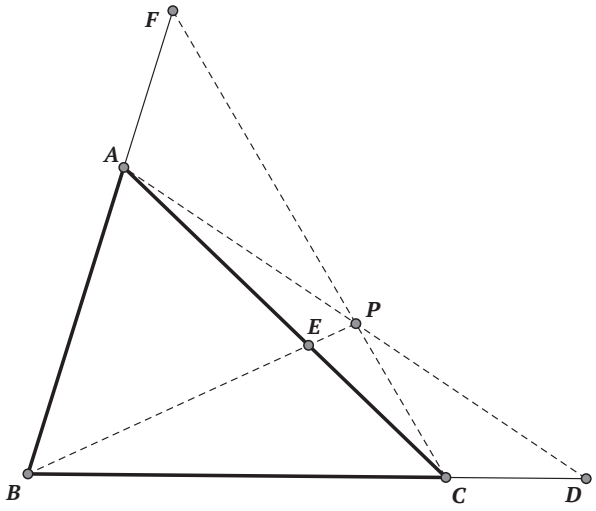


Рисунок B5a

Доказательство. Доказательство в этом случае идентично доказательству, когда точка P находится внутри области ABC. На рис. B5b мы добавили точки R и S так же, как на рис. B4b, и доказательство из B4 идентично для этой конфигурации.

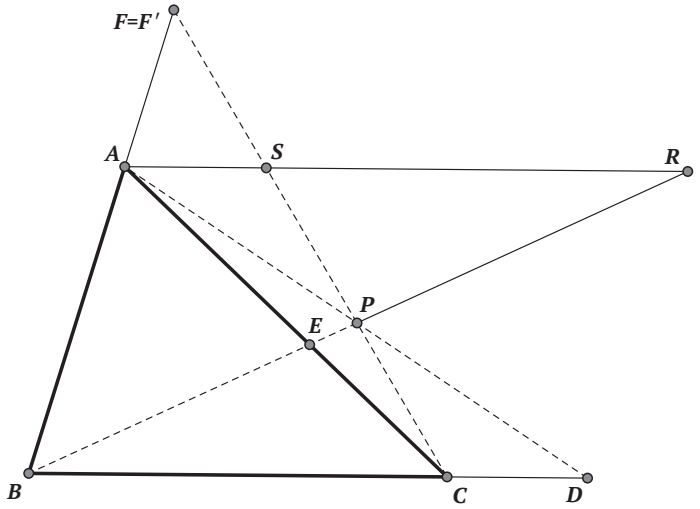


Рисунок B5b

B6. Теорема Дезарга

Французский математик Жерар Дезарг (1591–1661) впервые представил это полезное геометрическое соотношение в книге под названием «Manière universelle de M. Desargues, pour pratiquer la perspective» («Универсальный метод г-на Дезарга для отработки навыков понимания перспективы»). Оно включает в себя два треугольника, расположенные таким образом, что три прямые, соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке. Примечательно, что в этом случае пары соответствующих сторон пересекаются в трех коллинеарных точках. На рис. B6 треугольники ΔABC и $\Delta A'B'C'$ расположены таким образом, что прямые, соединяющие соответствующие вершины AA', BB' и CC', пересекаются в одной точке. Таким образом, пары соответствующих сторон пересекаются в трех коллинеарных точках. Другими словами, точка Q, в которой пересекаются BC и $B'C'$, точка R, в которой пересекаются CA и $C'A'$, и точка S, в которой пересекаются AB и $A'B'$, лежат на одной прямой.

Обратное утверждение также верно. Если два треугольника ABC и $A'B'C'$ расположены таким образом, что точки Q, R и S лежат на одной прямой, то прямые AA', BB' и CC' содержат общую точку P.

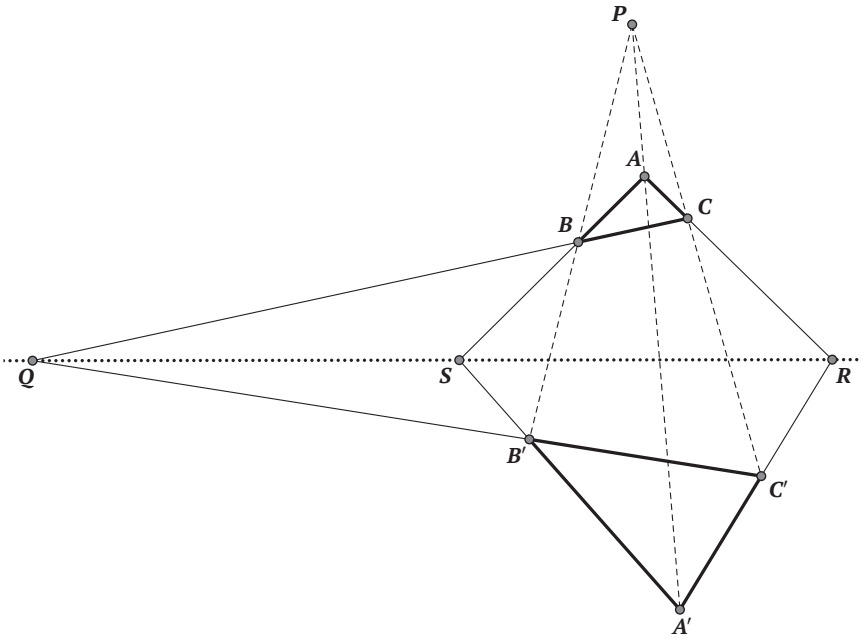


Рисунок B6

Доказательство. Мы докажем теорему Дезарга, применив теорему Менелая несколько раз. Рассмотрим прямую QBC как трансверсаль треугольника $\Delta PB'C'$.

Из теоремы Менелая следует, что выполняется

$$\frac{PB}{BB'} \cdot \frac{B'Q}{QC'} \cdot \frac{C'C}{CP} = 1. \qquad \text{(I)}$$

Аналогично, рассматривая отрезок SBA как трансверсаль треугольника $\Delta PB'A'$, получаем выражение

$$\frac{PA}{AA'} \cdot \frac{A'S}{SB'} \cdot \frac{B'B}{BP} = 1. \qquad \text{(II)}$$

Рассматривая отрезок RCA как трансверсаль треугольника $\Delta PA'C'$, получаем формулу

$$\frac{PC}{CC'} \cdot \frac{C'R}{RA'} \cdot \frac{A'A}{AP} = 1. \qquad \text{(III)}$$

Мы умножаем (I), (II) и (III), чтобы получить

$$\left(\frac{PB}{BB'} \cdot \frac{B'Q}{QC'} \cdot \frac{C'C}{CP}\right) \cdot \left(\frac{PA}{AA'} \cdot \frac{A'S}{SB'} \cdot \frac{B'B}{BP}\right) \cdot \left(\frac{PC}{CC'} \cdot \frac{C'R}{RA'} \cdot \frac{A'A}{AP}\right) = 1,$$

или

$$\frac{B'Q}{QC'} \cdot \frac{A'S}{SB'} \cdot \frac{C'R}{RA'} = 1.$$

Таким образом, согласно теореме Менелая, примененной к $\Delta A'B'C'$, точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

Теперь остается доказать обратное утверждение. Предположим, что ABC и $A'B'C'$ расположены так, что точки Q, R и S лежат на общей прямой, мы хотим показать, что прямые AA', BB' и CC' содержат общую точку P. Несколько неожиданно, это является непосредственным следствием того, что мы только что доказали.

Рассмотрим треугольники $SB'B$ и RCC'. Исходя из наших предположений, мы знаем, что прямые BC, $B'C'$ и RS имеют общую точку Q. Из доказанной нами версии теоремы Дезарга мы знаем, что пары соответствующих сторон $SB'B$ и RCC' пересекаются в трех коллинеарных точках. Другими словами, точка P, в которой пересекаются BB' и CC', точка A, в которой пересекаются отрезки BS и CR, и точка A', в которой пересекаются $B'S$ и $C'R$, являются коллинеарными. Следовательно, прямые AA', BB' и CC' проходят через общую точку P.

B7. Изометрии: отражение и вращение

В ходе геометрического доказательства часто бывает полезно определить точечное преобразование, которое отображает конфигурацию точек на конгруэнтную конфигурацию. Такие преобразования известны как *изометрии*. Определяющей характеристикой изометрии является то, что она отображает каждую точку на плоскости на единственную точку таким образом, что расстояние между любыми двумя точками равно расстоянию между их изображениями. Это означает, что любая геометрическая фигура всегда будет отображаться на конгруэнтную фигуру с помощью изометрии.

Два важных примера изометрий – это отражения и вращения. Они проиллюстрированы на следующих рисунках. На рис. B7a мы видим отражение, определяемое прямой l. Мы говорим, что точка P отражается от прямой l на точку P', где P' – точка, симметричная P относительно l. Из точки P проводится прямая, перпендикулярная прямой l, проходящая через точку P.

Точка P пересекает прямую l в точке L. Точка P' определяется как точка, лежащая на этой прямой, в которой $LP = LP'$ и $P \neq P'$. (Обратите внимание, что если точка P лежит на прямой l, то мы определяем $P = P'$.)

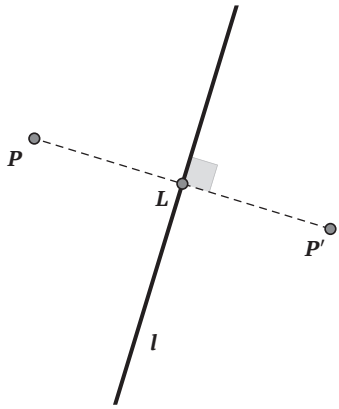


Рисунок B7a

На рис. B7b показано вращение, определяемое центром *O* и углом θ. Мы говорим, что точка *P* вращается вокруг точки *O* на угол *θ* и оказывается в точке *P′*. Из точки *P* проводится отрезок *OP*. Точка *P′* определяется как точка, в которой $\angle POP' = \theta$ и $OP = OP'$. (Обратите внимание, что для полноты картины мы определяем, что точка *O* вращается сама на себя, независимо от величины угла *θ*.)

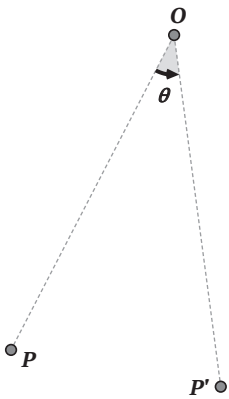


Рисунок B7b

Чтобы доказать, что эти преобразования действительно являются изометриями, мы должны показать, что все отрезки преобразуются в отрезки равной длины.

На рис. B7c мы видим отрезок *PQ*, отраженный относительно прямой *l* на отрезок *P′Q′*. Чтобы доказать, что $PQ = P'Q'$, мы проводим прямые *MP* и *MP′*, где *M* – точка пересечения прямой *l* и *QQ′*. Поскольку $LP = LP'$ и $PP' \perp LM = l$, треугольники *LPM* и *LMP′* конгруэнтны, и мы имеем $MP = MP'$ и $\angle LMP = \angle P'ML$. Это позволяет нам заметить, что $MQ = MQ'$, $\angle PMQ = \angle LMQ - \angle LMP = \angle Q'ML - \angle P'ML = \angle Q'MP'$ и $MP = MP'$, что показывает нам, что треугольники *MPQ* и *MQ'P'* также конгруэнтны. Из этого следует, что выполняется $PQ = P'Q'$.

Заметим, что здесь мы предположили, что точки P и Q лежат по одну сторону от l. Если они лежат по разные стороны от прямой l, или один или оба лежат на прямой l, то доказательство необходимо немного изменить, но это оставлено заинтересованному читателю в качестве простого упражнения.

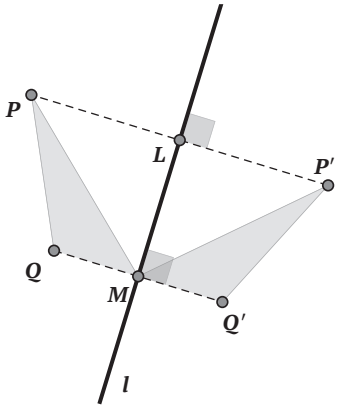


Рисунок B7c

Аналогично на рис. B7d мы видим отрезок PQ, повернутый вокруг оси O на отрезок $P'Q'$. Чтобы доказать, что $PQ = P'Q'$, рассмотрим треугольники OPQ и $OP'Q'$. Поскольку верны соотношения $OP = OP'$, $OQ = OQ'$ и $\angle POQ = \angle POP' - \angle QOP' = \theta - \angle QOP' = \angle QOQ' - \angle QOP' = \angle P'OQ'$, мы видим, что треугольники OPQ и $OP'Q'$ конгруэнтны. Из этого мы снова видим, что $PQ = P'Q'$. Как указано выше, отметим, что детали этого зависят от относительного положения точек, но полностью аналогичные доказательства будут работать и для любых других положений, и их рассмотрение остается на усмотрение заинтересованного читателя.

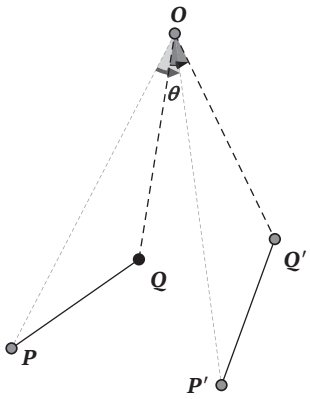


Рисунок B7d

B8. Гомотетия и подобие

Немного более общее преобразование точек, которое также часто бывает полезным, отображает конфигурацию точек на геометрически подобную конфигурацию. Такие преобразования известны как преобразования подобия. Определяющей характеристикой преобразования подобия является то, что оно отображает каждую точку на плоскости на единственную точку таким образом, что расстояние между любыми двумя точками, умноженное на константу, равно расстоянию между их отображениями. Это означает, что любая геометрическая фигура всегда будет отображена на подобную фигуру таким преобразованием. Важным примером преобразования подобия является гомотетия. Это показано на рис. B8a.

Гомотетия – это отображение точек P на плоскости на соответствующие точки P', для которых существует фиксированная точка O и фиксированный множитель a (то есть действительное число $a \neq 0$) такие, что $SP' = a \cdot SP$ для всех точек P.



Рисунок B8a

Наиболее важным свойством гомотетии является то, что она отображает любой отрезок PQ на отрезок $P'Q'$, причем $PQ \| P'Q'$ и $P'Q' = a \cdot PQ$. Чтобы доказать это, рассмотрим рис. B8b. Поскольку $OP' = a \cdot OP$ и $OQ' = a \cdot OQ$, а треугольники OPQ и $OP'Q'$ имеют общий угол в O, они подобны. Следовательно, верно выражение $\frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ} = \frac{P'Q'}{PQ}$, откуда следует, что $P'Q' = a \cdot PQ$. Кроме того, поскольку $\angle QPO = \angle Q'P'O$, мы также имеем $PQ \| P'Q'$.

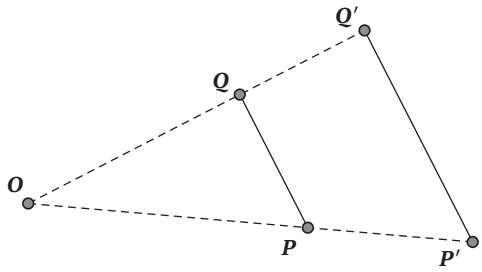


Рисунок B8b

B9. Теорема Симсона

Теорема Симсона гласит, что основания перпендикуляров, проведенных из любой точки описанной окружности треугольника к сторонам треугольника, коллинеарны. Это показано на рис. B9, где точка P – точка на описанной окружности треугольника ABC. Проведя $PX \perp BC$, $PY \perp CA$ и $PZ \perp AB$, с точкой X на отрезке BC, точкой Y на отрезке CA и точкой Z на отрезке AB, точки X, Y и Z коллинеарны независимо от положения точки P на описанной окружности треугольника. Прямая XZY называется прямой Симсона.

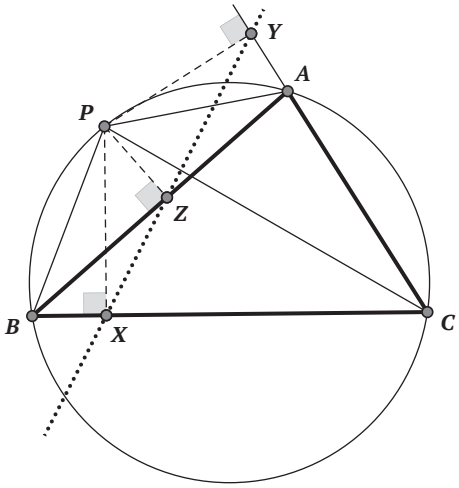


Рисунок B9

Доказательство. Начнем с изображения PA, PB и PC на рис. B9. Поскольку A, B, C и P лежат на общей окружности, то верно равенство $\angle ABP = \angle ACP$. Треугольники ZPB и YPC прямоугольные, следовательно, подобны, и мы получаем соотношение $\frac{BZ}{CY} = \frac{PZ}{PY}$. Аналогично верное равенство $\angle PAB = \angle PCB$ дает нам подобные прямоугольные треугольники XCP и ZAP, так что $\frac{CX}{AZ} = \frac{PX}{PZ}$. Поскольку $\angle CBP$ и $\angle PAC$ являются противоположными углами вписанного четырехугольника, они являются дополнительными. Однако $\angle YAP$ также является дополнительным к $\angle PAC$. Это означает, что прямоугольные треугольники XPB и YPA тоже подобны, что дает нам выражение $\frac{AX}{BY} = \frac{PY}{PX}$. Перемножая эти тождества, получаем соотношение: $\frac{BZ}{CY} \cdot \frac{CX}{AZ} \cdot \frac{AY}{BX} = \frac{PZ}{PY} \cdot \frac{PX}{PZ} \cdot \frac{PY}{PX} = 1$. Таким образом, по теореме Менелая (B3) точки X, Y и Z коллинеарны.

B10. Формула Герона

Мы знаем, что углы треугольника однозначно определяются, если известны длины всех трех сторон. Это означает, что все треугольники с равными длинами сторон конгруэнтны и, следовательно, имеют равные площади.

Формула Герона позволяет нам вычислить площадь треугольника, используя только длины его трех сторон. Если треугольник ABC имеет стороны a, b и c, где полупериметр равен $s = \frac{a+b+c}{2}$, как показано на рис. B10, формула Герона гласит, что

$$\text{площадь треугольника } [ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}.$$

Доказательство. Существует множество способов доказать это. Следующий метод является, возможно, самым простым, поскольку он требует только теоремы Пифагора и некоторых основных алгебраических преобразований. Как мы видим на рис. B10, нам дан треугольник ABC со сторонами a, b и c. Вершины названы таким образом, что существует точка D на стороне AB такая, что $CD \perp AB$.

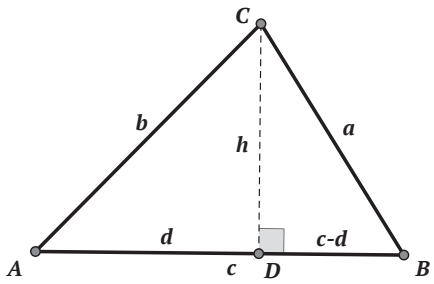


Рисунок B10

В прямоугольных треугольниках DCA и DBC теорема Пифагора дает нам $b^2 = d^2 + h^2$ и $a^2 = (c - d)^2 + h^2 = d^2 - 2cd + c^2 + h^2$ соответственно, и вычитание дает $a^2 - b^2 = c^2 - 2cd$, или $d = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$. Теперь мы можем выразить высоту h с помощью выражения:

$$
\begin{aligned}
h^2 &= b^2 - d^2 \\
&= (b+d)(b-d) \\
&= \left(b + \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}\right)\left(b - \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}\right) \\
&= \frac{2bc - a^2 + b^2 + c^2}{2c} \cdot \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2c} \\
&= \frac{((b+c)^2 - a^2)\cdot(a^2 - (b-c)^2)}{4c^2} \\
&= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2} \\
&= \frac{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)}{4c^2} \\
&= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}.
\end{aligned}
$$

Это позволяет нам вычислить площадь треугольника *ABC* следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\text{площадь треугольника } [ABC] &= \frac{1}{2} \cdot ch \\
&= \sqrt{\frac{c^2}{4} \cdot \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.
\end{aligned}
$$

Книги издательства «ДМК Пресс» можно купить оптом и в розницу
на складе издательства по адресу:
Москва, ул. Электродная, д. 2, стр. 12, офис 7,
тел. +7 (499) 322–19–38,
а также заказать на сайте **www.dmkpress.com**
с доставкой в любой регион РФ

Альфред С. Позаментье, Роберт Геретшлегер

Жемчужины геометрии

Четырехугольники

Главный редактор *Яценков В. С.*
editor@dmkpress.com

Перевод *Михеев П. В.*
Корректор *Синяева Г. И.*
Верстка *Луценко С. В.*
Дизайн обложки *Мовчан А. Г.*

Формат 70×100 1/16.
Гарнитура «PT Serif». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 21,29. Тираж 200 экз.

Веб-сайт издательства: *www.dmkpress.com*

Планарная геометрия полна чудес, о которых нам почти не рассказывают на уроках в школе. Даже обычный четырехугольник – одна из базовых фигур геометрии – способен удивить нас неожиданными фактами и закономерностями и дать богатую пищу для размышлений. В этой книге собрана одна из самых больших коллекций любопытных фактов и курьезов, связанных с четырехугольниками. Исследуя многочисленные неожиданные взаимосвязи, читатели еще больше полюбят геометрию.

Издание рассчитано на широкую аудиторию читателей. Для понимания доказательств и пояснений достаточно знания основ школьной геометрии.



Альфред Позаментье работает преподавателем Технологического колледжа Городского университета Нью-Йорка. Автор и соавтор более 80 книг по математике для учителей, учащихся школ и массового читателя. Часто публикуется в газетах и журналах по темам, связанным с образованием и математикой.



Роберт Геретшлегер – учитель математики и геометрии из Граца, Австрия. Является редактором и соавтором многочисленных книг по популярной математике, а также сборников конкурсных математических задач. В настоящее время выступает с лекциями по геометрии в местном университете.

World Scientific

ДМК ПРЕСС издательство

www.дмк.рф

ISBN 978-5-93700-445-1

9 785937 004451