В. И. Гадзиковский

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Рекомендовано Региональным отделением УрФО учебно-методического объединения вузов Российской Федерации по образованию в области радиотехники, электроники, биомедицинской техники и автоматизации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 210400 – Радиотехника в УрФО



Москва
СОЛОН-ПРЕСС
2017

УДК 621.396.6
ББК 32.811.3

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра информационных радиосистем Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева (зав кафедрой доктор технических наук, профессор Рындык А.Г.).

Доктор технических наук, профессор Монаков А.А. (С.-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения).

Автор: **В.И. Гадзиковский**

Цифровая обработка сигналов / В.И. Гадзиковский. — М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2017. — 766 с.

С позиций временного и частотного подходов излагаются вопросы теории цифровой обработки сигналов. Рассматриваются классификация, характеристики и структурные схемы, а также шумовые модели цифровых фильтров (вещественных и комплексных, скалярных и векторных).

Разработана методика анализа шумов квантования векторных цифровых фильтров. Рассматриваются алгоритмы нелинейной цифровой обработки сигналов в системах связи на основе метода комплексной огибающей, а также методы построения цифровых моделей аналоговых систем.

Изложены методы математического синтеза одномерных скалярных вещественных нерекурсивных и эвристического синтеза рекурсивных цифровых фильтров. Разработаны алгоритмы синтеза одномерных скалярных комплексных цифровых фильтров (нерекурсивных и рекурсивных).

Рассмотрены методики расчёта разрядности коэффициентов и операционных устройств одномерных скалярных и векторных цифровых фильтров, а также требуемого быстродействия вычислителя, что необходимо для выбора элементной базы — сигнального процессора (DSP).

Приведены примеры моделирования процессов цифровой фильтрации.

Книга предназначена для научных работников и инженеров, занимающихся проектированием систем цифровой обработки сигналов и цифровым моделированием технических систем, а также для студентов и аспирантов радиотехнических специальностей вузов.

УДК 621.396.6
ББК 32.811.3

ISBN 978-5-91359-117-3

© Обложка. СОЛОН-ПРЕС, 2017
© Гадзиковский В. И., 2017

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга является переработанным и дополненным изданием двух монографий автора [1, 2]. Объединение их в одну книгу устраняет неизбежные повторы, позволяет проследить внутреннюю логику изложения материала и облегчает его практическое использование.

В книге материал излагается в основном с позиций временного подхода к цифровой обработке сигналов (ЦОС), лишь в гл.6 рассматриваются вопросы фильтрации и с позиций частотного подхода.

Большинство публикаций по ЦОС [6 — 8, 10 — 14, 17 — 21, 26 — 28] являются либо монографиями, либо справочниками, либо переводными учебными пособиями для аспирантов. В качестве исключения можно назвать лишь [52, 65]. Отсутствие специальной литературы создаёт определённые трудности у студентов вузов, изучающих цифровую обработку сигналов, а также у специалистов, занимающихся разработкой аппаратуры ЦОС.

В книге с единых методологических позиций изложены различные вопросы теории цифровой обработки сигналов и методов проектирования цифровых фильтров. В ней объединён разрозненный материал из разных источников, а также оригинальные результаты, полученные автором. Автор стремился подать материал в доступной форме, но на достаточно высоком уровне.

В отличие от других публикаций по ЦОС в книге построены модели шумов квантования и разработана методика анализа и синтеза комплексных и векторных цифровых фильтров. В рамках временного подхода к фильтрации предложена оригинальная классификация цифровых фильтров в алгоритмическом аспекте: по типу сигналов, по типу алгоритмов и по «внутренним» свойствам алгоритмов.

В книге рассмотрено большое число примеров, поясняющих основные теоретические положения и методы проектирования цифровых фильтров, что должно способствовать лучшему пониманию материала.

Книга не претендует на полноту изложения теории ЦОС. В ней рассмотрены вопросы обработки лишь одномерных сигналов, т.е. таких, которые являются функцией одного аргумента — «дискретного времени». За рамками данной книги остались вопросы обработки многомерных сигналов (включая обработку изображений), а также некоторые разделы нелинейной обработки (например, медианная фильтрация, кепстральный анализ) и др.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ

АД — амплитудный детектор (амплитудное детектирование)
АМ — амплитудный модулятор (амплитудная модуляция)
АО — амплитудный ограничитель (амплитудное ограничение)
АЦКП — аналого-цифровой квадратурный преобразователь
АЦП — аналого-цифровой преобразователь
АЧХ — амплитудно-частотная характеристика
БИС — большая интегральная схема
БИХ-фильтр — фильтр с бесконечной импульсной характеристикой
БМ — балансный модулятор (балансная модуляция)
БПФ — быстрое преобразование Фурье
ГВЗ — групповое время запаздывания
ГОС — генератор опорных сигналов
ГУН — генератор, управляемый напряжением
ДПЛ — дискретное преобразование Лапласа
ДПФ — дискретное преобразование Фурье
ДРФ — дискретный ряд Фурье
ИИЭ — идеальный импульсный элемент
ИФ — интерполирующий фильтр
ИЭ — импульсный элемент
КвМ — квадратурный модулятор
КвПЧ — квадратурный преобразователь частоты
КИХ-фильтр — фильтр с конечной импульсной характеристикой
ЛЧМ-сигнал — сигнал с линейной частотной модуляцией
МНК — метод наименьших квадратов
НРУ — нелинейный резонансный усилитель (нелинейное резонансное усиление)
ПАВ — поверхностные акустические волны
ПНЧ — приведённая непрерывная часть
ПФ — полосовой фильтр
ПЦОС — процессор цифровой обработки сигналов
ПЧ — преобразователь частоты (преобразование частоты)
ПЧ-тракт — тракт промежуточной частоты
РФ — режекторный фильтр
САПР — система автоматизированного проектирования
СБИС — сверхбольшая интегральная схема
СД — синхронный детектор
См — сумматор
ТЗ — техническое задание
УВХ — устройство выборки и хранения
УмЧ — умножитель частоты (умножение частоты)
УПЧ — усилитель промежуточной частоты
ФВЧ — фильтр верхних частот

ФД — фазовый детектор (фазовое детектирование)
ФМ — фазовый модулятор (фазовая модуляция)
ФНРП — функция наилучшего равномерного приближения
ФНЧ — фильтр нижних частот
ФЧХ — фазочастотная характеристика
ЦАП — цифроаналоговый преобразователь
ЦОС — цифровая обработка сигналов
ЦФ — цифровой фильтр
ЦФКК — цифровой формирователь квадратурных компонент
ЦФНЧ — цифровой фильтр нижних частот
ЧД — частотный детектор (частотное детектирование)
ЧМ — частотный модулятор (частотная модуляция)
ЭВМ — электронная вычислительная машина
ЭЛТ — электронно-лучевая трубка
ACC — аккумулятор сигнального процессора
DSP — цифровой сигнальный процессор

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$x(t), y(t)$ — аналоговые сигналы

$x[n], y[n]$ — дискретные сигналы

$\tilde{x}[n], \tilde{y}[n]$ — цифровые сигналы

t — непрерывное время

n — «дискретное время», а также порядок аналогового ФНЧ-прототипа

$T, f_д$ — шаг (интервал) и частота дискретизации

$h[n], g[n], f[n]$ — импульсная характеристика дискретного или цифрового фильтра (или части фильтра)

$H(z), G(z), F(z)$ — передаточная функция дискретного или цифрового фильтра (или части фильтра)

$H\left(e^{j\omega T}\right), G\left(e^{j\omega T}\right), F\left(e^{j\omega T}\right)$ — комплексная частотная характеристика дискретного или цифрового фильтра (или части фильтра)

$A(\omega T), \varphi(\omega T)$ — амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики дискретного или цифрового фильтра

$Z\{...\}, Z^{-1}\{...\}$ — прямое и обратное Z-преобразования

$F\{...\}, F^{-1}\{...\}$ — прямое и обратное преобразования Фурье

$L\{...\}, L^{-1}\{...\}$ — прямое и обратное преобразования Лапласа

W_N^{kn} — поворачивающий множитель в дискретном преобразовании Фурье

$a_k \left(k = \overline{1, M}\right)$, $b_k \left(k = \overline{1, N}\right)$ — коэффициенты линейного стационарного алгоритма фильтрации и передаточной функции линейного стационарного рекурсивного ЦФ

$\dot{\mathbf{U}}[n], U_c[n], U_s[n]$ — комплексная огибающая полосового сигнала и её квадратурные компоненты

$A(z^{-1}), B(z^{-1})$ — полиномы от комплексной переменной z^{-1}

$\mathrm{Res}\{Y(z_k)\}$ — вычет функции комплексной переменной в полюсе z_k

$\mathrm{Re}\{...\}$, $\mathrm{Im}\{...\}$ — символы вещественной и мнимой частей комплексного числа

$\delta[n]$ — единичный импульс

$\sigma[n]$ — единичный скачок

$\|...\|_p$ — норма спектра или комплексной частотной характеристики ЦФ в пространстве L_p $(p \geq 1)$

$B(W)$ — аппроксимируемая функция

$q(W)$ — весовая функция

$\Phi(W, \mathbf{C})$ — аппроксимирующая функция

W — нормированная частота ЦФ

$W_п$ — нормированная граничная частота полосы пропускания ЦФ

$W_з$ — нормированная граничная частота полосы задерживания ЦФ

Ω — частота нормированного аналогового ФНЧ-прототипа

$\Omega_з$ — граничная частота полосы задерживания нормированного аналогового ФНЧ-прототипа

$F_N = f_д / 2$ — частота Найквиста

$\mathbf{h}[n]$, $\mathbf{g}[n]$, $\mathbf{f}[n]$ — матрица импульсных характеристик векторного дискретного или цифрового фильтра (или части фильтра)

$\mathbf{H}(z), \mathbf{G}(z), \mathbf{F}(z)$ —матрица передаточных функций векторного дискретного или цифрового фильтра (или части фильтра)

$\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right), \mathbf{G}\left(e^{j\omega T}\right), \mathbf{F}\left(e^{j\omega T}\right)$ — матрица комплексных частотных характеристик векторного дискретного или цифрового фильтра (или части фильтра)

M — порядок нерекурсивного цифрового фильтра

N — порядок рекурсивного цифрового фильтра, порядок аналогового фильтра

$\mathrm{H}(s)$ — передаточная функция аналогового нормированного ФНЧ-прототипа

$\mathrm{H}(j\Omega)$ — комплексная частотная характеристика аналогового нормированного ФНЧ-прототипа

$A(\Omega), \varphi(\Omega)$ — амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики аналогового нормированного ФНЧ-прототипа

n — порядок аналогового нормированного ФНЧ-прототипа

$\mathrm{H}(p)$ — передаточная функция аналогового фильтра

$\mathrm{H}(j\omega)$ — комплексная частотная характеристика аналогового фильтра

$A(\omega), \varphi(\omega)$ — амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики аналогового фильтра

$\dot{\mathbf{U}}[n], U_{\mathrm{c}}[n], U_{\mathrm{s}}[n]$ — комплексная огибающая полосового сигнала и её квадратурные компоненты в дискретной форме

S_{K} — разрядность представления коэффициентов ЦФ

$S_{\mathrm{K_ц}}$, $S_{\mathrm{K_д}}$ — число разрядов для представления целой и дробной частей коэффициентов ЦФ

$S_{\mathrm{ц}}$, $S_{\mathrm{д}}$ — число разрядов для представления целой и дробной частей чисел в операционных устройствах ЦФ

$S_{\mathrm{вх_ц}}$, $S_{\mathrm{вх_д}}$ — число разрядов для представления целой и дробной частей чисел во входном регистре ЦФ (разрядность АЦП)

Коэффициенты передаточной функции аналогового фильтра $\mathrm{H}(p)$ являются размерными величинами. В приводимых примерах размерность этих коэффициентов опущена. Коэффициенты передаточных функций дискретного и цифрового фильтров $H(z)$, а также аналогового нормированного ФНЧ-прототипа $\mathrm{H}(s)$ являются безразмерными величинами.

ВВЕДЕНИЕ

Любая задача обработки сигналов в технических системах сводится к преобразованию множества X входных сигналов $x \in X$ во множество Y выходных сигналов $y \in Y$. Правило G, по которому выполняется это преобразование $X \xrightarrow{G} Y$, называется *оператором* или *алгоритмом* преобразования (обработки), а физический объект, реализующий это правило, — *системой* обработки сигналов.

В зависимости от средств (элементной базы), с помощью которых реализуется система обработки, сигналы на входе, выходе и внутри системы удобно представлять в той или иной форме. При этом классификация типов обработки сигналов может быть проведена по виду сигналов на входе, выходе и внутри системы. Однородные системы по типу обработки сигналов можно разделить на четыре группы:

- аналоговые системы обработки в непрерывном времени (аналоговые системы);
- аналоговые системы обработки в дискретном времени (дискретно-аналоговые системы);
- цифровые системы обработки в дискретном времени (цифровые системы);
- цифровые системы обработки в непрерывном времени.

Наибольшее распространение получили аналоговые и цифровые системы обработки сигналов, причём в радиоэлектронике и других областях техники в последние десятилетия наметилась тенденция перехода от аналоговой к цифровой обработке сигналов (ЦОС).

Возрастающий интерес к ЦОС обусловлен рядом важных преимуществ такой обработки по сравнению с аналоговой и дискретно-аналоговой. Эти преимущества можно разделить на три группы: *принципиальные*, *реализационные* и *технико-эксплуатационные* [45].

Принципиальные преимущества ЦОС:

- многофункциональность обработки, т.е. возможность использования одного и того же процессора для выполнения различных операторов обработки путём изменения программы;
- мультиплексирование, т.е. возможность обработки сигналов от нескольких датчиков (если позволяет быстродействие процессора) в промежутках между смежными тактами;
- возможность реализации произвольных преобразований, т.е. снимаются ограничения на виды обработки, свойственные аналоговой технике, и обеспечивается реализация любых формально описываемых преобразований;
- отсутствие принципиальных ограничений на сложность обработки, т.е. имеется принципиальная возможность обеспечивать требуемую точность обработки при сколько угодно сложных алгоритмах.

Реализационные преимущества ЦОС:

- ♦ высокая стабильность характеристик;
- ♦ повторяемость характеристик (отсутствие индивидуальных признаков);
- ♦ уникальные возможности для адаптации (управление характеристиками);
- ♦ высокая точность воспроизведения оператора обработки;
- ♦ реализация с помощью БИС и СБИС, отсутствие элементов L и C;
- ♦ практически сквозная «цифризация» аппаратуры.

Технико-эксплуатационные преимущества ЦОС:

- ♦ высокая надёжность;
- ♦ малые масса и габариты;
- ♦ возможности диагностики;
- ♦ малое энергопотребление;
- ♦ широкие возможности унификации;
- ♦ ослабленное электромагнитное влияние и удобства защиты.

Однако цифровой обработке сигналов присущи также и **недостатки.** Среди них можно назвать следующие:

- ♦ возможность обработки относительно низкочастотных сигналов (в настоящее время ЦОС осуществляют на видеочастоте, а обработка сигналов на высокой и промежуточной частотах производится средствами аналоговой техники);
- ♦ шумы квантования, нелинейные эффекты переполнения и предельных циклов;
- ♦ зависимость скорости обработки сигналов от требуемой точности;
- ♦ влияние проникающей радиации, особенно для интегральных схем n-МОП технологии.

Различают ЦОС в *широком* и в *узком* смысле слова. ЦОС в широком смысле включает все виды обработки, удовлетворяющие данному выше определению, в том числе и появившиеся в связи с развитием компьютерных технологий операции над массивами данных, такие как архивация файлов, моделирование виртуальной реальности и др. ЦОС в узком смысле включает традиционные для радиотехники, техники связи и экспериментальных исследований операции над сигналами, выполняемые цифровыми методами.

С помощью ЦОС могут быть осуществлены все известные операции над сигналами. Например, на основе цифровой обработки сигналов в радиотехнике и технике связи решаются следующие задачи: генерация, модуляция, разделение, формирование и коррекция сигналов, фильтрация и оценивание, анализ спектров, сжатие сигналов во времени и по частоте, обнаружение и распознавание сигналов, кодирование и декодирование, обработка изображений, синтез речевых сигналов и т.д.

Временная селекция, коммутация цифровых потоков, сложение и умножение последовательностей, интерполяция, децимация, масштабирование (усиление) относятся к числу несложных обработок, в которых выходной отсчёт получается в результате выполнения одной – двух операций. Фильтрация, коррекция, сжатие информации, спектральный анализ, корреляция, оценивание, нели-

нейные преобразования относятся к числу сложных видов (операций) обработки. Для вычисления выходного отсчёта здесь приходится выполнить значительное число операций умножения и сложения (практически несколько десятков и даже сотен). ЦОС в узком смысле включает упомянутые сложные операции обработки сигналов.

Наука о ЦОС изучает принципы и методы построения алгоритмов, программ и технических средств цифровой обработки сигналов. Её проблематика порождается ограниченностью ресурсов вычислительных средств, с помощью которых ЦОС может быть выполнена. Основные задачи, решаемые при проектировании системы ЦОС, следующие [45]:

- Исследование и разработка методов синтеза физически возможных операторов G для разнообразных прикладных задач. Например, конструирование импульсных характеристик и передаточных функций линейных фильтров, операторов оценивания параметров сигнала, операторов спектральных преобразований и др.
- Разработка и оптимизация вычислительных алгоритмов. Суть этих процедур состоит в построении эффективных алгоритмов вычисления синтезированных операторов G. Например, построение алгоритмов и структурных схем линейных фильтров, а также нелинейных преобразователей, алгоритмов коррекции и др.
- Анализ качества операторов, алгоритмов и структурных схем (задача анализа). Например, оценка достижимой точности выполнения операторов и алгоритмов, влияния длины слова (разрядности) данных и коэффициентов на финальные параметры системы, анализ устойчивости, чувствительности к изменению параметров, различных нелинейных эффектов, вычислительной сложности, требуемой производительности процессора и др.
- Разработка принципов реализации алгоритмов ЦОС. В зависимости от средств реализации (аппаратные, программные либо смешанные) решаются задачи разработки и оптимизации программ, архитектуры, структуры и функциональных узлов системы ЦОС. Исследуются вопросы отладки программ, диагностики, идентификации ошибок и др.
- Разработка пакетов прикладных программ — элементов систем автоматизированного проектирования (САПР) аппаратуры радиоэлектроники и связи на принципах ЦОС. Существенным здесь является то, какие средства используются для реализации алгоритмов ЦОС, так как именно они решающим образом влияют на ориентацию САПР, особенности математического и программного обеспечения и методики проектирования.

В качестве средств реализации алгоритмов ЦОС могут использоваться программы универсальных либо специализированных ЭВМ, специальные аппаратные либо комбинации аппаратно-программных средств. На первых порах развития ЦОС применялась исключительно программная реализация. Такая же реализация применяется и в настоящее время в тех случаях, если не требуется обработка сигналов в реальном времени. Использовать же универсальные ЭВМ

для обработки сигналов в реальном масштабе времени не представляется возможным [45].

Развитие вычислительной техники, компьютерных технологий, методов и средств САПР, высоких технологий производства БИС и СБИС привело к появлению процессоров цифровой обработки сигналов (ПЦОС), чаще называемых сигнальными процессорами (DSP). Сигнальные процессоры, обладая приспособленной для ЦОС архитектурой, позволяют создавать эффективные системы обработки и передачи сигналов в реальном времени.

Многообразие архитектур ПЦОС, алгоритмов ЦОС, инструментальных средств моделирования и проектирования выдвигает сегодня на передний план проблему создания сквозной технологии оперативного конструирования систем ЦОС. Такая технология должна представлять собой максимально автоматизированную последовательность этапов проектирования от анализа архитектуры сигнального процессора до анализа характеристик полученной реализации системы ЦОС [7].

Как программный, так и аппаратный способ реализации ЦОС может базироваться либо на временном, либо на спектральном подходе (последний используется для линейных алгоритмов ЦОС).

Временной подход по своей сути является более «физичным», он напоминает физический процесс обработки сигналов в аналоговой системе. При временном подходе реализуется алгоритм обработки G, в котором по отсчётам входного сигнала $x[n]$ вычисляются отсчёты выходного сигнала $y[n]$.

При спектральном подходе алгоритм обработки G устанавливает связь не между самими сигналами $x[n]$ и $y[n]$, а между их спектрами $X(k)$ и $Y(k)$, получаемыми посредством дискретного преобразования Фурье.

В данной книге изложение ведётся в основном с позиций временного подхода.

Проектирование устройств цифровой обработки сигналов (ЦОС), в частности, цифровых фильтров (ЦФ) может осуществляться при наличии разработанных методов, соответствующих математического и программного обеспечений, а также технических средств. Всё это составляет основу систем автоматизированного проектирования (САПР).

В настоящее время имеются разработанные методики [2, 3, 8, 10, 11, 13, 15] и программные средства проектирования *одномерных скалярных вещественных линейных* ЦФ. Программные средства содержатся в системе компьютерной математики MATLAB [52, 54 — 56].

Проектирование одномерных скалярных вещественных нерекурсивных линейных ЦФ осуществляется строгими математическими методами синтеза. Математический синтез представляет собой оптимизационную задачу, т.е. задачу поиска наилучшего решения в смысле выбранного критерия. На практике обычно применяют либо среднеквадратический, либо минимаксный критерий оптимальности. При использовании линейной аппроксимирующей функции эта задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Эф-

фективные алгоритмы решения таких систем уравнений содержатся в математическом обеспечении компьютеров и других ЭВМ.

Проектирование одномерных скалярных вещественных рекурсивных линейных ЦФ в рассмотренной выше постановке приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений. Нелинейные системы уравнений не имеют разработанных универсальных алгоритмов решения. В связи с этим при проектировании рекурсивных ЦФ применяют эвристические методы синтеза. Наибольшее распространение получил метод синтеза рекурсивных ЦФ по аналоговым прототипам. В этом методе вначале осуществляется синтез аналогового нормированного ФНЧ-прототипа. Затем путём денормирования частоты и дискретизации получают передаточную функцию $H(z)$ дискретного фильтра.

Термин «дискретный фильтр» здесь применяется по той причине, что полученные при решении задачи синтеза значения коэффициентов передаточной функции $H(z)$ определяются с очень высокой точностью, поскольку решение соответствующих уравнений осуществляется на универсальных ЭВМ в формате с плавающей точкой при большой разрядности вычислителя. Цифровой фильтр обычно реализуется на специализированном вычислителе (DSP) в формате с фиксированной точкой при сравнительно малом числе разрядов, поэтому при реализации ЦФ имеет квантованные значения коэффициентов передаточной функции и квантованные значения отсчётов сигналов.

Квантование коэффициентов и расчёт разрядности операционных устройств вычислителя, на котором предполагается реализация ЦФ, осуществляется на следующих этапах проектирования.

Эффекты квантования приводят к специфическим погрешностям цифровой обработки сигналов, называемых шумами квантования. Учёт шумов квантования является важным аспектом проектирования ЦФ. Задача сводится к тому, чтобы выбрать разрядную сетку вычислителя, обеспечивающую при работе ЦФ допустимый уровень выходного шума квантования, определяющего точность цифровой обработки сигналов.

Возможны два подхода к решению задачи учёта шумов квантования: детерминированный и вероятностный. На практике чаще используют вероятностный подход, дающий более надёжные результаты в среднем. Результаты же, получаемые при детерминированном подходе, гарантируют непревышение шумов на выходе ЦФ заранее установленных пределов. Однако это достигается ценой существенного (возможно, неоправданного) увеличения разрядности операционных устройств ЦФ.

В системе компьютерной математики MATLAB имеются специализированные пакеты прикладных программ Signal Processing, предназначенные для создания сигналов, анализа и проектирования фильтров (аналоговых и цифровых), а также средства *графического интерфейса пользователя* (GUI). Последние обеспечивают не только графическое представление сигналов и характеристик фильтров, но и интерактивное управление созданием сигналов и фильтру-

ющих устройств [54]. Кроме того, в системе MATLAB имеется пакет Image Processing Toolbox, предназначенный для обработки изображений •.

Наконец, используя опубликованные методы проектирования ЦФ [2, 3, 8, 10, 11, 13, 15], разработчик может составить свои оригинальные программы на любом языке программирования высокого уровня, либо в системе компьютерной математики Mathcad. Однако методические и программные средства проектирования ЦФ в настоящее время разработаны только для *скалярных вещественных* фильтров.

Что касается *одномерных скалярных комплексных* и *одномерных векторных* (вещественных и комплексных), а также *многомерных* ЦФ, то для их проектирования в известной литературе нет сведений о методиках и программных средствах.

Основная задача монографии состоит в том, чтобы в какой-то мере заполнить этот пробел. В книге использованы математический аппарат, а также классификация, структурные схемы и линейные шумовые модели (модели процессов квантования) ЦФ, разработанные автором в [1].

В [1] показано, что при выполнении определённых условий одномерный скалярный комплексный ЦФ эквивалентен одномерному вещественному двухкоординатному векторному ЦФ. Там же получены выражения для амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристик скалярных комплексных ЦФ и исследованы их особенности ••. Линейные шумовые модели скалярных вещественных ЦФ, в том числе и универсальная шумовая модель Л. Джексона, допускают обобщение на вещественные векторные ЦФ •••. Такой подход позволил разработать методику оценки эффектов квантования для скалярных комплексных и вещественных векторных ЦФ. При этом получены расчётные формулы для определения необходимой разрядности вычислителя, на базе которого предполагается реализовать ЦФ.

Предлагаемые методы синтеза одномерных скалярных комплексных ЦФ базируются на полученных выражениях для АЧХ и ФЧХ. При этом методы синтеза нерекурсивных комплексных ЦФ являются математическими, а рекурсивных — эвристическими.

Идея математического синтеза *нерекурсивного комплексного* ЦФ состоит в представлении квадрата требуемой АЧХ в виде суммы двух составляющих: чётной и нечётной, которые описывают соответствующие *одномерные скалярные вещественные нерекурсивные* фильтры, методика синтеза которых разработана и изложена в [2, 3, 6, 8, 10, 11, 13]. Сложность этой методики заключается в том, что не удаётся получить формализованный алгоритм построения аппроксимируемых функций по чётной и нечётной составляющим квадрата требуемой

• По классификации ЦФ [1, 3] соответствующие ЦФ называются *многомерными*.

•• В отличие от вещественных фильтров, АЧХ комплексных ЦФ в общем случае не являются чётными, а ФЧХ нечётными функциями частоты.

••• При этом адекватным математическим аппаратом является теория матриц: сигналы представляются векторами, а связи между ними — матричными уравнениями.

АЧХ. В каждом конкретном случае приходится довольствоваться интуицией и опытом проектировщика. Остальные этапы синтеза поддаются формализации. Все синтезированные автором комплексные ЦФ данного типа имеют линейные ФЧХ, что важно для неискажённой передачи импульсных сигналов.

Попытка разработать методику синтеза *рекурсивного комплексного* ЦФ на основе представления квадрата требуемой АЧХ в виде суммы чётной и нечётной составляющих подобно тому, как это делалось для нерекурсивных комплексных фильтров, успехом не увенчалась (во всех примерах, которые были рассчитаны автором, полученные в результате синтеза АЧХ не совпадали с заданными). Это объясняется тем, что не удалось установить связь между аппроксимируемыми функциями косинусных и синусных блоков комплексного рекурсивного ЦФ с чётной и нечётной составляющими квадрата требуемой АЧХ (см. § 16.1).

Эффективными оказались два других подхода к синтезу *рекурсивных комплексных* ЦФ. Один из них основан на билинейном преобразовании передаточной функции аналогового фильтра-прототипа, а другой — на экспериментальном подборе положения комплексных полюсов и нулей передаточной функции $H(z)$ на Z-плоскости для получения требуемой АЧХ комплексного ЦФ.

На основе первого подхода удалось синтезировать цифровые эквиваленты всех типов аналоговых ПЧ-трактов с распределённым усилением (с настроенными одноконтурными и двухконтурными каскадами, на расстроенных двойках и тройках одноконтурных каскадов и по смешанной схеме), а на основе второго — цифровой эквивалент ПЧ-тракта изображения телевизионного приёмника, реализуемого по квазипараллельной схеме.

Для апробации полученных результатов проведено моделирование процессов цифровой фильтрации. При этом разработаны модели характериографов, позволяющие получить квазистатические и динамические АЧХ, а также осуществлено моделирование переходных процессов в ЦФ.

Книга состоит из 19 глав. Нумерация формул, рисунков и таблиц сквозная в пределах каждой главы и содержит номер главы и номер формулы (рисунка, таблицы).

Глава 1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

1.1. Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы

Сигнал — это физический процесс, отображающий некоторую информацию. Сигналы подразделяются на аналоговые и дискретные.

Аналоговый сигнал описывается непрерывной функцией времени $x(t)$, где аргумент t и функция x могут принимать любые значения в диапазоне их изменения (аргумент и функция имеют мощность континуума).

Дискретный сигнал описывается решётчатой функцией $x(nT)$, где n — целое число; T — интервал (шаг) дискретизации. Значения дискретного сигнала $x(nT)$ называются *отсчётами* сигнала. Они представляют собой выборки исходного аналогового сигнала в моменты времени $t = nT$:

$$x(nT) = x(t)\big|_{t=nT}. \tag{1.1}$$

В промежутках между отсчётами функция $x(nT)$ не определена.

При фиксированном (постоянном) интервале дискретизации T номер отсчёта n рассматривают как «дискретное время» и дискретный сигнал записывают в виде

$$x[n] = x(nT) = x(t)\big|_{t=nT}. \tag{1.2}$$

Такое обозначение для дискретного сигнала (иначе — решётчатой функции, дискретной последовательности) мы будем использовать и в дальнейшем.

Выборки сигнала берутся с интервалом дискретизации T, определяемым *частотой дискретизации*

$$f_д = 1/T. \tag{1.3}$$

Важное значение в теории цифровой обработки сигналов имеют следующие дискретные последовательности:

♦ единичный импульс

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0; \end{cases} \tag{1.4}$$

♦ единичный скачок

$$\sigma[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Согласно теореме В.А. Котельникова (теореме отсчётов), исходный аналоговый сигнал $x(t)$ с финитным (ограниченным по частоте) спектром может быть

однозначно восстановлен по его дискретной выборке $x[n]$, если интервал дискретизации T удовлетворяет условию

$$T \le 1/(2F_{в}) \tag{1.6}$$

или (что то же самое)

$$f_{д} \ge 2F_{в}, \tag{1.7}$$

где $F_{в}$ — верхняя граничная частота спектра аналогового сигнала $x(t)$.

Восстанавливающая (интерполяционная) формула имеет вид

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, h(t - nT), \tag{1.8}$$

где $h(t)$ — интерполирующая функция, осуществляющая восстановление сигнала в промежутках между отсчётами.

При использовании интерполирующей функции В.А. Котельникова

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi F_{в} t)}{2\pi F_{в} t} \tag{1.9}$$

в выражениях (1.6) и (1.7) следует принять знак равенства.

Из (1.7) следует, что цифровая обработка сигналов возможна лишь в том случае, если верхняя граничная частота спектра исходного аналогового сигнала не превосходит половину частоты дискретизации:

$$F_{в} \le f_{д}/2. \tag{1.10}$$

Цифровой сигнал $\tilde{x}[n]$ можно рассматривать как частный случай дискретного сигнала $x[n]$, когда $\tilde{x}$ может принимать лишь конечный ряд дискретных по величине значений — *уровней квантования*:

$$\tilde{x}[n] = F\{x[n]\}, \tag{1.11}$$

где $F\{x\}$ означает операцию квантования.

Операция квантования является нелинейной, поэтому обработка цифрового сигнала $\tilde{x}[n]$ по линейному алгоритму приводит к тому, что алгоритм реализуется неточно. Возникающие при этом ошибки называют ошибками квантования (шумом квантования).

Фундаментальным отличием цифрового сигнала $\tilde{x}[n]$ от аналогового $x(t)$ и дискретного $x[n]$ является то, что квантованные отсчёты цифрового сигнала (числа) представляются цифровыми (двоичными) кодами, а не уровнями физического процесса (обычно напряжения). Кроме того, часто применяют помехоустойчивое кодирование сигналов (коды, обнаруживающие ошибки, а также коды, исправляющие ошибки). Это обеспечивает высокую помехоустойчивость цифровых систем передачи и обработки сигналов.

1.2. Z–преобразование

Аналогично классическому *преобразованию Лапласа* непрерывной функции $x(t)$, определяемому интегралом

$$X(p)=\int_0^{\infty} x(t)\,e^{-pt}dt\,, \tag{1.12}$$

где $p=\sigma+j\omega$ — комплексная переменная (обобщённая частота), вводится *дискретное преобразование Лапласа* (ДПЛ) решётчатой функции $x[n]$, определяемое суммой

$$X(q)=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\,e^{-qn}\,, \tag{1.13}$$

где $q=pT=\sigma T+j\omega T$ — комплексная переменная; $T=1/f_д$ — шаг дискретизации; $X(q)$ — изображение оригинала (решётчатой функции $x[n]$).

Если модуль рассматриваемой решётчатой функции $x[n]$ удовлетворяет условию $|x[n]|<M\exp(\sigma_0 nT)$, т.е. если порядок роста $|x[n]|$ не больше, чем порядок роста функции $\exp(\sigma_0 nT)$, то изображение решётчатой функции $x[n]$ по ДПЛ существует.

Характерной особенностью ДПЛ является то, что комплексный аргумент q входит в изображение $X(q)$ в виде показателя экспоненты e^q. Но комплексная экспонента e^q является периодической функцией в Q-плоскости с периодом, равным $2\pi j$, т.е. $e^{q+j2\pi k}=e^q$, где k — произвольное целое число, поэтому изображение $X(q)$ решётчатой функции $x[n]$ полностью определяется в любой полосе Q-плоскости шириной 2π, параллельной вещественной оси. Обычно эта полоса выбирается симметрично по отношению к вещественной оси, как показано на рис.1.1,*б*, и называется *основной*.

При $\mathrm{Re}(q)<\sigma_0 T$ функция $X(q)$ может иметь особые точки — *полюсы*, в которых $X(q)$ обращается в бесконечность. Если решётчатая функция $x[n]$ является вещественной, то в симметричной относительно оси σT полосе каждому комплексному полюсу $q_i=\sigma_i T+j\omega_i T$ функции $X(q)$ соответствует комплексно-сопряжённый полюс $q_i^*=\sigma_i T-j\omega_i T$. Для комплексных решётчатых функций $x[n]$ это утверждение не справедливо.

ДПЛ позволяет производить над разностными уравнениями такие же алгебраические действия, какие допускает обычное преобразование Лапласа над интегро-дифференциальными уравнениями [23]. Однако проведение алгебраических действий над ДПЛ неудобно из-за того, что в выражении $X(q)$ фактическим аргументом является экспонента e^q.

Для устранения этого недостатка вводится новая комплексная переменная

$$z = e^{q} = e^{pT} = \exp(\sigma T + j\omega T). \qquad (1.14)$$

Замена комплексной переменной приводит к отображению одной комплексной плоскости в другую. При замене (1.14) левая полуплоскость P-плоскости и левая часть основной полосы Q-плоскости преобразуются в круг единичного радиуса с центром в начале координат (рис.1.1,*в*).

С учётом обозначения (1.14) формулу (1.13) перепишем в виде

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}. \qquad (1.15)$$

Полученное выражение является главной частью ряда Лорана, представляющего функцию $X(z)$ в Z-плоскости. Функция комплексного аргумента $X(z)$ есть одностороннее Z-преобразование или просто Z-преобразование решётчатой функции $x[n]$.

Если оригиналы $x(t)$ и $x[n]$ являются вещественными функциями, то комплексным полюсам их изображений $X(p)$ в P-плоскости, $X(q)$ в Q-плоскости и $X(z)$ в Z-плоскости соответствуют комплексно-сопряжённые полюсы в этих плоскостях (на рис.1.1 полюсы p_i и p_i^*, q_i и q_i^*, z_i и z_i^*). В случае же комплексных оригиналов $x(t)$ и $x[n]$ это свойство не выполняется.

Как видно из сопоставления выражений (1.13), (1.14) и (1.15), Z-преобразование тесно связано с ДПЛ и прямо вытекает из него. Вследствие замены переменной (1.14) выражения $X(z)$ выглядят проще, чем $X(q)$, к тому же изображения $X(z)$ однозначны и в большинстве практически важных случаев имеют дробно-рациональный вид. По этой причине аппарат Z-преобразований получил более широкое распространение для описания дискретных систем, чем аппарат ДПЛ.

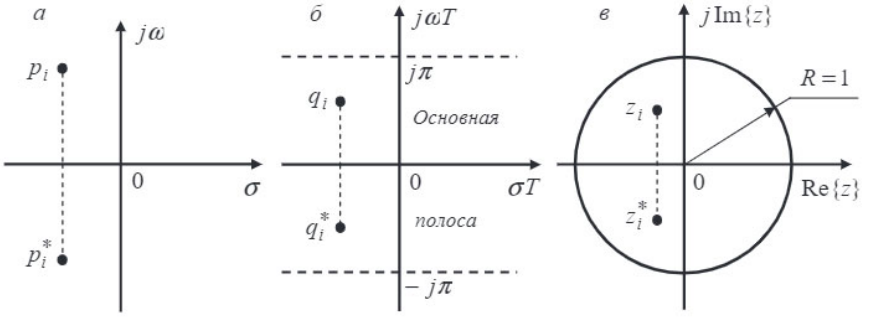


Рис.1.1. Расположение комплексно-сопряжённых полюсов изображений вещественных сигналов $x(t)$ и $x[n]$: *а* — P-плоскость; *б* — Q-плоскость; *в* — Z-плоскость

Пример 1.1. Найти Z-преобразование решётчатой функции $x[n]=a^n$.

В соответствии с определением Z-преобразования (1.15)

$$X(z)=Z\{a^n\}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}.$$

Здесь использована формула суммы членов геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы: $|az^{-1}|<1$. Ряд сходится, т.е. функция $X(z)$ является аналитической (регулярной) во внешней части круга радиуса $R=a$ с центром в начале координат, т.е. при $|z|>a$.

В табл.1.1 приведены некоторые встречающиеся на практике решётчатые функции $x[n]$ и их Z-преобразования $X(z)$.

Таблица 1.1

Оригинал $x[n]=Z^{-1}\{X(z)\}$	**Изображение** $X(z)=Z\{x[n]\}$
1	**2**
$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$	1
$\sigma[n]=\begin{cases}1, & n\geq 0,\\ 0, & n<0\end{cases}$	$\dfrac{z}{z-1}$
n	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
n^3	$\dfrac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
$n(n-1)$	$\dfrac{2z}{(z-1)^3}$
$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)$	$(k+1)!\dfrac{z}{(z-1)^{k+2}}$
a^n	$\dfrac{z}{z-a}$
e^{an}	$\dfrac{z}{z-e^a}$
$1-e^{an}$	$\dfrac{z(1-e^a)}{(z-e^a)(z-1)}$

Окончание табл.1.1

1	2
$1-e^{a(n+1)}$	$\frac{z^2(1-e^a)}{(z-e^a)(z-1)}$
$1-e^{a(n-1)}$	$\frac{1-e^{-a}}{(z-e^a)(z-1)}$
$1-e^{a(n-k)}$	$\frac{z^{-k+1}(1-e^a)}{(z-e^a)(z-1)}$
$Ae^{an}+Be^{bn}$	$\frac{z^2(A+B)-z(Ae^b+Be^a)}{(z-e^a)(z-e^b)}$
ne^{an}	$\frac{ze^a}{(z-e^a)^2}$
n^2e^{an}	$\frac{ze^a(z+e^a)}{(z-e^a)^3}$
$(1-bn)e^{an}$	$\frac{z^2-ze^a(1+b)}{(z-e^a)^2}$
$(-1)^n e^{an}$	$\frac{z}{z+e^a}$
$(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$
$\sin(\omega Tn)$	$\frac{z\sin(\omega T)}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$
$\cos(\omega Tn)$	$\frac{z[z-\cos(\omega T)]}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$
$(-1)^n\sin(\omega Tn)$	$\frac{-z\sin(\omega T)}{z^2+2z\cos(\omega T)+1}$
$(-1)^n\cos(\omega Tn)$	$\frac{z[z+\cos(\omega T)]}{z^2+2z\cos(\omega T)+1}$

Иногда применяется аппарат двустороннего Z-преобразования, например для описания некаузальных математических моделей дискретных систем. Двустороннее Z-преобразование определяется выражением

$$X(z)=Z\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\,z^{-n}. \qquad (1.16)$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} x[-n]\, z^{n}-x[0]. \qquad (1.17)$$

Выражение (1.17) представляет функцию $X(z)$ полным рядом Лорана [9]: первая сумма в правой части (т.е. главная часть ряда Лорана) — это одностороннее Z-преобразование решётчатой функции $x[n]$, описываемое формулой (1.15), а остальные составляющие — регулярная часть ряда Лорана.

Как и для преобразования Лапласа, для Z-преобразования существуют *прямое* [см. (1.15)] и *обратное* преобразования. Обратное Z-преобразование позволяет получить оригинал $x[n]$ по его изображению $X(z)$. В некоторых случаях для этой цели можно воспользоваться табл.1.1. Но существует и общая формула обратного Z-преобразования. Найдём её. Для этого умножим обе части выражения (1.15) на z^{k-1} и проинтегрируем левую и правую части полученного равенства по произвольному замкнутому контуру C, охватывающему все особые точки (полюсы) подынтегрального выражения:

$$\oint_C X(z)\, z^{k-1} dz=\oint_C \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{k-n-1} dz\ . \qquad (1.18)$$

В правой части равенства (1.18) изменим порядок выполнения операций интегрирования и суммирования:

$$\oint_C X(z)\, z^{k-1} dz=\sum_{n=0}^{\infty} x[n] \oint_C z^{k-n-1}\, dz\,. \qquad (1.19)$$

Воспользуемся формулой Коши для контурного интеграла от степенной функции комплексного аргумента. Если контур интегрирования C охватывает начало координат, то

$$\oint_C z^{k-n-1}\, dz=\begin{cases} 2\pi j, & k=n; \\ 0, & k\neq n. \end{cases} \qquad (1.20)$$

Подставляя (1.20) в равенство (1.19), после замены переменной k на n получаем формулу обратного Z-преобразования

$$x[n]=Z^{-1}\{X(z)\}=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\, z^{n-1} dz\,, \qquad (1.21)$$

где $Z^{-1}\{...\}$ — символ обратного Z-преобразования.

Это выражение позволяет найти решётчатую функцию $x[n]$ по её Z-изображению $X(z)$. В качестве контура интегрирования C можно взять любой замкнутый контур в Z-плоскости, охватывающий все полюсы подынтегральной функции $X(z)z^{n-1}$ и начало координат. На практике обычно берут окружность

единичного радиуса с центром в начале координат, т.е. единичную окружность (рис.1.1,*в*). Обратное Z-преобразование существует только для таких функций $X(z)$, которые могут иметь лишь конечное число изолированных особых точек (полюсов), причём особенность в каждой из них является устранимой.

При вычислении интеграла в правой части выражения (1.21) можно воспользоваться теоремой о вычетах (теоремой Коши), согласно которой интеграл по замкнутому контуру от функции комплексного аргумента с точностью до множителя $1/(2\pi j)$ равен сумме вычетов подынтегральной функции $Y(z)$ в особых точках (полюсах z_k), охватываемых контуром интегрирования *C*:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C Y(z)\,dz = \sum_k \operatorname{Res}\{Y(z_k)\}. \tag{1.22}$$

Напомним, что вычетом функции $Y(z)$ в точке ξ называется коэффициент c_k при $(z-\xi)^{-1}$ в представлении $Y(z)$ рядом Лорана [9]:

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-\xi)^k, \tag{1.23}$$

т.е. $\operatorname{Res}\{Y(\xi)\} = c_{-1}$.

Для нахождения вычетов используются следующие формулы:

♦ в случае простого (однократного) полюса, т.е. полюса первого порядка,

$$\operatorname{Res}\{Y(z_k)\} = \lim_{z\to z_k} Y(z)(z-z_k); \tag{1.24}$$

♦ в случае *m*-кратного полюса, т.е. полюса *m*-го порядка,

$$\operatorname{Res}\{Y(z_k)\} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_k}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{Y(z)(z-z_k)^m\}. \tag{1.25}$$

В формулах (1.22), (1.24) и (1.25) при вычислении обратного Z-преобразования (1.21) подынтегральное выражение имеет вид

$$Y(z) = X(z)\,z^{n-1}. \tag{1.26}$$

Пример 1.2. Найти решётчатую функцию $x[n]$ по её изображению $X(z) = z/(z-e^a)$.

Согласно (1.26) определяем подынтегральное выражение обратного *Z*-преобразования $Y(z) = X(z)z^{n-1} = z^n/(z-e^a)$. Функция $Y(z)$ имеет один простой полюс в точке $z_1 = e^a$. В соответствии с (1.21), (1.22) и (1.24) получаем

$$x[n] = \operatorname{Res}\{Y(z_1)\} = \lim_{z\to e^a}\frac{z^n}{(z-e^a)}(z-e^a) = e^{an}.$$

Пример 1.3. По Z-изображению $X(z) = z(1-e^a)/[(z-e^a)(z-1)]$ вычислить решётчатую функцию $x[n]$.

По формуле (1.26) находим подынтегральное выражение обратного Z-преобразования $Y(z)=X(z)z^{n-1}=z^n(1-e^a)/[(z-e^a)(z-1)]$. Функция $Y(z)$ имеет два простых полюса: $z_1=e^a$ и $z_2=1$. В соответствии с (1.21), (1.22) и (1.24) получим

$$x[n]=\mathrm{Res}\{Y(z_1)\}+\mathrm{Res}\{Y(z_2)\}=\lim_{z\to e^a}\frac{z^n(1-e^a)}{(z-e^a)(z-1)}(z-e^a)+$$

$$+\lim_{z\to 1}\frac{z^n(1-e^a)}{(z-e^a)(z-1)}(z-1)=1-e^{an}.$$

Пример 1.4. Найти решётчатую функцию $x[n]$ по её изображению $X(z)=\dfrac{ze^a}{(z-e^a)^2}$.

По формуле (1.26) получаем подынтегральное выражение обратного Z-преобразования $Y(z)=X(z)z^{n-1}=\dfrac{z^ne^a}{(z-e^a)^2}$. Функция $Y(z)$ имеет один двукратный полюс $z_1=e^a$. В соответствии с (1.21), (1.22) и (1.25) находим

$$x[n]=\mathrm{Res}\{Y(z_1)\}=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to e^a}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^ne^a}{(z-e^a)^2}(z-e^a)^2\right]=\lim_{z\to e^a}(ne^az^{n-1})=ne^{an}.$$

1.3. Свойства Z–преобразования

Между ДПЛ и Z-преобразованием существует тесная взаимосвязь. Свойства Z-преобразования имеют аналоги в обычном преобразовании Лапласа и в ДПЛ. Они легко могут быть получены из свойств ДПЛ с учётом выражения (1.14) или доказаны независимо. Следуя [23], рассмотрим наиболее важные и часто используемые на практике свойства Z-преобразования.

◆ Линейность оригиналов и изображений (теорема линейности)

Z-преобразование линейной комбинации решётчатых функций равно линейной комбинации их изображений, т.е. если

$$y[n]=\sum_{i=1}^{M}a_i\,x_i[n], \tag{1.27}$$

то

$$Y(z)=\sum_{i=1}^{M}a_iX_i(z). \tag{1.28}$$

Действительно, если $X_i(z)=Z\{x_i[n]\}$ $\left(i=\overline{1,\ M}\right)$, то согласно (1.15)

$$Y(z)=Z\{y[n]\}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{M}a_i\,x_i[n]\right\}z^{-n}=\sum_{i=1}^{M}a_i\left\{\sum_{n=0}^{\infty}x_i[n]\;z^{-n}\right\},$$

что и доказывает утверждение (1.28).

Пример 1.5. Пусть $x_1[n]=e^{an}$, $x_2[n]=e^{bn}$, $y[n]=A\,x_1[n]+B\,x_2[n]$. Требуется определить $Y(z)=Z\{y[n]\}$.

Используя результат примера 1.1 и теорему линейности Z-преобразования, получим

$$Y(z)=Z\{A\,e^{an}\}+Z\{B\,e^{bn}\}=\frac{A\,z}{z-e^{a}}+\frac{B\,z}{z-e^{b}}=\frac{z^2(A+B)-z(A\,e^{b}+B\,e^{a})}{(z-e^{a})(z-e^{b})}.$$

Функция $Y(z)$ аналитическая во внешней части круга радиуса $R=\max\{e^{a},e^{b}\}$ с центром в начале координат, т.е. при $|z|>R=\max\{e^{a},e^{b}\}$.

◆ Смещение оригинала во времени (теоремы запаздывания и упреждения)

Пусть $X(z)=Z\{x[n]\}$ и $y[n]=x[n-m]$. Найдем Z-изображение $Y(z)=Z\{y[n]\}$. Согласно (1.15) запишем

$$Y(z)=Z\{y[n]\}=\sum_{n=0}^{\infty}y[n]\,z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x[n-m]\,z^{-n}. \qquad (1.29)$$

Сделав замену переменной $k=n-m$ (при этом $n=k+m$), будем иметь

$$Y(z)=\sum_{k=-m}^{\infty}x[k]\,z^{-(k+m)}=\sum_{k=-m}^{-1}x[k]\,z^{-(k+m)}+\sum_{k=0}^{\infty}x[k]\,z^{-k-m}=$$

$$=z^{-m}X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x[k]\,z^{-(k+m)}=$$

$$=z^{-m}X(z)+x[-m]+x[-m+1]z^{-1}+x[-m+2]\,z^{-2}+\ldots+x[-1]\,z^{-(m-1)}. \qquad (1.30)$$

Отсюда следуют часто используемые формулы

$$Z\{x[n-1]\}=z^{-1}X(z)+x[-1]; \qquad (1.31)$$

$$Z\{x[n-2]\}=z^{-2}X(z)+x[-2]+x[-1]\,z^{-1}; \qquad (1.32)$$

$$Z\{x[n-3]\}=z^{-3}X(z)+x[-3]+x[-2]\,z^{-1}+x[-1]\,z^{-2}. \qquad (1.33)$$

При $x[-m]=x[-m+1]=x[-m+2]=\ldots=x[-1]=0$ из выражения (1.30) получается частный случай, довольно распространённый на практике:

$$Y(z)=z^{-m}X(z). \qquad (1.34)$$

Таким образом, смещению оригинала во временной области на $-m$ тактов (сдвиг функции вправо — запаздывание) соответствует умножение его Z-изображения на комплексный множитель z^{-m}.

Пример 1.6. Пусть $x[n]=e^{an}$, $y[n]=x[n-k]$. Требуется определить Z-изображение $Y(z)=Z\{y[n]\}$.

Используя результат примера 1.1 и формулу (1.30), в предположении, что $x[n]=0$ при $n<0$, получим

$$Y(z)=Z\left\{e^{a(n-k)}\right\}=z^{-k}Z\left\{e^{an}\right\}=z^{-k}\frac{z}{z-e^{a}}=\frac{z^{1-k}}{z-e^{a}}.$$

Функция $Y(z)$ аналитическая (регулярная) во внешней части круга радиуса $R=e^{a}$ с центром в начале координат, т.е. при $|z|>e^{a}$.

Пусть теперь $X(z)=Z\{x[n]\}$ и $y[n]=x[n+m]$. Найдем Z-изображение $Y(z)=Z\{y[n]\}$. Согласно (1.15) запишем

$$Y(z)=Z\{y[n]\}=\sum_{n=0}^{\infty}y[n]\,z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x[n+m]\,z^{-n}. \qquad (1.35)$$

Сделав замену переменной $k=n+m$ (при этом $n=k-m$), будем иметь

$$Y(z)=\sum_{k=m}^{\infty}x[k]\,z^{-(k-m)}=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]\,z^{-k+m}-\sum_{k=0}^{m-1}x[k]\,z^{m-k}=$$

$$=z^{m}X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x[k]\,z^{m-k}=$$

$$=z^{m}X(z)-x[0]\,z^{m}-x[1]\,z^{m-1}-x[2]\,z^{m-2}-\ldots-x[m-1]\,z^{1}. \qquad (1.36)$$

Отсюда следуют часто используемые формулы

$$Z\{x[n+1]\}=z^{1}X(z)-x[0]\,z^{1}; \qquad (1.37)$$

$$Z\{x[n+2]\}=z^{2}X(z)-x[0]\,z^{2}-x[1]\,z^{1}; \qquad (1.38)$$

$$Z\{x[n+3]\}=z^{3}X(z)-x[0]\,z^{3}-x[1]\,z^{2}-x[2]\,z^{1}. \qquad (1.39)$$

При $x[0]=x[1]=x[2]=\ldots=x[m-1]=0$ из выражения (1.36) получается частный случай, довольно распространённый на практике:

$$Y(z)=z^{m}X(z). \qquad (1.40)$$

Таким образом, смещению оригинала во временной области на $+m$ тактов (сдвиг функции влево — упреждение) соответствует умножение его Z-изображения на комплексный множитель z^{m}.

Пример 1.7. Пусть $x[n]=e^{an}$, $y[n]=x[n+k]$. Требуется определить Z-изображение $Y(z)=Z\{y[n]\}$.

Используя результат примера 1.1 и формулу (1.36), получим

$$Y(z)=Z\left\{e^{a(n+k)}\right\}=z^{k}Z\left\{e^{an}\right\}=z^{k}\frac{z}{z-e^{a}}-\sum_{i=0}^{k-1}x[i]\,z^{k-i}=\frac{z^{k+1}}{z-e^{a}}-\sum_{i=0}^{k-1}x[i]\,z^{k-i}.$$

Функция $Y(z)$ аналитическая (регулярная) во внешней части круга радиуса $R = e^{a}$ с центром в начале координат, т.е. при $|z| > e^{a}$.

◆ Конечные разности решётчатой функции

Обратные разности решётчатой функции $x[n]$ определяются индуктивно по формуле •

$$\delta_k[n] = \delta_{k-1}[n] - \delta_{k-1}[n-1], \tag{1.41}$$

где первая конечная разность

$$\delta_1[n] = x[n] - x[n-1]. \tag{1.42}$$

Вторая и третья конечные разности при таком подходе выражаются через значения решётчатой функции следующим образом:

$$\delta_2[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]; \tag{1.43}$$

$$\delta_3[n] = x[n] - 3x[n-1] + 3x[n-2] - x[n-3]. \tag{1.44}$$

Используя свойство линейности Z-преобразования решётчатых функций и формулу (1.29), называемую также теоремой запаздывания, получим формулы для Z-преобразований первых трёх конечных разностей функции $x[n]$:

$$\Delta_1(z) = Z\{\delta_1[n]\} = (1 - z^{-1})X(z) - x[-1]; \tag{1.45}$$

$$\Delta_2(z) = Z\{\delta_2[n]\} = (1 - z^{-1})^2 X(z) - (2 - z^{-1})x[-1] + x[-2]; \tag{1.46}$$

$$\Delta_3(z) = Z\{\delta_3[n]\} =$$

$$= (1 - z^{-1})^3 X(z) - (3 - 3z^{-1} + z^{-2})x[-1] + (3 - z^{-1})x[-2] - x[-3]. \tag{1.47}$$

Если $x[-1] = x[-2] = \ldots = x[-k] = 0$ (именно этот случай чаще всего имеет место на практике), то Z-преобразование k-й конечной разности (1.41) выражается простой формулой

$$\Delta_k(z) = (1 - z^{-1})^k X(z). \tag{1.48}$$

◆ Конечные суммы решётчатой функции

Однократная *конечная сумма* решётчатой функции $x[n]$ определяется формулой

$$s_1[n] = \sum_{m=0}^{n} x[m] = x[0] + x[1] + x[2] + \ldots + x[n]. \tag{1.49}$$

• Прямые разности определяются по индуктивной формуле $\overline{\delta}_k[n] = \overline{\delta}_{k-1}[n+1] - \overline{\delta}_{k-1}[n]$, где $\overline{\delta}_1[n] = x[n+1] - x[n]$.

Первая обратная разность этой суммы

$$\delta_{s1}[n] = s_1[n] - s_1[n-1] = \sum_{m=0}^{n} x[m] - \sum_{m=0}^{n-1} x[m] = x[n]. \qquad (1.50)$$

В соответствии с (1.48) из (1.50) следует выражение для Z-преобразования первой разности однократной конечной суммы

$$\Delta_{s1}(z) = X(z) = (1 - z^{-1}) S_1(z). \qquad (1.51)$$

Отсюда получаем Z-преобразование однократной конечной суммы

$$S_1(z) = \frac{X(z)}{1 - z^{-1}}. \qquad (1.52)$$

Рассмотрим k-кратную конечную сумму решётчатой функции $x[n]$, определяемую индуктивно по формуле

$$s_k[n] = \sum_{m=0}^{n} s_{k-1}[m] = s_{k-1}[0] + s_{k-1}[1] + s_{k-1}[2] + \ldots + s_{k-1}[n]. \qquad (1.53)$$

Можно показать, что её Z-преобразование описывается выражением

$$S_k(z) = \frac{X(z)}{(1 - z^{-1})^k}. \qquad (1.54)$$

Доказательство аналогично доказательству формулы (1.52) с той разницей, что используется $(k-1)$-кратная конечная сумма и полученная формула (1.52).

Операции взятия конечных разностей и конечных сумм решётчатых функций $x[n]$ эквивалентны операциям дифференцирования и интегрирования непрерывных функций $x(t)$. Сравнивая формулы для изображений по Лапласу производных $p^k X(p)$ и интегралов $X(p)/p^k$ от непрерывных функций с формулами (1.48) и (1.54), нетрудно видеть, что множитель $(1 - z^{-1})$ в Z-преобразовании эквивалентен множителю (оператору) p в обычном преобразовании Лапласа.

Пример 1.8. Пусть $x[n] = n$. Требуется определить Z-изображение $X(z) = Z\{x[n]\}$.

Учтём, что в данном случае

$$n = s_1[n] = \sum_{m=0}^{n} \sigma[m] - 1.$$

Воспользовавшись табл.1.1 и формулой (1.52), получим

$$X(z) = \frac{\dfrac{z}{z-1} - 1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Функция $X(z)$ аналитическая во внешней части единичного круга ($R=1$) с центром в начале координат, т.е. при $|z|>1$.

◆ **Теорема об умножении изображений (теорема о свёртке оригиналов)**

Имеются Z-преобразования $X(z)=Z\{x[n]\}$ и $H(z)=Z\{h[n]\}$ двух решётчатых функций $x[n]$ и $h[n]$. Возникает задача определения решётчатой функции $y[n]=Z^{-1}\{X(z)H(z)\}$, Z-изображение которой равно произведению Z-преобразований $X(z)$ и $H(z)$, т.е. $Y(z)=Z\{y[n]\}=X(z)H(z)$.

В соответствии с (1.15) запишем

$$Y(z)=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}x[k]\,z^{-k}\right\}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}h[m]\,z^{-m}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}x[k]\,h[m]\,z^{-(k+m)}. \qquad (1.55)$$

Сделаем в (1.55) замену переменных $n=k+m$, где n изменяется от 0 до ∞. Тогда, полагая $m=n-k$, получим

$$Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}x[k]\,h[n-k]\,z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}x[k]\,h[n-k]\right\}z^{-n}. \qquad (1.56)$$

Сравнивая это выражение с формулой (1.15), приходим к искомому результату

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]\,h[n-k]. \qquad (1.57)$$

Если в выражении (1.55) положить $k=n-m$, то будем иметь

$$Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}x[n-m]\,h[m]\,z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}x[n-m]\,h[m]\right\}z^{-n}. \qquad (1.58)$$

Сравнивая (1.58) с (1.15), приходим к другому выражению для $y[n]$:

$$y[n]=\sum_{m=0}^{\infty}x[n-m]\,h[m]. \qquad (1.59)$$

Соотношения (1.57) и (1.59) называются формулами *дискретной свёртки* решётчатых функций. Обращаем внимание на симметрию операции свёртки относительно свёртываемых функций.

Таким образом, операции умножения двух Z-изображений соответствует операция свёртки их оригиналов (решётчатых функций).

◆ **Теорема об умножении оригиналов (теорема о свёртке изображений)**

Имеются две решётчатые функции $x[n]$ и $h[n]$, Z-изображения которых $X(z)=Z\{x[n]\}$ и $H(z)=Z\{h[n]\}$. Возникает задача нахождения Z-изображения

произведения решётчатых функций $Y(z) = Z\{y[n]\} = Z\{x[n]\,h[n]\}$. По определению Z-преобразования (1.15)

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, h[n]\, z^{-n}. \qquad (1.60)$$

В формуле (1.60) выразим функцию $h[n]$ через обратное Z-преобразование от комплексной переменной v:

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_C H(v)\, v^{n-1}\, dv \right]. \qquad (1.61)$$

Изменяя в (1.61) порядок следования операций суммирования и интегрирования, получим

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{v} \right)^{-n} \right\} H(v)\, v^{-1} dv. \qquad (1.62)$$

Выражение в фигурных скобках является Z-преобразованием решётчатой функции $x[n]$ от комплексной переменной z/v, поэтому

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X\left(\frac{z}{v} \right) H(v)\, v^{-1}\, dv. \qquad (1.63)$$

Из формулы (1.61) следует, что контур интегрирования C в выражении (1.63) охватывает только полюсы функции $H(v)\,v^{-1}$, но не охватывает полюсы функции $X(z/v)$.

Выразим теперь в формуле (1.60) функцию $x[n]$ через обратное Z-преобразование от комплексной переменной v:

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)\, v^{n-1} dv \right] h[n]\, z^{-n}. \qquad (1.64)$$

Изменяя в (1.64) порядок следования операций суммирования и интегрирования, получим

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \left(\frac{z}{v} \right)^{-n} \right\} v^{-1} dv. \qquad (1.65)$$

Выражение в фигурных скобках является Z-преобразованием решётчатой функции $h[n]$ от комплексной переменной z/v, поэтому

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v) H\left(\frac{z}{v} \right) v^{-1}\, dv. \qquad (1.66)$$

Из формулы (1.64) следует, что контур интегрирования C в выражении (1.66) охватывает только полюсы функции $X(v)v^{-1}$, но не охватывает полюсы функции $H(z/v)$.

Формулы (1.63) и (1.66) называют *комплексной свёрткой* (свёрткой Z-изображений). Обращаем внимание на симметрию операции комплексной свёртки относительно свёртываемых функций.

Таким образом, операции умножения двух оригиналов (решётчатых функций) соответствует операция комплексной свёртки их Z-изображений.

Пример 1.9. Пусть $x[n]=n^2$. Требуется определить Z-изображение $X(z)=Z\{x[n]\}$.

Полагая $n^2=n\cdot n$, с учётом результата примера 1.8 по формуле (1.66) будем иметь

$$X(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{v}{(v-1)^2}\,\frac{\frac{z}{v}}{\left(\frac{z}{v}-1\right)^2}\,\frac{dv}{v}=\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z\,v\,dv}{(v-1)^2(z-v)^2}.$$

При вычислении интеграла с помощью формулы (1.22) вычет следует брать только в полюсе $v_1=1$ (двукратный полюс). Используя формулу (1.25) при $m=2$, получаем искомое Z-изображение:

$$X(z)=\lim_{v\to 1}\frac{d}{dv}\left[\frac{z\,v}{(v-1)^2(z-v)^2}(v-1)^2\right]=\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

Функция $X(z)$ аналитическая во внешней части единичного круга ($R=1$) с центром в начале координат, т.е. при $|z|>1$.

◆ Предельные соотношения для решётчатых функций

♦ Бесконечная сумма отсчётов решётчатой функции $x[n]$ может быть получена из формулы (1.15) предельным переходом при $z\to 1$:

$$s_1[\infty]=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]=\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}x[n]\,z^{-n}=\lim_{z\to 1}X(z). \qquad (1.67)$$

♦ Бесконечная сумма квадратов отсчётов решётчатой функции $x[n]$ может быть получена из выражения (1.60) с учётом (1.66) при $h[n]=x[n]$ предельным переходом при $z\to 1$:

$$s_2[\infty]=\sum_{n=0}^{\infty}x^2[n]=\lim_{z\to 1}\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)X\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}\,dv=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)X\left(\frac{1}{v}\right)v^{-1}\,dv. \qquad (1.68)$$

Контур интегрирования C в выражении (1.68) охватывает только полюсы функции $X(v)v^{-1}$, но не охватывает полюсы функции $X(1/v)$. В качестве контура C на Z-плоскости обычно используется окружность единичного радиуса.

♦ Предельное значение решётчатой функции $x[n]$ при $n \to \infty$ (теорема о конечном значении).

Воспользовавшись формулой Z-преобразования для первой конечной разности (1.45), запишем

$$\Delta_1(z) = Z\{x[n] - x[n-1]\} = (1 - z^{-1})\,X(z) - x[-1]\,. \tag{1.69}$$

С другой стороны, на основании формулы (1.67) имеем

$$\lim_{z \to 1} \Delta_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] - \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1] = \sum_{n=0}^{\infty} \{x[n] - x[n-1]\} =$$

$$= \{x[0] - x[-1]\} + \{x[1] - x[0]\} + \{x[2] - x[1]\} + \{x[3] - x[2]\} + \ldots +$$

$$+ \{x[n] - x[n-1]\} + \ldots = \lim_{n \to \infty} x[n] - x[-1]. \tag{1.70}$$

Из выражений (1.69) и (1.70) получаем искомую формулу

$$\lim_{n \to \infty} x[n] = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})\,X(z)\,. \tag{1.71}$$

♦ Предельное значение решётчатой функции $x[n]$ при $n \to 0$ (теорема о начальном значении).

Из определения Z-преобразования (1.15) следует

$$\lim_{n \to 0} x[n] = x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)\,. \tag{1.72}$$

1.4. Применение Z–преобразования для решения линейных разностных уравнений

Пусть требуется решить линейное уравнение в конечных разностях N-го порядка

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} a_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} b_k y[n-k] \tag{1.73}$$

с начальными условиями

$$y[-1], \quad y[-2], \quad y[-3], \quad \ldots, \quad y[-N]\,. \tag{1.74}$$

Здесь предполагается, что $x[n] = 0$ при $n < 0$, т.е. входное воздействие подаётся начиная с момента «дискретного времени» $n = 0$.

С учётом формулы (1.30) возьмём Z-преобразование от обеих частей уравнения (1.73):

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^{N} b_k \left\{ z^{-k} Y(z) + \sum_{i=-k}^{-1} y[i]\; z^{-(i+k)} \right\}, \tag{1.75}$$

или в развёрнутом виде

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{M} a_k\, z^{-k} X(z)-\sum_{k=1}^{N} b_k \Big\{ z^{-k} Y(z)+y[-k]+y[-k+1]\, z^{-1}+$$

$$+\, y[-k+2]\, z^{-2}+\ldots+y[-1]\, z^{-(k-1)} \Big\}. \qquad (1.76)$$

Здесь $X(z)=Z\{x[n]\}$, $Y(z)=Z\{y[n]\}$.

Решая алгебраическое уравнение (1.75), выразим Z-преобразование выходного процесса $Y(z)=Z\{y[n]\}$ через Z-преобразование входного процесса $X(z)=Z\{x[n]\}$ и начальные условия (1.74):

$$Y(z)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{M} a_k z^{-k} X(z)-\sum\limits_{k=1}^{N} b_k \left\{ \sum\limits_{i=-k}^{-1} y[i]\, z^{-(i+k)} \right\}}{1+\sum\limits_{k=1}^{N} b_k z^{-k}}. \qquad (1.77)$$

Нахождение искомой решётчатой функции $y[n]$ осуществляется с помощью обратного Z-преобразования $y[n]=Z^{-1}\{Y(z)\}$. Для этого можно воспользоваться теорией вычетов (см. § 1.2) либо таблицей Z-преобразований. Мощным средством вычисления Z-преобразований является система компьютерной математики Mathcad.

Пример 1.10. Решить линейное разностное уравнение

$$y[n]=x[n]-0,4\,x[n-1]-0,12\,x[n-2]-0,5\,y[n-1]+0,24\,y[n-2]$$

при ступенчатом входном воздействии $x[n]=\sigma[n]$ и ненулевых начальных условиях:

$$y[-1]=0,5\,;\ y[-2]=0,2\,.$$

В соответствии с формулой (1.77) и с учётом Z-преобразования входного воздействия (см. табл.1.1) $Z\{\sigma[n]\}=z/(z-1)$ запишем выражение для Z-преобразования искомой решётчатой функции:

$$Y(z)=\frac{\frac{z}{z-1}(1-0,4\,z^{-1}-0,12\,z^{-2})-0,5\cdot 0,5+0,24\cdot(0,2+0,5\,z^{-1})}{1+0,5\,z^{-1}-0,24\,z^{-2}}=$$

$$=\frac{z(z^2-0,4\,z-0,12)-(z-1)(0,202\,z^2-0,12\,z)}{(z-1)(z^2+0,5\,z-0,24)}.$$

Для вычисления обратного Z-преобразования воспользуемся теорией вычетов. Подынтегральное выражение обратного Z-преобразования [см. (1.26)]

$$W(z)=Y(z)\,z^{n-1}=\frac{z^n\left[(z^2-0,4\,z-0,12)-(z-1)(0,202\,z-0,12)\right]}{(z-1)(z-0,3)(z+0,8)}$$

имеет три простых вещественных полюса: $z_1 = 1$; $z_2 = 0{,}3$; $z_3 = -0{,}8$. Воспользовавшись формулой (1.24), находим вычеты:

$$\mathrm{Res}\{z_1\} = \lim_{z \to 1} \frac{z^n\left[(z^2 - 0{,}4z - 0{,}12) - (z-1)(0{,}202z - 0{,}12)\right]}{(z-0{,}3)(z+0{,}8)} \approx 0{,}381;$$

$$\mathrm{Res}\{z_2\} = \lim_{z \to 0{,}3} \frac{z^n\left[(z^2 - 0{,}4z - 0{,}12) - (z-1)(0{,}202z - 0{,}12)\right]}{(z-1)(z+0{,}8)} \approx 0{,}249 \cdot 0{,}3^n;$$

$$\mathrm{Res}\{z_3\} = \lim_{z \to -0{,}8} \frac{z^n\left[(z^2 - 0{,}4z - 0{,}12) - (z-1)(0{,}202z - 0{,}12)\right]}{(z-1)(z-0{,}3)(z+0{,}8)} \approx 0{,}168 \cdot (-0{,}8)^n.$$

По формуле (1.22) получаем искомую решётчатую функцию:

$$y[n] = 0{,}381 + 0{,}249 \cdot 0{,}3^n + 0{,}168 \cdot (-0{,}8)^n.$$

Отсюда следует: $y[0] = 0{,}798$, $\lim\limits_{n \to \infty} y[n] = 0{,}381$. График функции $y[n]$ изображён на рис.1.2, где ординаты отсчётов соединены прямыми линиями, что соответствует линейной интерполяции (воспроизведению поведения функции между отсчётами).

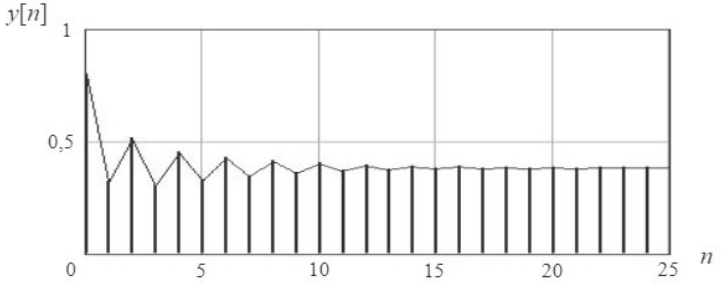


Рис.1.2. Зависимость $y[n]$ в примере 1.10

1.5. Модифицированное Z–преобразование

При обычном Z-преобразовании (см. § 1.2 — 1.4) отсчёты дискретного сигнала $x[n]$ определяются в моменты времени $t = nT$ ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$). Для того чтобы иметь информацию о значениях дискретного сигнала и в другие моменты времени, оперируют так называемыми смещёнными решётчатыми функциями [ср. с (1.2)]

$$x[n + \varepsilon] = x(t)\big|_{t=(n+\varepsilon)T}, \qquad (1.78)$$

где ε — независимый вещественный параметр, принимающий произвольные значения от нуля до единицы: $\varepsilon \in [0, 1)$.

Формирование смещённой решётчатой функции согласно (1.78) эквивалентно смещению производящей непрерывной функции $x(t)$ влево (упреждение) на величину εT.

Для смещённой решётчатой функции $x[n+\varepsilon]$ аналогично (1.15) вводится *модифицированное* Z-преобразование • [17, 41, 62]

$$X(z,\ \varepsilon) = Z_\varepsilon\{x(t)\} = Z\{x[n+\varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+\varepsilon]\, z^{-n}. \qquad (1.79)$$

При таком определении модифицированного Z-преобразования обычное (немодифицированное) Z-преобразование может быть найдено предельным переходом

$$X(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} X(z,\ \varepsilon). \qquad (1.80)$$

При заданной функции $x(t)$ модифицированное Z-преобразование можно представить в виде бесконечного ряда (1.79). Однако удобнее образовать функцию $x(t+\varepsilon T)$ и найти обычное Z-преобразование этой функции, пользуясь стандартными приёмами. Если же функция задана в дискретной форме $x[n]$, то её следует вначале преобразовать к виду $x[n+\varepsilon]$, а затем по формуле (1.79) вычислить модифицированное Z-преобразование.

Применяя обычное обратное Z-преобразование к функции $X(z,\ \varepsilon)$ и рассматривая ε как независимый параметр, получим формулу обращения модифицированного Z-преобразования [ср. с (1.21)]:

$$x[n+\varepsilon] = Z^{-1}\{X(z,\ \varepsilon)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z,\ \varepsilon)\ z^{n-1} dz. \qquad (1.81)$$

Для вычисления интеграла в формуле (1.81) удобно воспользоваться теоремой о вычетах [см. (1.22) — (1.25)].

Все свойства модифицированного Z-преобразования с точностью до обозначений повторяют свойства обычного Z-преобразования, довольно подробно рассмотренные в § 1.3 (теоремы линейности, запаздывания и упреждения, теоремы о свёртках оригиналов и изображений, предельные соотношения). Модифицированное Z-преобразование, как и обычное Z-преобразование, можно использовать для решения линейных разностных уравнений с учётом начальных условий. Таблица модифицированного Z-преобразования приведена в [17].

Пример 1.11. Пусть $x(t) = e^{-\lambda t}$. Требуется определить $Z_\varepsilon\{x(t)\}$.

В соответствии с определением модифицированного Z-преобразования (1.79) запишем

$$X(z, \varepsilon) = Z_\varepsilon\{e^{-\lambda t}\} = Z\{x[n+\varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+\varepsilon]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda T(n+\varepsilon)} z^{-n} =$$

$$= e^{-\lambda T\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda T n} z^{-n} = e^{-\lambda T\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda T} z^{-1}\right)^n = \frac{e^{-\lambda T\varepsilon}}{1 - e^{-\lambda T} z^{-1}} = \frac{e^{-\lambda T\varepsilon}}{1 - e^{-\lambda T} z^{-1}} = \frac{z\, e^{-\lambda T\varepsilon}}{z - e^{-\lambda T}}.$$

• Здесь использованы различные обозначения модифицированного Z-преобразования.

Пример 1.12. Пусть $x[n]=n^2$. Требуется определить модифицированное Z-преобразование $X(z,\varepsilon)=Z\{x[n+\varepsilon]\}$.

С учётом упреждения εT непрерывной функции $x(t)$ запишем заданную дискретную функцию в форме $x[n+\varepsilon]=(n+\varepsilon T)^2$ и по формуле (1.79) найдём модифицированное Z-преобразование

$$X(z,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\varepsilon)^2 z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}n^2 z^{-n}+2\sum_{n=0}^{\infty}n\varepsilon z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^2 z^{-n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}n^2 z^{-n}+2\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}n z^{-n}+\varepsilon^2\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=Z\{n^2\}+2\varepsilon\,Z\{n\}+\varepsilon^2 Z\{\sigma[n]\}.$$

Воспользовавшись Z-изображениями решётчатых функций $x[n]=n^2$, $x[n]=n$ и $x[n]=\sigma[n]$ (см. табл.1.1), получим

$$X(z,\varepsilon)=\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}+2\varepsilon\frac{z}{(z-1)^2}+\varepsilon^2\frac{z}{z-1}=z\frac{(z+1)+2\varepsilon(z-1)+\varepsilon^2(z-1)^2}{(z-1)^3}.$$

Пример 1.13. Пусть задано модифицированное Z-изображение решётчатой функции $X(z,\varepsilon)=\dfrac{e^{a\varepsilon}z\left[e^a+\varepsilon(z-e^a)\right]}{(z-e^a)^2}$. Требуется найти функцию $x[n]$.

Используя формулу обращения модифицированного Z-преобразования (1.81), запишем

$$x[n+\varepsilon]=Z^{-1}\{X(z,\varepsilon)\}=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{e^{a\varepsilon}z\left[e^a+\varepsilon(z-e^a)\right]}{(z-e^a)^2}\,z^{n-1}\,dz.$$

Подынтегральная функция модифицированного обратного Z-преобразования $Y(z)=\dfrac{e^{a\varepsilon}z\left[e^a+\varepsilon(z-e^a)\right]}{(z-e^a)^2}\,z^{n-1}=\dfrac{e^{a\varepsilon}z^n\left[e^a+\varepsilon(z-e^a)\right]}{(z-e^a)^2}$ имеет один двукратный полюс $z_1=e^a$. В соответствии с (1.22) и (1.25) находим

$$x[n+\varepsilon]=\mathrm{Res}\{Y(z_1)\}=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to e^a}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{a\varepsilon}z^n\left[e^a+\varepsilon(z-e^a)\right]}{(z-e^a)^2}(z-e^a)^2\right]=$$

$$=(n+\varepsilon)e^{a(n+\varepsilon)}.$$

Отсюда получим искомую функцию • $x[n]=n e^{an}$.

1.6. Преобразование Фурье решётчатой функции

Наряду с Z-преобразованием в теории дискретных линейных систем широко используется преобразование Фурье решётчатой функции, которое можно ввести формально как частный случай Z-преобразования при $z=e^{j\omega T}$. Действи-

• См. пример 1.4.

тельно, полагая в (1.15) $z = e^{j\omega T}$, получим формулу прямого преобразования Фурье

$$X\left(e^{j\omega T}\right) = F\{x[n]\} = Z\{x[n]\}\big|_{z=\exp(j\omega T)} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega T\, n}, \qquad (1.82)$$

где $F\{...\}$ — символ преобразования Фурье.

Аналогично из выражения (1.21) находим формулу обратного преобразования Фурье решётчатой функции

$$x[n] = F^{-1}\left\{X\left(e^{j\omega T}\right)\right\} = Z^{-1}\{X(z)\}\Big|_{z=\exp(j\omega T)} = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} X\left(e^{j\omega T}\right) e^{j\omega T\, n} d\omega. \qquad (1.83)$$

Из (1.82) следует, что функция $X\left(e^{j\omega T}\right)$ является периодической по частоте с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_д = 2\pi/T = 2\pi f_д$, поскольку $e^{j\omega T} = \exp\left[j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}k\right)T\right]$, где k — произвольное целое число. Периодическими функциями с тем же периодом $\omega_д$ являются также модуль $\left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ и аргумент $\mathrm{Arg}\left[X\left(e^{j\omega T}\right)\right]$ этой функции.

Применив к (1.82) формулу Эйлера $e^{j\omega T} = \cos(\omega T) + j\sin(\omega T)$, нетрудно показать, что в случае вещественного дискретного сигнала $x[n]$ модуль спектра $\left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ является чётной, а аргумент $\mathrm{Arg}\left[X\left(e^{j\omega T}\right)\right]$ — нечётной функцией частоты ω:

$$\left|X\left(e^{-j\omega T}\right)\right| = \left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right|; \qquad (1.84)$$

$$\mathrm{Arg}\left[X\left(e^{-j\omega T}\right)\right] = -\mathrm{Arg}\left[X\left(e^{j\omega T}\right)\right]. \qquad (1.85)$$

Это позволяет рассматривать спектр $X\left(e^{j\omega T}\right)$ вещественного дискретного сигнала лишь в основной полосе частот $\omega \in [0,\ \pi f_д]$.

Для комплексного дискретного сигнала $x[n]$ модуль спектра $\left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ не является чётной, а аргумент $\mathrm{Arg}\left[X\left(e^{j\omega T}\right)\right]$ — нечётной функцией частоты ω, т.е. условия (1.84) и (1.85) не выполняются, поэтому спектр $X\left(e^{j\omega T}\right)$ комплексного сигнала $x[n]$ необходимо рассматривать в симметричной полосе частот $\omega \in [-\pi f_д,\ \pi f_д]$.

Преобразование Фурье решётчатой функции $x[n]$ используется для представления её спектра. Формально все свойства Z-преобразования, рассмотренные в § 1.3, можно переформулировать в терминах преобразования Фурье. Однако мы рассмотрим преобразование Фурье в другом аспекте, исходя из связи спектров аналоговых $x(t)$ и дискретных $x[n]$ сигналов.

С позиций *теории модуляции* [25] дискретизацию можно рассматривать как амплитудно-импульсную модуляцию периодической последовательности бесконечно коротких импульсов (δ-функций), следующих с интервалом дискретизации $T = 1/f_д$, сигналом $x(t)$:

$$x[n] = \eta(t)\, x(t), \tag{1.86}$$

где

$$\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{1.87}$$

— немодулированная периодическая последовательность δ-импульсов.

Представим периодическую последовательность (1.87) рядом Фурье в комплексной форме:

$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\, e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, \tag{1.88}$$

где коэффициенты разложения •

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}\, dt = \frac{1}{T} = f_д. \tag{1.89}$$

Определим спектральную плотность немодулированной последовательности δ-импульсов (1.87). Для этого вычислим прямое преобразование Фурье •• от выражения (1.88) с учётом (1.89):

$$\mathrm{H}_д(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right)t}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\, 2\pi\, \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right) =$$

$$= 2\pi f_д \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi f_д k) = \omega_д \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_д k). \tag{1.90}$$

Из выражения (1.90) следует, что частотный спектр немодулированной периодической последовательности δ-импульсов (1.87) является равномерным, дискретным, линейчатым. Интервал между соседними линиями спектра равен частоте дискретизации $f_д = 1/T$, а интенсивность (амплитуда) спектральных линий пропорциональна $\omega_д = 2\pi f_д$.

• При взятии интеграла здесь используется фильтрующее свойство δ-функции.

•• Индекс «д» у символа спектра здесь и далее указывает на то, что рассматривается спектр дискретного сигнала.

Спектральная плотность аналогового сигнала $x(t)$ описывается преобразованием Фурье

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\,. \qquad (1.91)$$

Спектр произведения двух функций (1.86) равен свёртке спектров этих функций, поэтому с учётом (1.90) и (1.91) получим

$$X\left(e^{j\omega T}\right)=X_{\text{д}}(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\text{Н}_{\text{д}}(j\xi)X(j\omega-j\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi f_{\text{д}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\xi-\omega_{\text{д}}k)\,X(j\omega-j\xi)d\xi=$$

$$=f_{\text{д}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega-j\xi)\,\delta(\xi-\omega_{\text{д}}k)d\xi=f_{\text{д}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j\omega-j\,\omega_{\text{д}}k)\,. \qquad (1.92)$$

Отметим, что спектральные плотности аналогового $X(j\omega)$ и дискретного $X\left(e^{j\omega T}\right)$ сигналов имеют разную размерность: размерность $X(j\omega)$ равна [***сигнал/частота***], а размерность $X\left(e^{j\omega T}\right)$ — просто [***сигнал***].

Таким образом, спектр дискретного сигнала $X\left(e^{j\omega T}\right)$ с точностью до постоянного множителя $f_{\text{д}}=1/T$ представляет собой сумму бесконечного числа копий спектра исходного аналогового сигнала $X(j\omega)$, расположенных на оси частот через интервалы, равные частоте дискретизации $\omega_{\text{д}}=2\pi f_{\text{д}}=2\pi/T$. На рис.1.3,*а* показан модуль спектра аналогового сигнала $|X(j\omega)|$, а на рис.1.3,*б* — модуль спектра соответствующего дискретного сигнала $\left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ (тёмной заливкой помечен спектр в основной полосе частот, а светлой — инверсный спектр).

Если аналоговый сигнал $x(t)$ имеет финитный спектр $X(j\omega)$, т.е. такой, что его составляющие равны нулю при $|\omega|>2\pi F_{\text{в}}$, причём граничная частота спектра

$$F_{\text{в}}\le f_{\text{д}}/2, \qquad (1.93)$$

то, как следует из (1.92), спектр дискретного сигнала в основной полосе частот $\omega\in[0,\ \pi f_{\text{д}}]$

$$X\left(e^{j\omega T}\right)=\frac{1}{T}X(j\omega)=f_{\text{д}}X(j\omega)\,. \qquad (1.94)$$

В этом случае копии спектра аналогового сигнала образуют спектр дискретного сигнала без наложения, как показано на рис.1.3,*б*, что позволяет рас-

сматривать спектр дискретного сигнала $X\left(e^{j\omega T}\right)$ лишь в основной полосе частот • $\omega \in [0,\ \pi f_д]$, поскольку при необходимости всегда можно получить его периодическое продолжение.

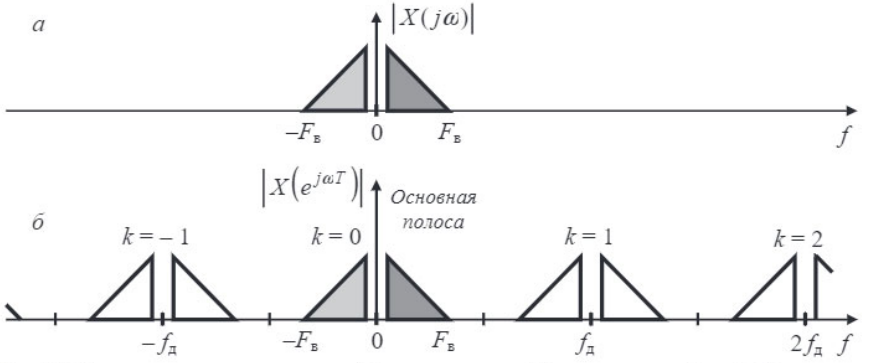


Рис.1.3. Модули спектров аналогового (*а*) и дискретного (*б*) сигналов при $F_в < f_д/2$

Если спектр аналогового сигнала не является финитным или же является финитным, но его граничная частота не удовлетворяет условию (1.93), то при дискретизации происходит наложение копий спектра аналогового сигнала, как показано на рис.1.4. В этом случае спектр дискретного сигнала $X\left(e^{j\omega T}\right)$ в основной полосе частот $\omega \in [0,\ \pi f_д]$ не совпадает со спектром исходного аналогового сигнала $X(j\omega)$.

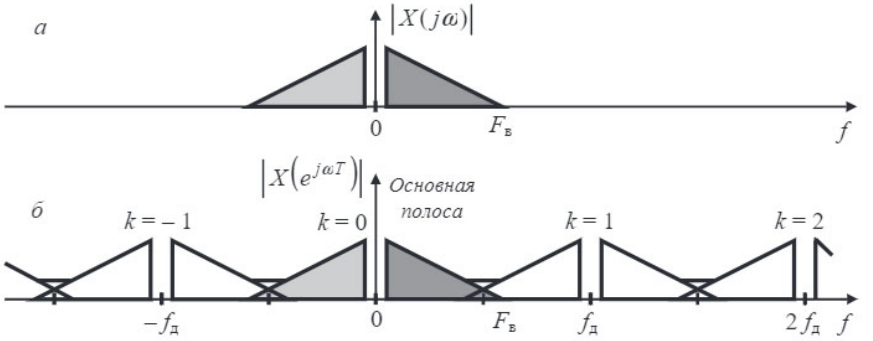


Рис.1.4. Модули спектров аналогового (*а*) и дискретного (*б*) сигналов при $F_в > f_д/2$

• В основной полосе $\omega \in [0,\ \pi f_д]$ можно рассматривать спектр вещественного сигнала $x[n]$. Если же сигнал является комплексным, то его спектр следует рассматривать в симметричной полосе $\omega \in [-\pi f_д,\ \pi f_д]$.

Для нахождения мощности дискретного сигнала $x[n]$ используется *формула Парсеваля*, которую можно получить из выражения (1.68) при $z = e^{j\omega T}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^2[n] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| X\left(e^{j\omega T}\right) \right|^2 d\omega. \qquad (1.95)$$

1.7. Дискретное преобразование Фурье

Рассмотрим частный, но чрезвычайно важный для практических приложений случай, когда решётчатая функция $x[n]$ имеет конечное число ненулевых отсчётов: $x[n]\ \left(n = \overline{0,\ N-1}\right)$. При этом частота ω спектра такой функции становится дискретной. Интервал дискретизации по частоте определяется временной протяженностью функции $x[n]$ и равен $\Delta\omega = \frac{2\pi}{TN}$, поэтому $\omega = \Delta\omega k = \frac{2\pi}{TN}k$, где k — целое число; $k = \overline{0,\ N-1}$ (число k представляет собой номер дискретной составляющей спектра решётчатой функции конечной длины). Подставляя это значение частоты в формулу (1.82) прямого преобразования Фурье решётчатой функции, получим

$$X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{TN}kTn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = \overline{0,\ N-1}. \qquad (1.96)$$

Это выражение называется формулой прямого дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

Заменяя в формуле (1.83) дифференциал $d\omega$ интервалом дискретизации по частоте $\Delta\omega$, частоту ω величиной $\Delta\omega\, k$, а интеграл конечной суммой, получим формулу обратного дискретного преобразования Фурье (обратного ДПФ)

$$x[n] = \frac{T}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) e^{j\frac{2\pi}{TN}Tkn} \frac{2\pi}{TN} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = \overline{0,\ N-1}. \qquad (1.97)$$

Поскольку ДПФ описывает дискретный линейчатый спектр, принято обозначать его составляющие $X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) = X(k)$, при этом формулы прямого (1.96) и обратного (1.97) ДПФ принимают вид

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = \overline{0,\ N-1}; \qquad (1.98)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = \overline{0,\ N-1}. \qquad (1.99)$$

Вводя обозначение

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}, \tag{1.100}$$

выражения (1.98) и (1.99) для прямого и обратного ДПФ можно записать в более компактной форме [6]:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{k\,n}, \quad k = \overline{0,\ N-1}; \tag{1.101}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W_N^{-k\,n}, \quad n = \overline{0,\ N-1}. \tag{1.102}$$

Вычисление спектра $X(k)$ решётчатой функции $x[n]$ конечной длины (КИХ-последовательности) непосредственно по формуле ДПФ (1.101) требует выполнения очень большого числа арифметических операций: N^2 операций умножения и $N(N-1)$ операций сложения комплексных чисел.

Весьма эффективным способом уменьшения вычислительных затрат при определении спектра КИХ-последовательности является использование алгоритмов быстрого преобразования Фурье (алгоритмов БПФ), которые при длине последовательности $N = 2^{\nu}$ требуют для вычисления спектра в $2N/\nu$ раз меньшего числа операций умножения и в $(N-1)/\nu$ раз меньшего числа операций сложения комплексных чисел по сравнению с прямым методом вычисления ДПФ по формуле (1.101). Эффективность алгоритмов БПФ обусловлена рациональной организацией вычислительного процесса.

Краткие итоги

1. Сигналы — физические процессы, отображающие информацию, — подразделяются на аналоговые и дискретные. Аналоговые сигналы являются непрерывными функциями времени $x(t)$, а дискретные — функциями «дискретного времени» $x[n]$ (здесь аргументом является номер отсчёта). По сути дела дискретный сигнал (решётчатая функция) представляет собой счётную последовательность чисел.

2. Условием однозначного восстановления аналогового сигнала $x(t)$ по дискретной выборке $x[n]$ является финитный характер спектра и выбор частоты дискретизации в соответствии с соотношением (1.7).

3. Цифровой сигнал $\tilde{x}[n]$ является разновидностью дискретного сигнала, значения которого квантованы по уровню и представлены цифровыми кодами.

4. Для описания дискретных процессов $x[n]$ применяются разностные уравнения, дискретное преобразование Лапласа, Z-преобразование и преобразование Фурье.

Наиболее универсальным, но и наиболее сложным является аппарат разностных уравнений (аналог дифференциальных уравнений в теории непрерывных процессов). Он не имеет ограничений на класс описываемых процессов.

5. Аппарат дискретного преобразования Лапласа является обобщением классического преобразования Лапласа на класс дискретных сигналов. Дискретное преобразование Лапласа

(1.13) оказалось не очень удобным аппаратом для практического использования вследствие того, что изображение $X(q)$ фактически является функцией экспоненты e^{q}.

6. Более удобным является аппарат Z-преобразования, получаемого из ДПЛ заменой комплексного аргумента (1.14). При этом Z-изображение решётчатой функции $X(z)$ имеет дробно-рациональный вид.

7. Z-преобразование в теории дискретных систем играет такую же роль, как и обычное (классическое) преобразование Лапласа в теории непрерывных (аналоговых) систем.

8. Все известные свойства преобразования Лапласа (теоремы линейности, сдвига во временной и в частотной областях, свёртки оригиналов и изображений, теоремы о начальных и конечных значениях) имеют соответствующие аналоги для Z-преобразования.

9. Существуют таблицы соответствия между оригиналами (решётчатыми функциями) и их Z-изображениями (см. табл.1.1). Для вычисления обратного Z-преобразования удобно использовать метод контурного интегрирования с использованием теории вычетов.

10. Кроме обычного (одностороннего) Z-преобразования, определяемого формулой (1.15), иногда применяют двустороннее Z-преобразование, определяемое формулой (1.16). Связь между односторонним и двусторонним Z-преобразованиями выражается соотношением (1.17).

11. Аппарат Z-преобразования предоставляет удобный алгоритм для решения линейных уравнений в конечных разностях с учётом начальных условий.

12. Кроме обычного Z-преобразования применяют модифицированное Z-преобразование, при котором отсчёты решётчатой функции $x[n]$ сдвигаются влево на величину ε, где $\varepsilon \in [0,1)$ рассматривается как параметр. Модифицированное Z-преобразование определяется выражением (1.79). Обычное Z-преобразование можно получить из модифицированного предельным переходом (1.80). Модифицированное обратное Z-преобразование определяется выражением (1.81). Все свойства модифицированного Z-преобразования точно такие же, как и свойства обычного Z-преобразования.

13. Преобразование Фурье решётчатых функций $x[n]$, неограниченных по длительности (БИХ-последовательностей), формально вводится как частный случай Z-преобразования при $z = e^{j\omega T}$. Преобразование Фурье описывает спектр сигнала. В случае вещественных решётчатых функций $x[n]$ модуль спектра является чётной функцией, а аргумент — нечётной функцией частоты ω [см. (1.84) и (1.85)]. Для комплексных решётчатых функций $x[n]$ эти свойства не справедливы.

14. Спектр дискретного сигнала с точностью до постоянного множителя представляет собой сумму бесконечного числа копий спектра исходного аналогового сигнала, расположенных на оси частот через интервалы, равные частоте дискретизации.

15. Дискретное преобразование Фурье рассматривается как преобразование Фурье последовательностей конечной длины (КИХ-последовательностей). При этом с введением обозначения (1.100) ДПФ записывается в компактной форме (1.101) и (1.102). Для вычисления ДПФ на практике чаще всего используют алгоритмы БПФ, позволяющие существенно уменьшить вычислительные затраты на расчёт спектра КИХ-последовательности.

16. Из приведённого обзора следует, что все названные *инженерные* методы описания дискретных сигналов (ДПЛ, Z-преобразование, преобразование Фурье и ДПФ) имеют одну и ту же математическую основу, поэтому аналогичны основные свойства этих преобразований.

17. Мощным средством для вычисления Z-преобразований и преобразований Фурье (прямых и обратных) может служить система компьютерной математики Mathcad.

Глава 2

АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

2.1. Алгоритм линейной цифровой фильтрации

Для того чтобы разобраться в сущности цифровой фильтрации, прежде всего необходимо определить математические операции, которые осуществляются над сигналами в ЦФ. Для этого полезно вспомнить определение аналогового фильтра.

Линейный аналоговый фильтр представляет собой четырёхполюсник, в котором реализуется линейное преобразование входного сигнала $x(t)$ в выходной сигнал $y(t)$. Математически это преобразование описывается обыкновенным линейным *дифференциальным уравнением* N-го порядка

$$y(t)=\sum_{k=0}^{M}\alpha_k\frac{d^k}{dt^k}x(t)-\sum_{k=1}^{N}\beta_k\frac{d^k}{dt^k}y(t),\quad M<N, \tag{2.1}$$

где $\alpha_k\left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $\beta_k\left(k=\overline{1,\ N}\right)$ — коэффициенты, являющиеся либо константами, либо функциями времени t; N — порядок фильтра.

Линейный дискретный фильтр представляет собой дискретный вариант аналогового линейного фильтра, в котором квантованной (дискретизированной) является независимая переменная — время $t=nT$ ($T=1/f_д$ — шаг дискретизации). При этом целочисленная переменная n может рассматриваться как «дискретное время», а сигналы $x[n]$ и $y[n]$ как функции «дискретного времени» (так называемые решётчатые функции).

Математически работа линейного дискретного фильтра описывается линейным *разностным уравнением* вида

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M}a_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N}b_k y[n-k], \tag{2.2}$$

где $x[n]$ и $y[n]$ — отсчёты входного и выходного сигналов соответственно; $a_k\left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $b_k\left(k=\overline{1,\ N}\right)$ — коэффициенты алгоритма фильтрации, представляющие собой либо константы, либо функции «дискретного времени» n.

Алгоритм фильтрации (2.2) может быть реализован средствами аналоговой либо цифровой техники. В первом случае отсчёты входных $x[n]$ и выходных $y[n]$ сигналов по уровню не квантуются и могут принимать любые значения в диапазоне их изменения (т.е. имеют мощность континуума). Во втором случае отсчёты сигналов $x[n]$ и $y[n]$ подвергаются квантованию по уровню, в связи с чем они могут принимать только «разрешённые» значения, определяемые раз-

рядностью цифровых устройств. Кроме того, квантованные отсчёты сигналов кодируются, поэтому арифметические операции, выполняемые в выражении (2.2), осуществляются не над самими сигналами, а над их двоичными кодами. Из-за квантования по уровню сигналов $x[n]$ и $y[n]$, а также коэффициентов $a_k \left(k = \overline{0,\ M}\right)$ и $b_k \left(k = \overline{1,\ N}\right)$ равенство в алгоритме (2.2) не может быть точным и выполняется лишь приближённо.

Таким образом, линейный ЦФ представляет собой цифровое устройство, приближённо реализующее алгоритм фильтрации (2.2).

Главный недостаток аналоговых и дискретных фильтров заключается в том, что при изменении условий работы (температуры, давления, влажности, питающих напряжений, старения элементов и т.д.) их параметры изменяются. Это приводит к *неконтролируемой* погрешности выходного сигнала, т.е. к низкой точности обработки.

Погрешность выходного сигнала в ЦФ не зависит от условий работы (температуры, давления, влажности, питающих напряжений и т.п.), а определяется лишь шагом квантования сигналов и алгоритмом работы самого фильтра, т.е. внутренними причинами. Эта погрешность является *контролируемой*, её можно уменьшить, увеличивая число разрядов для представления отсчётов цифровых сигналов. Именно этим обстоятельством обусловлены основные преимущества цифровых фильтров перед аналоговыми и дискретными (высокая точность обработки сигналов и стабильность характеристик ЦФ) [8].

Операция квантования сигналов по уровню является сугубо нелинейной, поэтому ЦФ, реализующие линейный алгоритм (2.2), строго говоря, представляют собой нелинейные устройства, к которым не применимы математические методы анализа и синтеза линейных систем. Однако в большинстве случаев число разрядов цифровых кодов для представления сигналов в ЦФ выбирается достаточно большим, что позволяет считать сигналы приближённо дискретными, а цифровые фильтры, реализующие алгоритм (2.2), — приближённо дискретными линейными фильтрами. Это даёт возможность использовать весьма развитый аппарат теории дискретных линейных систем для анализа и синтеза цифровых фильтров.

Эффекты квантования, связанные с конечной разрядностью представления сигналов и коэффициентов ЦФ, могут быть учтены специальными приёмами, при этом результаты фильтрации удаётся скорректировать с учётом эффектов конечной разрядности (квантования). Такой подход оказался плодотворным и применяется при проектировании ЦФ.

2.2. Классификация цифровых фильтров

Классификация ЦФ может быть проведена в различных *аспектах*. В каждом из них следует выделять определённые *уровни* (классификационные признаки). Уровни иногда разделяются на *подуровни*, на которых ЦФ различаются по *характерным свойствам*. Можно назвать следующие аспекты классификации

ЦФ: функциональный, алгоритмический, реализационный и др. При этом *любой* ЦФ будет «располагаться» на одном из уровней *любого* аспекта.

Рассмотрим классификацию ЦФ в *алгоритмическом* аспекте. При этом уровни определяются особенностями обрабатываемых сигналов, структурой алгоритма фильтрации, а также «внутренними» свойствами алгоритма [1, 3].

В радиолокации, радионавигации, гидроакустике и других областях техники применяют как одномерные, так и многомерные сигналы. Первые являются функциями одного аргумента (чаще всего времени), а вторые — функциями нескольких аргументов (либо пространственных координат, либо пространственных координат и времени). По этому признаку ЦФ разделяются на *одномерные* и *многомерные*. Среди многомерных ЦФ наибольшее практическое значение имеют двумерные фильтры [8, 12].

Информационные сигналы (одномерные и многомерные) подразделяются на скалярные и векторные. Примерами скалярных сигналов являются одномерный дискретный «временной» процесс $x[n]$ и скалярное поле в S-мерном пространстве • $x[\mathbf{n}] \equiv x[n_1, n_2, ..., n_S]$. Примерами векторных сигналов могут служить одномерный R-координатный вектор и S-мерное R-координатное векторное поле:

$$\mathbf{x}[n] = \begin{pmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ ... \\ x_R[n] \end{pmatrix}; \tag{2.3}$$

$$\mathbf{x}[\mathbf{n}] = \begin{pmatrix} x_1[\mathbf{n}] \\ x_2[\mathbf{n}] \\ ... \\ x_R[\mathbf{n}] \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1[n_1, n_2, ..., n_S] \\ x_2[n_1, n_2, ..., n_S] \\ ... \\ x_R[n_1, n_2, ..., n_S] \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

По этому признаку ЦФ можно разделить на *скалярные* и *векторные*.

Кроме того, скалярные сигналы $x[n]$ и $x[\mathbf{n}]$, а также входящие в (2.3) и (2.4) компоненты векторных сигналов $\mathbf{x}[n]$ и $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$ могут быть вещественными либо комплексными ••. По этому признаку ЦФ можно разделить на *вещественные* и *комплексные*.

Названные выше одномерные и многомерные, скалярные и векторные, вещественные и комплексные ЦФ по типу алгоритма обработки сигналов подразделяются на стационарные и нестационарные, рекурсивные и нерекурсивные, линейные и нелинейные.

• Здесь и далее используется обозначение векторного аргумента $[\mathbf{n}] = [n_1, n_2, ..., n_S]$.

•• При этом аргумент n и компоненты векторного аргумента $\mathbf{n}$ являются целочисленными.

Главной характеристикой ЦФ является *алгоритм фильтрации*, по которому осуществляется реализация ЦФ. Алгоритмом фильтрации описывается работа ЦФ любого класса без ограничений, в то время как другие характеристики имеют ограничения на класс ЦФ, например, некоторые из них пригодны для описания только стационарных линейных ЦФ.

В самом общем виде алгоритм работы одномерного векторного ЦФ можно записать следующим образом [1, 3]:

$$\mathbf{y}[n] = \Re\big(\mathbf{x}[n],\ \mathbf{x}[n-1],\ ...,\ \mathbf{x}[n-M],\ \mathbf{y}[n-1],\ ...,\ \mathbf{y}[n-N],\ n\big), \qquad (2.5)$$

где $\Re(...)$ — некоторая векторная функция многих переменных.

Аналогично может быть представлен алгоритм работы многомерного векторного ЦФ:

$$\mathbf{y}[\mathbf{n}] = \Re\big(\mathbf{x}[\mathbf{n}],\ \mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_1],\ ...,\ \mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_M],\ \mathbf{y}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\nu}_1],\ ...,\ \mathbf{y}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\nu}_N],\ \mathbf{n}\big), \qquad (2.6)$$

где $\boldsymbol{\mu}_k = (\mu_{k1},\ \mu_{k2},\ ...,\ \mu_{kS})\ \big(k = \overline{1,\ M}\big)$ и $\boldsymbol{\nu}_k = (\nu_{k1},\ \nu_{k2},\ ...,\ \nu_{kS})\ \big(k = \overline{1,\ N}\big)$ — ненулевые векторы-строки «запаздывания», компоненты которых являются натуральными числами [•]. Совокупности векторов $\boldsymbol{\mu}_k\ \big(k = \overline{1,\ M}\big)$ и $\boldsymbol{\nu}_k\ \big(k = \overline{1,\ N}\big)$ образуют матрицы

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \\ ... \\ \boldsymbol{\mu}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & ... & \mu_{1S} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & ... & \mu_{2S} \\ ... & ... & ... & ... \\ \mu_{M1} & \mu_{M2} & ... & \mu_{MS} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_1 \\ \boldsymbol{\nu}_2 \\ ... \\ \boldsymbol{\nu}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & ... & \nu_{1S} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & ... & \nu_{2S} \\ ... & ... & ... & ... \\ \nu_{N1} & \nu_{N2} & ... & \nu_{NS} \end{pmatrix}.$$

Количество строк в этих матрицах определяет число запаздывающих сигналов $\mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_k]\ \big(k = \overline{1,\ M}\big)$ и $\mathbf{y}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\nu}_k]\ \big(k = \overline{1,\ N}\big)$, используемых в алгоритме (2.6) для вычисления очередного отсчёта $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$.

Алгоритм одномерной фильтрации (2.5) является частным случаем алгоритма многомерной фильтрации (2.6).

Если функция $\Re(...)$ зависит явно от «дискретного времени» $\mathbf{n}$, то ЦФ является *нестационарным*, например, ЦФ с алгоритмом фильтрации (2.6). Если же функция $\Re(...)$ не зависит явно от переменной $\mathbf{n}$, т.е.

$$\mathbf{y}[\mathbf{n}] = \Re\big(\mathbf{x}[\mathbf{n}],\ \mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_1],\ ...,\ \mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_M],\ \mathbf{y}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\nu}_1],\ ...,\ \mathbf{y}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\nu}_N]\big), \qquad (2.7)$$

то ЦФ будет *стационарным* (инвариантным к временному или пространственному сдвигу сигнала). В случае многомерных фильтров для обозначения свойства инвариантности по отношению к сдвигу вдоль пространственных координат используется термин «однородность». Стационарные фильтры называют фильтрами с постоянными параметрами, а нестационарные — фильтрами с переменными параметрами.

[•] Некоторые из них (но не все сразу!) могут быть нулями.

Функция $\Re(...)$ в выражениях (2.6) и (2.7) может зависеть или не зависеть от отсчётов выходного сигнала $\mathbf{y}[\mathbf{n}-\mathbf{\nu}_k]\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$. По этому признаку ЦФ подразделяются на *рекурсивные* и *нерекурсивные*.

Алгоритм работы нерекурсивного многомерного векторного ЦФ по аналогии с (2.6) можно записать в виде

$$\mathbf{y}[\mathbf{n}]=\Re\left(\mathbf{x}[\mathbf{n}],\ \mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_1],...,\ \mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_M],\ \mathbf{n}\right). \qquad (2.8)$$

В рекурсивных алгоритмах фильтрации процесс вычисления выходного сигнала в $\mathbf{n}$-й момент $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$ осуществляется с использованием предыдущих отсчётов выходного сигнала $\mathbf{y}[\mathbf{n}-\mathbf{\nu}_k]\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$. Особенно наглядно это видно в алгоритме одномерной рекурсивной фильтрации (2.5), в котором вычисление выходного сигнала в n-й момент времени производится с использованием N предыдущих отсчётов выходного сигнала $\mathbf{y}[n-k]\left(k=\overline{1,\ N}\right)$, где N — глубина рекурсии. Таким образом, в рекурсивных ЦФ имеет место *обратная связь*.

В нерекурсивных же алгоритмах (2.8) вычисление отсчёта $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$ производится только по совокупности отсчётов входного сигнала $\mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_k]\ \left(k=\overline{1,\ M}\right)$, т.е. обратная связь отсутствует.

Отсчёты входного $\mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_k]\ \left(k=\overline{1,\ M}\right)$ и выходного $\mathbf{y}[\mathbf{n}-\mathbf{\nu}_k]\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ сигналов ЦФ могут входить в алгоритмы фильтрации (2.5) — (2.8) линейным или нелинейным образом. Иными словами, функция $\Re(...)$ может быть линейной или нелинейной. В зависимости от этого ЦФ подразделяются на *линейные* и *нелинейные*.

В самом общем виде алгоритм (2.6) ***каузальной*** *линейной рекурсивной* цифровой фильтрации описывается линейным векторно-матричным уравнением в конечных разностях:

$$\mathbf{y}[\mathbf{n}]=\sum_{k=0}^{M}\mathbf{a}_k[\mathbf{n}]\,\mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_k]-\sum_{k=1}^{N}\mathbf{b}_k[\mathbf{n}]\,\mathbf{y}[\mathbf{n}-\mathbf{\nu}_k], \qquad (2.9)$$

где коэффициенты алгоритма $\mathbf{a}_k[\mathbf{n}]\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $\mathbf{b}_k[\mathbf{n}]\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ являются квадратными матрицами размера $R\times R$ (R — количество компонент в векторах $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$ и $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$).

Из общего алгоритма многомерной векторной рекурсивной линейной фильтрации (2.9) можно получить следующие частные случаи:

- если в уравнении (2.9) векторный аргумент $\mathbf{n}$ имеет только одну-единственную компоненту n, то фильтр будет одномерным, иначе — многомерным;
- если в уравнении (2.9) векторы $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$, $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$ и матрицы коэффициентов $\mathbf{a}_k[\mathbf{n}]\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$, $\mathbf{b}_k[\mathbf{n}]\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ имеют только по одной компоненте, то ЦФ будет скалярным, иначе — векторным;

- если в уравнении (2.9) сигналы $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$, $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$ и матрицы коэффициентов фильтра $\mathbf{a}_k[\mathbf{n}]\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$, $\mathbf{b}_k[\mathbf{n}]\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ являются вещественными, то ЦФ будет вещественным, иначе — комплексным;
- если в уравнении (2.9) все матрицы коэффициентов ЦФ $\mathbf{a}_k[\mathbf{n}]\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $\mathbf{b}_k[\mathbf{n}]\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ не зависят от «дискретного времени» $\mathbf{n}$, т.е. элементы этих матриц являются константами, то ЦФ будет стационарным, иначе — нестационарным;
- если в уравнении (2.9) отсутствует вторая сумма, т.е. $\mathbf{b}_k[\mathbf{n}]\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$, то ЦФ будет нерекурсивным, иначе — рекурсивным.

Уравнение в конечных разностях (2.2) представляет собой частный случай уравнения (2.9) и описывает одномерный скалярный стационарный рекурсивный линейный ЦФ (вещественный или комплексный).

Для линейных ЦФ справедлив *принцип суперпозиции* (наложения), т.е. принцип независимого действия причин, вызывающих то или иное следствие. Для нелинейных ЦФ принцип суперпозиции не справедлив.

Дальнейшую классификацию ЦФ можно провести по «внутренним» свойствам алгоритма фильтрации. Дело в том, что ЦФ при одинаковых алгоритмах фильтрации могут иметь различные сочетания параметров, этим объясняется качественное различие свойств и характеристик таких фильтров. Например, одномерные скалярные вещественные стационарные линейные ЦФ, описываемые алгоритмом фильтрации (2.2), по расположению нулей передаточной функции на Z-плоскости можно разделить на две группы: минимально-фазовые и неминимально-фазовые. Различие свойств ЦФ этих групп определяется расположением нулей передаточной функции на Z-плоскости (см. § 3.5), что связано с коэффициентами $a_k\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$ алгоритма (2.2). В классе одномерных скалярных вещественных стационарных нерекурсивных линейных неминимально-фазовых ЦФ существуют фильтры с линейными фазочастотными характеристиками и фильтры с нелинейными фазочастотными характеристиками (см. гл.5).

Нелинейные ЦФ можно классифицировать по типу нелинейности функции $\Re(...)$, например фильтры со степенной характеристикой, фильтры с логарифмической характеристикой и т.д. На практике нелинейные фильтры обычно реализуют в виде сочетания нелинейных безынерционных и линейных инерционных динамических звеньев.

Алгоритм работы нелинейного безынерционного звена в общем случае можно описать формулой

$$\mathbf{y}[\mathbf{n}]=\Re\left(\mathbf{x}[\mathbf{n}],\ \mathbf{n}\right). \tag{2.10}$$

Как частный случай отсюда следует алгоритм работы стационарного нелинейного безынерционного звена

$$\mathbf{y}[\mathbf{n}]=\Re\left(\mathbf{x}[\mathbf{n}]\right). \tag{2.11}$$

Подбором характеристик нелинейных безынерционных и линейных инерционных звеньев получают устройство, выполняющее ту или иную функцию в сложных радиотехнических системах.

Рассмотренная классификация ЦФ, базирующаяся на временном подходе к цифровой обработке сигналов [1, 3], представлена на рис.2.1.

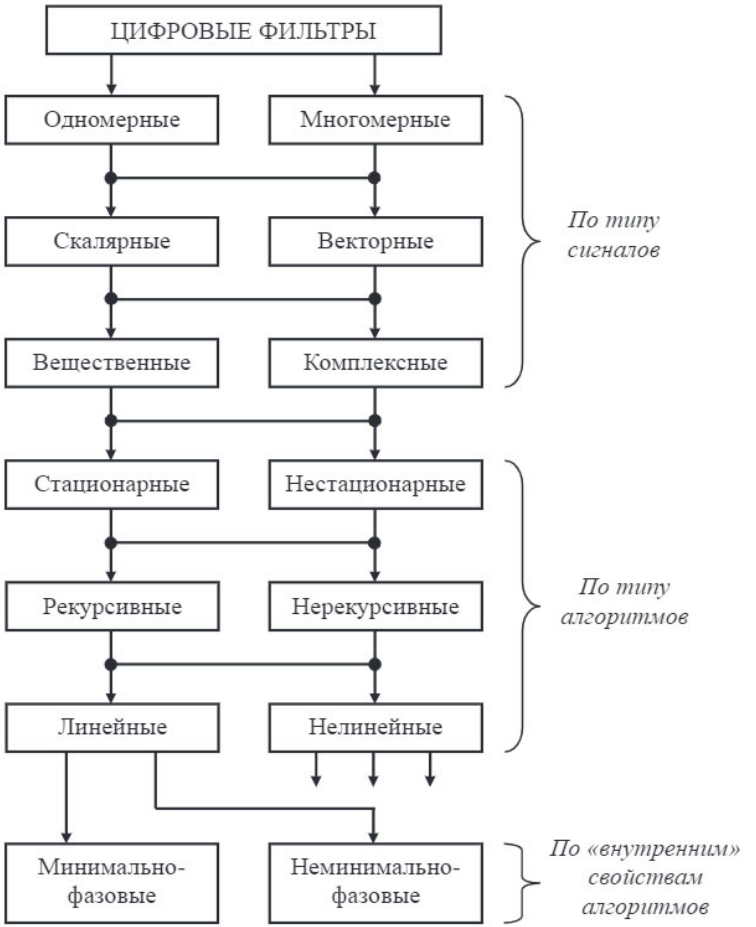


Рис.2.1. Классификация цифровых фильтров

В настоящее время наиболее развитой является теория одномерных скалярных вещественных стационарных линейных ЦФ. Все другие типы фильтров при анализе и проектировании стремятся представить в виде определённого со-

единения динамических звеньев этого типа и некоторых других устройств, например нелинейных безынерционных звеньев. Часто для этой цели используют статистические эквиваленты, построенные исходя из особенностей функционирования реальных устройств и учитывающие их основные внешние характеристики [37]. Такой подход является весьма плодотворным и во многих случаях позволяет получить удовлетворительные результаты.

Аналогичный вариант классификации (по типу сигналов и по типу алгоритмов) можно предложить и для генераторов цифровых сигналов. В этом случае следует воспользоваться разностным уравнением (2.6), полагая, что функция $\Re(...)$ не зависит от отсчётов входного сигнала $\mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_k]$ $\left(k=\overline{1,\ M}\right)$. В результате получим

$$\mathbf{y}[\mathbf{n}]=\Re\left(\mathbf{y}[\mathbf{n}-\mathbf{v}_1],...,\ \mathbf{y}[\mathbf{n}-\mathbf{v}_N],\ \mathbf{n}\right). \qquad (2.12)$$

При установке начальных условий уравнение описывает алгоритм работы многомерного векторного нестационарного генератора цифровых сигналов.

Алгоритмы работы всех возможных типов генераторов цифровых сигналов могут быть получены из разностного уравнения (2.12) как частные случаи.

Отметим некоторые особенности классификации ЦФ в алгоритмическом аспекте. Первый уровень (тип сигналов) имеет приоритет, поскольку от типа обрабатываемых сигналов зависит тип алгоритмов (второй уровень). Подуровни первого и второго уровней не являются иерархическими, поэтому, в принципе, их можно менять местами. Однако на третьем уровне имеет место иерархия подуровней: фильтры с линейными ФЧХ существуют *только* в классе нерекурсивных линейных неминимально-фазовых ЦФ (эти подуровни нельзя поменять местами).

Принятое на рис.2.1 расположение подуровней является наиболее естественным. Любая классификация с иерархией уровней представляется в виде «древовидной структуры». Отсутствие же иерархии подуровней на первом и втором уровнях классификации ЦФ в алгоритмическом аспекте позволило «ветвящееся дерево» свернуть в «линейку» (см. рис.1.1). Такое представление менее громоздко, более наглядно и обозримо. Из него видно, какие типы ЦФ являются менее изученными.

Классификация ЦФ в других аспектах автором детально не прорабатывалась. Однако некоторые особенности классификации ЦФ в функциональном и реализационном аспектах следует отметить.

При классификации ЦФ в *функциональном* аспекте можно обозначить следующие уровни:

• робастность (робастные и неробастные ЦФ) с выделением подуровней: для *робастных* ЦФ — адаптивные и неадаптивные; адаптивные ЦФ, в свою очередь, различаются стратегией адаптации; для *неробастных* ЦФ — оптимальные для заданного вида фильтруемого процесса и неоптимальные;

• количество частот дискретизации (односкоростные и многоскоростные) с выделением подуровня только для многоскоростных ЦФ — *вид* преобразова-

ния частоты дискретизации (интерполяция, децимация, произвольное преобразование);

• диапазон фильтруемых частот (ФНЧ, ФВЧ, полосовые, режекторные, многополосные, гребенчатые ЦФ) с выделением подуровня — *тип* АЧХ (гладкие и с пульсациями).

Из рассмотренного перечня просматривается «древовидная структура» классификации ЦФ, которая не может быть свёрнута в «линейку».

При классификации ЦФ в *реализационном* аспекте обозначим следующие уровни:

• подход к реализации (временной и частотный, т.е. на основе БПФ);

• способ квантования (равномерный и неравномерный).

Каждый из них можно разделить на подуровни, причём для разных типов ЦФ на этих уровнях подуровни будут различными, что обусловливает «древовидную структуру» классификации ЦФ, которая не может быть свёрнута в «линейку».

Краткие итоги

1. Работа линейного аналогового фильтра описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением (2.1), а одномерного скалярного линейного дискретного фильтра — линейным уравнением в конечных разностях (2.2).

2. Главный недостаток аналоговых и дискретных фильтров заключается в неконтролируемой погрешности выходного сигнала, обусловленной зависимостью параметров фильтра от условий работы (внешних факторов).

3. Погрешность выходного сигнала ЦФ является контролируемой, поскольку она не зависит от внешних факторов, а определяется внутренними причинами (разрядностью вычислителя и алгоритмом работы фильтра).

4. В цифровом фильтре квантованные отсчёты сигналов кодируются, поэтому арифметические операции, выполняемые в соответствии с алгоритмом фильтрации, осуществляются не над отсчётами сигналов, а над их цифровыми кодами.

5. Главной характеристикой ЦФ является алгоритм фильтрации, по которому осуществляется реализация ЦФ. Алгоритмом фильтрации может быть описан ЦФ любого класса без ограничений. Другие же характеристики имеют ограничения на класс ЦФ, некоторые из них, например, пригодны для описания только линейных стационарных ЦФ.

6. Линейный ЦФ реализует алгоритм фильтрации (2.2) приближённо, степень приближения определяется разрядностью представления данных цифровыми кодами. При достаточно большом числе разрядов сигналы можно считать приближённо дискретными (не квантованными по уровню), а сами ЦФ, работающие по алгоритму (2.2), — приближённо дискретными линейными фильтрами. Это позволяет использовать для анализа и синтеза ЦФ весьма развитый аппарат теории дискретных линейных систем.

7. При таком подходе эффекты конечной разрядности учитываются косвенным образом в виде шума квантования на выходе ЦФ. Для этого разработаны специальные методы.

8. Классификация ЦФ может быть проведена в различных *аспектах*: функциональном, алгоритмическом, реализационном и др. В каждом из аспектов следует выделять определён-

ные *уровни* (классификационные признаки). Уровни иногда разделяются на *подуровни*, на которых ЦФ различаются по *характерным свойствам*. При этом *любой* ЦФ будет «располагаться» на одном из уровней *любого* аспекта.

9. Разработанная классификация ЦФ в алгоритмическом аспекте проводится по типу обрабатываемых сигналов (первый уровень), по типу алгоритма фильтрации (второй уровень) и по «внутренним» свойствам алгоритма (третий уровень).

10. По типу обрабатываемых сигналов различают ЦФ одномерные и многомерные, скалярные и векторные, вещественные и комплексные.

11. По типу алгоритма фильтрации различают ЦФ стационарные и нестационарные, рекурсивные и нерекурсивные, линейные и нелинейные.

12. Для линейных ЦФ справедлив принцип суперпозиции (наложения), для нелинейных ЦФ принцип суперпозиции не справедлив.

13. По «внутренним» свойствам алгоритма различают ЦФ, имеющие одинаковый алгоритм фильтрации, но различные параметры, определяющие качественное различие свойств и характеристик ЦФ. Например, линейные ЦФ по расположению нулей передаточной функции на Z-плоскости можно разделить на две группы: минимально-фазовые и неминимально-фазовые.

14. В наиболее общей форме алгоритм цифровой фильтрации может быть представлен рекуррентной формулой (2.6). Из неё можно получить алгоритмы работы для всех типов ЦФ (одномерных и многомерных, скалярных и векторных, вещественных и комплексных, стационарных и нестационарных, рекурсивных и нерекурсивных, линейных и нелинейных).

15. В общем виде алгоритм линейной цифровой фильтрации описывается векторно-матричным уравнением в конечных разностях (2.9). Из него как частные случаи могут быть получены все линейные алгоритмы (одномерные и многомерные, скалярные и векторные, вещественные и комплексные, стационарные и нестационарные, рекурсивные и нерекурсивные).

16. Алгоритм работы многомерного векторного нестационарного генератора цифровых сигналов описывается уравнением (2.12). Для реализации этого алгоритма необходимо обеспечить установку начальных условий. На основе алгоритма (2.12) может быть построена классификация генераторов цифровых сигналов.

Глава 3

ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Рассмотренные в гл.2 алгоритмы цифровой фильтрации являются *главными* характеристиками ЦФ, по которым осуществляется реализация ЦФ. Однако в классе одномерных стационарных линейных ЦФ используют также и другие характеристики, позволяющие упростить исследование и обобщить свойства ЦФ. Наибольшее распространение получили следующие характеристики:

- импульсная характеристика $h[n]$;
- передаточная функция $H(z)$;
- комплексная частотная характеристика $H\left(e^{j\omega T}\right)$;
- амплитудно-частотная $A(\omega T)$ и фазочастотная $\varphi(\omega T)$ характеристики.

Эти характеристики, строго говоря, относятся к одномерным стационарным линейным дискретным фильтрам, точно реализующим алгоритм (2.2). Однако эти же характеристики могут быть использованы также и для описания ЦФ, близких по свойствам к линейным дискретным фильтрам при достаточно большом числе разрядов для представления цифровых кодов чисел в ЦФ. Погрешность такого описания проявляется в выходном сигнале в виде шумов квантования, которые можно учесть косвенным способом с помощью специально разработанных методик.

3.1. Импульсная характеристика

Импульсной характеристикой $h[n]$ одномерного скалярного ЦФ называется его реакция на единичный импульс (1.4) при нулевых начальных условиях.

Импульсная характеристика даёт полное описание линейной системы, из неё могут быть получены любые другие характеристики.

Зная импульсную характеристику $h[n]$, можно найти реакцию ЦФ (выходной сигнал $y[n]$) на любое воздействие (входной сигнал $x[n]$) при нулевых начальных условиях. Для этого следует воспользоваться формулой *дискретной свёртки* [см. (1.57) и (1.59)]:

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n} h[n-k]\,x[k]=\sum_{k=0}^{n} h[k]\,x[n-k], \quad n=0,\,1,\,2,\,3,\,\ldots\,. \tag{3.1}$$

Здесь верхний предел в суммах берётся равным текущему «дискретному времени» n, а не бесконечности, как в формулах (1.57) и (1.59), что позволяет рассчитать переходный процесс в системе. Если представляет интерес устано-

вившийся режим, то верхний предел в суммах выражения (3.1) следует брать бесконечным, как в формулах (1.57) и (1.59).

Для физически реализуемых (физически возможных) систем выполняется следующее условие: $h[n]=0$ при $n<0$, которое означает, что реакция на выходе ЦФ не может появиться раньше воздействия на его входе (принцип временного детерминизма).

Матрица импульсных характеристик $\mathbf{h}[n]$ одномерного векторного стационарного линейного цифрового фильтра представляет собой квадратную матрицу размера $R\times R$, элементы которой $h_{il}[n]\ \left(i,\ l=\overline{1,\ R}\right)$ являются реакциями на i-м выходе ЦФ при подаче на его l-й вход единичного импульса (1.4) при нулевых начальных условиях и отсутствии сигналов на остальных входах.

Для расчёта выходного сигнала $\mathbf{y}[n]$ одномерного векторного стационарного линейного ЦФ при произвольном входном сигнале $\mathbf{x}[n]$ и нулевых начальных условиях следует использовать векторно-матричный вариант формулы (3.1):

$$\mathbf{y}[n]=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{h}[n-k]\,\mathbf{x}[k]=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{h}[k]\,\mathbf{x}[n-k],\quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ . \tag{3.2}$$

3.2. Передаточная функция

Передаточной функцией $H(z)$ одномерного скалярного стационарного линейного ЦФ называется отношение Z-преобразования выходного сигнала $y[n]$ к Z-преобразованию входного сигнала $x[n]$ при нулевых начальных условиях:

$$H(z)=\left.\frac{Z\{y[n]\}}{Z\{x[n]\}}\right|_{\text{Нулевые начальные условия}}. \tag{3.3}$$

Нулевые начальные условия являются существенными в определениях импульсной характеристики $h[n]$ и передаточной функции $H(z)$. Дело в том, что входной сигнал $x[n]$ определяет *вынужденную* составляющую выходного сигнала $y[n]$, а начальные условия — *свободную* (собственную) составляющую, поэтому при одном и том же входном сигнале $x[n]$, но разных начальных условиях сигналы $y[n]$ на выходе ЦФ в переходном режиме будут различными. В установившемся режиме поведение системы зависит только от входного сигнала $x[n]$ и не зависит от начальных условий.

Передаточная функция $H(z)$ и импульсная характеристика $h[n]$ ЦФ связаны между собой парой Z-преобразований:

$$\begin{cases} H(z)=Z\{h[n]\};\\ h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Действительно, согласно определению передаточной функции (3.3) при подаче на вход ЦФ единичного импульса (1.4) и нулевых начальных условиях в фильтре будем иметь (см. табл.1.1)

$$H(z)=\frac{Z\{h[n]\}}{Z\{\delta[n]\}}=\frac{Z\{h[n]\}}{1}=Z\{h[n]\},$$

что и доказывает утверждение (3.4).

Передаточная функция $H(z)$ даёт полное описание стационарной линейной системы, из неё могут быть получены любые другие характеристики.

Зная передаточную функцию $H(z)$, можно при нулевых начальных условиях рассчитать реакцию ЦФ (выходной сигнал $y[n]$) на любое воздействие (входной сигнал $x[n]$). Алгоритм расчёта следующий:

$$\begin{cases} X(z)=Z\{x[n]\}; \\ Y(z)=H(z)X(z); \\ y[n]=Z^{-1}\{Y(z)\}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Найдём выражение для передаточной функции одномерного скалярного стационарного рекурсивного линейного ЦФ. Для этого возьмём Z-преобразование от обеих частей линейного разностного уравнения (2.2):

$$Z\{y[n]\}=Z\left\{\sum_{k=0}^{M}a_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N}b_k y[n-k]\right\},$$

полагая входной сигнал $x[n]=0$ при $n<0$, а начальные условия в ЦФ нулевыми: $y[-n]=0\ \left(n=\overline{1,\ N}\right)$. Воспользуемся теоремой линейности Z-преобразования и теоремой запаздывания (см. § 1.3). В результате получим

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{M}a_k z^{-k}X(z)-\sum_{k=1}^{N}b_k z^{-k}Y(z). \tag{3.6}$$

Отсюда, используя определение передаточной функции (3.3), находим

$$H(z)=\frac{A(z^{-1})}{1+B(z^{-1})}=\frac{\sum_{k=0}^{M}a_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N}b_k z^{-k}}, \tag{3.7}$$

где $A(z^{-1})$ и $B(z^{-1})$ — полиномы комплексного аргумента z^{-1}. Коэффициенты полиномов $A(z^{-1})$ $a_k\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $B(z^{-1})$ $b_k\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ являются вещественными числами для вещественного скалярного стационарного рекурсивного линейного ЦФ и комплексными числами для комплексного ЦФ.

Таким образом, передаточная функция $H(z)$ одномерного скалярного стационарного рекурсивного линейного ЦФ является дробно-рациональной функцией комплексного аргумента z^{-1}, а параметры передаточной функции (3.7) равны коэффициентам $a_k\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $b_k\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ алгоритма линейной цифровой фильтрации (2.2).

Одномерный R-координатный векторный стационарный линейный ЦФ можно описать *матрицей передаточных функций* $\mathbf{H}(z)$ размера $R\times R$, элементы которой определяются отношением Z-преобразования сигнала на i-м выходе к Z-преобразованию сигнала на l-м входе при нулевых начальных условиях и отсутствии сигналов на остальных входах:

$$H_{il}(z)=\left.\frac{Z\{y_i[n]\}}{Z\{x_l[n]\}}\right|_{\text{Нулевые начальные условия}},\quad i,\ l=\overline{1,\ R}. \tag{3.8}$$

Матрицы передаточных функций $\mathbf{H}(z)$ и импульсных характеристик $\mathbf{h}[n]$ векторного ЦФ связаны между собой парой Z-преобразований [•] [ср. с (3.4)]:

$$\begin{cases} \mathbf{H}(z)=Z\{\mathbf{h}[n]\}; \\ \mathbf{h}[n]=Z^{-1}\{\mathbf{H}(z)\}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Зная матрицу передаточных функций $\mathbf{H}(z)$, можно рассчитать реакцию векторного ЦФ (выходной сигнал $\mathbf{y}[n]$) на любое воздействие (входной сигнал $\mathbf{x}[n]$) при нулевых начальных условиях. Алгоритм расчёта следующий [ср. с (3.5)]:

$$\begin{cases} \mathbf{X}(z)=Z\{\mathbf{x}[n]\}; \\ \mathbf{Y}(z)=\mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z); \\ \mathbf{y}[n]=Z^{-1}\{\mathbf{Y}(z)\}, \end{cases} \tag{3.10}$$

где $\mathbf{X}(z)$ и $\mathbf{Y}(z)$ — Z-образы входного и выходного векторов соответственно.

Найдём выражение для матрицы передаточных функций одномерного стационарного линейного рекурсивного векторного ЦФ, алгоритм работы которого описывается векторно-матричным линейным разностным уравнением [••]

$$\mathbf{y}[n]=\sum_{k=0}^{M}\mathbf{a}_k\,\mathbf{x}[n-k]-\sum_{k=1}^{N}\mathbf{b}_k\,\mathbf{y}[n-k], \tag{3.11}$$

где $\mathbf{a}_k\left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $\mathbf{b}_k\left(k=\overline{1,\ N}\right)$ — квадратные матрицы размера $R\times R$ (матричные коэффициенты), элементы которых являются вещественными или комплексными константами; R — количество компонент в векторах $\mathbf{x}[n]$ и $\mathbf{y}[n]$.

[•] Z-преобразование от матрицы равно матрице, составленной из Z-преобразований элементов исходной матрицы.

[••] Частный случай линейного уравнения (2.9).

Возьмём Z-преобразование от обеих частей уравнения (3.11):

$$Z\{\mathbf{y}[n]\} = Z\left\{\sum_{k=0}^{M} \mathbf{a}_k \mathbf{x}[n-k] - \sum_{k=1}^{N} \mathbf{b}_k \mathbf{y}[n-k]\right\}. \qquad (3.12)$$

Полагая входной сигнал $\mathbf{x}[n] = \mathbf{0}$ при $n < 0$, а начальные условия в ЦФ нулевыми: $\mathbf{y}[-n] = \mathbf{0}$ $\left(n = \overline{1, N}\right)$, воспользуемся теоремой линейности Z-преобразования и теоремой запаздывания. В результате получим векторно-матричное алгебраическое уравнение относительно комплексного аргумента z [1]:

$$\mathbf{Y}(z) = \sum_{k=0}^{M} \mathbf{a}_k z^{-k} \mathbf{X}(z) - \sum_{k=1}^{N} \mathbf{b}_k z^{-k} \mathbf{Y}(z) \qquad (3.13)$$

или

$$\left[\mathbf{I} + \mathbf{B}(z^{-1})\right] \mathbf{Y}(z) = \mathbf{A}(z^{-1})\, \mathbf{X}(z), \qquad (3.14)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица;

$$\mathbf{A}(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{M} \mathbf{a}_k z^{-k}; \qquad \mathbf{B}(z^{-1}) = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{b}_k z^{-k} \qquad (3.15)$$

— квадратные матрицы размера $R \times R$.

Умножая обе части (3.14) на матрицу $\left[\mathbf{I} + \mathbf{B}(z^{-1})\right]^{-1}$ слева, получим векторно-матричное уравнение, связывающее Z-образы входного $\mathbf{x}[n]$ и выходного $\mathbf{y}[n]$ векторных сигналов:

$$\mathbf{Y}(z) = \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}(z^{-1})\, \mathbf{X}(z), \qquad (3.16)$$

из которого согласно определению (3.8) получаем *матрицу передаточных функций* рекурсивного R-координатного векторного ЦФ • [ср. с формулой (3.7), описывающей передаточную функцию скалярного ЦФ]:

$$\mathbf{H}(z) = \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}(z^{-1}). \qquad (3.17)$$

Из сравнения выражений (3.17) и (3.11) с учётом (3.15) видно, что параметры (3.15) матрицы передаточных функций (3.17) равны матричным коэффициентам $\mathbf{a}_k$ $\left(k = \overline{0, M}\right)$ и $\mathbf{b}_k$ $\left(k = \overline{1, N}\right)$ алгоритма векторной рекурсивной линейной цифровой фильтрации (3.11).

• Переход от уравнения (3.16) к равенству (3.17) осуществляется путём умножения справа обеих частей (3.16) на транспонированный вектор-столбец $\widetilde{\mathbf{X}}(z)$, координаты которого являются обратными (перевёрнутыми) координатами исходного вектора $\mathbf{X}(z)$: $\widetilde{X}_l(z) = 1/X_l(z)$ $\left(l = \overline{1, R}\right)$. При этом произведение $\mathbf{X}(z)\widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}(z) = \mathbf{I}$, а $\mathbf{Y}(z)\widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}(z) = \mathbf{H}(z)$, что соответствует определению (3.8) элементов матрицы передаточных функций векторного ЦФ. Здесь $(\ldots)^{\mathrm{T}}$ — символ транспонирования.

Аналогично из алгоритма одномерной векторной стационарной линейной нерекурсивной фильтрации • получим *матрицу передаточных функций* нерекурсивного векторного ЦФ:

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{A}(z^{-1}). \tag{3.18}$$

Сравнение выражений для матриц передаточных функций (3.17) и (3.18), рекурсивного и нерекурсивного векторных ЦФ показывает, что нерекурсивный векторный ЦФ является частным случаем рекурсивного при $\mathbf{b}_k = \mathbf{0}$ $\left(k = \overline{1, N}\right)$.

3.3. Комплексная частотная характеристика

Комплексной частотной характеристикой $H\left(e^{j\omega T}\right)$ одномерного скалярного стационарного линейного ЦФ (вещественного или комплексного) называется отношение преобразования Фурье выходного сигнала $y[n]$ к преобразованию Фурье входного сигнала $x[n]$ при нулевых начальных условиях:

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = \left.\frac{F\{y[n]\}}{F\{x[n]\}}\right|_{\text{Нулевые начальные условия}}. \tag{3.19}$$

Комплексная частотная характеристика $H\left(e^{j\omega T}\right)$ представляет собой комплексный коэффициент передачи ЦФ для каждого значения частоты ω.

Сравнивая (3.19) с (3.3), нетрудно видеть, что комплексная частотная характеристика равна значениям передаточной функции ЦФ на единичной окружности Z-плоскости:

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = H(z)\big|_{z=\exp(j\omega T)}. \tag{3.20}$$

Из формул (3.4) с учётом (3.20) следует связь комплексной частотной характеристики с импульсной характеристикой ЦФ:

$$\begin{cases} H\left(e^{j\omega T}\right) = F\{h[n]\}; \\ h[n] = F^{-1}\left\{H\left(e^{j\omega T}\right)\right\}. \end{cases} \tag{3.21}$$

На основании (3.20) и (3.7) запишем выражение для комплексной частотной характеристики одномерного скалярного стационарного рекурсивного линейного ЦФ

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = \frac{\sum_{k=0}^{M} a_k e^{-j\omega T k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} b_k e^{-j\omega T k}}. \tag{3.22}$$

• Частный случай уравнения (3.11) при $\mathbf{b}_k = \mathbf{0}$ $\left(k = \overline{1, N}\right)$.

Функция $H\left(e^{j\omega T}\right)$ является периодической по частоте с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_д = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_д$, поскольку $e^{j\omega T} = \exp\left[j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}k\right)T\right]$, где k — произвольное целое число. Периодическими функциями с тем же периодом $\omega_д$ являются также модуль $\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ и аргумент $\mathrm{Arg}\left[H\left(e^{j\omega T}\right)\right]$ этой функции. Свойства комплексной частотной характеристики $H\left(e^{j\omega T}\right)$ совпадают со свойствами спектра дискретного сигнала (см. § 1.6).

Комплексная частотная характеристика $H\left(e^{j\omega T}\right)$ даёт полное описание одномерной скалярной стационарной линейной системы, из неё могут быть получены любые другие характеристики.

Одномерный R-координатный векторный стационарный линейный цифровой фильтр можно описать *матрицей комплексных частотных характеристик* $\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right)$ размера $R \times R$, элементы которой определяются отношением преобразования Фурье сигнала на i-м выходе к преобразованию Фурье сигнала на l-м входе при нулевых начальных условиях и отсутствии сигналов на остальных входах:

$$H_{il}\left(e^{j\omega T}\right) = \left.\frac{F\{y_i[n]\}}{F\{x_l[n]\}}\right|_{\text{Нулевые начальные условия}}, \quad i, l = \overline{1, R}. \tag{3.23}$$

Матрицы комплексных частотных характеристик $\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right)$ и импульсных характеристик $\mathbf{h}[n]$ векторного ЦФ связаны между собой парой дискретных преобразований Фурье • [ср. с (3.21)]:

$$\begin{cases} \mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right) = F\{\mathbf{h}[n]\}; \\ \mathbf{h}[n] = F^{-1}\left\{\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right)\right\}. \end{cases} \tag{3.24}$$

С учётом связи (3.12) между передаточной функцией $H(z)$ и комплексной частотной характеристикой $H\left(e^{j\omega T}\right)$ скалярного вещественного ЦФ из формул (3.17) и (3.18) следуют выражения для *матриц комплексных частотных характеристик* одномерных R-координатных векторных стационарных линейных ЦФ (вещественных и комплексных):

- рекурсивного

$$\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right) = \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}\left(e^{-j\omega T}\right)\right]^{-1} \mathbf{A}\left(e^{-j\omega T}\right); \tag{3.25}$$

- нерекурсивного

$$\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right) = \mathbf{A}\left(e^{-j\omega T}\right). \tag{3.26}$$

• Преобразование Фурье от матрицы равно матрице, составленной из преобразований Фурье элементов исходной матрицы.

Элементы матрицы комплексных частотных характеристик удобно представить в полярной форме:

$$H_{il}\left(e^{j\omega T}\right)=\left|H_{il}\left(e^{j\omega T}\right)\right|\exp\left\{j\operatorname{Arg}\left[H_{il}\left(e^{j\omega T}\right)\right]\right\}=A_{il}(\omega T)\exp[j\varphi_{il}(\omega T)],$$
$$i,\ l=\overline{1,\ R}. \qquad (3.27)$$

3.4. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики

Представляя комплексную частотную характеристику $H\left(e^{j\omega T}\right)$ одномерного скалярного стационарного линейного ЦФ в виде

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=A(\omega T)\exp[j\varphi(\omega T)], \qquad (3.28)$$

получим амплитудно-частотную характеристику (АЧХ)

$$A(\omega T)=\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right| \qquad (3.29)$$

и фазочастотную характеристику (ФЧХ)

$$\varphi(\omega T)=\operatorname{Arg}\left[H\left(e^{j\omega T}\right)\right]. \qquad (3.30)$$

Амплитудно-частотная характеристика (3.29) одномерного скалярного стационарного линейного ЦФ определяет амплитуду выходного сигнала $y[n]$ устойчивого фильтра в установившемся режиме при входном сигнале

$$x[n]=\begin{cases}\cos(\omega T n+\varphi_0) & \text{для вещественного ЦФ;}\\ \exp(j\omega T n+j\varphi_0) & \text{для комплексного ЦФ,}\end{cases} \qquad (3.31)$$

а *фазочастотная характеристика* (3.30) — сдвиг фазы выходного сигнала $y[n]$ относительно фазы входного сигнала $x[n]$ в установившемся режиме.

Подстановкой комплексной частотной характеристики (3.22) в формулы (3.29) и (3.30) получим общие выражения для АЧХ и ФЧХ вещественного одномерного скалярного стационарного линейного рекурсивного ЦФ:

$$A(\omega T)=\sqrt{\frac{\left[a_0+\sum\limits_{k=1}^{M}a_k\cos(k\omega T)\right]^2+\left[\sum\limits_{k=1}^{M}a_k\sin(k\omega T)\right]^2}{\left[1+\sum\limits_{k=1}^{N}b_k\cos(k\omega T)\right]^2+\left[\sum\limits_{k=1}^{N}b_k\sin(k\omega T)\right]^2}}; \qquad (3.32)$$

$$\varphi(\omega T)=-\operatorname{Arctg}\frac{\sum\limits_{k=1}^{M}a_k\sin(k\omega T)}{a_0+\sum\limits_{k=1}^{M}a_k\cos(k\omega T)}+\operatorname{Arctg}\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}b_k\sin(k\omega T)}{1+\sum\limits_{k=1}^{N}b_k\cos(k\omega T)}. \qquad (3.33)$$

Иногда используют третью частотную характеристику ЦФ — *групповое время запаздывания* (ГВЗ)

$$\tau(\omega T) = -\frac{d\varphi(\omega T)}{d\omega}, \tag{3.34}$$

равное времени задержки выходного сигнала $y[n]$ фильтра в установившемся режиме относительно входного сигнала $x[n]$.

Если все коэффициенты $a_k \left(k = \overline{0,\ M}\right)$ и $b_k \left(k = \overline{1,\ N}\right)$ комплексной частотной характеристики (3.22) являются вещественными, то формулы (3.32) и (3.33) описывают АЧХ и ФЧХ вещественного ЦФ. Если хотя бы один из коэффициентов $a_k \left(k = \overline{0,\ M}\right)$ и $b_k \left(k = \overline{1,\ N}\right)$ в формуле (3.22) является комплексным, то ЦФ становится комплексным. Формулы для АЧХ и ФЧХ комплексных ЦФ будут получены в § 4.6.

Из выражений (3.32) — (3.34) непосредственно видно, что частотные характеристики (АЧХ, ФЧХ и ГВЗ) вещественного скалярного одномерного стационарного линейного ЦФ обладают следующими свойствами:

♦ все частотные характеристики $A(\omega T)$, $\varphi(\omega T)$ и $\tau(\omega T)$ являются периодическими функциями частоты ω с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_д = 2\pi f_д = 2\pi/T$ (рис.3.1):

$$\begin{cases} A(\omega T) = A(\omega T + k\omega_д T); \\ \varphi(\omega T) = \varphi(\omega T + k\omega_д T); \quad k - \text{произвольное целое число}; \\ \tau(\omega T) = \tau(\omega T + k\omega_д T), \end{cases} \tag{3.35}$$

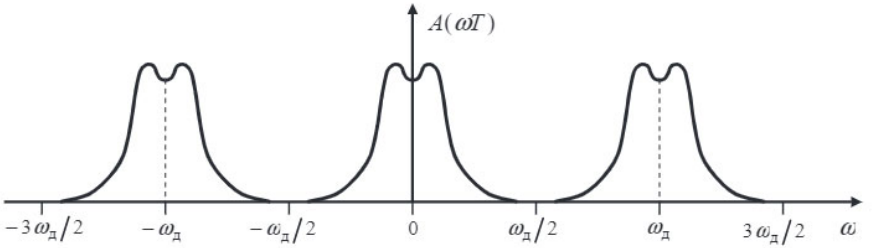


Рис.3.1. Периодический характер АЧХ одномерного скалярного стационарного линейного цифрового фильтра

♦ АЧХ $A(\omega T)$ и ГВЗ $\tau(\omega T)$ являются чётными функциями частоты ω, а ФЧХ $\varphi(\omega T)$ — нечётной функцией (рис.3.2):

$$\begin{cases} A(-\omega T) = A(\omega T); \\ \varphi(-\omega T) = -\varphi(\omega T); \\ \tau(-\omega T) = \tau(\omega T). \end{cases} \tag{3.36}$$

Из (3.35) и (3.36) следует, что при постоянной величине шага дискретизации $T = 1/f_д$ требования к частотным характеристикам вещественного ЦФ достаточно задать лишь на интервале частот $\omega \in [0,\ \pi/T]$.

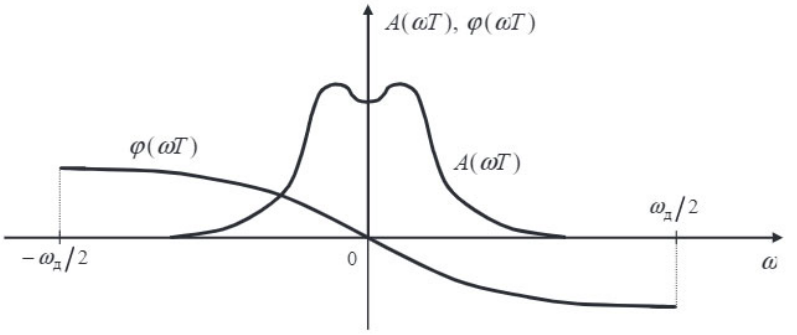


Рис.3.2. Чётный вид АЧХ и нечётный ФЧХ одномерного скалярного вещественного стационарного линейного ЦФ

Первое свойство частотных характеристик вещественных ЦФ (периодический характер АЧХ, ФЧХ и ГВЗ), выражаемое соотношениями (3.35), справедливо также и для скалярных комплексных ЦФ, а второе свойство (чётный вид АЧХ и ГВЗ и нечётный вид ФЧХ) для комплексных ЦФ не справедливо:

$$\begin{cases} A(-\omega T) \neq A(\omega T); \\ \varphi(-\omega T) \neq -\varphi(\omega T); \\ \tau(-\omega T) \neq \tau(\omega T), \end{cases} \qquad (3.37)$$

поэтому частотные характеристики комплексных ЦФ следует задавать на интервале частот $\omega \in [-\pi/T,\ \pi/T]$.

С целью упрощения сопоставления частотных характеристик различных ЦФ частоту ω нормируют одним из двух способов [8].

- При первом способе вводят *нормированную частоту* $w = \omega T = \omega/f_д$, тогда $w_д = \omega_д T = \omega_д/f_д = 2\pi$ и требования к частотным характеристикам вещественных ЦФ задаются на несимметричном интервале нормированных частот $w \in [0,\ \pi]$ (рис.3.3,*а*), а комплексных ЦФ — на симметричном интервале $w \in [-\pi,\ \pi]$.
- При втором способе применяют *нормированную частоту* $W = \omega T/(2\pi) = \omega/\omega_д = f/f_д$, тогда $W_д = \omega_д T/(2\pi) = \omega_д/\omega_д = 1$ и требования к частотным характеристикам вещественных ЦФ задаются на несимметричном интервале нормированных частот $W \in [0,\ 1/2]$ (рис.3.3,*б*), а комплексных ЦФ — на симметричном интервале $W \in [-1/2,\ 1/2]$.

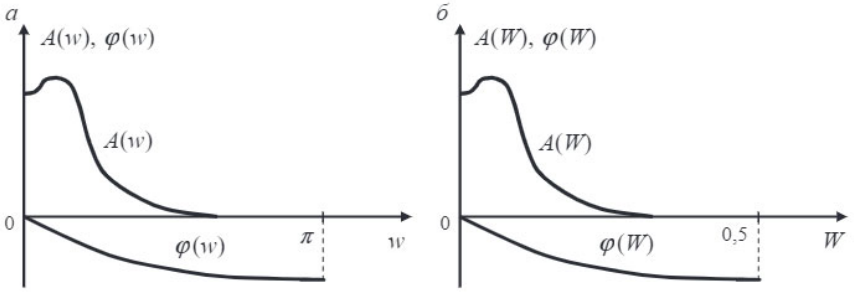


Рис.3.3. Два способа нормировки частоты для частотных характеристик цифрового фильтра

Если производится нормировка частоты, то в обозначениях частотных характеристик ЦФ необходимо соответствующим образом заменить аргументы. Например, при втором способе нормировки следует писать: $H\left(e^{j2\pi W}\right)$, $A(W)$, $\varphi(W)$, $\tau(W)$.

Частотными характеристиками часто пользуются на практике, так как они сравнительно легко могут быть получены экспериментально путём подачи на вход сигнала вида (3.31) и измерения соответствующего параметра выходного сигнала.

Согласно выражениям (3.32) и (3.33) амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики ЦФ являются функциями аргумента $\omega T = 2\pi f / f_д$, поэтому изменение частоты дискретизации $f_д = 1/T$ приводит к пропорциональному изменению характерных частот АЧХ и ФЧХ фильтра, например граничных частот полос пропускания $f_п$ и задерживания $f_з$. Это обстоятельство позволяет осуществлять перестройку ЦФ путем изменения частоты дискретизации $f_д$. При такой перестройке относительная ширина $\Delta f / f_0$ полосы пропускания у полосового фильтра $\Delta f_п = f_{п_2} - f_{п_1}$ или же полосы задерживания у режекторного фильтра $\Delta f_з = f_{з_2} - f_{з_1}$ не изменяется. На практике перестройку ЦФ путем изменения частоты дискретизации $f_д$ можно осуществлять лишь в пределах, пока выполняется условие теоремы отсчётов В.А. Котельникова (1.7).

В случае векторных ЦФ матрицу комплексных частотных характеристик $\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right)$ [см. выражения (3.23), (3.25) — (3.27)] разделить на две отдельные матрицы — амплитудно-частотных $\mathbf{A}(\omega T)$ и фазочастотных $\mathbf{\Phi}(\omega T)$ характеристик — невозможно. Матрицы $\mathbf{A}(\omega T)$ и $\mathbf{\Phi}(\omega T)$, формально построенные из элементов $A_{il}(\omega T)$ и $\varphi_{il}(\omega T)$ $\left(i, l = \overline{1, R}\right)$ выражения (3.27), во-первых, не являются полными характеристиками ЦФ, во-вторых, из них не удаётся сформировать матрицу $\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right)$, которая является полной характеристикой векторного линейного стационарного ЦФ.

3.5. Минимально-фазовые и неминимально-фазовые цифровые фильтры

Представление передаточной функции одномерного скалярного стационарного рекурсивного линейного ЦФ в дробно-рациональном виде (3.7) не является единственным. Применяют также и другие способы описания передаточной функции $H(z)$, например нуль-полюсное, в виде суммы простых дробей и т.д.

Найдём корни полиномов числителя $A(z^{-1})$ и знаменателя $1+B(z^{-1})$ выражения (3.7), затем запишем эти полиномы в виде произведения биномов. В результате получим

$$H(z)=K_0\frac{\prod\limits_{k=1}^{M}\left(1-z_{0k}z^{-1}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{N}\left(1-z_{pk}z^{-1}\right)}, \qquad (3.38)$$

где K_0 — константа нормирования; $z_{0k}\left(k=\overline{1,\,M}\right)$ и $z_{pk}\left(k=\overline{1,\,N}\right)$ — соответственно нули и полюсы передаточной функции $H(z)$, являющиеся корнями алгебраических уравнений $A(z^{-1})=0$ (нули) и $1+B(z^{-1})=0$ (полюсы).

Формулу (3.38) называют *нуль-полюсным* представлением передаточной функции $H(z)$. Расположение нулей и полюсов функции $H(z)$ на Z-плоскости отображает так называемая *карта нулей и полюсов* (рис.3.4), где полюсы показаны чёрными кружками, а нули — белыми. Карта нулей и полюсов позволяет получить аналитическое выражение передаточной функции $H(z)$ с точностью до константы нормирования K_0. Нули и полюсы могут быть либо простыми, либо кратными. Комплексные нули и полюсы передаточной функции $H(z)$ вещественного скалярного ЦФ образуют комплексно-сопряжённые пары•, например, каждому комплексному полюсу $z_{pi}=\alpha_i+j\beta_i$ соответствует комплексно-сопряжённый полюс $z_{pi}^{*}=\alpha_i-j\beta_i$. Это свойство характерно только для вещественных ЦФ, в случае комплексных фильтров оно может выполняться лишь для некоторых полюсов и нулей, но не для всех.

В зависимости от расположения нулей передаточной функции на Z-плоскости различают ЦФ минимально-фазового и неминимально-фазового типа. Если все нули передаточной функции ЦФ расположены внутри круга единичного радиуса или же на единичной окружности, т.е. $|z_{0k}|\le 1\left(k=\overline{1,\,M}\right)$, то фильтр

• В этом случае, например, пара комплексно-сопряжённых полюсов z_{pi} и z_{pi}^{*} даёт в знаменателе (3.38) в качестве множителя квадратный трёхчлен с вещественными коэффициентами $(1-z_{pi}z^{-1})(1-z_{pi}^{*}z^{-1})=1-2\,\mathrm{Re}\{z_{pi}\}\,z^{-1}+\left|z_{pi}\right|^{2}z^{-2}$.

является *минимально-фазовым*. Если хотя бы один нуль передаточной функции находится вне круга единичного радиуса, т.е. $|z_{0\mu}|>1$, то фильтр является *неми-нимально-фазовым*. На рис.3.4,*а* изображена карта нулей и полюсов минимально-фазового, а на рис.3.4,*б* — карта нулей и полюсов неминимально-фазового ЦФ. Разделение скалярных стационарных линейных ЦФ на минимально-фазовые и неминимально-фазовые осуществляется по «внутренним» свойствам алгоритма фильтрации (см. § 2.2).

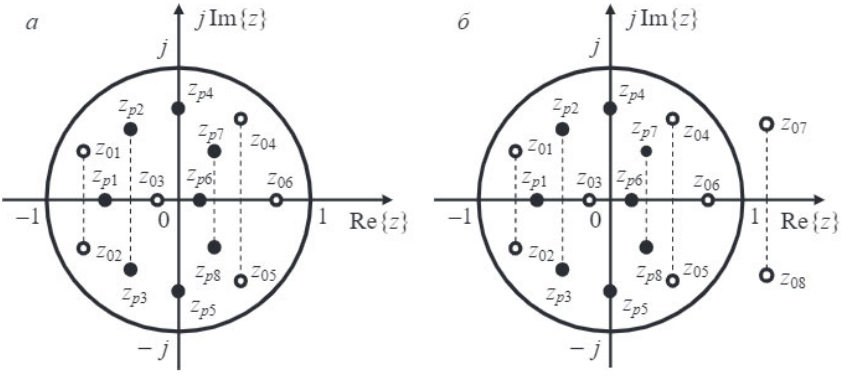


Рис.3.4. Карты нулей и полюсов минимально-фазового (*а*) и неминимально-фазового (*б*) ЦФ

Для минимально-фазовых цифровых фильтров характерно то, что их АЧХ $A(\omega T)$ и ФЧХ $\varphi(\omega T)$ не являются независимыми, а связаны между собой парой дискретных преобразований Гильберта [6, 10, 24]:

$$\ln\left[A(\omega T)\right] = h[0] - \frac{T}{2\pi}\,\text{V.p.}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\varphi(\theta T)\,\text{ctg}\left[(\theta-\omega)\frac{T}{2}\right]d\theta\,; \qquad (3.39)$$

$$\varphi(\omega T) = \frac{T}{2\pi}\,\text{V.p.}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\ln\left[A(\theta T\right]\text{ctg}\left[(\theta-\omega)\frac{T}{2}\right]d\theta, \qquad (3.40)$$

где

$$h[0] = -\frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\ln\left[A(\omega T)\right]d\omega. \qquad (3.41)$$

Здесь V.p. (Valeur principale) — главное значение несобственного интеграла в смысле Коши:

$$\text{V.p.}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0}\left[\int\limits_a^{c-\eta} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\eta}^b f(x)\,dx\right].$$

У неминимально-фазовых фильтров АЧХ и ФЧХ не связаны между собой, т.е. являются независимыми, поэтому, например, при неизменной АЧХ можно получить желаемую ФЧХ.

В классе неминимально-фазовых ЦФ существуют фильтры, фазочастотные характеристики которых являются линейными во всём диапазоне частот. Теория таких фильтров изложена в гл.5.

3.6. Нерекурсивные цифровые фильтры

В § 2.2 отмечалось, что в нерекурсивных ЦФ для вычисления очередного отсчёта выходного сигнала $y[n]$ используются только отсчёты входного сигнала $x[n-k]$ $\left(k=\overline{0,\ M}\right)$, поэтому алгоритм одномерной скалярной стационарной линейной нерекурсивной фильтрации имеет вид

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M} a_k x[n-k]. \tag{3.42}$$

Передаточная функция одномерного скалярного стационарного нерекурсивного линейного ЦФ является рациональной функцией, т.е. полиномом степени M комплексного аргумента z^{-1}:

$$H(z)=A(z^{-1})=\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}. \tag{3.43}$$

Сравнивая выражения (3.42) с (2.2) и (3.43) с (3.7), приходим к выводу, что нерекурсивный алгоритм фильтрации является частным случаем рекурсивного алгоритма при нулевой глубине рекурсии и получается из рекурсивного алгоритма при $b_k=0$ $\left(k=\overline{1,\ N}\right)$. В (3.42) и (3.43) M — порядок нерекурсивного ЦФ.

Нерекурсивные стационарные линейные ЦФ обладают одной замечательной особенностью: их импульсные характеристики $h[n]$ имеют конечное число ненулевых отсчётов, причём эти отсчёты равны коэффициентам алгоритма фильтрации (3.42), которые, как было показано в § 3.2, равны параметрам передаточной функции (3.43) a_k $\left(k=\overline{0,\ M}\right)$. Действительно, в соответствии с выражениями (3.4) и (3.43)

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty} h[n]\,z^{-n}=\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}. \tag{3.44}$$

Отсюда следует, что

$$h[n]=\begin{cases} a_n, & n=\overline{0,\ M};\\ 0, & n>M. \end{cases} \tag{3.45}$$

Таким образом, импульсная характеристика $h[n]$ одномерного скалярного стационарного нерекурсивного линейного ЦФ имеет конечное число отличных

от нуля отсчётов. Это послужило основанием для того, чтобы называть нерекурсивные ЦФ фильтрами с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтрами), а рекурсивные ЦФ — фильтрами с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтрами) [6]. Бесконечность импульсной характеристики (по протяжённости) понимается в том смысле, что у рекурсивного ЦФ отсчёты импульсной характеристики не равны тождественно нулю ни при каких сколько угодно больших номерах отсчётов:

$$h[n] \not\equiv 0, \quad n > M, \tag{3.46}$$

где M — некоторый фиксированный номер отсчёта.

Рекурсивный одномерный скалярный стационарный линейный ЦФ можно рассматривать как частный случай нерекурсивного фильтра при $M = \infty$. Действительно, если передаточную функцию рекурсивного ЦФ (3.7) разложить в ряд Маклорена по степеням комплексного аргумента z^{-1}, т.е. представить её в виде

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{d^k}{d(z^{-1})^k} H(z) \bigg|_{z^{-1}=0} \right] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k z^{-k}, \tag{3.47}$$

то получим передаточную функцию нерекурсивного ЦФ бесконечного порядка. В соответствии с (3.45) отсчёты импульсной характеристики этого фильтра равны коэффициентам передаточной функции (3.47), т.е.

$$h[n] = \theta_n, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, \tag{3.48}$$

что и доказывает бесконечную протяженность импульсной характеристики рекурсивного ЦФ по оси «дискретного времени» [см. (3.46)].

Комплексная частотная характеристика одномерного скалярного стационарного нерекурсивного линейного ЦФ может быть получена из (3.22) при $b_k = 0 \ \left(k = \overline{1,\ N}\right)$:

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = \sum_{k=0}^{M} a_k e^{-j\omega T k} = \sum_{n=0}^{M} h[n]\, e^{-j\omega T n}. \tag{3.49}$$

Из неё нетрудно найти выражения для АЧХ и ФЧХ, однако проще это сделать, положив в формулах (3.32) и (3.33) $b_k = 0 \ \left(k = \overline{1,\ N}\right)$:

$$A(\omega T) = \sqrt{\left[a_0 + \sum_{k=1}^{M} a_k \cos(k\omega T) \right]^2 + \left[\sum_{k=1}^{M} a_k \sin(k\omega T) \right]^2}; \tag{3.50}$$

$$\varphi(\omega T) = -\operatorname{Arctg} \frac{\sum_{k=1}^{M} a_k \sin(k\omega T)}{a_0 + \sum_{k=1}^{M} a_k \cos(k\omega T)}. \tag{3.51}$$

Заметим, что порядки рекурсивного N и нерекурсивного M ЦФ по-разному влияют на ход АЧХ и ФЧХ. Увеличение на единицу порядка N рекурсивного фильтра приводит к значительно большему изменению частотных характеристик, чем увеличение порядка M нерекурсивного фильтра, поэтому для получения одинаковых параметров АЧХ (например, крутизны частотной характеристики в переходной полосе) нерекурсивный ЦФ должен иметь существенно больший порядок, чем рекурсивный. Это объясняется влиянием полюсов передаточной функции рекурсивного ЦФ, которые расположены внутри круга единичного радиуса. Чем ближе они к единичной окружности, тем сильнее их влияние на АЧХ и ФЧХ. Здесь уместна аналогия между некоторой функцией (АЧХ рекурсивного ЦФ) и её аппроксимацией отрезком ряда Тейлора порядка M (АЧХ нерекурсивного ЦФ): чем больше порядок фильтра M, тем на большем интервале частот можно получить удовлетворительную аппроксимацию.

3.7. Устойчивость цифровых фильтров

Устойчивость одномерного скалярного ЦФ понимается в следующем смысле: фильтр называется устойчивым, если при любых начальных условиях и любом ограниченном входном сигнале $x[n]$ выходной сигнал $y[n]$ также остаётся ограниченным, т.е. из условия $|x[n]| \le P_x$ для всех n следует, что $|y[n]| \le P_y$. Здесь P_x и P_y — константы, не зависящие от «дискретного времени» n, причём $P_x < \infty$ и $P_y < \infty$.

Необходимым и достаточным условием устойчивости одномерного скалярного стационарного линейного ЦФ является следующее требование к импульсной характеристике [6]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty, \tag{3.52}$$

т.е. сходимость ряда, составленного из модулей отсчётов импульсной характеристики ЦФ. Действительно, если представить выходной сигнал $y[n]$ в виде (3.1) при $n \to \infty$:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, x[n-k],$$

то •

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, x[n-k] \right| \le \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| \cdot |x[n-k]| \le P_x \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]|, \tag{3.53}$$

откуда следует критерий устойчивости (3.52).

• Здесь используются известные свойства модулей: модуль суммы не превосходит сумму модулей слагаемых, а модуль произведения равен произведению модулей сомножителей.

Из критерия (3.52) видно, что нерекурсивный одномерный скалярный стационарный линейный ЦФ устойчив всегда, поскольку для него согласно (3.45) под знаком суммы в (3.52) будет только $M+1$ отличных от нуля слагаемых.

Для рекурсивных ЦФ использовать критерий устойчивости в форме (3.52) затруднительно, поскольку необходимо суммировать бесконечный ряд модулей отсчётов импульсной характеристики, поэтому, следуя [7], найдём другую форму критерия (3.52), удобную для исследования рекурсивных одномерных скалярных стационарных линейных ЦФ.

Из формулы связи (3.4) передаточной функции $H(z)$ с импульсной характеристикой $h[n]$

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty} h[n]\,z^{-n}$$

получим

$$|H(z)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty} h[n]\,z^{-n}\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}|h[n]|\cdot\left|z^{-n}\right|. \qquad (3.54)$$

Допустим, что $\left|z^{-1}\right|\le 1$, т.е. $|z|\ge 1$. Тогда $\left|z^{-n}\right|\le 1$, и из неравенства (3.54) находим оценку

$$|H(z)|\le\sum_{n=0}^{\infty}|h[n]|. \qquad (3.55)$$

Для устойчивого ЦФ должно выполняться условие (3.52). Следовательно, передаточная функция $H(z)$ должна быть конечна во всех точках Z-плоскости, для которых $|z|\ge 1$. В полюсах $z_{pk}\left(k=\overline{1,\,N}\right)$ передаточная функция $H(z)=\infty$. Отсюда следует, что передаточная функция $H(z)$ устойчивого ЦФ не может иметь полюсов на единичной окружности и во внешней части круга единичного радиуса Z-плоскости, т.е. должно выполняться условие

$$\left|z_{pk}\right|<1,\quad k=\overline{1,\,N}. \qquad (3.56)$$

Полюсы передаточной функции $H(z)$ являются корнями характеристического уравнения

$$1+B(z^{-1})=1+\sum_{k=1}^{N} b_k\,z^{-k}=0, \qquad (3.57)$$

поэтому критерий устойчивости (3.56) можно переформулировать в терминах корней характеристического уравнения (3.57).

Таким образом, для устойчивости рекурсивного одномерного скалярного стационарного линейного ЦФ необходимо и достаточно, чтобы все полюсы его передаточной функции находились внутри круга единичного радиуса Z-плоскости. Если хотя бы один полюс расположен на единичной окружности либо во

внешней части круга единичного радиуса, то фильтр будет неустойчивым. Положение нулей передаточной функции $H(z)$, т.е. вид полинома $A(z^{-1})$ в выражении (3.7), не влияет на устойчивость ЦФ.

На рис.3.5,*а* изображена карта нулей и полюсов устойчивого, а на рис.3.5,*б* — карта нулей и полюсов неустойчивого ЦФ.

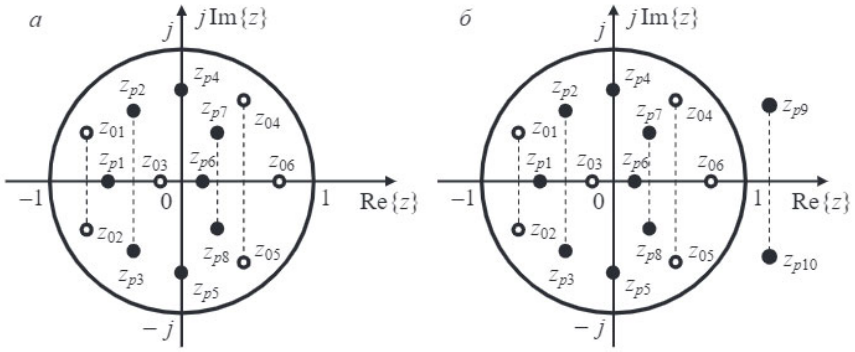


Рис.3.5. Карты нулей и полюсов устойчивого (*а*) и неустойчивого (*б*) цифровых фильтров

Недостатки полюсного критерия устойчивости (3.56) обусловлены необходимостью определения корней характеристического уравнения (3.57), являющихся полюсами передаточной функции (3.7). Аналитических методов решения алгебраических уравнений, порядок которых выше четвёртого, не существует, поэтому нахождение полюсов передаточной функции высокого порядка возможно лишь численными методами. Это ограничивает возможности исследования областей устойчивости.

Существуют также алгебраические и частотные критерии устойчивости стационарных линейных дискретных систем, позволяющие судить об устойчивости рекурсивного стационарного линейного ЦФ без нахождения корней характеристического уравнения (3.57).

В алгебраическом критерии устойчивости Гурвица [17] с помощью билинейного преобразования $z = \dfrac{w+1}{w-1}$ замкнутая область Z-плоскости $|z| \le 1$ отображается в область $\mathrm{Re}(w) \le 0$ вспомогательной комплексной W-плоскости. При этом характеристическое уравнение (3.57) преобразуется в уравнение

$$\sum_{k=0}^{N} c_k w^k = 0, \qquad (3.58)$$

коэффициенты которого $c_k \left(k = \overline{0,\ N}\right)$ однозначно выражаются через коэффициенты $b_k \left(k = \overline{0,\ N},\ b_0 = 1\right)$ характеристического уравнения (3.57).

Из коэффициентов уравнения (3.58) составляется матрица Гурвица

$$\begin{pmatrix} c_{N-1} & c_N & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{N-3} & c_{N-2} & c_{N-1} & c_N & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{N-5} & c_{N-4} & c_{N-3} & c_{N-2} & c_{N-1} & c_N & \dots & 0 & 0 \\ c_{N-7} & c_{N-6} & c_{N-5} & c_{N-4} & c_{N-3} & c_{N-2} & \dots & 0 & 0 \\ c_{N-9} & c_{N-8} & c_{N-7} & c_{N-6} & c_{N-5} & c_{N-4} & \dots & 0 & 0 \\ c_{N-11} & c_{N-10} & c_{N-9} & c_{N-8} & c_{N-7} & c_{N-6} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \end{pmatrix}. \qquad (3.59)$$

Для того чтобы вещественные части всех корней уравнения (3.58) были отрицательными •, необходимо и достаточно, чтобы при $c_N > 0$ определитель матрицы Гурвица (3.59) и все его главные миноры были положительными.

Неустойчивый ЦФ, безусловно, неработоспособен в том случае, когда входной сигнал $x[n]$ действует неограниченно долго, так как при этом выходной сигнал $y[n]$ перестанет зависеть от входного сигнала. Но он работоспособен и используется практически в тех случаях, когда входной сигнал действует в течение ограниченного интервала времени [8]. Например, цифровой интегратор с передаточной функцией $H(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}}$ (эта функция имеет полюс $z = 1$, т.е. ЦФ неустойчив) вполне работоспособен и используется на практике, если входной сигнал $x[n]$ действует лишь при $0 \le n \le N - 1$, после чего следует сброс, т.е. восстановление начальных условий. Цифровой интегратор может входить в состав замкнутой следящей системы. При этом за счёт обратной связи система может обладать устойчивостью, несмотря на то, что интегратор, являющийся динамическим звеном системы, неустойчив.

Пример 3.1. Проверить устойчивость ЦФ с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{50 - 76{,}5\, z^{-1} + 10{,}575\, z^{-2} + 26{,}581\, z^{-3} - 5{,}882\, z^{-4}}{1 + 0{,}8\, z^{-1} - 0{,}9\, z^{-2} - 0{,}528\, z^{-3} + 0{,}9144\, z^{-4} + 0{,}5184\, z^{-5}}.$$

Составим характеристическое уравнение (3.57)

$$1 + 0{,}8\, z^{-1} - 0{,}9\, z^{-2} - 0{,}528\, z^{-3} + 0{,}9144\, z^{-4} + 0{,}5184\, z^{-5} = 0$$

или

$$z^5 + 0{,}8\, z^4 - 0{,}9\, z^3 - 0{,}528\, z^2 + 0{,}9144\, z + 0{,}5184 = 0.$$

• В этом случае все корни характеристического уравнения (3.57) будут лежать в области $|z| < 1$, т.е. согласно (3.56) цифровой фильтр является устойчивым.

Корни характеристического уравнения •:

$$z_1 = -0{,}6, \quad |z_1| = 0{,}6 < 1;$$

$$z_2 = 0{,}8 - j\,0{,}50990195135927848483, \quad |z_2| = 0{,}949 < 1;$$

$$z_3 = 0{,}8 + j\,0{,}50990195135927848483, \quad |z_3| = 0{,}949 < 1;$$

$$z_4 = -0{,}9 - j\,0{,}38729833462074168852, \quad |z_4| = 0{,}98 < 1;$$

$$z_5 = -0{,}9 + j\,0{,}38729833462074168852, \quad |z_5| = 0{,}98 < 1.$$

Модули всех корней характеристического уравнения меньше единицы, т.е. условие (3.56) выполняется, следовательно, цифровой фильтр является устойчивым.

Пример 3.2. Проверить устойчивость ЦФ с передаточной функцией ••

$$H(z) = \frac{50 - 76{,}5\,z^{-1} + 10{,}575\,z^{-2} + 26{,}581\,z^{-3} - 5{,}882\,z^{-4}}{1 + 0{,}8\,z^{-1} - 0{,}9\,z^{-2} + 0{,}6\,z^{-3} + 0{,}9144\,z^{-4} + 0{,}5184\,z^{-5}}.$$

Составим характеристическое уравнение (3.57)

$$1 + 0{,}8\,z^{-1} - 0{,}9\,z^{-2} + 0{,}6\,z^{-3} + 0{,}9144\,z^{-4} + 0{,}5184\,z^{-5} = 0$$

или

$$z^5 + 0{,}8\,z^4 - 0{,}9\,z^3 + 0{,}6\,z^2 + 0{,}9144\,z + 0{,}5184 = 0.$$

Корни характеристического уравнения:

$$z_1 = -1{,}4987448460885169129, \quad |z_1| = 1{,}4987448460885169129 > 1;$$

$$z_2 = -0{,}40941176726062697364 - j\,0{,}39638968240509088568, \quad |z_2| = 0{,}57 < 1;$$

$$z_3 = -0{,}40941176726062697364 + j\,0{,}39638968240509088568, \quad |z_3| = 0{,}57 < 1;$$

$$z_4 = 0{,}75878419030488543008 - j\,0{,}69954608079049923521, \quad |z_4| = 1{,}032 > 1;$$

$$z_5 = 0{,}75878419030488543008 + j\,0{,}69954608079049923521, \quad |z_5| = 1{,}032 > 1.$$

Модули первого, четвёртого и пятого корней характеристического уравнения больше единицы, т.е. условие (3.56) не выполняется, следовательно, цифровой фильтр является неустойчивым.

Краткие итоги

1. Главной характеристикой ЦФ является алгоритм фильтрации. По нему осуществляется реализация фильтра. Однако в классе стационарных линейных ЦФ используются также и другие характеристики: импульсная характеристика $h[n]$, передаточная функция $H(z)$, комплексная частотная характеристика $H\left(e^{j\omega T}\right)$, амплитудно-частотная $A(\omega T)$ и фазочастотная $\varphi(\omega T)$ характеристики.

2. Импульсная характеристика ЦФ $h[n]$ представляет собой реакцию фильтра на единичный импульс (1.4) при нулевых начальных условиях. Выходной сигнал ЦФ при произвольном входном сигнале и нулевых начальных условиях можно определить с помощью импульсной характеристики по формуле дискретной свёртки (3.1).

• Корни найдены с помощью системы компьютерной математики Mathcad.

•• По сравнению с примером 3.1 здесь изменён только коэффициент при z^{-3} в знаменателе передаточной функции $H(z)$.

3. Передаточная функция ЦФ $H(z)$ определяется как отношение Z-преобразования выходного к Z-преобразованию входного сигнала при нулевых начальных условиях (3.3). Передаточная функция и импульсная характеристика связаны между собой парой Z-преобразований (3.4). С помощью передаточной функции можно найти реакцию ЦФ на любое входное воздействие при нулевых начальных условиях в соответствии с алгоритмом (3.5).

4. Передаточная функция $H(z)$ рекурсивного стационарного линейного ЦФ является дробно-рациональной функцией (3.7) комплексного аргумента z^{-1}, параметры которой равны коэффициентам алгоритма линейной цифровой фильтрации (2.2). Все коэффициенты передаточной функции вещественного ЦФ $a_k\ \left(k=\overline{0,M}\right)$ и $b_k\ \left(k=\overline{1,N}\right)$ являются вещественными числами. У комплексного ЦФ некоторые из коэффициентов представляют собой комплексные числа.

5. Комплексная частотная характеристика ЦФ $H\left(e^{j\omega T}\right)$ определяется как отношение преобразования Фурье выходного сигнала к преобразованию Фурье входного сигнала при нулевых начальных условиях (3.19). Комплексная частотная характеристика равна значениям передаточной функции на единичной окружности *Z*-плоскости, т.е. при $z=e^{j\omega T}$ [см. (3.20)]. С импульсной характеристикой она связана парой преобразований Фурье (3.21). Комплексная частотная характеристика ЦФ $H\left(e^{j\omega T}\right)$ является периодической по частоте с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_д = 2\pi f_д$.

6. Импульсная характеристика $h[n]$, передаточная функция $H(z)$ и комплексная частотная характеристика ЦФ $H\left(e^{j\omega T}\right)$ дают полное описание стационарной линейной системы.

7. Модуль комплексной частотной характеристики (3.29) называется амплитудно-частотной характеристикой $A(\omega T)$, а аргумент (3.30) — фазочастотной характеристикой $\varphi(\omega T)$ цифрового фильтра. Амплитудно-частотная $A(\omega T)$ и фазочастотная $\varphi(\omega T)$ характеристики ЦФ являются периодическими функциями частоты ω с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_д = 2\pi f_д$.

8. АЧХ $A(\omega T)$ вещественных скалярных стационарных линейных ЦФ являются чётными, а ФЧХ $\varphi(\omega T)$ — нечётными функциями частоты ω, поэтому с учётом периодичности по частоте требования к ним достаточно задать на интервале частот $\omega \in [0, \pi/T]$. Для комплексных ЦФ условия чётности АЧХ и нечётности ФЧХ не выполняются, поэтому требования к ним следует задавать на симметричном интервале $\omega \in [-\pi/T, \pi/T]$.

9. С целью упрощения сопоставления частотных характеристик различных ЦФ частоту ω обычно нормируют одним из двух способов. При первом способе вводят нормированную частоту $w = \omega T = \omega/f_д$, тогда $w_д = 2\pi$ и требования к частотным характеристикам для вещественных ЦФ задают на интервале нормированных частот $w \in [0, \pi]$, а для комплексных ЦФ — на симметричном интервале $w \in [-\pi, \pi]$. При втором способе полагают нормированной частоту $W = \omega T/(2\pi) = \omega/\omega_д = f/f_д$, тогда $W_д = 1$ и требования к частотным характеристикам для вещественных ЦФ задают на интервале частот $W \in [0, 1/2]$, а для комплексных ЦФ — на симметричном интервале $W \in [-1/2, 1/2]$.

10. Изменением частоты дискретизации $f_д$ можно осуществлять перестройку ЦФ. При этом относительная ширина полосы пропускания полосового или же полосы задержива-

ния режекторного ЦФ не изменяется. Перестройка возможна в пределах таких частот $f_д$, пока выполняются условия теоремы отсчётов В.А. Котельникова.

11. Наряду с дробно-рациональным представлением (3.7) передаточной функции $H(z)$ применяют нуль-полюсное представление (3.38). Расположение нулей и полюсов передаточной функции на Z-плоскости отображает карта нулей и полюсов, которая позволяет получить выражение $H(z)$ с точностью до константы нормирования. Нули и полюсы передаточной функции могут быть либо простыми, либо кратными. Комплексные нули и полюсы передаточной функции вещественного скалярного ЦФ образуют комплексно-сопряжённые пары, а в случае комплексного скалярного ЦФ по крайней мере некоторые из них комплексно-сопряжённых пар не образуют.

12. В зависимости от расположения нулей передаточной функции на Z-плоскости различают ЦФ минимально-фазовые и неминимально-фазовые. У минимально-фазовых ЦФ все нули располагаются внутри круга единичного радиуса или же на единичной окружности, а у неминимально-фазовых ЦФ имеются нули, расположенные вне круга единичного радиуса.

13. Для минимально-фазовых ЦФ характерно то, что их АЧХ $A(\omega T)$ и ФЧХ $\varphi(\omega T)$ не являются независимыми, а связаны между собой парой дискретных преобразований Гильберта. У неминимально-фазовых фильтров АЧХ и ФЧХ не связаны между собой, т.е. являются независимыми, поэтому при неизменной АЧХ можно получить желаемую ФЧХ.

14. Нерекурсивный ЦФ можно рассматривать как частный случай рекурсивного при нулевой глубине рекурсии. Импульсная характеристика $h[n]$ нерекурсивного ЦФ имеет конечное число ненулевых отсчётов. Нерекурсивные ЦФ называют КИХ-фильтрами, а рекурсивные — БИХ-фильтрами.

15. Передаточная функция $H(z)$ нерекурсивного стационарного линейного ЦФ является рациональной функцией (3.43) комплексного аргумента z^{-1}, параметры которой равны отсчётам импульсной характеристики $h[n]$.

16. Необходимым и достаточным условием устойчивости стационарного линейного ЦФ является абсолютная сходимость последовательности отсчётов его импульсной характеристики (3.52). Из этого критерия следует, что нерекурсивный стационарный линейный ЦФ устойчив всегда.

17. Для рекурсивных ЦФ применяют полюсный критерий устойчивости (3.56), вытекающий из общего критерия (3.52): необходимым и достаточным условием устойчивости рекурсивного стационарного линейного ЦФ является расположение всех полюсов его передаточной функции $H(z)$ внутри круга единичного радиуса.

18. Существуют также алгебраические и частотные критерии устойчивости стационарных линейных дискретных систем, позволяющие судить об устойчивости рекурсивного ЦФ без нахождения корней характеристического уравнения. Из алгебраических критериев находит применение критерий Гурвица.

19. Одномерные R-координатные векторные стационарные линейные ЦФ описываются матрицами импульсных характеристик $\mathbf{h}[n]$, передаточных функций $\mathbf{H}(z)$ и комплексных частотных характеристик $\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right)$. Элементы матрицы $\mathbf{H}(z)$ определяются формулой (3.8), а сама матрица описывается выражением (3.17) для рекурсивного и (3.18) для нерекурсивного фильтра. Элементы матрицы $\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right)$ определяются формулой (3.23), а сама матрица описывается выражением (3.25) для рекурсивного и (3.26) для нерекурсивного фильтра.

Глава 4

СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ОДНОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

4.1. Структурная схема нерекурсивного цифрового фильтра

Структурные схемы являются графическим представлением алгоритмов цифровой фильтрации. Они могут быть построены либо по алгоритму фильтрации, либо по передаточной функции $H(z)$. Как следует из выражений (2.2) и (3.42), для реализации скалярных стационарных линейных ЦФ необходимы операционные устройства, осуществляющие задержку (запоминание) отсчётов сигналов, умножение и сложение, а также линии передачи сигналов, соединяющие эти устройства.

На рис.4.1,*а* изображена структурная схема одномерного скалярного вещественного стационарного линейного нерекурсивного ЦФ, алгоритм работы которого описывается выражением (3.42).

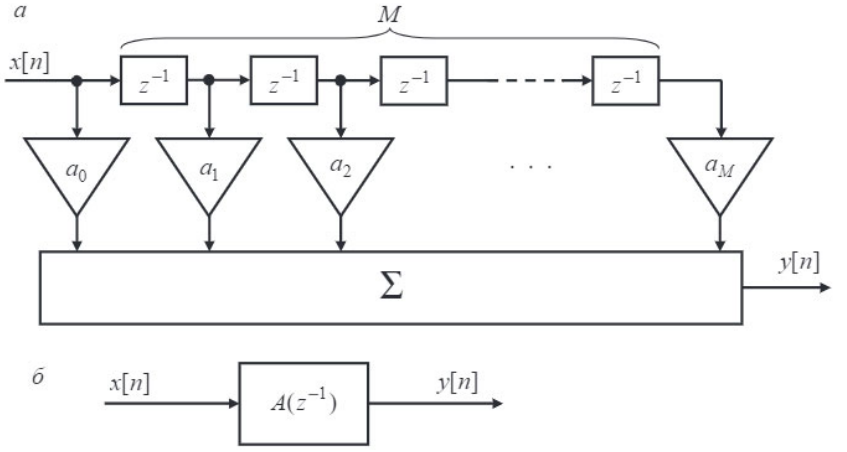


Рис.4.1. Структурные схемы нерекурсивного ЦФ: *а* — полная; *б* — укрупнённая

Схема содержит M элементов задержки z^{-1} на шаг дискретизации, осуществляющих запоминание отсчётов сигналов на время $T = 1/f_д$, $M+1$ умножителей на постоянные коэффициенты $a_k \left(k = \overline{0,\ M}\right)$ и многовходовый сумматор Σ. Та же самая схема в укрупнённом варианте, т.е. в обобщённом виде, без детализации, показана на рис.4.1,*б*. Здесь использовано обозначение, принятое в

формуле (3.43). Укрупнённый вариант структурной схемы очень удобен при построении структурных схем сложных ЦФ, содержащих большое количество звеньев при различных способах их соединения. Этим приёмом построения структурных схем ЦФ мы будем пользоваться в дальнейшем.

4.2. Структурная схема рекурсивного цифрового фильтра при прямой форме реализации

Построенная по алгоритму дискретной линейной фильтрации (2.2) структурная схема одномерного скалярного вещественного стационарного линейного рекурсивного ЦФ (рис.4.2,*а*) отвечает прямой форме реализации.

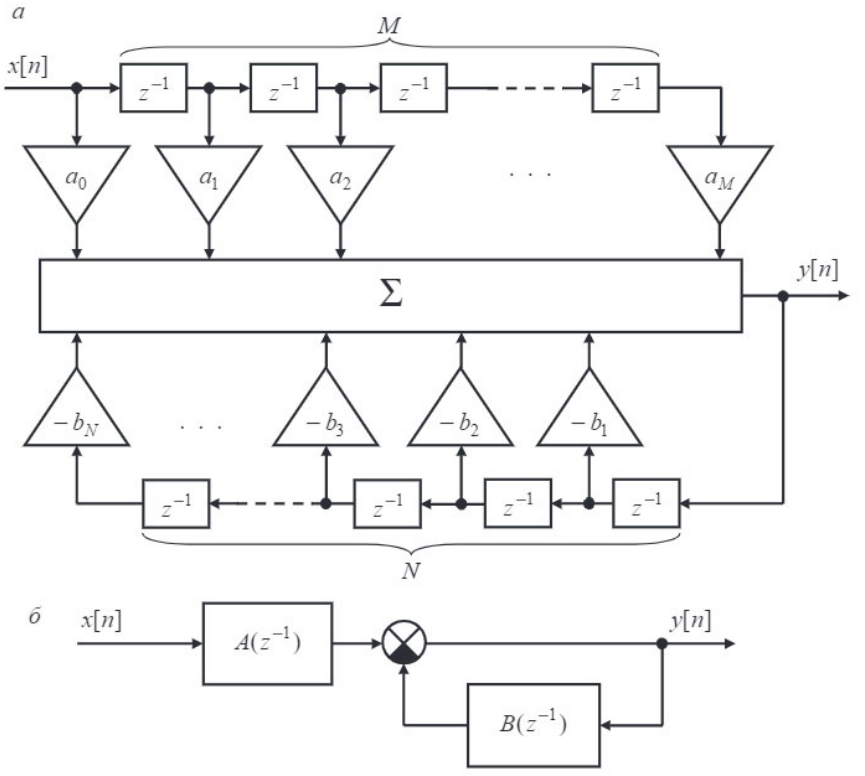


Рис.4.2. Структурные схемы скалярного рекурсивного линейного ЦФ при прямой форме реализации: *а* — полная; *б* — укрупнённая

Она состоит из двух частей: верхняя часть отображает первую сумму алгоритма фильтрации (2.2) и полностью соответствует структуре нерекурсивного

линейного ЦФ (см. рис.4.1,*а*), а нижняя часть — вторую сумму алгоритма (2.2) и представляет собой цепь отрицательной обратной связи. Структурная схема содержит $N+M$ элементов задержки z^{-1} на шаг дискретизации, осуществляющих запоминание отсчётов сигналов на время $T=1/f_д$, $N+M+1$ умножителей на постоянные коэффициенты $a_k\ (k=\overline{0,\ M})$, $b_k\ (k=\overline{1,\ N})$, а также многовходовый сумматор Σ.

Та же самая схема в укрупнённом варианте показана на рис.4.2,*б*. Она состоит из блока прямой передачи с передаточной функцией $A(z^{-1})$ и блока с обратной связью, передаточная функция которого $\dfrac{1}{1+B(z^{-1})}$. Сопоставляя укрупнённые структурные схемы ЦФ, приведённые на рис.4.1,*б* и 4.2,*б*, с соответствующими передаточными функциями (3.43) и (3.7), нетрудно видеть, что их удобно строить непосредственно по передаточным функциям $H(z)$ ЦФ.

4.3. Структурная схема рекурсивного цифрового фильтра при канонической форме реализации

Реализация одномерного скалярного вещественного стационарного линейного рекурсивного ЦФ в прямой форме требует $N+M$ элементов задержки (памяти). Число элементов задержки можно уменьшить, реализуя рекурсивный ЦФ в так называемой *канонической* форме.

Вводя вспомогательную последовательность $v[n]$, заменим уравнение линейной фильтрации (2.2) эквивалентной системой уравнений

$$\begin{cases} v[n]=x[n]-\sum\limits_{k=1}^{N} b_k v[n-k]; \\ y[n]=\sum\limits_{k=0}^{M} a_k v[n-k]. \end{cases} \tag{4.1}$$

Действительно, подставляя первое равенство (4.1) во второе, получим

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M} a_k x[n-k]-\sum_{i=0}^{M} a_i \sum_{k=1}^{N} b_k v[n-i-k]=$$

$$=\sum_{k=0}^{M} a_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N} b_k \left\{ \sum_{i=0}^{M} a_i v[n-i-k] \right\}=\sum_{k=0}^{M} a_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N} b_k y[n-k],$$

что и доказывает эквивалентность системы уравнений (4.1) и линейного алгоритма фильтрации (2.2).

На рис.4.3 изображена структурная схема скалярного стационарного линейного рекурсивного ЦФ в канонической форме реализации, алгоритм работы

которого описывается системой уравнений (4.1): *а* — полная схема; *б* — укрупнённая схема. В канонической схеме требуемое число элементов задержки (памяти) z^{-1} на один шаг дискретизации $T = 1/f_д$ составляет $L = \max\{N, M\}$, а не $L = N + M$, как при прямой форме реализации.

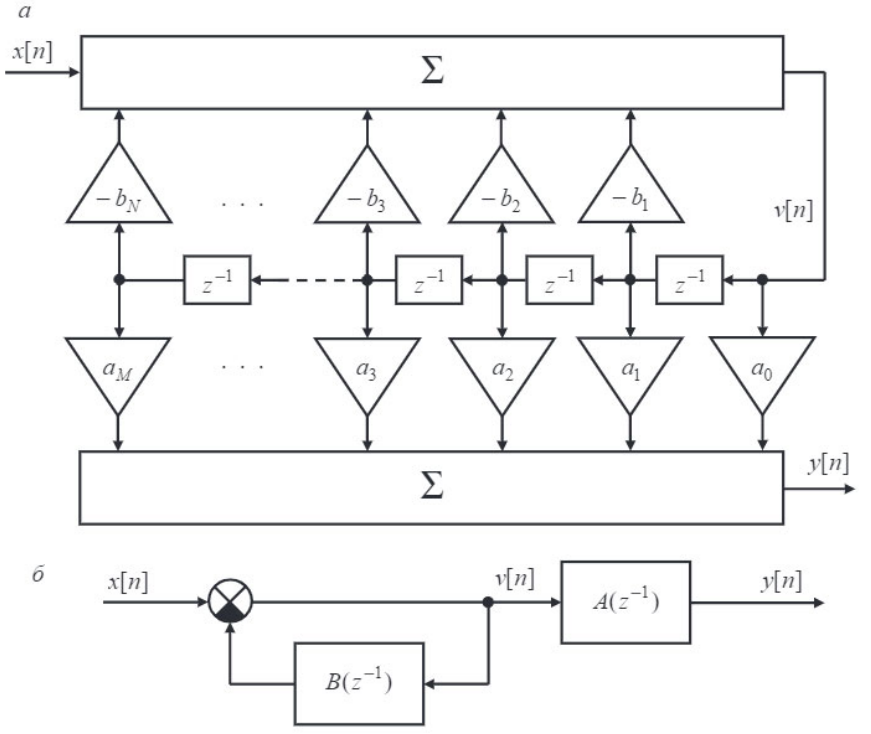


Рис.4.3. Структурные схемы скалярного рекурсивного линейного цифрового фильтра при канонической форме реализации: *а* — полная; *б* — укрупнённая

Сравнение укрупнённых вариантов структурных схем рекурсивного ЦФ при прямой (рис.4.2,*б*) и при канонической формах реализации (рис.4.3,*б*) показывает, что они отличаются лишь порядком расположения блока прямой передачи $A(z^{-1})$ и блока с обратной связью $\dfrac{1}{1 + B(z^{-1})}$. Однако учёт эффектов квантования в цифровых фильтрах при прямой и канонической формах реализации позволяет выявить более существенные различия (см. гл.10 и 11).

Прямая форма реализации нерекурсивного ЦФ одновременно является и канонической.

4.4. Описание ЦФ в пространстве состояний

Метод *пространства состояний* [61 — 64] является современным инструментом анализа и синтеза сложных систем автоматического регулирования и управления. Метод пригоден для исследования как стационарных, так и нестационарных систем. Он естественным образом учитывает начальные условия, позволяет «сшивать» решения по непрерывности в моменты коммутации параметров системы •. Метод пространства состояний развит как для аналоговых, так и для дискретных систем, в нём используется развитый математический аппарат — матричное исчисление [47]. Имеются также модификации метода для нелинейных систем [61]. Метод пространства состояний является перспективным и для ЦФ [3].

Рассмотрим систему разностных уравнений (4.1), описывающих алгоритм работы рекурсивного скалярного вещественного ЦФ при канонической форме реализации. Представим разностные уравнения высокого порядка системами разностных уравнений первого порядка. Для этого введём в рассмотрение вектор состояний $\mathbf{s}[n]$, где $s_1[n]=v[n]$, и запишем первое уравнение (4.1) в следующем виде:

$$\begin{cases} s_2[n]=v[n-1]; \\ s_3[n]=v[n-2]; \\ s_4[n]=v[n-3]; \\ \ldots \\ s_{N+1}[n]=-\sum\limits_{k=1}^{N} b_k v[n-k]+x[n] \end{cases} \tag{4.2}$$

или

$$\begin{cases} s_1[n+1]=s_2[n]; \\ s_2[n+1]=s_3[n]; \\ s_3[n+1]=s_4[n]; \\ \ldots \\ s_N[n+1]=-\sum\limits_{k=1}^{N} b_k\, s_k[n]+x[n]. \end{cases} \tag{4.3}$$

Систему уравнений (4.3) удобно представить в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{s}[n+1]=\mathbf{A}\,\mathbf{s}[n]+\mathbf{B}\,x[n], \tag{4.4}$$

• Эта особенность метода пространства состояний оказывается весьма полезной при построении *адаптивных* ЦФ, параметры которых изменяются в зависимости от свойств обрабатываемого сигнала $x[n]$, а также от условий работы фильтра.

где $\mathbf{s}[n]$ — вектор-столбец состояний размера $N\times 1$;

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 & \dots & -b_{N-1} & -b_N \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

— квадратная матрица размера $N\times N$ (матрица коэффициентов ЦФ);

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.6}$$

— вектор-столбец размера $N\times 1$, называемый вектором управления; $(\dots)^{\mathrm{T}}$ — символ транспонирования; $x[n]$ — скалярный входной сигнал.

Второе уравнение системы (4.1) также запишем в векторно-матричной форме, добавив при этом слагаемое $Dx[n]$:

$$y[n]=\mathbf{C}\,\mathbf{s}[n]+Dx[n], \tag{4.7}$$

где

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_M & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

— вектор-строка размера $1\times N$ (вектор выхода); D — скаляр, отображающий прохождение входного сигнала на выход в обход системы (при $M<N$ он имеет нулевое значение, т.е. $D=0$).

Таким образом, в пространстве состояний одномерный скалярный вещественный стационарный линейный ЦФ описывается следующей системой векторно-матричных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{s}[n+1]=\mathbf{A}\,\mathbf{s}[n]+\mathbf{B}\,x[n]; \\ y[n]=\mathbf{C}\,\mathbf{s}[n]+Dx[n]. \end{cases} \tag{4.9}$$

Аналогичными уравнениями описывается в пространстве состояний одномерный векторный *нестационарный* линейный ЦФ [•] [ср. с (4.9)]:

$$\begin{cases} \mathbf{s}[n+1]=\mathbf{A}[n]\mathbf{s}[n]+\mathbf{B}[n]\mathbf{x}[n]; \\ \mathbf{y}[n]=\mathbf{C}[n]\mathbf{s}[n]+\mathbf{D}[n]\mathbf{x}[n], \end{cases} \tag{4.10}$$

где $\mathbf{s}[n]$ — вектор-столбец размера $N\times 1$ (вектор состояния); $\mathbf{x}[n]$ — вектор-столбец входных сигналов размера $R\times 1$; $\mathbf{y}[n]$ — вектор-столбец выходных сигналов размера $L\times 1$; $\mathbf{A}[n]$ — квадратная матрица размера $N\times N$ (матрица коэффициентов системы); $\mathbf{B}[n]$ — прямоугольная матрица размера $N\times R$ (мат-

---

[•] Состояние системы можно схематично охарактеризовать как минимальную информацию о системе, необходимую для определения её реакции на известное входное воздействие, а также её состояний в будущем [62].

рица управления); $\mathbf{C}[n]$ — прямоугольная матрица размера $L \times N$ (матрица выхода); $\mathbf{D}[n]$ — прямоугольная матрица размера $L \times R$ (матрица обхода).

Структурная схема линейной системы в пространстве состояний, описываемой векторно-матричными уравнениями (4.10), изображена на рис.4.4.

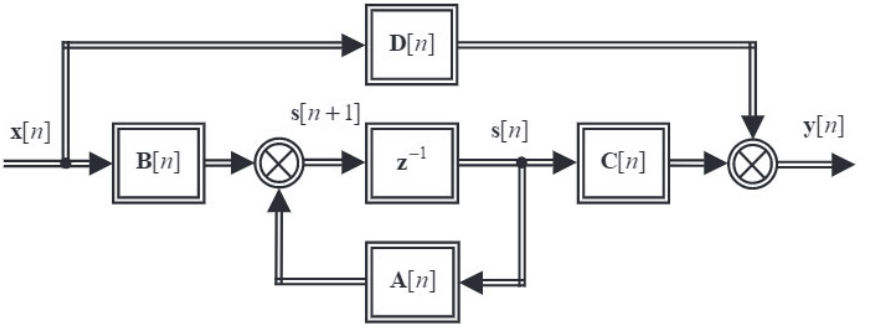


Рис.4.4. Структурная схема нестационарной линейной дискретной системы в пространстве состояний, описываемой уравнениями (4.10)

В случае стационарного ЦФ все матрицы $\mathbf{A}[n]$, $\mathbf{B}[n]$, $\mathbf{C}[n]$ и $\mathbf{D}[n]$ имеют постоянные элементы, которые не зависят от «дискретного времени» n. При этом система уравнений (4.10) принимает более простой вид:

$$\begin{cases} \mathbf{s}[n+1] = \mathbf{A}\,\mathbf{s}[n] + \mathbf{B}\,\mathbf{x}[n]; \\ \mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\,\mathbf{s}[n] + \mathbf{D}\,\mathbf{x}[n]. \end{cases} \tag{4.11}$$

Системами векторно-матричных уравнений (4.9) — (4.11) можно описывать в пространстве состояний как вещественные, так и комплексные ЦФ. В последнем случае векторы и матрицы, входящие в эти уравнения, имеют комплексные элементы.

4.5. Способы соединения блоков цифрового фильтра

Структурные схемы сложных ЦФ могут быть получены соединением более простых блоков •. На практике применяют три типа соединений: каскадное (последовательное), параллельное и соединение с обратной связью. На рис.4.5 показаны двухзвенные структуры ЦФ при названных типах соединений. При известных передаточных функциях блоков и способах их соединения требуется определить передаточную функцию фильтра сложной структуры.

• В дальнейшем ЦФ, структурные схемы которых изображены на рис.4.1 — 4.4, будем называть фильтрами простой структуры (блоками), а ЦФ, полученные в результате соединения различных блоков, — фильтрами сложной структуры.

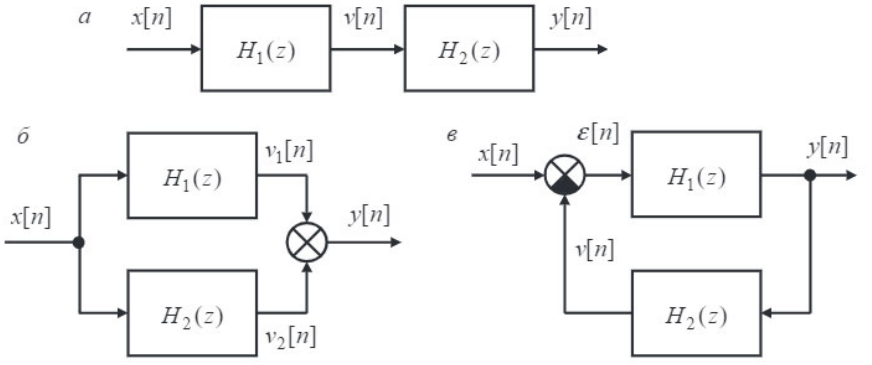


Рис.4.5. Способы соединения двух блоков ЦФ с передаточными функциями $H_1(z)$ и $H_2(z)$: *а* — каскадное; *б* — параллельное; *в* — с обратной связью

◆ Каскадное соединение

На рис.4.5,*а* изображено каскадное соединение двух одномерных скалярных стационарных линейных ЦФ с передаточными функциями $H_1(z)$ и $H_2(z)$. Найдём передаточную функцию $H(z)$ результирующего ЦФ.

Согласно определению передаточной функции (3.3)

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{V(z)}{X(z)}\cdot\frac{Y(z)}{V(z)}=H_1(z)\,H_2(z). \tag{4.12}$$

Таким образом, при каскадном соединении блоков их передаточные функции перемножаются.

Если последовательно (каскадно) соединены L блоков, то передаточная функция $H(z)$ результирующего ЦФ равна произведению передаточных функций $H_r(z)$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$ всех последовательно соединённых блоков:

$$H(z)=\prod_{r=1}^{L}H_r(z). \tag{4.13}$$

На практике в качестве элементарных часто используют однотипные блоки второго порядка с передаточными функциями

$$H_r(z)=\frac{a_{r0}+a_{r1}z^{-1}+a_{r2}z^{-2}}{1+b_{r1}z^{-1}+b_{r2}z^{-2}},\quad r=\overline{1,\,L}. \tag{4.14}$$

Эти блоки называются *биквадратными* [8]. Биквадратный блок является универсальным звеном, пригодным для построения ЦФ более сложной структуры. Блоки первого порядка могут быть получены из биквадратного блока в частном случае при $a_{r2}=b_{r2}=0$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$.

Если блоки каскадной структуры ЦФ (рис.4.5,*а*) заданы импульсными характеристиками $h_1[n]$ и $h_2[n]$, то импульсную характеристику $h[n]$ результирующего ЦФ можно получить из (4.12), используя формулу связи импульсной характеристики с передаточной функцией (3.4) и теорему об умножении изображений (см. § 1.3):

$$h[n]=h_1[n]*h_2[n]=\sum_{k=0}^{n}h_1[k]\,h_2[n-k]=\sum_{k=0}^{n}h_1[n-k]\,h_2[k], \tag{4.15}$$

где $*$ — символ операции свёртки.

Если каскадно соединены L блоков, то импульсная характеристика $h[n]$ результирующего ЦФ согласно (4.13) равна свёртке импульсных характеристик всех последовательно соединённых блоков:

$$h[n]=h_1[n]*h_2[n]*h_3[n]*...*h_L[n]. \tag{4.16}$$

Операция свёртки обладает ассоциативным свойством, поэтому многократную свёртку (4.16) можно заменить совокупностью повторных свёрток двух функций:

$$h[n]=(...((h_1[n]*h_2[n])*h_3[n])*...*h_L[n]). \tag{4.17}$$

При каскадном соединении L блоков комплексная частотная характеристика $H\left(e^{j\omega T}\right)$ результирующего ЦФ согласно (3.20) и (4.13) равна произведению комплексных частотных характеристик $H_r\left(e^{j\omega T}\right)$ всех последовательно соединённых блоков:

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=\prod_{r=1}^{L}H_r\left(e^{j\omega T}\right). \tag{4.18}$$

Определим АЧХ $A(\omega T)$ и ФЧХ $\varphi(\omega T)$ результирующего ЦФ по известным АЧХ $A_r(\omega T)$ и ФЧХ $\varphi_r(\omega T)$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$ блоков при их каскадном соединении. На основании (4.18) и (3.28) запишем

$$A(\omega T)\exp\left[j\varphi(\omega T)\right]=\prod_{r=1}^{L}A_r(\omega T)\exp\left[j\varphi_r(\omega T)\right], \tag{4.19}$$

откуда получаем

$$\begin{cases} A(\omega T)=\prod\limits_{r=1}^{L}A_r(\omega T); \\ \varphi(\omega T)=\sum\limits_{r=1}^{L}\varphi_r(\omega T). \end{cases} \tag{4.20}$$

Таким образом, при каскадном соединении блоков ЦФ их амплитудно-частотные характеристики перемножаются, а фазочастотные суммируются.

◆ **Параллельное соединение**

На рис.4.5,*б* изображено параллельное соединение двух одномерных скалярных стационарных линейных блоков ЦФ с передаточными функциями $H_1(z)$ и $H_2(z)$. Найдём передаточную функцию $H(z)$ результирующего ЦФ.

Согласно определению передаточной функции (3.3) и свойству линейности Z-преобразования [см. (1.27) и (1.28)]

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{V_1(z)+V_2(z)}{X(z)}=\frac{V_1(z)}{X(z)}+\frac{V_2(z)}{X(z)}=H_1(z)+H_2(z), \tag{4.21}$$

т.е. при параллельном соединении блоков их передаточные функции суммируются.

Если параллельно соединены L блоков, то передаточная функция $H(z)$ результирующего ЦФ равна сумме передаточных функций $H_r(z)$ всех параллельно соединённых блоков:

$$H(z)=\sum_{r=1}^{L} H_r(z). \tag{4.22}$$

На практике при параллельном соединении в качестве элементарных часто используют блоки второго порядка с передаточными функциями [8]

$$H_r(z)=\frac{a_{r0}+a_{r1}z^{-1}}{1+b_{r1}z^{-1}+b_{r2}z^{-2}}, \quad r=\overline{1,\ L}, \tag{4.23}$$

которые являются частным случаем биквадратных блоков (4.14) при $a_{r2}=0$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$.

Если параллельно соединены L блоков, заданных импульсными характеристиками $h_r[n]$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$, то импульсную характеристику $h[n]$ результирующего ЦФ можно получить из (4.22), используя формулу связи импульсной характеристики с передаточной функцией (3.4) и свойство линейности Z-преобразования (см. § 1.3):

$$h[n]=\sum_{r=1}^{L} h_r[n]. \tag{4.24}$$

При параллельном соединении L блоков комплексная частотная характеристика $H\left(e^{j\omega T}\right)$ результирующего ЦФ согласно (3.20) и (4.22) равна сумме комплексных частотных характеристик $H_r\left(e^{j\omega T}\right)$ всех параллельно соединённых блоков:

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=\sum_{r=1}^{L} H_r\left(e^{j\omega T}\right). \tag{4.25}$$

Определим АЧХ $A(\omega T)$ и ФЧХ $\varphi(\omega T)$ результирующего ЦФ по известным АЧХ $A_r(\omega T)$ и ФЧХ $\varphi_r(\omega T)$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$ блоков при их параллельном соединении. На основании (4.25) и (3.28) запишем

$$A(\omega T)\exp[\,j\varphi(\omega T)]=\sum_{r=1}^{L}A_r(\omega T)\exp[\,j\varphi_r(\omega T)]. \qquad (4.26)$$

Применяя к комплексным экспонентам формулу Эйлера и вычисляя модуль и аргумент правой части равенства (4.26), получим

$$\begin{cases} A(\omega T)=\sqrt{\left\{\sum\limits_{r=1}^{L}A_r(\omega T)\cos[\varphi_r(\omega T)]\right\}^2+\left\{\sum\limits_{r=1}^{L}A_r(\omega T)\sin[\varphi_r(\omega T)]\right\}^2}; \\ \varphi(\omega T)=\operatorname{Arctg}\dfrac{\sum\limits_{r=1}^{L}A_r(\omega T)\sin[\varphi_r(\omega T)]}{\sum\limits_{r=1}^{L}A_r(\omega T)\cos[\varphi_r(\omega T)]}. \end{cases} \qquad (4.27)$$

◆ **Соединение с обратной связью**

На рис.4.5,*в* изображено соединение с отрицательной обратной связью двух одномерных скалярных стационарных линейных ЦФ с передаточными функциями $H_1(z)$ и $H_2(z)$. Найдём передаточную функцию $H(z)$ результирующего ЦФ.

На основании определения передаточной функции (3.3) с учётом промежуточных переменных $v[n]$ и $\varepsilon[n]$ запишем уравнения для Z-образов:

$$\begin{cases} Y(z)=H_1(z)\mathrm{E}(z); \\ \mathrm{E}(z)=X(z)-V(z); \\ V(z)=H_2(z)Y(z). \end{cases} \qquad (4.28)$$

Исключая в (4.28) промежуточные переменные $\mathrm{E}(z)$ и $V(z)$, получим

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{H_1(z)}{1+H_1(z)H_2(z)}. \qquad (4.29)$$

Согласно (3.20) и (4.29) комплексная частотная характеристика $H\left(e^{j\omega T}\right)$ результирующего ЦФ при соединении с обратной связью выражается через комплексные частотные характеристики блоков $H_1\left(e^{j\omega T}\right)$ и $H_2\left(e^{j\omega T}\right)$ следующим образом:

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=\frac{H_1\left(e^{j\omega T}\right)}{1+H_1\left(e^{j\omega T}\right)H_2\left(e^{j\omega T}\right)}. \qquad (4.30)$$

Определим АЧХ $A(\omega T)$ и ФЧХ $\varphi(\omega T)$ результирующего ЦФ по известным АЧХ $A_r(\omega T)$ и ФЧХ $\varphi_r(\omega T)$ $\left(r=\overline{1,\ 2}\right)$ блоков при соединении с обратной связью (рис.4.5,*в*). Воспользовавшись формулой (3.28), запишем

$$A(\omega T)\exp[j\varphi(\omega T)]=\frac{A_1(\omega T)\exp[j\varphi_1(\omega T)]}{1+A_1(\omega T)\exp[j\varphi_1(\omega T)]\,A_2(\omega T)\exp[j\varphi_2(\omega T)]}. \qquad (4.31)$$

Применяя к комплексным экспонентам формулу Эйлера и вычисляя модуль и аргумент правой части равенства (4.31), получим

$$\begin{cases} A(\omega T)=\dfrac{A_1(\omega T)}{\sqrt{1+A_1^2(\omega T)\,A_2^2(\omega T)+2A_1(\omega T)\,A_2(\omega T)\cos[\varphi_1(\omega T)+\varphi_2(\omega T)]}}; \\ \varphi(\omega T)=\varphi_1(\omega T)-\mathrm{Arctg}\dfrac{A_1(\omega T)\,A_2(\omega T)\sin[\varphi_1(\omega T)+\varphi_2(\omega T)]}{1+A_1(\omega T)\,A_2(\omega T)\cos[\varphi_1(\omega T)+\varphi_2(\omega T)]}. \end{cases} \qquad (4.32)$$

4.6. Структурные схемы комплексных цифровых фильтров

Алгоритм работы комплексного одномерного скалярного стационарного линейного рекурсивного ЦФ описывается разностным уравнением (2.2), в котором как сигналы $x[n]$ и $y[n]$, так и коэффициенты a_k $\left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и b_k $\left(k=\overline{1,\ N}\right)$ являются комплексными. Запишем их в декартовой форме:

$$\begin{cases} x[n]=x_{\mathrm{c}}[n]+jx_{\mathrm{s}}[n]; \\ y[n]=y_{\mathrm{c}}[n]+jy_{\mathrm{s}}[n]; \\ a_k=a_{\mathrm{c}k}+ja_{\mathrm{s}k},\quad k=\overline{0,\ M}; \\ b_k=b_{\mathrm{c}k}+jb_{\mathrm{s}k},\quad k=\overline{1,\ N}. \end{cases} \qquad (4.33)$$

Подставим выражения (4.33) в уравнение алгоритма фильтрации (2.2) и выполним алгебраические операции умножения и сложения комплексных чисел. После группировки вещественных и мнимых частей получим разностные уравнения для квадратурных компонент $y_{\mathrm{c}}[n]$ и $y_{\mathrm{s}}[n]$ выходного сигнала комплексного одномерного скалярного стационарного линейного рекурсивного ЦФ.

Эти уравнения имеют следующий вид [1, 3, 4]:

$$\begin{cases} y_{\mathrm{c}}[n]=\sum\limits_{k=0}^{M}a_{\mathrm{c}k}x_{\mathrm{c}}[n-k]-\sum\limits_{k=0}^{M}a_{\mathrm{s}k}x_{\mathrm{s}}[n-k]-\sum\limits_{k=1}^{N}b_{\mathrm{c}k}y_{\mathrm{c}}[n-k]+\sum\limits_{k=1}^{N}b_{\mathrm{s}k}y_{\mathrm{s}}[n-k]; \\ y_{\mathrm{s}}[n]=\sum\limits_{k=0}^{M}a_{\mathrm{c}k}x_{\mathrm{s}}[n-k]+\sum\limits_{k=0}^{M}a_{\mathrm{s}k}x_{\mathrm{c}}[n-k]-\sum\limits_{k=1}^{N}b_{\mathrm{c}k}y_{\mathrm{s}}[n-k]-\sum\limits_{k=1}^{N}b_{\mathrm{s}k}y_{\mathrm{c}}[n-k]. \end{cases} \qquad (4.34)$$

По уравнениям (4.34) можно построить полную структурную схему комплексного одномерного скалярного стационарного линейного рекурсивного ЦФ при прямой форме реализации подобно тому, как это сделано в случае вещественного фильтра (рис.4.2,*а*). Однако эта схема оказывается слишком громоздкой, поэтому приводить её здесь мы не будем, ограничившись рассмотрением укрупнённой структурной схемы.

Для построения укрупнённой структурной схемы фильтра возьмём Z-преобразование от обеих частей уравнений (4.34), полагая, что входной сигнал $x[n]=0$ при $n<0$, а начальные условия в ЦФ нулевые: $y_{\mathrm{c}}[-n]=0$, $y_{\mathrm{s}}[-n]=0$ $\left(n=\overline{1,\ N}\right)$. Воспользовавшись теоремой линейности Z-преобразования и теоремой запаздывания (см. § 1.3), получим

$$\begin{cases} Y_{\mathrm{c}}(z)=\sum\limits_{k=0}^{M} a_{\mathrm{c}k}z^{-k}X_{\mathrm{c}}(z)-\sum\limits_{k=0}^{M} a_{\mathrm{s}k}z^{-k}X_{\mathrm{s}}(z)-\sum\limits_{k=1}^{N} b_{\mathrm{c}k}z^{-k}Y_{\mathrm{c}}(z)+\sum\limits_{k=1}^{N} b_{\mathrm{s}k}z^{-k}Y_{\mathrm{s}}(z); \\ Y_{\mathrm{s}}(z)=\sum\limits_{k=0}^{M} a_{\mathrm{c}k}z^{-k}X_{\mathrm{s}}(z)+\sum\limits_{k=0}^{M} a_{\mathrm{s}k}z^{-k}X_{\mathrm{c}}(z)-\sum\limits_{k=1}^{N} b_{\mathrm{c}k}z^{-k}Y_{\mathrm{s}}(z)-\sum\limits_{k=1}^{N} b_{\mathrm{s}k}z^{-k}Y_{\mathrm{c}}(z). \end{cases} \tag{4.35}$$

Введём в рассмотрение передаточные функции нерекурсивных вещественных линейных блоков (косинусных и синусных):

$$\begin{cases} A_{\mathrm{c}}(z^{-1})=\sum\limits_{k=0}^{M} a_{\mathrm{c}k}z^{-k}; \quad B_{\mathrm{c}}(z^{-1})=\sum\limits_{k=1}^{N} b_{\mathrm{c}k}z^{-k}; \\ A_{\mathrm{s}}(z^{-1})=\sum\limits_{k=0}^{M} a_{\mathrm{s}k}z^{-k}; \quad B_{\mathrm{s}}(z^{-1})=\sum\limits_{k=1}^{N} b_{\mathrm{s}k}z^{-k}. \end{cases} \tag{4.36}$$

С учётом формул (4.36) уравнения (4.35) представим в компактном виде:

$$\begin{cases} Y_{\mathrm{c}}(z)=A_{\mathrm{c}}(z^{-1})X_{\mathrm{c}}(z)-A_{\mathrm{s}}(z^{-1})X_{\mathrm{s}}(z)-B_{\mathrm{c}}(z^{-1})Y_{\mathrm{c}}(z)+B_{\mathrm{s}}(z^{-1})Y_{\mathrm{s}}(z); \\ Y_{\mathrm{s}}(z)=A_{\mathrm{c}}(z^{-1})X_{\mathrm{s}}(z)+A_{\mathrm{s}}(z^{-1})X_{\mathrm{c}}(z)-B_{\mathrm{c}}(z^{-1})Y_{\mathrm{s}}(z)-B_{\mathrm{s}}(z^{-1})Y_{\mathrm{c}}(z). \end{cases} \tag{4.37}$$

Построенная по уравнениям (4.37) укрупнённая структурная схема комплексного одномерного скалярного стационарного линейного рекурсивного ЦФ изображена на рис.4.6. Схема состоит из двух одинаковых квадратурных каналов (косинусного и синусного) с передаточными функциями $\dfrac{A_{\mathrm{c}}(z^{-1})}{1+B_{\mathrm{c}}(z^{-1})}$, каждый из которых соответствует схеме вещественного одномерного рекурсивного цифрового фильтра при прямой форме реализации (рис.4.2,*б*). Между квадратурными каналами действуют перекрёстные связи через блоки с передаточными функциями $A_{\mathrm{s}}(z^{-1})$ и $B_{\mathrm{s}}(z^{-1})$.

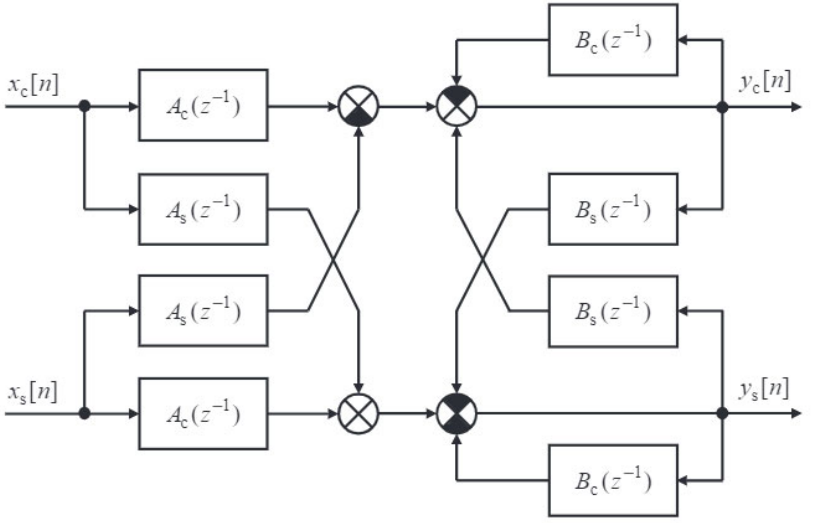


Рис.4.6. Структурная схема комплексного одномерного скалярного стационарного линейного рекурсивного ЦФ при прямой форме реализации

Вводя вспомогательную последовательность $v[n]=v_c[n]+jv_s[n]$, можно получить систему разностных линейных уравнений, эквивалентную исходной системе (4.34):

$$\begin{cases} v_c[n]=x_c[n]-\sum\limits_{k=1}^{N} b_{ck}v_c[n-k]+\sum\limits_{k=1}^{N} b_{sk}v_s[n-k]; \\ v_s[n]=x_s[n]-\sum\limits_{k=1}^{N} b_{ck}v_s[n-k]-\sum\limits_{k=1}^{N} b_{sk}v_c[n-k]; \\ y_c[n]=\sum\limits_{k=0}^{M} a_{ck}v_c[n-k]-\sum\limits_{k=0}^{M} a_{sk}v_s[n-k]; \\ y_s[n]=\sum\limits_{k=0}^{M} a_{ck}v_s[n-k]+\sum\limits_{k=0}^{M} a_{sk}v_c[n-k]. \end{cases} \tag{4.38}$$

Эквивалентность систем уравнений (4.38) и (4.34) доказывается подстановкой первого и второго уравнений (4.38) в третье и четвёртое, а также некоторыми простыми, но довольно громоздкими преобразованиями, аналогично тому, как это сделано при доказательстве эквивалентности системы уравнений (4.1) исходному уравнению фильтрации (2.2).

По уравнениям (4.38) можно построить полную структурную схему комплексного одномерного скалярного стационарного линейного рекурсивного ЦФ

при канонической форме реализации подобно тому, как это сделано в случае вещественного фильтра (рис.4.3,*а*). Однако эта схема оказывается слишком громоздкой, поэтому приводить её здесь мы не будем, ограничившись рассмотрением укрупнённой схемы.

Укрупнённая схема комплексного одномерного скалярного стационарного рекурсивного линейного ЦФ при канонической форме реализации изображена на рис.4.7. Она получена из структурной схемы ЦФ при прямой форме реализации (см. рис.4.6) перестановкой блоков с передаточными функциями $A_c(z^{-1})$ и $\dfrac{1}{1+B_c(z^{-1})}$ в квадратурных каналах, а также перестановкой соединённых с этими блоками звеньев с передаточными функциями $A_s(z^{-1})$ и $B_s(z^{-1})$, реализующих перекрёстные связи. При таких перестановках свойства дискретного линейного фильтра не меняются, однако у ЦФ, являющегося, строго говоря, нелинейной системой, изменятся уровни выходных шумов квантования.

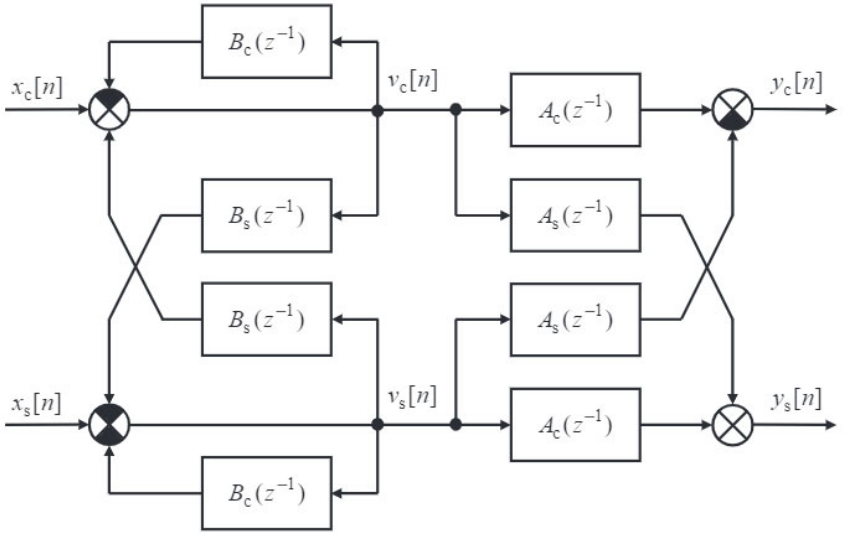


Рис.4.7. Структурная схема комплексного одномерного скалярного стационарного линейного рекурсивного ЦФ при канонической форме реализации

Структурная схема комплексного одномерного стационарного нерекурсивного линейного ЦФ может рассматриваться как частный случай структурной схемы комплексного рекурсивного ЦФ при исключении блоков обратных связей, т.е. при $B_c(z^{-1})=0$ и $B_s(z^{-1})=0$. Укрупнённая структурная схема такого фильтра изображена на рис.4.8.

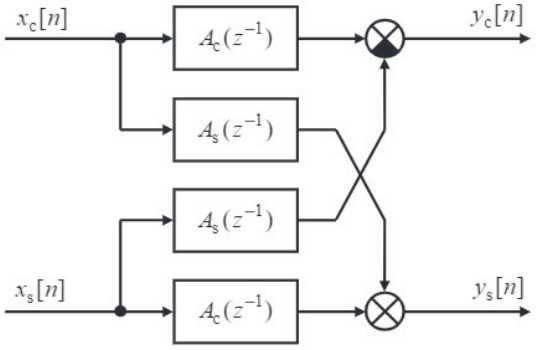


Рис.4.8. Структурная схема комплексного одномерного скалярного стационарного линейного нерекурсивного ЦФ

Рассмотрим передаточные функции и частотные характеристики линейных комплексных цифровых фильтров.

Передаточная функция комплексного одномерного скалярного стационарного линейного *рекурсивного* ЦФ описывается дробно-рациональным выражением (3.7), а *нерекурсивного* — рациональным выражением (3.43). С учётом комплексности коэффициентов [см. (4.33)] передаточную функцию комплексного ЦФ запишем в следующем виде:

$$H(z)=\frac{A_c(z^{-1})+jA_s(z^{-1})}{1+B_c(z^{-1})+jB_s(z^{-1})}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{M}\left(a_{ck}+ja_{sk}\right)z^{-k}}{1+\sum\limits_{k=1}^{N}\left(b_{ck}+jb_{sk}\right)z^{-k}} \tag{4.39}$$

в случае рекурсивного и

$$H(z)=A_c(z^{-1})+jA_s(z^{-1})=\sum_{k=0}^{M}\left(a_{ck}+ja_{sk}\right)z^{-k} \tag{4.40}$$

в случае нерекурсивного фильтра.

Комплексная частотная характеристика комплексного одномерного стационарного линейного *рекурсивного* ЦФ описывается выражением (3.22), а *нерекурсивного* — выражением (3.49). Из них с учётом комплексности коэффициентов [см. (4.33)] находим следующие формулы для комплексных частотных характеристик комплексного ЦФ:

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=\frac{A_c\left(e^{j\omega T}\right)+jA_s\left(e^{j\omega T}\right)}{1+A_c\left(e^{j\omega T}\right)+jA_s\left(e^{j\omega T}\right)}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{M}\left(a_{ck}+ja_{sk}\right)e^{-j\omega Tk}}{1+\sum\limits_{k=1}^{N}\left(b_{ck}+jb_{sk}\right)e^{-j\omega Tk}} \tag{4.41}$$

в случае рекурсивного и

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=A_{\mathrm{c}}\left(e^{j\omega T}\right)+jA_{\mathrm{s}}\left(e^{j\omega T}\right)=\sum_{k=0}^{M}\left(a_{\mathrm{c}k}+ja_{\mathrm{s}k}\right)e^{-j\omega Tk} \tag{4.42}$$

в случае нерекурсивного фильтра.

Представляя комплексную экспоненту в (4.41) и (4.42) формулой Эйлера $e^{jx}=\cos(x)+j\sin(x)$, вычислим модуль и аргумент комплексной частотной характеристики согласно (3.28) — (3.30). В результате получим выражения для АЧХ и ФЧХ комплексных одномерных скалярных стационарных линейных ЦФ:

$$A(\omega T)=\left\{\frac{\left[a_{\mathrm{c}0}+\sum_{k=1}^{M}\left[a_{\mathrm{c}k}\cos(\omega Tk)+a_{\mathrm{s}k}\sin(\omega Tk)\right]\right]^2+}{\left[1+\sum_{k=1}^{N}\left[b_{\mathrm{c}k}\cos(\omega Tk)+b_{\mathrm{s}k}\sin(\omega Tk)\right]\right]^2+}\rightarrow\right.$$

$$\left.\rightarrow\frac{+\left[a_{\mathrm{s}0}+\sum_{k=1}^{M}\left[a_{\mathrm{s}k}\cos(\omega Tk)-a_{\mathrm{c}k}\sin(\omega Tk)\right]\right]^2}{+\left[\sum_{k=1}^{N}\left[b_{\mathrm{s}k}\cos(\omega Tk)-b_{\mathrm{c}k}\sin(\omega Tk)\right]\right]^2}\right\}^{1/2};\tag{4.43}$$

$$\varphi(\omega T)=\mathrm{Arctg}\frac{a_{\mathrm{s}0}+\sum_{k=1}^{M}\left[a_{\mathrm{s}k}\cos(\omega Tk)-a_{\mathrm{c}k}\sin(\omega Tk)\right]}{a_{\mathrm{c}0}+\sum_{k=1}^{M}\left[a_{\mathrm{c}k}\cos(\omega Tk)+a_{\mathrm{s}k}\sin(\omega Tk)\right]}-$$

$$-\mathrm{Arctg}\frac{\sum_{k=1}^{N}\left[b_{\mathrm{s}k}\cos(\omega Tk)-b_{\mathrm{c}k}\sin(\omega Tk)\right]}{1+\sum_{k=1}^{N}\left[b_{\mathrm{c}k}\cos(\omega Tk)+b_{\mathrm{s}k}\sin(\omega Tk)\right]}\tag{4.44}$$

в случае рекурсивного и

$$A(\omega T)=\left\{\left[a_{\mathrm{c}0}+\sum_{k=1}^{M}\left[a_{\mathrm{c}k}\cos(\omega Tk)+a_{\mathrm{s}k}\sin(\omega Tk)\right]\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[a_{\mathrm{s}0}+\sum_{k=1}^{M}\left[a_{\mathrm{s}k}\cos(\omega Tk)-a_{\mathrm{c}k}\sin(\omega Tk)\right]\right]^2\right\}^{1/2};\tag{4.45}$$

$$\varphi(\omega T) = \operatorname{Arctg} \frac{a_{s0} + \sum_{k=1}^{M} \left[a_{sk} \cos(\omega T k) - a_{ck} \sin(\omega T k) \right]}{a_{c0} + \sum_{k=1}^{M} \left[a_{ck} \cos(\omega T k) + a_{sk} \sin(\omega T k) \right]} \tag{4.46}$$

в случае нерекурсивного фильтра.

Из выражений (4.43) — (4.46) непосредственно видно, что свойства чётности АЧХ и нечётности ФЧХ, характерные для вещественных скалярных ЦФ [см. (3.36)], для комплексных фильтров не справедливы [см. (3.37)]. Это позволяет реализовать с помощью комплексных ЦФ несимметричные частотные характеристики, требуемые для приёма радиосигналов с несимметричной модуляцией (например, в телевидении используется модуляция с частичным подавлением нижней боковой полосы).

4.7. Структурные схемы векторных цифровых фильтров

В качестве примера векторного ЦФ рассмотрим одномерный стационарный рекурсивный линейный фильтр, обрабатывающий двухкоординатный векторный сигнал [см. (2.3)]

$$\mathbf{x}[n] = \begin{pmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{pmatrix}. \tag{4.47}$$

Сигналы $x_1[n]$ и $x_2[n]$ могут быть как вещественными, так и комплексными.

Запишем уравнение векторной стационарной рекурсивной линейной цифровой фильтрации (3.11) в развёрнутой форме:

$$\begin{pmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{M} \begin{pmatrix} a_{k_{11}} & a_{k_{12}} \\ a_{k_{21}} & a_{k_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1[n-k] \\ x_2[n-k] \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^{N} \begin{pmatrix} b_{k_{11}} & b_{k_{12}} \\ b_{k_{21}} & b_{k_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1[n-k] \\ y_2[n-k] \end{pmatrix}. \tag{4.48}$$

Умножая в уравнении (4.48) матрицы на векторы, получим выражения для компонент выходного векторного сигнала:

$$\begin{cases} y_1[n] = \sum_{k=0}^{M} \left(a_{k_{11}} x_1[n-k] + a_{k_{12}} x_2[n-k] \right) - \sum_{k=1}^{N} \left(b_{k_{11}} y_1[n-k] + b_{k_{12}} y_2[n-k] \right); \\ y_2[n] = \sum_{k=0}^{M} \left(a_{k_{21}} x_1[n-k] + a_{k_{22}} x_2[n-k] \right) - \sum_{k=1}^{N} \left(b_{k_{21}} y_1[n-k] + b_{k_{22}} y_2[n-k] \right). \end{cases} \tag{4.49}$$

По этим уравнениям может быть построена полная структурная схема одномерного двухкоординатного векторного вещественного стационарного линейного рекурсивного ЦФ при прямой форме реализации. Схема оказывается

довольно громоздкой, поэтому мы ограничимся рассмотрением укрупнённого варианта структурной схемы.

Для построения укрупнённой структурной схемы фильтра возьмём Z-преобразование от обеих частей уравнений (4.49), полагая, что входной сигнал $\mathbf{x}[n]=\mathbf{0}$ при $n<0$, а начальные условия в ЦФ нулевые: $y_1[-n]=0$, $y_2[-n]=0$ $\left(n=\overline{1,\ N}\right)$. Воспользовавшись теоремой линейности Z-преобразования и теоремой запаздывания (см. § 1.3), получим

$$\begin{cases} Y_1(z)=\sum\limits_{k=0}^{M} a_{k_{11}} z^{-k} X_1(z)+\sum\limits_{k=0}^{M} a_{k_{12}} z^{-k} X_2(z)-\sum\limits_{k=1}^{N} b_{k_{11}} z^{-k} Y_1(z)-\sum\limits_{k=1}^{N} b_{k_{12}} z^{-k} Y_2(z); \\ Y_2(z)=\sum\limits_{k=0}^{M} a_{k_{21}} z^{-k} X_1(z)+\sum\limits_{k=0}^{M} a_{k_{22}} z^{-k} X_2(z)-\sum\limits_{k=1}^{N} b_{k_{21}} z^{-k} Y_1(z)-\sum\limits_{k=1}^{N} b_{k_{22}} z^{-k} Y_2(z). \end{cases} \tag{4.50}$$

Введём в рассмотрение передаточные функции нерекурсивных линейных вещественных звеньев:

$$\begin{cases} A_{11}(z^{-1})=\sum\limits_{k=0}^{M} a_{k_{11}} z^{-k}; \quad A_{12}(z^{-1})=\sum\limits_{k=0}^{M} a_{k_{12}} z^{-k}; \\ A_{21}(z^{-1})=\sum\limits_{k=0}^{M} a_{k_{21}} z^{-k}; \quad A_{22}(z^{-1})=\sum\limits_{k=0}^{M} a_{k_{22}} z^{-k}; \\ B_{11}(z^{-1})=\sum\limits_{k=1}^{N} b_{k_{11}} z^{-k}; \quad B_{12}(z^{-1})=\sum\limits_{k=1}^{N} b_{k_{12}} z^{-k}; \\ B_{21}(z^{-1})=\sum\limits_{k=1}^{N} b_{k_{21}} z^{-k}; \quad B_{22}(z^{-1})=\sum\limits_{k=1}^{N} b_{k_{22}} z^{-k}. \end{cases} \tag{4.51}$$

С учётом обозначений (4.51) перепишем уравнения (4.50) в следующем виде:

$$\begin{cases} Y_1(z)=A_{11}(z^{-1})\,X_1(z)+A_{12}(z^{-1})\,X_2(z)-B_{11}(z^{-1})\,Y_1(z)-B_{12}(z^{-1})\,Y_2(z); \\ Y_2(z)=A_{21}(z^{-1})\,X_1(z)+A_{22}(z^{-1})\,X_2(z)-B_{21}(z^{-1})\,Y_1(z)-B_{22}(z^{-1})\,Y_2(z). \end{cases} \tag{4.52}$$

Построенная по уравнениям (4.52) укрупнённая структурная схема одномерного двухкоординатного векторного вещественного стационарного линейного рекурсивного ЦФ изображена на рис.4.9. Схема содержит два канала с передаточными функциями $\dfrac{A_{11}(z^{-1})}{1+B_{11}(z^{-1})}$ и $\dfrac{A_{22}(z^{-1})}{1+B_{22}(z^{-1})}$ соответственно. Между ка-

налами действуют перекрёстные связи через блоки с передаточными функциями $A_{12}(z^{-1})$, $A_{21}(z^{-1})$, $B_{12}(z^{-1})$ и $B_{21}(z^{-1})$.

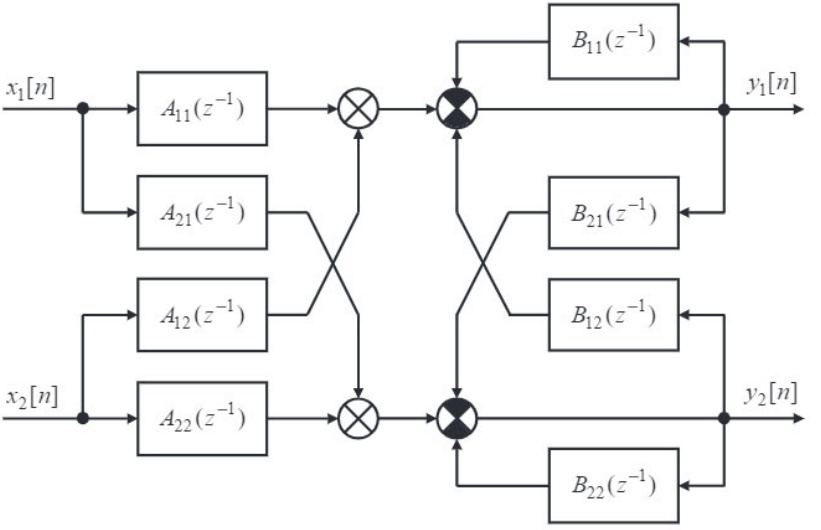


Рис.4.9. Структурная схема одномерного двухкоординатного векторного вещественного стационарного линейного рекурсивного ЦФ

Перестановкой блоков векторного ЦФ в общем случае невозможно получить структурную схему векторного ЦФ при канонической форме реализации•.

Сравнивая структурные схемы одномерного скалярного комплексного стационарного линейного рекурсивного ЦФ (см. рис.4.6) и одномерного двухкоординатного векторного вещественного стационарного линейного рекурсивного ЦФ (рис.4.9), нетрудно видеть, что комплексный скалярный фильтр является частным случаем вещественного двухкоординатного векторного фильтра при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} A_{\mathrm{c}}(z^{-1}) = A_{11}(z^{-1}) = A_{22}(z^{-1}); \quad A_{\mathrm{s}}(z^{-1}) = A_{21}(z^{-1}) = -A_{12}(z^{-1}); \\ B_{\mathrm{c}}(z^{-1}) = B_{11}(z^{-1}) = B_{22}(z^{-1}); \quad B_{\mathrm{s}}(z^{-1}) = B_{21}(z^{-1}) = -B_{12}(z^{-1}). \end{cases} \tag{4.53}$$

Из уравнений (4.52) найдём элементы матрицы передаточных функций $\mathbf{H}(z)$ одномерного двухкоординатного векторного вещественного стационарного линейного рекурсивного ЦФ. Для этого, полагая $X_2(z) = 0$, решим систему

• При формальной перестановке блоков получится структурная схема векторного ЦФ, имеющего в общем случае совершенно другие характеристики. Это является следствием того, что операция перемножения матриц в общем случае является некоммутативной.

уравнений (4.52) относительно $Y_1(z)$, а затем относительно $Y_2(z)$. Используя определение (3.8) элементов матрицы передаточных функций, будем иметь

$$H_{11}(z)=\frac{Y_1(z)}{X_1(z)}=\frac{A_{11}(z^{-1})\left[1+B_{22}(z^{-1})\right]-A_{21}(z^{-1})B_{12}(z^{-1})}{1+B_{11}(z^{-1})+B_{22}(z^{-1})+B_{11}(z^{-1})B_{22}(z^{-1})-B_{12}(z^{-1})B_{21}(z^{-1})};$$

(4.54)

$$H_{21}(z)=\frac{Y_2(z)}{X_1(z)}=\frac{A_{21}(z^{-1})\left[1+B_{11}(z^{-1})\right]-A_{11}(z^{-1})B_{21}(z^{-1})}{1+B_{11}(z^{-1})+B_{22}(z^{-1})+B_{11}(z^{-1})B_{22}(z^{-1})-B_{12}(z^{-1})B_{21}(z^{-1})}.$$

(4.55)

Аналогично, полагая $X_1(z)=0$, решим систему уравнений (4.52) относительно $Y_1(z)$, а затем относительно $Y_2(z)$. Используя определение (3.8) элементов матрицы передаточных функций, получим

$$H_{12}(z)=\frac{Y_1(z)}{X_2(z)}=\frac{A_{12}(z^{-1})\left[1+B_{22}(z^{-1})\right]-A_{22}(z^{-1})B_{12}(z^{-1})}{1+B_{11}(z^{-1})+B_{22}(z^{-1})+B_{11}(z^{-1})B_{22}(z^{-1})-B_{12}(z^{-1})B_{21}(z^{-1})};$$

(4.56)

$$H_{22}(z)=\frac{Y_2(z)}{X_2(z)}=\frac{A_{22}(z^{-1})\left[1+B_{11}(z^{-1})\right]-A_{12}(z^{-1})B_{21}(z^{-1})}{1+B_{11}(z^{-1})+B_{22}(z^{-1})+B_{11}(z^{-1})B_{22}(z^{-1})-B_{12}(z^{-1})B_{21}(z^{-1})}.$$

(4.57)

Из выражений (4.54) — (4.57) видно, что элементы матрицы передаточных функций $\mathbf{H}(z)$ одномерного векторного вещественного стационарного линейного рекурсивного ЦФ являются дробно-рациональными функциями комплексного аргумента z^{-1}. Все элементы матрицы $\mathbf{H}(z)$ имеют один и тот же знаменатель.

Установим связь между передаточной функцией $H(z)$ одномерного *комплексного* скалярного стационарного линейного рекурсивного ЦФ (4.39) и элементами матрицы передаточных функций $\mathbf{H}(z)$ одномерного *двухкоординатного векторного вещественного* стационарного линейного рекурсивного ЦФ, которые описываются формулами (4.54) — (4.57). Для этого представим $H(z)$ в декартовой форме:

$$H(z)=H_{\mathrm{c}}(z)+jH_{\mathrm{s}}(z)=\frac{A_{\mathrm{c}}(z^{-1})+jA_{\mathrm{s}}(z^{-1})}{1+B_{\mathrm{c}}(z^{-1})+jB_{\mathrm{s}}(z^{-1})}=$$

$$=\frac{A_{\mathrm{c}}(z^{-1})\left[1+B_{\mathrm{c}}(z^{-1})\right]+A_{\mathrm{s}}(z^{-1})B_{\mathrm{s}}(z^{-1})}{1+2B_{\mathrm{c}}(z^{-1})+B_{\mathrm{c}}^2(z^{-1})+B_{\mathrm{s}}^2(z^{-1})}+j\frac{A_{\mathrm{s}}(z^{-1})\left[1+B_{\mathrm{c}}(z^{-1})\right]-A_{\mathrm{c}}(z^{-1})B_{\mathrm{s}}(z^{-1})}{1+2B_{\mathrm{c}}(z^{-1})+B_{\mathrm{c}}^2(z^{-1})+B_{\mathrm{s}}^2(z^{-1})}.$$

(4.58)

Сравнивая вещественную и мнимую части в формуле (4.58) с выражениями (4.54) — (4.57), видим, что при выполнении условий (4.53) элементы передаточной функции $H(z)$ комплексного одномерного ЦФ и матрицы передаточных функций $\mathbf{H}(z)$ двухкоординатного векторного ЦФ связаны между собой следующим образом:

$$H_{\mathrm{c}}(z) = H_{11}(z) = H_{22}(z); \quad H_{\mathrm{s}}(z) = H_{21}(z) = -H_{12}(z). \tag{4.59}$$

Можно показать, что одномерный двухкоординатный векторный комплексный стационарный линейный ЦФ при определённых условиях, аналогичных условиям (4.53), эквивалентен одномерному четырёхкоординатному векторному вещественному стационарному линейному ЦФ. Справедливо и более общее утверждение: любой *комплексный* R-координатный векторный ЦФ эквивалентен *некоторому вещественному* $2R$-координатному векторному фильтру.

Векторно-матричное уравнение алгоритма фильтрации одномерного R-координатного векторного вещественного стационарного рекурсивного линейного ЦФ (3.11) в координатной форме имеет вид [ср. с (4.48)]

$$y_i[n] = \sum_{k=0}^{M} \sum_{l=1}^{R} a_{k_i l} x_l[n-k] - \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{R} b_{k_i l} y_l[n-k], \quad i = \overline{1,\ R}. \tag{4.60}$$

Возьмём Z-преобразование от обеих частей уравнений (4.60), полагая входной сигнал $\mathbf{x}[n] = \mathbf{0}$ при $n < 0$, а начальные условия в цифровом фильтре нулевыми: $y_l[-n] = 0, \left(n = \overline{1,\ N},\ l = \overline{1,\ R}\right)$. Воспользовавшись теоремой линейности Z-преобразования и теоремой запаздывания (см. § 1.3), получим

$$Y_i(z) = \sum_{k=0}^{M} \sum_{l=1}^{R} a_{k_i l} z^{-k} X_l(z) - \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{R} b_{k_i l} z^{-k} Y_l(z), \quad i = \overline{1,\ R}. \tag{4.61}$$

Введём в рассмотрение передаточные функции нерекурсивных линейных вещественных блоков векторного ЦФ:

$$A_{il}(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{M} a_{k_i l} z^{-k}; \quad B_{il}(z^{-1}) = \sum_{k=1}^{N} b_{k_i l} z^{-k}, \quad i,\ l = \overline{1,\ R}. \tag{4.62}$$

С учётом обозначений (4.62) перепишем уравнения (4.61) в следующем виде:

$$Y_i(z) = \sum_{l=1}^{R} A_{il}(z^{-1}) X_l(z) - \sum_{l=1}^{R} B_{il}(z^{-1}) Y_l(z), \quad i = \overline{1,\ R}. \tag{4.63}$$

По уравнениям (4.63) нетрудно построить укрупнённую структурную схему одномерного R-координатного векторного вещественного стационарного рекурсивного линейного цифрового фильтра, а также получить выражения для элементов его матрицы передаточных функций $\mathbf{H}(z)$. Структурная схема филь-

тра состоит из R каналов с передаточными функциями $\dfrac{A_{i\,i}(z^{-1})}{1+B_{i\,i}(z^{-1})}$ $\left(i=\overline{1,\ R}\right)$, между каналами через звенья с передаточными функциями $A_{il}(z^{-1})$ и $B_{il}(z^{-1})$, где $i\neq l$ $\left(i,\ l=\overline{1,\ R}\right)$, действуют перекрёстные связи.

Систему уравнений (4.63), описывающих структуру векторного рекурсивного ЦФ, удобно представить в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{Y}(z)=\mathbf{A}(z^{-1})\mathbf{X}(z)-\mathbf{B}(z^{-1})\mathbf{Y}(z). \qquad (4.64)$$

Решая уравнение (4.64) относительно вектора $\mathbf{Y}(z)$, получим векторно-матричное алгебраическое уравнение (3.16), из которого согласно выражению (3.17) определяется матрица передаточных функций $\mathbf{H}(z)$ векторного ЦФ.

Операция обращения матрицы в уравнениях (4.64) и (3.16) означает, что векторный рекурсивный ЦФ имеет обратные связи, в том числе и перекрёстные.

Уравнения (3.11), (3.16), (4.60), (4.61) и (4.63) — (4.64) описывают структурную схему векторного стационарного рекурсивного линейного ЦФ при прямой форме реализации, изображённую на рис.4.10 (ср. с рис.4.2,*б*).

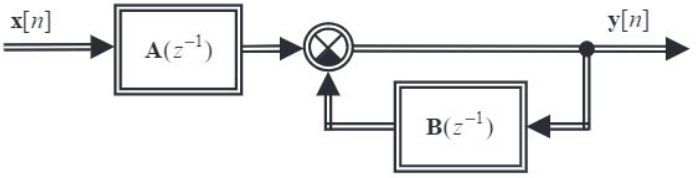


Рис.4.10. Укрупнённая структурная схема векторного рекурсивного ЦФ

В отличие от скалярного рекурсивного ЦФ (вещественного или комплексного), перестановкой блоков векторного фильтра в общем случае невозможно получить каноническую структуру. Перестановка блоков в структурной схеме ЦФ эквивалентна перестановке матриц в уравнении (3.16):

$$\mathbf{Y}(z)=\mathbf{A}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{X}(z). \qquad (4.65)$$

Произведение матриц $\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}(z^{-1})$ в общем случае некоммутативно, т.е.

$$\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}(z^{-1})\neq\mathbf{A}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}(z^{-1})\right]^{-1}, \qquad (4.66)$$

поэтому уравнения (4.65) и (3.16) не эквивалентны и в общем случае описывают *разные* векторные рекурсивные цифровые фильтры, имеющие *разные* матрицы передаточных функций.

Векторные ЦФ сложной структуры, точно так же как и скалярные, могут быть получены соединением элементарных блоков (см. § 4.5). Применяют три

типа соединений: каскадное (последовательное), параллельное и соединение с обратной связью. На рис.4.11 показаны двухзвенные структуры векторных ЦФ при названных типах соединений. По известным матрицам передаточных функций блоков и способам их соединения требуется определить матрицу передаточных функций ЦФ сложной структуры. Необходимо иметь в виду следующие два обстоятельства [1]:

- операции перемножения и сложения матриц имеют смысл только в том случае, когда размерности перемножаемых или суммируемых матриц согласованы; обычно соединяемые блоки векторных ЦФ имеют одинаковый размер матриц передаточных функций, равный $R \times R$;
- операция перемножения матриц некоммутативна, поэтому имеет существенное значение порядок следования перемножаемых матриц.

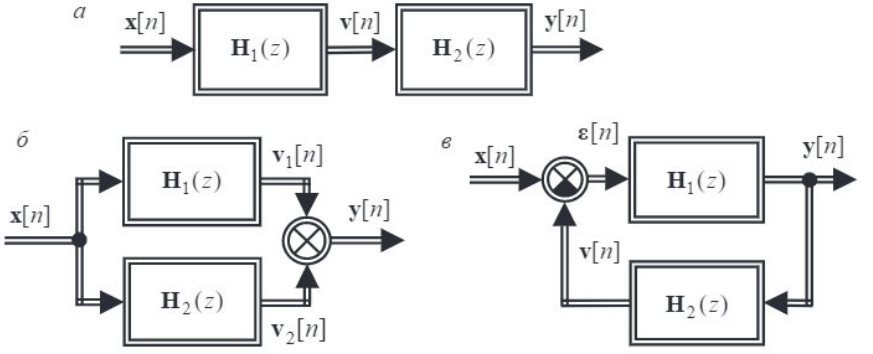


Рис.4.11. Способы соединения двух блоков векторных ЦФ с матрицами передаточных функций $\mathbf{H}_1(z)$ и $\mathbf{H}_2(z)$: *а* — каскадное; *б* — параллельное; *в* — с обратной связью

При каскадном соединении блоков ЦФ (рис.4.11,*а*) алгебраические матричные уравнения для Z-образов векторных сигналов имеют вид

$$\mathbf{V}(z) = \mathbf{H}_1(z)\mathbf{X}(z); \qquad \mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}_2(z)\mathbf{V}(z), \tag{4.67}$$

поэтому

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}_2(z)\mathbf{H}_1(z)\mathbf{X}(z). \tag{4.68}$$

Отсюда согласно (3.8), (3.16) и (3.17) следует

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{H}_2(z)\,\mathbf{H}_1(z), \tag{4.69}$$

т.е. матрица $\mathbf{H}_2(z)$ умножается на матрицу $\mathbf{H}_1(z)$ слева.

В общем случае, когда каскадно соединены L блоков, матрица передаточных функций векторного ЦФ сложной структуры имеет вид [ср. с (4.13)]

$$\mathbf{H}(z) = \prod_{r=1}^{L} \mathbf{H}_{L+1-r}(z) = \mathbf{H}_L(z)\mathbf{H}_{L-1}(z) \ldots \mathbf{H}_2(z)\mathbf{H}_1(z), \tag{4.70}$$

т.е. матрицы в произведении располагаются в порядке, обратном порядку следования соединяемых блоков по ходу распространения векторного сигнала.

При параллельном соединении L блоков (рис.4.11,*б*) с учётом коммутативности операции сложения матриц [ср. с (4.22)]

$$\mathbf{H}(z)=\sum_{r=1}^{L}\mathbf{H}_r(z). \tag{4.71}$$

Структурная схема ЦФ при соединении двух блоков с отрицательной обратной связью (рис.4.11,*в*) описывается следующей системой алгебраических матричных уравнений для Z-образов векторных сигналов:

$$\begin{cases}\mathbf{Y}(z)=\mathbf{H}_1(z)\mathbf{E}(z);\\ \mathbf{E}(z)=\mathbf{X}(z)-\mathbf{V}(z);\\ \mathbf{V}(z)=\mathbf{H}_2(z)\mathbf{Y}(z).\end{cases} \tag{4.72}$$

Исключая из (4.72) промежуточные переменные, получим

$$\left[\mathbf{I}+\mathbf{H}_1(z)\mathbf{H}_2(z)\right]\mathbf{Y}(z)=\mathbf{H}_1(z)\mathbf{X}(z), \tag{4.73}$$

откуда согласно (3.8), (3.16) и (3.17) следует [ср. с (4.29)]

$$\mathbf{H}(z)=\left[\mathbf{I}+\mathbf{H}_1(z)\mathbf{H}_2(z)\right]^{-1}\mathbf{H}_1(z). \tag{4.74}$$

С учётом соотношения (3.28) из формул (4.70), (4.71) и (4.74) получаем выражения для матриц комплексных частотных характеристик R-координатных векторных одномерных вещественных стационарных линейных ЦФ сложной структуры:

- при каскадном соединении блоков [ср. с (4.18)]

$$\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right)=\prod_{r=1}^{L}\mathbf{H}_{L+1-r}\left(e^{j\omega T}\right)=$$

$$=\mathbf{H}_L\left(e^{j\omega T}\right)\mathbf{H}_{L-1}\left(e^{j\omega T}\right)\ldots\mathbf{H}_2\left(e^{j\omega T}\right)\mathbf{H}_1\left(e^{j\omega T}\right); \tag{4.75}$$

- при параллельном соединении блоков [ср. с (4.25)]

$$\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right)=\sum_{r=1}^{L}\mathbf{H}_r\left(e^{j\omega T}\right); \tag{4.76}$$

- при соединении блоков с отрицательной обратной связью [ср. с (4.30)]

$$\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right)=\left[\mathbf{I}+\mathbf{H}_1\left(e^{j\omega T}\right)\mathbf{H}_2\left(e^{j\omega T}\right)\right]^{-1}\mathbf{H}_1\left(e^{j\omega T}\right). \tag{4.77}$$

Теория векторных ЦФ в основных чертах похожа на теорию скалярных ЦФ, однако имеются и существенные различия, связанные с некоммутативностью операции перемножения матриц. Как следствие, это приводит к невозможности канонической формы реализации векторных ЦФ. Кроме того, в матрич-

ной алгебре отсутствует операция деления двух матриц [на практике она заменяется операцией умножения на обратную матрицу — ср. (3.7) и (3.17), (3.22) и (3.25)]. Имеют сходство также соответствующие укрупнённые структурные схемы ЦФ ср. рис.4.2,*б* и рис.4.10.

Укрупнённая структурная схема трёхкоординатного векторного стационарног рекурсивного линейного ЦФ приведена в Приложении 1.

Краткие итоги

1. Структурные схемы являются графическим представлением алгоритмов цифровой фильтрации. Они могут быть построены либо по алгоритму фильтрации, либо по передаточной функции $H(z)$. Для реализации одномерных стационарных линейных ЦФ необходимы операционные устройства, осуществляющие задержку отсчётов сигналов на шаг дискретизации, умножение на весовые коэффициенты и сложение, а также линии передачи, соединяющие эти устройства.

2. Полная структурная схема одномерного скалярного вещественного стационарного нерекурсивного линейного ЦФ, работающего по алгоритму (3.42), содержит M элементов задержки на шаг дискретизации, $M+1$ умножителей на постоянные коэффициенты и многовходовый сумматор (см. рис.4.1).

3. Полная структурная схема одномерного скалярного вещественного стационарного рекурсивного линейного ЦФ, работающего по алгоритму (2.2), при прямой форме реализации (см. рис.4.2) содержит $M+N$ элементов задержки на шаг дискретизации, $N+M+1$ умножителей на постоянные коэффициенты и многовходовый сумматор.

4. Полная структурная схема одномерного скалярного вещественного стационарного рекурсивного линейного ЦФ, работающего по алгоритму (2.2), при канонической форме реализации (см. рис.4.3) содержит $L=\max\{N, M\}$ элементов задержки, а не $M+N$, как при прямой форме реализации.

5. Для нерекурсивного одномерного скалярного вещественного стационарного линейного ЦФ прямая форма реализации одновременно является и канонической.

6. Для ЦФ сложной структуры часто используют укрупнённые структурные схемы (рис.4.1,*б*, 4.2,*б*, 4.3,*б*), которые удобнее строить не по алгоритмам фильтрации, а по передаточным функциям. Основными элементами укрупнённых структурных схем ЦФ являются звенья с передаточными функциями $A(z^{-1})$ и $\dfrac{1}{1+B(z^{-1})}$.

7. Модели ЦФ в пространстве состояний являются перспективными для построения устройств адаптивной цифровой фильтрации, поскольку они позволяют учитывать изменение параметров фильтра в процессе работы.

8. Структурные схемы сложных ЦФ можно получить соединением более простых блоков (звеньев). На практике применяют три типа соединений: каскадное (последовательное), параллельное и соединение с обратной связью (см. рис.4.5 и рис.4.11).

9. При каскадном соединении блоков их передаточные функции перемножаются, а при параллельном — суммируются. При соединении блоков ЦФ с обратной связью передаточная функция результирующего блока определяется формулой (4.29) [для векторных ЦФ матрица передаточных функций определяется формулой (4.74)].

10. Алгоритм работы комплексного одномерного скалярного стационарного линейного ЦФ описывается разностным уравнением (2.2), в котором как сигналы, так и коэффициенты являются комплексными. Структурная схема за счёт этого становится двухканальной и содержит перекрёстные связи (см. рис.4.6 — 4.8).

11. Перестановкой блоков комплексного одномерного скалярного стационарного линейного ЦФ можно получить каноническую структуру. Прямая и каноническая структуры ЦФ эквивалентны, строго говоря, только для дискретных линейных фильтров. При учёте нелинейных эффектов, связанных с квантованием сигналов в ЦФ, шумовые характеристики этих структур будут различными.

12. Свойства чётности АЧХ и нечётности ФЧХ (3.36), характерные для вещественных скалярных ЦФ, для комплексных ЦФ не справедливы [см. (3.37)], что позволяет реализовать с помощью комплексных ЦФ несимметричные частотные характеристики, требуемые для приёма радиосигналов с несимметричной модуляцией.

13. Структурные схемы вещественных векторных стационарных линейных ЦФ являются многоканальными (см. рис.4.9), каждый из каналов описывается передаточной функцией $A_{ii}(z^{-1}) \Big/ \left\{1 + B_{ii}(z^{-1})\right\}$ $\left(i = \overline{1, R}\right)$, между каналами действуют перекрёстные связи через звенья с передаточными функциями $A_{il}(z^{-1})$ и $B_{il}(z^{-1})$, где $i \neq l$ $\left(i,\ l = \overline{1, R}\right)$.

14. Комплексный ЦФ является частным случаем двухкоординатного векторного ЦФ при выполнении условий (4.53). Справедливо и более общее утверждение: любой *комплексный* R-координатный векторный ЦФ эквивалентен *некоторому вещественному* $2R$-координатному векторному фильтру.

15. Элементы матрицы передаточных функций $\mathbf{H}(z)$ векторного ЦФ являются дробно-рациональными функциями комплексного аргумента z^{-1} [см., например, (4.54) — (4.57)].

16. Вещественные векторные ЦФ можно описать матричным уравнением (3.16), где операция обращения матрицы означает, что векторный ЦФ имеет обратные связи, в том числе и перекрёстные.

17. В скалярных рекурсивных ЦФ (как вещественных, так и комплексных) блоки с передаточными функциями $A(z^{-1})$ и $\dfrac{1}{1 + B(z^{-1})}$ коммутативны. Перестановка этих блоков позволяет получить структурную схему рекурсивного ЦФ при канонической форме реализации. В векторных цифровых фильтрах блоки, описываемые матрицами передаточных функций $\mathbf{A}(z^{-1})$ и $\left(\mathbf{I} + \mathbf{B}(z^{-1})\right)^{-1}$, некоммутативны, поэтому при перестановке блоков получается совершенно *другой* фильтр, имеющий *другую* матрицу передаточных функций $\mathbf{H}(z)$.

18. Укрупнённые структурные схемы скалярных и векторных ЦФ имеют сходную топологию (ср. рис.4.2,*б* и рис.4.10), что позволяет с учётом особенностей матричной алгебры экстраполировать свойства скалярных линейных ЦФ на более сложные векторные фильтры.

Глава 5

НЕРЕКУРСИВНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ С ЛИНЕЙНЫМИ ФАЗОЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

5.1. Условия линейности фазочастотных характеристик нерекурсивных цифровых фильтров

В классе одномерных скалярных вещественных стационарных нерекурсивных линейных неминимально-фазовых ЦФ имеются фильтры со строго линейными фазочастотными характеристиками (ФЧХ). Фрагмент классификации нерекурсивных линейных ЦФ по «внутренним» свойствам алгоритма (см. § 2.2) приведён на рис.5.1.

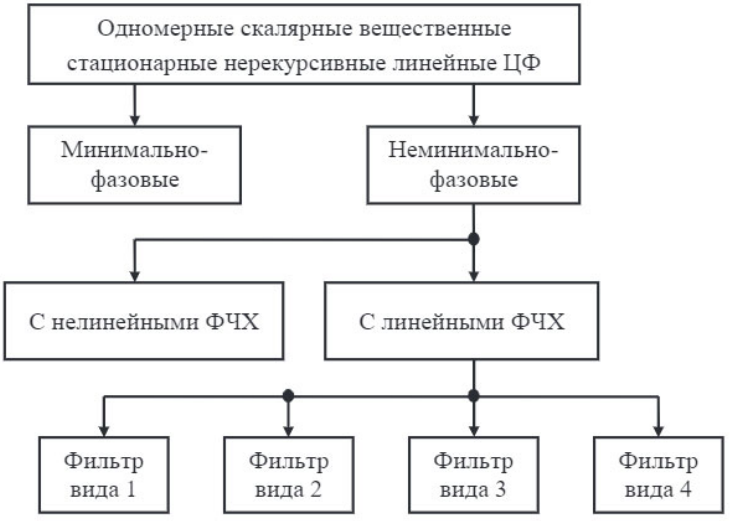


Рис.5.1. Классификация нерекурсивных линейных ЦФ по «внутренним» свойствам алгоритма

Передаточная функция линейного нерекурсивного ЦФ описывается выражением (3.43), а комплексная частотная характеристика — формулой (3.49). Представим её через амплитуду и фазу аналогично (3.28), но в несколько изменённой форме:

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = R(\omega T)\exp[\,j\varphi(\omega T)\,]. \qquad (5.1)$$

Здесь вместо АЧХ $A(\omega T)=\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ записана функция $R(\omega T)$, которая в отличие от $A(\omega T)\geq 0$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, причём $\left|R(\omega T)\right|=A(\omega T)$. При перемене знака функции $R(\omega T)$ фазочастотная характеристика ЦФ $\varphi(\omega T)$ претерпевает скачки на π. В дальнейшем функцию $R(\omega T)$ будем называть «псевдоамплитудно-частотной характеристикой» (псевдоАЧХ). ПсевдоАЧХ можно представить в виде [7]

$$R(\omega T)=(-1)^m\left|R(\omega T)\right|=(-1)^m A(\omega T), \tag{5.2}$$

где m — целое чётное число при $R(\omega T)>0$ и m — нечётное при $R(\omega T)<0$. Параметр m в (5.2) принимает ряд последовательных значений $m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$, если $R(\omega T)\big|_{\omega=0}>0$, и $m=1,\ 2,\ 3,\ldots$, если $R(\omega T)\big|_{\omega=0}<0$.

Поскольку $(-1)^m=e^{j\pi m}$, соотношение (5.2) можно записать иначе:

$$R(\omega T)=e^{j\pi m}\left|R(\omega T)\right|=e^{j\pi m}A(\omega T). \tag{5.3}$$

При этом выражение (5.1) примет вид

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=A(\omega T)\exp\left[j\varphi(\omega T)+j\pi m\right]. \tag{5.4}$$

Условие линейности фазочастотной характеристики ЦФ означает, что

$$\varphi(\omega T)=\beta-\alpha\omega T,\quad \omega T\in[-\pi,\ \pi], \tag{5.5}$$

где α и β — постоянные параметры ФЧХ•. Если $\beta=0$, то

$$\varphi(\omega T)=-\alpha\omega T,\quad \omega T\in[-\pi,\ \pi]. \tag{5.6}$$

ФЧХ вида (5.5) отвечает постоянной только групповой задержке, а вида (5.6) — постоянным как групповой, так и фазовой задержкам.

Используя формулы (5.1) и (5.5), представим выражение (3.49) следующим образом:

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=\sum_{n=0}^{M}h[n]\,e^{-j\omega Tn}=R(\omega T)e^{j(\beta-\alpha\omega T)}. \tag{5.7}$$

Представляя комплексные экспоненты формулой Эйлера, приравняем вещественные и мнимые части в уравнении (5.7). В результате получим

$$\begin{cases} R(\omega T)\cos(\beta-\alpha\omega T)=\sum\limits_{n=0}^{M}h[n]\cos(\omega Tn); \\ -R(\omega T)\sin(\beta-\alpha\omega T)=\sum\limits_{n=0}^{M}h[n]\sin(\omega Tn). \end{cases} \tag{5.8}$$

• Параметр α согласно (3.34) представляет собой групповое время запаздывания (ГВЗ), выраженное через число интервалов дискретизации T.

Разделив второе равенство (5.8) на первое, будем иметь

$$-\operatorname{tg}(\alpha\omega T)=-\frac{\sin(\beta-\alpha\omega T)}{\cos(\beta-\alpha\omega T)}=\frac{\sum_{n=1}^{M}h[n]\sin(\omega T n)}{h[0]+\sum_{n=1}^{M}h[n]\cos(\omega T n)}. \qquad (5.9)$$

Существуют два возможных решения уравнения (5.9). Первое из них тривиальное. Оно отвечает случаю $\beta=0$ и $\alpha=0$. При этом получается единственное решение, соответствующее произвольному значению $h[0]$ и $h[n]\equiv 0$ при $n>0$. Это решение практического интереса не представляет.

Другое возможное решение отвечает случаю $\alpha\neq 0$. Перекрёстно перемножая члены в (5.9) и используя формулу синуса суммы двух аргументов, получим

$$\sum_{n=0}^{M}h[n]\sin[\beta+(n-\alpha)\omega T]=0. \qquad (5.10)$$

Поскольку уравнение (5.10) имеет вид отрезка ряда Фурье, то его решение, если оно существует, является единственным [6].

Покажем, что в случае $\beta=0$ при выполнении условия $h[n]=h[M-n]$ $\left(n=\overline{0,\ M}\right)$ существует единственное значение α, при котором равенство (5.10) удовлетворяется●. Здесь возможны два случая: 1) M — чётное и 2) M — нечётное число. Перепишем уравнение (5.10) в следующем виде●●:

$$\sum_{n=0}^{\breve{M}}h[n]\left\{\sin[(n-\alpha)\omega T]+\sin[(M-n-\alpha)\omega T]\right\}+\left\langle h\left[\frac{M}{2}\right]\sin\left[\left(\frac{M}{2}-\alpha\right)\omega T\right]\right\rangle=0, \qquad (5.11)$$

где

$$\breve{M}=\begin{cases}\dfrac{M}{2}-1, & M\text{ чётное};\\ \dfrac{M-1}{2}, & M\text{ нечётное}.\end{cases} \qquad (5.12)$$

Приравнивая нулю выражение в фигурных скобках под знаком суммы и используя формулу суммы синусов двух аргументов, получим

$$\sin\left[\left(\frac{M}{2}-\alpha\right)\omega T\right]\cos\left[\left(n-\frac{M}{2}\right)\omega T\right]=0,\quad n=\overline{0,\ \breve{M}}, \qquad (5.13)$$

откуда следует, что $\alpha=M/2$. Слагаемое в угловых скобках при чётном M в этом случае будет равно нулю при произвольном значении $h[M/2]$.

● При этом ФЧХ ЦФ имеет вид (5.6).

●● При нечётном M слагаемое в угловых скобках отсутствует.

Таким образом, нетривиальным решением уравнения (5.9), или, что то же самое, решением уравнения (5.10) при $\beta = 0$, являются следующие равенства:

$$\begin{cases} h[n] = h[M-n], \quad n = \overline{0,\ M}; \\ \alpha = M/2, \end{cases} \tag{5.14}$$

определяющие симметричный вид импульсной характеристики $h[n]$ ЦФ относительно центра, а также величину параметра α линейной фазочастотной характеристики (5.6).

Покажем, что в случае $\beta \neq 0$ при выполнении условия $h[n] = -h[M-n]$ $\left(n = \overline{0,\ M}\right)$ существуют единственные значения α и β, при которых равенство (5.10) удовлетворяется •. Возможны два случая: 1) M — чётное и 2) M — нечётное число. Перепишем уравнение (5.10) в следующем виде ••:

$$\sum_{n=0}^{\breve{M}} h[n] \left\{ \sin[(n-\alpha)\omega T + \beta] - \sin[(M-n-\alpha)\omega T + \beta] \right\} = 0. \tag{5.15}$$

Приравнивая нулю выражение в фигурных скобках под знаком суммы и используя формулу разности синусов двух аргументов, получим

$$\cos\left[\left(\frac{M}{2} - \alpha\right)\omega T + \beta\right] \sin\left[\left(n - \frac{M}{2}\right)\omega T\right] = 0, \quad n = \overline{0,\ \breve{M}}, \tag{5.16}$$

откуда следует, что $\alpha = M/2$, $\beta = \pi/2$.

Таким образом, нетривиальным решением уравнения (5.9), или, что то же самое, решением уравнения (5.10) при $\beta \neq 0$, являются следующие равенства:

$$\begin{cases} h[n] = -h[M-n], \quad n = \overline{0,\ M}; \\ \alpha = M/2; \qquad \beta = \pi/2, \end{cases} \tag{5.17}$$

определяющие антисимметричный вид импульсной характеристики $h[n]$ ЦФ относительно центра, а также величины параметров α и β линейной фазочастотной характеристики (5.5).

В зависимости от значения M (чётное или нечётное) и вида симметрии импульсной характеристики $h[n]$ — симметричная $h[n] = h[M-n]$ $\left(n = \overline{0,\ M}\right)$ или антисимметричная $h[n] = -h[M-n]$ $\left(n = \overline{0,\ M}\right)$ относительно центра — возможны четыре вида нерекурсивных ЦФ с линейной фазочастотной характеристикой (см. рис.5.1). Следуя методике [6], рассмотрим их комплексные частотные характеристики.

• При этом ФЧХ ЦФ имеет вид (5.5).

•• При чётном M здесь $h[M/2] = 0$.

5.2. Фильтр вида 1

В нерекурсивных ЦФ вида 1, имеющих линейную ФЧХ типа (5.6), импульсная характеристика симметрична относительно центра, т.е. $h[n]=h[M-n]$ $\left(n=\overline{0,\ M}\right)$, а значение M является чётным.

Согласно (5.7) запишем выражение для комплексной частотной характеристики нерекурсивного ЦФ

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1}h[n]e^{-j\omega Tn}+h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-j\omega T\frac{M}{2}}+\sum_{n=\frac{M}{2}+1}^{M}h[n]e^{-j\omega Tn}. \qquad (5.18)$$

Делая замену переменной $n=M-m$ во второй сумме, будем иметь

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=\sum_{n=0}^{(M/2)-1}h[n]e^{-j\omega Tn}+h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-j\omega T\frac{M}{2}}+\sum_{m=0}^{(M/2)-1}h[M-m]e^{-j\omega T(M-m)}. \qquad (5.19)$$

Учитывая симметрию импульсной характеристики ЦФ относительно центра $h[n]=h[M-n]$ $\left(n=\overline{0,\ M}\right)$ и вынося множитель $e^{-j\omega T\frac{M}{2}}$ за скобки, получим

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=e^{-j\omega T\frac{M}{2}}\left\{\sum_{n=0}^{(M/2)-1}h[n]\left[e^{j\omega T\left(\frac{M}{2}-n\right)}+e^{-j\omega T\left(\frac{M}{2}-n\right)}\right]+h\left[\frac{M}{2}\right]\right\}, \qquad (5.20)$$

откуда следует

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=e^{-j\omega T\frac{M}{2}}\left\{\sum_{n=0}^{(M/2)-1}2h[n]\cos\left[\omega T\left(\frac{M}{2}-n\right)\right]+h\left[\frac{M}{2}\right]\right\}. \qquad (5.21)$$

Замена переменной $m=(M/2)-n$ даёт

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=e^{-j\omega T\frac{M}{2}}\left\{\sum_{m=1}^{M/2}2h\left[\frac{M}{2}-m\right]\cos(\omega Tm)+h\left[\frac{M}{2}\right]\right\}, \qquad (5.22)$$

или

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=e^{-j\omega T\frac{M}{2}}\sum_{n=0}^{M/2}C_n\cos(\omega Tn), \qquad (5.23)$$

где

$$C_n=\begin{cases}h\left[\frac{M}{2}\right], & n=0;\\ 2h\left[\frac{M}{2}-n\right], & n=\overline{1,\ M/2}.\end{cases} \qquad (5.24)$$

Сумма в формуле (5.23) представляет псевдоАЧХ $R(\omega T)$.

В соответствии с (5.3), (5.4) и (5.23) запишем

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = e^{-j\omega T\frac{M}{2}+j\pi m}\left|\sum_{n=0}^{M/2} C_n \cos(\omega T n)\right|, \qquad (5.25)$$

где выражение под знаком модуля представляет собой АЧХ фильтра $A(\omega T)$.

На рис.5.2 показаны типичные формы импульсной характеристики $h[n]$, псевдоАЧХ $R(\omega T)$, АЧХ $A(\omega T)$ и ФЧХ $\varphi(\omega T)+\pi m$ ЦФ вида 1.

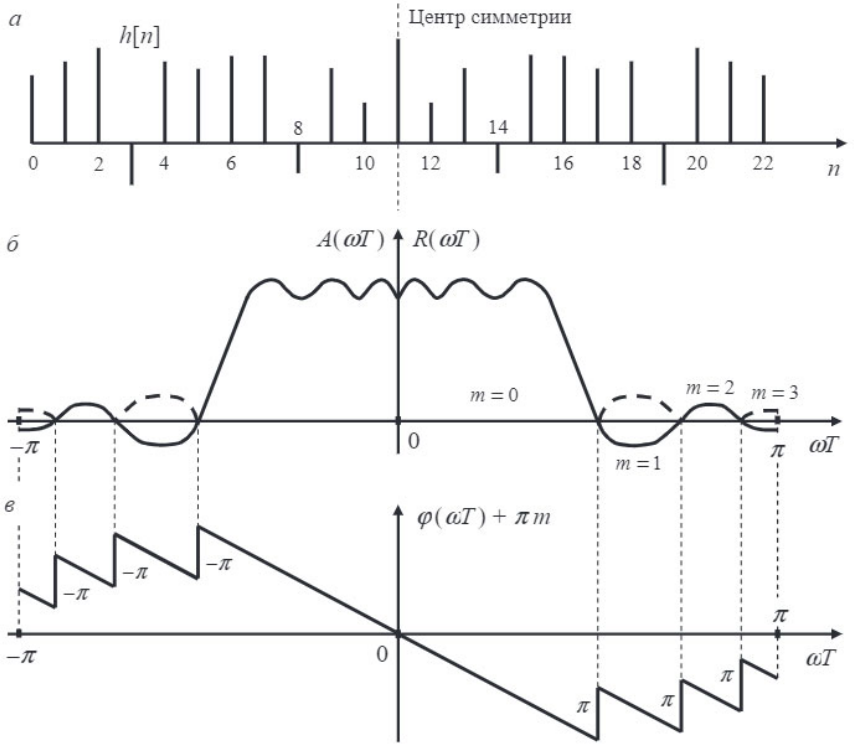


Рис.5.2. Характеристики цифрового фильтра вида 1 с линейной ФЧХ: *а* — импульсная характеристика $h[n]$; *б* — псевдоАЧХ $R(\omega T)$ и АЧХ $A(\omega T)$; *в* — ФЧХ $\varphi(\omega T)+\pi m$

Из (5.25) получаем

$$A(\omega T)\big|_{\omega T=0} = \left|\sum_{n=0}^{M/2} C_n\right|; \quad A(\omega T)\big|_{\omega T=\pi} = \left|\sum_{n=0}^{M/2} C_n(-1)^n\right|, \qquad (5.26)$$

т.е. АЧХ фильтра вида 1 на границах основной полосы (при $\omega T = 0$ и $\omega T = \pi$) может принимать произвольные (в том числе и нулевые) значения. Отсюда следует, что нерекурсивный цифровой фильтр вида 1 с линейной ФЧХ может быть фильтром нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосовым (ПФ) или режекторным (РФ).

5.3. Фильтр вида 2

В нерекурсивных ЦФ вида 2, имеющих линейную ФЧХ типа (5.6), импульсная характеристика симметрична относительно центра, т.е. $h[n] = h[M-n]$ $\left(n = \overline{0,\ M}\right)$, а значение M является нечётным.

Согласно (5.7) запишем выражение для комплексной частотной характеристики нерекурсивного ЦФ

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n]\, e^{-j\omega T n} + \sum_{n=\frac{M-1}{2}+1}^{M} h[n]\, e^{-j\omega T n}. \qquad (5.27)$$

Делая замену переменной $n = M - m$ во второй сумме, будем иметь

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n]\, e^{-j\omega T n} + \sum_{m=0}^{(M-1)/2} h[M-m]\, e^{-j\omega T(M-m)}. \qquad (5.28)$$

Учитывая симметрию импульсной характеристики ЦФ относительно центра $h[n] = h[M-n]$ $\left(n = \overline{0,\ M}\right)$ и вынося множитель $e^{-j\omega T\frac{M}{2}}$ за скобки, получим

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = e^{-j\omega T\frac{M}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n] \left[e^{j\omega T\left(\frac{M}{2}-n\right)} + e^{-j\omega T\left(\frac{M}{2}-n\right)} \right] \right\}, \qquad (5.29)$$

откуда

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = e^{-j\omega T\frac{M}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{(M-1)/2} 2h[n] \cos\left[\omega T\left(\frac{M}{2}-n\right)\right] \right\}. \qquad (5.30)$$

Замена переменной $m = [(M-1)/2] - n$ даёт

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = e^{-j\omega T\frac{M}{2}} \left\{ \sum_{m=0}^{(M-1)/2} 2h\left[\frac{M-1}{2}-m\right] \cos\left[\omega T\left(m+\frac{1}{2}\right)\right] \right\}, \qquad (5.31)$$

или

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = e^{-j\omega T\frac{M}{2}} \sum_{n=0}^{(M-1)/2} C_n \cos\left[\omega T\left(n+\frac{1}{2}\right)\right], \qquad (5.32)$$

где

$$C_n = 2h\left[\frac{M-1}{2} - n\right], \quad n = \overline{0,\ (M-1)/2}. \tag{5.33}$$

Сумма в формуле (5.32) представляет псевдоАЧХ $R(\omega T)$.

На рис.5.3 показаны типичные формы импульсной характеристики $h[n]$, псевдоАЧХ $R(\omega T)$, АЧХ $A(\omega T)$ и ФЧХ $\varphi(\omega T) + \pi m$ нерекурсивного цифрового фильтра вида 2.

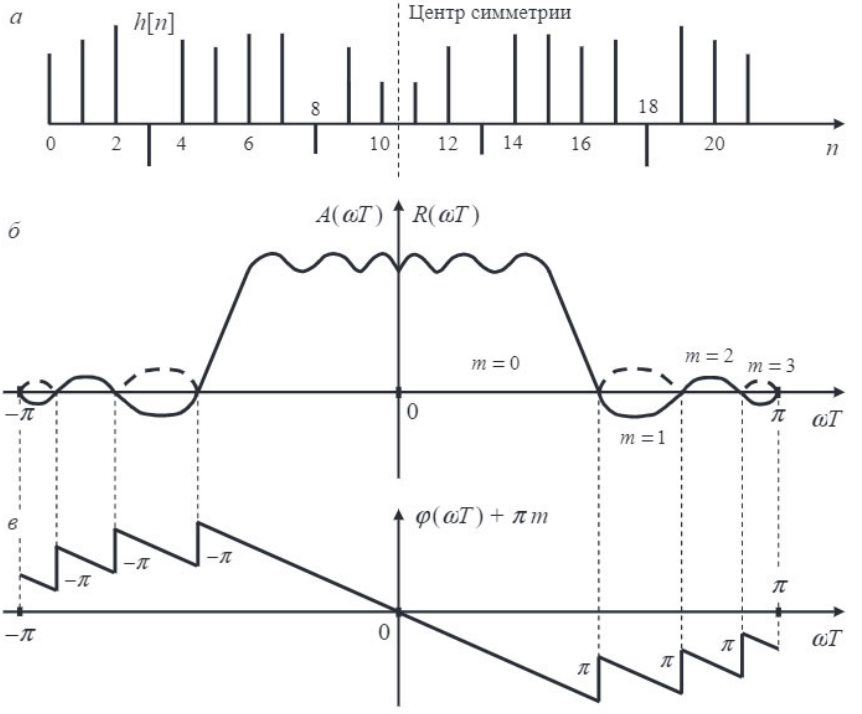


Рис.5.3. Характеристики цифрового фильтра вида 2 с линейной ФЧХ: *а* — импульсная характеристика $h[n]$; *б* — псевдоАЧХ $R(\omega T)$ и АЧХ $A(\omega T)$; *в* — ФЧХ $\varphi(\omega T) + \pi m$

В соответствии с (5.3), (5.4) и (5.32) запишем

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = e^{-j\omega T\frac{M}{2} + j\pi m}\left|\sum_{n=0}^{(M-1)/2} C_n \cos\left[\omega T\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]\right|, \tag{5.34}$$

где выражение под знаком модуля представляет собой АЧХ фильтра $A(\omega T)$.

Из формулы (5.34) получаем

$$A(\omega T)\Big|_{\omega T=0} = \left| \sum_{n=0}^{(M-1)/2} C_n \right|; \quad A(\omega T)\Big|_{\omega T=\pi} = \left| \sum_{n=0}^{(M-1)/2} C_n \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \right| = 0, \qquad (5.35)$$

т.е. АЧХ фильтра вида 2 при $\omega T = 0$ может принимать произвольное (в том числе и нулевое) значение, а при $\omega T = \pi$ — только нулевое значение. Отсюда следует, что нерекурсивный ЦФ вида 2 с линейной ФЧХ может быть фильтром нижних частот (ФНЧ) либо полосовым (ПФ).

5.4. Фильтр вида 3

В нерекурсивных ЦФ вида 3, имеющих линейную ФЧХ типа (5.5), значение M является чётным, а импульсная характеристика антисимметрична относительно центра $h[n] = -h[M-n]$ $\left(n = \overline{0,\ M}\right)$.

Согласно (5.7) запишем выражение для комплексной частотной характеристики нерекурсивного ЦФ в виде (5.18), из которого после замены переменной $n = M - m$ во второй сумме • получим (5.19). Учитывая антисимметрию импульсной характеристики относительно центра $h[n] = -h[M-n]$ $\left(n = \overline{0,\ M}\right)$ и вынося в (5.19) множитель $e^{-j\omega T\frac{M}{2}}$ за скобки, будем иметь

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = e^{-j\omega T\frac{M}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h[n] \left[e^{j\omega T\left(\frac{M}{2}-n\right)} - e^{-j\omega T\left(\frac{M}{2}-n\right)} \right] \right\}, \qquad (5.36)$$

откуда

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = e^{j\frac{\pi}{2}-j\omega T\frac{M}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{(M/2)-1} 2h[n] \sin\left[\omega T\left(\frac{M}{2}-n\right)\right] \right\}. \qquad (5.37)$$

Замена переменной $m = (M/2) - n$ даёт

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = e^{j\frac{\pi}{2}-j\omega T\frac{M}{2}} \left\{ \sum_{m=1}^{M/2} 2h\left[\frac{M}{2}-m\right] \sin(\omega T m) \right\}, \qquad (5.38)$$

или

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = e^{j\frac{\pi}{2}-j\omega T\frac{M}{2}} \sum_{n=1}^{M/2} C_n \sin(\omega T n), \qquad (5.39)$$

где

$$C_n = 2h\left[\frac{M}{2}-n\right], \quad n = \overline{1,\ M/2}. \qquad (5.40)$$

• В данном случае $h[M/2] = 0$.

Сумма в формуле (5.39) представляет псевдоАЧХ $R(\omega T)$.

В соответствии с (5.3), (5.4) и (5.39) запишем

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = e^{j\frac{\pi}{2} - j\omega T\frac{M}{2} + j\pi m}\left|\sum_{n=1}^{M/2} C_n \sin(\omega T n)\right|, \qquad (5.41)$$

где выражение под знаком модуля представляет собой АЧХ фильтра $A(\omega T)$.

На рис.5.4 показаны типичные формы импульсной характеристики $h[n]$, псевдоАЧХ $R(\omega T)$, АЧХ $A(\omega T)$ и ФЧХ $\varphi(\omega T) + \pi m$ ЦФ вида 3.

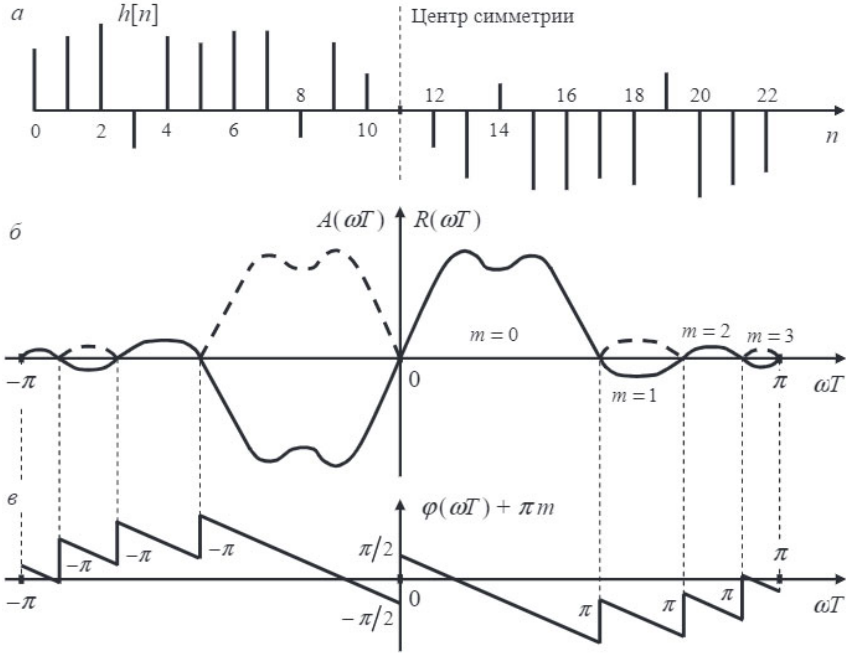


Рис.5.4. Характеристики цифрового фильтра вида 3 с линейной ФЧХ: *а* — импульсная характеристика $h[n]$; *б* — псевдоАЧХ $R(\omega T)$ и АЧХ $A(\omega T)$; *в* — ФЧХ $\varphi(\omega T) + \pi m$

Из (5.41) получаем

$$A(\omega T)\big|_{\omega T=0} = \left|\sum_{n=1}^{M/2} C_n \sin(0)\right| = 0; \quad A(\omega T)\big|_{\omega T=\pi} = \left|\sum_{n=1}^{M/2} C_n \sin(\pi n)\right| = 0, \qquad (5.42)$$

т.е. АЧХ фильтра вида 3 на границах основной полосы (при $\omega T = 0$ и $\omega T = \pi$) может принимать только нулевые значения. Отсюда следует, что нерекурсив-

ный цифровой фильтр вида 3 с линейной ФЧХ может быть только полосовым фильтром (ПФ).

5.5. Фильтр вида 4

В нерекурсивных ЦФ вида 4, имеющих линейную ФЧХ типа (5.5), значение M является нечётным, а импульсная характеристика антисимметрична относительно центра $h[n]=-h[M-n]$ $\left(n=\overline{0,\ M}\right)$.

Согласно (5.7) запишем выражение для комплексной частотной характеристики нерекурсивного цифрового фильтра в виде (5.27), из которого после замены переменной $n=M-m$ во второй сумме получим (5.28). Учитывая антисимметрию импульсной характеристики относительно центра $h[n]=-h[M-n]$ $\left(n=\overline{0,\ M}\right)$ и вынося в (5.28) множитель $e^{-j\omega T(M/2)}$ за скобки, будем иметь

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=e^{-j\omega T\frac{M}{2}}\left\{\sum_{n=0}^{(M-1)/2}h[n]\left[e^{j\omega T\left(\frac{M}{2}-n\right)}-e^{-j\omega T\left(\frac{M}{2}-n\right)}\right]\right\}, \tag{5.43}$$

откуда

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=e^{j\frac{\pi}{2}-j\omega T\frac{M}{2}}\left\{\sum_{n=0}^{(M-1)/2}2h[n]\sin\left[\omega T\left(\frac{M}{2}-n\right)\right]\right\}. \tag{5.44}$$

Замена переменной $m=[(M-1)/2]-n$ даёт

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=e^{j\frac{\pi}{2}-j\omega T\frac{M}{2}}\left\{\sum_{m=0}^{(M-1)/2}2h\left[\frac{M-1}{2}-m\right]\sin\left[\omega T\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}, \tag{5.45}$$

или

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=e^{j\frac{\pi}{2}-j\omega T\frac{M}{2}}\sum_{n=0}^{(M-1)/2}C_n\sin\left[\omega T\left(n+\frac{1}{2}\right)\right], \tag{5.46}$$

где

$$C_n=2h\left[\frac{M-1}{2}-n\right],\quad n=\overline{0,\ (M-1)/2}. \tag{5.47}$$

Сумма в формуле (5.46) представляет псевдоАЧХ $R(\omega T)$.

В соответствии с (5.3), (5.4) и (5.46) запишем

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=e^{j\frac{\pi}{2}-j\omega T\frac{M}{2}+j\pi m}\left|\sum_{n=0}^{(M-1)/2}C_n\sin\left[\omega T\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\right|, \tag{5.48}$$

где выражение под знаком модуля представляет собой амплитудно-частотную характеристику фильтра $A(\omega T)$.

Из (5.48) получаем

$$A(\omega T)\Big|_{\omega T=0} = \left| \sum_{n=0}^{(M-1)/2} C_n \sin(0) \right| = 0; \quad A(\omega T)\Big|_{\omega T=\pi} = \left| \sum_{n=0}^{(M-1)/2} C_n (-1)^n \right|, \qquad (5.49)$$

т.е. АЧХ фильтра вида 4 при $\omega T = 0$ может принимать только нулевое значение, а при $\omega T = \pi$ — произвольное (в том числе и нулевое) значение. Отсюда следует, что нерекурсивный ЦФ вида 4 с линейной ФЧХ может быть фильтром верхних частот (ФВЧ) либо полосовым (ПФ).

На рис.5.5 показаны типичные формы импульсной характеристики $h[n]$, псевдоАЧХ $R(\omega T)$, АЧХ $A(\omega T)$ и ФЧХ $\varphi(\omega T) + \pi m$ ЦФ вида 4.

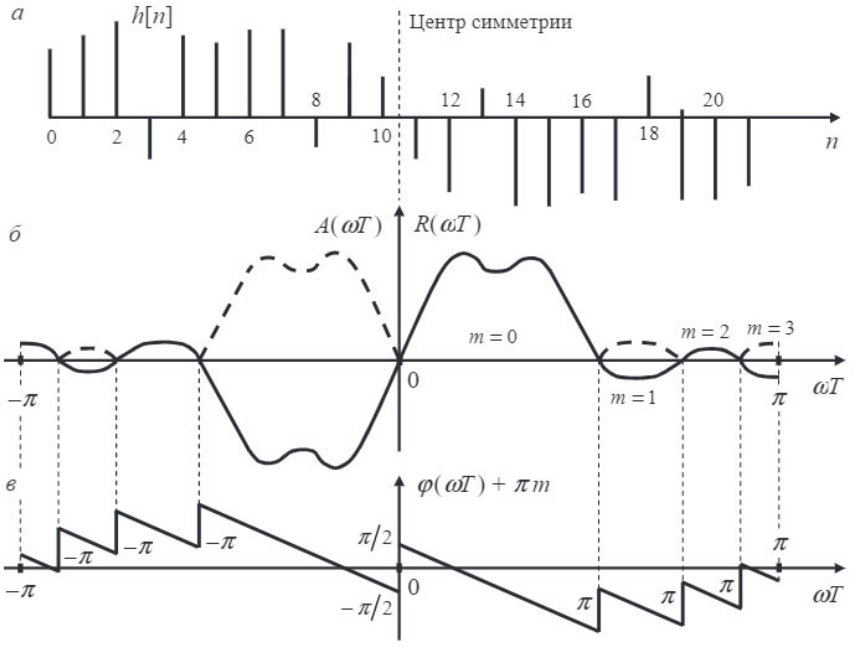


Рис.5.5. Характеристики цифрового фильтра вида 4 с линейной ФЧХ: *а* — импульсная характеристика $h[n]$; *б* — псевдоАЧХ $R(\omega T)$ и АЧХ $A(\omega T)$; *в* — ФЧХ $\varphi(\omega T) + \pi m$

5.6. Расположение нулей передаточной функции цифрового фильтра с линейной фазочастотной характеристикой

Расположение нулей передаточной функции (3.43) нерекурсивного ЦФ с линейной ФЧХ сильно ограничено видом симметрии его импульсной характеристики $h[n]$.

Согласно (3.44) с учётом симметрии $h[n]$ запишем выражение для передаточной функции нерекурсивного ЦФ •

$$H(z)=\sum_{n=0}^{M} h[n]\,z^{-n}=\sum_{n=0}^{\tilde{M}} h[n]\left[\,z^{-n}\pm z^{-(M-n)}\right]+\left(h\left[\frac{M}{2}\right]z^{-\frac{M}{2}}\right). \qquad (5.50)$$

Знак плюс перед $z^{-(M-n)}$ соответствует симметричной относительно центра импульсной характеристике $h[n]=h[M-n]$ $\left(n=\overline{0,\,M}\right)$, а минус — антисимметричной $h[n]=-h[M-n]$ $\left(n=\overline{0,\,M}\right)$. Слагаемое в угловых скобках не равно нулю только в одном случае, когда M — чётное число, а импульсная характеристика симметрична.

Вынося за скобки множитель $z^{-(M/2)}$, получим

$$H(z)=z^{-\frac{M}{2}}\left\{\sum_{n=0}^{\tilde{M}} h[n]\left[z^{\frac{M}{2}-n}\pm z^{-\left(\frac{M}{2}-n\right)}\right]+\left(h\left[\frac{M}{2}\right]\right)\right\}. \qquad (5.51)$$

Заменив в (5.51) аргумент z аргументом z^{-1}, будем иметь

$$H(z^{-1})=z^{\frac{M}{2}}\left\{\sum_{n=0}^{\tilde{M}} h[n]\left[z^{-\left(\frac{M}{2}-n\right)}\pm z^{\left(\frac{M}{2}-n\right)}\right]+\left(h\left[\frac{M}{2}\right]\right)\right\}. \qquad (5.52)$$

Сопоставление формул (5.51) и (5.52) показывает, что

$$H(z^{-1})=\pm z^{M}H(z). \qquad (5.53)$$

Из (5.53) следует, что с точностью до множителя $\pm z^{M}$ функции $H(z^{-1})$ и $H(z)$ идентичны. Это означает, что нули функции $H(z^{-1})$ идентичны нулям передаточной функции $H(z)$.

Пусть передаточная функция нерекурсивного ЦФ $H(z)$ имеет комплексный нуль в точке $z_{0i}=\rho_i e^{j\theta_i}$, причём $\rho_i\neq 1$, $\theta_i\neq 0$, $\theta_i\neq\pi$. Тогда согласно (5.53) функция $H(z)$ должна иметь также нуль, сопряжённый относительно единичной окружности, т.е. нуль в точке $z_{0i}^{-1}=\dfrac{1}{\rho_i}e^{-\theta_i}$. Кроме того, поскольку импульсная характеристика $h[n]$ вещественная, каждый комплексный нуль образует с другим нулём комплексно-сопряжённую пару. Таким образом, каждому комплексному нулю $z_{0i}=\rho_i e^{j\theta_i}$, не лежащему на единичной окружности и на вещественной оси, в передаточной функции $H(z)$ нерекурсивного ЦФ с линейной ФЧХ соответствуют ещё три нуля, положение которых на Z-плоскости по-

• Здесь $\tilde{M}$ определяется соотношениями (5.12).

казано на рис.5.6. При этом передаточная функция $H(z)$ содержит базовые множители четвёртого порядка

$$H_i(z)=\left[1-z^{-1}\rho_i e^{j\theta_i}\right]\left[1-z^{-1}\rho_i e^{-j\theta_i}\right]\left[1-z^{-1}\rho_i^{-1}e^{j\theta_i}\right]\left[1-z^{-1}\rho_i^{-1}e^{-j\theta_i}\right]=$$

$$=1-z^{-1}\left[2\frac{\rho_i^2+1}{\rho_i}\cos(\theta_i)\right]+z^{-2}\left[\frac{\rho_i^4+1}{\rho_i^2}+4\cos(\theta_i)\right]-z^{-3}\left[2\frac{\rho_i^2+1}{\rho_i}\cos(\theta_i)\right]+z^{-4},$$

$$i=\overline{1,\ \mathrm{I}}. \qquad (5.54)$$

Если $z_{0k}=e^{j\theta_k}$, т.е. $\rho_k=1$, но $\theta_k\neq 0$, $\theta_k\neq\pi$, то комплексный нуль находится на единичной окружности, а соответствующий комплексно-сопряжённый нуль $z_{0k}^{*}=e^{-j\theta_k}$ является его зеркальным отображением относительно вещественной оси (рис.5.6). Таким образом, нули передаточной функции $H(z)$, лежащие на единичной окружности $|z|=1$, одновременно являются и нулями функции $H(z^{-1})$, лежащими на той же окружности. Для таких нулей базовые множители имеют второй порядок

$$H_k(z)=\left[1-z^{-1}e^{j\theta_k}\right]\left[1-z^{-1}e^{-j\theta_k}\right]=1-2\cos(\theta_k)z^{-1}+z^{-2},\quad k=\overline{1,\ \mathrm{K}}. \qquad (5.55)$$

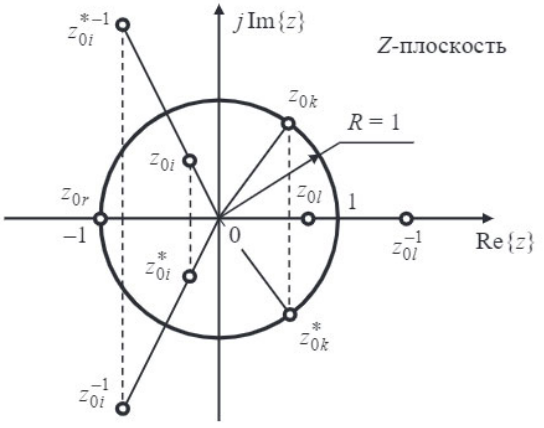


Рис.5.6. Расположение на Z-плоскости нулей передаточной функции нерекурсивного ЦФ с линейной ФЧХ

Если же $z_{0l}=\rho_l e^{j\theta_l}$, причём $\rho_l\neq 1$, но $\theta_l=0$ или $\theta_l=\pi$, то нули передаточной функции $H(z)$ становятся вещественными. Они не образуют комплексно-сопряжённых пар, но согласно (5.53) функция $H(z)$ должна иметь также

нуль, сопряжённый относительно единичной окружности $z_{0l}^{-1} = \frac{1}{\rho_l} e^{-\theta_l}$. Соответствующие базовые множители представляются следующим образом:

$$H_l(z) = \left[1 \pm z^{-1}\rho_l\right]\left[1 \pm z^{-1}\rho_l^{-1}\right] = 1 \pm z^{-1}\frac{\rho_l^2 + 1}{\rho_l} + z^{-2}, \quad l = \overline{1, \mathrm{L}}. \tag{5.56}$$

Знак плюс здесь соответствует $\theta_l = \pi$, а знак минус соответствует $\theta_l = 0$.

Наконец, при $\rho_r = 1$ и $\theta_r = 0$ или $\theta_r = \pi$ нули будут находиться либо в точке $z_{0r} = 1$, либо в точке $z_{0r} = -1$. В этих случаях базовые множители равны

$$H_r(z) = 1 \pm z^{-1}, \quad r = \overline{1, \mathrm{R}}. \tag{5.57}$$

Из изложенного следует, что передаточную функцию $H(z)$ нерекурсивного ЦФ с линейной фазочастотной характеристикой можно представить в виде произведения базовых множителей типа (5.54) — (5.57):

$$H(z) = \prod_{i=1}^{\mathrm{I}} H_i(z) \prod_{k=1}^{\mathrm{K}} H_k(z) \prod_{l=1}^{\mathrm{L}} H_l(z) \prod_{r=1}^{\mathrm{R}} H_r(z). \tag{5.58}$$

Нерекурсивные цифровые фильтры неминимально-фазового типа с нелинейной ФЧХ (см. рис.5.1) такой особенностью расположения нулей передаточной функции $H(z)$ на Z-плоскости не обладают.

Фильтры с линейной ФЧХ применяются в качестве избирательных фильтров, преобразователей Гильберта, дифференциаторов и корректоров амплитудно-частотных характеристик.

Краткие итоги

1. В классе одномерных скалярных вещественных стационарных нерекурсивных неминимально-фазовых ЦФ имеются фильтры со строго линейными фазочастотными характеристиками. Это свойство является уникальным, и в аналоговой технике подобных фильтров не существует.

2. Линейные фазочастотные характеристики могут быть либо с постоянными фазовой и групповой задержками (5.6), либо с постоянной только групповой задержкой (5.5). Условием постоянства фазовой и групповой задержек является симметрия импульсной характеристики фильтра относительно центра $h[n] = h[M - n]$ $\left(n = \overline{0, M}\right)$, а условием постоянства только групповой задержки является антисимметрия импульсной характеристики относительно центра $h[n] = -h[M - n]$ $\left(n = \overline{0, M}\right)$. В обоих случаях величина групповой задержки, выраженная через число интервалов дискретизации T, равна $M/2$, где M — порядок фильтра.

3. Существует четыре вида нерекурсивных ЦФ с линейной ФЧХ (см. рис.5.1). Их различие заключается в чётности или нечётности порядка фильтра M, а также в симметрии или антисимметрии импульсной характеристики $h[n]$ относительно центра.

4. Фильтр вида 1 имеет симметричную импульсную характеристику $h[n]=h[M-n]$ $\left(n=\overline{0,M}\right)$ и чётный порядок M. Его фазочастотная характеристика (5.6) обеспечивает постоянство фазовой и групповой задержек. На базе фильтра вида 1 могут быть реализованы все типы частотно-избирательных фильтров: фильтры нижних частот (ФНЧ), фильтры верхних частот (ФВЧ), полосовые (ПФ) и режекторные (РФ).

5. Фильтр вида 2 имеет симметричную импульсную характеристику $h[n]=h[M-n]$ $\left(n=\overline{0,M}\right)$ и нечётный порядок M. Его фазочастотная характеристика (5.6) обеспечивает постоянство фазовой и групповой задержек. На базе фильтра вида 2 могут быть реализованы частотно-избирательные фильтры нижних частот (ФНЧ) и полосовые (ПФ).

6. Фильтр вида 3 имеет чётный порядок M и антисимметричную импульсную характеристику $h[n]=-h[M-n]$ $\left(n=\overline{0,M}\right)$. Его фазочастотная характеристика (5.5) обеспечивает постоянство только групповой задержки. На базе фильтра вида 3 могут быть реализованы частотно-избирательные фильтры полосового типа (ПФ).

7. Фильтр вида 4 имеет нечётный порядок M и антисимметричную импульсную характеристику $h[n]=-h[M-n]$ $\left(n=\overline{0,M}\right)$. Его фазочастотная характеристика (5.5) обеспечивает постоянство только групповой задержки. На базе фильтра вида 4 могут быть реализованы частотно-избирательные фильтры верхних частот (ФВЧ) и полосовые (ПФ).

8. Фильтры вида 3 и 4 создают постоянный фазовый сдвиг, равный $\pi/2$, поэтому на их базе возможно построение преобразователей Гильберта.

9. Уникальные свойства нерекурсивных ЦФ с линейными ФЧХ обусловливаются особым расположением нулей их передаточных функций $H(z)$ на Z-плоскости:

- каждый комплексный нуль $z_{0i}=\rho_i e^{j\theta_i}$, $\rho_i\neq 1$, $\theta_i\neq 0$, $\theta_i\neq\pi$, не находящийся на единичной окружности или вещественной оси, образует четвёрку нулей, сопряжённых относительно вещественной оси (комплексное сопряжение) и относительно единичной окружности: $z_{0i}=\rho_i e^{j\theta_i}$, $z_{0i}^{*}=\rho_i e^{-j\theta_i}$, $z_{0i}^{-1}=\rho_i^{-1}e^{-j\theta_i}$, $z_{0i}^{*-1}=\rho_i^{-1}e^{j\theta_i}$; четырём комплексным нулям соответствует базовый множитель четвёртого порядка (5.54);
- каждый комплексный нуль $z_{0k}=e^{j\theta_k}$, $\rho_k=1$, $\theta_k\neq 0$, $\theta_k\neq\pi$, находящийся на единичной окружности, но не лежащий на вещественной оси, образует комплексно-сопряжённую пару $z_{0k}=e^{j\theta_k}$ и $z_{0k}^{*}=e^{-j\theta_k}$; двум комплексным нулям соответствует базовый множитель второго порядка (5.55);
- каждый вещественный нуль $z_{0l}=\rho_l e^{j\theta_l}$, $\rho_l\neq 1$, $\theta_l=0$ или $\theta_l=\pi$, не находящийся на единичной окружности, образует пару, сопряжённую относительно единичной окружности: $z_{0l}=\rho_l e^{j\theta_l}$, $z_{0l}^{-1}=\rho_l^{-1}e^{-j\theta_l}$; двум вещественным нулям соответствует базовый множитель второго порядка (5.56);
- каждый вещественный нуль $z_{0r}=1$ или $z_{0r}=-1$, находящийся на единичной окружности, никаких сопряжённых пар не образует; одному вещественному нулю соответствует базовый множитель первого порядка (5.57).

10. Передаточная функция нерекурсивного ЦФ с линейной ФЧХ представляется в виде произведения базовых множителей [см. (5.58)].

Глава 6

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

6.1. Общий подход к обработке сигналов на основе дискретного преобразования Фурье

Цифровая обработка сигналов (ЦОС) базируется либо на временном, либо на частотном подходе. В предыдущих главах рассматривался временной подход к ЦОС, основанный на алгоритмах фильтрации (см. гл.2). Временной подход является универсальным и не имеет ограничений на тип рассматриваемых систем. В настоящей главе излагаются основы частотного подхода к ЦОС, при котором сигналы представляются спектрами, т.е. преобразованиями Фурье от сигналов (см. § 1.6 и 1.7), а алгоритмы фильтрации — операциями над их спектрами. Частотный подход имеет ограничения на тип систем: в рамках этого подхода могут быть рассмотрены только *линейные стационарные системы*.

Периодические аналоговые сигналы $x(t) = x(t + rT_{\text{п}})$, где $T_{\text{п}} = 1/F_{\text{п}}$ — период повторения, r — целое число, описываются рядами Фурье:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{X}_k \, e^{j2\pi k F_{\text{п}} t}, \tag{6.1}$$

где комплексные амплитуды $\dot{X}_k$ спектральных компонент выражаются формулой

$$\dot{X}_k = \frac{1}{T_{\text{п}}} \int_{-T_{\text{п}}/2}^{T_{\text{п}}/2} x(t) e^{-j2\pi k F_{\text{п}} t} dt. \tag{6.2}$$

Непериодические (в том числе и финитные) аналоговые сигналы $x(t)$ описываются преобразованиями Фурье (прямым и обратным):

$$X(j\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt; \tag{6.3}$$

$$x(t) = F^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{6.4}$$

Анализ непрерывных (аналоговых) линейных стационарных систем в случае нулевых начальных условий при частотном подходе выполняется в следующей последовательности:

- с помощью прямого преобразования Фурье (6.3) определяют спектр $X(j\omega)$ входного сигнала $x(t)$;

- умножением спектра $X(j\omega)$ на комплексный коэффициент передачи системы $H(j\omega)$ находят спектр выходного сигнала $y(t)$:

$$Y(j\omega) = F\{y(t)\} = X(j\omega)\,H(j\omega); \qquad (6.5)$$

- с помощью обратного преобразования Фурье (6.4) функции $Y(j\omega)$ вычисляют реакцию $y(t)$ системы на воздействие $x(t)$.

В случае периодического входного сигнала вместо формул (6.3) и (6.4) следует использовать выражения (6.2) и (6.1) соответственно. При этом согласно (6.5) каждую компоненту комплексного спектра входного сигнала $\dot{X}_k$ следует умножить на комплексный коэффициент передачи системы на соответствующей частоте: $Y_k = X_k H(j2\pi k F_{\text{п}})$.

Преобразования Фурье дискретной (решётчатой) функции $x[n]$ описываются формулами (1.82) и (1.83). Отметим, что Z-преобразования периодической дискретной функции $x[n] = x[n + rN]$, где N — период, не существует, так как не выполняется необходимое условие сходимости рядов (1.13) и (1.15). В то же время существует дискретный ряд Фурье (ДРФ), который описывается формулами дискретного преобразования Фурье (1.98) и (1.99) или, что то же самое, формулами (1.101) и (1.102) при целых k и n в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$. Спектр $X(k)$ периодической дискретной функции является также периодическим с тем же периодом, равным N отсчётов, что и исходная функция $x[n]$: $X(k) = X(k + rN)$, где r — целое число [6].

Сравнение спектров непрерывных $x(t)$ и дискретных $x[n]$ сигналов позволяет выявить их общие свойства и различия. Общим является то, что периодические сигналы описываются рядами Фурье, а непериодические — преобразованиями Фурье. Спектры периодических сигналов *дискретные линейчатые*, расстояние между спектральными линиями определяется частотой повторения сигнала. Спектральная плотность непериодического аналогового сигнала $x(t)$ представляет собой *непрерывную* функцию частоты ω, а спектр дискретного сигнала $x[n]$ — *периодическую* функцию частоты ω с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_{\text{д}} = 2\pi f_{\text{д}} = \dfrac{2\pi}{T}$ (см. § 1.6).

Как отмечалось в § 1.6, спектральные плотности аналогового $X(j\omega)$ и дискретного $X\left(e^{j\omega T}\right)$ сигналов имеют разную размерность: размерность $X(j\omega)$ равна [***сигнал/частота***], а размерность $X\left(e^{j\omega T}\right)$ — просто [***сигнал***].

Анализ дискретных линейных стационарных систем в случае нулевых начальных условий при частотном подходе выполняется в следующей последовательности:

- с помощью прямого ДПФ (1.101) определяют спектр $X(k)$ входного дискретного сигнала $x[n]$ $\left(n = \overline{0,\ N-1}\right)$;

- умножением всех компонент спектра $X(k)$ на комплексный коэффициент передачи системы для соответствующих частот находят спектр выходного сигнала $y[n]$:

$$Y(k) = X(k)\, H\left(j\frac{2\pi}{NT} k \right), \quad k = \overline{0,\ N-1}; \tag{6.6}$$

- с помощью обратного ДПФ (1.102) функции $Y(k)$ вычисляют реакцию $y[n]$ системы на воздействие $x[n]$.

6.2. Свойства дискретного преобразования Фурье

◆ Связь ДПФ с Z-преобразованием

Рассмотрим финитную последовательность $x[n]\left(n = \overline{0,\ N-1}\right)$. Согласно определению (1.15) её Z-преобразование

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, z^{-n}. \tag{6.7}$$

Вычисляя сумму (6.7) при $z = \exp\left(j\frac{2\pi}{N} k \right)\left(k = \overline{0,\ N-1}\right)$, т.е. в точках на единичной окружности с полярными углами $\theta_k = (2\pi/N)k\ \left(k = \overline{0,\ N-1}\right)$, получим

$$X(z)\Big|_{z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = \overline{0,\ N-1}. \tag{6.8}$$

Сравнение выражений (6.8) и (1.98) показывает, что коэффициенты ДПФ $X(k)\ \left(k = \overline{0,\ N-1}\right)$ финитной последовательности $x[n]\left(n = \overline{0,\ N-1}\right)$ равны значениям Z-преобразования этой последовательности в N точках, равномерно распределённых по единичной окружности Z-плоскости. Эти коэффициенты однозначно представляют саму последовательность, поскольку она может быть точно восстановлена с помощью обратного ДПФ (1.99).

Так как ДПФ однозначно описывает финитную последовательность $x[n]$ $\left(n = \overline{0,\ N-1}\right)$, то можно получить её Z-преобразование через коэффициенты ДПФ этой последовательности $X(k)\left(k = \overline{0,\ N-1}\right)$. Подставляя в формулу (6.7) последовательность $x[n]$, выраженную через обратное ДПФ (1.99), будем иметь

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] z^{-n} = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1} \right)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{N}\,\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k}}. \tag{6.9}$$

Формула (6.9) показывает, что Z-преобразование финитной последовательности $x[n]$ $\left(n=\overline{0,\ N-1}\right)$ непосредственно связано с коэффициентами $X(k)$ $\left(k=\overline{0,\ N-1}\right)$ её ДПФ. Для точек единичной окружности $z=e^{j\omega T}$ Z-плоскости равенство (6.9) принимает вид

$$X\left(e^{j\omega T}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{N}\,\frac{1-e^{-j\omega TN}}{1-e^{-j\omega T}\,e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{N}\exp\left\{-j\left[\frac{\omega T(N-1)}{2}+\frac{\pi}{N}k\right]\right\}\frac{\sin\left(\dfrac{\omega TN}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\omega T}{2}-\dfrac{\pi}{N}k\right)}. \qquad (6.10)$$

Здесь функции вида $\sin\left(\dfrac{\omega TN}{2}\right)\Big/\sin\left(\dfrac{\omega T}{2}-\dfrac{\pi}{T}k\right)$ интерполируют значения коэффициентов ДПФ $X(k)$ $\left(k=\overline{0,\ N-1}\right)$ на всю ось частот. Следовательно, с помощью формулы (6.10) по коэффициентам ДПФ финитной последовательности $x[n]$ $\left(n=\overline{0,\ N-1}\right)$ можно найти её «непрерывный» частотный спектр [6].

Представление финитных последовательностей с помощью ДПФ удобно также для вычисления преобразования Фурье в L точках, равномерно распределённых по единичной окружности Z-плоскости.

Преобразование Фурье финитной последовательности $x[n]$ $\left(n=\overline{0,\ N-1}\right)$ в соответствии с (1.82)

$$X\left(e^{j\omega T}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,e^{-j\omega Tn}. \qquad (6.11)$$

Отсюда получим значения спектра $X\left(e^{j\omega T}\right)$ на частотах $\omega_l=\dfrac{2\pi}{LT}l$ $\left(l=\overline{0,\ L-1}\right)$:

$$X\left(e^{j\frac{2\pi}{L}l}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{LT}Tln}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{L}ln},\quad l=\overline{0,\ L-1}. \qquad (6.12)$$

Введём в рассмотрение новую последовательность

$$\hat{x}[n]=\begin{cases}x[n], & n=\overline{0,\ N-1};\\ 0, & n=\overline{N,\ L-1}\end{cases} \qquad (6.13)$$

и найдём её L-точечное ДПФ:

$$\hat{X}(k)=\sum_{n=0}^{L-1}\hat{x}[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{L}kn},\quad k=\overline{0,\ L-1}. \qquad (6.14)$$

Поскольку $\tilde{x}[n]=0$ при $n\geq N$, равенство (6.14) можно записать в следующем виде:

$$\hat{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{L}kn},\quad k=\overline{0,\,L-1}. \tag{6.15}$$

Сравнивая (6.12) и (6.15), получаем

$$\hat{X}(k)=X\left(e^{j\frac{2\pi}{L}k}\right),\quad k=\overline{0,\,L-1}. \tag{6.16}$$

Простое дополнение финитной последовательности $x[n]\ \left(n=\overline{0,\,N-1}\right)$ нулевыми отсчётами $x=0\ \left(n=\overline{N,\,L-1}\right)$ является удобным практическим приёмом при расчёте ДПФ этой последовательности для совокупности точек, равномерно распределённых по единичной окружности [6].

Как следует из результатов § 1.6, дискретизация сигнала во временной области, т.е. переход от аналогового сигнала $x(t)$ к дискретному $x[n]$ по алгоритму (1.1), приводит к наложению в частотной области, т.е. к периодическому характеру спектра [см. (1.92) и рис.1.3 и 1.4]. Покажем теперь, что дискретизация спектра сигнала приводит к наложению сигналов во временной области, т.е. к периодическому характеру сигнала: $x[n]=x[n+rN]$, где N — период повторения.

Предположим, что последовательность $x[n]$ (не обязательно финитная) имеет Z-преобразование (1.15). Непрерывный спектр этой последовательности описывается формулой (1.82) и может быть получен из Z-преобразования $X(z)$ при $z=e^{j\omega T}$.

Сформируем дискретный спектр $X(k)$ путём взятия N отсчётов непрерывного спектра $X\left(e^{j\omega T}\right)$ в точках, равномерно распределённых по единичной окружности Z-плоскости, т.е. на частотах $(\omega_k T)=\dfrac{2\pi}{N}k\ \left(k=\overline{0,\,N-1}\right)$:

$$X(k)=X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\quad k=\overline{0,\,N-1}. \tag{6.17}$$

По отсчётам спектра $X(k)$ можно найти финитную последовательность

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\,e^{j\frac{2\pi}{N}kn},\quad n=\overline{0,\,N-1}. \tag{6.18}$$

Выражения (6.17) и (6.18) в § 1.7 рассматривались как формулы прямого и обратного ДПФ [см. (1.98) и (1.99)].

Полученные последовательности частотных $X(k)\ \left(k=\overline{0,\,N-1}\right)$ и временных $x[n]\ \left(n=\overline{0,\,N-1}\right)$ отсчётов обладают свойством периодичности с периодом

N отсчётов: $X(k+rN)=X(k)$ и $x[n+lN]=x[n]$, где r и l — произвольные целые числа (положительные и отрицательные). Действительно, из выражений (6.17) и (6.18) следует

$$X(k+rN)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+rN)n}=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\,e^{-j\frac{2\pi}{N}rNn}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=X(k),\quad -\infty<k<\infty;\qquad(6.19)$$

$$x[n+lN]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\,e^{j\frac{2\pi}{N}k(n+lN)}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\,e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\,e^{j\frac{2\pi}{N}klN}=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\,e^{j\frac{2\pi}{N}kn}=x[n],\quad -\infty<n<\infty.\qquad(6.20)$$

Периодическая последовательность $x_{\text{п}}[n]$ с периодом N отсчётов может быть сформирована путём суммирования бесконечного числа копий финитной последовательности $x[n]$ $\left(n=\overline{0,\ N-1}\right)$, сдвинутых на целое число периодов в обе стороны:

$$x_{\text{п}}[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[n+rN].\qquad(6.21)$$

Из соотношения (6.21) с учётом выражений (6.17) и (6.18) следует, что периодическая последовательность $x_{\text{п}}[n]$, получаемая из обратного ДПФ выборки значений Z-преобразования непериодической последовательности $x[n]$, вычисленных в N точках, равномерно распределённых по окружности единичного радиуса Z-плоскости, состоит из сдвинутых и *наложенных* копий исходной непериодической последовательности $x[n]$. Если длина последовательности $x[n]$ не превышает N отсчётов, то наложение в $x_{\text{п}}[n]$ практически отсутствует [6].

Таким образом, доказан частотно-временной дуализм дискретизации сигналов.

◆ Линейность ДПФ

Свойство линейности ДПФ легко доказывается исходя из определения (1.98). Однако, поскольку ДПФ получено нами как частный случай Z-преобразования (см. § 1.6 и 1.7), а линейность Z-преобразования доказана в § 1.2, то и линейность ДПФ можно считать доказанной.

◆ Сдвиг последовательности

Точно так же можно распространить на ДПФ теоремы сдвига (запаздывания и упреждения), доказанные для Z-преобразования в § 1.2. Теорема запаздывания в терминах ДПФ формулируется следующим образом: если ДПФ перио-

дической последовательности $x_{\text{п}}[n]$ с периодом N отсчётов равно $X_{\text{п}}(k)$, то ДПФ сдвинутой последовательности $x_{\text{п}}[n-n_0]$ будет равно $X_{\text{п}}(k)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}$.

При анализе финитных последовательностей (последовательностей конечной длины) $x[n]\left(n=\overline{0,\ N-1}\right)$ необходимо учитывать специфический характер временного сдвига. Для того чтобы найти ДПФ сдвинутой последовательности $x[n-n_0]$, причём $n_0<N$, следует рассмотреть сдвинутую периодическую последовательность $x_{\text{п}}[n-n_0]$ и в качестве эквивалентной сдвинутой последовательности $x[n-n_0]$, имеющей ДПФ $X(k)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}$, принять отрезок последовательности $x_{\text{п}}[n-n_0]$ в интервале $n=\overline{0,\ N-1}$ (рис.6.1). Таким образом, с точки зрения ДПФ последовательность $x[n-n_0]$ получается путём *кругового сдвига* элементов последовательности $x[n]\left(n=\overline{0,\ N-1}\right)$ на n_0 отсчётов [6].

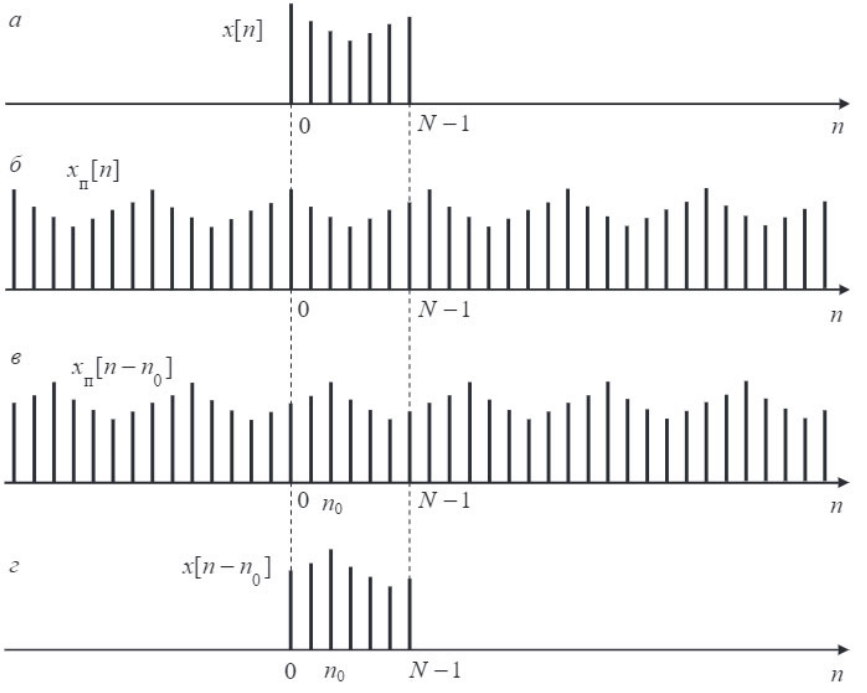


Рис.6.1. К определению кругового сдвига периодической $x_{\text{п}}[n]$ и финитной $x[n]$ последовательностей: *а* — финитная последовательность; *б* — соответствующая ей периодическая последовательность; *в* — сдвинутая вправо периодическая последовательность; *г* — сдвинутая вправо финитная последовательность

◆ **Свойства симметрии ДПФ**

Пусть $x_{\text{п}}[n]$ — вещественная периодическая последовательность с периодом N отсчётов. Её ДПФ описывается выражением вида (1.98)

$$X_{\text{п}}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_{\text{п}}[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}. \tag{6.22}$$

По этой формуле вычислим значение ДПФ в точке $N-k$:

$$X_{\text{п}}(N-k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_{\text{п}}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}n(N-k)}=\sum_{n=0}^{N-1}x_{\text{п}}[n]e^{j\frac{2\pi}{N}nk}e^{-j2\pi n}=$$

$$=\left\{\sum_{n=0}^{N-1}x_{\text{п}}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right\}^{*}=X_{\text{п}}^{*}(k). \tag{6.23}$$

Здесь и далее «*» — символ комплексного сопряжения.

Из (6.23) вытекают следующие условия симметрии ДПФ периодической вещественной последовательности:

$$\begin{cases}\operatorname{Re}[X_{\text{п}}(k)]=\operatorname{Re}[X_{\text{п}}(N-k)];\\ \operatorname{Im}[X_{\text{п}}(k)]=-\operatorname{Im}[X_{\text{п}}(N-k)];\\ \left|X_{\text{п}}(k)\right|=\left|X_{\text{п}}(N-k)\right|;\\ \operatorname{Arg}[X_{\text{п}}(k)]=-\operatorname{Arg}[X_{\text{п}}(N-k)].\end{cases} \tag{6.24}$$

Для финитной вещественной последовательности $x[n]\left(n=\overline{0,\ N-1}\right)$, имеющей N-точечное ДПФ $X(k)$ $\left(k=\overline{0,\ N-1}\right)$, справедливы аналогичные равенства.

Рассмотрим периодические последовательности $x_{\text{п}}[n]$, для которых выполняется условие симметрии или антисимметрии:

$$x_{\text{п}}[n]=\pm x_{\text{п}}[N-n]. \tag{6.25}$$

ДПФ таких последовательностей

$$X_{\text{п}}(k)=\pm\sum_{n=0}^{N-1}x_{\text{п}}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\pm\sum_{n=0}^{N-1}x_{\text{п}}[N-n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=$$

$$=\pm\sum_{m=1}^{N}x_{\text{п}}[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-m)}=\pm\sum_{m=1}^{N}x_{\text{п}}[m]e^{j\frac{2\pi}{N}km}e^{-j2\pi k}=$$

$$=\pm\sum_{n=0}^{N-1}x_{\text{п}}[n]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}=\pm\left\{\sum_{n=0}^{N-1}x_{\text{п}}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right\}^{*}=\pm X_{\text{п}}^{*}(k). \tag{6.26}$$

Здесь учтено, что $x_{\text{п}}[N]=x_{\text{п}}[0]$ и $e^{-j\frac{2\pi}{N}kN}=e^{-j\frac{2\pi}{N}k0}=1$.

Из соотношения (6.26) следует, что при $x_{\text{п}}[n]=x_{\text{п}}[N-n]$ мнимая часть ДПФ равна нулю, поэтому симметричная последовательность $x_{\text{п}}[n]$ может быть только вещественной, а при $x_{\text{п}}[n]=-x_{\text{п}}[N-n]$ вещественная часть ДПФ равна нулю, поэтому антисимметричная последовательность $x_{\text{п}}[n]$ может быть только мнимой.

Рассмотрим вещественные периодические последовательности $x_{\text{п}}[n]$ и $y_{\text{п}}[n]$ с периодами N отсчётов и N-точечными ДПФ $X_{\text{п}}(k)$ и $Y_{\text{п}}(k)$ соответственно. Введём комплексную периодическую последовательность $z_{\text{п}}[n]$ вида

$$z_{\text{п}}[n]=x_{\text{п}}[n]+jy_{\text{п}}[n]. \tag{6.27}$$

Её ДПФ равно

$$Z_{\text{п}}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}z_{\text{п}}[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\left\{x_{\text{п}}[n]+jy_{\text{п}}[n]\right\}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=$$

$$=X_{\text{п}}(k)+jY_{\text{п}}(k). \tag{6.28}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases}\operatorname{Re}\{Z_{\text{п}}(k)\}=\operatorname{Re}\{X_{\text{п}}(k)\}-\operatorname{Im}\{Y_{\text{п}}(k)\};\\ \operatorname{Im}\{Z_{\text{п}}(k)\}=\operatorname{Im}\{X_{\text{п}}(k)\}+\operatorname{Re}\{Y_{\text{п}}(k)\}.\end{cases} \tag{6.29}$$

Вещественные части ДПФ $X_{\text{п}}(k)$ и $Y_{\text{п}}(k)$ симметричны, а мнимые — антисимметричны [см. (6.24)], поэтому их можно разделить, используя операции сложения и вычитания [6]:

$$\begin{cases}\operatorname{Re}\{X_{\text{п}}(k)\}=\dfrac{\operatorname{Re}\{Z_{\text{п}}(k)\}+\operatorname{Re}\{Z_{\text{п}}(N-k)\}}{2};\\ \operatorname{Re}\{Y_{\text{п}}(k)\}=\dfrac{\operatorname{Im}\{Z_{\text{п}}(k)\}+\operatorname{Im}\{Z_{\text{п}}(N-k)\}}{2};\\ \operatorname{Im}\{X_{\text{п}}(k)\}=\dfrac{\operatorname{Im}\{Z_{\text{п}}(k)\}-\operatorname{Im}\{Z_{\text{п}}(N-k)\}}{2};\\ \operatorname{Im}\{Y_{\text{п}}(k)\}=\dfrac{\operatorname{Re}\{Z_{\text{п}}(k)\}-\operatorname{Re}\{Z_{\text{п}}(N-k)\}}{2}.\end{cases} \tag{6.30}$$

Таким образом, вычисляя одно N-точечное ДПФ комплексной последовательности (6.27), удаётся преобразовать сразу две вещественные последовательности длиной по N отсчётов. Если эти последовательности являются ещё и симметричными, то число операций, необходимых для получения их ДПФ, можно сократить ещё больше [6].

6.3. Свёртки решётчатых функций

Для вычисления дискретных свёрток [см. (1.57), (1.59) и § 3.1] часто используют ДПФ. Рассмотрим эту методику.

◆ Круговая свёртка

Пусть даны две периодические решётчатые функции (последовательности) $x_{\text{п}}[n]$ и $h_{\text{п}}[n]$ с периодами по N отсчётов, ДПФ которых равны

$$X_{\text{п}}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_{\text{п}}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn};\quad H_{\text{п}}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}h_{\text{п}}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\quad k=\overline{0,\ N-1}. \tag{6.31}$$

Круговая (или периодическая) *свёртка* этих последовательностей определяется соотношением [6]

$$y_{\text{п}}[n]=\sum_{m=0}^{N-1}x_{\text{п}}[m]\,h_{\text{п}}[n-m]\quad\text{или}\quad y_{\text{п}}[n]=\sum_{m=0}^{N-1}h_{\text{п}}[m]\,x_{\text{п}}[n-m]. \tag{6.32}$$

Найдём её N-точечное ДПФ:

$$Y_{\text{п}}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\left\{\sum_{m=0}^{N-1}x_{\text{п}}[m]\,h_{\text{п}}[n-m]\right\}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_{\text{п}}[m]\underbrace{\left\{\sum_{n=0}^{N-1}h_{\text{п}}[n-m]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-m)}\right\}}_{H_{\text{п}}(k)}e^{-j\frac{2\pi}{N}km}=$$

$$=H_{\text{п}}(k)\underbrace{\left\{\sum_{m=0}^{N-1}x_{n}[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}\right\}}_{X_{\text{п}}(k)}=H_{\text{п}}(k)X_{\text{п}}(k),\quad k=\overline{0,\ N-1}. \tag{6.33}$$

Здесь учтено свойство сдвига периодических последовательностей (см. § 6.2).

Полученная формула справедлива и для финитных последовательностей, если рассматривать $x[n]$ и $h[n]$ как эквивалентные им периодические последовательности $x_{\text{п}}[n]$ и $h_{\text{п}}[n]$ с теми же ДПФ [6].

Вычисление круговой свёртки двух последовательностей с помощью ДПФ осуществляется по следующему алгоритму:

- вычисление ДПФ исходных последовательностей по формулам (6.31);
- перемножение коэффициентов полученных ДПФ согласно (6.33);
- вычисление последовательности $y_{\text{п}}[n]$ с помощью обратного ДПФ полученной последовательности $Y_{\text{п}}(k)$ $\left(k=\overline{0,\ N-1}\right)$ [см. (1.99)].

◆ **Линейная свёртка**

Пусть даны две финитные последовательности $x[n]$ $\left(n=\overline{0,\ N_1-1}\right)$ и $h[n]$ $\left(n=\overline{0,\ N_2-1}\right)$. *Линейная* (или апериодическая) *свёртка* этих последовательностей определяется соотношением [6]

$$y[n]=\sum_{m=0}^{n} x[m]\,h[n-m] \quad \text{или} \quad y[n]=\sum_{m=0}^{n} h[m]\,x[n-m], \tag{6.34}$$

где последовательности $x[m]$ и $h[n-m]$ равны нулю вне соответствующих интервалов. Ясно, что последовательность $y[n]$ является также конечной и имеет длину (N_1+N_2-1) отсчётов.

Сформируем последовательности $\hat{x}[n]$ и $\hat{h}[n]$ длиной по (N_1+N_2-1) отсчётов, дополняя последовательности $x[n]$ и $h[n]$ нулями:

$$\hat{x}[n]=\begin{cases} x[n], & n=\overline{0,\ N_1-1};\\ 0, & n=\overline{N_1,\ N_1+N_2-2}; \end{cases} \tag{6.35}$$

$$\hat{h}[n]=\begin{cases} h[n], & n=\overline{0,\ N_2-1};\\ 0, & n=\overline{N_2,\ N_1+N_2-2}. \end{cases} \tag{6.36}$$

Тогда линейная свёртка (6.34) последовательностей $x[n]$ и $h[n]$ будет равна (N_1+N_2-1)-точечной круговой свёртке последовательностей $\hat{x}[n]$ и $\hat{h}[n]$:

$$y[n]=\sum_{m=0}^{N_1+N_2-2} \hat{x}[m]\,\hat{h}[n-m] \quad \text{или} \quad y[n]=\sum_{m=0}^{N_1+N_2-2} \hat{h}[m]\,\hat{x}[n-m], \quad n=\overline{0,\ N_1+N_2-2}, \tag{6.37}$$

которая может быть вычислена с использованием (N_1+N_2-1)-точечного ДПФ [см. (6.32) и (6.33)].

Рассмотренный метод вычисления линейной свёртки двух финитных последовательностей с применением алгоритма ДПФ называется *быстрой свёрткой* в противоположность методу прямого вычисления свёртки по формуле (6.34). В алгоритме быстрой свёртки размер ДПФ не обязательно ограничивать (N_1+N_2-1) отсчётами. В этом случае ДПФ можно выполнять по любому числу отсчётов L, удовлетворяющему условию $L\geq(N_1+N_2-1)$. Если это условие выполняется, то в отличие от вышеописанной методики исходные последовательности $x[n]$ и $h[n]$ дополняются другим числом нулевых элементов, а эквивалентная периодическая последовательность $y_{\text{п}}[n]$ будет иметь в конце периода $(L-N_1-N_2+1)$ нулевых отсчётов. Эти отличия никак не искажают ре-

зультат вычисления. Возможность произвольного выбора L существенна, поскольку практические алгоритмы вычисления ДПФ при разных значениях L имеют неодинаковую эффективность [6]. Наибольшую эффективность имеют алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ) при длине последовательности $L = 2^{\nu}$, где ν — целое.

◆ **Секционированные свёртки**

Во многих задачах требуется вычислить линейную свёртку двух финитных последовательностей, когда одна из них гораздо длиннее другой ($N_1 >> N_2$ или $N_2 >> N_1$). Конечно, всегда можно выбрать $L = (N_1 + N_2 - 1)$ и воспользоваться описанным выше алгоритмом, но такой подход неэффективен и по ряду причин неудобен. Эти причины следующие: 1) перед вычислением свёртки необходимо иметь всю более длинную последовательность; 2) результат получается с большой задержкой; 3) при больших значениях $(N_1 + N_2 - 1)$ вычисление ДПФ усложняется.

От перечисленных недостатков свободны алгоритмы, основанные на разбиении длинной последовательности на короткие секции и вычислении частичных свёрток, из которых затем формируется искомая линейная свёртка. Существуют два метода секционирования свёртки: метод перекрытия с суммированием и метод перекрытия с накоплением [6].

Метод перекрытия с суммированием (рис.6.2). Пусть последовательность $h[n]$ содержит N_2 отсчётов, а более длинная (в общем случае неограниченная) последовательность $x[n]$ разбивается на смежные секции длиной по N_1 отсчётов, так что

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k[n], \tag{6.38}$$

где

$$x_k[n] = \begin{cases} x[n], & n = \overline{kN_1,\ (k+1)N_1 - 1}; \\ 0, & \text{при других значениях } n, \end{cases} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots . \tag{6.39}$$

Каждая k-я частичная линейная свёртка

$$y_k[n] = \sum_{m=0}^{n} h[m]\, x_k[n-m] = \sum_{m=0}^{N_1+N_2-2} \hat{h}[m]\, \hat{x}_k[n-m] \tag{6.40}$$

имеет $(N_1 + N_2 - 1)$ отсчётов • и перекрывается с $(k+1)$-й частичной свёрткой $y_{k+1}[n]$ на участке длиной $(N_2 - 1)$ отсчётов (рис.6.2), поэтому на участках перекрытия частичные линейные свёртки необходимо сложить. После вычисления

• Здесь дополненные нулевыми элементами последовательности $\hat{x}_k[n]$ и $\hat{h}[n]$ определяются в соответствии с выражениями (6.35) и (6.36).

всех частичных линейных свёрток и их суммирования на участках перекрытия получим искомую линейную свёртку

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty} y_k[n]. \tag{6.41}$$

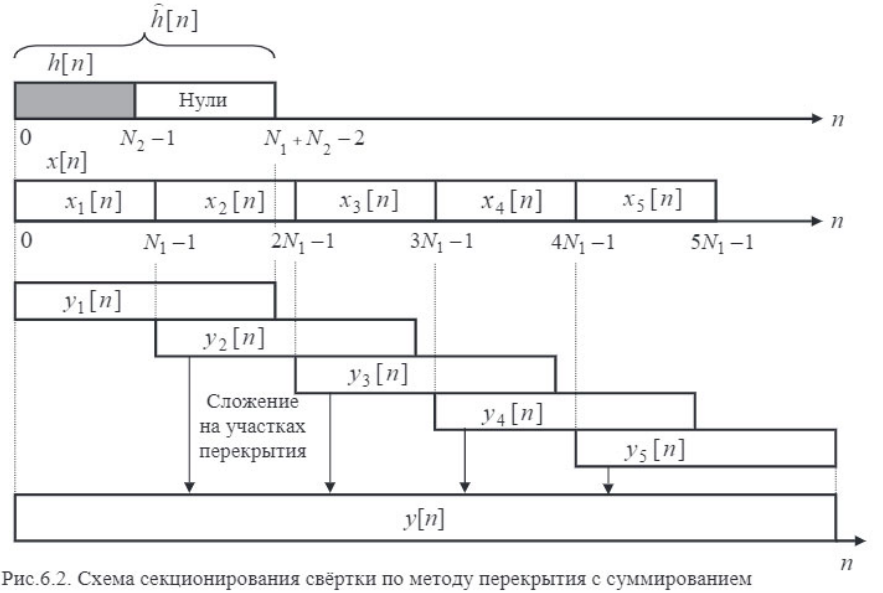


Рис.6.2. Схема секционирования свёртки по методу перекрытия с суммированием

Метод перекрытия с накоплением (рис.6.3). Последовательность $h[n]$ содержит N_2 отсчётов, а более длинная (в общем случае неограниченная) последовательность $x[n]$ разбивается на секции длиной (N_1+N_2-1) отсчётов:

$$x_k[n], \quad n=\overline{kN_1,\ (k+1)N_1+N_2-2}, \tag{6.42}$$

так что соседние секции перекрываются на участке длиной N_2-1 отсчётов. Последовательность $h[n]$ дополняется нулями согласно (6.36) до получения длины (N_1+N_2-1) отсчётов.

В каждой k-й частичной круговой свёртке

$$y_k[n]=\sum_{m=0}^{N_1+N_2-2} \hat{h}[m]\, x_k[n-m] \tag{6.43}$$

последние (N_2-1) отсчётов отбрасываются (они неверны из-за циклического характера круговой свёртки), а остальные отсчёты присоединяются к верным

отсчётам предыдущей, т.е. $(k-1)$-й секции. Проделав описанную процедуру для всех значений k, получим искомую свёртку.

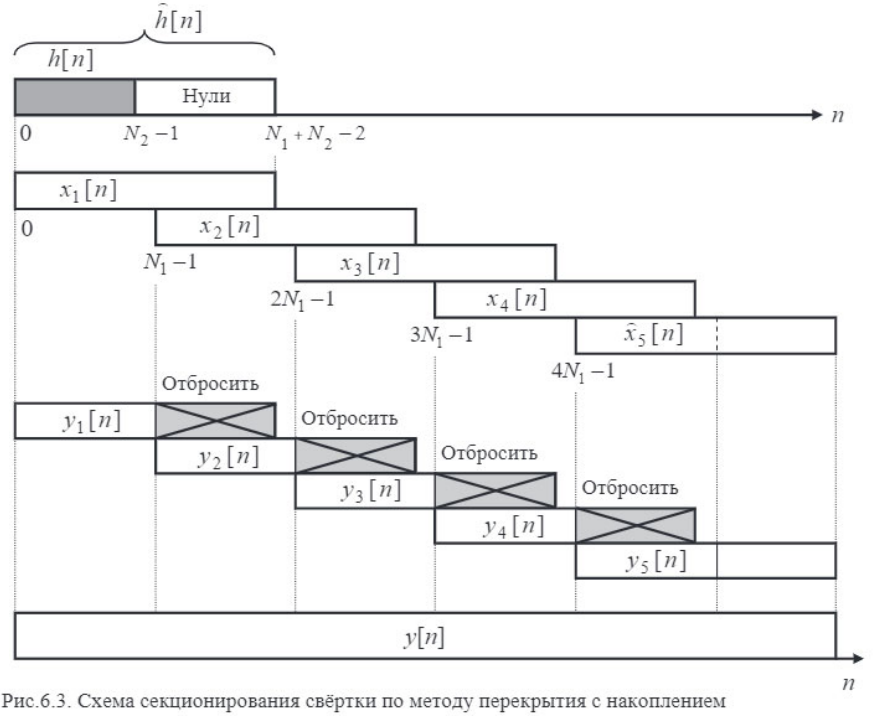


Рис.6.3. Схема секционирования свёртки по методу перекрытия с накоплением

Если в методе перекрытия с накоплением длинная входная последовательность $x[n]$ является конечной, то в последней секции, как показано на рис.6.3, последовательность $x_r[n]$ $\left(n=\overline{rN_1,\ (r+1)N_1-1}\right)$, где r — номер последней секции, дополняется нулевыми элементами согласно формуле (6.35) до получения последовательности $\hat{x}_r[n]$ $\left(n=\overline{rN_1,\ (r+1)N_1+N_2-2}\right)$. При этом в r-й частичной круговой свёртке

$$y_r[n]=\sum_{m=0}^{N_1+N_2-2}\hat{h}[m]\,\hat{x}_r[n-m] \tag{6.44}$$

последние (N_2-1) отсчётов являются верными, поэтому они не отбрасываются (рис.6.3).

Таким образом, используя метод перекрытия с суммированием или метод перекрытия с накоплением [6], можно находить свёртку короткой $h[n]$ и очень

длинной $x[n]$ последовательностей, причём результат получается в виде отдельных небольших секций, которые объединяются соответствующим образом в одну последовательность $y[n]$. При этом обработку можно начинать сразу же после получения первого блока входного сигнала $x[n]$ и первая группа элементов выходного сигнала $y[n]$ получается сразу же после обработки этого блока. Это значительно уменьшает задержку вычислений.

6.4. Обратное дискретное преобразование Фурье

Обратное ДПФ определяется формулой (1.99). Для его вычисления можно использовать алгоритмы прямого ДПФ. Действительно, применяя к обеим частям равенства (1.99) операцию комплексного сопряжения, получим

$$x^*[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\quad n=\overline{0,\ N-1}. \tag{6.45}$$

Правая часть формулы (6.45) представляет собой прямое ДПФ последовательности $X^*(k)\ \left(k=\overline{0,\ N-1}\right)$, являющейся комплексным сопряжением последовательности $X(k)\ \left(k=\overline{0,\ N-1}\right)$.

С учётом того, что двойное комплексное сопряжение даёт исходное комплексное число $\left(x^{**}=x\right)$, применив операцию комплексного сопряжения к обеим частям выражения (6.45), будем иметь

$$x[n]=x^{**}[n]=\frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right]^*,\quad n=\overline{0,\ N-1}. \tag{6.46}$$

Полученное выражение имеет важное значение, так как оно позволяет находить прямое и обратное ДПФ с помощью одной и той же вычислительной процедуры, например с помощью алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), о которых речь пойдёт далее.

Используя обозначение (1.100), перепишем формулу (6.46) в виде, принятом в теории БПФ [6]:

$$x[n]=x^{**}[n]=\frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)\,W_N^{kn}\right]^*,\quad n=\overline{0,\ N-1}. \tag{6.47}$$

6.5. Быстрое преобразование Фурье с прореживанием по времени

Нахождение спектра $X(k)$ дискретного комплексного сигнала $x[n]$ непосредственно по формуле ДПФ (1.98) требует N^2 комплексных умножений и $N(N-1)$ комплексных сложений (см. § 1.7). При больших N количество ариф-

метических операций весьма велико, поэтому нахождение спектра $X(k)$ в реальном времени даже для современной вычислительной техники представляет сложную задачу. Это стимулировало разработку эффективных вычислительных процедур для выполнения операции нахождения спектра более экономным способом. Такие процедуры получили название алгоритмов БПФ.

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) представляет собой не какой-либо новый вид преобразования Фурье, а лишь эффективную процедуру, позволяющую существенно сократить затраты на вычисление ДПФ (1.101). Наиболее простыми и широко используемыми являются алгоритмы БПФ с основанием 2, когда длина последовательности $x[n]\left(n=\overline{0,\ N-1}\right)$ равна $N=2^{\nu}$, где ν — целое число ($\nu=\log_2 N$). Идея, лежащая в основе БПФ и схематично показанная на рис.6.4, заключается в следующем [7]:

- исходная N-точечная последовательность $x[n]\ \left(n=\overline{0,\ N-1}\right)$ разбивается на две более короткие $(N/2)$-точечные последовательности $g[n]$ и $h[n]$, где $n=\overline{0,\ (N/2)-1}$;
- вычисляются ДПФ$_{N/2}$ $G(k)$ и $H(k)$ $\left(k=\overline{0,\ (N/2)-1}\right)$ этих последовательностей;
- из двух полученных ДПФ$_{N/2}$ $G(k)$ и $H(k)$ $\left(k=\overline{0,\ (N/2)-1}\right)$ конструируется ДПФ$_N$ $X(k)$ $\left(k=\overline{0,\ N-1}\right)$ исходной N-точечной последовательности $x[n]$, где $n=\overline{0,\ N-1}$.

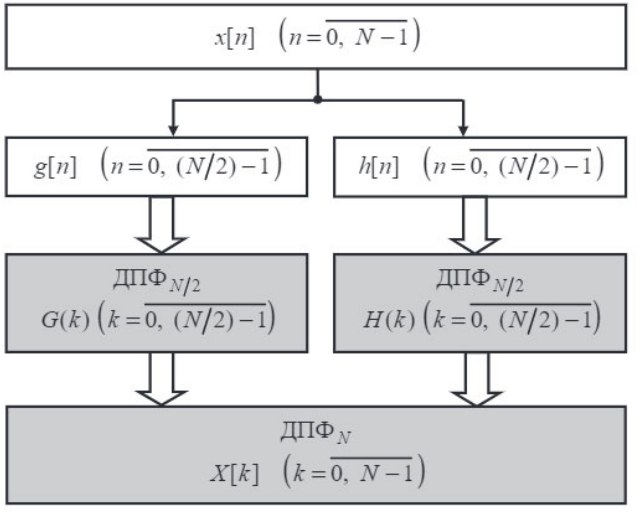


Рис.6.4. Разложение ДПФ$_N$ на два ДПФ$_{N/2}$

Для вычисления каждого из ДПФ$_{N/2}$ $G(k)$ и $H(k)$ $\left(k=\overline{0,\ (N/2)-1}\right)$ требуется выполнить $(N/2)^2 = N^2/4$ комплексных умножений и $(N/2)[(N/2)-1]$ комплексных сложений, что в совокупности в два раза меньше количества операций комплексного умножения и сложения, которое требуется для вычисления ДПФ$_N$ $X(k)$ $\left(k=\overline{0,\ N-1}\right)$ исходной последовательности $x[n]$ $\left(n=\overline{0,\ N-1}\right)$ непосредственно по формуле (1.98) или (1.101).

В алгоритме БПФ с прореживанием по времени $(N/2)$-точечные последовательности $g[n]$ $\left(n=\overline{0,\ (N/2)-1}\right)$ и $h[n]$ $\left(n=\overline{0,\ (N/2)-1}\right)$ формируются из отсчётов исходной N-точечной последовательности $x[n]$ $\left(n=\overline{0,\ N-1}\right)$ с чётными и нечётными номерами соответственно (рис.6.5).

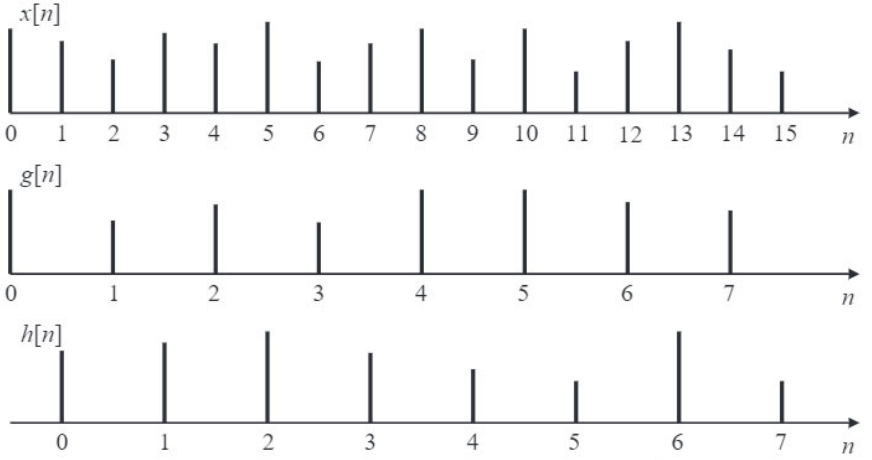


Рис.6.5. Способ разбиения N-точечной последовательности на две $(N/2)$-точечные последовательности в алгоритме БПФ с прореживанием по времени

Используя приведённый на рис.6.5 способ разбиения последовательности $x[n]$ $\left(n=\overline{0,\ N-1}\right)$, согласно (1.101) запишем выражение для ДПФ$_N$:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}=\sum_{n\ \text{чётное}} x[n]W_N^{kn}+\sum_{n\ \text{нечётное}} x[n]W_N^{kn}. \qquad (6.48)$$

Заменяя индексы суммирования $n=2r$ при чётных n и $n=2r+1$ при нечётных n, будем иметь

$$X(k)=\sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]W_N^{2rk}+\sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k}=$$

$$= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]\left(W_N^2\right)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]\left(W_N^2\right)^{rk}. \qquad (6.49)$$

У поворачивающих множителей W_N^m верхний и нижний индексы можно умножить или разделить на одно и то же число •:

$$W_N^m = W_{Ns}^{ms}. \qquad (6.50)$$

С учётом равенства (6.50) и способа разбиения N-точечной последовательности на две $(N/2)$-точечные (см. рис.6.5) перепишем выражение (6.49) в виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n]\left(W_{N/2}\right)^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} h[n]\left(W_{N/2}\right)^{nk}. \qquad (6.51)$$

Суммы в (6.51) представляют собой $(N/2)$-точечные ДПФ, т.е. ДПФ$_{N/2}$:

$$\begin{cases} G(k) = \sum\limits_{n=0}^{(N/2)-1} g[n]\left(W_{N/2}\right)^{nk}, \quad k = \overline{0,\ (N/2)-1}; \\ H(k) = \sum\limits_{n=0}^{(N/2)-1} h[n]\left(W_{N/2}\right)^{nk}, \quad k = \overline{0,\ (N/2)-1}, \end{cases} \qquad (6.52)$$

поэтому

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k). \qquad (6.53)$$

Поскольку ДПФ$_N$ $X(k)$ определено при $k = \overline{0,\ N-1}$, а ДПФ$_{N/2}$ $G(k)$ и $H(k)$ определены лишь при $k = \overline{0,\ (N/2)-1}$, формулу (6.53) необходимо доопределить для $k = \overline{(N/2),\ N-1}$.

Учитывая, что ДПФ$_{N/2}$ имеет периодический характер с периодом $N/2$ отсчётов:

$$G(k) = G\left(k + \frac{N}{2}\right); \quad H(k) = H\left(k + \frac{N}{2}\right), \qquad (6.54)$$

запишем выражение (6.53) в виде

$$X(k) = \begin{cases} G(k) + W_N^k H(k), & k = \overline{0,\ (N/2)-1}; \\ G\left(k - \frac{N}{2}\right) + W_N^k H\left(k - \frac{N}{2}\right), & k = \overline{(N/2),\ N-1}. \end{cases} \qquad (6.55)$$

• Действительно, согласно (1.100) получаем $W_N^m = e^{-j\frac{2\pi}{N}m} = e^{-j\frac{2\pi}{Ns}ms} = W_{Ns}^{ms}$, что доказывает утверждение (6.50).

Учтём также, что $W_N^{k+N/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{N}{2}\right)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k} e^{-j\pi} = -W_N^k$. Тогда (6.55) можно переписать в виде

$$X(k) = \begin{cases} G(k) + W_N^k H(k), & k = \overline{0,\ (N/2)-1}; \\ G\left(k-\frac{N}{2}\right) - W_N^{k-\frac{N}{2}} H\left(k-\frac{N}{2}\right), & k = \overline{(N/2),\ N-1}. \end{cases} \tag{6.56}$$

Алгоритм (6.56) удобно представлять в виде направленного графа, что позволяет формализовать вычисления. На рис.6.6 изображён граф базовой операции БПФ с прореживанием по времени, называемой «бабочкой». Базовая операция «бабочка» ставит в соответствие двум входным (в общем случае комплексным) числам A и B два выходных числа X и Y по следующему правилу:

$$\begin{cases} X = A + W_N^k B; \\ Y = A - W_N^k B. \end{cases} \tag{6.57}$$

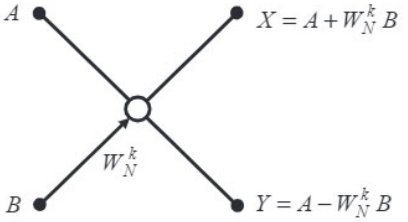


Рис.6.6. Базовая операция «бабочка» алгоритма БПФ с прореживанием по времени

Белый кружок в центре «бабочки» обозначает операцию сложения/вычитания, а стрелка — операцию умножения на поворачивающий множитель W_N^k, верхний выход соответствует сумме, а нижний — разности. Правило (6.57) отвечает алгоритму (6.56) объединения двух ДПФ$_{N/2}$ в одно ДПФ$_N$, при этом используется $N/2$ «бабочек». Поскольку для каждой базовой операции необходимо выполнить одно комплексное умножение и два комплексных сложения, объединение двух ДПФ$_{N/2}$ в одно ДПФ$_N$ требует $N/2$ комплексных умножений[•] и N комплексных сложений[••].

При длине последовательности $x[n]$, равной $N = 2^\nu$, число $N/2$ является чётным, поэтому каждая из двух $(N/2)$-точечных последовательностей $g[n]$ и $h[n]$ в свою очередь может быть разбита на две $(N/4)$-точечные последователь-

---

[•] Включая тривиальное умножение на $W_N^0 = 1$.

[••] Операции сложения/вычитания рассматриваются как единая операция сложения.

ности, одна из которых состоит из чётных, а вторая — из нечётных номеров отсчётов исходной $(N/2)$-точечной последовательности подобно тому, как это сделано на рис.6.4 для последовательности $x[n]$. После вычисления ДПФ$_{N/4}$ полученных $(N/4)$-точечных последовательностей каждое из ДПФ$_{N/2}$ $G(k)$ и $H(k)$ можно получить объединением двух соответствующих ДПФ$_{N/4}$ по правилу (6.56). На этом этапе используется $(N/4)+(N/4)=N/2$ «бабочек».

Поскольку $N/4$ также является чётным числом, процедура разбиения может быть продолжена: каждое ДПФ$_{N/4}$ в свою очередь можно представить через два ДПФ$_{N/8}$ и так далее до тех пор, пока не получатся $N/2$ ДПФ$_2$ (двухточечных ДПФ). ДПФ$_2$ может быть вычислено без использования операций умножения. Действительно, для двухточечной последовательности $f[n]$ $\left(n=\overline{1,\ 2}\right)$ согласно определению ДПФ (1.101) имеем (рис.6.7)

$$\begin{cases} F(0)=f[0]\cdot W_2^0+f[1]\cdot W_2^0=f[0]+f[1]; \\ F(1)=f[0]\cdot W_2^0+f[1]\cdot W_2^1=f[0]-f[1]. \end{cases} \tag{6.58}$$

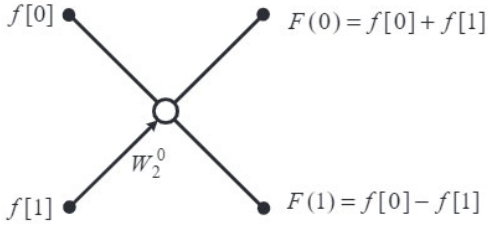


Рис.6.7. Базовая операция «бабочка» ДПФ$_2$ алгоритма БПФ с прореживанием по времени

При $N=2^\nu$ процедура объединения $N/2$ ДПФ$_2$ в $N/4$ ДПФ$_4$, затем $N/4$ ДПФ$_4$ в $N/8$ ДПФ$_8$ и так далее до получения одного ДПФ$_N$ будет состоять из $\nu=\log_2 N$ этапов, на каждом из которых используется $N/2$ «бабочек». Следовательно, при применении алгоритма БПФ с прореживанием по времени для вычисления ДПФ$_N$ нужно выполнить $(N/2)\nu=(N/2)\log_2 N$ операций комплексного умножения и $N\nu=N\log_2 N$ операций комплексного сложения. При вычислении же ДПФ$_N$ прямым способом, т.е. непосредственно по формуле (1.101), требуется N^2 операций комплексного умножения и $N(N-1)$ операций комплексного сложения.

Оценим выигрыш в вычислительных затратах, получаемый при применении алгоритма БПФ с прореживанием по времени для нахождения ДПФ$_N$ при длине последовательности $N=2^\nu$, по сравнению с вычислением ДПФ$_N$ по

формуле (1.101). Этот выигрыш принято оценивать коэффициентами ускорения вычислений для операций комплексного умножения и комплексного сложения

$$\begin{cases} K_{\text{ув}_{\text{умн}}} = \dfrac{N^2}{(N/2)\log_2 N} = \dfrac{2N}{\log_2 N}; \\ K_{\text{ув}_{\text{сл}}} = \dfrac{N(N-1)}{N\log_2 N} = \dfrac{N-1}{\log_2 N}. \end{cases} \tag{6.59}$$

В табл.6.1 для некоторых значений $N = 2^{\nu}$ приведены коэффициенты ускорения вычислений при использовании алгоритма БПФ с прореживанием по времени. Здесь N^2 — требуемое число комплексных умножений для вычисления ДПФ$_N$ по формуле (1.101); $(N/2)\log_2 N$ — число комплексных умножений в алгоритме БПФ; $K_{\text{ув}_{\text{умн}}}$ — коэффициент ускорения вычислений по операциям умножения; $N(N-1)$ — требуемое число комплексных сложений для вычисления ДПФ$_N$ по формуле (1.101); $N\log_2 N$ — число комплексных сложений в алгоритме БПФ; $K_{\text{ув}_{\text{сл}}}$ — коэффициент ускорения вычислений по операциям комплексного сложения.

Таблица 6.1

$N = 2^{\nu}$	N^2	$\frac{N}{2}\log_2 N$	$K_{\text{ув}_{\text{умн}}}$	$N(N-1)$	$N\log_2 N$	$K_{\text{ув}_{\text{сл}}}$
2	4	1	4,0	2	2	1,0
4	16	4	4,0	12	8	1,5
8	64	12	5,333	56	24	2,333
16	256	32	8,0	240	64	3,75
32	1024	80	12,80	992	160	6,20
64	4096	192	21,333	4032	384	10,500
128	16384	448	36,571	16256	896	18,143
256	65536	1024	64,00	65280	2048	31,875
512	262144	2304	113,778	261632	4608	56,778
1024	1048576	5120	204,800	1047552	10240	102,300
2048	4194304	11260	372,364	4192256	22530	186,091
4096	16777216	24580	682,667	16773120	49150	341,250

Из таблицы видно, что выигрыш в вычислительных затратах при использовании алгоритма БПФ тем больше, чем длиннее обрабатываемая последовательность.

На рис.6.8 в качестве примера применения рассмотренного метода вычисления ДПФ изображён направленный граф 8-точечного БПФ с прореживанием по времени $(N = 2^3 = 8)$. Здесь учтены соотношения $W_2^k = W_8^{4k}$ и $W_4^k = W_8^{2k}$ для

поворачивающих множителей, вытекающие из (6.50). В памяти вычислителя при этом необходимо хранить только $N/2$ поворачивающих множителей W_N^k, где $k = \overline{0,\ (N/2)-1}$.

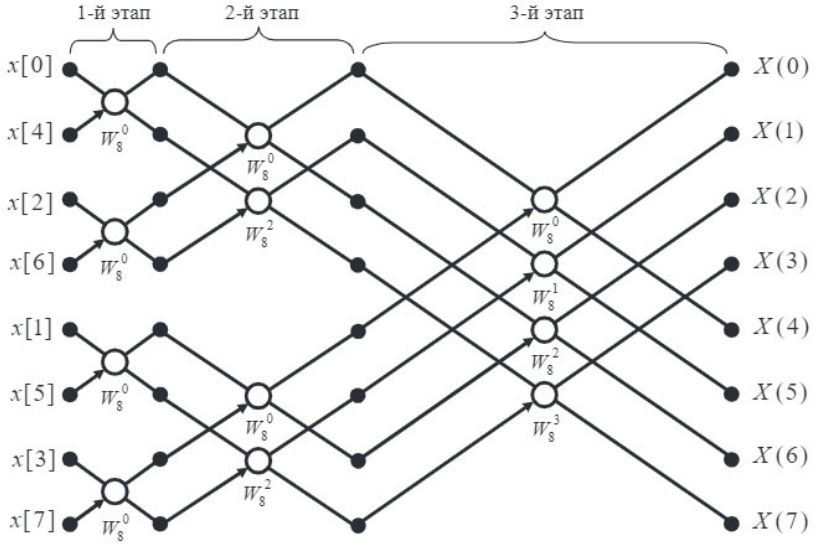


Рис.6.8. Направленный граф 8-точечного БПФ с прореживанием по времени

Структура базовых операций БПФ с прореживанием по времени такова, что для вычисления БПФ N-точечной последовательности, размещённой в памяти ЭВМ, достаточно иметь лишь одну дополнительную ячейку памяти для запоминания комплексного числа. Результаты вычислений на всех промежуточных этапах БПФ можно размещать в тех же ячейках памяти, где находились исходные данные, поэтому для хранения и входной, и выходной последовательностей можно использовать один и тот же массив ячеек памяти. Алгоритм БПФ, в котором для входной и выходной последовательностей используются одни и те же ячейки памяти, называется алгоритмом с замещением [6].

Как видно из рис.6.8, после выполнения операций на всех этапах алгоритма БПФ с прореживанием по времени отсчёты выходной последовательности $X(k)\ \left(k = \overline{0,\ N-1}\right)$ располагаются в естественном порядке, а отсчёты входной последовательности $x[n]\ \left(n = \overline{0,\ N-1}\right)$ за счёт многократного разбиения на подпоследовательности отсчётов с чётными и нечётными номерами оказываются перемешанными. Порядок следования отсчётов входной последовательности $x[n]\ \left(n = \overline{0,\ N-1}\right)$ можно определить с помощью формальной процедуры, за-

ключающейся в образовании двоично-инверсного кода (чтения справа налево) позиций двоичного кода номеров отсчётов $n=\overline{0,\ N-1}$ последовательности $x[n]$. В табл.6.2 приведён пример формальной сортировки отсчётов входной последовательности $x[n]$, где $n=\overline{0,\ N-1}$, для 8-точечного БПФ с прореживанием по времени.

Таблица 6.2

Номер отсчёта n	Двоичный код отсчёта n	Двоично-инверсный код отсчёта n	Двоично-инверсный номер отсчёта $x[n]$ на входе алгоритма БПФ с прореживанием по времени
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Сравнивая позиции отсчётов $x[n]\left(n=\overline{0,\ 7}\right)$ на рис.6.8, полученные трёхэтапным разбиением исходной последовательности на подпоследовательности отсчётов с чётными и нечётными номерами, с результатами формальной сортировки, приведёнными в табл.6.2, убеждаемся в их полном совпадении.

6.6. Быстрое преобразование Фурье с прореживанием по частоте

В алгоритме БПФ с прореживанием по частоте $(N/2)$-точечная последовательность $g[n]\left(n=\overline{0,\ (N/2)-1}\right)$ формируется из первой, а $(N/2)$-точечная последовательность $h[n]\left(n=\overline{0,\ (N/2)-1}\right)$ — из второй половины отсчётов исходной N-точечной последовательности $x[n]\left(n=\overline{0,\ N-1}\right)$. На рис.6.9 показан способ получения этих последовательностей: $g[n]=x[n]$ и $h[n]=x[(N/2)+n]$ при $n=\overline{0,\ (N/2)-1}$.

Используя приведённый на рис.6.9 способ разбиения последовательности $x[n]\left(n=\overline{0,\ N-1}\right)$, согласно (1.101) запишем выражение для ДПФ$_N$:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x[n]W_N^{kn}+\sum_{n=N/2}^{N-1}x[n]W_N^{kn}=$$

$$=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x[n]W_N^{kn}+W_N^{k(N/2)}\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x[n+N/2]W_N^{kn}. \qquad (6.60)$$

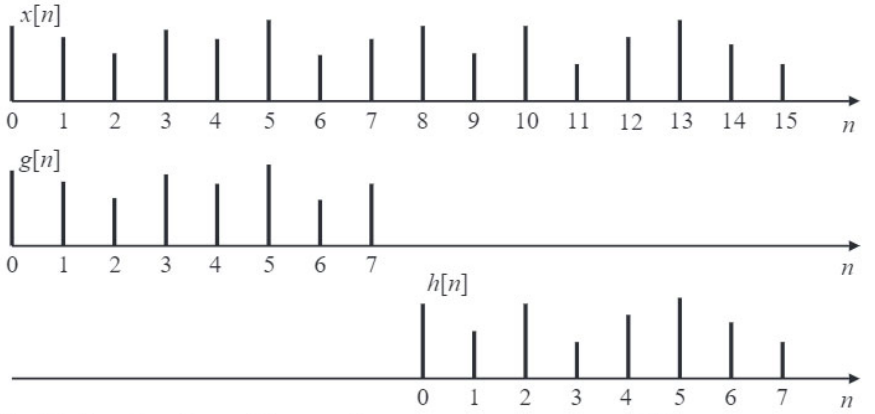


Рис.6.9. Способ разбиения N-точечной последовательности на две $(N/2)$-точечные последовательности в алгоритме БПФ с прореживанием по частоте

Выражение (6.60) состоит из двух сумм, содержащих по $N/2$ слагаемых, но каждая из них не является ДПФ$_{N/2}$, так как содержит в качестве поворачивающих множителей W_N^{kn}, а не $W_{N/2}^{kn}$.

Объединяя в (6.60) обе суммы и используя соотношение

$$W_N^{(N/2)k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}k} = \left(e^{-j\pi}\right)^k = (-1)^k, \qquad (6.61)$$

получим

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{x[n] + (-1)^k x[n+N/2]\right\} W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{g[n] + (-1)^k h[n]\right\} W_N^{kn}. \qquad (6.62)$$

Отсчёты последовательности $X(k)$ при чётных и нечётных значениях k рассмотрим отдельно. При $k = 2r$

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{g[n] + h[n]\right\} W_N^{2rn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{g[n] + h[n]\right\} W_{N/2}^{rn}, \quad r = \overline{0,\ (N/2)-1}, \qquad (6.63)$$

а при $k = 2r+1$

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{g[n] - h[n]\right\} W_N^n W_N^{2rn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\langle \left\{g[n] - h[n]\right\} W_N^n \right\rangle W_{N/2}^{rn}, \quad r = \overline{0,\ (N/2)-1}. \qquad (6.64)$$

В соотношениях (6.63) и (6.64) учтено, что $W_N^{2rn} = W_{N/2}^{rn}$ [см. (6.50)]. Формула (6.63) описывает ДПФ$_{N/2}$ от суммы первой $g[n]$ и второй $h[n]$ половин последовательности $x[n]$, а формула (6.64) — ДПФ$_{N/2}$ от произведения W_N^n на разность первой $g[n]$ и второй $h[n]$ половин этой последовательности.

Таким образом, в алгоритме БПФ с прореживанием по частоте отсчёты ДПФ$_N$ с чётными и нечётными номерами получаются из ДПФ$_{N/2}$ последовательностей $p[n]$ и $s[n]$, равных

$$\begin{cases} p[n] = g[n] + h[n], & n = \overline{0,\ (N/2)-1}; \\ s[n] = \{ g[n] - h[n] \} W_N^n, & n = \overline{0,\ (N/2)-1}. \end{cases} \tag{6.65}$$

Рассмотренный алгоритм вычисления ДПФ$_N$ соответствует рис.6.4 при замене $(N/2)$-точечных последовательностей $g[n]$ и $h[n]$ на $p[n]$ и $s[n]$, а также $G(k)$ и $H(k)$ на $P(k)$ и $S(k)$.

Базовая операция «бабочка» в алгоритме БПФ с прореживанием по частоте (рис.6.10) строится на основании выражений (6.63) и (6.64) и ставит в соответствие двум входным (в общем случае комплексным) числам A и B два выходных числа X и Y по следующему правилу:

$$\begin{cases} X = A + B; \\ Y = (A - B) W_N^n. \end{cases} \tag{6.66}$$

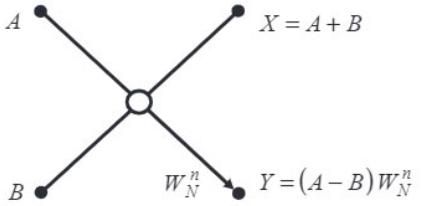


Рис.6.10. Базовая операция «бабочка» алгоритма БПФ с прореживанием по частоте

Отличие «бабочки» алгоритма БПФ с прореживанием по частоте (рис.6.10) от «бабочки» алгоритма БПФ с прореживанием по времени (см. рис.6.6) состоит в том, что умножение на поворачивающий множитель W_N^n здесь осуществляется не на входе, а на выходе после операции вычитания. Для каждой базовой операции необходимо выполнить одно комплексное умножение и два комплексных сложения, при этом объединение двух ДПФ$_{N/2}$ в одно ДПФ$_N$ требует $N/2$ комплексных умножений и N комплексных сложений•.

• См. сноски на с.136.

При $N=2^{\nu}$ число $N/2$ является чётным, поэтому каждую из $(N/2)$-точечных последовательностей $p[n]$ и $s(n)$ $\left(n=\overline{0,\ (N/2)-1}\right)$ можно разбить на две $(N/4)$-точечные последовательности и описанный подход применить повторно, затем каждую из $(N/4)$-точечных последовательностей в свою очередь разбить на две $(N/8)$-точечные последовательности и так далее до тех пор, пока не окажется $N/2$ двухточечных последовательностей, ДПФ которых вычисляется без операции умножения [см. (6.58) и рис.6.7].

На рис.6.11 в качестве примера применения рассмотренного метода вычисления ДПФ изображён направленный граф 8-точечного БПФ с прореживанием по частоте ($N=2^3=8$). Здесь учтены соотношения $W_2^k=W_8^{4k}$ и $W_4^k=W_8^{2k}$ для поворачивающих множителей, вытекающие из (6.50). В памяти вычислителя при этом необходимо хранить только $N/2$ поворачивающих множителей W_N^k, где $k=\overline{0,\ (N/2)-1}$.

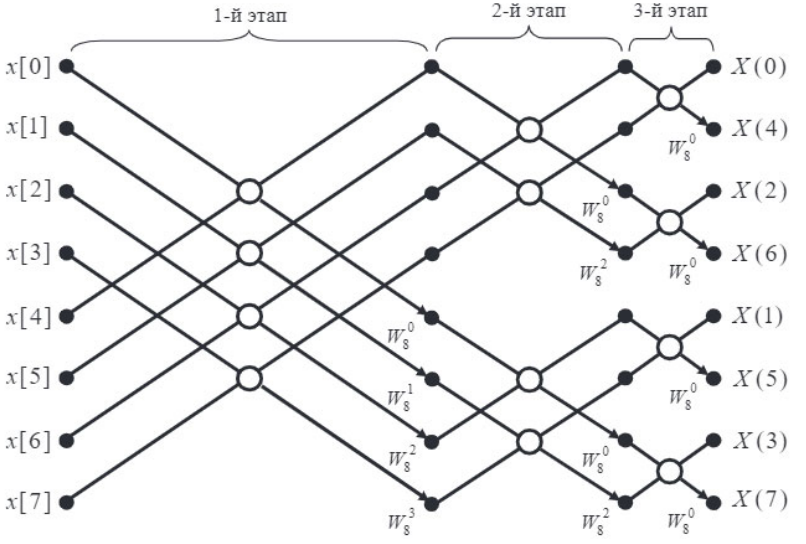


Рис.6.11. Направленный граф 8-точечного БПФ с прореживанием по частоте

Сравнение алгоритмов БПФ с прореживанием по времени и с прореживанием по частоте, представленных графами на рис.6.8 и 6.11 соответственно, позволяет выявить два очевидных различия между ними. Во-первых, при прореживании по времени порядок следования отсчётов входной последовательности $x[n]$ двоично-инверсный, а выходной последовательности $X(k)$ прямой, а при прореживании по частоте наоборот: порядок следования отсчётов входной

последовательности $x[n]$ прямой, а выходной последовательности $X(k)$ двоично-инверсный. Во-вторых, в другом порядке выполняется базовая операция «бабочка» [ср. рис.6.6 и 6.10, а также формулы (6.57) и (6.66)]: при прореживании по времени умножение на поворачивающий множитель осуществляется до операций сложения/вычитания, а при прореживании по частоте — после операции вычитания. Из сравнения рис.6.8 и 6.11 видно, что направленные графы алгоритмов БПФ с прореживанием по времени и с прореживанием по частоте зеркально симметричны относительно друг друга.

Отметим сходство между алгоритмами БПФ с прореживанием по времени и с прореживанием по частоте •. В обоих случаях для выполнения $БПФ_N$ требуется $(N/2)\log_2 N$ комплексных умножений и $N\log_2 N$ комплексных сложений. Вычисления могут быть проведены с замещением, т.е. с использованием динамического распределения оперативной памяти вычислителя. Должно быть предусмотрено выполнение двоичной инверсии номеров отсчётов (см. табл.6.2) для входной последовательности $x[n]$ в алгоритме БПФ с прореживанием по времени и для выходной последовательности $X(k)$ в алгоритме БПФ с прореживанием по частоте (см. рис.6.8 и 6.11). Коэффициенты ускорения вычислений в обоих случаях одинаковы и определяются выражениями (6.59).

6.7. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье для $N \neq 2^{\nu}$

Существует много различных алгоритмов БПФ при длине последовательности $N \neq 2^{\nu}$, однако оказывается, что все они могут быть получены с помощью последовательного применения единственной операции, а именно представления одномерного массива чисел двумерным [6].

При вычислении $ДПФ_N$ целое число N может быть либо простым, либо составным (в § 6.5 и 6.6 считалось, что N равно степени двойки $N = 2^{\nu}$). Если N является простым числом, то его нельзя разложить на произведение меньших чисел. В этом случае одномерный сигнал $x[n]$ $\left(n = \overline{0,\ N-1}\right)$ невозможно представить в виде двумерного массива, поэтому для такого сигнала не существует алгоритма БПФ и вычисление спектра следует проводить по формуле дискретного преобразования Фурье (1.101).

В большинстве практических задач допустимо искусственное удлинение обрабатываемой последовательности $x[n]$ путём добавления нулевых отсчётов таким образом, чтобы её длина стала равной $N = 2^{\nu}$ отсчётов. Это приводит к тому, что результирующий спектр представляет собой некоторую аппроксимацию спектра неудлинённой последовательности. Корректность такого приёма обоснована в § 6.2 [см. (6.11) — (6.16)].

• Напомним, что оба алгоритма БПФ разработаны для последовательностей $x[n]$, длина которых $N = 2^{\nu}$, где ν — целое число.

Пусть $N = N_1 N_2$, где N_1 и N_2 — любые натуральные числа. Представим одномерную последовательность $x[n]\ \left(n = \overline{0,\ N-1}\right)$ двумерным массивом:

$$x[n_2, n_1] = \begin{pmatrix} x[0,0] & x[0,1] & \dots & x[0, N_1-1] \\ x[1,0] & x[1,1] & \dots & x[1, N_1-1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x[N_2-1,0] & x[N_2-1,1] & \dots & x[N_2-1, N_1-1] \end{pmatrix}, \qquad (6.67)$$

где

$$x[n_2, n_1] = x[n_1 + n_2 N_1], \quad n_1 = \overline{0,\ N_1-1},\ \ n_2 = \overline{0,\ N_2-1}. \qquad (6.68)$$

Здесь n_2 — номер строки; n_1 — номер столбца, нумерация которых начинается с нуля.

В соответствии с (6.68) элементы одномерного массива $x[n]\ \left(n = \overline{0,\ N-1}\right)$ располагаются в матрице (6.67) следующим образом:

$$x[n_2, n_1] = \begin{pmatrix} x[0] & x[1] & \dots & x[N_1-1] \\ x[N_1] & x[N_1+1] & \dots & x[2N_1-1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x[(N_2-1)N_1] & x[(N_2-1)N_1+1] & \dots & x[(N_2-1)N_1+(N_1-1)] \end{pmatrix}.$$

В этом случае путём сканирования по строкам и столбцам вычисление ДПФ_N можно свести к определению N_1 ДПФ_{N_2} и N_2 ДПФ_{N_1}, а также к N умножениям на поворачивающие множители W_N^l. В формуле прямого ДПФ_N (1.101) сделаем замену временного n и частотного k индексов:

$$n = n_1 + n_2 N_1, \quad k = k_1 + k_2 N_2, \qquad (6.69)$$

где $n,\ k = \overline{0,\ N-1}$; $n_1,\ k_2 = \overline{0,\ N_1-1}$; $n_2,\ k_1 = \overline{0,\ N_2-1}$.

В результате подстановки (6.69) в поворачивающие множители получим

$$W_N^{kn} = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right) = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N_1 N_2}(k_1 + k_2 N_2)(n_1 + n_2 N_1)\right] =$$

$$= \exp\left[-j\frac{2\pi}{N_1 N_2}(k_1 n_1 + k_1 n_2 N_1 + k_2 n_1 N_2 + k_2 n_2 N_1 N_2)\right] =$$

$$= e^{-j\frac{2\pi}{N_1 N_2}k_1 n_1}\, e^{-j\frac{2\pi}{N_2}k_1 n_2}\, e^{-j\frac{2\pi}{N_1}k_2 n_1}\, e^{-j2\pi k_2 n_2} = W_N^{k_1 n_1}\, W_{N_2}^{k_1 n_2}\, W_{N_1}^{k_2 n_1}. \qquad (6.70)$$

С учётом (6.69) и (6.70) будем иметь

$$X(k) = X(k_1 + k_2 N_2) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{kn} =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \left\{ \left(\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[n_1 + n_2 N_1]\, W_{N_2}^{k_1 n_2} \right) W_N^{k_1 n_1} \right\} W_{N_1}^{k_2 n_1}, \quad k_1 = \overline{0,\ N_2 - 1},\ k_2 = \overline{0,\ N_1 - 1}. \tag{6.71}$$

Выражение (6.71) описывает *алгоритм БПФ с множителями поворота.*

Процедуру вычисления ДПФ$_N$ $X(k)$ $\left(k = \overline{0,\ N-1}\right)$ по формуле (6.71) можно выполнить за три шага:

- вычисление ДПФ$_{N_2}$ всех столбцов двумерного массива (6.67) с ядром преобразования $W_{N_2}^{k_1}$, в результате чего получается двумерный массив $q(n_1,\ k_1)$, зависящий от временного $n_1 = \overline{0,\ N_1 - 1}$ и от частотного $k_1 = \overline{0,\ N_2 - 1}$ индексов:

$$q(n_1,\ k_1) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[n_1 + n_2 N_1]\, W_{N_2}^{k_1 n_2}, \quad n_1 = \overline{0,\ N_1 - 1}, \quad k_1 = \overline{0,\ N_2 - 1}; \tag{6.72}$$

- формирование нового массива $d(n_1,\ k_1)$ умножением каждого элемента массива $q(n_1,\ k_1)$ $\left(n_1 = \overline{0,\ N_1 - 1}, k_1 = \overline{0,\ N_2 - 1}\right)$ на множитель поворота $W_N^{k_1 n_1}$:

$$d(n_1, k_1) = q(n_1, k_1)\, W_N^{k_1 n_1}, \quad n_1 = \overline{0,\ N_1 - 1}, \quad k_1 = \overline{0,\ N_2 - 1}; \tag{6.73}$$

- вычисление ДПФ$_{N_1}$ всех строк двумерного массива $d(n_1,\ k_1)$ с ядром преобразования $W_{N_1}^{k_2}$.

Изменением порядка суммирования в формуле (6.71) получим другой *алгоритм БПФ с множителями поворота*:

$$X(k) = X(k_1 + k_2 N_2) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{kn} =$$

$$= \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ \left(\sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[n_1 + n_2 N_1]\, W_N^{k_1 n_1} \right) W_{N_1}^{k_2 n_1} \right\} W_{N_2}^{k_1 n_2}, \quad k_1 = \overline{0,\ N_2 - 1},\ k_2 = \overline{0,\ N_1 - 1}, \tag{6.74}$$

так что порядок вычисления спектра $X(k)$ становится следующим [6]:

- умножение элементов двумерного массива (6.67) на поворачивающие множители $W_N^{k_1 n_1}$;
- вычисление ДПФ$_{N_1}$ всех строк полученного двумерного массива с ядром преобразования $W_{N_1}^{k_2}$, в результате чего будет сформирован двумерный массив, являющийся функцией временного индекса $n_2 = \overline{0,\ N_2 - 1}$ и комбинации частотных индексов $k_1 = \overline{0,\ N_2 - 1}$ и $k_2 = \overline{0,\ N_1 - 1}$;

♦ вычисление ДПФ_{N_2} всех столбцов полученного двумерного массива с ядром преобразования $W_{N_2}^{k_1}$.

В целом методика вычисления БПФ по алгоритму (6.74) идентична методике вычисления БПФ по алгоритму (6.71), но отдельные операции выполняются в другом порядке: умножения на поворачивающие множители $W_N^{k_1 n_1}$ здесь предшествуют вычислению ДПФ строк (сканирование по строкам), тогда как раньше они выполнялись после вычисления ДПФ всех столбцов (сканирование по столбцам). Эти отличия не только напоминают, но и действительно связаны с рассмотренным выше различием между БПФ с основанием 2 при прореживании по времени и по частоте [6].

Оценим число операций, требуемое для вычисления спектра дискретного сигнала при использовании алгоритма БПФ с множителями поворота в случае, когда $N = N_1 N_2$, а N_1 и N_2 — простые числа. Как следует из изложенного, процедура вычисления ДПФ_N при этом сводится к выполнению N_1 ДПФ_{N_2}, N_2 ДПФ_{N_1} и $N = N_1 N_2$ комплексных умножений на множители поворота W_N^l. Общее число операций комплексного умножения, включая тривиальное умножение на $W_N^0 = 1$, при таком подходе составляет

$$K_{\text{умн}} = N_1 N_2^2 + N_2 N_1^2 + N_1 N_2 = N(N_1 + N_2 + 1), \tag{6.75}$$

а операций комплексного сложения

$$K_{\text{сл}} = N_1 N_2 (N_2 - 1) + N_2 N_1 (N_1 - 1) = N(N_1 + N_2 - 2). \tag{6.76}$$

Поскольку $N(N_1 + N_2 + 1) < N^2$ и $N(N_1 + N_2 - 2) < N(N-1)$, то число операций, требуемое для вычисления спектра при использовании алгоритма БПФ с множителями поворота, меньше, чем при непосредственном вычислении ДПФ_N, особенно при больших значениях N. Коэффициенты ускорения вычислений для операций комплексного умножения и комплексного сложения в этом случае равны

$$\begin{cases} K_{\text{ув}_{\text{умн}}} = \dfrac{N^2}{N(N_1 + N_2 + 1)} = \dfrac{N}{N_1 + N_2 + 1}; \\ K_{\text{ув}_{\text{сл}}} = \dfrac{N(N-1)}{N(N_1 + N_2 - 2)} = \dfrac{N-1}{N_1 + N_2 - 2}. \end{cases} \tag{6.77}$$

Из выражений (6.77) и (6.59) видно, что алгоритмы БПФ с прореживанием по времени и по частоте при $N = 2^\nu$ дают больший выигрыш в ускорении вычислений, чем алгоритмы БПФ с множителями поворота.

Пример 6.1. Пусть $N = 15 = 5 \times 3$, т.е. $N_1 = 5$, $N_2 = 3$. Используя приведённую выше методику, построить направленные графы БПФ последовательности $x[n]$ $\left(n = \overline{0,\ 14}\right)$.

Согласно (6.69) запишем индексы $n = n_1 + n_2 5$, $k = k_1 + k_2 3$, где $n, k = \overline{0,\ 14}$; $n_1, k_2 = \overline{0,\ 4}$; $n_2, k_1 = \overline{0,\ 2}$. Сформированный из последовательности $x[n]\ (n = \overline{0,\ 14})$ двумерный массив (6.67) при этом имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \end{pmatrix}.$$

В соответствии с (6.71) запишем

$$X(k) = X(k_1 + k_2 3) = \sum_{n_1=0}^{4} \left\{ \left(\sum_{n_2=0}^{2} x[n_1 + n_2 5]\, W_3^{k_1 n_2} \right) W_{15}^{k_1 n_1} \right\} W_5^{k_2 n_1},$$

$$k_1 = \overline{0,\ 2},\ k_2 = \overline{0,\ 4}.$$

Построенный по этой формуле направленный граф БПФ изображён на рис.6.12.

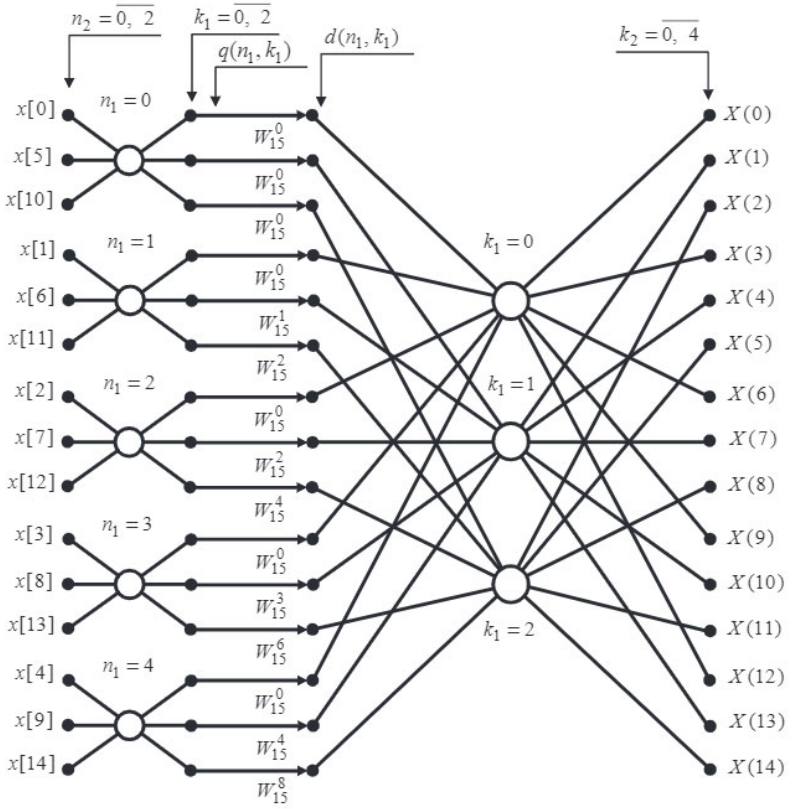


Рис.6.12. Направленный граф 15-точечного БПФ с множителями поворота, построенного по алгоритму (6.71)

Используя алгоритм (6.74), запишем

$$X(k) = X(k_1 + k_2 3) = \sum_{n_2=0}^{2} \left\{ \left(\sum_{n_1=0}^{4} x[n_1 + n_2 5]\, W_{15}^{k_1 n_1} \right) W_5^{k_2 n_1} \right\} W_3^{k_1 n_2},$$

$$k_1 = \overline{0,\ 2},\ k_2 = \overline{0,\ 4}.$$

Построенный по этой формуле направленный граф БПФ изображён на рис.6.13.

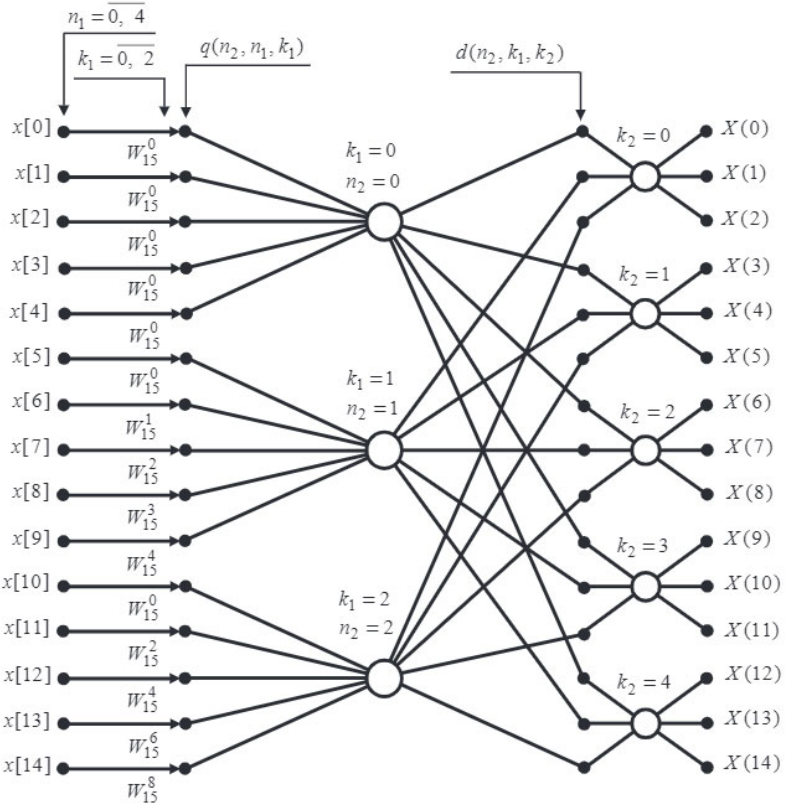


Рис.6.13. Направленный граф 15-точечного БПФ с множителями поворота, построенного по алгоритму (6.74)

Из рис.6.12 и 6.13 видно, что здесь используются трёх- и пятиточечные «бабочки» •, а также комплексные умножения на множители поворота W_{15}^l, где $l = \overline{0, 8}$.

• В общем случае применяются N_1-точечные и N_2-точечные «бабочки», а также операции умножения на множители поворота W_N^l, где $l = \overline{0, (N_1 - 1)(N_2 - 1)}$.

Пример 6.2. Построить базовую операцию «бабочка» с основанием 3.

Согласно определению ДПФ (1.101) запишем выражение для ДПФ$_3$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{2} x[n]W_3^{kn},\quad k=\overline{0,2}.$$

Базовая операция «бабочка»[•] с основанием 3 приведена на рис.6.14.

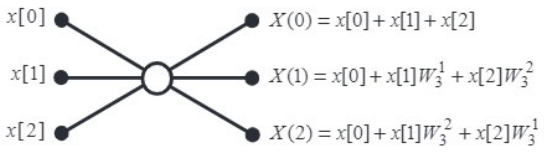


Рис.6.14. Базовая операция «бабочка» с основанием 3

Пример 6.3. Построить базовую операцию «бабочка» с основанием 5.

Согласно определению ДПФ (1.101) запишем выражение для ДПФ$_5$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{4} x[n]W_5^{kn},\quad k=\overline{0,4}.$$

Базовая операция «бабочка» с основанием 5 приведена на рис.6.15[•].

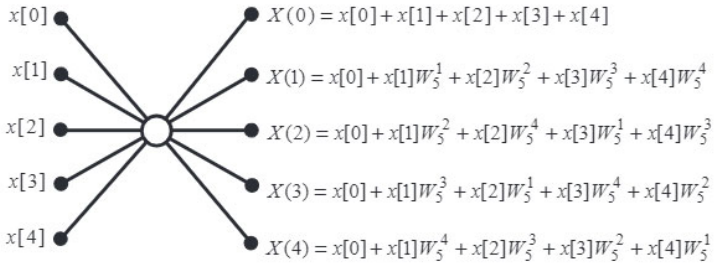


Рис.6.15. Базовая операция «бабочка» с основанием 5

Если $N=N_1N_2$, а числа N_1 и (или) N_2, в свою очередь, также могут быть представлены в виде произведения двух сомножителей, то описанную процедуру БПФ с множителями поворота можно применить повторно, представляя строки (или столбцы) двумерного массива (6.67) двумерными массивами меньшей размерности. Это приведёт к дальнейшему уменьшению требуемого числа арифметических операций. Если $N=N_1N_2N_3\cdots N_J$, где $N_i\ \left(i=\overline{1,J}\right)$ — простые числа[••], то число комплексных умножений, необходимых для вы-

---

[•] Здесь использовано следующее свойство поворачивающих множителей: $W_N^{(l+rN)}=W_N^l$, где l и r — целые числа.

[••] Числа $N_i\ \left(i=\overline{1,J}\right)$ не должны быть равны 2.

числения ДПФ$_N$ путём повторного применения алгоритмов БПФ с множителями поворота, составит

$$C_{\text{умн}} = N\left(\sum_{i=1}^{J} N_i + J - 1\right), \tag{6.78}$$

а число комплексных сложений

$$C_{\text{сл}} = N\left(\sum_{i=1}^{J} N_i - J\right). \tag{6.79}$$

Коэффициенты ускорения вычислений для операций комплексного умножения и комплексного сложения в этом случае равны

$$\begin{cases} K_{\text{ув}_{\text{умн}}} = \dfrac{N^2}{N\left(\sum\limits_{i=1}^{J} N_i + J - 1\right)} = \dfrac{N}{\sum\limits_{i=1}^{J} N_i + J - 1}; \\ K_{\text{ув}_{\text{сл}}} = \dfrac{N(N-1)}{N\left(\sum\limits_{i=1}^{J} N_i - J\right)} = \dfrac{N-1}{\sum\limits_{i=1}^{J} N_i - J}. \end{cases} \tag{6.80}$$

Из сравнения выражений (6.80) и (6.59) следует, что алгоритмы БПФ с основанием 2, описанные в § 6.5 и 6.6, дают больший выигрыш в количестве комплексных арифметических операций по сравнению с прямым вычислением ДПФ$_N$, чем алгоритмы БПФ с множителями поворота при $N = N_1 N_2 N_3 \cdots N_J$, где $N_i \left(i = \overline{1, J}\right)$ — простые числа, не равные двум.

Существует много подходов к построению алгоритмов БПФ. Среди них подходы, основанные на использовании теоретико-числовых преобразований, на использовании модульной арифметики в кольце полиномов. Перспективным является алгоритм Винограда [8]. Наиболее полно вопросы построения алгоритмов БПФ изложены в [26].

Краткие итоги

1. Частотный подход к обработке сигналов имеет ограничения на тип систем: в рамках этого подхода могут рассматриваться только линейные стационарные системы. Анализ линейных стационарных систем в частотной области при нулевых начальных условиях в системе выполняется в три этапа: 1) нахождение спектра входного сигнала с помощью прямого преобразования Фурье; 2) нахождение спектра выходного сигнала путём умножения спектра входного сигнала на комплексный коэффициент передачи системы; 3) нахождение временной реализации выходного сигнала с помощью обратного преобразования Фурье.

2. Пара дискретных преобразований Фурье (прямое и обратное) определяется формулами (1.101) и (1.102), которые получены в § 1.6 и 1.7 из Z-преобразования последовательно-

сти $x[n]\left(n=\overline{0,\,N-1}\right)$ при $z=\exp(j\omega T)$ для частот $\omega=\frac{2\pi}{TN}k\left(k=\overline{0,\,N-1}\right)$. Таким образом, коэффициенты ДПФ $X(k)\ \left(k=\overline{0,\,N-1}\right)$ последовательности $x[n]\left(n=\overline{0,\,N-1}\right)$ равны значениям Z-преобразования этой последовательности в N точках, равномерно распределённых по единичной окружности. Эти коэффициенты однозначно представляют саму последовательность посредством обратного ДПФ (1.102). В свою очередь, Z-преобразование финитной последовательности $X(z)$ может быть получено из её ДПФ $X(k)\left(k=\overline{0,\,N-1}\right)$ по формуле (6.9).

3. Простое дополнение финитной последовательности $x[n]\left(n=\overline{0,\,N-1}\right)$ нулевыми отсчётами $x=0\left(n=\overline{N,\,L-1}\right)$ таким образом, что ДПФ результирующей последовательности $\hat{x}[n]\left(n=\overline{0,\,L-1}\right)$ имеет L отсчётов, равномерно распределённых по единичной окружности, позволяет улучшить условия различения синусоидальных компонент спектра. При этом результирующий спектр представляет собой некоторую аппроксимацию спектра неудлинённой последовательности [6].

4. Дискретизация сигнала во временной области по алгоритму (1.1) приводит к наложению в частотной области, т.е. к периодическому характеру спектра [см. (1.92)], а дискретизация в частотной области приводит к наложению во временной области, т.е. к периодическому характеру сигнала $x[n]=x[n+rN]$, где N — период повторения [см. (6.21)]. Таким образом, имеет место частотно-временной дуализм дискретных сигналов.

5. Основные свойства ДПФ аналогичны соответствующим свойствам Z-преобразования, доказанным в § 1.3, в частности справедливы свойство линейности, а также теоремы запаздывания и упреждения (теоремы сдвига): если ДПФ периодической последовательности $x_{\text{п}}[n]$ с периодом N отсчётов равно $X_{\text{п}}(k)$, то ДПФ сдвинутой последовательности $x_{\text{п}}[n-n_0]$ равно $X_{\text{п}}(k)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}k\,n_0}$. Для финитных последовательностей $x[n]\left(n=\overline{0,\,N-1}\right)$ необходимо учитывать специфический характер временного сдвига. С точки зрения ДПФ последовательность $x[n-n_0]$ получается путём кругового сдвига элементов исходной последовательности $x[n]\left(n=\overline{0,\,N-1}\right)$ на n_0 отсчётов (см. рис.6.1).

6. Для ДПФ вещественной последовательности $x_{\text{п}}[n]$ справедливы условия симметрии (6.24). Если же для последовательности $x_{\text{п}}[n]$ выполняется условие симметрии или антисимметрии (6.25), то при $x_{\text{п}}[n]=x_{\text{п}}[N-n]$ последовательность $x_{\text{п}}[n]$ может быть только вещественной, а при $x_{\text{п}}[n]=-x_{\text{п}}[N-n]$ последовательность $x_{\text{п}}[n]$ может быть только мнимой. Для вещественной и мнимой частей ДПФ комплексной периодической последовательности (6.27) справедливы соотношения (6.29) и (6.30).

7. Дискретные свёртки бывают двух видов: круговая (6.32) и линейная (6.34). Круговая (периодическая) свёртка вводится для двух периодических последовательностей $x_{\text{п}}[n]$ и $h_{\text{п}}[n]$ с одинаковыми периодами по N отсчётов, а линейная — для финитных последовательностей $x[n]\ \left(n=\overline{0,\,N_1-1}\right)$ и $h[n]\left(n=\overline{0,\,N_2-1}\right)$ различной длины. Эффективным способом вычисления круговой свёртки является использование ДПФ с применением алгоритма БПФ по следующей схеме: 1) вычисление ДПФ исходных последовательностей; 2) перемножение коэффициентов полученных ДПФ; 3) вычисление выходной последовательности с помощью обратного ДПФ. Дополнение финитных последовательностей $x[n]\ \left(n=\overline{0,\,N_1-1}\right)$ и $h[n]\left(n=\overline{0,\,N_2-1}\right)$ нулевыми отсчётами согласно (6.35) и (6.36) до последовательностей оди-

наковой длины N_1+N_2-1 позволяет свести линейную свёртку (6.34) к эквивалентной (N_1+N_2-1)-точечной круговой свёртке (6.37), которая может быть вычислена с использованием (N_1+N_2-1)-точечного ДПФ.

8. Во многих практических задачах требуется вычислять свёртку двух последовательностей, длины которых существенно различаются ($N_1 >> N_2$ или $N_2 >> N_1$). В этом случае использование алгоритма сведения к эквивалентной (N_1+N_2-1)-точечной круговой свёртке (6.37) неэффективно по следующим причинам: 1) перед вычислением свёртки необходимо иметь всю более длинную последовательность; 2) результат получается с большой задержкой; 3) при больших значениях (N_1+N_2-1) вычисление ДПФ усложняется. Свободными от перечисленных недостатков являются алгоритмы, основанные на разбиении длинной последовательности на короткие секции и вычислении частичных свёрток, из которых затем формируется искомая линейная свёртка. Существуют два метода секционирования свёртки: метод перекрытия с суммированием и метод перекрытия с накоплением (см. рис.6.2 и 6.3).

9. Вычисление обратного ДПФ можно осуществить с использованием алгоритма вычисления прямого ДПФ согласно формуле (6.46). Это позволяет находить прямое и обратное ДПФ с помощью одной и той же вычислительной процедуры, в частности с помощью алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ).

10. *Быстрое преобразование Фурье* (БПФ) представляет собой не какой-либо новый вид преобразования Фурье, а лишь эффективную процедуру, позволяющую существенно сократить затраты на вычисление ДПФ (1.101). Наиболее простыми и часто используемыми являются алгоритмы БПФ с основанием 2, когда длина последовательности $x[n]\ \left(n=\overline{0,\,N-1}\right)$ $N=2^{\nu}$, где ν — целое число ($\nu=\log_2 N$). Идея, лежащая в основе алгоритмов БПФ и схематично показанная на рис.6.4, заключается в следующем: исходная N-точечная последовательность $x[n]\ \left(n=\overline{0,\,N-1}\right)$ разбивается на две $(N/2)$-точечные последовательности $g[n]$ и $h[n]\ \left(n=\overline{0,\,(N/2)-1}\right)$; вычисляются $\text{ДПФ}_{N/2}$ $G(k)$ и $H(k)\ \left(k=\overline{0,\,(N/2)-1}\right)$ этих последовательностей; путём объединения двух $\text{ДПФ}_{N/2}$ конструируется ДПФ_N $X(k)\ \left(k=\overline{0,\,N-1}\right)$ исходной N-точечной последовательности $x[n]\ \left(n=\overline{0,\,N-1}\right)$.

11. В алгоритме БПФ с прореживанием по времени $(N/2)$-точечная последовательность $g[n]\ \left(n=\overline{0,\,(N/2)-1}\right)$ формируется из отсчётов исходной N-точечной последовательности $x[n]\ \left(n=\overline{0,\,N-1}\right)$ с чётными номерами, а последовательность $h[n]\ \left(n=\overline{0,\,(N/2)-1}\right)$ — из отсчётов с нечётными номерами. Алгоритм конструирования искомого ДПФ_N $X(k)$ $\left(k=\overline{0,\,N-1}\right)$ из двух $\text{ДПФ}_{N/2}$ $G(k)$ и $H(k)\ \left(k=\overline{0,\,(N/2)-1}\right)$ описывается формулами (6.56) и для каждого значения k графически представляется базовой операцией «бабочка» (см. рис.6.6). Повторное применение этой процедуры приводит на ν-м этапе к совокупности $(N/2)$ двухточечных ДПФ.

12. Удобным приёмом является представление алгоритма БПФ в виде направленного графа, использующего базовые операции («бабочки»). Направленный граф 8-точечного БПФ с прореживанием по времени изображён на рис.6.8, из которого следует, что число этапов вычисления БПФ равно $\nu=\log_2 N$, на каждом из которых требуется $(N/2)$ комплексных умножений и N комплексных сложений. Таким образом, при вычислении ДПФ_N с использованием алгоритма БПФ с прореживанием по времени нужно выполнить $(N/2)\log_2 N$ операций комплексного умножения и $N\log_2 N$ операций комплексного сложения. При вычис-

лении же ДПФ$_N$ прямым способом, т.е. непосредственно по формуле (1.101), требуется N^2 операций комплексного умножения и $N(N-1)$ операций комплексного сложения. Выигрыш в вычислительных затратах при применении алгоритма БПФ оценивается коэффициентами ускорения вычислений (6.59). После выполнения операций на всех этапах алгоритма БПФ с прореживанием по времени отсчёты выходной последовательности располагаются в естественном порядке, а входной последовательности $x[n]\ \left(n=\overline{0,\,N-1}\right)$ за счёт многократного разбиения на подпоследовательности отсчётов чётных и нечётных номеров оказываются перемешанными в определённом порядке. Порядок расположения отсчётов последовательности $x[n]\ \left(n=\overline{0,\,N-1}\right)$ на входе алгоритма БПФ с прореживанием по времени определяется с помощью формальной процедуры, заключающейся в образовании двоично-инверсного кода (чтения справа налево) позиций двоичного кода номеров отсчётов $n=\overline{0,\,N-1}$ последовательности $x[n]$. Для $N=8$ эта процедура приведена в табл.6.2.

13. В алгоритме БПФ с прореживанием по частоте $(N/2)$-точечная последовательность $g[n]\ \left(n=\overline{0,\,(N/2)-1}\right)$ формируется из первой половины, а $(N/2)$-точечная последовательность $h[n]\ \left(n=\overline{0,\,(N/2)-1}\right)$ — из второй половины отсчётов исходной N-точечной последовательности $x[n]\ \left(n=\overline{0,\,N-1}\right)$, как показано на рис.6.9. Из этих последовательностей с помощью базовой операции «бабочка» (см. рис.6.10) получают последовательности (6.65) для расчёта чётных $X(2r)$ и нечётных $X(2r+1)$ отсчётов спектра $X(k)\ \left(k=\overline{0,\,N-1}\right)$. Повторное применение этой процедуры приводит на v-м этапе к совокупности $(N/2)$ двухточечных ДПФ. Направленный граф 8-точечного БПФ с прореживанием по частоте изображён на рис.6.11, из которого следует, что число этапов вычисления БПФ равно $v=\log_2 N$, на каждом из которых требуется $(N/2)$ комплексных умножений и N комплексных сложений. Таким образом, алгоритмы БПФ с прореживанием по времени и по частоте по вычислительной эффективности эквивалентны. В алгоритме БПФ с прореживанием по частоте отсчёты входной последовательности $x[n]\ \left(n=\overline{0,\,N-1}\right)$ располагаются в естественном порядке, а отсчёты выходной последовательности $X(k)\ \left(k=\overline{0,\,N-1}\right)$ — в двоично-инверсном порядке.

14. При $N\neq 2^v$ для получения алгоритмов БПФ применяют два подхода: 1) дополнение исходной последовательности $x[n]$ нулевыми отсчётами до длины, равной степени двойки $N=2^v$; 2) представление последовательности $x[n]\ \left(n=\overline{0,\,N-1}\right)$ при $N=N_1N_2$ двумерным массивом (6.67). Второй подход приводит к алгоритмам БПФ с множителями поворота. Эти алгоритмы описываются формулами (6.71) или (6.74), процедура вычисления которых является трёхшаговой. Если длина последовательности $N=N_1N_2N_3\cdots N_J$, где $N_i\ \left(i=\overline{1,\,J}\right)$ — простые числа, то алгоритм БПФ с множителями поворота может применяться повторно. При этом используются базовые операции «бабочка» с основаниями $N_i\ \left(i=\overline{1,\,J}\right)$. Выигрыш в вычислительных затратах оценивается коэффициентами ускорения вычислений (6.80). Эффективность алгоритмов БПФ с множителями поворота при $N\neq 2^v$ ниже эффективности алгоритмов БПФ с прореживанием по времени и по частоте при $N=2^v$.

Глава 7

АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ АНАЛОГОВЫХ СИСТЕМ

7.1. Математическое описание цифровых моделей линейных аналоговых систем

Задача цифрового моделирования аналоговых систем заключается в нахождении алгоритмов, позволяющих получать дискретные значения $y[n]$ выходного процесса $y(t)$ по известным дискретным значениям $x[n]$ входного процесса $x(t)$ и известным характеристикам системы, а также в осуществлении одного или нескольких прогонов модели и обработке результатов этих прогонов. Основное требование, предъявляемое к алгоритмам цифрового моделирования, состоит в простоте подготовительной работы и минимуме вычислительных затрат на прогон модели.

При функциональном моделировании [37] аналоговая система представляется в виде определённого соединения линейных инерционных и нелинейных безынерционных динамических звеньев. Причём в большинстве случаев можно полагать, что между звеньями системы имеется развязка, так что свойства каждого звена не зависят от присоединения к нему других звеньев. Из этих двух типов звеньев можно строить модели линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных систем любой сложности путём наращивания структуры.

Процесс прохождения сигналов и помех в аналоговой системе состоит из отдельных преобразований процессов динамическими звеньями, поэтому алгоритм моделирования системы можно найти, зная моделирующие алгоритмы отдельных звеньев, использованные способы соединения звеньев системы, а также математические операции, описывающие эти соединения. Проще эта задача решается при моделировании разомкнутых систем, содержащих только последовательно или параллельно включённые динамические звенья. Более сложной является задача моделирования замкнутых систем, содержащих один или несколько контуров обратной связи.

Рассмотрим стационарную линейную аналоговую динамическую систему разомкнутого типа (рис.7.1,*а*). Она может быть описана следующими характеристиками:

- передаточной функцией $\mathrm{H}(p)$, определяемой как отношение изображений по Лапласу выходного процесса к входному при нулевых начальных условиях в системе:

$$\mathrm{H}(p)=\left.\frac{L\{y(t)\}}{L\{x(t)\}}\right|_{\text{Нулевые начальные условия}}; \qquad (7.1)$$

- импульсной характеристикой $h(t)$, представляющей собой реакцию системы на δ-функцию

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0;\\ 0, & t\neq 0\end{cases} \tag{7.2}$$

при нулевых начальных условиях.

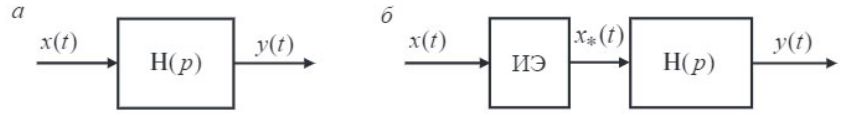


Рис.7.1. Стационарная линейная аналоговая динамическая система разомкнутого типа (*а*) и её дискретная модель (*б*)

Характеристики $\mathrm{H}(p)$ и $h(t)$ связаны между собой парой преобразований Лапласа:

$$\begin{cases}\mathrm{H}(p)=L\{h(t)\};\\ h(t)=L^{-1}\{\mathrm{H}(p)\}.\end{cases} \tag{7.3}$$

Реакция $y(t)$ стационарной линейной аналоговой системы на произвольное воздействие $x(t)$ при нулевых начальных условиях может быть найдена либо во временной области с помощью интеграла свёртки

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau, \tag{7.4}$$

где $*$ — символ свёртки, либо в частотной области с использованием формулы обращения

$$y(t)=L^{-1}\{L\{x(t)\}\,\mathrm{H}(p)\}, \tag{7.5}$$

либо с помощью дифференциального уравнения •

$$y(t)=\mathrm{H}(p)\,x(t). \tag{7.6}$$

Формулы (7.4) — (7.6) представляют математические модели стационарной линейной аналоговой системы. Для получения цифровых моделей аналоговых систем необходимо осуществить переход от выражений (7.4) — (7.6) к соответствующим дискретным эквивалентам. Для решения этой задачи используют три основных подхода к дискретизации непрерывных (аналоговых) систем:

- на основе дискретной свёртки (методы скользящего суммирования);

• В символическом дифференциальном уравнении (7.6) переменная p рассматривается как оператор дифференцирования, а в алгебраическом уравнении для изображений по Лапласу $Y(p)=\mathrm{H}(p)\,X(p)$ переменная p рассматривается как комплексный аргумент.

- на основе рекуррентных разностных уравнений (усовершенствованные методы численного интегрирования);
- на основе алгоритмов БПФ (частотные методы).

Дискретная модель стационарной линейной аналоговой системы изображена на рис.7.1,*б*. Она состоит из непрерывной части, соответствующей исследуемой системе, и импульсного элемента (ИЭ), осуществляющего дискретизацию входного процесса $x(t)$. Процесс $x_{\text{иф}}(t)$ на выходе ИЭ является последовательностью импульсов, следующих с периодом повторения $T = 1/f_{\text{д}}$, равным шагу (периоду) дискретизации, и промодулированных по амплитуде входным процессом $x(t)$ [29]:

$$x_{\text{иф}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, k_0(t - nT), \tag{7.7}$$

где $k_0(t)$ — функция, описывающая форму импульса.

ИЭ удобно представить в виде последовательного соединения идеального импульсного элемента (ИИЭ), преобразующего аналоговый сигнал $x(t)$ в модулированную последовательность δ-импульсов:

$$x[n] = x_{\delta}(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \delta(t - nT)\, dt, \tag{7.8}$$

и интерполирующего фильтра (ИФ), представляющего собой линейное аналоговое динамическое звено с импульсной характеристикой $k_0(t)$. При этом дискретная (цифровая) модель стационарной линейной аналоговой системы примет вид, показанный на рис.7.2.

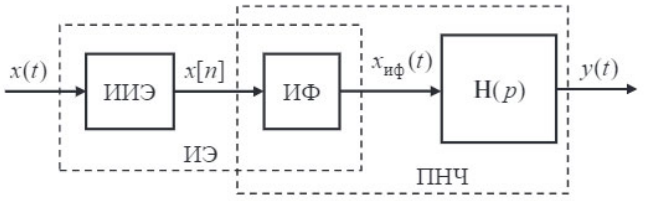


Рис.7.2. Дискретная модель аналоговой стационарной линейной системы с идеальным импульсным элементом и интерполирующим фильтром

Выбирая шаг дискретизации T и интерполирующую функцию $k_0(t)$, можно с достаточной точностью аппроксимировать непрерывный процесс $x(t)$ функцией $x_{\text{иф}}(t)$ [29]. Эта аппроксимация необходима по той причине, что реакция аналоговой системы с передаточной функцией $\text{H}(p)$ на воздействие $x(t)$ существенно отличается от её реакции на решётчатую функцию $x[n]$, а эквивалентная дискретная модель при входном воздействии $x[n]$ должна обеспечить

реакцию $y[n]$, «огибающая» которой совпадает с реакцией аналоговой системы на воздействие $x(t)$, поэтому в цифровую модель стационарной линейной аналоговой инерционной системы вводят интерполирующий фильтр, который обеспечивает подачу на вход системы с передаточной функцией $\mathrm{H}(p)$ воздействия $x_{\text{иф}}(t)$, являющегося непрерывной функцией и аппроксимирующего воздействие $x(t)$ на входе аналоговой системы. Другими словами, ИФ формирует из решётчатой функции $x[n]$ аналоговый сигнал $x_{\text{иф}}(t)$.

Интерполирующий фильтр и моделируемая аналоговая система с передаточной функцией $\mathrm{H}(p)$ образуют так называемую *приведённую непрерывную часть* (ПНЧ) цифровой модели. Реакция ПНЧ на решётчатую функцию $x[n]$ при цифровом моделировании представляется также решётчатой функцией $y[n]$, «огибающая» которой аппроксимирует реакцию $y(t)$ моделируемой аналоговой линейной системы на воздействие $x(t)$.

Импульсная характеристика ПНЧ определяется свёрткой импульсных характеристик ИФ и моделируемой системы

$$h_{\text{пнч}}(t) = k_0(t) * h(t) = \int_0^t k_0(t)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t k_0(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau, \qquad (7.9)$$

где $h(t)$ — импульсная характеристика моделируемой стационарной линейной аналоговой системы, связанная с её передаточной функцией $\mathrm{H}(p)$ соотношениями (7.3), а передаточная функция ПНЧ равна произведению передаточных функций ИФ $\mathrm{K}_0(p)$ и моделируемой аналоговой системы $\mathrm{H}(p)$:

$$\mathrm{H}_{\text{пнч}}(p) = \mathrm{K}_0(p)\, \mathrm{H}(p), \qquad (7.10)$$

где

$$\mathrm{K}_0(p) = L\{k_0(t)\}. \qquad (7.11)$$

При таком подходе процесс на выходе ПНЧ $y(t)$ определяется свёрткой последовательности (7.8) с импульсной характеристикой ПНЧ (7.9):

$$y(t) = x_\delta(t) * h_{\text{пнч}}(t) = \int_0^t x_\delta(\tau)\, h_{\text{пнч}}(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t x_\delta(t-\tau)\, h_{\text{пнч}}(\tau)\, d\tau. \qquad (7.12)$$

В дискретных точках $t_n = nT$ вместо (7.12) будем иметь дискретную свёртку

$$y[n] = x[n] * h_{\text{пнч}}[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]\, h_{\text{пнч}}[n-k] = \sum_{k=0}^{n} x[n-k]\, h_{\text{пнч}}[k], \qquad (7.13)$$

т.е. последовательность дискретных значений выходного сигнала $y[n]$ цифровой модели аналоговой стационарной линейной системы описывается дискретной свёрткой последовательности отсчётов входного сигнала $x[n]$ и дискрети-

зированной импульсной характеристики ПНЧ $h_{\text{пнч}}[n] = h_{\text{пнч}}(nT) = h_{\text{пнч}}(t)\big|_{t=nT}$. Отсюда следует, что цифровая модель аналоговой стационарной линейной системы представляет собой стационарный линейный ЦФ с импульсной характеристикой $h_{\text{пнч}}[n]$ и передаточной функцией $H_{\text{пнч}}(z) = Z\{h_{\text{пнч}}[n]\}$ [см. (3.4)]. Характеристики стационарных линейных цифровых фильтров описаны в гл.3, а структурные схемы — в гл.4.

При замене аналоговой системы эквивалентной дискретной моделью возникает погрешность, проявляющаяся в том, что вычисленное значение выходного процесса $y[n]$ в дискретной системе отличается от соответствующих значений $y(t)\big|_{t=nT}$ в непрерывной системе на величину

$$\delta y[n] = y[n] - y(t)\big|_{t=nT}, \tag{7.14}$$

называемую ошибкой дискретизации.

Если шаг квантования по уровню в цифровой (моделирующей) системе достаточно мал, а алгоритм моделирования содержит не слишком большое число элементарных операций, то ошибка дискретизации будет тем меньше, чем меньше шаг (интервал) дискретизации $T = 1/f_{\text{д}}$. В пределе при $T \to 0$ процессы в дискретной (моделирующей) и в аналоговой (моделируемой) системах должны совпадать. Однако при уменьшении шага дискретизации возрастает объём вычислений, поэтому шаг дискретизации следует выбирать как можно большим, но удовлетворяющим заданной точности моделирования [29].

В настоящее время не существует достаточно общей методики выбора шага дискретизации, обеспечивающего заданную точность моделирования. Отметим, что если выбранный шаг дискретизации $T = 1/f_{\text{д}}$ удовлетворяет условию теоремы В.А. Котельникова, то ошибка дискретизации (7.14) будет достаточно малой. На практике шаг дискретизации обычно выбирают следующим образом. Строится последовательность переходных характеристик дискретной модели для ряда уменьшающихся значений шага дискретизации $T = 1/f_{\text{д}}$. Обычно дробление шага T осуществляется в два раза. Сравнивая результаты расчёта переходных характеристик, выбирают такое (максимальное) значение шага T, начиная с которого переходная характеристика модели в пределах заданной точности не изменяется при уменьшении шага дискретизации T.

Нелинейные безынерционные динамические звенья (стационарные или нестационарные), осуществляющие преобразования аналоговых сигналов

$$y(t) = \Phi\{x(t)\} \text{ или } y(t) = \Phi\{x(t),\, t\}, \tag{7.15}$$

где $\Phi\{...\}$ — оператор нелинейного преобразования, при цифровом моделировании описываются соотношениями

$$y[n] = \Phi\{x[n]\} \text{ или } y[n] = \Phi\{x[n],\, n\}. \tag{7.16}$$

У нестационарного звена нелинейный оператор $\Phi\{...\}$ явно зависит от «дискретного времени» n.

При функциональном моделировании система представляется состоящей из моделей определённым образом соединённых динамических звеньев, между которыми имеется развязка, благодаря чему подключение к данному звену других звеньев не влияет на его характеристики. Задача разбиения модели исследуемой системы на составляющие её динамические звенья, более простые для математического описания, чем система в целом, называется *декомпозицией* модели системы. Обратная задача — составление модели системы из моделей её динамических звеньев — называется *композицией* модели системы.

Задачи декомпозиции и композиции модели системы — две стороны единого процесса исследования характеристик системы методом моделирования. Декомпозиция имеет целью изучение характеристик частей системы, как правило, более просто поддающихся формализованному математическому описанию, чем система в целом [4]. Обычно систему представляют состоящей из двух типов динамических звеньев: линейных инерционных и нелинейных безынерционных. Целью композиции является составление математической модели системы на основе моделей её элементов (звеньев) и связей (соединений) между ними. Существует три типа соединений звеньев системы: последовательное (каскадное), параллельное и соединение с обратной связью (см. § 4.4).

7.2. Алгоритмы дискретной свёртки

Существуют два способа дискретной аппроксимации аналоговых систем, т.е. замены их дискретными моделями: 1) на основе алгоритмов дискретной свёртки и 2) на основе рекуррентных разностных алгоритмов.

Аналогом интеграла свёртки (7.4), описывающего реакцию непрерывной линейной системы на произвольное воздействие при нулевых начальных условиях, в случае дискретных систем является дискретная свёртка (7.13), иногда называемая скользящей суммой. При цифровом моделировании аналоговых линейных систем переход от непрерывной свёртки к свёртке дискретной может осуществляться различными способами. Чаще всего пользуются либо заменой аналоговых систем эквивалентными дискретными системами, либо формулами численного интегрирования.

Сущность первого подхода изложена в § 7.1 и сводится к следующему:

- выбирается шаг дискретизации $T = 1/f_д$ и импульсная характеристика интерполирующего фильтра $k_0(t)$ — рис.7.2;
- по заданной импульсной характеристике моделируемой аналоговой линейной системы $h(t)$ и выбранной импульсной характеристике интерполирующего фильтра $k_0(t)$ определяется импульсная характеристика приведённой непрерывной части (ПНЧ) $h_{пнч}(t)$ в соответствии с выражением (7.9);
- осуществляется дискретизация импульсной характеристики ПНЧ $h_{пнч}(t)$ с шагом дискретизации T, в результате чего получается импульсная характеристика эквивалентной дискретной системы $h_{пнч}[n] = h_{пнч}(nT) = h_{пнч}(t)\big|_{t=nT}$;

♦ реакция на заданное воздействие $x[n]$ полученной таким образом эквивалентной дискретной системы с импульсной характеристикой $h_{\text{пнч}}[n]$ рассчитывается по формуле дискретной свёртки (7.13).

При втором подходе дискретная модель непрерывного сигнала на выходе аналоговой линейной системы определяется с помощью одного из известных методов численного интегрирования формулы свёртки (7.4).

Простейшим методом численного интегрирования является *метод прямоугольников*, основанный на аппроксимации подынтегральной функции ступенчатой кривой при достаточно малом шаге дискретизации T. Применяя этот метод к формуле непрерывной свёртки (7.4) при $t = nT$, получим

$$y[n] = T\sum_{k=0}^{n-1} x[k]\,h[n-k] = T\sum_{k=0}^{n-1} x[n-k]\,h[k]. \qquad (7.17)$$

Известный в математике метод трапеций предполагает аппроксимацию подынтегрального выражения отрезками прямых с узлами в точках дискретизации (метод кусочно-линейной интерполяции). Этот метод обладает большей точностью по сравнению с методом прямоугольников и находит широкое применение. Интегрирование формулы свёртки (7.4) *по методу трапеций* приводит к следующему выражению:

$$y[n] = \frac{T}{2}\sum_{k=0}^{n} c_{\text{трап}}[k]\,x[k]\,h[n-k] = \frac{T}{2}\sum_{k=0}^{n} c_{\text{трап}}[k]\,x[n-k]\,h[k], \qquad (7.18)$$

где

$$c_{\text{трап}}[k] = \begin{cases} 1, & k = 0,\quad k = n; \\ 2, & k = \overline{1,\ n-1}. \end{cases} \qquad (7.19)$$

Метод параболической аппроксимации подынтегральной функции (*метод Симпсона*) обладает ещё большей точностью. Для чётных значений n применение метода Симпсона к интегралу свёртки (7.4) даёт следующее выражение:

$$y[n] = \frac{T}{3}\sum_{k=0}^{n} c_{\text{симп}}[k]\,x[k]\,h[n-k] = \frac{T}{3}\sum_{k=0}^{n} c_{\text{симп}}[k]\,x[n-k]\,h[k], \qquad (7.20)$$

где

$$c_{\text{симп}}[k] = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & k = 0,\quad k = n; \\ \left.\begin{array}{ll} 4, & k \text{ нечётное}; \\ 2, & k \text{ чётное}, \end{array}\right\} & k = \overline{1,\ n-1}. \end{array} \right. \qquad (7.21)$$

Сделаем несколько замечаний относительно ограничений на временную протяжённость (длительность) функций $h(t)$ и $x(t)$ [29].

1. Сигнал $x(t)$ неограничен по времени, а импульсная характеристика $h(t)$ имеет одностороннее ограничение: $h(t) = 0$ при $t < 0$ (условие физической возможности системы). Именно этому случаю соответствуют формулы (7.4), (7.9),

(7.12), (7.13), (7.17), (7.18) и (7.20), в которых нижний предел интегрирования (суммирования) равен нулю, а верхний предел — текущему моменту времени (непрерывного или дискретного).

2. Сигнал $x(t)$ неограничен по времени, а импульсная характеристика $h(t)$ имеет двустороннее ограничение: $h(t)=0$ при $t<0$ и $t>T_h=M_hT$. При этом в формулах (7.4), (7.9) и (7.12) верхний предел интегрирования следует заменить на T_h, а верхний предел суммирования в формулах (7.13), (7.17), (7.18) и (7.20) — на M_h.

3. Сигнал $x(t)$ имеет двустороннее ограничение: $x(t)=0$ при $t<0$ и при $t>T_x=M_xT$, а импульсная характеристика $h(t)$ имеет одностороннее ограничение: $h(t)=0$ при $t<0$. Тогда в формулах (7.4), (7.9) и (7.12) верхний предел интегрирования равен t при $t\in[0,\ T_x]$ и T_x при $t>T_x$, а верхний предел суммирования в формулах (7.13), (7.17), (7.18) и (7.20) равен n при $n=\overline{0,\ M_x}$ и M_x при $n>M_x$.

Проведённое рассмотрение показывает, что при цифровом моделировании линейных аналоговых систем методом дискретной свёртки (скользящего суммирования) второй подход, базирующийся на использовании методов численного интегрирования непрерывной свёртки (7.4), требует меньшего объёма подготовительной работы, чем первый подход, основанный на замене аналоговых систем эквивалентными дискретными.

Методы цифрового моделирования аналоговых линейных динамических систем, основанные на алгоритмах дискретной свёртки, допускают обобщение на случай линейных нестационарных систем (систем с переменными параметрами). Связь «вход — выход» в нестационарных линейных системах также можно определить с помощью импульсной характеристики, которая в этом случае является функцией двух аргументов: $h(t,\ \tau)$, где t — текущее время (момент наблюдения), τ — момент подачи на вход системы эталонного воздействия в виде δ-импульса. Реакция аналоговой нестационарной линейной системы на произвольное воздействие $x(t)$ при нулевых начальных условиях описывается обобщённой (нестационарной) свёрткой

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)\,h(t,\ \tau)\ d\tau. \qquad (7.22)$$

Эквивалентная дискретная модель такой системы может быть описана обобщённой (нестационарной) дискретной свёрткой

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n} x[k]\,h_{\text{пнч}}[n,\ k], \qquad (7.23)$$

где $h_{\text{пнч}}[n,\ k]$ — дискретизированная импульсная характеристика ПНЧ моделируемой аналоговой нестационарной линейной системы.

Переход от непрерывной свёртки (7.22) к дискретной (7.23) может быть осуществлён методами численного интегрирования. При этом получаются выражения, аналогичные (7.17), (7.18) и (7.20), в которых функция $h[n-k]$ заменяется функцией $h[n,\ k]$.

Структурная схема нерекурсивного нестационарного дискретного линейного фильтра отличается от схемы, изображённой на рис.4.1, лишь тем, что в ней весовые коэффициенты являются функциями «дискретного времени» n: $a_k[n]\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$.

Дискретная аппроксимация аналоговых систем, основанная на алгоритмах дискретной свёртки, требует больших вычислительных затрат при моделировании, поскольку объём вычислений возрастает по мере увеличения длины реализации выходного процесса $y[n]$.

7.3. Рекуррентные алгоритмы моделирования аналоговых линейных динамических систем

Моделируемая аналоговая стационарная линейная система описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением N-го порядка (2.1) с постоянными коэффициентами. Возьмём преобразование Лапласа (1.12) от обеих частей уравнения (2.1) при нулевых начальных условиях в системе. В результате получим уравнение для изображений

$$Y(p)=\sum_{k=0}^{M}\alpha_k p^k X(p)-\sum_{k=1}^{N}\beta_k p^k Y(p), \tag{7.24}$$

где $X(p)=L\{x(t)\}$ и $Y(p)=L\{y(t)\}$ — изображения по Лапласу входного и выходного сигналов соответственно. Отсюда согласно определению (7.1) находим выражение для передаточной функции

$$\mathrm{H}(p)=\frac{\mathrm{A}(p)}{1+\mathrm{B}(p)}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{M}\alpha_k p^k}{1+\sum\limits_{k=1}^{N}\beta_k p^k},\quad M<N, \tag{7.25}$$

где $\mathrm{A}(p)$ и $\mathrm{B}(p)$ — полиномы комплексного аргумента p.

Таким образом, передаточная функция (7.25) стационарной линейной аналоговой системы имеет дробно-рациональный вид, при этом её параметры $\alpha_k\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $\beta_k\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ равны соответствующим коэффициентам дифференциального уравнения (2.1).

Передаточная функция стационарной линейной дискретной системы имеет также дробно-рациональный вид (3.7), при этом её параметры $a_k\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $b_k\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ равны соответствующим коэффициентам линейного разностного

уравнения (2.2). Структурная схема стационарной линейной дискретной системы приведена на рис.4.2. Она соответствует линейному разностному уравнению (2.2), которое называют также рекуррентным разностным уравнением или рекуррентной формулой •.

Рекуррентное разностное уравнение (2.2) представляет собой алгоритм дискретной аппроксимации аналоговых линейных стационарных систем. Этот алгоритм является наиболее экономичным с точки зрения требуемых вычислительных затрат, поскольку объём вычислений при использовании этого алгоритма не зависит от длины реализации выходного процесса $y[n]$, а определяется только порядком моделируемой системы N. Однако для построения дискретной модели аналоговой линейной системы требуется большой объём подготовительной работы, что является недостатком алгоритма дискретной аппроксимации. При моделировании аналоговой стационарной линейной системы с передаточной функцией (7.25) подготовительная работа сводится к нахождению коэффициентов $a_k \left(k = \overline{0,\ M} \right)$ и $b_k \left(k = \overline{1,\ N} \right)$ рекуррентного разностного уравнения (2.2), являющегося моделирующим алгоритмом, или, что то же самое, к определению передаточной функции (3.7).

Передаточная функция $H(z)$ эквивалентной дискретной системы является Z-преобразованием дискретизированной импульсной характеристики приведённой непрерывной части $h_{\text{пнч}}[n] = h_{\text{пнч}}(nT) = h_{\text{пнч}}(t)\big|_{t=nT}$ моделируемой аналоговой системы:

$$H(z) = Z\{h_{\text{пнч}}[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} h_{\text{пнч}}[n]\, z^{-n}. \qquad (7.26)$$

Эквивалентная дискретная передаточная функция $H(z)$ определяется не только передаточной функцией модулируемой системы (7.25), но и характеристикой интерполирующего фильтра (см. § 7.1), т.е. выбранным методом дискретной аппроксимации.

К настоящему времени предложено большое количество различных методов аппроксимации передаточной функции аналоговой стационарной линейной системы $\mathrm{H}(p)$ дробно-рациональной передаточной функцией эквивалентной дискретной системы $H(z)$ вида (3.7). Эти методы можно разделить на три группы [29]:

- ♦ методы, основанные на Z-преобразовании;
- ♦ методы, основанные на применении формул численного интегрирования;
- ♦ методы, основанные на преобразовании структурной схемы модели системы и дискретной аппроксимации составляющих её динамических звеньев.

• Последнее название оправдано тем, что по сути дела равенство (2.2) есть расчётная формула, а не уравнение, поскольку искомая величина $y[n]$ находится только в левой части равенства, а предыдущие отсчёты выходной величины $y[n-k]$ $\left(k = \overline{1,\ N}\right)$ вычислены на предыдущих шагах моделирования, поэтому на n-м шаге являются известными.

7.4. Дискретная аппроксимация на основе Z–преобразования

Получение цифровой модели методами первой группы сводится к следующим операциям:

- с помощью формулы (7.11) по импульсной характеристике интерполирующего фильтра $k_0(t)$ определяют его передаточную функцию $\mathrm{K}_0(p)$;
- используя формулу (7.10), по заданной передаточной функции моделируемой системы $\mathrm{H}(p)$ и полученной передаточной функции интерполирующего фильтра $\mathrm{K}_0(p)$ находят передаточную функцию ПНЧ $\mathrm{H}_{\text{пнч}}(p)$;
- используя обратное преобразование Лапласа [см. (7.3)], вычисляют импульсную характеристику ПНЧ

$$h_{\text{пнч}}(t) = L^{-1}\{\mathrm{H}_{\text{пнч}}(p)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mathrm{H}_{\text{пнч}}(p)\, e^{pt}\, dp; \qquad (7.27)$$

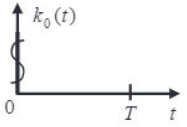
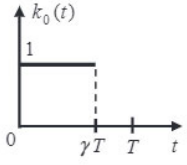
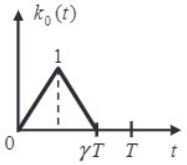
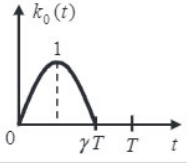
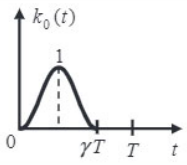
- осуществляют дискретизацию импульсной характеристики приведённой непрерывной части $h_{\text{пнч}}[n] = h_{\text{пнч}}(nT) = h_{\text{пнч}}(t)\big|_{t=nT}$ с выбранным или заданным шагом дискретизации $T = 1/f_{\text{д}}$;
- по формуле (7.26) находят искомую передаточную функцию $H(z)$ дискретной модели аналоговой стационарной линейной системы;
- полученную передаточную функцию $H(z)$ приводят к дробно-рациональному виду (3.7);
- по передаточной функции эквивалентной дискретной системы $H(z)$ составляют моделирующий алгоритм (2.2).

Следуя этой схеме, получим рабочие формулы для нахождения передаточной функции $H(z)$ дискретного эквивалента моделируемой аналоговой стационарной линейной системы, заданной передаточной функцией $\mathrm{H}(p)$ [1, 3, 4].

Импульсные характеристики $k_0(t)$ и соответствующие им передаточные функции $\mathrm{K}_0(p)$ наиболее часто используемых интерполирующих фильтров приведены в табл.7.1.

Интерполирующий фильтр с передаточной функцией $\mathrm{K}_0(p) = T$ представляет собой безынерционное звено, процесс на выходе которого является последовательностью δ-импульсов с «огибающей» $Tx(t)$, следующих с периодом $T = 1/f_{\text{д}}$. Метод нахождения передаточной функции эквивалентной дискретной системы с использованием такого ИФ называется методом Z-преобразования [29]. Метод Z-преобразования мало пригоден для цифрового моделирования аналоговых систем, так как он даёт очень низкую точность. Однако этот метод представляет интерес в задачах цифровой фильтрации, когда на вход системы подаётся дискретная последовательность $x[n]$, поэтому метод Z-преобразования будет рассмотрен нами наравне с другими методами, обеспечивающими высокую точность при моделировании линейных аналоговых систем.

Таблица 7.1

Форма $k_0(t)$	Характеристики интерполирующего фильтра	
	$k_0(t)$	$\mathrm{K}_0(p)$
	$T\,\delta(t)$	T
	$\begin{cases} 1, & t \in [0,\ \gamma T]; \\ 0, & t \notin [0,\ \gamma T] \end{cases}$	$\dfrac{1-e^{-p\gamma T}}{p}$
	$\begin{cases} \dfrac{2t}{\gamma T}, & t \in \left[0,\ \dfrac{\gamma T}{2}\right]; \\ 2\left(1-\dfrac{t}{\gamma T}\right), & t \in \left[\dfrac{\gamma T}{2},\ \gamma T\right]; \\ 0, & t \notin [0,\ \gamma T] \end{cases}$	$\dfrac{2\left[1-\exp\left(-p\dfrac{\gamma T}{2}\right)\right]^2}{\gamma T\, p^2}$
	$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi t}{\gamma T}\right), & t \in [0,\ \gamma T]; \\ 0, & t \notin [0,\ \gamma T] \end{cases}$	$\dfrac{\dfrac{\pi}{\gamma T}\left(1+e^{-p\gamma T}\right)}{p^2+\left(\dfrac{\pi}{\gamma T}\right)^2}$
	$\begin{cases} \sin^2\left(\dfrac{\pi t}{\gamma T}\right), & t \in [0,\ \gamma T]; \\ 0, & t \notin [0,\ \gamma T] \end{cases}$	$\dfrac{\dfrac{2\pi}{\gamma T}\left(1-e^{-p\gamma T}\right)}{2p\left[p^2+\left(\dfrac{2\pi}{\gamma T}\right)^2\right]}$

Второй тип интерполирующего фильтра (табл.7.1) при $\gamma = 1$ соответствует ступенчатой интерполяции процесса на выходе идеального импульсного элемента (см. рис.7.2), а метод нахождения передаточной функции $H(z)$ эквивалентной дискретной системы с использованием такого ИФ называется методом Цыпкина – Гольденберга [29].

Третий тип интерполирующего фильтра (табл.7.1) при $\gamma = 2$ реализует линейную интерполяцию дискретизированного процесса $x[n]$, а метод дискрет-

ной аппроксимации, основанный на использовании такого ИФ, называется методом Рагаззини – Бергена [29].

Четвёртый и пятый типы интерполирующего фильтра (см. табл.7.1) требуют значительно большего объёма подготовительной работы для получения передаточной функции $H(z)$ эквивалентной дискретной системы. Учитывая, что точность моделирования может быть повышена не только за счёт улучшения интерполяции, но и за счёт уменьшения шага дискретизации $T = 1/f_д$, на практике более предпочтительным может оказаться применение менее точной интерполяции с меньшим шагом дискретизации, чем более точной интерполяции, требующей большей подготовительной работы, поэтому четвёртый и пятый типы ИФ практического применения при цифровом моделировании не находят и представляют лишь теоретический интерес.

Рассмотрим первые три метода дискретной аппроксимации аналоговых стационарных линейных систем (см. табл.7.1). Эти методы являются универсальными в том смысле, что их применение не связано ни с какими ограничениями на передаточную функцию (7.25) моделируемой системы и входное воздействие $x(t)$. Начальные условия в аналоговой системе при моделировании её с помощью рекуррентных алгоритмов учитываются естественным образом.

Рассмотрим Z-преобразование передаточной функции ПНЧ $\mathrm{H}_{\text{пнч}}(p)$, подразумевая под этой операцией Z-преобразование дискретизированной импульсной характеристики ПНЧ $h_{\text{пнч}}[n] = h_{\text{пнч}}(nT) = h_{\text{пнч}}(t)|_{t=nT}$, выраженной через передаточную функцию $\mathrm{H}_{\text{пнч}}(p)$ в соответствии с (7.27):

$$H(z) = Z\{\mathrm{H}_{\text{пнч}}(p)\} = Z\left\{L^{-1}\{\mathrm{H}_{\text{пнч}}(p)\}|_{t=nT}\right\}. \qquad (7.28)$$

С учётом формулы (7.10) запишем

$$Z\{\mathrm{H}_{\text{пнч}}(p)\} = Z\{\mathrm{K}_0(p)\,\mathrm{H}(p)\}. \qquad (7.29)$$

Используя соотношение [17]

$$Z\left\{\mathrm{H}_1(e^{pT})\,\mathrm{H}_2(p)\right\} = \mathrm{H}_1(e^{pT})\,Z\{\mathrm{H}_2(p)\} = H_1(z)\,Z\{\mathrm{H}_2(p)\}, \qquad (7.30)$$

являющееся следствием теоремы запаздывания (см. § 1.3), найдем выражения эквивалентных дискретных передаточных функций $H(z)$ [см. (7.28) и (7.29)] при дискретной аппроксимации по методам Z-преобразования, Цыпкина – Гольденберга и Рагаззини – Бергена (см. табл.7.1). Полученные результаты представлены в табл.7.2.

Передаточная функция $\mathrm{H}(p)$ моделируемой аналоговой системы имеет дробно-рациональный вид (7.25). Характеристическое уравнение $1 + \mathrm{B}(p) = 0$ содержит S различных корней, причём кратность корня с номером i равна r_i, так что

$$\sum_{i=1}^{S} r_i = N. \qquad (7.31)$$

Таблица 7.2

Метод дискретной аппроксимации	Эквивалентная дискретная передаточная функция $H(z)$
Z-преобразования	$T \cdot Z\{\mathrm{H}(p)\}$
Цыпкина – Гольденберга ($\gamma = 1$)	$(1 - z^{-1})\, Z\left\{\dfrac{\mathrm{H}(p)}{p}\right\}$
Рагаззини – Бергена ($\gamma = 2$)	$\dfrac{(1 - z^{-1})^2}{T} Z\left\{\dfrac{\mathrm{H}(p)}{p^2}\right\}$

В дальнейшем будем полагать, что $p_1 = 0$. Если же характеристическое уравнение моделируемой системы $1 + \mathrm{B}(p) = 0$ не содержит нулевого корня, то индекс i изменяется от 2 до $\tilde{S}$, где

$$\tilde{S} = \begin{cases} S, & \text{если} \quad 1 + \mathrm{B}(0) = 0; \\ S + 1, & \text{если} \quad 1 + \mathrm{B}(0) \neq 0. \end{cases} \tag{7.32}$$

Для общности изложения введём унифицированные обозначения выражений в правой колонке табл.7.2, от которых берётся Z-преобразование [1, 3, 4]:

$$\tilde{\mathrm{H}}(p) = \begin{cases} \mathrm{H}(p) = \dfrac{\mathrm{A}(p)}{1 + \mathrm{B}(p)} & \text{для метода Z - преобразования;} \\ \dfrac{\mathrm{H}(p)}{p} = \dfrac{\mathrm{A}(p)}{p\,\{1 + \mathrm{B}(p)\}} & \text{для метода Цыпкина – Гольденберга;} \\ \dfrac{\mathrm{H}(p)}{p^2} = \dfrac{\mathrm{A}(p)}{p^2\,\{1 + \mathrm{B}(p)\}} & \text{для метода Рагаззини – Бергена.} \end{cases} \tag{7.33}$$

Ненулевые полюсы функции $\tilde{\mathrm{H}}(p)$ совпадают с полюсами передаточной функции $\mathrm{H}(p)$ моделируемой системы (7.25), а нулевой полюс $p_1 = 0$ для двух последних методов имеет большую кратность. Этим и объясняется принятый выше способ нумерации полюсов передаточной функции $\mathrm{H}(p)$, дающий единый подход к моделированию при трёх методах дискретной аппроксимации.

Введём следующее обозначение для кратности полюсов функции $\tilde{\mathrm{H}}(p)$:

$$\tilde{r}_i = \begin{cases} r_i & \text{для метода Z - преобразования при } i = 1; \\ r_i + 1 & \text{для метода Цыпкина – Гольденберга при } i = 1; \\ r_i + 2 & \text{для метода Рагаззини – Бергена при } i = 1; \\ r_i, \quad i = \overline{2,\ \tilde{S}} & \text{для всех рассматриваемых методов.} \end{cases} \tag{7.34}$$

При этом согласно (7.31) имеем

$$\sum_{i=1}^{\breve{S}} \breve{r}_i = \begin{cases} N & \text{для метода Z - преобразования;} \\ N+1 & \text{для метода Цыпкина – Гольденберга;} \\ N+2 & \text{для метода Рагаззини – Бергена.} \end{cases} \qquad (7.35)$$

Для вычисления Z-преобразования передаточной функции $\breve{\mathrm{H}}(p)$ найдём вначале соответствующую ей импульсную характеристику $\breve{h}(t) = L^{-1}\{\breve{\mathrm{H}}(p)\}$. Поскольку порядок знаменателя дробно-рациональной функции $\breve{\mathrm{H}}(p)$ больше порядка числителя [см. (7.25) и табл.7.2], на основании леммы Жордана в формуле обращения [см. (7.27)] дополним прямую интегрирования $(c - j\infty,\ c + j\infty)$ дугой бесконечно большого радиуса в левой полуплоскости, образовав тем самым замкнутый контур интегрирования с обходом против часовой стрелки. Тогда по теореме о вычетах (теореме Коши)

$$\breve{h}(t) = L^{-1}\{\breve{\mathrm{H}}(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} \breve{\mathrm{H}}(p)\, e^{pt}\, dp = \sum_{i=1}^{\breve{S}} \mathrm{Res}\left\{\breve{\mathrm{H}}(p_i)\, e^{p_i t}\right\}, \qquad (7.36)$$

где вычеты в кратных полюсах p_i $\left(i = \overline{1,\ \breve{S}}\right)$ определяются формулами

$$\mathrm{Res}\left\{\breve{\mathrm{H}}(p_i)\, e^{p_i t}\right\} = \frac{1}{(\breve{r}_i - 1)!} \lim_{p \to p_i} \frac{d^{\breve{r}_i - 1}}{dp^{\breve{r}_i - 1}} \left\{\breve{\mathrm{H}}(p)\,[p - p_i]^{\breve{r}_i}\, e^{pt}\right\}, \quad i = \overline{1,\ \breve{S}}. \qquad (7.37)$$

Выполнив в (7.37) дифференцирование, найдём вычеты

$$\mathrm{Res}\left\{\breve{\mathrm{H}}(p_i)\, e^{p_i t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{(\breve{r}_i - 1)!} \sum_{k=1}^{\breve{r}_i} C_{\breve{r}_i - 1}^{k-1}\, t^{\breve{r}_i - 1} \lim_{p \to p_i} \left(\frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \left\{\breve{\mathrm{H}}(p)\,[p - p_i]^{\breve{r}_i}\right\} e^{pt} \right), \quad i = \overline{1,\ \breve{S}}, \qquad (7.38)$$

где

$$C_{\breve{r}_i - 1}^{k-1} = \frac{(\breve{r}_i - 1)!}{(k-1)!\,(\breve{r}_i - k)!} \qquad (7.39)$$

— число сочетаний из $(\breve{r}_i - 1)$ по $(k-1)$.

Суммируя вычеты (7.38) во всех полюсах согласно теореме Коши (7.36), с учётом (7.39) получим формулу (теорему) разложения Хевисайда [9]

$$\breve{h}(t) = \sum_{i=1}^{\breve{S}} \sum_{k=1}^{\breve{r}_i} \mathrm{R}_{ik}\, t^{\breve{r}_i - k}\, e^{p_i t}, \qquad (7.40)$$

в которой коэффициенты разложения

$$\mathrm{R}_{ik} = \frac{1}{(k-1)!\,(\breve{r}_i - k)!} \lim_{p \to p_i} \left(\frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \left\{\breve{\mathrm{H}}(p)[p - p_i]^{\breve{r}_i}\right\} \right), \quad i = \overline{1,\ \breve{S}},\ k = \overline{1,\ \breve{r}_i}. \qquad (7.41)$$

Для дальнейшего использования формулу (7.40) удобнее преобразовать путём замены индекса суммирования $m = \breve{r}_i - k$. При этом

$$\breve{h}(t) = \sum_{i=1}^{\breve{S}} \sum_{m=0}^{\breve{r}_i - 1} \overline{\mathrm{R}}_{im}\, t^m e^{p_i t}, \tag{7.42}$$

где коэффициенты разложения $\overline{\mathrm{R}}_{im}$ получаются из (7.41) соответствующей заменой индекса:

$$\overline{\mathrm{R}}_{im} = \mathrm{R}_{i(\breve{r}_i - m)} = \frac{1}{m!(\breve{r}_i - m - 1)!} \lim_{p \to p_i} \left(\frac{d^{\breve{r}_i - m - 1}}{dp^{\breve{r}_i - m - 1}} \left\{ \breve{\mathrm{H}}(p)\,[p - p_i]^{\breve{r}_i} \right\} \right),$$

$$i = \overline{1,\ \breve{S}},\ \ m = \overline{0,\ \breve{r}_i - 1}. \tag{7.43}$$

Проведём временную дискретизацию импульсной характеристики (7.42), осуществляя подстановку $t = nT$:

$$\breve{h}[n] = \breve{h}(nT) = \breve{h}(t)\Big|_{t=nT} = \sum_{i=1}^{\breve{S}} \sum_{m=0}^{\breve{r}_i - 1} \overline{\mathrm{R}}_{im}\, T^m n^m e^{p_i T n}. \tag{7.44}$$

Применяя обозначения

$$q_i = p_i T, \quad i = \overline{1,\ \breve{S}}, \tag{7.45}$$

в соответствии с (1.15) найдём Z-преобразование функции $\breve{h}[n]$, а следовательно, и функции $\breve{\mathrm{H}}(p)$:

$$\breve{H}(z) = Z\{\breve{h}[n]\} = Z\{\breve{\mathrm{H}}(p)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\breve{S}} \sum_{m=0}^{\breve{r}_i - 1} \overline{\mathrm{R}}_{im}\, T^m n^m e^{q_i n} z^{-n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\breve{S}} \sum_{m=0}^{\breve{r}_i - 1} \overline{\mathrm{R}}_{im}\, T^m \sum_{n=0}^{\infty} n^m e^{q_i n} z^{-n}. \tag{7.46}$$

Используя равенство

$$n^m e^{q_i n} = \frac{d^m}{dq_i^m} e^{q_i n}, \quad i = \overline{1,\ \breve{S}},\ \ m = \overline{0,\ \breve{r}_i - 1}, \tag{7.47}$$

выразим внутреннюю сумму в (7.46) следующим образом•:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^m e^{q_i n} z^{-n} = \frac{d^m}{dq_i^m} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{q_i n} z^{-n} \right) = \frac{d^m}{dq_i^m} \left(\frac{1}{1 - e^{q_i n} z^{-1}} \right),$$

$$i = \overline{1,\ \breve{S}},\ \ m = \overline{0,\ \breve{r}_i - 1}. \tag{7.48}$$

• Здесь использована формула суммы членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы.

Подставляя (7.48) в формулу (7.46), получим

$$\breve{H}(z)=\sum_{i=1}^{\breve{S}}\sum_{m=0}^{\breve{r}_i-1}\overline{\mathrm{R}}_{im}T^m\mathrm{Q}_{im}(z), \tag{7.49}$$

где

$$\mathrm{Q}_{im}(z)=\frac{d^m}{dq_i^m}\left(\frac{1}{1-e^{q_i n}z^{-1}}\right),\quad i=\overline{1,\ \breve{S}},\ m=\overline{0,\ \breve{r}_i-1}. \tag{7.50}$$

Выражения для $\mathrm{Q}_{im}(z)$ при $m=\overline{0,\ 5}$ приведены в табл.7.3 [29], где использовано обозначение $\rho_i=e^{q_i}=e^{p_iT}\ \left(i=\overline{1,\ \breve{S}}\right)$.

Таблица 7.3

m	$\mathrm{Q}_{im}(z)$
0	$\dfrac{1}{1-\rho_i z^{-1}}$
1	$\left(\rho_i z^{-1}\right)\dfrac{1}{\left(1-\rho_i z^{-1}\right)^2}$
2	$\left(\rho_i z^{-1}\right)\dfrac{1+\rho_i z^{-1}}{\left(1-\rho_i z^{-1}\right)^3}$
3	$\left(\rho_i z^{-1}\right)\dfrac{1+4\rho_i z^{-1}+\rho_i^2 z^{-2}}{\left(1-\rho_i z^{-1}\right)^4}$
4	$\left(\rho_i z^{-1}\right)\dfrac{1+11\rho_i z^{-1}+11\rho_i^2 z^{-2}+\rho_i^3 z^{-3}}{\left(1-\rho_i z^{-1}\right)^5}$
5	$\left(\rho_i z^{-1}\right)\dfrac{1+26\rho_i z^{-1}+66\rho_i^2 z^{-2}+26\rho_i^3 z^{-3}+\rho_i^4 z^{-4}}{\left(1-\rho_i z^{-1}\right)^6}$

Для нахождения передаточной функции $H(z)$ эквивалентной дискретной системы выражение (7.49) следует умножить на функцию (см. табл.7.2)

$$\Lambda(z)=\begin{cases} T & \text{для метода Z - преобразования;} \\ (1-z^{-1}) & \text{для метода Цыпкина – Гольденберга;} \\ (1-z^{-1})^2/T & \text{для метода Рагаззини – Бергена.} \end{cases} \tag{7.51}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$H(z)=\Lambda(z)\breve{H}(z). \tag{7.52}$$

Сводка формул трёх методов дискретной аппроксимации (Z-преобразования, Цыпкина – Гольденберга и Рагаззини – Бергена) для определения передаточной функции $H(z)$ эквивалентной дискретной системы по заданной передаточной функции $\mathrm{H}(p)$ моделируемой аналоговой системы, составленная в соответствии с выражениями (7.32) — (7.34) и (7.49) — (7.52), приведена в табл.7.4.

Таблица 7.4

Метод аппроксимации	Передаточная функция $H(z)$ эквивалентной дискретной системы
Z-преобразования	$H(z)=\sum_{i=1}^{\tilde{S}}\sum_{m=0}^{r_i-1}\overline{\mathrm{R}}_{im}T^{m+1}\mathrm{Q}_{im}(z)$, где $p_1=0;\quad \tilde{S}=\begin{cases}S, & \text{если } 1+\mathrm{B}(0)=0;\\ S+1, & \text{если } 1+\mathrm{B}(0)\neq 0;\end{cases}\quad \sum_{i=1}^{\tilde{S}} r_i=N;$ $\overline{\mathrm{R}}_{im}=\frac{1}{m!(r_i-m-1)!}\lim_{p\to p_i}\left(\frac{d^{r_i-m-1}}{dp^{r_i-m-1}}\{\mathrm{H}(p)[p-p_i]^{r_i}\}\right)$
Цыпкина – Гольденберга	$H(z)=\sum_{i=1}^{\tilde{S}}\sum_{m=0}^{\breve{r}_i-1}\overline{\mathrm{R}}_{im}T^{m}\left(1-z^{-1}\right)\mathrm{Q}_{im}(z)$, где $p_1=0;\quad \breve{S}=\begin{cases}S, & \text{если } 1+\mathrm{B}(0)=0;\\ S+1, & \text{если } 1+\mathrm{B}(0)\neq 0;\end{cases}$ $\breve{r}_i=\begin{cases}r_i+1, & i=1;\\ r_i, & i=\overline{2,\ \tilde{S}};\end{cases}\quad \sum_{i=1}^{\tilde{S}}\breve{r}_i=N+1;$ $\overline{\mathrm{R}}_{im}=\frac{1}{m!(\breve{r}_i-m-1)!}\lim_{p\to p_i}\left(\frac{d^{\breve{r}_i-m-1}}{dp^{\breve{r}_i-m-1}}\left\{\frac{\mathrm{H}(p)}{p}[p-p_i]^{\breve{r}_i}\right\}\right)$
Рагаззини – Бергена	$H(z)=\sum_{i=1}^{\tilde{S}}\sum_{m=0}^{\breve{r}_i-1}\overline{\mathrm{R}}_{im}T^{m-1}\left(1-z^{-1}\right)^2\mathrm{Q}_{im}(z)$, где $p_1=0;\quad \breve{S}=\begin{cases}S, & \text{если } 1+\mathrm{B}(0)=0;\\ S+1, & \text{если } 1+\mathrm{B}(0)\neq 0;\end{cases}$ $\breve{r}_i=\begin{cases}r_i+2, & i=1;\\ r_i, & i=\overline{2,\ \tilde{S}};\end{cases}\quad \sum_{i=1}^{\tilde{S}}\breve{r}_i=N+2;$ $\overline{\mathrm{R}}_{im}=\frac{1}{m!(\breve{r}_i-m-1)!}\lim_{p\to p_i}\left(\frac{d^{\breve{r}_i-m-1}}{dp^{\breve{r}_i-m-1}}\left\{\frac{\mathrm{H}(p)}{p^2}[p-p_i]^{\breve{r}_i}\right\}\right)$

Далее передаточную функцию $H(z)$, записанную в виде двойной суммы (см. табл.7.4), необходимо представить в дробно-рациональной форме (3.7). Для этого следует воспользоваться стандартным приёмом суммирования дробно-рациональных выражений на основе приведения к общему знаменателю и приведения подобных членов. Затем по передаточной функции $H(z)$ составляется рекуррентный разностный алгоритм (2.2), являющийся дискретной моделью аналоговой стационарной линейной системы с передаточной функцией $\mathrm{H}(p)$ дробно-рационального вида (7.25). Структурная схема этого алгоритма (одномерного скалярного вещественного стационарного рекурсивного линейного ЦФ) изображена на рис.4.2.

Среди рассмотренных методов дискретной аппроксимации наибольшую точность моделирования обеспечивает метод Рагаззини – Бергена, использующий линейную интерполяцию. Точность метода Цыпкина – Гольденберга (ступенчатая интерполяция) несколько уступает ему. При отсутствии интерполяции (метод Z-преобразования) точность моделирования будет наименьшей.

Для повышения точности дискретной аппроксимации аналоговых систем в принципе возможно применение интерполирующих функций более высокого порядка, чем линейная. Однако это приводит к существенному усложнению моделирующих алгоритмов и, самое главное, к увеличению объёма подготовительной работы, выполняемой вручную. В связи с этим дальнейшее повышение точности дискретной аппроксимации за счёт увеличения порядка интерполирующей функции часто не оправдано. Для повышения точности цифрового моделирования оказывается более выгодным некоторое уменьшение шага дискретизации $T = 1/f_{\text{д}}$, чем использование алгоритмов дискретной аппроксимации, основанных на высших интерполяционных формулах [29].

Пример 7.1. Передаточная функция аналоговой системы имеет вид

$$\mathrm{H}(p) = \mathrm{K}_0 \frac{1 + p\tau_1}{p(1 + p\tau_2)}.$$

Составить цифровой моделирующий алгоритм, используя метод Z-преобразования.

Передаточная функция $\mathrm{H}(p)$ имеет два полюса: $p_1 = 0$ и $p_2 = -1/\tau_2$. Поскольку полюсы простые, их кратность $\breve{r}_1 = 1$ и $\breve{r}_2 = 1$, а $\breve{S} = S = 2$. Воспользовавшись табл.7.4, запишем выражение для передаточной функции эквивалентной дискретной системы

$$H(z) = \overline{\mathrm{R}}_{10}\, T^1\, \mathrm{Q}_{10}(z) + \overline{\mathrm{R}}_{20}\, T^1\, \mathrm{Q}_{20}(z),$$

где коэффициенты разложения $\overline{\mathrm{R}}_{10}$ и $\overline{\mathrm{R}}_{20}$ определяются по формулам (7.43). Их значения равны $\overline{\mathrm{R}}_{10} = \mathrm{K}_0$, $\overline{\mathrm{R}}_{20} = -\mathrm{K}_0(1 - \tau_1/\tau_2)$. Функции $\mathrm{Q}_{10}(z)$ и $\mathrm{Q}_{20}(z)$ возьмём из табл.7.3:

$$\mathrm{Q}_{10}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}; \qquad \mathrm{Q}_{20}(z) = \frac{1}{1 - \rho_2 z^{-1}},$$

где $\rho_2 = \exp(-T/\tau_2)$; T — шаг дискретизации.

В результате подстановки в выражение для $H(z)$ коэффициентов $\overline{\mathrm{R}}_{10}$, $\overline{\mathrm{R}}_{20}$ и функций $\mathrm{Q}_{10}(z)$, $\mathrm{Q}_{20}(z)$ после приведения к общему знаменателю получим передаточную функцию дробно-рационального вида

$$H(z)=\frac{a_0+a_1z^{-1}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}},$$

где

$$a_0=\mathrm{K}_0T\frac{\tau_1}{\tau_2};\quad a_1=\mathrm{K}_0T\left(1-\rho_2-\frac{\tau_1}{\tau_2}\right);\quad b_1=-(1+\rho_2);\quad b_2=\rho_2.$$

Моделирующий алгоритм имеет следующий вид [см. (2.2)]:

$$y[n]=a_0x[n]+a_1x[n-1]-b_1y[n-1]-b_2y[n-2].$$

Пример 7.2. Передаточная функция аналоговой системы имеет вид

$$\mathrm{H}(p)=\frac{\mathrm{K}_0}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)}.$$

Составить цифровой моделирующий алгоритм, используя метод Цыпкина – Гольденберга.

Передаточная функция $\breve{\mathrm{H}}(p)$ [см. (7.33)] имеет три полюса: $p_1=0$, $p_2=-1/\tau_1$ и $p_3=-1/\tau_2$. Все полюсы простые, их кратность $\breve{r}_1=1$, $\breve{r}_2=1$ и $\breve{r}_3=1$ [см. (7.34)], а $\breve{S}=3$ [см. (7.32)]. Воспользовавшись табл.7.4, запишем выражение для передаточной функции эквивалентной дискретной системы

$$H(z)=\overline{\mathrm{R}}_{10}T^0\left(1-z^{-1}\right)\mathrm{Q}_{10}(z)+\overline{\mathrm{R}}_{20}T^0\left(1-z^{-1}\right)\mathrm{Q}_{20}(z)+\overline{\mathrm{R}}_{30}T^0\left(1-z^{-1}\right)\mathrm{Q}_{30}(z),$$

где коэффициенты разложения $\overline{\mathrm{R}}_{10}$, $\overline{\mathrm{R}}_{20}$ и $\overline{\mathrm{R}}_{30}$ определяются по формулам (7.43). Их значения равны $\overline{\mathrm{R}}_{10}=\mathrm{K}_0$, $\overline{\mathrm{R}}_{20}=\mathrm{K}_0\tau_1/(\tau_2-\tau_1)$ и $\overline{\mathrm{R}}_{30}=\mathrm{K}_0\tau_2/(\tau_1-\tau_2)$. Функции $\mathrm{Q}_{10}(z)$, $\mathrm{Q}_{20}(z)$ и $\mathrm{Q}_{30}(z)$ возьмём из табл.7.3:

$$\mathrm{Q}_{10}(z)=\frac{1}{1-z^{-1}};\quad \mathrm{Q}_{20}(z)=\frac{1}{1-\rho_1z^{-1}};\quad \mathrm{Q}_{30}(z)=\frac{1}{1-\rho_2z^{-1}},$$

где $\rho_1=\exp(-T/\tau_1)$; $\rho_2=\exp(-T/\tau_2)$; T — шаг дискретизации.

В результате подстановки в выражение для $H(z)$ коэффициентов $\overline{\mathrm{R}}_{10}$, $\overline{\mathrm{R}}_{20}$, $\overline{\mathrm{R}}_{30}$ и функций $\mathrm{Q}_{10}(z)$, $\mathrm{Q}_{20}(z)$, $\mathrm{Q}_{30}(z)$ после приведения к общему знаменателю получим

$$H(z)=\frac{a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}},$$

где

$$a_1=\mathrm{K}_0\frac{\tau_1(1-\rho_1)-\tau_2(1-\rho_2)}{\tau_1-\tau_2};\quad a_2=\mathrm{K}_0\frac{\tau_2\rho_1-\tau_1\rho_2+(\tau_1-\tau_2)\rho_1\rho_2}{\tau_1-\tau_2};$$

$$b_1=-(\rho_1+\rho_2);\quad b_2=\rho_1\rho_2.$$

Цифровой моделирующий алгоритм имеет следующий вид [см. (2.2)]:

$$y[n]=a_1x[n-1]+a_2x[n-2]-b_1y[n-1]-b_2y[n-2].$$

Пример 7.3. Передаточная функция аналоговой системы имеет вид

$$\mathrm{H}(p)=\frac{\mathrm{K}_0(1+p\tau)}{p^2}.$$

Составить цифровой моделирующий алгоритм, используя метод Рагаззини – Бергена.

Передаточная функция $\tilde{\mathrm{H}}(p)$ [см. (7.33)] имеет один полюс $p=0$, кратность которого $\tilde{r}=4$ [см. (7.34)], а $\tilde{S}=1$ [см. (7.32)]. Воспользовавшись табл.7.4, запишем выражение для передаточной функции эквивалентной дискретной системы

$$H(z)=\overline{\mathrm{R}}_{10}T^{-1}\left(1-z^{-1}\right)^2\mathrm{Q}_{10}(z)+\overline{\mathrm{R}}_{11}T^{0}\left(1-z^{-1}\right)^2\mathrm{Q}_{11}(z)+$$
$$+\overline{\mathrm{R}}_{12}T^{1}\left(1-z^{-1}\right)^2\mathrm{Q}_{12}(z)+\overline{\mathrm{R}}_{13}T^{2}\left(1-z^{-1}\right)^2\mathrm{Q}_{13}(z),$$

где коэффициенты разложения $\overline{\mathrm{R}}_{10}$, $\overline{\mathrm{R}}_{11}$, $\overline{\mathrm{R}}_{12}$ и $\overline{\mathrm{R}}_{13}$ определяются по формулам (7.43). Их значения равны $\overline{\mathrm{R}}_{10}=0$, $\overline{\mathrm{R}}_{11}=0$, $\overline{\mathrm{R}}_{12}=\mathrm{K}_0\tau/2$ и $\overline{\mathrm{R}}_{13}=\mathrm{K}_0/6$. Функции $\mathrm{Q}_{10}(z)$, $\mathrm{Q}_{11}(z)$, $\mathrm{Q}_{12}(z)$ и $\mathrm{Q}_{13}(z)$ возьмём из табл.7.3:

$$\mathrm{Q}_{10}(z)=\frac{1}{1-z^{-1}};\quad \mathrm{Q}_{11}(z)=\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2};$$

$$\mathrm{Q}_{12}(z)=\frac{z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^3};\quad \mathrm{Q}_{12}(z)=\frac{z^{-1}\left(1+4z^{-1}+z^{-2}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^4}.$$

В результате подстановки в выражение для $H(z)$ коэффициентов $\overline{\mathrm{R}}_{10}$, $\overline{\mathrm{R}}_{11}$, $\overline{\mathrm{R}}_{12}$, $\overline{\mathrm{R}}_{13}$ и функций $\mathrm{Q}_{10}(z)$, $\mathrm{Q}_{11}(z)$, $\mathrm{Q}_{12}(z)$, $\mathrm{Q}_{13}(z)$ после приведения к общему знаменателю получим

$$H(z)=\frac{a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}},$$

где

$$a_1=\frac{\mathrm{K}_0T(T+3\tau)}{6};\quad a_2=\frac{2\mathrm{K}_0T^2}{3};\quad a_3=\frac{\mathrm{K}_0T(T-3\tau)}{6};\quad b_1=-2;\quad b_2=1.$$

Цифровой моделирующий алгоритм имеет следующий вид [см. (2.2)]:

$$y[n]=a_1x[n-1]+a_2x[n-2]+a_3x[n-3]-b_1y[n-1]-b_2y[n-2].$$

Из приведённых примеров видно, что независимо от метода дискретной аппроксимации порядок рекуррентного моделирующего алгоритма всегда совпадает с порядком передаточной функции моделируемой аналоговой линейной системы. Объём вычислительных затрат на расчёт одного отсчёта выходного процесса $y[n]$ не зависит от номера этого отсчёта, т.е. не зависит от длины реализации. Таким образом, рекуррентные разностные алгоритмы моделирования аналоговых линейных систем с точки зрения вычислительных затрат являются более экономичными, чем алгоритмы моделирования, основанные на дискретной свёртке (см. § 7.2). Недостатки рекуррентных алгоритмов заключаются в сложности подготовительной работы, связанной с нахождением коэффициентов моделирующего алгоритма, и в накоплении погрешностей вычислений.

Пример 7.4. Структурная схема линейной аналоговой системы с отрицательной обратной связью изображена на рис.7.3. Составить цифровой моделирующий алгоритм по методу Рагаззини – Бергена.

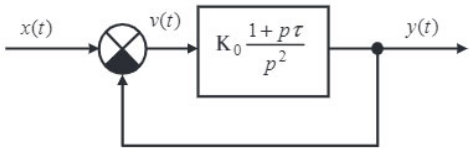


Рис.7.3. Структурная схема замкнутой линейной аналоговой системы в примере 7.4

Используя цифровую модель линейного динамического звена, рассмотренную в примере 7.3, запишем систему уравнений (моделирующий алгоритм)

$$\begin{cases} v[n] = x[n] - y[n]; \\ y[n] = a_1 v[n-1] + a_2 v[n-2] + a_3 v[n-3] - b_1 y[n-1] - b_2 y[n-2]. \end{cases}$$

Эту систему уравнений необходимо решать относительно $y[n]$ на каждом шаге дискретизации n, что требует значительных вычислительных затрат. Если в цепь обратной связи цифровой модели включить звено задержки на один шаг дискретизации, передаточная функция которого равна z^{-1}, то моделирующий алгоритм примет вид

$$\begin{cases} v[n] = x[n] - y[n-1]; \\ y[n] = a_1 v[n-1] + a_2 v[n-2] + a_3 v[n-3] - b_1 y[n-1] - b_2 y[n-2]. \end{cases}$$

При этом моделирующий алгоритм существенно упрощается, так как система уравнений заменяется рекуррентными формулами, что приводит к существенно меньшему объёму вычислений на каждом шаге дискретизации n.

Для аналоговых систем невысокого порядка получить цифровой моделирующий алгоритм сравнительно просто. Задача существенно усложняется при высоком порядке системы. Это связано с необходимостью определения корней характеристического уравнения моделируемой системы, а также с увеличением объёма подготовительной работы, связанной с нахождением коэффициентов моделирующего алгоритма, выполняемой вручную.

Обычно *система*, предназначенная для выполнения определённого круга задач в заданных условиях, состоит из совокупности взаимосвязанных и взаимодействующих *частей* (подсистем, блоков, звеньев) и представляет собой единое целое. Подсистема проще системы в целом, поэтому проще её математическая модель. Этим обусловлено стремление разработать *универсальные* цифровые модели типовых подсистем (динамических звеньев), из которых, как из «кубиков» при соединении их в определённом порядке, можно получить цифровую модель системы. Вопросы декомпозиции и композиции модели системы обсуждались в § 7.1.

В табл.7.5 приведены передаточные функции эквивалентных дискретных систем для типовых аналоговых динамических звеньев [4]. Использование их

упрощает построение цифровой модели любой аналоговой стационарной линейной системы.

Таблица 7.5

Передаточная функция аналогового звена $H(p)$	Передаточная функция эквивалентного дискретного звена (цифровой модели) $H(z)$
1	**2**
$\frac{A}{p}$	Метод Z-преобразования $\frac{a_0}{1+b_1 z^{-1}}$, где $a_0 = AT$; $b_1 = -1$
	Метод Цыпкина – Гольденберга $\frac{a_1 z^{-1}}{1+b_1 z^{-1}}$, где $a_1 = AT$; $b_1 = -1$
	Метод Рагаззини – Бергена $\frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1+b_1 z^{-1}}$, где $a_1 = AT/2$; $a_2 = AT/2$; $b_1 = -1$
$\frac{A}{1+p\tau}$	Метод Z-преобразования $\frac{a_0}{1+b_1 z^{-1}}$, где $\rho = \exp(-T/\tau)$; $a_0 = AT/\tau$; $b_1 = -\rho$
	Метод Цыпкина – Гольденберга $\frac{a_1 z^{-1}}{1+b_1 z^{-1}}$, где $\rho = \exp(-T/\tau)$; $a_1 = A(1-\rho)$; $b_1 = -\rho$
	Метод Рагаззини – Бергена $\frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1+b_1 z^{-1}}$, где $\rho = \exp(-T/\tau)$; $a_1 = (\rho-1)A\tau/T + A$; $a_2 = (1-\rho)A\tau/T - A\rho$; $b_1 = -\rho$

Продолжение табл. 7.5

1	2
$\frac{A+pB}{p^2}$	Метод Z-преобразования $\frac{a_0+a_1z^{-1}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$, где $a_0=BT$; $a_1=AT^2-BT$; $b_1=-2$; $b_2=1$
	Метод Цыпкина – Гольденберга $\frac{a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$, где $a_1=AT^2/2+BT$; $a_2=AT^2/2-BT$; $b_1=-2$; $b_2=1$
	Метод Рагаззини – Бергена $\frac{a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$, где $a_1=AT^2/6+BT/2$; $a_2=2AT^2/3$; $a_3=AT^2/6-BT/2$; $b_1=-2$; $b_2=1$
$\frac{A+pB}{p(1+p\tau)}$	Метод Z-преобразования $\frac{a_0+a_1z^{-1}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$, где $\rho=\exp(-T/\tau)$; $a_0=BT/\tau$; $a_1=AT(1-\rho)-BT/\tau$; $b_1=-(1+\rho)$; $b_2=\rho$
	Метод Цыпкина – Гольденберга $\frac{a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$, где $\rho=\exp(-T/\tau)$; $a_1=AT-(A\tau-B)(1-\rho)$; $a_2=(A\tau-B)(1-\rho)-AT\rho$; $b_1=-(1+\rho)$; $b_2=\rho$
	Метод Рагаззини – Бергена $\frac{a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$, где $\rho=\exp(-T/\tau)$; $a_1=(1-\rho)(A\tau^2/T-B\tau/T)+AT/2-A\tau+B$; $a_2=(1-\rho)(AT/2-2A\tau^2/T+2B\tau/T)+(A\tau-B)(1+\rho)$; $a_3=(1-\rho)(A\tau^2/T-B\tau/T)-(AT/2+A\tau-B)\rho$; $b_1=-(1+\rho)$; $b_2=\rho$

Продолжение табл. 7.5

1	2
$\frac{A+pB}{(1+p\tau)^2}$	Метод Z-преобразования $\frac{a_0+a_1z^{-1}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$, где $\rho=\exp(-T/\tau)$; $a_0=BT/\tau^2$; $a_1=(AT^2/\tau^2-BT^2/\tau^3-BT/\tau^2)\rho$; $b_1=-2\rho$; $b_2=\rho^2$
	Метод Цыпкина – Гольденберга $\frac{a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$, где $\rho=\exp(-T/\tau)$; $a_1=A(1-\rho)+(BT/\tau^2-AT/\tau)\rho$; $a_2=A\rho^2+(AT/\tau-BT/\tau^2-A)\rho$; $b_1=-2\rho$; $b_2=\rho^2$
	Метод Рагаззини – Бергена $\frac{a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$, где $\rho=\exp(-T/\tau)$; $a_1=(2A\tau/T-B/T)(\rho-1)+A+(A-B/\tau)\rho$; $a_2=(2A\tau/T-B/T)(1-\rho^2)+(2B/\tau-4A)\rho$; $a_3=(2A\tau/T-B/T)(\rho^2-\rho)+A\rho^2+(A-B/\tau)\rho$; $b_1=-2\rho$; $b_2=\rho^2$
$\frac{A+pB}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)}$	Метод Z-преобразования $\frac{a_0+a_1z^{-1}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$, где $\rho_1=\exp(-T/\tau_1)$; $\rho_2=\exp(-T/\tau_2)$; $a_0=BT/(\tau_1\tau_2)$; $a_1=[A(\rho_1-\rho_2)+B(\rho_2/\tau_1-\rho_1/\tau_2)]T/(\tau_1-\tau_2)$; $b_1=-(\rho_1+\rho_2)$; $b_2=\rho_1\rho_2$
	Метод Цыпкина – Гольденберга $\frac{a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$, где $\rho_1=\exp(-T/\tau_1)$; $\rho_2=\exp(-T/\tau_2)$; $a_1=[(A\tau_1-B)\rho_2-(A\tau_2-B)\rho_1]/(\tau_1-\tau_2)+A-$ $-A(\rho_1+\rho_2)$; $a_2=[(A\tau_2-B)\rho_1-(A\tau_1-B)\rho_2]/(\tau_1-\tau_2)+A\rho_1\rho_2$; $b_1=-(\rho_1+\rho_2)$; $b_2=\rho_1\rho_2$

Продолжение табл. 7.5

1	2
$\dfrac{A+pB}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)}$	Метод Рагаззини – Бергена $\dfrac{a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+a_3 z^{-3}}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}$, где $\rho_1=\exp(-T/\tau_1)$; $\rho_2=\exp(-T/\tau_2)$; $a_1=A+[(A\tau_2^2-B\tau_2)(2+\rho_1)-$ $-(A\tau_1^2-B\tau_1)(2+\rho_2)]/[T(\tau_1-\tau_2)]+$ $+[A(\tau_1+\tau_2)-B](1+\rho_1+\rho_2)/T$; $a_2=[(A\tau_1^2-B\tau_1)(1+2\rho_2)-$ $-(A\tau_2^2-B\tau_2)(1+2\rho_1)]/[T(\tau_1-\tau_2)]-$ $-[A(\tau_1+\tau_2)-B](\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)/T-A(\rho_1+\rho_2)$; $a_3=[(A\tau_2^2-B\tau_2)\rho_1-(A\tau_1^2-B\tau_1)\rho_2]/[T(\tau_1-\tau_2)]+$ $+[A(\tau_1+\tau_2)-B]\rho_1\rho_2/T+A\rho_1\rho_2$; $b_1=-(\rho_1+\rho_2)$; $b_2=\rho_1\rho_2$
$\dfrac{A+pB}{1+2\xi p\tau+p^2\tau^2}$; $\sigma=-\xi/\tau$; $\omega=\sqrt{1-\xi^2}/\tau$	Метод Z-преобразования $\dfrac{a_0+a_1 z^{-1}}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}$, где $\rho_c=\exp(\sigma T)\cos(\omega T)$; $\rho_s=\exp(\sigma T)\sin(\omega T)$; $a_0=BT/\tau^2$; $a_1=[(A+B\sigma)\rho_s-B\omega\rho_c]T/\omega\tau^2$; $b_1=-2\rho_c$; $b_2=\rho_c^2+\rho_s^2=\exp(2\sigma T)$
	Метод Цыпкина – Гольденберга $\dfrac{a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}$, где $\rho_c=\exp(\sigma T)\cos(\omega T)$; $\rho_s=\exp(\sigma T)\sin(\omega T)$; $a_1=[A\sigma+B/\tau^2]\rho_s/\omega+A(1-\rho_c)$; $a_2=A(\rho_c^2+\rho_s^2-\rho_c)-[A\sigma+B/\tau^2]\rho_s/\omega$; $b_1=-2\rho_c$; $b_2=\rho_c^2+\rho_s^2=\exp(2\sigma T)$

Продолжение табл. 7.5

1	2
$\dfrac{A+pB}{1+2\xi p\tau+p^2\tau^2}$; $\sigma=-\xi/\tau$; $\omega=\sqrt{1-\xi^2}/\tau$	Метод Рагаззини – Бергена $\dfrac{a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$, где $\rho_c=\exp(\sigma T)\cos(\omega T)$; $\rho_s=\exp(\sigma T)\sin(\omega T)$; $a_1=[A(\sigma^2-\omega^2)\tau^2+B\sigma]\rho_s/\omega T+$ $+(2A\sigma\tau^2+B)(1-\rho_c)/T+A$; $a_2=(2A\sigma\tau^2+B)(\rho_c^2+\rho_s^2-1)/T-2A\rho_c-$ $-2[A(\sigma^2-\omega^2)\tau^2+B\sigma]\rho_s/\omega T$; $a_3=[A(\sigma^2-\omega^2)\tau^2+B\sigma]\rho_s/\omega T+$ $+(2A\sigma\tau^2+B)(\rho_c-\rho_c^2-\rho_s^2)/T+A(\rho_c^2+\rho_s^2)$; $b_1=-2\rho_c$; $b_2=\rho_c^2+\rho_s^2=\exp(2\sigma T)$
$\dfrac{\dot{A}}{1+p\dot{B}}$, где $\dot{A}=A_c+jA_s$; $\dot{B}=A_c+jB_s$	Метод Z-преобразования $\dfrac{\dot{a}_0}{1+\dot{b}_1z^{-1}}$, где $C=-B_c/(B_c^2+B_s^2)$; $S=B_s/(B_c^2+B_s^2)$; $\rho_c=\exp(CT)\cos(ST)$; $\rho_s=\exp(CT)\sin(ST)$; $\dot{a}_0=a_{0c}+ja_{0s}$; $\dot{b}_1=b_{1c}+jb_{1s}$; $a_{0c}=(A_cB_c+A_sB_s)T/(B_c^2+B_s^2)$; $a_{0s}=(A_sB_c-A_cB_s)T/(B_c^2+B_s^2)$; $b_{1c}=-\rho_c$; $b_{1s}=-\rho_s$
	Метод Цыпкина – Гольденберга $\dfrac{\dot{a}_1z^{-1}}{1+\dot{b}_1z^{-1}}$, где $C=-B_c/(B_c^2+B_s^2)$; $S=B_s/(B_c^2+B_s^2)$; $\rho_c=\exp(CT)\cos(ST)$; $\rho_s=\exp(CT)\sin(ST)$; $\dot{a}_1=a_{1c}+ja_{1s}$; $\dot{b}_1=b_{1c}+jb_{1s}$; $a_{1c}=A_c(1-\rho_c)+A_s\rho_s$; $a_{1s}=A_s(1-\rho_c)-A_c\rho_s$; $b_{1c}=-\rho_c$; $b_{1s}=-\rho_s$

Окончание табл. 7.5

1	2
$\dfrac{\dot{\mathrm{A}}}{1+p\dot{\mathrm{B}}}$, где $\dot{\mathrm{A}}=A_{\mathrm{c}}+jA_{\mathrm{s}}$; $\dot{\mathrm{B}}=A_{\mathrm{c}}+jB_{\mathrm{s}}$	Метод Рагаззини – Бергена $\dfrac{\dot{a}_1 z^{-1}+\dot{a}_2 z^{-2}}{1+\dot{b}_1 z^{-1}}$, где $C=-B_{\mathrm{c}}\big/(B_{\mathrm{c}}^2+B_{\mathrm{s}}^2)$; $S=B_{\mathrm{s}}\big/(B_{\mathrm{c}}^2+B_{\mathrm{s}}^2)$; $\rho_{\mathrm{c}}=\exp(CT)\cos(ST)$; $\rho_{\mathrm{s}}=\exp(CT)\sin(ST)$; $W_1=A_{\mathrm{c}}B_{\mathrm{c}}-A_{\mathrm{s}}B_{\mathrm{s}}$; $W_2=A_{\mathrm{c}}B_{\mathrm{s}}+A_{\mathrm{s}}B_{\mathrm{c}}$; $\dot{a}_1=a_{1\mathrm{c}}+ja_{1\mathrm{s}}$; $\dot{a}_2=a_{2\mathrm{c}}+ja_{2\mathrm{s}}$; $\dot{b}_1=b_{1\mathrm{c}}+jb_{1\mathrm{s}}$; $a_{1\mathrm{c}}=[W_1(\rho_{\mathrm{c}}-1)-W_2\rho_{\mathrm{s}}]/T+A_{\mathrm{c}}$; $a_{1\mathrm{s}}=[W_2(\rho_{\mathrm{c}}-1)+W_1\rho_{\mathrm{s}}]/T+A_{\mathrm{s}}$; $a_{2\mathrm{c}}=[W_1(1-\rho_{\mathrm{c}})+W_2\rho_{\mathrm{s}}]/T-A_{\mathrm{c}}\rho_{\mathrm{c}}+A_{\mathrm{s}}\rho_{\mathrm{s}}$; $a_{2\mathrm{s}}=[W_2(1-\rho_{\mathrm{c}})-W_1\rho_{\mathrm{s}}]/T-A_{\mathrm{c}}\rho_{\mathrm{s}}-A_{\mathrm{s}}\rho_{\mathrm{c}}$; $b_{1\mathrm{c}}=-\rho_{\mathrm{c}}$; $b_{1\mathrm{s}}=-\rho_{\mathrm{s}}$

7.5. Дискретная аппроксимация на основе формул численного интегрирования (метод В.В. Быкова)

Из методов второй группы дискретной аппроксимации передаточной функции аналоговой стационарной линейной системы, базирующихся на применении формул численного интегрирования (см. § 7.3), рассмотрим метод, предложенный В.В. Быковым [29].

Сигнал на выходе аналоговой линейной стационарной системы можно найти во временной области с помощью интеграла свёртки (7.4). Предположим, что полюсы $p_k\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ передаточной функции системы $\mathrm{H}(p)$, имеющей дробно-рациональный вид (7.25), простые (некратные). В этом случае импульсная характеристика $h(t)$ является суперпозицией экспонент:

$$h(t)=\sum_{k=1}^{N} h_k(t), \tag{7.53}$$

где парциальные импульсные характеристики системы, соответствующие полюсам $p_k\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ передаточной функции $\mathrm{H}(p)$, имеют вид

$$h_k(t)=C_k e^{p_k t},\quad k=\overline{1,\ N}, \tag{7.54}$$

а постоянные коэффициенты $C_k\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ в (7.54) представляют собой вычеты функции $\mathrm{H}(p)$ в простых полюсах:

$$C_k=\lim_{p\to p_k}\{\mathrm{H}(p)[p-p_k]\},\quad k=\overline{1,\ N}. \tag{7.55}$$

Подставляя разложение (7.53) импульсной характеристики системы в интеграл свёртки (7.4), получим выходной сигнал $y(t)$ в виде суммы парциальных сигналов $y_k(t)\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$:

$$y(t)=\sum_{k=1}^{N} y_k(t), \tag{7.56}$$

где

$$y_k(t)=\int_0^t x(\tau)h_k(t-\tau)\,d\tau, \quad k=\overline{1,\ N}. \tag{7.57}$$

Экспоненциальная форма парциальных импульсных характеристик $h_k(t)$ $\left(k=\overline{1,\ N}\right)$ [см. (7.54)] позволяет найти простое рекуррентное уравнение для дискретных отсчётов парциальных выходных сигналов $y_k(t)\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ [29]. Действительно, для дискретных моментов времени $t_n=nT$ в соответствии с выражениями (7.54) и (7.57) имеем

$$y_k[n]=y(nT)=C_k\int_0^{nT} x(\tau)\exp\left[p_k(nT-\tau)\right]d\tau, \quad k=\overline{1,\ N}. \tag{7.58}$$

Заменой переменной интегрирования $\tau=\xi T$ получим

$$y_k[n]=\overline{C}_k\int_0^{n} x(\xi)\exp\left[q_k(n-\xi)\right]d\xi, \quad k=\overline{1,\ N}, \tag{7.59}$$

где обозначено:

$$\overline{C}_k=C_kT; \quad q_k=p_kT, \quad k=\overline{1,\ N}. \tag{7.60}$$

Согласно (7.59) запишем значения парциальных выходных сигналов в $(n-1)$-й момент «дискретного времени»

$$y_k[n-1]=\overline{C}_k\int_0^{n-1} x(\xi)\exp\left[q_k(n-1-\xi)\right]d\xi, \quad k=\overline{1,\ N}. \tag{7.61}$$

Разобьём интервал интегрирования $[0,n]$ в (7.59) на два подынтервала: $[0,\ n-1]$ и $[n-1,\ n]$:

$$y_k[n]=\overline{C}_k\int_0^{n-1} x(\xi)\exp\left[q_k(n-\xi)\right]d\xi+\overline{C}_k\int_{n-1}^{n} x(\xi)\exp\left[q_k(n-\xi)\right]d\xi=$$

$$=e^{q_k}y[n-1]+\overline{C}_k\int_{n-1}^{n} x(\xi)\exp\left[q_k(n-\xi)\right]d\xi, \quad k=\overline{1,\ N}. \tag{7.62}$$

К интегралу в правой части (7.62) применим формулу трапеций

$$\int_a^b f(\xi)\,d\xi = \frac{f(b)+f(a)}{2(b-a)}.$$

В результате получим

$$y_k[n] = \frac{\overline{C}_k}{2}\left\{x[n] + e^{q_k}x[n-1]\right\} + e^{q_k}y[n-1], \quad k=\overline{1,\,N}. \tag{7.63}$$

Рекуррентные формулы (7.63) описывают дискретные фильтры с передаточными функциями

$$H_k(z) = \frac{\overline{C}_k}{2}\frac{1+e^{q_k}z^{-1}}{1-e^{q_k}z^{-1}}, \quad k=\overline{1,\,N}. \tag{7.64}$$

Согласно (7.56) дискретные значения выходного сигнала $y[n]$ равны сумме дискретных значений парциальных выходных сигналов $y_k[n]$ $\left(k=\overline{1,\,N}\right)$, следовательно

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\overline{C}_k}{2}\left\{x[n] + e^{q_k}x[n-1]\right\} + e^{q_k}y[n-1]\right), \tag{7.65}$$

а передаточная функция эквивалентной дискретной системы равна сумме парциальных передаточных функций (7.64):

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} H_k(z) = \sum_{k=1}^{N}\frac{\overline{C}_k}{2}\frac{1+e^{q_k}z^{-1}}{1-e^{q_k}z^{-1}}. \tag{7.66}$$

Передаточную функцию $H(z)$ следует представить в дробно-рациональном виде (3.7). После этого составляется рекуррентный разностный алгоритм (2.2), являющийся дискретной моделью аналоговой стационарной линейной системы, описываемой передаточной функцией $\mathrm{H}(p)$ дробно-рационального вида (7.25). Структурная схема этого алгоритма (одномерного скалярного вещественного стационарного рекурсивного линейного ЦФ) изображена на рис.4.2.

Пример 7.5. Передаточная функция аналоговой системы имеет вид

$$\mathrm{H}(p) = \frac{\mathrm{K}_0}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)}.$$

Составить цифровой моделирующий алгоритм, используя метод В.В. Быкова.

Передаточная функция моделируемой системы $\mathrm{H}(p)$ имеет два простых полюса: $p_1 = -1/\tau_1$ и $p_2 = -1/\tau_2$. В соответствии с (7.66) эквивалентная дискретная передаточная функция имеет вид

$$H(z) = \frac{\overline{C}_1}{2}\frac{1+e^{q_1}z^{-1}}{1-e^{q_1}z^{-1}} + \frac{\overline{C}_2}{2}\frac{1+e^{q_2}z^{-1}}{1-e^{q_2}z^{-1}},$$

где согласно (7.55) и (7.60)

$$\overline{C}_1 = \frac{\mathrm{K}_0 T}{\tau_1 - \tau_2}; \quad \overline{C}_2 = \frac{\mathrm{K}_0 T}{\tau_2 - \tau_1}; \quad q_1 = \frac{-T}{\tau_1}; \quad q_2 = \frac{-T}{\tau_2}.$$

Обозначим

$$\rho_1 = \exp(q_1) = \exp(-T/\tau_1); \quad \rho_2 = \exp(q_2) = \exp(-T/\tau_2).$$

Тогда

$$H(z) = \frac{\mathrm{K}_0 T}{2(\tau_1 - \tau_2)}\left(\frac{1+\rho_1 z^{-1}}{1-\rho_1 z^{-1}} - \frac{1+\rho_2 z^{-1}}{1-\rho_2 z^{-1}}\right) = \frac{a_1 z^{-1}}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}},$$

где

$$a_1 = \frac{\mathrm{K}_0(\rho_1 - \rho_2)}{\tau_1 - \tau_2}; \quad b_1 = -(\rho_1 + \rho_2); \quad b_2 = \rho_1 \rho_2.$$

Цифровой моделирующий алгоритм имеет следующий вид [см. (2.2)]:

$$y[n] = a_1 x[n-1] - b_1 y[n-1] - b_2 y[n-2].$$

Рассмотренный вариант метода В.В. Быкова основан на применении формулы трапеций (линейная интерполяция), поэтому его точность примерно соответствует точности метода Рагаззини – Бергена.

Данный метод допускает обобщение на случай кратных полюсов передаточной функции $\mathrm{H}(p)$. Возможна также модификация метода В.В. Быкова, основанная на использовании высших интерполяционных формул [29].

7.6. Методы, основанные на преобразовании структурной схемы

Описанные выше методы дискретной аппроксимации требуют нахождения полюсов передаточной функции $\mathrm{H}(p)$ моделируемой системы [см. (7.25)], после чего передаточная функция $H(z)$ эквивалентной дискретной (моделирующей) системы определяется по соответствующим формулам [см. табл.7.4, а также выражения (7.55), (7.60), (7.66)]. Вычисление полюсов передаточной функции $\mathrm{H}(p)$, особенно при высоком порядке системы, обычно сопряжено с большими трудностями•.

В этих случаях удобными оказываются методы дискретной аппроксимации, основанные на преобразовании структурной схемы моделируемой аналоговой системы. Суть подобных методов состоит в том, что структура аналоговой системы преобразуется так, чтобы представить её состоящей из набора простых динамических звеньев, полюсы которых легко определяются (например, идеальных интеграторов различных порядков). Цифровые модели таких звеньев получить сравнительно просто, а эквивалентную дискретную передаточную функцию $H(z)$ всей системы можно найти по дискретным передаточным функ-

• В настоящее время при численном задании коэффициентов передаточной функции $\mathrm{H}(p)$ нахождение её полюсов не представляет затруднений, если использовать систему компьютерной математики Mathcad.

циям её звеньев, используя формулы для передаточных функций системы при различных соединениях её динамических звеньев (см. § 4.4).

Путём деления числителя и знаменателя передаточной функции моделируемой системы (7.25) на p^N приведём $\mathrm{H}(p)$ к виду [29]

$$\mathrm{H}(p)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{M}\dfrac{\alpha_k}{p^{N-k}}}{\sum\limits_{k=0}^{N}\dfrac{\beta_k}{p^{N-k}}},\quad M<N. \tag{7.67}$$

Это преобразование эквивалентно замене системы с передаточной функцией дробно-рационального вида (7.25) системой с той же передаточной функцией, но имеющей другую структуру, включающую лишь интегрирующие звенья с различными коэффициентами передачи, соединённые по схеме, изображённой на рис.7.4.

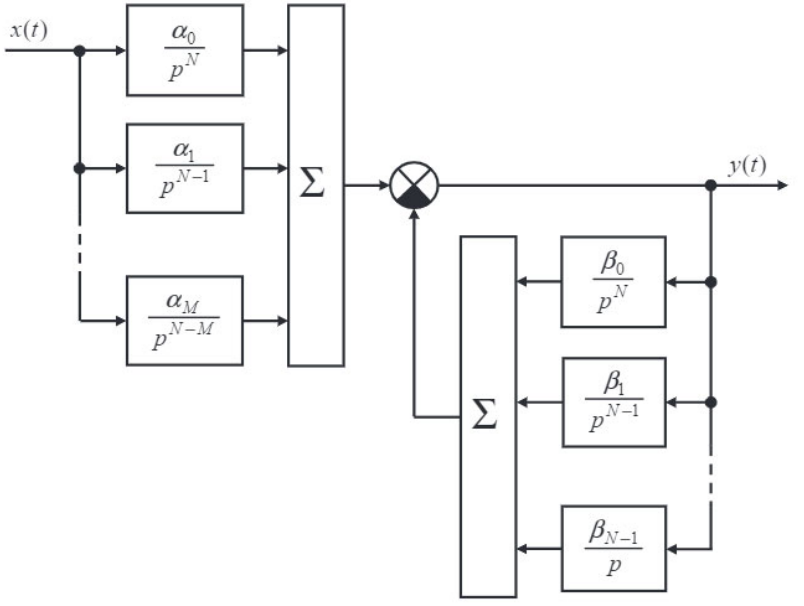


Рис.7.4. Структурная схема преобразованной аналоговой линейной системы

Передаточные функции интегрирующих звеньев $1/p^k$ имеют только нулевые полюсы кратности k. Эквивалентные дискретные передаточные функции таких звеньев $H_{\text{инт}\,k}(z)$ можно найти по формулам табл.7.4. Выражения для

дискретных эквивалентов интегрирующих звеньев $H_{\text{инт}\,k}(z)$ при $k=\overline{1,\ 4}$ приведены в табл.7.6.

Таблица 7.6

H(p)	$H_{\text{инт}\,k}(z)$	
$\frac{A}{p}$	Метод Z-преобразования	$AT\frac{1}{1-z^{-1}}$
	Метод Цыпкина – Гольденберга	$AT\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$
	Метод Рагаззини – Бергена	$\frac{AT}{2}\frac{z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}}$
$\frac{A}{p^2}$	Метод Z-преобразования	$AT^2\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
	Метод Цыпкина – Гольденберга	$\frac{AT^2}{2}\frac{z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}$
	Метод Рагаззини – Бергена	$\frac{AT^2}{6}\frac{z^{-1}+4z^{-2}+z^{-3}}{(1-z^{-1})^2}$
$\frac{A}{p^3}$	Метод Z-преобразования	$AT^3\frac{z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$
	Метод Цыпкина – Гольденберга	$\frac{AT^3}{6}\frac{z^{-1}+4z^{-2}+z^{-3}}{(1-z^{-1})^3}$
	Метод Рагаззини – Бергена	$\frac{AT^3}{24}\frac{z^{-1}+11z^{-2}+11z^{-3}+z^{-4}}{(1-z^{-1})^3}$
$\frac{A}{p^4}$	Метод Z-преобразования	$\frac{AT^4}{6}\frac{z^{-1}+4z^{-2}+z^{-3}}{(1-z^{-1})^4}$
	Метод Цыпкина – Гольденберга	$\frac{AT^4}{24}\frac{z^{-1}+11z^{-2}+11z^{-3}+z^{-4}}{(1-z^{-1})^4}$
	Метод Рагаззини – Бергена	$\frac{AT^4}{120}\frac{z^{-1}+26z^{-2}+66z^{-3}+26z^{-4}+z^{-5}}{(1-z^{-1})^4}$

Удобным для нахождения эквивалентной дискретной передаточной функции системы, изображённой на рис.7.4, является метод Тастина [29], который

для аналогового интегрирующего звена первого порядка $1/p$ даёт эквивалентную дискретную передаточную функцию

$$H_{\text{инт1}}(z)=\frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}, \tag{7.68}$$

а для интегрирующего звена k-го порядка $1/p^k$

$$H_{\text{инт}k}(z)=\left(\frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)^k. \tag{7.69}$$

Имеются также другие методы дискретной аппроксимации интегрирующих звеньев. В монографии [29] описаны метод Мадведа – Тракселя и метод Боксера – Талера.

В заключение сделаем некоторые замечания об эффективности алгоритмов цифрового моделирования, основанных на дискретной свёртке и на рекуррентных разностных уравнениях.

- Методы дискретной свёртки одинаково успешно могут применяться для моделирования как стационарных, так и нестационарных систем, а рекуррентные алгоритмы пригодны только для моделирования стационарных систем.
- Основным недостатком методов дискретной свёртки является относительно большой объём вычислений. Действительно, если импульсная характеристика $h_{\text{пнч}}[n]$ имеет ограниченную протяжённость в «дискретном времени» (или допускает усечение до N отсчётов), то для получения одного отсчёта выходного сигнала требуется выполнить $2N+1$ элементарных операций ($N+1$ умножений и N сложений), не считая операций пересылки. При больших N это приводит к существенным вычислительным затратам. Если же импульсную характеристику $h_{\text{пнч}}[n]$ нельзя ограничить по длительности, то объём вычислений на один отсчёт выходного сигнала увеличивается пропорционально номеру отсчёта n.
- Рекуррентные разностные алгоритмы на любом шаге дискретизации n для вычисления одного отсчёта выходного сигнала требуют одинакового количества операций, которое определяется порядком системы N и принятым методом дискретной аппроксимации.
- Обычно для алгоритмов дискретной свёртки требуемое число операций при цифровом моделировании на один – два порядка больше, чем для рекуррентных разностных алгоритмов.
- Недостатком рекуррентных алгоритмов является накопление ошибок округления, возникающих в процессе вычисления очередного отсчёта выходного сигнала за счёт использования на каждом шаге дискретизации некоторого числа предыдущих отсчётов. Алгоритмы дискретной свёртки свободны от этого недостатка.
- Использование для моделирования рекуррентных разностных алгоритмов позволяет естественным образом учитывать начальные условия в системе, в

то время как для методов дискретной свёртки учёт начальных условий является более сложным.

7.7. Особенности цифрового моделирования нелинейных аналоговых систем

◆ Классификация нелинейных систем

Наиболее удачной с точки зрения цифрового моделирования нелинейных аналоговых систем является классификация, приведённая в монографии [29]. Рассмотрим её, несколько изменив терминологию, которая в [29] нам представляется не вполне адекватной.

Нелинейные системы можно разделить на *безынерционные* и *инерционные*. Среди инерционных нелинейных систем можно выделить такие, которые удаётся представить комбинацией нелинейных безынерционных и линейных инерционных динамических звеньев, причём между звеньями системы имеется развязка, так что свойства каждого звена не зависят от присоединения к нему других звеньев. Такие системы мы будем называть *структурируемыми*, а системы, которые не удаётся представить такой комбинацией, — *неструктурируемыми*. Нелинейные структурируемые системы могут быть *разомкнутыми*, т.е. не содержащими нелинейные звенья в контурах обратной связи, и *замкнутыми*, в которых нелинейные звенья входят в контуры обратной связи. Эта классификация приведена на рис.7.5, где нелинейные системы по сложности их моделирования разделены на четыре класса (1-й класс — наиболее простые, а 4-й класс — наиболее сложные системы).

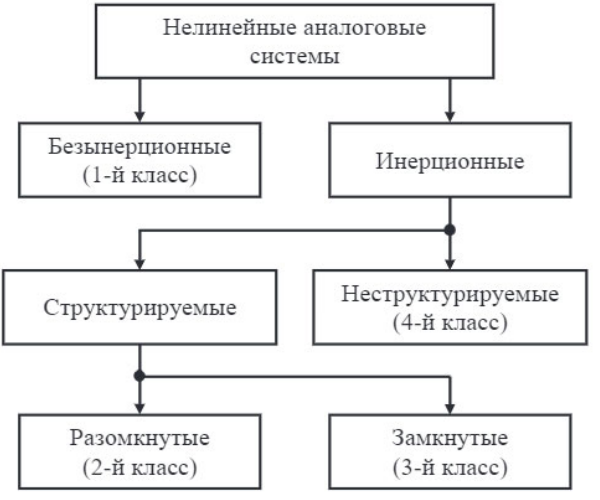


Рис.7.5. Классификация нелинейных систем по способам их моделирования

Согласно рассмотренной классификации на рис.7.6 приведены примеры схем структурируемых нелинейных систем 1-го, 2-го и 3-го классов, где использованы следующие обозначения: НЭ — нелинейный безынерционный элемент, $H_1(p)$ и $H_2(p)$ — передаточные функции линейных динамических звеньев.

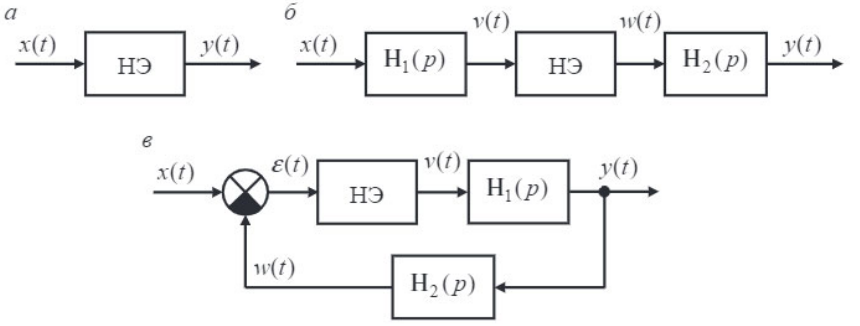


Рис.7.6. Структурные схемы нелинейных систем согласно классификации рис.7.5: *а* — система 1-го класса; *б* — система 2-го класса; *в* — система 3-го класса

Структурной схемой рис.7.6,*б* обычно представляют модель типового радиотехнического звена. При этом $H_1(p)$ описывает передаточную функцию полосового усилительного тракта, НЭ — детектор, $H_2(p)$ — передаточную функцию последетекторного усилителя.

К структурной схеме рис.7.6,*в* обычно сводятся следящие системы радиотехнических устройств. В этом случае характеристика НЭ описывает дискриминационную кривую (характеристику дискриминатора).

Нелинейные системы 4-го класса (неструктурируемые инерционные нелинейные системы) не могут быть представлены структурной схемой. Их можно задать, например, принципиальной схемой или описать системой нелинейных дифференциальных уравнений [29].

Приведённая классификация нелинейных систем является в определённом смысле условной, так как одна и та же система на разных иерархических уровнях может рассматриваться как система 1-го, 2-го, 3-го или 4-го класса. Это зависит от существа решаемой задачи, т.е. от характера её постановки, целей решения, требуемой точности воспроизведения процессов в системе, наличия априорных сведений о характеристиках системы и т.д. Например, амплитудный детектор в случаях, когда его нагрузка не имеет развязки с нелинейным элементом, строго говоря, является системой 4-го класса, однако при определённом выборе параметров его можно отнести к системам 2-го класса, а по характеру преобразования огибающей входного сигнала — к системам 1-го класса, т.е. рассматривать как безынерционное нелинейное звено (нелинейный преобразователь) [29].

◆ **Моделирование безынерционных нелинейных систем**

Наиболее просто решается задача моделирования безынерционных нелинейных звеньев (систем 1-го класса, рис.7.6,*а*). Если преобразование входного сигнала $x(t)$ осуществляется в соответствии с характеристикой нелинейного элемента $y = \Phi(x)$, то цифровая модель может быть представлена в виде

$$y[n] = \Phi\{x[n]\} \tag{7.70}$$

для стационарных систем и

$$y[n] = \Phi\{x[n],\ n\} \tag{7.71}$$

для нестационарных систем [см. (2.10 и (2.11)].

При табличном задании нелинейной характеристики $\Phi(x)$ требуемое преобразование (7.70) или (7.71) производится путём выборки из таблиц, введённых в память ЭВМ, с использованием интерполяционных формул.

◆ **Моделирование инерционных нелинейных разомкнутых систем**

Не вызывает принципиальных затруднений цифровое моделирование систем 2-го класса (рис.7.6,*б*). В этом случае дискретные отсчёты сигналов в различных точках схемы вычисляются последовательно при помощи описанных выше алгоритмов моделирования линейных инерционных и нелинейных безынерционных звеньев•:

$$\begin{cases} v[n] = H_1(z)\, x[n]; \\ w[n] = \Phi\{v[n]\}; \\ y[n] = H_2(z)\, w[n]. \end{cases} \tag{7.72}$$

Исключая в (7.72) промежуточные переменные, можно записать символическое нелинейное разностное уравнение

$$y[n] = H_2(z)\,\Phi\{H_1(z)\, x[n]\}. \tag{7.73}$$

Выражение (7.73) представляет собой рекуррентный алгоритм, составленный из вложенных операторов: $H_1(z)$ — оператор, моделирующий работу линейного инерционного аналогового звена с передаточной функцией $\mathrm{H}_1(p)$; $\Phi\{x\}$ — оператор, моделирующий работу нелинейного безынерционного звена; $H_2(z)$ — оператор, моделирующий работу линейного инерционного аналогового звена с передаточной функцией $\mathrm{H}_2(p)$.

Операторы $H_1(z)$ и $H_2(z)$ могут быть реализованы либо на основе алгоритмов дискретной свёртки (см. § 7.2), либо на основе рекуррентных разностных алгоритмов (см. § 7.3 — 7.6). В последнем случае в правой части выраже-

---

• В символических разностном уравнении $y[n] = H(z)\, x[n]$ переменная z рассматривается как оператор сдвига на один шаг дискретизации T, а в алгебраическом уравнении для Z-изображений $Y(z) = H(z)\, X(z)$ переменная z рассматривается как комплексный аргумент.

ния (7.73) могут содержаться значения выходного процесса в предшествующие моменты «дискретного времени» n: $y[n-k]$ при $k \geq 1$, однако данное обстоятельство не приводит к затруднениям при вычислениях по алгоритму (7.73), так как эти значения определяются на предыдущих шагах и на n-м шаге дискретизации могут быть использованы как известные величины. Таким образом, выражение (7.73) не содержит в правой части искомой переменной $y[n]$, поэтому оно является не уравнением, а рекуррентной формулой, удобной для проведения расчётов на ЭВМ.

◆ Моделирование инерционных нелинейных замкнутых систем

Цифровые модели структурируемых нелинейных замкнутых систем, т.е. систем 3-го класса (рис.7.6,*в*), можно описать системой уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon[n] = x[n] - w[n]; \\ v[n] = \Phi\{\varepsilon[n]\}; \\ y[n] = H_1(z)v[n]; \\ w[n] = H_2(z)y[n]. \end{cases} \tag{7.74}$$

Исключая в (7.74) промежуточные переменные, запишем символическое нелинейное разностное уравнение

$$y[n] = H_1(z)\left(\Phi\{x[n] - H_2(z)y[n]\}\right). \tag{7.75}$$

Выражение (7.75), составленное из вложенных операторов, является нелинейным уравнением в конечных разностях. Так как искомая переменная $y[n]$ содержится в обеих частях уравнения (7.75), при моделировании его приходится решать для каждого значения n, т.е. на каждом шаге дискретизации. Для этого требуются большие вычислительные затраты, что существенно усложняет процесс цифрового моделирования.

Это затруднение легко обойти, если использовать искусственный приём, описанный в [29]. С целью сведения нелинейного уравнения (7.75) к удобной в для вычислений рекуррентной формуле в цепь обратной связи эквивалентной дискретной системы вводят звено единичной задержки, т.е. звено задержки на один шаг дискретизации T, передаточная функция которого равна z^{-1} (рис.7.7). В результате вместо уравнений (7.74) и (7.75) получим следующее описание дискретной модели нелинейной замкнутой системы:

$$\begin{cases} \varepsilon[n] = x[n] - w[n]; \\ v[n] = \Phi\{\varepsilon[n]\}; \\ y[n] = H_1(z)v[n]; \\ w[n] = H_2(z)y[n-1], \end{cases} \tag{7.76}$$

или

$$y[n] = H_1(z)\left(\Phi\{x[n] - H_2(z)y[n-1]\}\right). \tag{7.77}$$

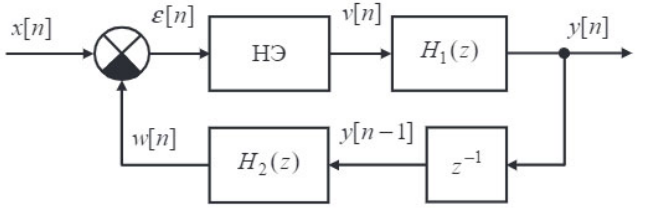


Рис.7.7. Введение звена единичной задержки z^{-1} в контур обратной связи цифровой модели нелинейной замкнутой системы

В отличие от (7.75), выражение (7.77) является не уравнением относительно искомой функции $y[n]$, а рекуррентной формулой, весьма удобной для организации вычислений на ЭВМ (см. пример 7.4).

Введение звена единичной задержки в цепь обратной связи вносит дополнительную погрешность в цифровую модель системы. Однако при малом шаге дискретизации T влияние этой погрешности практически незначительно. В настоящее время не существует единых рекомендаций для выбора шага дискретизации T, при котором можно пренебречь влиянием элемента запаздывания в цепи обратной связи на величину погрешности цифрового моделирования системы 3-го класса. В монографии [29] приводится рекомендация, основанная на опыте цифрового моделирования замкнутых нелинейных систем радиоавтоматики: $T \le \tau_{\text{экв}} / 10$, где $\tau_{\text{экв}}$ — эквивалентная постоянная времени линеаризованной следящей системы.

◆ Моделирование инерционных нелинейных неструктурируемых систем

Аналоговые инерционные нелинейные неструктурируемые системы (системы 4-го класса) математически описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_N), \quad i = \overline{1,\ N} \tag{7.78}$$

с начальными условиями

$$x_{i_0} = x_i(t_0), \quad i = \overline{1,\ N}, \tag{7.79}$$

где N — порядок системы.

Описание системы в форме (7.78) и (7.79) является универсальным, поскольку любое обыкновенное дифференциальное уравнение N-го порядка может быть сведено к системе N дифференциальных уравнений первого порядка.

Систему уравнений (7.78) с начальными условиями (7.79) удобно представить в векторно-матричной форме, т.е. в виде одного векторного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \tag{7.80}$$

где $\mathbf{x}(t)=\left[x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_N(t)\right]^{\mathrm{T}}$ — N-координатный вектор; $(\ldots)^{\mathrm{T}}$ — символ транспонирования; $\mathbf{F}(\ldots)=\left[F_1(\ldots),\ F_2(\ldots),\ldots,\ F_N(\ldots)\right]^{\mathrm{T}}$ — N-координатная вектор-функция; $\mathbf{x}_0=\left[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ldots,\ x_N(t_0)\right]^{\mathrm{T}}$ — N-координатный вектор начальных условий.

Цифровое моделирование нелинейных систем 4-го класса в общем случае осуществляется с помощью алгоритмов численного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений (7.80). Для этого могут быть использованы стандартные вычислительные процедуры (метод Эйлера, метод Адамса, метод Рунге – Кутта и другие).

При решении задач большой размерности (высокий порядок системы N) актуальным является снижение вычислительных затрат на решение дифференциального уравнения (7.80). Это требует увеличения шага дискретизации T, что может привести к неустойчивости вычислительной процедуры. Проблемы устойчивости численных методов интегрирования дифференциальных уравнений возникли при разработке систем автоматизированного проектирования (САПР). Было предложено много различных методов повышения эффективности алгоритмов решения уравнений вида (7.80). Среди них методы разреженных матриц, методы, основанные на квазидиагональном представлении матрицы Якоби, диакоптические методы •. В последние десятилетия были разработаны специальные вычислительные методы, основанные на идее прогноза и коррекции [40].

Краткие итоги

1. При функциональном моделировании аналоговая система представляется в виде соединения определённого числа линейных инерционных и нелинейных безынерционных динамических звеньев, между которыми имеется развязка, так что свойства каждого звена не зависят от присоединения к нему других звеньев. Из этих двух типов звеньев можно строить модели линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных систем любой сложности путём наращивания структуры.

2. Стационарная линейная аналоговая динамическая система разомкнутого типа может быть описана либо дифференциальным уравнением, либо передаточной функцией, либо импульсной характеристикой. Для получения цифровых моделей аналоговых систем необходимо осуществить переход к соответствующим дискретным эквивалентам. Для решения этой задачи используют три подхода: на основе дискретной свёртки, на основе рекуррентных разностных уравнений, на основе алгоритмов БПФ.

3. Дискретная (цифровая) модель стационарной линейной аналоговой системы состоит из непрерывной части, соответствующей исследуемой системе, и импульсного элемента (рис.7.1,*б*). Импульсный элемент удобно представить в виде последовательного соединения идеального импульсного элемента и интерполирующего фильтра (см. рис.7.2), импульсная характеристика которого определяет форму импульса на выходе импульсного элемента. Ин-

• *Диакоптика* — расчленение.

терполирующий фильтр и моделируемая аналоговая система образуют так называемую приведённую непрерывную часть (ПНЧ) цифровой модели.

4. Цифровое моделирование аналоговых линейных систем на основе алгоритмов дискретной свёртки осуществляется либо заменой аналоговой системы эквивалентной дискретной системой, т.е. определением импульсной характеристики ПНЧ и применением формулы свёртки (7.13), либо численным интегрированием формулы аналоговой свёртки (7.4). В последнем случае используют стандартные методы численного интегрирования (метод прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона).

5. Рекуррентные алгоритмы цифрового моделирования аналоговых линейных динамических систем осуществляются на основе рекуррентной формулы (2.2). Структурная схема такой модели соответствует структурной схеме рекурсивного ЦФ (см. рис.4.2). Подготовительная работа по формированию модели сводится к нахождению передаточной функции ПНЧ $H(z)$ дробно-рационального вида (3.7). Методы дискретной аппроксимации передаточной функции аналоговой системы (7.25) дробно-рациональной передаточной функцией $H(z)$ разделяются на три группы: 1) методы, основанные на Z-преобразовании; 2) методы, основанные на применении формул численного интегрирования; 3) методы, основанные на преобразовании структуры моделируемой системы.

6. Рекуррентные методы, основанные на Z-преобразовании, используют различные интерполирующие фильтры. В § 7.4 получены дискретные эквиваленты аналоговых линейных систем при отсутствии интерполяции (метод Z-преобразования), при ступенчатой интерполяции (метод Цыпкина – Гольденберга) и при линейной интерполяции (метод Рагаззини – Бергена). Из них наибольшую точность при цифровом моделировании обеспечивает метод Рагаззини – Бергена. Сводка формул трёх методов дискретной аппроксимации для определения передаточной функции $H(z)$ эквивалентной дискретной системы по заданной передаточной функции $\mathrm{H}(p)$ моделируемой аналоговой линейной системы приведена в табл.7.4. Дискретные эквиваленты аналоговых динамических звеньев 1-го и 2-го порядков, рассчитанные по формулам табл.7.4, приведены в табл.7.5. Используя их, можно построить цифровую модель практически любой аналоговой линейной стационарной системы.

7. Из рекуррентных методов, основанных на применении формул численного интегрирования, наиболее известным является метод В.В. Быкова [29]. Метод довольно прост в использовании, допускает модификацию на случай кратных полюсов передаточной функции моделируемой системы $\mathrm{H}(p)$, а также на использование высших интерполяционных формул. Точность моделирования по методу В.В. Быкова примерно соответствует точности метода Рагаззини – Бергена.

8. Особенностью рекуррентных методов, основанных на преобразовании структуры моделируемой аналоговой системы, является то, что они не требуют нахождения полюсов передаточной функции $\mathrm{H}(p)$. Чаще всего применяют такое преобразование структуры, при котором элементарными динамическими звеньями являются идеальные интеграторы k-го порядка, где $k = \overline{0, N}$. Дискретные эквиваленты интеграторов k-го порядка могут быть получены на основе методов Z-преобразования, Цыпкина – Гольденберга и Рагаззини – Бергена (соответствующие формулы при $k = \overline{0,\ 4}$ приведены в табл.7.6). Наиболее удобным для нахождения эквивалентных дискретных передаточных функций интеграторов k-го порядка является метод Тастина [29].

9. Цифровое моделирование нелинейных аналоговых систем имеет некоторые особенности. Удобная с точки зрения цифрового моделирования классификация нелинейных аналоговых систем приведена на рис.7.5, согласно которой по сложности моделирования нелинейные системы разделяются на четыре класса.

10. Наиболее просто решается задача моделирования нелинейных безынерционных систем (систем 1-го класса — рис.7.6,*а*), которая сводится к расчёту по формуле (7.70) или (7.71). При этом функция $y = \Phi(x)$ может быть задана либо аналитически, либо табличным способом, либо графически. При табличном задании нелинейной характеристики $\Phi(x)$ требуемое преобразование (7.70) или (7.71) производится путём выборки из таблиц, введённых в память ЭВМ, с использованием интерполяционных формул.

11. Моделирование инерционных нелинейных разомкнутых систем (систем 2-го класса — рис.7.6,*б*) осуществляется последовательным применением операторов линейного и нелинейного преобразования сигналов. При этом получается рекуррентный алгоритм (7.73), составленный из вложенных операторов.

12. Моделирование инерционных нелинейных замкнутых систем (систем 3-го класса — рис.7.6,*в*) сводится к решению нелинейного разностного уравнения (7.75), составленного из вложенных операторов. Это уравнение необходимо решать на каждом шаге дискретизации, что существенно усложняет процесс цифрового моделирования. Затруднение легко обойти, если в цепь обратной связи эквивалентной дискретной системы ввести звено единичной задержки, т.е. звено задержки на один шаг дискретизации T, передаточная функция которого равна z^{-1} (см. рис.7.7). В результате вместо нелинейного уравнения (7.75) получается нелинейная рекуррентная формула (7.77), что существенно упрощает задачу моделирования. Введение звена единичной задержки в цепь обратной связи вносит дополнительную погрешность в цифровую модель системы. Однако при малом шаге дискретизации T влияние этой погрешности практически незначительно.

13. Аналоговые инерционные нелинейные неструктурируемые системы (системы 4-го класса) математически описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений вида (7.78) с начальными условиями (7.79). Систему уравнений (7.78) удобно представить в векторно-матричной форме, т.е. в виде одного векторного дифференциального уравнения первого порядка (7.80). Цифровое моделирование нелинейных систем 4-го класса в общем случае осуществляется с помощью алгоритмов численного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений (7.80). Для этого могут быть использованы как стандартные вычислительные процедуры (метод Эйлера, метод Адамса, метод Рунге – Кутта и другие), так и специальные методы, основанные на идее прогноза и коррекции.

Глава 8

НЕЛИНЕЙНЫЕ АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОМПЛЕКСНЫХ ОГИБАЮЩИХ

8.1. Метод комплексных огибающих

В радиотехнике широко распространено преобразование полосовых сигналов линейными избирательными (узкополосными) системами. Сигнал принято называть полосовым (узкополосным), если полоса частот $\Delta\omega$, занимаемая его спектром, существенно меньше центральной частоты спектра $\omega_{\text{ц}}$, т.е. $\Delta\omega/\omega_{\text{ц}} << 1$. Таким образом, частотный спектр полосового сигнала группируется в области центральной частоты $\omega_{\text{ц}}$.

В общем случае полосовой сигнал (радиосигнал) можно представить в виде квазигармонического колебания с медленно изменяющимися по сравнению с несущим колебанием $\cos(\omega_{\text{ц}}t)$ амплитудой $U(t)$ и начальной фазой $\varphi(t)$:

$$u(t) = U(t)\cos[\Phi(t)] = U(t)\cos[\omega_{\text{ц}}t + \varphi(t)] = U(t)\cos[2\pi f_{\text{ц}}t + \varphi(t)], \qquad (8.1)$$

где $\Phi(t)$ — полная фаза колебания, $\varphi(t)$ — её нелинейная составляющая.

Амплитуда или начальная фаза полосового сигнала (в некоторых случаях одновременно и амплитуда, и начальная фаза) зависят от переносимого сигналом информационного процесса $\lambda = \lambda(t)$:

$$U(t) = U(t,\ \lambda);\quad \varphi(t) = \varphi(t,\ \lambda). \qquad (8.2)$$

Импульсная характеристика $h(t)$ линейной избирательной системы имеет колебательный характер с некоторой средней частотой ω_0 (обычно равной резонансной частоте системы) и с медленно изменяющимися по сравнению с $\cos(\omega_0 t)$ огибающей $H(t)$ и начальной фазой $\varphi_h(t)$:

$$h(t) = H(t)\cos[\omega_0 t + \varphi_h(t)]. \qquad (8.3)$$

Частотная характеристика линейной избирательной системы обладает резонансным свойством на частоте ω_0, при этом полоса пропускания системы $\Delta\omega_{\text{п}}$ много меньше центральной (резонансной) частоты: $\Delta\omega_{\text{п}}/\omega_0 << 1$.

Весьма эффективным способом сокращения вычислительных затрат при цифровой обработке сигналов в линейных избирательных системах является применение *метода комплексных огибающих*, позволяющего свести преобразование полосовых процессов при их прохождении через избирательные системы к преобразованию медленно меняющихся комплексных огибающих (комплекс-

ных амплитуд). Это даёт возможность существенно увеличить шаг дискретизации T, а следовательно, уменьшить количество обрабатываемых отсчётов.

С учётом того, что $\cos(x) = \mathrm{Re}\{\exp(jx)\}$, где $\mathrm{Re}\{...\}$ — символ вещественной части комплексного числа, выражение (8.1) можно записать в комплексной форме:

$$u(t) = \mathrm{Re}\left\{U(t)\, e^{j\varphi(t)} e^{j\omega_{\text{ц}} t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\dot{\mathbf{U}}(t)\, e^{j\omega_{\text{ц}} t}\right\}, \tag{8.4}$$

где

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = U(t)\, e^{j\varphi(t)} \tag{8.5}$$

— комплексная огибающая полосового сигнала (8.1), определённая при выборе опорной частоты, равной центральной частоте спектра • $\omega_{\text{ц}}$; $e^{j\omega_{\text{ц}} t}$ — «комплексная несущая».

Если в качестве опорной выбрать другую частоту, например ω_0, отличающуюся от $\omega_{\text{ц}}$ на величину $\delta\omega = \omega_{\text{ц}} - \omega_0$ ($\delta\omega << \omega_0$), то согласно (8.4) будем иметь

$$u(t) = \mathrm{Re}\left\{U(t)\, e^{j[\varphi(t) + \delta\omega t]} e^{j\omega_0 t}\right\}. \tag{8.6}$$

Тогда в комплексной огибающей

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = U(t)\, e^{j[\varphi(t) + \delta\omega t]} = U(t)\, e^{j\psi(t)} \tag{8.7}$$

возникает линейная составляющая начальной фазы $\delta\omega t$.

Из выражений (8.4) и (8.6) с учётом (8.2) видно, что вся информация, закодированная в полосовом сигнале посредством модуляции, содержится в его комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}(t, \lambda)$, поэтому при моделировании или обработке полосового сигнала можно исключить из рассмотрения «комплексную несущую» $e^{j\omega_{\text{ц}} t}$ (или $e^{j\omega_0 t}$).

Комплексная огибающая полосового сигнала может быть представлена в двух эквивалентных формах: в полярной (8.5) и в декартовой:

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = U_{\text{c}}(t) + jU_{\text{s}}(t), \tag{8.8}$$

где $U_{\text{c}}(t)$ и $U_{\text{s}}(t)$ — квадратурные компоненты комплексной огибающей.

Переход от полярной формы представления комплексной огибающей к декартовой осуществляется по следующим формулам:

$$\begin{cases} U_{\text{c}}(t) = U(t)\cos[\varphi(t)]; \\ U_{\text{s}}(t) = U(t)\sin[\varphi(t)]. \end{cases} \tag{8.9}$$

• При введении в рассмотрение аналитического сигнала частота $\omega_{\text{ц}}$ определяется однозначно [см. (8.21)].

По квадратурным компонентам комплексной огибающей нетрудно найти вещественную огибающую (амплитуду) и начальную фазу полосового сигнала:

$$U(t) = \left|\dot{\mathbf{U}}(t)\right| = \sqrt{U_{\mathrm{c}}^2(t) + U_{\mathrm{s}}^2(t)}\,; \tag{8.10}$$

$$\varphi(t) = \arg\left\{\dot{\mathbf{U}}(t)\right\} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{U_{\mathrm{s}}(t)}{U_{\mathrm{c}}(t)}, & U_{\mathrm{c}}(t) \geq 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{U_{\mathrm{s}}(t)}{U_{\mathrm{c}}(t)} + \pi, & U_{\mathrm{c}}(t) < 0,\ U_{\mathrm{s}}(t) \geq 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{U_{\mathrm{s}}(t)}{U_{\mathrm{c}}(t)} - \pi, & U_{\mathrm{c}}(t) < 0,\ U_{\mathrm{s}}(t) < 0. \end{cases} \tag{8.11}$$

Воспользовавшись формулой косинуса суммы двух аргументов, с учётом обозначений (8.9) запишем выражение (8.1) в квадратурной форме:

$$u(t) = U(t)\cos\left[\varphi(t)\right]\cos\left(\omega_{\text{ц}}t\right) - U(t)\sin\left[\varphi(t)\right]\sin\left(\omega_{\text{ц}}t\right) =$$

$$= U_{\mathrm{c}}(t)\cos\left(\omega_{\text{ц}}t\right) - U_{\mathrm{s}}(t)\sin\left(\omega_{\text{ц}}t\right). \tag{8.12}$$

Поставим в соответствие вещественному полосовому сигналу (8.1) комплексный сигнал

$$\dot{z}(t) = u(t) + j\,\hat{u}(t)\,, \tag{8.13}$$

где функции $u(t)$ и $\hat{u}(t)$ связаны парой преобразований Гильберта

$$\begin{cases} \hat{u}(t) = H\left\{u(t)\right\} = \dfrac{1}{\pi}\,\text{V.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\tau)}{t-\tau}\,d\tau; \\ u(t) = H^{-1}\left\{\hat{u}(t)\right\} = -\dfrac{1}{\pi}\,\text{V.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{u}(\tau)}{t-\tau}\,d\tau. \end{cases} \tag{8.14}$$

Здесь $H\{...\}$ — символ преобразования Гильберта; V.p. (Valeur principale) — главное значение несобственного интеграла в смысле Коши [•].

Выражение (8.13) описывает *аналитический сигнал* [24, 25, 34].

Подставляя полосовой сигнал (8.1) в первую формулу (8.14), с учётом обозначений (8.9) запишем выражение сигнала, сопряжённого по Гильберту:

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{\pi}\,\text{V.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(\tau)\cos\left[\omega_{\text{ц}}\tau + \varphi(\tau)\right]}{t-\tau}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\text{V.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_{\mathrm{c}}(\tau)\cos\left(\omega_{\text{ц}}\tau\right) - U_{\mathrm{s}}(\tau)\sin\left(\omega_{\text{ц}}\tau\right)}{t-\tau}\,d\tau\,. \tag{8.15}$$

[•] См. с.65.

Точное представление $\hat{u}(t)$ при сложной функции $U(t)\cos[\omega_{\text{ц}}t+\varphi(t)]$ является довольно трудной задачей, поэтому в подынтегральном выражении (8.15) разложим медленно меняющиеся функции $U_{\text{c}}(\tau)$ и $U_{\text{s}}(\tau)$ в ряд Тейлора относительно точки $\tau = t$. В результате получим

$$\hat{u}(t)=\frac{1}{\pi}\text{V.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega_{\text{ц}}\tau)\,d\tau}{t-\tau}\left[U_{\text{c}}(t)+U_{\text{c}}'(t)(t-\tau)+\frac{1}{2!}U_{\text{c}}''(t)(t-\tau)^2+\ldots\right]-$$

$$-\frac{1}{\pi}\text{V.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega_{\text{ц}}\tau)\,d\tau}{t-\tau}\left[U_{\text{s}}(t)+U_{\text{s}}'(t)(t-\tau)+\frac{1}{2!}U_{\text{s}}''(t)(t-\tau)^2+\ldots\right]=$$

$$=U_{\text{c}}(t)\sin(\omega_{\text{ц}}t)+U_{\text{s}}(t)\cos(\omega_{\text{ц}}t)+Q(t)=$$

$$=U(t)\sin[\omega_{\text{ц}}t+\varphi(t)]+Q(t). \qquad (8.16)$$

При выводе формулы (8.16) использованы преобразования Гильберта синуса и косинуса:

$$\begin{cases} H\{\cos(\omega_{\text{ц}}t)\}=\sin(\omega_{\text{ц}}t); \\ H\{\sin(\omega_{\text{ц}}t)\}=-\cos(\omega_{\text{ц}}t), \end{cases} \qquad (8.17)$$

а также предположение о малости производных от квадратурных компонент комплексной огибающей.

Из выражения (8.16) видно, что если можно пренебречь остаточным членом $Q(t)$, то сопряжённый по Гильберту сигнал $\hat{u}(t)$ будет иметь такую же вещественную огибающую $U(t)$ и такую же начальную фазу $\varphi(t)$, что и исходный сигнал $u(t)$. В книге В.И. Тихонова [35] получена оценка $Q(t)\approx\dfrac{\Delta\omega}{\omega_{\text{ц}}}U(t)$. Отсюда следует, что в случае узкополосных сигналов функции $u(t)$ и $\hat{u}(t)$ имеют одинаковую комплексную огибающую с погрешностью, определяемой отношением ширины спектра $\Delta\omega$ к его центральной частоте $\omega_{\text{ц}}$.

Для этого случая аналитический сигнал (8.13) с использованием формулы Эйлера можно записать в виде

$$\dot{z}(t)=U(t)\cos[\omega_{\text{ц}}t+\varphi(t)]+jU(t)\sin[\omega_{\text{ц}}t+\varphi(t)]=$$

$$=U(t)\,e^{j\varphi(t)}e^{j\omega_{\text{ц}}t}=\dot{\mathbf{U}}(t)\,e^{j\omega_{\text{ц}}t}, \qquad (8.18)$$

где $\dot{\mathbf{U}}(t)$ — комплексная огибающая, а $e^{j\omega_{\text{ц}}t}$ — «комплексная несущая».

Таким образом, аналитический сигнал $\dot{z}(t)$, соответствующий полосовому процессу $u(t)$, равен произведению комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}(t)$ на «комплексную несущую» $e^{j\omega_{\text{ц}}t}$.

В рамках такого подхода вещественная огибающая $U(t)$ исходного полосового колебания $u(t)$ определяется как модуль, а полная фаза как аргумент соответствующего аналитического сигнала $\dot{z}(t)$:

$$U(t) = \left|\dot{z}(t)\right| = \sqrt{u^2(t) + \hat{u}^2(t)}\,; \tag{8.19}$$

$$\Phi(t) = \arg\left\{\dot{z}(t)\right\} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{\hat{u}(t)}{u(t)}, & u(t) \ge 0\,; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{\hat{u}(t)}{u(t)} + \pi, & u(t) < 0,\ \hat{u}(t) \ge 0\,; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{\hat{u}(t)}{u(t)} - \pi, & u(t) < 0,\ \hat{u}(t) < 0\,. \end{cases} \tag{8.20}$$

Наконец, мгновенная частота полосового колебания $u(t)$ равна производной полной фазы по времени:

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{\hat{u}(t)}{u(t)} = \frac{\dfrac{d\hat{u}(t)}{dt}u(t) - \dfrac{du(t)}{dt}\hat{u}(t)}{u^2(t) + \hat{u}^2(t)}\,. \tag{8.21}$$

Постоянная составляющая мгновенной частоты $\omega(t)$ является центральной частотой $\omega_{\text{ц}}$ колебания $u(t)$.

Спектральная плотность полосового колебания (8.1) определяется преобразованием Фурье от функции $u(t)$:

$$\mathbf{S}_u(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\,, \tag{8.22}$$

а спектральная плотность колебания, сопряжённого по Гильберту, — преобразованием Фурье от функции $\hat{u}(t)$ [см. (8.14)]:

$$\hat{\mathbf{S}}_u(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi}\,\text{V.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\tau)}{t-\tau}\,d\tau\right] e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\text{V.p.}\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\omega t}}{t-\tau}\,dt\,d\tau\,. \tag{8.23}$$

Отсюда заменой переменной $t = \tau + \xi$ с учётом выражения (8.22) получим

$$\hat{\mathbf{S}}_u(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \left(\frac{1}{\pi}\,\text{V.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\omega\xi}}{\xi}\,d\xi\right) =$$

$$= \mathbf{S}_u(j\omega)\left(\frac{1}{\pi}\,\text{V.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\omega\xi}}{\xi}\,d\xi\right) = -j\,\mathbf{S}_u(j\omega)\,\text{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j\,\mathbf{S}_u(j\omega), & \omega > 0; \\ j\,\mathbf{S}_u(j\omega), & \omega < 0. \end{cases} \tag{8.24}$$

Применив прямое преобразование Фурье к комплексной функции (8.13), определим спектральную плотность аналитического сигнала:

$$\mathbf{S}_{\dot z}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\dot z(t)\,e^{-j\omega t}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}u(t)\,e^{-j\omega t}\,d\omega + j\int_{-\infty}^{\infty}\hat u(t)\,e^{-j\omega t}\,d\omega =$$

$$= \mathbf{S}_u(j\omega) + j\hat{\mathbf{S}}_u(j\omega). \tag{8.25}$$

Используя формулу (8.24), получим

$$\mathbf{S}_{\dot z}(j\omega) = \mathbf{S}_u(j\omega)\big[1 + \text{sgn}(\omega)\big] = \begin{cases} 2\mathbf{S}_u(j\omega), & \omega > 0; \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \tag{8.26}$$

Отсюда следует, что спектральная плотность аналитического сигнала (8.13) отлична от нуля только в области положительных частот.

Спектральную плотность комплексной огибающей (8.5) полосового сигнала

$$\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\dot{\mathbf{U}}(t)\,e^{-j\omega t}\,dt \tag{8.27}$$

найдём, учитывая её связь с аналитическим сигналом [см. (8.18)]. Подстановкой $\dot{\mathbf{U}}(t) = \dot z(t)\,e^{-j\omega_{\text{ц}}t}$ в выражение (8.27) получим

$$\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\dot z(t)e^{-j\omega_{\text{ц}}t}e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\dot z(t)\,e^{-j(\omega+\omega_{\text{ц}})t}\,dt = \mathbf{S}_{\dot z}(j\omega + j\omega_{\text{ц}}), \tag{8.28}$$

т.е. спектр комплексной огибающей равен сдвинутому влево (в низкочастотную область) на частоту $\omega_{\text{ц}}$ спектру соответствующего аналитического сигнала.

Используя формулу (8.26), выразим спектральную плотность $\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega)$ комплексной огибающей через спектральную плотность $\mathbf{S}_u(j\omega)$ исходного полосового сигнала:

$$\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega) = 2\,\mathbf{S}_u(j\omega + j\omega_{\text{ц}}), \quad \omega \in [-\omega_{\text{ц}}, \infty). \tag{8.29}$$

Таким образом, спектр комплексной огибающей $\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega)$ можно получить из спектра исходного полосового колебания $\mathbf{S}_u(j\omega)$ путём его удвоения и сдвига влево на величину $\omega_{\text{ц}}$, т.е. в низкочастотную область. Спектр комплексной огибающей полосового процесса является двусторонним, и он необязательно симметричен относительно нулевой частоты.

Используя выражение (8.4), по формуле (8.22) определим структуру спектра полосового сигнала $u(t)$:

$$\mathbf{S}_u(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\left\{\dot{\mathbf{U}}(t)\,e^{j\omega_{\text{ц}}t}\right\}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\dot{\mathbf{U}}(t)\,e^{j\omega_{\text{ц}}t}+\dot{\mathbf{U}}^{*}(t)\,e^{-j\omega_{\text{ц}}t}\right]e^{-j\omega t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\mathbf{U}}(t)\,e^{-j(\omega-\omega_{\text{ц}})t}dt+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\mathbf{U}}^{*}(t)\,e^{-j(\omega+\omega_{\text{ц}})t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega-j\omega_{\text{ц}})+\frac{1}{2}\mathbf{S}^{*}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega+j\omega_{\text{ц}}). \qquad (8.30)$$

Таким образом, спектральная плотность полосового сигнала $\mathbf{S}_u(j\omega)$ может быть получена путём переноса спектра комплексной огибающей $\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega)$ из области нулевой частоты в окрестности частот $\pm\omega_{\text{ц}}$ при уменьшении в два раза амплитуд всех спектральных составляющих и использовании операции комплексного сопряжения для получения спектра в области отрицательных частот. Форма спектра комплексной огибающей $\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega)$ определяется характером модуляции амплитуды $U(t)$ и начальной фазы $\varphi(t)$ полосового сигнала (8.1) информационным процессом $\lambda(t)$.

Амплитудно-частотный спектр $\left|\mathbf{S}_u(j\omega)\right|$ вещественного полосового колебания (8.1) является чётной, а фазочастотный спектр $\arg\{\mathbf{S}_u(j\omega)\}$ — нечётной функцией частоты ω. Однако амплитудно-частотный спектр $\left|\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega)\right|$ комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}(t)$ в общем случае не является чётной, а фазочастотный спектр $\arg\{\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega)\}$ — нечётной функцией частоты ω.

Соответствие между спектрами $\mathbf{S}_u(j\omega)$, $\mathbf{S}_{\dot{z}}(j\omega)$ и $\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega)$ иллюстрирует рис.8.1.

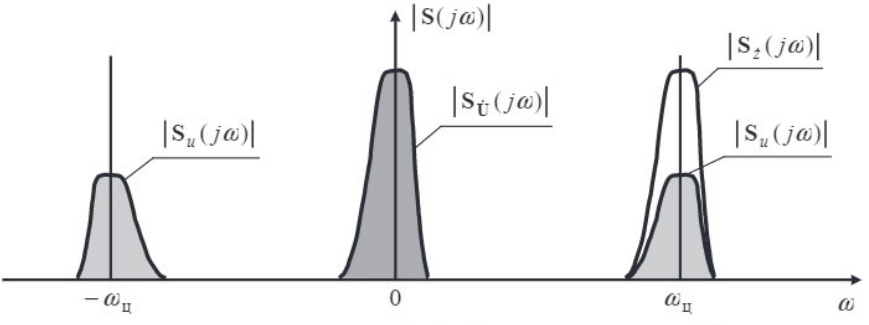


Рис.8.1. Модули спектральных плотностей $\left|\mathbf{S}(j\omega)\right|$ полосового сигнала $u(t)$, а также соответствующих ему аналитического сигнала $\dot{z}(t)$ и комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}(t)$

Верхняя граничная частота $F_{\text{в}}$ спектра комплексной огибающей $\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega)$ определяется шириной спектра $\Delta\omega$ полосового сигнала, и она существенно ниже верхней граничной частоты спектра исходного полосового сигнала $\mathbf{S}_u(j\omega)$, так как $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_{\text{ц}}} << 1$, поэтому цифровая обработка комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}(t)$ требует значительно меньшей частоты дискретизации $f_{\text{д}} \geq 2F_{\text{в}}$, чем обработка непосредственно полосового сигнала $u(t)$ с несущей частотой $\omega_{\text{ц}}$, что обусловливает снижение вычислительных затрат, т.е. экономичность метода комплексных огибающих.

Полосовые случайные процессы вида (8.1) удобно описывать с помощью комплексных огибающих, представляемых в декартовой форме (8.8). Если полосовой стационарный случайный процесс $u(t)$ является гауссовским, то и квадратурные компоненты $U_{\text{c}}(t)$ и $U_{\text{s}}(t)$ комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}(t)$ также должны быть гауссовскими. Характеристикой квадратурных компонент (а если они гауссовские, то полной характеристикой) является совокупность автокорреляционных и взаимных корреляционных функций процессов $U_{\text{c}}(t)$ и $U_{\text{s}}(t)$, описываемая корреляционной матрицей квадратурных компонент комплексной огибающей:

$$\mathbf{R}(\tau) = \begin{pmatrix} R_{\text{cc}}(\tau) & R_{\text{cs}}(\tau) \\ R_{\text{sc}}(\tau) & R_{\text{ss}}(\tau) \end{pmatrix}, \tag{8.31}$$

где

$$R_{\text{cc}}(\tau) = \overline{U_{\text{c}}(t)\,U_{\text{c}}(t+\tau)}; \quad R_{\text{ss}}(\tau) = \overline{U_{\text{s}}(t)\,U_{\text{s}}(t+\tau)} \tag{8.32}$$

— автокорреляционные функции квадратурных компонент комплексной огибающей $[R_{\text{cc}}(\tau) = R_{\text{ss}}(\tau)]$;

$$R_{\text{cs}}(\tau) = \overline{U_{\text{c}}(t)\,U_{\text{s}}(t+\tau)}; \quad R_{\text{sc}}(\tau) = \overline{U_{\text{s}}(t)\,U_{\text{c}}(t+\tau)} \tag{8.33}$$

— взаимные корреляционные функции квадратурных компонент комплексной огибающей $[R_{\text{sc}}(\tau) = -R_{\text{cs}}(\tau)]$.

По теореме Винера — Хинчина [34, 35] энергетический спектр (спектральная плотность мощности) $G(\omega)$ стационарного случайного процесса и его корреляционная функция $R(\tau)$ связаны между собой парой преобразований Фурье:

$$\begin{cases} G(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau; \\ R(\tau) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, e^{j\omega\tau} d\omega. \end{cases} \tag{8.34}$$

Энергетический спектр $G(\omega)$ полосового случайного процесса $u(t)$ может быть представлен в виде совокупности двух спектров $G^{+}(\omega)$ и $G^{-}(\omega)$, первый из которых сосредоточен в узкой полосе в окрестности частоты $\omega_{\text{ц}}$, а второй — в окрестности частоты $-\omega_{\text{ц}}$, аналогично тому, как показано на рис.8.1 для спектра полосового сигнала.

Из энергетического спектра $G(\omega)$ полосового случайного процесса образуем односторонний энергетический спектр $G_{\dot{z}}(\omega)$ на положительных частотах (аналог спектра аналитического сигнала):

$$G_{\dot{z}}(\omega)=\begin{cases}2G^{+}(\omega), & \omega>0;\\ 0, & \omega<0,\end{cases} \tag{8.35}$$

затем смещением $G_{\dot{z}}(\omega)$ по оси частот влево на величину $\omega_{\text{ц}}$ (в область низких частот) найдём спектральную плотность мощности комплексной огибающей •:

$$G_{\dot{\mathbf{U}}}(\omega)=G_{\dot{z}}(\omega+\omega_{\text{ц}})=\begin{cases}2G^{+}(\omega+\omega_{\text{ц}}), & \omega>-\omega_{\text{ц}};\\ 0, & \omega<-\omega_{\text{ц}}.\end{cases} \tag{8.36}$$

Корреляционная функция комплексной огибающей $R_{\dot{\mathbf{U}}}(\tau)$ полосового стационарного случайного процесса может быть получена в соответствии со второй формулой (8.34):

$$R_{\dot{\mathbf{U}}}(\tau)=\frac{1}{2}\overline{\dot{\mathbf{U}}^{*}(t)\,\dot{\mathbf{U}}(t+\tau)}=R_{\text{cc}}(\tau)+jR_{\text{cs}}(\tau)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_{\dot{\mathbf{U}}}(\omega)\,e^{j\omega\tau}d\omega. \tag{8.37}$$

В частном случае, когда энергетический спектр $G_{\dot{\mathbf{U}}}(\omega)$ является чётной функцией частоты ω, корреляционная функция $R_{\dot{\mathbf{U}}}(\tau)$ будет вещественной. При этом $R_{\text{sc}}(\tau)=-R_{\text{cs}}(\tau)=0$, т.е. квадратурные компоненты $U_{\text{c}}(t)$ и $U_{\text{s}}(t)$ не коррелированы (для гауссовских процессов это означает также их статистическую независимость).

8.2. Спектры дискретизированных полосовых сигналов

В соответствии с теоремой В.А. Котельникова колебание $u(t)$, спектр которого ограничен верхней граничной частотой $F_{\text{в}}$ (финитный спектр), может быть точно восстановлено по его отсчётам (дискретной выборке), взятым через интервалы времени $T=1/(2F_{\text{в}})$. Интерполяционная (восстанавливающая) фор-

• В книге [30] спектр (8.36) назван *смещённым энергетическим спектром*.

мула имеет вид (1.8). Из выражения (1.8) следует, что для восстановления колебания $u(t)$ по его дискретным отсчётам

$$u[n] = u(t)\big|_{t=nT}, \tag{8.38}$$

взятым через интервалы времени $T = 1/(2F_в)$, достаточно последовательность отсчётов $u[n]$ пропустить через фильтр нижних частот (ФНЧ) с идеально прямоугольной АЧХ и граничной частотой полосы пропускания, равной $F_в$.

Для видеосигналов, спектр которых примыкает к нулевой частоте, ширина спектра $\Delta F = F_в$, следовательно, требуемая частота дискретизации

$$f_д = 1/T = 2F_в = 2\Delta F. \tag{8.39}$$

Однако для полосовых сигналов, спектр которых удалён от нулевой частоты, $F_в >> \Delta F$, следовательно, и $f_д = 1/T = 2F_в >> 2\Delta F$.

Доказано [18, 19], что минимальное значение частоты дискретизации $f_д$, при котором ещё возможно точное восстановление аналогового колебания $u(t)$ по его дискретным отсчётам $u[n]$, определяется не частотой $F_в$, а шириной спектра ΔF. В общем случае среднее число отсчётов, необходимое для представления произвольного колебания с финитным спектром шириной ΔF на интервале наблюдения $T_н$, равно $N = 2\Delta F T_н$ независимо от расположения спектра на оси частот и способа дискретизации [19]. Это, разумеется, не означает, что на вид колебания внутри интервала наблюдения $T_н$ не влияют предшествующие и последующие отсчёты. Однако, учитывая большую скорость убывания интерполирующих функций, например вида (1.9), при $\Delta F T_н >> 1$ во всех практически важных случаях этим влиянием можно пренебречь.

Полученное в § 1.6 выражение (1.92) справедливо не только для спектральной плотности дискретизированного видеосигнала, спектр которого примыкает к нулевой частоте, но также и для спектральной плотности дискретизированного полосового колебания $u(t)$ с финитным спектром. Перепишем его в следующем виде:

$$\mathbf{S}_{u_д}(j\omega) = f_д \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_u(j\omega - j2\pi k f_д). \tag{8.40}$$

Индекс «д» у символа спектра здесь и далее указывает на то, что рассматривается спектр дискретного сигнала.

На рис.8.2, заимствованном из [19], изображены амплитудно-частотные спектры вещественного аналогового видеосигнала • $|\mathbf{S}_u(j\omega)|$ (рис.8.2,*а*) и дискретизированного сигнала $|\mathbf{S}_{u_д}(j\omega)|$ при $f_д = 2F_в$ (рис.8.2,*б*) и при $f_д < 2F_в$

• Спектр аналогового видеосигнала $u(t)$ предполагается финитным, т.е. неравным нулю лишь при $f \in [-F_в, F_в]$.

(рис.8.2,*в*) и $f_д > 2F_в$ (рис.8.2,*г*). Модуль спектра вещественного аналогового сигнала имеет зеркальную симметрию относительно нулевой частоты, поэтому для удобства различения зеркально-симметричных полос спектра им придана трапециевидная форма.

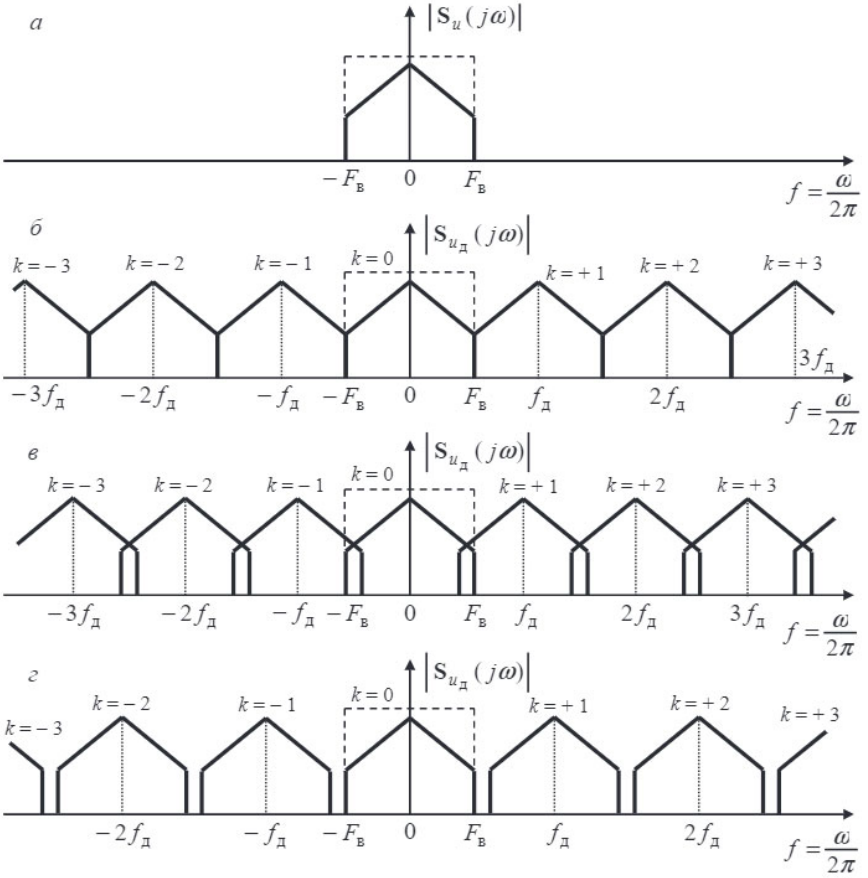


Рис.8.2. Модули спектральных плотностей (амплитудно-частотные спектры) вещественного аналогового видеосигнала $u(t)$ с финитным спектром (*а*) и дискретизированного сигнала $u[n]$ при частотах дискретизации $f_д = 2F_в$ (*б*), $f_д < 2F_в$ (*в*) и $f_д > 2F_в$ (*г*)

Если спектр исходного аналогового видеосигнала является финитным и ограничен частотой $F_в$, то в соответствии с теоремой В.А. Котельникова можно выбрать частоту дискретизации $f_д = 2F_в$. При этом повторяющиеся отображе-

ния спектра исходного аналогового колебания будут примыкать друг к другу вплотную, но без перекрытия (рис.8.2,*б*), что позволяет восстановить исходный сигнал $u(t)$ по дискретной выборке $u[n]$ с помощью фильтра нижних частот (ФНЧ) с идеально прямоугольной АЧХ (на рис.8.2 она показана пунктирной линией), выделяющего спектр исходного колебания.

Если частота дискретизации выбрана ниже, чем это требуется в соответствии с формулой (8.39), т.е. $f_д < 2F_в$, то соседние отображения спектра исходного сигнала перекрываются (рис.8.2,*в*), что исключает возможность точного восстановления исходного колебания с помощью ФНЧ.

При выборе частоты дискретизации $f_д > 2F_в$ соседние отображения спектра исходного сигнала не примыкают друг к другу вплотную (рис.8.2,*г*), что позволяет либо расширить полосу пропускания идеального ФНЧ, используемого для восстановления непрерывного колебания $u(t)$, либо применить для этой цели фильтр с непрямоугольной АЧХ.

Из рис.8.2 видно, что дискретизация видеосигнала $u(t)$ с финитным спектром $\mathbf{S}_u(j\omega)$ при выборе частоты дискретизации $f_д \geq 2F_в$ и выделение части спектра $\mathbf{S}_{u_д}(j\omega)$ последовательности отсчётов $u[n]$ полосовым фильтром с соответствующими параметрами позволяют перенести спектр $\mathbf{S}_u(j\omega)$ исходного колебания на частоту, кратную частоте дискретизации $f_д$.

Анализ рис.8.2 показывает [19], что не только колебания, спектр которых примыкает к нулевой частоте (видеосигналы), но и полосовые колебания (8.1), спектр которых удалён от нулевой частоты, могут быть точно восстановлены по отсчётам их мгновенных значений $u[n]$, взятым через интервал $T = 1/(2\Delta F)$, если граничные частоты спектра кратны его ширине, т.е.

$$f_н = i\,\Delta F; \quad f_в = (i+1)\Delta F, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots . \tag{8.41}$$

В этом случае интерполяционная формула имеет вид

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]\,H(t - nT), \tag{8.42}$$

где

$$H(t) = \frac{\sin(\pi\,\Delta F\,t)}{\pi\,\Delta F\,t}\cos(2\pi f_ц t) \tag{8.43}$$

— интерполирующая функция;

$$f_ц = \frac{f_н + f_в}{2} = f_н + \frac{\Delta F}{2} = f_в - \frac{\Delta F}{2} \tag{8.44}$$

— центральная частота спектра полосового колебания.

При выполнении условия (8.41) из (8.44) имеем

$$f_ц = (i + 1/2)\Delta F, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots . \tag{8.45}$$

Выражение (8.42) переходит в (1.8) при $i=0$ в формуле (8.41), когда спектр исходного колебания перестаёт быть полосовым, так как его нижняя граница совмещается с нулевой частотой. Подставляя (8.45) при $i=0$ в формулу (8.43), получим

$$H(t)=\frac{\sin(\pi\Delta F\,t)}{\pi\Delta F\,t}\cos(\pi\Delta F\,t)=\frac{\sin(2\pi\Delta F\,t)}{2\pi\Delta F\,t}, \qquad (8.46)$$

что совпадает с выражением (1.9) при $\Delta F=F_{\text{в}}$.

В интерполяционной формуле (8.42) отсчёты $u[n]$ выборки полосового колебания (8.1) необходимо брать через интервал дискретизации $T=1/(2\Delta F)$, т.е. с той же частотой, что и при представлении видеосигнала с шириной спектра от 0 до $F_{\text{в}}=\Delta F$.

На рис.8.3,*а* изображён модуль спектральной плотности полосового колебания (8.1), для которого выполняются условия (8.41). Модуль спектральной плотности последовательности отсчётов $u[n]$ этого колебания, взятых через интервал дискретизации $T=1/(2\Delta F)$, приведён на рис.8.3,*б*. Здесь же пунктирной линией показана АЧХ интерполирующего фильтра, импульсная характеристика которого описывается выражением (8.43).

Согласно (8.40) при дискретизации колебания $u(t)$ происходит преобразование частоты:

$$f_{\text{преобр}}=f_{\text{с}}+k\,f_{\text{д}}, \quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,..., \qquad (8.47)$$

где $f_{\text{преобр}}$ — частоты составляющих дискретизированного сигнала $u[n]$; $f_{\text{с}}$ — частоты составляющих спектра исходного аналогового сигнала $u(t)$. На рис.8.3 цифрами обозначены номера k, входящие в формулу (8.47) для соответствующих частотных областей (подчёркнутые номера k отвечают преобразованию отрицательных частот $f_{\text{с}}$, а неподчёркнутые — положительных частот).

При выборе частоты дискретизации $f_{\text{д}}$ больше минимально необходимого значения, т.е. при $f_{\text{д}}=1/T>2\Delta F$, благодаря появлению свободных интервалов между отображениями спектра исходного колебания (рис.8.3,*в*) возможно снижение требований к параметрам интерполирующего фильтра (расширение полосы пропускания идеального восстанавливающего полосового фильтра или применение для этой цели фильтра с непрямоугольной АЧХ).

Однако в отличие от случая дискретизации видеосигналов, т.е. колебаний, спектр которых примыкает к нулевой частоте, для полосовых колебаний (8.1) указанная возможность может быть реализована только при определённых соотношениях между частотами $f_{\text{д}}$ и $f_{\text{ц}}$. Возможна ситуация, когда при некотором значении частоты дискретизации $f_{\text{д}}=1/T>2\Delta F$ в спектре частот полосового сигнала $f\in[f_{\text{н}},\,f_{\text{в}}]$ найдётся частота $f_{\text{кр}}$, кратная $f_{\text{д}}$, которая не может быть восстановлена по отсчётам выборки сигнала $u[n]$, так как отсчёты выборки будут периодически повторяться и через них можно провести множество

гармонических колебаний. Более того, целая область составляющих вблизи частоты $f_{кр}$ не будет восстановлена по дискретным выборкам [19]. Это обстоятельство следует учитывать при выборе частоты дискретизации $f_д$.

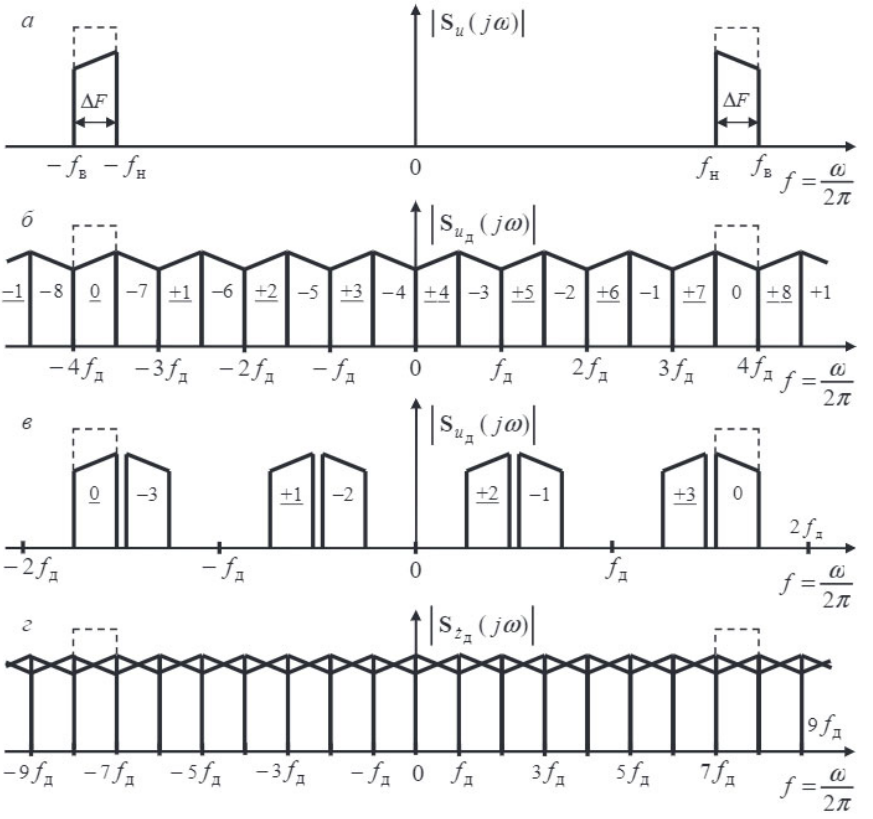


Рис.8.3. Амплитудно-частотные спектры при дискретизации вещественного полосового сигнала (8.1) для случая выполнения условий (8.41): *а* — спектр исходного полосового сигнала $u(t)$; *б* — спектр дискретизированного полосового сигнала $u[n]$ при частоте дискретизации $f_д = 2\Delta F$; *в* — спектр сигнала $u[n]$ при $f_д > 2\Delta F$; *г* — спектр дискретизированного аналитического сигнала $\dot{z}[n]$ при $f_д = \Delta F$

Даже если условие (8.41) не выполняется, то и в этом случае возможно несколько методов дискретизации и последующего точного восстановления полосового колебания (8.1) с финитным спектром по его отсчётам, число которых на интервале наблюдения $T_н$ равно $N = 2\Delta F T_н$. Наибольшее практическое зна-

чение для цифровой обработки сигналов имеют следующие два метода дискретизации полосовых колебаний [19].

При первом из них полосовое колебание $u(t)$ представляется взятыми через интервал $T = 1/\Delta F$ (с частотой дискретизации $f_д = \Delta F$) парами отсчётов, один из которых $u[n]$ является мгновенным значением исходного сигнала $u(t)$, а другой $\hat{u}[n]$ — мгновенным значением его преобразования Гильберта $\hat{u}(t)$ [см. (8.14)]. Интерполяционная формула в этом случае имеет следующий вид:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ u[n]\, H_c(t - nT) - \hat{u}[n]\, H_s(t - nT) \right\}, \tag{8.48}$$

где $H_c(t)$ — интерполирующая функция для отсчётов $u[n]$ исходного колебания, описываемая выражением (8.43);

$$H_s(t) = \frac{\sin(\pi \Delta F t)}{\pi \Delta F t} \sin(2\pi f_ц t) \tag{8.49}$$

— интерполирующая функция для отсчётов $\hat{u}[n]$.

При втором методе дискретизации полосовое колебание (8.1) представляется совокупностью пар отсчётов огибающей $U(t)$ и полной $\Phi(t)$ или начальной фазы $\varphi(t)$, следующих с тем же интервалом $T = 1/\Delta F$ (с частотой дискретизации $f_д = \Delta F$):

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U[n] \frac{\sin[\pi \Delta F (t - nT)]}{\pi \Delta F (t - nT)} \cos\{2\pi f_ц (t - nT) + \Phi[n]\}. \tag{8.50}$$

Формулу (8.50) легко получить из (8.48), если учесть связь между вещественной огибающей $U(t)$ и полной фазой

$$\Phi(t) = 2\pi f_ц t + \varphi(t) \tag{8.51}$$

полосового колебания (8.1) с компонентами аналитического сигнала (8.13) $u(t)$ и $\hat{u}(t)$, выражаемую соотношениями (8.19) и (8.20), из которых следует:

$$\begin{cases} u[n] = U[n] \cos\{\Phi[n]\}; \\ \hat{u}[n] = U[n] \sin\{\Phi[n]\}. \end{cases} \tag{8.52}$$

Подстановкой (8.52) в выражение (8.50) получаем интерполяционную формулу для второго метода дискретизации [19]:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U[n] \frac{\sin[\pi \Delta F (t - nT)]}{\pi \Delta F (t - nT)} \cos\{2\pi f_ц t + \varphi[n]\}. \tag{8.53}$$

Аналитический сигнал (8.13) имеет односторонний спектр [см. (8.26)]. Такой спектр плотно укладывается на оси частот с периодом повторения ΔF.

Этим и объясняется возможность представления полосового колебания минимально допустимым числом отсчётов при произвольном размещении его спектра на оси частот. Однако для представления комплексного, в частности аналитического, сигнала требуется два канала: канал исходного полосового колебания $u(t)$ и канал сопряжённого с ним по Гильберту колебания $\hat{u}(t)$. В каждом из каналов сигнал имеет двусторонний спектр, поэтому взятие отсчётов с частотой дискретизации $f_д = 1/T = \Delta F$ вызывает перекрытие отображений спектра колебания $u(t)$ в спектре последовательности отсчётов $u[n]$, как показано на рис.8.3,*г*. В этих условиях (т.е. при $f_д = 1/T = \Delta F$), располагая только одним каналом, невозможно выделить спектр исходного колебания $u(t)$ из спектра последовательности отсчётов $u[n]$, но наличие второго канала позволяет выполнить эту операцию, скомпенсировав одно из двух перекрывающихся отображений спектра [19].

Полосовое колебание (8.1), представленное отсчётами амплитуды $U[n]$ и фазы $\varphi[n]$, может быть восстановлено, например, путём амплитудной и фазовой модуляции гармонического колебания $\cos(2\pi f_ц t)$ в соответствии с законами изменения отсчётов $U[n]$ и $\varphi[n]$, как это следует из формулы (8.53).

Описанные выше процедуры дискретизации позволяют абсолютно точно восстановить полосовое колебание $u(t)$ по его отсчётам $u[n]$. Однако при этом делался ряд допущений, выполнение которых на практике невозможно. В частности, предполагалось, что полосовое колебание $u(t)$ имеет бесконечную длительность, его спектр является финитным, т.е. идеально ограничен по ширине, отсчёты $u[n]$ представляются бесконечно короткими в фиксированные с абсолютной точностью моменты времени, для восстановления колебания используются фильтры с бесконечно крутыми скатами АЧХ и бесконечным затуханием за пределами полосы пропускания. В действительности число отсчётов $u[n]$ сигнала конечно, колебания, несущие информацию, имеют нефинитный спектр, истинные моменты взятия отсчётов несколько отличаются от предполагаемых, значения отсчётов определяются с ограниченной точностью, а идеальный восстанавливающий фильтр физически нереализуем. Однако погрешности дискретизации и интерполяции, не превышающие допустимых значений, не ухудшают качества приёма и обработки информации, так как чувствительность воспроизводящего устройства к искажениям сигнала всегда ограничена [19].

Рассмотрим общий случай образования спектра дискретизированного полосового колебания, когда условия (8.41) могут не выполняться. Имеет смысл выбирать частоту дискретизации $f_д = 1/T > 2\Delta F$, поскольку только в этом случае возможно восстановление исходного полосового колебания $u(t)$ по его дискретной выборке $u[n]$.

Спектральная плотность аналогового полосового сигнала $u(t)$ связана со спектральной плотностью его комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}(t)$ формулой (8.30).

Подстановкой (8.30) в общее выражение для спектра дискретизированного сигнала (8.40), получим спектральную плотность выборки $u[n]$ полосового колебания (8.1):

$$\mathbf{S}_{u_д}(j\omega)=\frac{f_д}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega-j\omega_ц-j2\pi k f_д)+\mathbf{S}^{*}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega+j\omega_ц-j2\pi k f_д)\right]. \tag{8.54}$$

Полагая спектр $\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega)$ комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}(t)$ финитным, подстановкой (8.30) в формулу (8.24) найдём выраженную через спектр комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}(t)$ спектральную плотность аналогового сигнала $\hat{u}(t)$, сопряжённого по Гильберту с исходным полосовым колебанием $u(t)$:

$$\hat{\mathbf{S}}_u(j\omega)=\frac{-j}{2}\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega-j\omega_ц)+\frac{j}{2}\mathbf{S}^{*}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega+j\omega_ц). \tag{8.55}$$

Подставляя (8.55) в выражение (8.40), определим спектральную плотность выборки $\hat{u}[n]$:

$$\hat{\mathbf{S}}_{u_д}(j\omega)=\frac{f_д}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[-j\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega-j\omega_ц-j2\pi k f_д)+j\mathbf{S}^{*}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega+j\omega_ц-j2\pi k f_д)\right]. \tag{8.56}$$

Подстановкой (8.30) в формулу (8.26) получим выраженную через спектр комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}(t)$ спектральную плотность аналогового аналитического сигнала (8.13):

$$\mathbf{S}_{\dot{z}}(j\omega)=\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega-j\omega_ц). \tag{8.57}$$

Подставляя (8.57) в выражение (8.40), найдём спектральную плотность дискретной выборки $\dot{z}[n]$ аналитического сигнала (8.13):

$$\mathbf{S}_{\dot{z}_д}(j\omega)=f_д\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega-j\omega_ц-j2\pi k f_д). \tag{8.58}$$

Наконец, подстановкой $\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega)$ в формулу (8.40) определим спектральную плотность дискретной выборки $\dot{\mathbf{U}}[n]$ комплексной огибающей полосового колебания (8.1):

$$\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}_д}(j\omega)=f_д\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega-j2\pi k f_д). \tag{8.59}$$

Таким образом, с позиций теории модуляции (см. § 1.6) нами получены общие выражения для спектральных плотностей дискретных выборок исходного полосового сигнала $u[n]$, сигнала $\hat{u}[n]$, сопряжённого с ним по Гильберту, аналитического сигнала $\dot{z}[n]$ и комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}[n]$ полосового ко-

лебания. Все эти спектры выражены через спектральную плотность $\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega)$ комплексной огибающей (8.7) исходного аналогового полосового сигнала (8.1).

При условии $f_д = 1/T > 2\Delta F$ примем частоту дискретизации равной

$$f_д = \frac{1}{T} = \frac{f_ц}{r}, \quad r \text{ — положительное число}. \tag{8.60}$$

Подставляя (8.60) в формулы (8.54), (8.56), (8.58) и (8.59), будем иметь

$$\mathbf{S}_{u_д}(j\omega) = \frac{f_ц}{2r}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}\left(j\omega - j\omega_ц\left[1+\frac{k}{r}\right]\right) + \mathbf{S}^*_{\dot{\mathbf{U}}}\left(j\omega + j\omega_ц\left[1-\frac{k}{r}\right]\right)\right\}; \tag{8.61}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{u_д}(j\omega) = \frac{f_ц}{2r}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{-j\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}\left(j\omega - j\omega_ц\left[1+\frac{k}{r}\right]\right) + j\mathbf{S}^*_{\dot{\mathbf{U}}}\left(j\omega + j\omega_ц\left[1-\frac{k}{r}\right]\right)\right\}; \tag{8.62}$$

$$\mathbf{S}_{\dot{z}_д}(j\omega) = \frac{f_ц}{r}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}\left(j\omega - j\omega_ц\left[1+\frac{k}{r}\right]\right); \tag{8.63}$$

$$\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}_д}(j\omega) = \frac{f_ц}{r}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}\left(j\omega - j\omega_ц\frac{k}{r}\right). \tag{8.64}$$

Полученные результаты иллюстрируют рис.8.4 — 8.6.

На рис.8.4,*а* — 8.6,*а* изображены модули спектральных плотностей (амплитудно-частотные спектры •) аналогового полосового колебания $\left|\mathbf{S}_u(j\omega)\right|$ и его комплексной огибающей $\left|\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega)\right|$, построенные по формуле (8.30). Амплитудно-частотные спектры $\left|\mathbf{S}_{u_д}(j\omega)\right|$ дискретизированных полосовых сигналов $u[n]$, построенные по формуле (8.61) при различных значениях r, представлены на рис.8.4,*б* — 8.6,*б*. Амплитудно-частотные спектры $\left|\mathbf{S}_{\dot{z}_д}(j\omega)\right|$ дискретизированных аналитических сигналов $\dot{z}[n]$, построенные по формуле (8.63) при разных значениях r, приведены на рис.8.4,*в* — 8.6,*в*. Амплитудно-частотные спектры $\left|\mathbf{S}_{\dot{\mathbf{U}}_д}(j\omega)\right|$ дискретизированных комплексных огибающих $\dot{\mathbf{U}}[n]$, построенные по формуле (8.64) при различных значениях r, изображены на рис.8.4,*г* — 8.6,*г*.

Частота дискретизации $f_д$ при построении амплитудно-частотных спектров выбрана по формуле (8.60) для трёх значений параметра r: $r = 2$ на рис.8.4, $r = 3/2$ на рис.8.5 и $r = 4/3$ на рис.8.6. Цифрами у спектральных полос

• Комплексно-сопряжённый спектр $\left|\mathbf{S}^*_{\dot{\mathbf{U}}}(j\omega)\right|$ на рис.8.4 — 8.6 показан пунктирной линией.

дискретизированных сигналов на рис.8.4 — 8.6 обозначены номера k, входящие в соотношение (8.47), для соответствующих частотных областей (подчёркнутые номера k отвечают преобразованию отрицательных частот $f_{\text{с}}$, а неподчёркнутые — положительных частот).

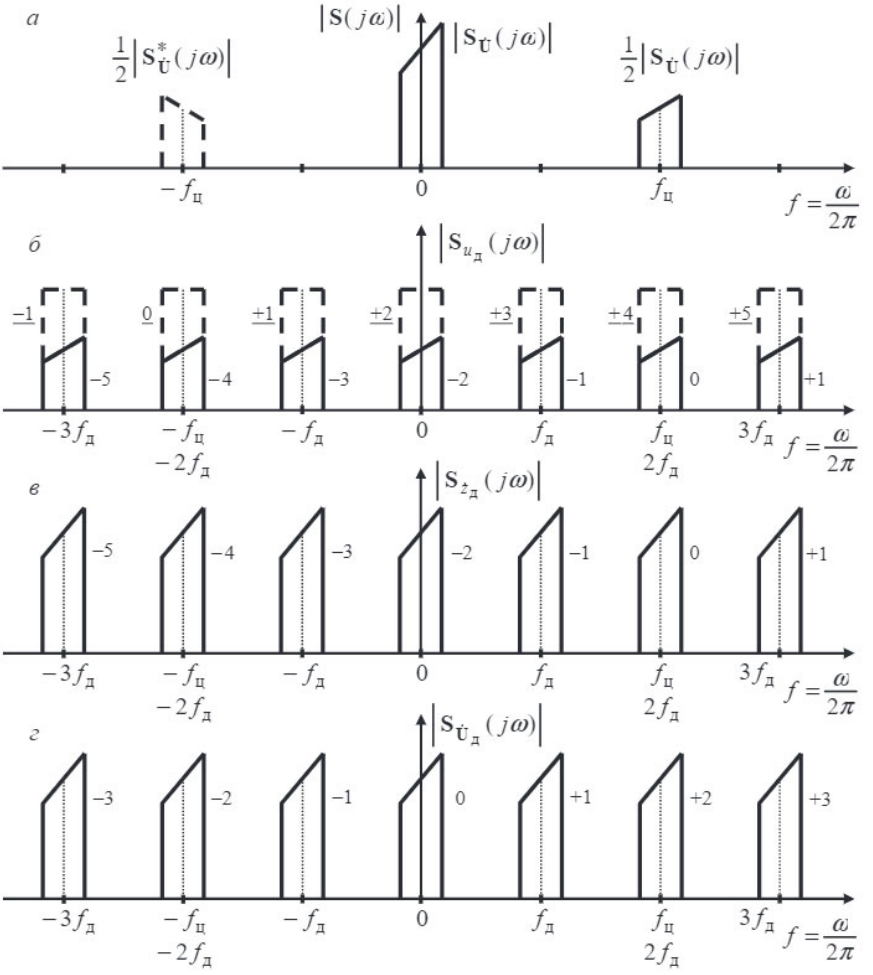


Рис.8.4. Модули спектральных плотностей (амплитудно-частотные спектры) при частоте дискретизации $f_{\text{д}} = f_{\text{ц}}/2$: *а* — исходного аналогового полосового сигнала и его комплексной огибающей; *б* — дискретизированного полосового сигнала; *в* — дискретизированного аналитического сигнала; *г* — дискретизированной комплексной огибающей полосового сигнала

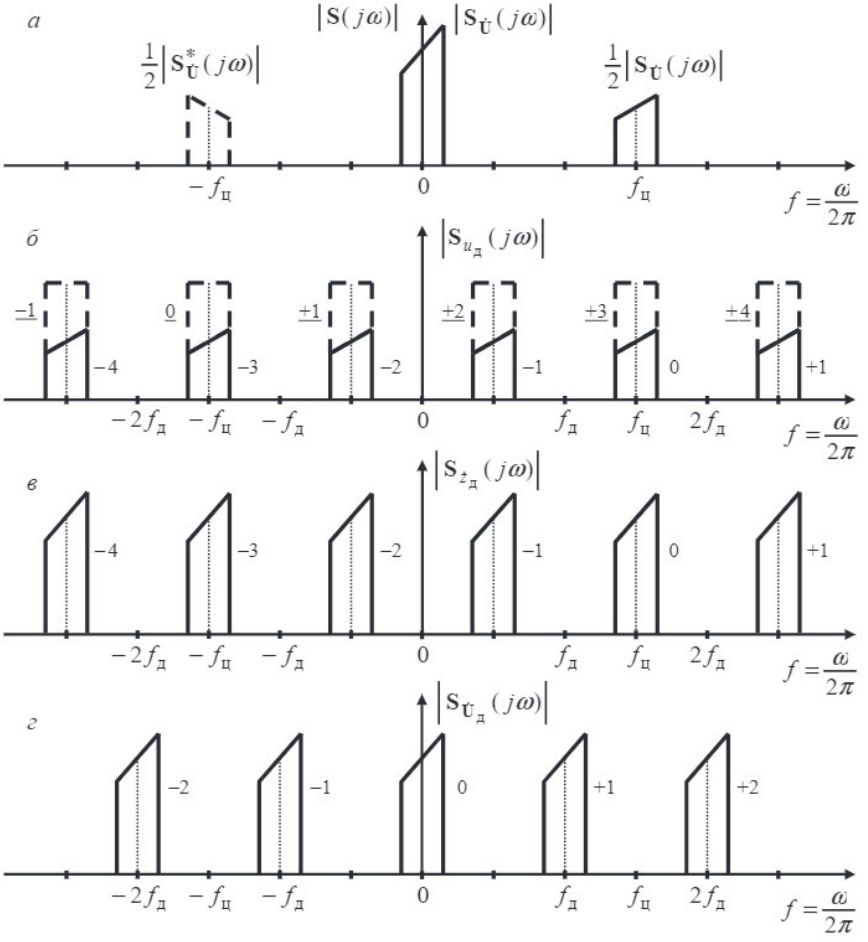


Рис.8.5. Модули спектральных плотностей (амплитудно-частотные спектры) при частоте дискретизации $f_д = f_ц/(3/2)$: *а* — исходного аналогового полосового сигнала и его комплексной огибающей; *б* — дискретизированного полосового сигнала; *в* — дискретизированного аналитического сигнала; *г* — дискретизированной комплексной огибающей полосового сигнала

Из рис.8.4,*б* видно, что если в формуле (8.60) r является целым числом, то при образовании спектра $S_{u_д}(j\omega)$ дискретизированного полосового сигнала $u[n]$ происходит наложение спектральных полос $0{,}5\,S_{\dot{U}}(\omega-\omega_ц[1+k/r])$ и $0{,}5\,S^*_{\dot{U}}(\omega+\omega_ц[1-k/r])$ с различными значениями k. Аналогичный результат

получается также для спектра дискретизированного сигнала $\hat{u}[n]$, сопряжённого с $u[n]$ по Гильберту [см. (8.62)].

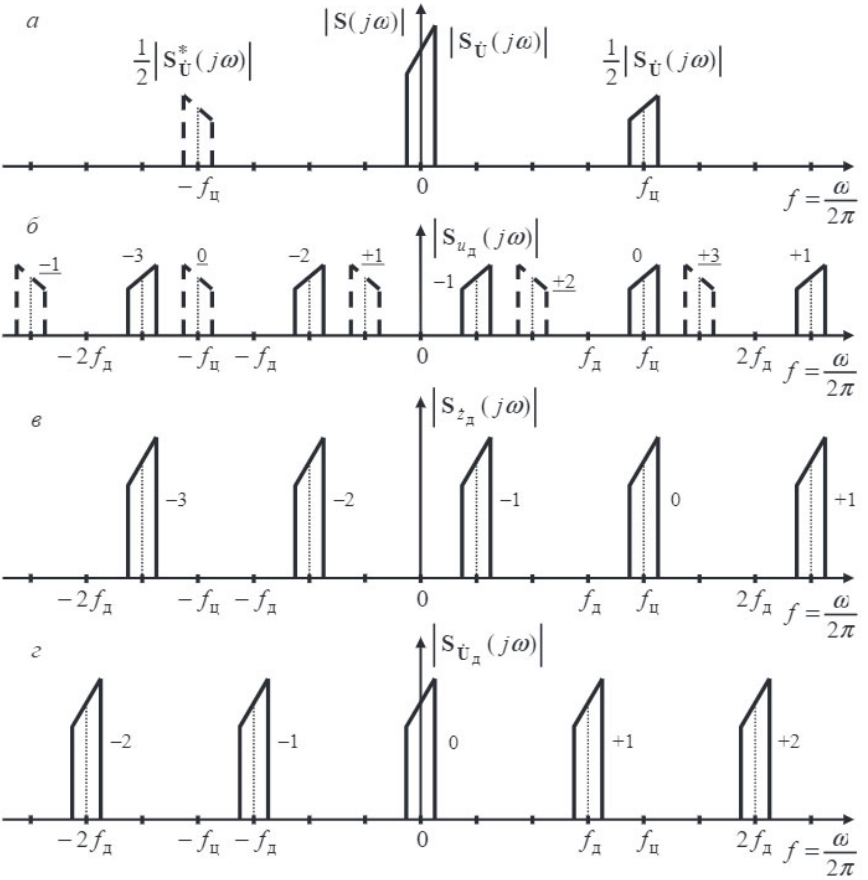


Рис.8.6. Модули спектральных плотностей (амплитудно-частотные спектры) при частоте дискретизации $f_{д}=f_{ц}/(4/3)$: *а* — исходного аналогового полосового сигнала и его комплексной огибающей; *б* — дискретизированного полосового сигнала; *в* — дискретизированного аналитического сигнала; *г* — дискретизированной комплексной огибающей полосового сигнала

Спектральная плотность $\mathbf{S}_{\dot{z}_д}(j\omega)$ дискретизированного аналитического сигнала [см. (8.63) и рис.8.4,*в* — 8.6,*в*] при любых значениях r формируется только из составляющих $\mathbf{S}_{\dot{U}}\bigl(\omega-\omega_{ц}[1+k/r]\bigr)$, т.е. без наложения спектральных

полос $0{,}5\,\mathbf{S}_{\dot{U}}\left(\omega-\omega_{ц}[1+k/r]\right)$ и $0{,}5\,\mathbf{S}^{*}_{\dot{U}}\left(\omega+\omega_{ц}[1-k/r]\right)$. Аналогичное заключение можно сделать и относительно спектральной плотности дискретизированной комплексной огибающей $\mathbf{S}_{\dot{U}_{д}}(j\omega)$ [см. (8.64) и рис.8.4,*г* — 8.6,*г*].

В случае целых значений r в спектре дискретизированного аналитического сигнала $\mathbf{S}_{\dot{z}_{д}}(j\omega)$ спектральная полоса при $k=-r$ совпадает со спектральной плотностью комплексной огибающей $\mathbf{S}_{\dot{U}}(j\omega)$ аналогового полосового колебания $u(t)$ [см. (8.63) и рис.8.4,*а*,*в*], поэтому спектр $\mathbf{S}_{\dot{U}}(j\omega)$ можно получить выделением с помощью комплексного фильтра участка спектра дискретизированного аналитического сигнала $\mathbf{S}_{\dot{z}_{д}}(j\omega)$, группирующегося в окрестности нулевой частоты.

Таким образом, с позиций спектральных представлений для получения квадратурных компонент комплексной огибающей полосового колебания (8.1) требуется образовать аналитический сигнал (8.13), сформировав для этого сопряжённое по Гильберту колебание $\hat{u}(t)$, затем осуществить дискретизацию аналитического сигнала с частотой дискретизации, определяемой формулой (8.60) при целом значении r, и выделить с помощью комплексного фильтра участок спектра $\mathbf{S}_{\dot{z}_{д}}(j\omega)$ в окрестности нулевой частоты с полосой, не меньшей ширины спектра исходного полосового колебания (8.1).

Из рис.8.4,*б* и 8.5,*б* видно, что при определённых условиях в спектре дискретизированного полосового сигнала $\mathbf{S}_{u_{д}}(j\omega)$ происходит наложение спектральных полос $0{,}5\,\mathbf{S}_{\dot{U}}\left(\omega-\omega_{ц}[1+k/r]\right)$ и $0{,}5\,\mathbf{S}^{*}_{\dot{U}}\left(\omega+\omega_{ц}[1-k/r]\right)$ с различными значениями k. Приравнивая аргументы у совпадающих спектральных полос $\mathbf{S}_{\dot{U}}(k_1)$ и $\mathbf{S}^{*}_{\dot{U}}(k_2)$, получим

$$k_2-k_1=2r. \qquad (8.65)$$

Это условие выполняется в двух случаях: 1) r — целое число (см. рис.8.4), при этом согласно (8.60) центральная частота $f_{ц}$ исходного полосового колебания (8.1) кратна частоте дискретизации $f_{д}$; 2) $2r$ — целое число (см. рис.8.5), при этом кратной частоте дискретизации $f_{д}$ является удвоенная центральная частота $f_{ц}$ спектра полосового колебания (8.1).

При других значениях r условие (8.65) не может быть выполнено ни при каких целых значениях k_1 и k_2. Это приводит к тому, что спектр дискретизированного полосового колебания $\mathbf{S}_{u_{д}}(j\omega)$ образуется без наложения спектральных полос $0{,}5\,\mathbf{S}_{\dot{U}}\left(\omega-\omega_{ц}[1+k/r]\right)$ и $0{,}5\,\mathbf{S}^{*}_{\dot{U}}\left(\omega+\omega_{ц}[1-k/r]\right)$. Типичный пример подобной ситуации приведён на рис.8.6.

Анализ рис.8.5 и 8.6 показывает, что при нецелых значениях r в спектре дискретизированного аналитического сигнала $\mathbf{S}_{\dot{z}_{д}}(j\omega)$ отсутствует спектраль-

ная полоса, совпадающая со спектром комплексной огибающей $\mathbf{S}_{\dot{U}}(j\omega)$ исходного аналогового полосового сигнала $u(t)$.

Из сопоставления рис.8.4,*в* и 8.4,*г* видно, что при целых значениях r спектры дискретизированного аналитического сигнала $\mathbf{S}_{\dot{z}_д}(j\omega)$ и дискретизированной комплексной огибающей $\mathbf{S}_{\dot{U}_д}(j\omega)$ совпадают. Их отличие заключается лишь в том, что совпадающие спектральные полосы получаются при разных значениях номера полосы k. Например, спектральная полоса с номером $k=0$ в спектре дискретизированного аналитического сигнала $\mathbf{S}_{\dot{z}_д}(j\omega)$ располагается в окрестности частоты $f_ц$, а в спектре дискретизированной комплексной огибающей $\mathbf{S}_{\dot{U}_д}(j\omega)$ — в окрестности нулевой частоты. При нецелых значениях r, как видно из рис.8.5,*в*,*г* и 8.6,*в*,*г*, спектральные плотности дискретизированного аналитического сигнала $\mathbf{S}_{\dot{z}_д}(j\omega)$ и дискретизированной комплексной огибающей $\mathbf{S}_{\dot{U}_д}(j\omega)$ смещены по оси частот.

Из выражения (8.64), а также из рис.8.4,*г* — 8.6,*г* следует, что структура спектра дискретизированной комплексной огибающей $\mathbf{S}_{\dot{U}_д}(j\omega)$ полосового колебания при выборе частоты дискретизации по формуле (8.60) не зависит от значения параметра r.

8.3. Формирование квадратурных компонент комплексной огибающей

◆ Аналоговый квадратурный преобразователь

Квадратурные компоненты $U_c(t)$ и $U_s(t)$ комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}(t)$ полосового аналогового сигнала $u(t)$, например, сигнала на промежуточной частоте, можно получить с помощью *квадратурного гетеродинирования*, осуществляемого *квадратурным преобразователем частоты* (КвПЧ, рис.8.7,*а*), функциональная схема которого состоит из двух смесителей (См$_1$ и См$_2$), реализуемых на базе синхронных детекторов (СД), и генератора опорных сигналов (ГОС — квадратурного гетеродина), вырабатывающего два колебания, находящихся в квадратуре: $u_{оп_1}(t)=U_m\cos(\omega_0 t)$ и $u_{оп_2}(t)=-U_m\sin(\omega_0 t)$, частота которых совпадает с несущей частотой принимаемого полосового сигнала $u(t)$.

Математическая модель смесителя для КвПЧ (перемножителя) представлена на рис.8.7,*б*. В результате низкочастотной фильтрации выделяется видеочастотная область спектра процесса, действующего на выходе перемножителя информационного $u(t)$ и опорного $u_{оп}(t)$ сигналов. Выходной сигнал смесителя можно записать в виде

$$U_{вых}(t)=k_{См}\left[u(t)\,u_{оп}(t)\right]_{нч}, \qquad (8.66)$$

где $k_{\text{См}}$ — коэффициент передачи смесителя; $[...]_{\text{нч}}$ — символ низкочастотной фильтрации.

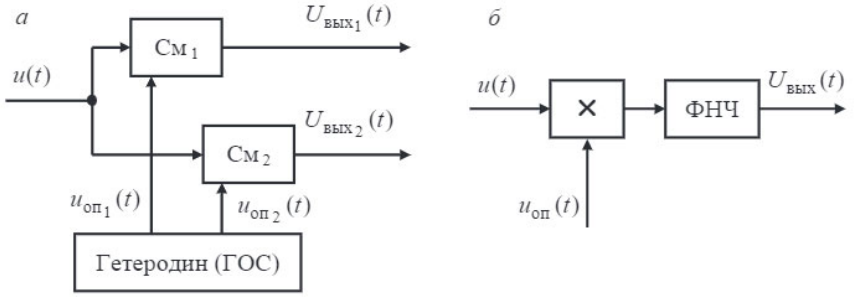


Рис.8.7. Квадратурный преобразователь частоты: *а* — функциональная схема; *б* — математическая модель смесителя в схеме КвПЧ

Подставляя в выражение (8.66) полосовой сигнал • (8.1) и опорные напряжения $u_{\text{оп}_1}(t) = U_m \cos(\omega_0 t)$ и $u_{\text{оп}_2}(t) = -U_m \sin(\omega_0 t)$, получим напряжения на выходах КвД:

$$U_{вых_1}(t) = k_{\text{См}}\left[U(t)\cos\{\omega_0 t + \varphi(t)\}\, U_m \cos(\omega_0 t)\right]_{\text{нч}} = \\ = 0{,}5\, k_{\text{См}} U_m U(t)\cos[\varphi(t)] \sim U_{\text{c}}(t); \qquad (8.67)$$

$$U_{вых_2}(t) = k_{\text{См}}\left[U(t)\cos\{\omega_0 t + \varphi(t)\}\, \{-U_m \sin(\omega_0 t)\}\right]_{\text{нч}} = \\ = 0{,}5\, k_{\text{См}} U_m U(t)\sin[\varphi(t)] \sim U_{\text{s}}(t). \qquad (8.68)$$

Здесь учтены соотношения (8.9).

После аналого-цифрового преобразования в двухканальном АЦП, работающем с тактовой частотой, равной частоте дискретизации $f_{\text{д}} = 1/T$, квадратурные компоненты в цифровой форме $\widetilde{U}_{\text{c}}[n]$ и $\widetilde{U}_{\text{s}}[n]$ поступают на систему цифровой обработки сигналов (ЦОС), где осуществляются цифровая фильтрация, извлечение закодированной в них информации (цифровое детектирование) и другие виды обработки.

Недостатки данного метода получения квадратурных компонент комплексной огибающей полосового сигнала заключаются в том, что реальные смесители, входящие в состав квадратурного преобразователя частоты, выделяют квадратурные компоненты с нелинейными искажениями и с несколько отличающимися друг от друга в двух каналах коэффициентами передачи [18]. Кроме

• Здесь и далее вместо центральной частоты $\omega_{\text{ц}}$ спектра полосового колебания (8.1) будем писать опорную частоту ω_0, полагая расстройку $\delta\omega = \omega_{\text{ц}} - \omega_0$ равной нулю.

того, разность фаз опорных сигналов в каналах КвПЧ может отличаться от 90°, что приводит к перекрёстным искажениям квадратурных компонент $U_c(t)$ и $U_s(t)$. Для компенсации этих нежелательных явлений можно использовать цифровую коррекцию искажений [19].

◆ **Аналого-цифровой квадратурный преобразователь**

Дискретные отсчёты квадратурных компонент $U_c[n]$ и $U_s[n]$ комплексной огибающей полосового сигнала могут быть получены и без аналогового КвПЧ. Это удаётся осуществить в *аналого-цифровом квадратурном преобразователе* (АЦКП), образуя цифровые отсчёты самого полосового колебания (8.1) с частотой дискретизации, определяемой выражением (8.60) при целом значении r, для одного из квадратурных каналов в моменты времени

$$t_n = nT = n\frac{1}{f_д} = n\frac{r}{f_0}, \quad n \text{ и } r \text{ — целые числа}, \tag{8.69}$$

а другого — в моменты времени t'_n, опережающие моменты t_n на четверть периода опорного колебания $T_0 = 1/f_0$:

$$t'_n = t_n - \frac{T_0}{4} = n\frac{r}{f_0} - \frac{1}{4f_0} = \frac{nr - 1/4}{f_0}, \quad n \text{ и } r \text{ — целые числа}. \tag{8.70}$$

Действительно, подставляя (8.69) и (8.70) в выражение (8.1), получим

$$u(t_n) = U(t_n)\cos\left[2\pi f_0 t_n + \varphi(t_n)\right] = U(t_n)\cos\left[2\pi f_0 \frac{nr}{f_0} + \varphi(t_n)\right] =$$

$$= U(t_n)\cos\left[\varphi(t_n)\right] = U_c(t_n); \tag{8.71}$$

$$u(t'_n) = U(t'_n)\cos\left[2\pi f_0 t'_n + \varphi(t'_n)\right] = U(t'_n)\cos\left[2\pi f_0 \frac{nr - 1/4}{f_0} + \varphi(t'_n)\right] =$$

$$= U(t'_n)\cos\left[-\frac{\pi}{2} + \varphi(t'_n)\right] = U(t'_n)\sin\left[\varphi(t'_n)\right] = U_s(t'_n). \tag{8.72}$$

Таким образом, в АЦКП, как и при использовании квадратурного демодулятора с АЦП, образуются цифровые отсчёты квадратурных компонент комплексной огибающей полосового сигнала (8.1), т.е. осуществляется перенос спектра полосового сигнала в область нулевых частот. Однако в отличие от схемы с КвПЧ (см. рис.8.7,*а*) перенос спектра происходит не с помощью смесителей (перемножителей), а в процессе дискретизации. Если в схеме с квадратурным демодулятором и АЦП цифровые отсчёты квадратурных компонент образуются в один и тот же момент времени t_n, то в аналого-цифровом квадратурном преобразователе — в разные моменты (t_n и t'_n), что является недостатком АКЦП, особенно при значительном отклонении частоты входного сигнала от опорной частоты f_0. Для уменьшения этого нежелательного явления следует

увеличивать частоту f_0 и, следовательно, частоту входного сигнала, но это приводит к повышению требуемого быстродействия АЦП, на основе которого строится схема аналого-цифрового квадратурного преобразователя [18].

Как правило, преобразование аналогового сигнала $u(t)$ в цифровую форму (аналого-цифровое преобразование) осуществляется в два этапа: вначале с помощью *устройства выборки и хранения* (УВХ) производится временная дискретизация колебания (8.1), а затем квантование отсчётов с выхода УВХ с помощью *квантователя* (рис.8.8).

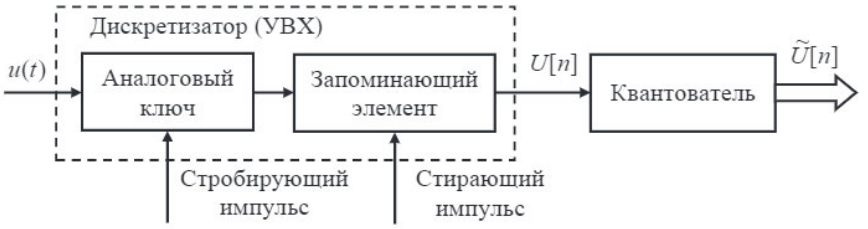


Рис.8.8. Функциональная схема АЦП

Наибольшее распространение получили два типа УВХ, использующих конденсатор в качестве запоминающего элемента [19]. В УВХ первого типа при подаче стробирующего импульса на управляющий вход аналогового ключа происходит заряд конденсатора с малой постоянной времени до напряжения входного сигнала и отслеживание его уровня. С окончанием стробирующего импульса входной сигнал отключается от конденсатора, который фиксирует напряжение, равное уровню входного сигнала в момент окончания стробирующего импульса. К этому моменту и относят отсчёт сигнала. В промежутке между стробирующими импульсами УВХ сохраняет значение предыдущего отсчёта. Ко второму типу относят интегрирующие УВХ, в которых производится интегрирование входного сигнала в течение времени действия стробирующего импульса и хранение результата интегрирования в промежутке между этими импульсами. Здесь отсчёт относят к моменту времени, соответствующему середине *интервала стробирования* $\Delta t_{\text{стр}}$. В конце каждого периода дискретизации (до начала стробирующего импульса) в УВХ производится стирание информации путём разряда запоминающего конденсатора. Требуемое быстродействие квантователя определяется *временем квантования* $\Delta t_{\text{кв}} = T - \Delta t_{\text{стр}}$, в течение которого отсчёт аналогового сигнала должен быть преобразован в цифровую форму. Здесь $T = 1/f_{\text{д}}$ — шаг дискретизации.

В двухканальной схеме АЦКП (рис.8.9) стробирующие импульсы подаются на УВХ в сдвинутые на четверть периода опорной частоты $T_0 = 1/f_0$ моменты времени t_n и t'_n, определяемые выражениями (8.69) и (8.70). Длительность стробирующих импульсов $\Delta t_{\text{стр}} \le T_0/2 = 1/(2f_0)$, а период их следования,

равный периоду дискретизации $T = 1/f_д$, согласован с шириной спектра входного сигнала $u(t)$, и в случае его узкополосности $T >> 1/f_0$. Квантователи преобразуют напряжения на выходах УВХ, равные отсчётам квадратурных компонент $U_c[n]$ и $U_s[n]$, в цифровую форму за время $\Delta t_{кв} = T - \Delta t_{стр}$ [18].

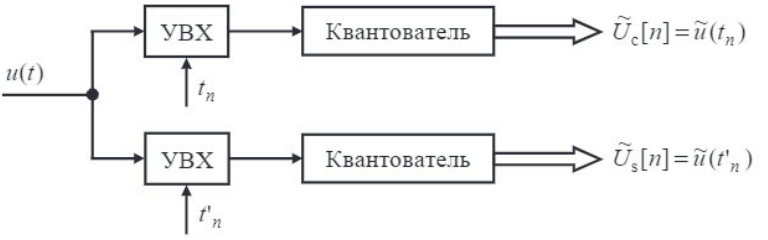


Рис.8.9. Функциональная схема двухканального аналого-цифрового квадратурного преобразователя

Недостаток двухканальных схем АЦКП заключается в сложности обеспечения идентичных характеристик каналов. При относительно большом времени преобразования аналогового сигнала в цифровую форму $\Delta t_{кв}$ можно обойтись одним квантователем, подключаемым через коммутатор к двум УВХ по очереди. Время квантования $\Delta t_{кв}$ при этом должно быть вдвое меньше, чем в схеме с двумя квантователями. Если же быстродействие АЦП таково, что время квантования удаётся значительно сократить и довести до значения $\Delta t_{кв} \le T_0/4$, то следует отказаться от двухканальной схемы и использовать один АЦП (например, параллельного типа) для образования обеих квадратурных компонент по очереди (рис.8.10). В параллельных АЦП операция квантования может предшествовать операции выборки и хранения, причём последнюю операцию выполняют в цифровой, а не в аналоговой форме [18].

Полосовое колебание (8.1) после усиления аналоговым устройством на входе ПЧ-тракта преобразуется с помощью АЦКП в цифровые отсчёты квадратурных компонент $\widetilde{U}_c[n]$ и $\widetilde{U}_s[n]$ комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}[n]$, которые далее обрабатываются в ПЧ-тракте комплексным ЦФ (см. § 4.6, а также гл.15 и 16).

◆ Снижение требований к быстродействию АЦП •

В схеме АЦКП, изображённой на рис.8.10, с помощью одного АЦП получают обе квадратурные компоненты комплексной огибающей путём взятия отсчётов полосового сигнала $u(t)$ в моменты времени t_n и t'_n, сдвинутые друг относительно друга на четверть периода опорной частоты $\delta t = t_n - t'_n = T_0/4$. Преимуществом этой схемы по сравнению со схемами, изображёнными на рис.8.7 и 8.9, является одноканальность и, следовательно, исключение ошибок, связанных

• Данный материал заимствован из книги [18].

с неидентичностью двух каналов, а недостатком — малое время, отводимое на преобразование аналогового отсчёта в цифровую форму $\Delta t_{\text{кв}} \le T_0/4$.

Покажем, каким образом в схеме АЦКП, изображённой на рис.8.10, можно увеличить время квантования $\Delta t_{\text{кв}}$. Такая возможность связана со стробоскопическим эффектом: отсчёты гармонической функции с частотой $f_0 = 1/T_0$ повторяются через период T_0, а через промежуток времени $T_0/2$ меняют знак. Если брать отсчёты входного сигнала $u(t)$ с учетверённой частотой опорного сигнала, т.е. через интервал времени $T_0/4$, то получим отсчёты пар квадратурных компонент с чередующимися знаками (рис.8.11,*а*).

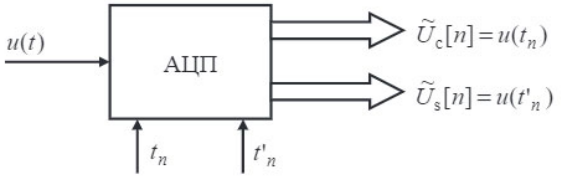


Рис.8.10. Функциональная схема аналого-цифрового квадратурного преобразователя (АЦКП) с одним АЦП

В случае узкополосного входного сигнала $u(t)$ брать так часто отсчёты нет необходимости: из показанных на рис.8.11,*а* отсчётов достаточно взять меньшую часть, пропуская большую. Условиям (8.69) и (8.70) соответствует взятие пар соседних отсчётов (рис.8.11,*б*).

Для увеличения $\Delta t_{\text{кв}}$ следует брать не соседние, а более удалённые отсчёты, что достигается сдвигом моментов t'_n относительно моментов t_n не на интервал, равный четверти периода опорной частоты, т.е. $\delta t = t_n - t'_n = T_0/4$, а на больший интервал $\delta t = t_n - t'_n = mT_0 + T_0/4$, где $m < r/2$; $r = f_0/f_{\text{д}}$; m — целое число (рис.8.11,*в*).

На рис.8.11,*в* частота дискретизации • $f_{\text{д}}$ осталась такой же, что и на рис.8.11,*б*. Несколько изменив частоту дискретизации и временной сдвиг δt, можно добиться того, чтобы знаки каждой квадратурной компоненты чередовались •• (рис.8.11,*г*). Максимально возможное значение временного сдвига отсчётов t_n и t'_n

$$\delta t = t_n - t'_n = T/2 = 1/(2f_{\text{д}}). \qquad (8.73)$$

• Под частотой дискретизации здесь понимается частота образования пары отсчётов квадратурных компонент комплексной огибающей полосового сигнала.

•• Чередование знаков квадратурных компонент заменяет умножение входной смеси в аналоговой части на меандр для компенсации дрейфа нулей аналоговых элементов. Разумеется, при этом необходимо инвертировать через раз знак каждой квадратурной компоненты в цифровой части.

Для того чтобы при этом знаки квадратурных компонент чередовались (рис.8.11,*д*), шаг дискретизации необходимо выбрать из условия

$$T = 1/f_д = rT_0 + T_0/2, \qquad (8.74)$$

где r — целое число.

Из выражения (8.74) получаем формулу связи опорной частоты f_0 с минимальной частотой дискретизации $f_д$:

$$f_0 = f_д(r + 0{,}5). \qquad (8.75)$$

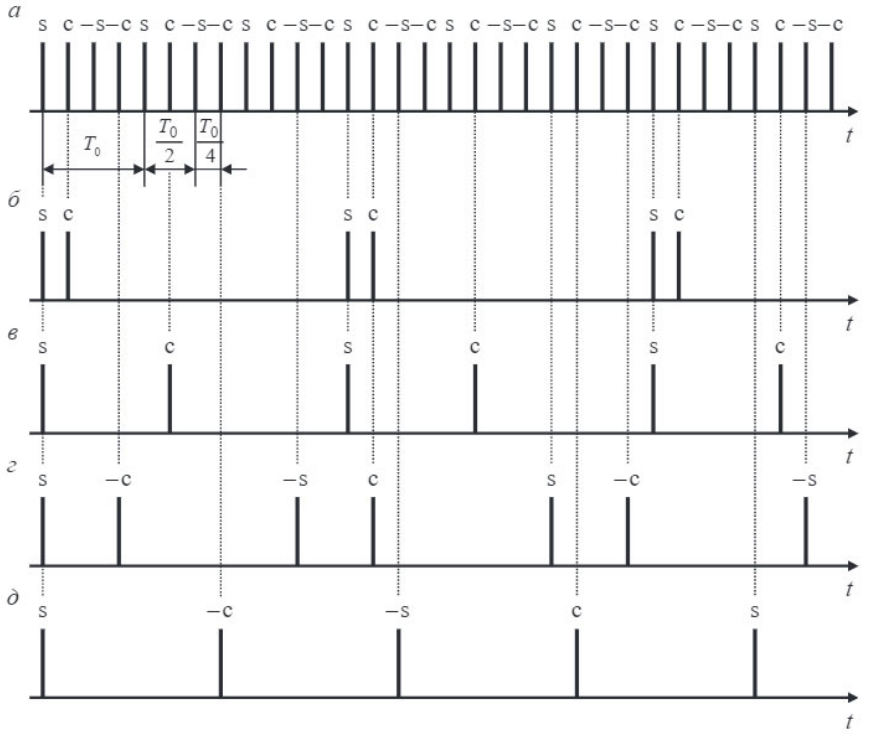


Рис.8.11. Эпюры отсчётов квадратурных компонент в АЦКП, изображённом на рис.8.10: *а* — при $f_д = 2f_0$, $\delta t = T_0/4$; *б* — при $f_д = f_0/3$, $\delta t = T_0/4$; *в* — при $f_д = f_0/3$, $\delta t = 5T_0/4$; *г* — при $f_д = 2f_0/5$, $\delta t = 3T_0/4$; *д* — при $f_д = 2f_0/7$, $\delta t = 7T_0/4$

Так как при выполнении условия (8.73) моменты отсчётов t'_n расположены посредине между моментами отсчётов t_n, то можно использовать одну последовательность моментов отсчётов $t_n^п$ с частотой $f_{АЦП}^п = 2f_д$ (тактовая часто-

та АЦП), отделять чётные отсчёты от нечётных и знак каждого второго чётного и нечётного отсчёта инвертировать (рис.8.12). Согласно формуле (8.75) тактовая частота АЦП при этом должна быть равна

$$f_{\text{АЦП}}^{\text{п}} = 2f_{\text{д}} = \frac{4f_0}{2r+1}. \qquad (8.76)$$



Рис.8.12. Аналого-цифровой квадратурный преобразователь с одним АЦП, тактовая частота которого определяется формулой (8.76)

Рассмотренные способы увеличения времени квантования $\Delta t_{\text{кв}}$ существенно снижают требования к быстродействию АЦП. Однако не следует забывать, что получаемые при этом цифровые отсчёты квадратурных компонент $\widetilde{U}_{\text{c}}[n]$ и $\widetilde{U}_{\text{s}}[n]$ для одного и того же значения n относятся к разным моментам времени, отличающимся друг от друга на δt. Для привязки отсчётов в каждой паре квадратурных компонент $\widetilde{U}_{\text{c}}[n]$ и $\widetilde{U}_{\text{s}}[n]$ к одному моменту времени можно применить цифровой интерполирующий фильтр.

◆ КвПЧ на основе цифрового гетеродинирования •

Рассмотрим аналого-цифровой квадратурный преобразователь, схема которого изображена на рис.8.13. В ней на выходе АЦП получают цифровой вещественный сигнал $\widetilde{u}[n]$ и умножают его на два опорных цифровых квадратурных сигнала $\cos(2\pi f_{\text{г}} Tn)$ и $-\sin(2\pi f_{\text{г}} Tn)$ с частотой $f_{\text{г}}$, на которую гетеродинируют центральную частоту $f_{\text{ц}}$ спектра входного сигнала $u(t)$ при дискретизации в АЦП:

$$f_{\text{г}} = \left| f_{\text{ц}} - k f_{\text{д}} \right|, \qquad (8.77)$$

где k — номер ближайшей к $f_{\text{ц}}$ гармоники частоты дискретизации $f_{\text{д}}$.

Частоту $f_{\text{г}}$ необходимо выбирать достаточно высокой, чтобы спектры компонент с суммарными и разностными частотами на выходах перемножителей не перекрывались. Гармоники с частотой $2f_{\text{г}}$ на выходах перемножителей подавляют цифровыми ФНЧ (ЦФНЧ). Составляющие разностных частот прохо-

• См. сноску на с.223.

дят через ФНЧ и представляют собой цифровые отсчёты квадратурных компонент $\tilde{U}_c[n]$ и $\tilde{U}_s[n]$ комплексной огибающей.

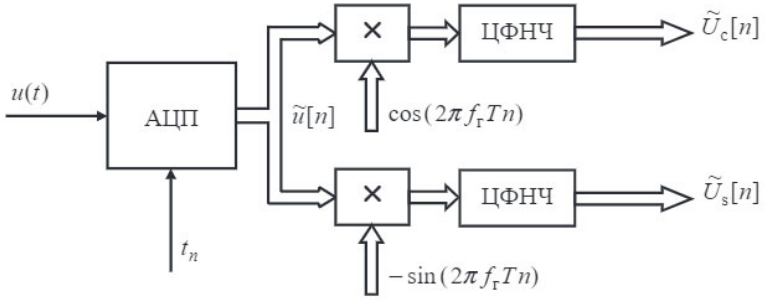


Рис.8.13. Квадратурный преобразователь частоты на основе цифрового гетеродинирования

Особенно удобно выбирать $f_г = f_д/4$, так как в этом случае отсчёты опорных сигналов $\cos(2\pi f_г Tn)$ и $-\sin(2\pi f_г Tn)$ принимают только три значения: 0, +1 и –1. Умножение на них сводится к отделению чётных отсчётов от нечётных и инверсии знака каждого второго отсчёта, тем самым снова приходим к схеме, изображённой на рис.8.12. При этом подавление гармоник с частотой $2f_г$ осуществляется интерполяцией отсчётов квадратурных компонент комплексной огибающей к одному моменту времени t_n. Иногда частоту $f_г$ выгодно выбирать примерно в 3 раза выше, чем $f_д/4$, так как в этом случае уменьшается влияние нелинейных искажений в аналоговом тракте цифрового радиоприёмного устройства [18].

8.4. Модель системы связи с квадратурной модуляцией

В настоящее время всё большее распространение получают радиотехнические системы, в которых при аналоговом канале связи применяются цифровые методы формирования сигнала в передающем устройстве и цифровая обработка сигналов в приёмнике. В качестве примера подобной системы рассмотрим систему связи с квадратурной модуляцией (рис.8.14), идея построения которой базируется на использовании метода комплексных огибающих [1, 4].

Работает система следующим образом. Передаваемое аналоговое сообщение $\lambda(t)$ после аналого-цифрового преобразования в АЦП поступает на цифровой формирователь квадратурных компонент (ЦФКК) комплексной огибающей, алгоритм работы которого определяется видом применяемой модуляции (АМ, ФМ или ЧМ). Квадратурные компоненты $\tilde{U}_c[n]$ и $\tilde{U}_s[n]$ с выходов ЦФКК подаются на двухканальный цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП), где они преобразуются в аналоговую форму $U_c(t)$ и $U_s(t)$. В квадратурном модуляторе

(КвМ) из сигналов $U_c(t)$ и $U_s(t)$ формируется высокочастотный полосовой сигнал $u(t)$, который далее усиливается в передатчике и излучается антенной. После селекции и необходимого усиления в приёмнике сигнал $u(t)$ поступает на квадратурный преобразователь частоты (КвПЧ), выделяющий квадратурные компоненты $U_c(t)$ и $U_s(t)$ комплексной огибающей, которые в двухканальном АЦП преобразуются в цифровую форму $\widetilde{U}_c[n]$ и $\widetilde{U}_s[n]$ и далее подаются на систему ЦОС.

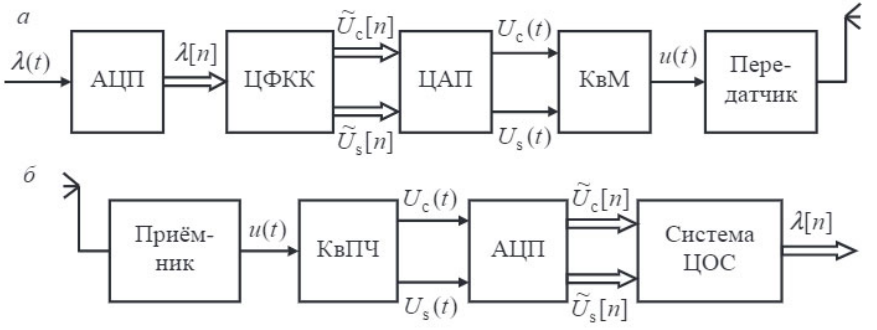


Рис.8.14. Система связи с аналоговым каналом при цифровом формировании и цифровой обработке сигналов: *а* — передающая часть; *б* — приёмная часть

◆ Квадратурный модулятор

На рис.8.15 изображена функциональная схема квадратурного модулятора (КвМ). Схема состоит из двух балансных модуляторов (БМ), генератора опорных сигналов (ГОС) $u_{оп_1}(t) = U_m \cos(\omega_0 t)$ и $u_{оп_2}(t) = -U_m \sin(\omega_0 t)$, находяшихся в квадратуре, и сумматора (Сум).

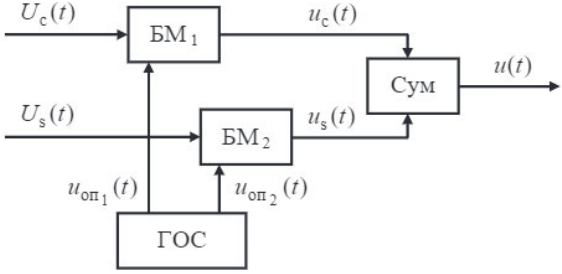


Рис.8.15. Функциональная схема квадратурного модулятора

Балансная модуляция — амплитудная модуляция с подавлением несущей — реализует математическую операцию умножения опорного (модулируемого)

колебания на информационный (модулирующий) сигнал. На выходах балансных модуляторов в схеме КвМ получаются сигналы

$$\begin{cases} u_{\text{c}}(t) = k_{\text{БМ}} U_{\text{c}}(t)\, U_m \cos(\omega_0 t) = E_{\text{c}}(t)\cos(\omega_0 t); \\ u_{\text{s}}(t) = k_{\text{БМ}} U_{\text{s}}(t)\left[-U_m \sin(\omega_0 t)\right] = -E_{\text{s}}(t)\sin(\omega_0 t), \end{cases} \tag{8.78}$$

где $k_{\text{БМ}}$ — коэффициент передачи балансного модулятора;

$$E_{\text{c}}(t) = k_{\text{БМ}} U_{\text{c}}(t) U_m; \quad E_{\text{s}}(t) = k_{\text{БМ}} U_{\text{s}}(t) U_m. \tag{8.79}$$

Высокочастотное полосовое колебание $u(t)$ формируется в сумматоре См в результате сложения сигналов $u_{\text{c}}(t)$ и $u_{\text{s}}(t)$:

$$u(t) = E_{\text{c}}(t)\cos(\omega_0 t) - E_{\text{s}}(t)\sin(\omega_0 t). \tag{8.80}$$

Обозначив $E_{\text{c}}(t) = U(t)\cos[\varphi(t)]$ и $E_{\text{s}}(t) = U(t)\sin[\varphi(t)]$, выражение (8.80) можно привести к форме (8.1).

◆ ЦФКК при амплитудной модуляции

Аналоговый АМ-сигнал имеет вид

$$u(t) = U_0\left[1 + m\lambda(t)\right]\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{8.81}$$

где U_0 — амплитуда немодулированной несущей; φ_0 —начальная фаза несущей; m — коэффициент модуляции; $\lambda(t)$ — модулирующий сигнал (сообщение), в котором содержится передаваемая информация.

Запишем выражение для дискретизированной комплексной огибающей колебания (8.81)

$$\dot{\mathbf{U}}[n] = U_0\left\{1 + m\lambda[n]\right\} e^{j\varphi_0}. \tag{8.82}$$

Отсюда найдём отсчёты квадратурных компонент комплексной огибающей

$$\begin{cases} U_{\text{c}}[n] = U_0\left\{1 + m\lambda[n]\right\}\cos(\varphi_0); \\ U_{\text{s}}[n] = U_0\left\{1 + m\lambda[n]\right\}\sin(\varphi_0). \end{cases} \tag{8.83}$$

Структурная схема ЦФКК при АМ (цифровой модели амплитудного модулятора), описываемого формулами (8.83), приведена на рис.8.16.

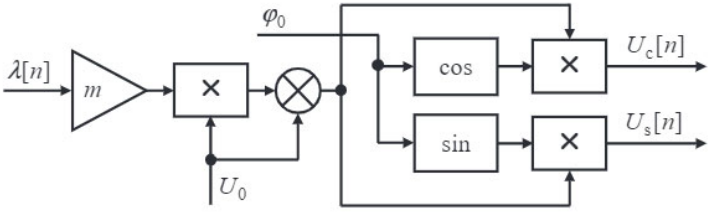


Рис.8.16. Цифровой формирователь квадратурных компонент комплексной огибающей при амплитудной модуляции

◆ ЦФКК при фазовой модуляции

Аналоговый ФМ-сигнал имеет вид

$$u(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + m\lambda(t) + \varphi_0], \tag{8.84}$$

где m — индекс фазовой модуляции.

Запишем выражение для дискретизированной комплексной огибающей колебания (8.84)

$$\dot{\mathbf{U}}[n] = U_0 \exp\{j(m\lambda[n] + \varphi_0)\}. \tag{8.85}$$

Отсюда находим отсчёты квадратурных компонент комплексной огибающей

$$\begin{cases} U_c[n] = U_0 \cos\{m\lambda[n] + \varphi_0\}; \\ U_s[n] = U_0 \sin\{m\lambda[n] + \varphi_0\}. \end{cases} \tag{8.86}$$

Структурная схема ЦФКК при ФМ (цифровой модели фазового модулятора), описываемого формулами (8.86), изображена на рис.8.17.

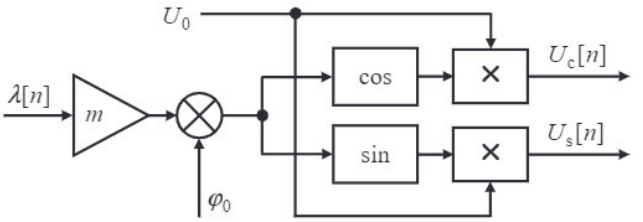


Рис.8.17. Цифровой формирователь квадратурных компонент комплексной огибающей при фазовой модуляции

◆ ЦФКК при частотной модуляции

Амплитудная и фазовая модуляции являются прямыми видами модуляции, при которых сообщением $\lambda(t)$ модулируется параметр синусоидального колебания (амплитуда или фаза соответственно). Частотная модуляция (ЧМ) относится к косвенным видам модуляции. При ЧМ фаза колебания модулируется не самим сообщением $\lambda(t)$, а интегралом от него:

$$u(t) = U_0 \cos\left[\omega_0 t + m\int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau + \varphi_0\right], \tag{8.87}$$

где m — индекс частотной модуляции.

Запишем выражение для дискретизированной комплексной огибающей колебания (8.87)

$$\begin{cases} \psi[n] = m K_{\text{инт}}(z)\,\lambda[n]; \\ \dot{\mathbf{U}}[n] = U_0 \exp\{j(\psi[n] + \varphi_0)\}, \end{cases} \tag{8.88}$$

где $K_{\text{инт}}(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ — передаточная функция цифрового интегратора. Отсюда получим алгоритм формирования отсчётов квадратурных компонент комплексной огибающей

$$\begin{cases} \psi[n]=mK_{\text{инт}}(z)\lambda[n]; \\ U_{\text{c}}[n]=U_0\cos\{\psi[n]+\varphi_0\}; \\ U_{\text{s}}[n]=U_0\sin\{\psi[n]+\varphi_0\}. \end{cases} \tag{8.89}$$

Структурная схема ЦФКК при ЧМ (цифровой модели частотного модулятора), описываемого формулами (8.89), приведена на рис.8.18.

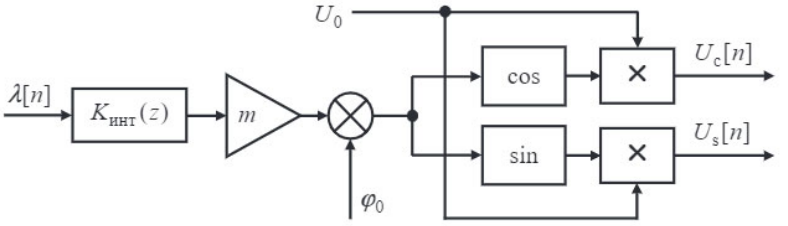


Рис.8.18. Цифровой формирователь квадратурных компонент комплексной огибающей при частотной модуляции

На базе цифровой модели частотного модулятора (рис.8.18) можно строить цифровые модели генераторов, управляемых напряжением (ГУН), применяемых в радиоаппаратуре в качестве перестраиваемых по частоте генераторов. При этом в качестве информационного сообщения $\lambda(t)$ следует рассматривать управляющее напряжение $U_{\text{упр}}(t)$.

8.5. Цифровые модели нелинейных преобразований полосовых сигналов в радиоприёмных и радиопередающих устройствах

Типовые нелинейные радиотехнические устройства осуществляют трансформацию спектра одного или нескольких полосовых колебаний. Нелинейные преобразования одного колебания имеют место при амплитудном и частотном детектировании, нелинейном резонансном усилении, умножении частоты, амплитудном ограничении. Нелинейные преобразования нескольких колебаний встречаются при преобразовании частоты (гетеродинировании), фазовом детектировании и различных видах модуляции.

При нелинейном преобразовании одного полосового колебания $u(t)$ образуется процесс $y(t)$, имеющий очень широкий (теоретически бесконечный) и сложный спектр, состоящий из узких спектральных полос, группирующихся во-

круг гармоник центральной (несущей) частоты спектра колебания $u(t)$. В результате нелинейного преобразования нескольких полосовых колебаний в спектре процесса $y(t)$, кроме того, содержатся спектральные полосы, группирующиеся вокруг комбинационных частот.

Процесс $y(t)$ не является полосовым колебанием, поэтому не может быть описан комплексной огибающей. Однако в типовых нелинейных устройствах радиотехнических систем используются не все продукты нелинейного преобразования, а лишь некоторая их часть, спектр которых сосредоточен либо в области нулевой частоты (детектирование), либо в узкой полосе в окрестности частоты, кратной несущей частоте преобразованного сигнала (амплитудное ограничение, нелинейное резонансное усиление, умножение частоты), либо в окрестности одной или нескольких расположенных рядом комбинационных частот (гетеродинирование, модуляция).

Используемая область спектра процесса $y(t)$ выделяется с помощью линейного фильтра (полосового или низкочастотного), включённого на выходе нелинейного элемента. Данное обстоятельство позволяет применять метод комплексных огибающих для описания сигналов в нелинейных радиотехнических устройствах, преобразующих полосовые колебания [1, 4, 5, 37, 38]. На рис.8.19 изображены схемы нелинейных инерционных преобразователей полосовых колебаний с одним (*а*) и с двумя (*б*) входными сигналами.

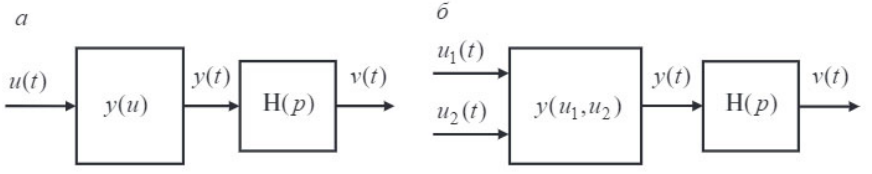


Рис.8.19. Обобщённые схемы нелинейных инерционных преобразователей полосовых сигналов: *а* — устройство с одним входом; *б* — устройство с двумя входами

Для нахождения процесса $y(t)$ необходимо располагать характеристикой нелинейного элемента $y(u)$. Чаще всего при анализе нелинейного преобразования одного полосового сигнала используется кусочно-степенная (однополупериодная) аппроксимация этой характеристики (рис.8.20):

$$y_1(u)=\begin{cases} a\,u^{\mu}, & u>0; \\ 0, & u\le 0, \end{cases} \tag{8.90}$$

где a — постоянный коэффициент; μ — показатель степени, являющийся неотрицательным вещественным числом.

На основе однополупериодной характеристики (8.90) можно построить также двухполупериодные характеристики μ-й степени:

чётную

$$y_{2_{\text{чёт}}}(u) = y(u) + y(-u) = \begin{cases} a\,u^{\mu}, & u > 0; \\ 0, & u = 0; \\ a\,(-u)^{\mu}, & u < 0 \end{cases} \tag{8.91}$$

и нечётную

$$y_{2_{\text{нечёт}}}(u) = y(u) - y(-u) = \begin{cases} a\,u^{\mu}, & u > 0; \\ 0, & u = 0; \\ -\,a\,(-u)^{\mu}, & u < 0. \end{cases} \tag{8.92}$$

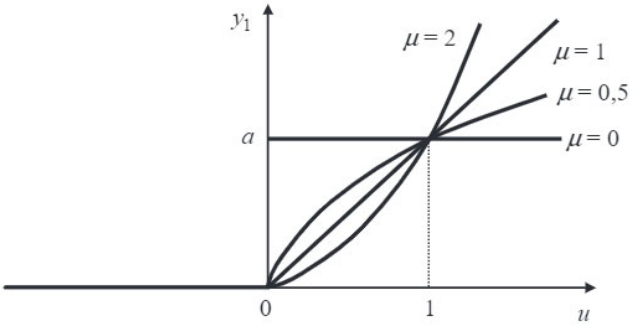


Рис.8.20. Кусочно-степенная аппроксимация характеристики нелинейного элемента

Если входной сигнал $u(t)$ является полосовым, т.е. имеет вид (8.1), то процесс $y_1(t)$ на выходе нелинейного элемента с однополупериодной характеристикой (8.90) в общем случае описывается выражением [38]:

$$y_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} C(\mu,\, m)\, U^{\mu}(t) \cos\left[m\omega_{\text{ц}} t + m\varphi(t)\right], \tag{8.93}$$

где

$$C(\mu,\, m) = \frac{\varepsilon_m\, a\, \Gamma(\mu+1)}{2\pi j} \int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} \frac{I_m(x)}{x^{\mu+1}}\, dx; \tag{8.94}$$

$\Gamma(\mu+1)$ — гамма-функция (Эйлеров интеграл второго рода); $I_m(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода m-го порядка;

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0; \\ 2, & m \geq 1. \end{cases} \tag{8.95}$$

Из соотношения (8.93) видно, что процесс $y_1(t)$ представляет собой сумму колебаний, спектры которых сосредоточены в узких полосах частот, группи-

рующихся вокруг гармоник центральной частоты $\omega_{ц}$ спектра входного полосового сигнала, а также в области нулевой частоты (рис.8.21). Огибающие этих колебаний пропорциональны μ-й степени амплитуды входного сигнала, а фазы равны соответственно $m\varphi(t)$.

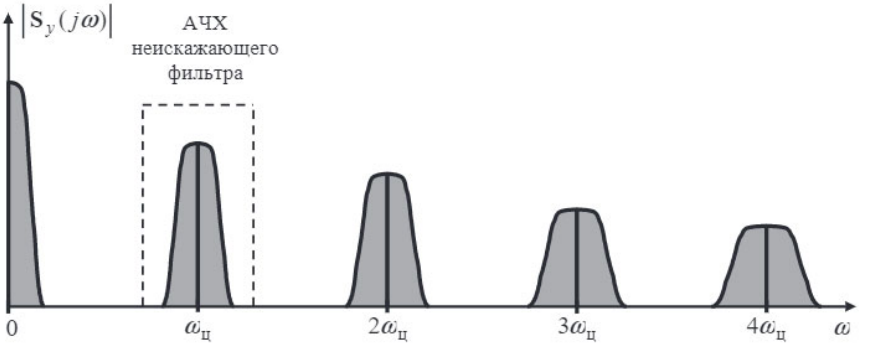


Рис.8.21. Спектр процесса $y_1(t)$ на выходе нелинейного элемента с однополупериодной характеристикой (8.90) при подаче на его вход полосового колебания (8.1)

Аналогично при подаче полосового колебания (8.1) на нелинейный элемент с чётной (8.91) или нечётной (8.92) двухполупериодной характеристикой выходной процесс $y_2(t)$ описывается следующими выражениями [38]:

$$y_{2\,\text{чёт}}(t) = \sum_{\substack{m=0 \\ (m\ \text{чётные})}}^{\infty} 2C(\mu,\, m)U^{\mu}(t)\cos\left[m\omega_{ц}t + m\varphi(t)\right]; \qquad (8.96)$$

$$y_{2\,\text{нечёт}}(t) = \sum_{\substack{m=1 \\ (m\ \text{нечётные})}}^{\infty} 2C(\mu,\, m)U^{\mu}(t)\cos\left[m\omega_{ц}t + m\varphi(t)\right]. \qquad (8.97)$$

В книге [38] проведено интегрирование, в результате которого из выражения (8.94) получена компактная формула для коэффициентов $C(\mu, m)$, входящих в соотношения (8.93), (8.96) и (8.97):

$$C(\mu, m) = \frac{\varepsilon_m\, a\, \Gamma(\mu+1)}{2^{\mu+1}\Gamma\left(1-\dfrac{m-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\dfrac{m+\mu}{2}\right)}. \qquad (8.98)$$

Для некоторых значений параметров μ и m коэффициенты $C(\mu, m)$ приведены в табл.8.1 [4].

При цифровом моделировании нелинейных преобразователей по схеме рис.8.19 часто применяют неискажающий линейный фильтр, который не де-

формирует структуру спектра выделяемой области частот (на рис.8.21 АЧХ такого фильтра показана пунктирной линией). При этом задача сводится к нахождению требуемой составляющей (при заданном значении m), входящей либо в ряд (8.93), либо в ряд (8.96), либо в ряд (8.97).

Таблица 8.1

m	$C(\mu, m)$				
	$\mu = 0$	$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 3$	$\mu = 4$
0	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\pi}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{2a}{3\pi}$	$\frac{3a}{16}$
1	$\frac{2a}{\pi}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{3a}{8}$	$\frac{16a}{15\pi}$
2	0	$\frac{2a}{3\pi}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{4a}{5\pi}$	$\frac{a}{4}$
3	$-\frac{2a}{3\pi}$	0	$\frac{4a}{15\pi}$	$\frac{a}{8}$	$\frac{16a}{35\pi}$
4	0	$-\frac{2a}{15\pi}$	0	$\frac{4a}{35\pi}$	$\frac{a}{16}$

Рассмотрим цифровые модели основных нелинейных преобразований полосовых сигналов, осуществляемых в радиоприёмных и радиопередающих устройствах [1, 4].

◆ **Амплитудное детектирование**

Модель амплитудного детектора (АД) можно представить в виде нелинейного элемента с однополупериодной (8.90) или чётной двухполупериодной (8.91) характеристикой μ-й степени и выходного ФНЧ (рис.8.19,*а*). На практике чаще всего используют линейное и квадратичное детектирование. Будем полагать, что выходной фильтр неискажающий, тогда согласно выражениям (8.93) и (8.96) сигнал на выходе АД (при $m = 0$) запишем в виде

$$v(t) = k_{\text{АД}_{\text{лин}}} U(t) \tag{8.99}$$

при линейном детектировании и

$$v(t) = k_{\text{АД}_{\text{квад}}} U^2(t) \tag{8.100}$$

при квадратичном детектировании.

Коэффициенты передачи амплитудных детекторов $k_{\text{АД}}$ определяются выражениями (см. табл.8.1)

$$k_{\text{АД}_{\text{лин}}} = \begin{cases} C(1,0) = \dfrac{a}{\pi} & \text{при однополупериодном детектировании;} \\ 2C(1,0) = \dfrac{2a}{\pi} & \text{при двухполупериодном детектировании;} \end{cases} \tag{8.101}$$

$$k_{\text{АД}_{\text{квад}}} = \begin{cases} C(2,0) = \dfrac{a}{4} & \text{при однополупериодном детектировании;} \\ 2C(2,0) = \dfrac{a}{2} & \text{при двухполупериодном детектировании.} \end{cases} \tag{8.102}$$

Проводя временную дискретизацию сигналов в формулах (8.99) и (8.100), с учётом выражения (8.10) получим цифровые модели линейного и квадратичного амплитудных детекторов соответственно:

$$v[n] = k_{\text{АД}_{\text{лин}}} \sqrt{U_{\text{c}}^2[n] + U_{\text{s}}^2[n]}\,; \tag{8.103}$$

$$v[n] = k_{\text{АД}_{\text{квад}}} \left\{ U_{\text{c}}^2[n] + U_{\text{s}}^2[n] \right\}. \tag{8.104}$$

Структурные схемы цифровых моделей амплитудных детекторов (8.103) и (8.104) изображены на рис.8.22. Выходной сигнал АД $v[n]$ является низкочастотным процессом, поэтому он не может быть описан комплексной огибающей. Полученные модели реализуют операции идеального детектирования.

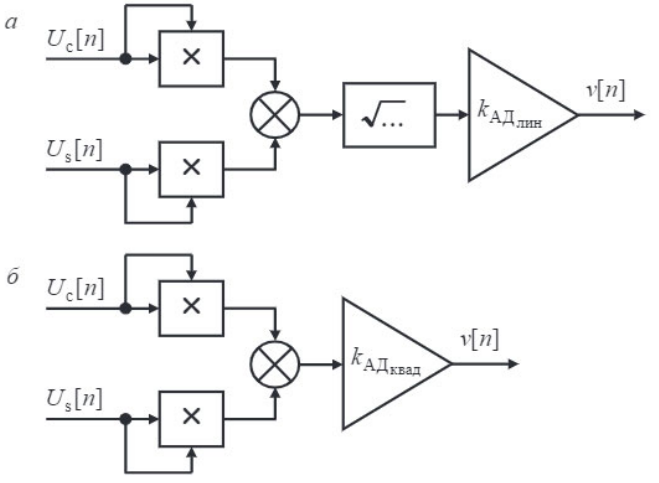


Рис.8.22. Структурные схемы цифровых моделей линейного (*а*) и квадратичного (*б*) амплитудных детекторов

◆ Амплитудное ограничение

Модель идеального амплитудного ограничителя (АО) можно представить в виде последовательного соединения нелинейного элемента с однополупериодной (8.90) или нечётной двухполупериодной (8.92) характеристикой нулевой степени ($\mu = 0$) и полосового фильтра (рис.8.19,*а*), центральная частота которого совпадает с несущей частотой входного сигнала (8.1).

Согласно (8.93) и (8.97) при $m=1$ сигнал на выходе АО запишем в виде

$$v(t)=V_{\text{огр}}\cos\left[\omega_{\text{ц}}t+\varphi(t)\right]=V_{\text{огр}}\cos\left[2\pi f_{\text{ц}}t+\varphi(t)\right], \tag{8.105}$$

где амплитуда ограниченного сигнала (см. табл.8.1)

$$V_{\text{огр}}=\begin{cases} C(0,\,1)=\dfrac{2a}{\pi} & \text{при однополупериодной характеристике АО;} \\ 2C(0,\,1)=\dfrac{4a}{\pi} & \text{при двухполупериодной характеристике АО} \end{cases} \tag{8.106}$$

не зависит от амплитуды входного сигнала $U(t)$.

Сигнал (8.105) на выходе АО является полосовым, поэтому он может быть описан комплексной огибающей

$$\dot{\mathbf{V}}(t)=V_{\text{огр}}e^{j\varphi_v(t)}=V_{\text{c}}(t)+jV_{\text{s}}(t), \tag{8.107}$$

квадратурные компоненты которой согласно (8.105)

$$V_{\text{c}}(t)=V_{\text{огр}}\cos\left[\varphi(t)\right];\quad V_{\text{s}}(t)=V_{\text{огр}}\sin\left[\varphi(t)\right]. \tag{8.108}$$

Осуществляя временную дискретизацию сигналов в (8.108) и выражая косинус и синус фазы $\varphi[n]$ через квадратурные компоненты $U_{\text{c}}[n]$ и $U_{\text{s}}[n]$ комплексной огибающей входного полосового колебания, получим цифровую модель АО:

$$\begin{cases} V_{\text{c}}[n]=V_{\text{огр}}\dfrac{U_{\text{c}}[n]}{\sqrt{U_{\text{c}}^2[n]+U_{\text{s}}^2[n]}}; \\ V_{\text{s}}[n]=V_{\text{огр}}\dfrac{U_{\text{s}}[n]}{\sqrt{U_{\text{c}}^2[n]+U_{\text{s}}^2[n]}}. \end{cases} \tag{8.109}$$

Структурная схема цифровой модели идеального амплитудного ограничителя (8.109) приведена на рис.8.23.

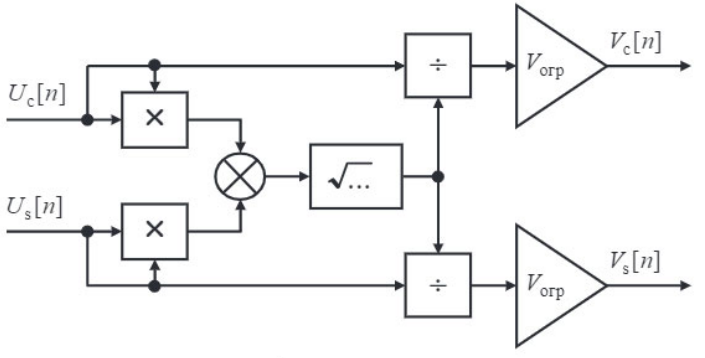


Рис.8.23. Структурная схема цифровой модели амплитудного ограничителя

Из выражений (8.105), (8.107) и (8.108) следует, что закон изменения начальной фазы $\varphi(t)$ полосового колебания (8.1) при амплитудном ограничении сохраняется.

◆ Нелинейное резонансное усиление

Нелинейный резонансный усилитель (НРУ) строится по схеме рис.8.19,*а* с однополупериодной (8.90) или нечётной двухполупериодной (8.92) характеристикой нелинейного элемента μ-й степени • и выходного полосового фильтра, центральная частота которого совпадает с несущей частотой входного сигнала (8.1). Согласно выражениям (8.93) и (8.97) при $m=1$ сигнал на выходе НРУ запишем в виде

$$v(t)=k_{\text{НРУ}}\,U^{\mu}(t)\cos\left[\omega_{\text{ц}}t+\varphi(t)\right]=k_{\text{НРУ}}\,U^{\mu}(t)\cos\left[2\pi f_{\text{ц}}t+\varphi(t)\right], \qquad (8.110)$$

где

$$k_{\text{НРУ}}=\begin{cases} C(\mu,\,1) & \text{при однотактной схеме НРУ;} \\ 2C(\mu,\,1) & \text{при двухтактной схеме НРУ.} \end{cases} \qquad (8.111)$$

Сигнал (8.110) является полосовым, поэтому он может быть описан комплексной огибающей

$$\dot{\mathbf{V}}(t)=V(t)\,e^{j\varphi_{\text{V}}(t)}=k_{\text{НРУ}}\,U^{\mu}(t)\,e^{j\varphi(t)}=V_{\text{c}}(t)+jV_{\text{s}}(t), \qquad (8.112)$$

квадратурные компоненты которой

$$V_{\text{c}}(t)=k_{\text{НРУ}}\,U^{\mu}(t)\cos\left[\varphi(t)\right];\quad V_{\text{s}}(t)=k_{\text{НРУ}}\,U^{\mu}(t)\sin\left[\varphi(t)\right]. \qquad (8.113)$$

Из выражений (8.110), (8.112) и (8.113) следует, что на выходе НРУ закон изменения начальной фазы $\varphi(t)$ полосового колебания (8.1) сохраняется.

Проводя временную дискретизацию сигналов в соотношениях (8.113) и выражая вещественную огибающую $U[n]$, а также косинус и синус фазы $\varphi[n]$ через квадратурные компоненты $U_{\text{c}}[n]$ и $U_{\text{s}}[n]$ комплексной огибающей входного полосового колебания, получим цифровую модель НРУ:

$$\begin{cases} V_{\text{c}}[n]=\dfrac{k_{\text{НРУ}}\left(\sqrt{U_{\text{c}}^2[n]+U_{\text{s}}^2[n]}\right)^{\mu}U_{\text{c}}[n]}{\sqrt{U_{\text{c}}^2[n]+U_{\text{s}}^2[n]}}=k_{\text{НРУ}}\left(\sqrt{U_{\text{c}}^2[n]+U_{\text{s}}^2[n]}\right)^{\mu-1}U_{\text{c}}[n]; \\ V_{\text{s}}[n]=\dfrac{k_{\text{НРУ}}\left(\sqrt{U_{\text{c}}^2[n]+U_{\text{s}}^2[n]}\right)^{\mu}U_{\text{s}}[n]}{\sqrt{U_{\text{c}}^2[n]+U_{\text{s}}^2[n]}}=k_{\text{НРУ}}\left(\sqrt{U_{\text{c}}^2[n]+U_{\text{s}}^2[n]}\right)^{\mu-1}U_{\text{s}}[n]. \end{cases} \qquad (8.114)$$

• Принято называть НРУ с однополупериодной характеристикой нелинейного элемента однотактными, а с нечётной двухполупериодной — двухтактными.

Структурная схема цифровой модели нелинейного резонансного усилителя (8.114) изображена на рис.8.24.

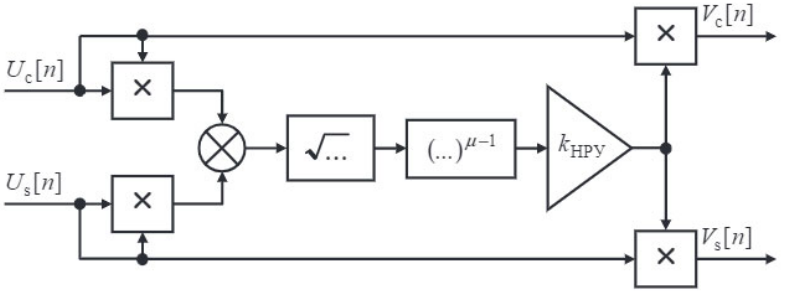


Рис.8.24. Структурная схема цифровой модели нелинейного резонансного усилителя

При кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного элемента ($\mu=1$) формулы (8.114) принимают вид

$$\begin{cases} V_c[n]=k_{НРУ}\,U_c[n]; \\ V_s[n]=k_{НРУ}\,U_s[n], \end{cases} \qquad (8.115)$$

а структурная схема цифровой модели НРУ будет иметь два не связанных между собой квадратурных канала. Кроме того, из выражения (8.110), что при $\mu=1$ отсутствуют искажения вещественной огибающей полосового колебания на выходе нелинейного резонансного усилителя. При других значениях μ (целых или дробных) прохождение полосового сигнала через НРУ сопровождается искажениями его вещественной огибающей.

Нетрудно видеть, что при $\mu=0$ формулы (8.114) переходят в (8.109), а рис.8.24 — в рис.8.23, т.е. идеальный АО можно рассматривать как частный случай НРУ.

◆ Умножение частоты

Умножение частоты (УмЧ) осуществляется устройством, изображённым на рис.8.19,*а*, путём выделения полосовым фильтром соответствующей спектральной полосы [см. (8.93), (8.96), (8.97) и рис.8.21] после нелинейного преобразования полосового колебания (8.1). При этом выходной сигнал для заданного коэффициента умножения частоты m можно записать в виде

$$v(t)=k_{УмЧ}\,U^{\mu}(t)\cos\left[m\omega_ц t+m\varphi(t)\right]=k_{УмЧ}\,U^{\mu}(t)\cos\left[2\pi\, m f_ц t+m\varphi(t)\right], \qquad (8.116)$$

где

$$k_{УмЧ}=\begin{cases} C(\mu,\,m) & \text{для однотактного умножителя частоты;} \\ 2C(\mu,\,m) & \text{для двухтактного умножителя частоты.} \end{cases} \qquad (8.117)$$

При двухтактной схеме умножителя частоты для чётных коэффициентов умножения m нелинейный элемент должен иметь чётную двухполупериодную характеристику μ-й степени (8.91), а для нечётных m — нечётную двухполупериодную характеристику (8.92).

Умножители частоты часто используют в радиопередающих устройствах для увеличения девиации частоты ЧМ-сигнала.

Сигнал (8.116) на выходе УмЧ является полосовым, поэтому он может быть описан комплексной огибающей при опорной частоте, равной $m\omega_{\text{ц}}$:

$$\dot{\mathbf{V}}(t) = V(t)\, e^{j\varphi_V(t)} = k_{\text{УмЧ}}\, U^{\mu}(t)\, e^{jm\varphi(t)} = V_{\text{c}}(t) + jV_{\text{s}}(t), \qquad (8.118)$$

где квадратурные компоненты комплексной огибающей

$$V_{\text{c}}(t) = k_{\text{УмЧ}}\, U^{\mu}(t)\cos\bigl[m\varphi(t)\bigr]; \quad V_{\text{s}}(t) = k_{\text{УмЧ}}\, U^{\mu}(t)\sin\bigl[m\varphi(t)\bigr]. \qquad (8.119)$$

Осуществляя временную дискретизацию сигналов в формулах (8.119) и выражая вещественную огибающую $U[n]$ и фазу $\varphi[n]$ через квадратурные компоненты $U_{\text{c}}[n]$ и $U_{\text{s}}[n]$ комплексной огибающей входного полосового колебания [см. (8.10) и (8.11)], получим цифровую модель УмЧ:

$$\begin{cases} \varphi[n] = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{U_{\text{s}}[n]}{U_{\text{c}}[n]}, & U_{\text{c}}[n] \ge 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{U_{\text{s}}[n]}{U_{\text{c}}[n]} + \pi, & U_{\text{c}}[n] < 0,\ U_{\text{s}}[n] \ge 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{U_{\text{s}}[n]}{U_{\text{c}}[n]} - \pi, & U_{\text{c}}[n] < 0,\ U_{\text{s}}[n] < 0; \end{cases} \\ U[n] = \sqrt{U_{\text{c}}^2[n] + U_{\text{s}}^2[n]}; \\ V_{\text{c}}[n] = k_{\text{УмЧ}}\, U^{\mu}[n]\cos\{m\varphi[n]\}; \\ V_{\text{s}}[n] = k_{\text{УмЧ}}\, U^{\mu}[n]\sin\{m\varphi[n]\}. \end{cases} \qquad (8.120)$$

В отличие от рассмотренных выше цифровых моделей АД, АО, НРУ и УмЧ, здесь для вычисления фазы $\varphi[n]$ кроме алгебраических и тригонометрических операций используются логические операции. Необходимо также предусмотреть меры, исключающие деление на нуль.

Структурная схема цифровой модели умножителя частоты (8.120) представлена на рис.8.25.

Коэффициент передачи умножителя частоты $k_{\text{УмЧ}}$ (8.117) зависит от коэффициента $C(\mu, m)$, т.е. при заданном m от показателя степени кусочно-степенной аппроксимации (8.90) характеристики нелинейного элемента. Экстремальные значения $C(\mu, m)$, рассчитанные по формуле (8.98) для $m = \overline{2,\ 5}$, приведены в табл.8.2.

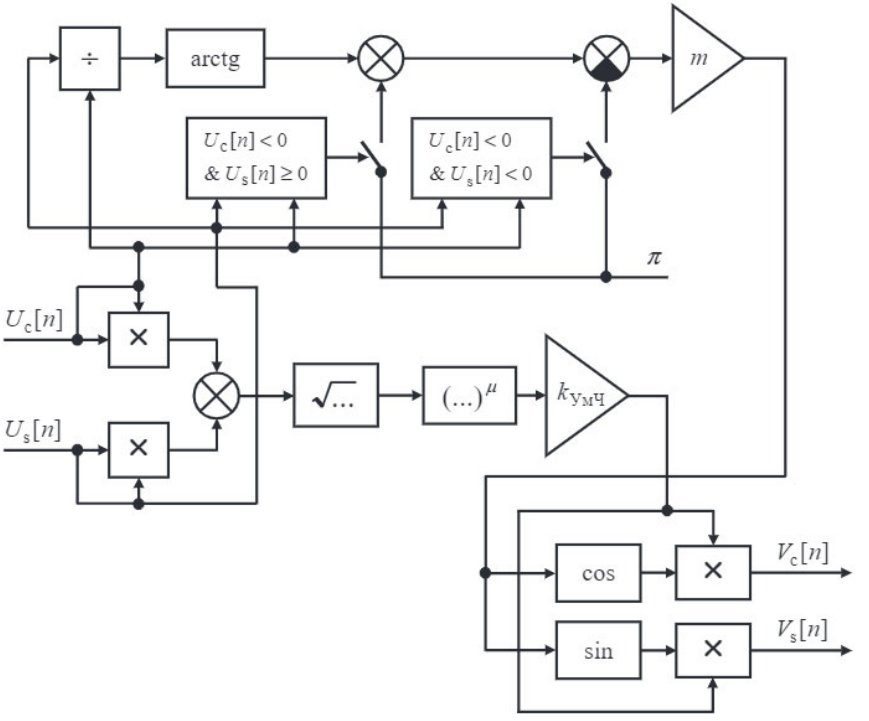


Рис.8.25. Структурная схема цифровой модели умножителя частоты

Таблица 8.2

m	$\mu_{опт}$	$C(\mu, m)_{max}$
2	3	0,255 a
3	8	0,165 a
4	13	0,122 a
5	20	0,097 a

◆ Фазовое детектирование

Комплексная огибающая (8.5) содержит информацию о начальной фазе полосового сигнала (8.1). Переменная составляющая • начальной фазы $\varphi(t)$ может быть получена с помощью операции идеального фазового детектирования

• Для оценки постоянной составляющей начальной фазы требуется опорный сигнал.

(ФД), которая описывается формулой (8.11). Иногда требуется выделить не саму фазу, а косинус или синус фазы сигнала. В этом случае операции идеального ФД можно представить выражениями

$$\cos\left[\varphi(t)\right]=\cos\left\{\operatorname{arctg}\left[\frac{U_{\mathrm{s}}(t)}{U_{\mathrm{c}}(t)}\right]\right\}=\frac{U_{\mathrm{c}}(t)}{\sqrt{U_{\mathrm{c}}^2(t)+U_{\mathrm{s}}^2(t)}};\qquad(8.121)$$

$$\sin\left[\varphi(t)\right]=\sin\left\{\operatorname{arctg}\left[\frac{U_{\mathrm{s}}(t)}{U_{\mathrm{c}}(t)}\right]\right\}=\frac{U_{\mathrm{s}}(t)}{\sqrt{U_{\mathrm{c}}^2(t)+U_{\mathrm{s}}^2(t)}}.\qquad(8.122)$$

Выполняя временную дискретизацию сигналов в формулах (8.11), (8.121) и (8.122), получим цифровые модели различных вариантов идеального ФД:

$$\varphi[n]=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{U_{\mathrm{s}}[n]}{U_{\mathrm{c}}[n]}, & U_{\mathrm{c}}[n]\ge 0;\\ \operatorname{arctg}\dfrac{U_{\mathrm{s}}[n]}{U_{\mathrm{c}}[n]}+\pi, & U_{\mathrm{c}}[n]<0,\ U_{\mathrm{s}}[n]\ge 0;\\ \operatorname{arctg}\dfrac{U_{\mathrm{s}}[n]}{U_{\mathrm{c}}[n]}-\pi, & U_{\mathrm{c}}[n]<0,\ U_{\mathrm{s}}[n]<0;\end{cases}\qquad(8.123)$$

$$\cos\left\{\varphi[n]\right\}=\frac{U_{\mathrm{c}}[n]}{\sqrt{U_{\mathrm{c}}^2[n]+U_{\mathrm{s}}^2[n]}};\qquad(8.124)$$

$$\sin\left\{\varphi[n]\right\}=\frac{U_{\mathrm{s}}[n]}{\sqrt{U_{\mathrm{c}}^2[n]+U_{\mathrm{s}}^2[n]}}.\qquad(8.125)$$

Структурные схемы цифровых моделей идеальных фазовых детекторов (8.123), (8.124) и (8.125) изображены на рис.8.26. В модели (8.123) кроме алгебраических и тригонометрических операций используются логические операции. Необходимо также предусмотреть меры, исключающие деление на нуль.

В большинстве радиосистем фазовое детектирование осуществляется путём умножения полосового сигнала (8.1) на опорное колебание

$$u_{\mathrm{оп}}(t)=U_{\mathrm{оп}}(t)\cos\left[\omega_{\mathrm{ц}}t+\varphi_{\mathrm{оп}}(t)\right],\qquad(8.126)$$

также являющееся полосовым, центральная частота которого равна центральной частоте $\omega_{\mathrm{ц}}$ информационного сигнала (8.1), и последующей низкочастотной фильтрации (ФД типа «перемножитель – фильтр» — рис.8.7,*б*):

$$v(t)=k_{\mathrm{ФД}}\left[u(t)\,u_{\mathrm{оп}}(t)\right]_{\mathrm{нч}},\qquad(8.127)$$

где $k_{\mathrm{ФД}}$ — коэффициент передачи ФД; $[\ldots]_{\mathrm{нч}}$ — символ низкочастотной фильтрации.

Представим колебания (8.1) и (8.126) комплексными огибающими в квадратурной форме $\dot{\mathbf{U}}(t)=U_{\mathrm{c}}(t)+jU_{\mathrm{s}}(t)$ и $\dot{\mathbf{U}}_{\mathrm{оп}}(t)=U_{\mathrm{оп\,c}}(t)+jU_{\mathrm{оп\,s}}(t)$. Полагая,

что ФНЧ является неискажающим, после подстановки $\dot{\mathbf{U}}(t)$ и $\dot{\mathbf{U}}_{\text{оп}}(t)$ в формулу (8.127) получим •

$$v(t) = k_{\Phi Д}\left[\operatorname{Re}\left\{\dot{\mathbf{U}}(t)\right\}\operatorname{Re}\left\{\dot{\mathbf{U}}_{\text{оп}}(t)\right\}\right]_{\text{нч}} = 0{,}5\,k_{\Phi Д}\operatorname{Re}\left\{\dot{\mathbf{U}}(t)\,\dot{\mathbf{U}}^{*}_{\text{оп}}(t)\right\} =$$

$$= 0{,}5\,k_{\Phi Д}\left[U_{\text{с}}(t)\,U_{\text{оп с}}(t) + U_{\text{s}}(t)\,U_{\text{оп s}}(t)\right], \qquad (8.128)$$

где * — символ комплексного сопряжения.

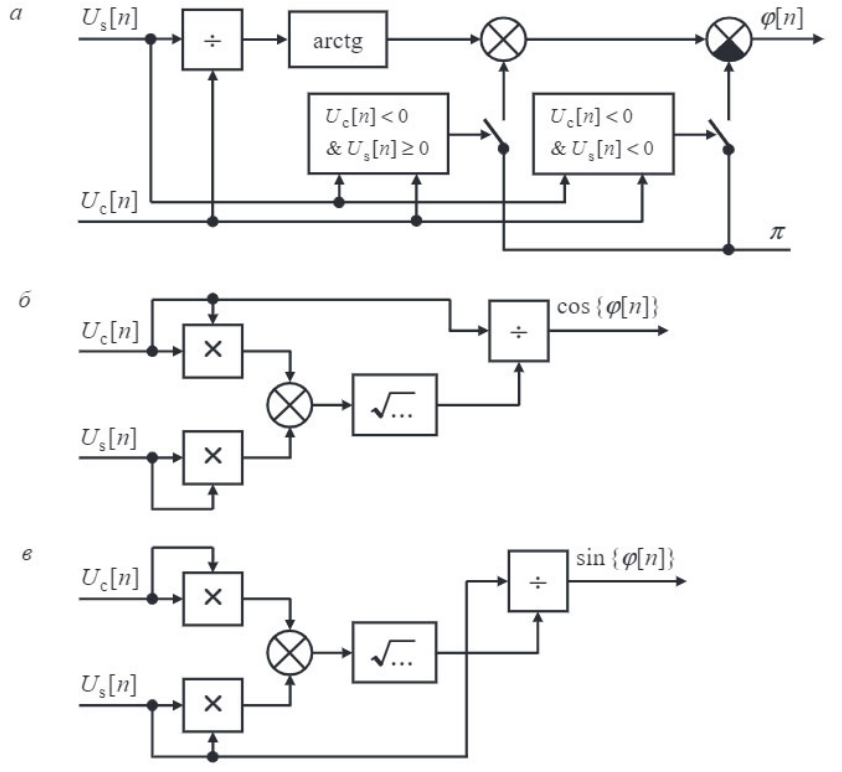


Рис.8.26. Структурные схемы цифровых моделей идеальных фазовых детекторов: *а* — ФД типа (8.123); *б* — ФД типа (8.124); *в* — ФД типа (8.125)

• Здесь использована формула $\operatorname{Re}\{A\}\operatorname{Re}\{B\} = 0{,}5\operatorname{Re}\{AB^{*}\} + 0{,}5\operatorname{Re}\{AB\}$, которую легко доказать. Пусть $A = \alpha_{\text{c}} + j\alpha_{\text{s}}$, $B = \beta_{\text{c}} + j\beta_{\text{s}}$. Тогда левая часть формулы $\operatorname{Re}\{A\}\operatorname{Re}\{B\} = \alpha_{\text{c}}\beta_{\text{c}}$, а правая часть $0{,}5\operatorname{Re}\{AB^{*}\} + 0{,}5\operatorname{Re}\{AB\} = 0{,}5\left(\alpha_{\text{c}}\beta_{\text{c}} + \alpha_{\text{s}}\beta_{\text{s}}\right) + 0{,}5\left(\alpha_{\text{c}}\beta_{\text{c}} - \alpha_{\text{s}}\beta_{\text{s}}\right) = \alpha_{\text{c}}\beta_{\text{c}}$. Формула доказана. Второе слагаемое $0{,}5\operatorname{Re}\{AB\}$, как высокочастотное, отфильтровывается.

Проводя временную дискретизацию сигналов в выражении (8.128), получим цифровую модель ФД типа «перемножитель – фильтр»

$$v[n]=\frac{k_{\Phi Д}}{2}\left\{U_{\mathrm{c}}[n]U_{\mathrm{оп\,c}}[n]+U_{\mathrm{s}}[n]U_{\mathrm{оп\,s}}[n]\right\}. \qquad (8.129)$$

Структурная схема цифровой модели фазового детектора (8.129) представлена на рис.8.27.

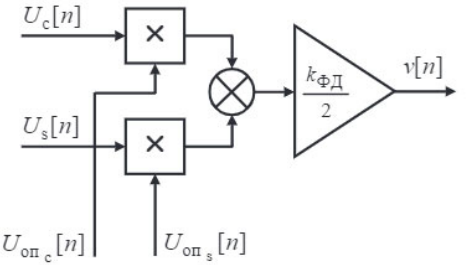


Рис.8.27. Структурная схема цифровой модели ФД типа «перемножитель – фильтр»

◆ Частотное детектирование

Начальная фаза $\varphi(t)$ полосового сигнала (8.1) является интегралом от частоты $\Omega=\omega-\omega_{\mathrm{ц}}$ (т.е. от расстройки относительно опорной частоты $\omega_{\mathrm{ц}}$):

$$\varphi(t)=\arg\left\{\dot{\mathbf{U}}(t)\right\}=\left\{\begin{array}{ll}\operatorname{arctg}\dfrac{U_{\mathrm{s}}(t)}{U_{\mathrm{c}}(t)}, & U_{\mathrm{c}}(t)\ge 0;\\ \operatorname{arctg}\dfrac{U_{\mathrm{s}}(t)}{U_{\mathrm{c}}(t)}+\pi, & U_{\mathrm{c}}(t)<0,\ U_{\mathrm{s}}(t)\ge 0;\\ \operatorname{arctg}\dfrac{U_{\mathrm{s}}(t)}{U_{\mathrm{c}}(t)}-\pi, & U_{\mathrm{c}}(t)<0,\ U_{\mathrm{s}}(t)<0\end{array}\right\}=\int_0^t\Omega(\tau)\,d\tau, \qquad (8.130)$$

поэтому операцию идеального частотного детектирования (ЧД) можно рассматривать как взятие производной фазы по времени [ср. с выражением (8.21)]

$$\Omega(t)=\frac{d}{dt}\varphi(t)=\frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{U_{\mathrm{s}}(t)}{U_{\mathrm{c}}(t)}=\frac{\dfrac{dU_{\mathrm{s}}(t)}{dt}U_{\mathrm{c}}(t)-\dfrac{dU_{\mathrm{c}}(t)}{dt}U_{\mathrm{s}}(t)}{U_{\mathrm{c}}^2(t)+U_{\mathrm{s}}^2(t)}. \qquad (8.131)$$

Осуществляя временную дискретизацию сигналов в выражении (8.131) и заменяя производные первыми конечными разностями [см. (1.42)], получим цифровую модель идеального частотного детектора:

$$\Omega[n]=\frac{1}{T}\frac{U_{\mathrm{c}}[n]\{U_{\mathrm{s}}[n]-U_{\mathrm{s}}[n-1]\}-U_{\mathrm{s}}[n]\{U_{\mathrm{c}}[n]-U_{\mathrm{c}}[n-1]\}}{U_{\mathrm{c}}^2[n]+U_{\mathrm{s}}^2[n]}=$$

$$= f_{\text{д}} \frac{U_{\text{s}}[n]U_{\text{c}}[n-1] - U_{\text{c}}[n]U_{\text{s}}[n-1]}{U_{\text{c}}^2[n] + U_{\text{s}}^2[n]}. \qquad (8.132)$$

Структурная схема цифровой модели идеального ЧД (8.132) изображена на рис.8.28.

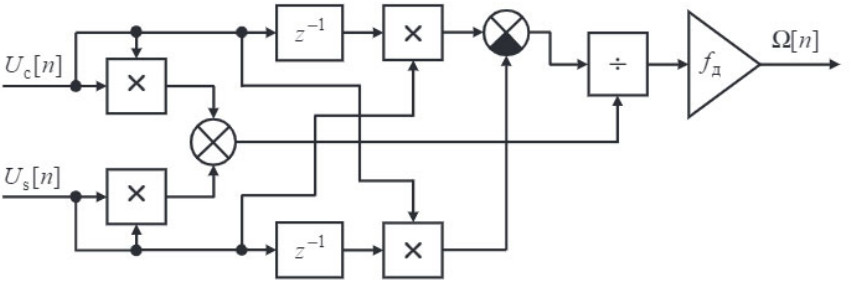


Рис.8.28. Структурная схема цифровой модели идеального частотного детектора

Точность цифровой модели идеального ЧД можно повысить, если при переходе от аналоговой модели (8.131) к цифровой использовать более точные формулы численного дифференцирования [29].

В применяемых на практике схемах частотного детектирования алгоритм (8.131) или его цифровой аналог (8.132) реализуется приближённо. В качестве примера рассмотрим ЧД на расстроенных контурах, функциональная схема которого приведена на рис.8.29,*а*. В схеме линейные фильтры с передаточными функциями $\mathrm{K}_1(p)$ и $\mathrm{K}_2(p)$ представляют собой параллельные резонансные контуры, расстроенные симметрично относительно опорной частоты $\omega_{\text{ц}}$ (переходной частоты ЧД). Амплитудные детекторы АД_1 и АД_2 работают в линейном режиме. Выходной сигнал ЧД является разностью продетектированных напряжений, действующих на выходах линейных фильтров.

Структурная схема цифровой модели частотного детектора на расстроенных контурах представлена на рис.8.29,*б*. Она имитирует работу функциональных элементов схемы рис.8.29,*а* и описывается выражениями

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{V}}_1[n] = \mathbf{K}_1(z)\,\dot{\mathbf{U}}[n]; \\ \dot{\mathbf{V}}_2[n] = \mathbf{K}_2(z)\,\dot{\mathbf{U}}[n]; \\ v_1[n] = \sqrt{V_{\text{c}_1}^2[n] + V_{\text{s}_1}^2[n]}; \\ v_2[n] = \sqrt{V_{\text{c}_2}^2[n] + V_{\text{s}_2}^2[n]}; \\ v[n] = v_1[n] - v_2[n]. \end{cases} \qquad (8.133)$$

Первые две формулы системы (8.133) моделируют прохождение комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}[n]$ входного сигнала через расстроенные контуры, третья и четвёртая — работу амплитудных детекторов, пятая — формирование выходного сигнала. Цифровые модели комплексных линейных фильтров рассматривались в гл.4 (структурные схемы и характеристики), дальнейшее их изучение будет продолжено в гл.9.

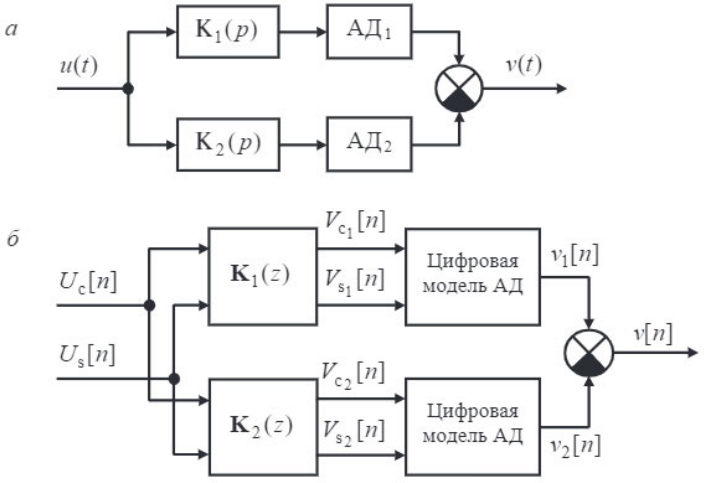


Рис.8.29. Частотный детектор на расстроенных контурах: *а* — функциональная схема аналогового ЧД; *б* — структурная схема цифровой модели

Аналогично могут быть получены цифровые модели реальных частотных детекторов других типов, например ЧД на связанных контурах, дробного детектора.

◆ Преобразование частоты (гетеродинирование)

Модель преобразователя частоты (ПЧ) можно представить в виде последовательного соединения перемножителя двух полосовых колебаний [сигнального $u(t)$ и гетеродинного $u_{\text{г}}(t)$] и полосового фильтра, настроенного на нужную комбинационную частоту, называемую промежуточной. Во многих случаях в качестве промежуточной используется разностная частота $\omega_{\text{пч}} = \omega_{\text{ц}} - \omega_{\text{г}}$ или $\omega_{\text{пч}} = \omega_{\text{г}} - \omega_{\text{ц}}$.

Пусть сигнальное и гетеродинное напряжения описываются формулами

$$\begin{cases} u(t) = \operatorname{Re}\left\{\dot{\mathbf{U}}(t)\, e^{j\omega_{\text{ц}} t}\right\}; \\ u_{\text{г}}(t) = \operatorname{Re}\left\{\dot{\mathbf{U}}_{\text{г}}(t)\, e^{j\omega_{\text{г}} t}\right\}. \end{cases} \tag{8.134}$$

Каждая из комплексных огибающих $\dot{\mathbf{U}}(t)$ и $\dot{\mathbf{U}}_{\text{г}}(t)$ определяется относительно своей опорной частоты ($\omega_{\text{ц}}$ и $\omega_{\text{г}}$ соответственно). Сигнал на выходе ПЧ является также полосовым $v(t) = \text{Re}\left\{\dot{\mathbf{V}}(t)\, e^{j\omega_{\text{пч}}t}\right\}$, следовательно, он может быть описан комплексной огибающей $\dot{\mathbf{V}}(t)$. Опорной частотой преобразованного сигнала будет промежуточная частота $\omega_{\text{пч}}$. Полагая полосовой фильтр неискажающим, запишем комплексную огибающую выходного напряжения преобразователя частоты для случая, когда $\omega_{\text{пч}} = \omega_{\text{ц}} - \omega_{\text{г}}$:

$$\dot{\mathbf{V}}(t) = k_{\text{ПЧ}}\, \dot{\mathbf{U}}(t)\, \dot{\mathbf{U}}_{\text{г}}^{*}(t) \tag{8.135}$$

или в дискретизированной форме

$$\dot{\mathbf{V}}[n] = k_{\text{ПЧ}}\, \dot{\mathbf{U}}[n]\, \dot{\mathbf{U}}_{\text{г}}^{*}[n], \tag{8.136}$$

где $k_{\text{ПЧ}}$ — коэффициент передачи преобразователя частоты; * — символ комплексного сопряжения.

Выразив комплексные огибающие в формуле (8.136) через квадратурные компоненты, получим искомую цифровую модель:

$$\begin{cases} V_{\text{c}}[n] = k_{\text{ПЧ}} \left\{ U_{\text{c}}[n] U_{\text{г}_{\text{c}}}[n] + U_{\text{s}}[n] U_{\text{г}_{\text{s}}}[n] \right\}; \\ V_{\text{s}}[n] = k_{\text{ПЧ}} \left\{ U_{\text{s}}[n] U_{\text{г}_{\text{c}}}[n] - U_{\text{c}}[n] U_{\text{г}_{\text{s}}}[n] \right\}. \end{cases} \tag{8.137}$$

Структурная схема цифровой модели преобразователя частоты (8.137) изображена на рис.8.30.

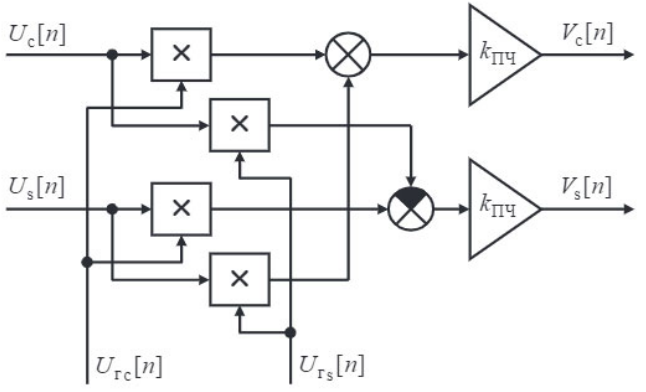


Рис.8.30. Структурная схема цифровой модели преобразователя частоты при $\omega_{\text{пч}} = \omega_{\text{ц}} - \omega_{\text{г}}$

Цифровая модель преобразователя частоты при другом выборе промежуточной частоты (например, при $\omega_{\text{пч}} = \omega_{\text{г}} - \omega_{\text{ц}}$ или $\omega_{\text{пч}} = \omega_{\text{ц}} + \omega_{\text{г}}$) будет другой, однако её несложно получить, используя изложенную здесь методику.

В заключение отметим, что полученные алгоритмы идеального детектирования (амплитудного, частотного и фазового) позволяют по реализации принятого полосового сигнала (точнее, квадратурных компонент его комплексной огибающей) выделить в дискретной форме законы модуляции амплитуды, частоты и фазы соответственно. При этом должно быть точно зафиксировано начало отсчёта времени, т.е. положение нуля на оси времени при модуляции и при детектировании должно быть одним и тем же. Реально это соответствует когерентному детектированию, при котором в качестве опорного напряжения в фазочувствительных детекторах используется высокостабильная несущая. Цифровое детектирование при произвольном выборе начала отсчёта времени эквивалентно детектированию полосового сигнала с неизвестной (случайной) начальной фазой несущей частоты, что реально соответствует детектированию, когда в фазочувствительных детекторах вместо высокостабильной несущей используется гармоническое колебание высокостабильного источника, независимого от генератора несущей. При таком детектировании амплитудные и частотные законы модуляции выделяются, очевидно, с той же точностью, как и при строго когерентном детектировании, а фазовый закон модуляции может быть выделен с точностью до постоянной составляющей φ_0 [29].

Краткие итоги

1. Метод комплексных огибающих является весьма эффективным приёмом цифровой обработки полосовых сигналов в радиотехнических системах с точки зрения снижения вычислительных затрат. Он позволяет выбирать частоту дискретизации, исходя не из верхней граничной частоты спектра полосового сигнала, а из ширины его спектра. Вся информация, закодированная в полосовом сигнале посредством модуляции, содержится в его комплексной огибающей (8.5), что позволяет исключить из рассмотрения «комплексную несущую». Комплексная огибающая может быть представлена в двух эквивалентных формах: полярной (8.5) и декартовой (8.8). При использовании метода комплексных огибающих система обработки сигналов принципиально является двухканальной (обычно обрабатываются две квадратурные компоненты — косинусная и синусная, хотя можно обрабатывать и две другие компоненты — вещественную огибающую и фазу).

2. Полезной теоретической моделью полосового сигнала (8.1) является также аналитический сигнал (8.13), вещественная часть которого равна исходному полосовому колебанию, а мнимая — его гильбертову сопряжению. Аналитический сигнал равен произведению комплексной огибающей на «комплексную несущую» [см. (8.18)]. Вещественная огибающая, полная фаза, а также мгновенная частота полосового сигнала выражаются через составляющие аналитического сигнала формулами (8.19) — (8.21) соответственно. Спектр аналитического сигнала отличен от нуля только в области положительных частот [см. (8.26)], а спектр комплексной огибающей равен сдвинутому влево (в низкочастотную область) на величину опорной (несущей) частоты спектру соответствующего аналитического сигнала. Структура спектров полосового колебания (8.1), аналитического сигнала (8.13) и комплексной огибающей (8.5) схематически показана на рис.8.1.

3. Метод комплексных огибающих даёт удобный аппарат также для описания случайных полосовых процессов. При этом характеристикой квадратур является совокупность автокорреляционных и взаимных корреляционных функций, образующих корреляционную матрицу (8.31), а также спектральная плотность мощности комплексной огибающей или сме-

щённый энергетический спектр (8.36). Корреляционная функция комплексной огибающей полосового процесса и смещённый энергетический спектр связаны между собой парой преобразований Фурье.

4. Частоту дискретизации полосового сигнала следует выбирать равной или больше его ширины спектра. При этом общие выражения для спектров дискретизированных выборок полосового сигнала $u[n]$, сигнала $\hat{u}[n]$, сопряжённого с ним по Гильберту, аналитического сигнала $\dot{z}[n]$ и комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}[n]$ полосового сигнала имеют вид (8.54), (8.56), (8.58) и (8.59) соответственно. Эти выражения конкретизированы формулами (8.61) — (8.64) для случая, когда частота дискретизации связана с несущей (центральной) частотой полосового сигнала соотношением (8.60). Построенные по этим формулам амплитудно-частотные спектры для различных значений r [см. (8.60)] изображены на рис.8.4 — 8.6. Анализ этих спектров показывает, что дискретизированную выборку комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}[n]$ можно получить путём низкочастотной фильтрации (выделения видеочастотной области спектра) дискретизированной выборки полосового сигнала $u[n]$. В этом случае дискретизированную выборку комплексной огибающей можно формировать посредством аналого-цифрового преобразования исходного полосового колебания.

5. Существуют два основных способа получения дискретизированной выборки комплексной огибающей полосового сигнала: на основе квадратурного преобразователя частоты (КвПЧ) и АЦП и на основе аналого-цифрового квадратурного преобразователя (АЦКП). Первый способ имеет недостатки, вытекающие из применения аналоговых элементов, недостатки второго способа связаны с ограниченным быстродействием АЦП [18]. Однако разработаны методы снижения требований к необходимому быстродействию АЦП в составе аналого-цифрового квадратурного преобразователя, что позволяет строить аналого-цифровые квадратурные преобразователи, используя один АЦП (см. рис.8.12). При этом тактовая частота АЦП должна выбираться по формуле (8.76). Недостаток АЦКП в этом варианте заключается в том, что отсчёты синусной и косинусной квадратурных компонент комплексной огибающей относятся к разным моментам времени, сдвинутым друг относительно друга на половину тактового интервала частоты дискретизации [см. (8.73)]. Для приведения их к одним и тем же моментам времени применяют цифровую интерполяцию. В процессе дискретизации полосового аналогового сигнала можно осуществить его гетеродинирование (перенос спектра на более низкую частоту), что позволяет построить КвПЧ на основе цифрового гетеродинирования (см. рис.8.13).

6. Современные технологии связи наряду с цифровыми системами предполагают использование аналоговых каналов связи с цифровыми методами формирования сигналов на передающей стороне и цифровыми методами их обработки на приёмной стороне. Идея построения подобной системы с квадратурной модуляцией, изображённой на рис.8.14, базируется на использовании метода комплексных огибающих. В ней формирование излучаемого в эфир полосового сигнала осуществляется из квадратурных компонент комплексной огибающей с помощью квадратурного модулятора (аналоговое устройство, см. рис.8.15), а сами квадратурные компоненты при различных видах модуляции (АМ, ФМ, ЧМ) получают в цифровых формирователях квадратурных компонент (ЦФКК), что обеспечивает системе гибкость её использования. Модели ЦФКК описываются формулами (8.83) для АМ, (8.86) для ФМ и (8.89) для ЧМ, а их структурные схемы изображены на рис.8.16 — 8.18 соответственно.

7. Алгоритмы цифровой обработки сигналов в системе связи с квадратурной модуляцией (см. рис.8.14) основаны на линейных и нелинейных преобразованиях сигналов в радиоприёмных устройствах. Обобщённую структурную схему нелинейного инерционного преобразователя (см. рис.8.19) можно представить в виде последовательного соединения безынерционного нелинейного элемента, трансформирующего спектр одного или нескольких входных колебаний, и линейного фильтра, выделяющего требуемую область спектра преобразо-

ванного сигнала. При анализе нелинейных преобразований обычно применяют кусочно-степенную аппроксимацию характеристики нелинейного элемента — однополупериодную (8.90), чётную двухполупериодную (8.91) и нечётную двухполупериодную (8.92). При подаче на нелинейные элементы с такими характеристиками полосового сигнала получаются процессы, описываемые бесконечными рядами (8.93), (8.96) и (8.97) соответственно, спектральные плотности которых сосредоточены в узких полосах частот, группирующихся вокруг гармоник центральной частоты спектра входного колебания, а также в области нулевой частоты (см. рис.8.21). Выделение соответствующей спектральной полосы с помощью неискажающего линейного фильтра [это соответствует выбору одного из слагаемых в ряде либо (8.93), либо (8.96), либо (8.97)] позволяет реализовать такие операции цифровой обработки сигналов, как амплитудное детектирование [см. (8.103) и (8.104) и рис.8.22], идеальное амплитудное ограничение [см. (8.109) и рис.8.23], нелинейное резонансное усиление [см. (8.114) и рис.8.24], умножение частоты [см. (8.120) и рис.8.25].

8. Цифровые модели операций фазового и частотного детектирования строятся либо как идеальные операции вычисления фазы (или функции от фазы, обычно косинуса или синуса) и частоты по отсчётам квадратурных компонент комплексной огибающей полосового сигнала [см. (8.123) — (8.125) и (8.132) соответственно, а также рис.8.26 и 8.28], либо на основе дискретной аппроксимации процессов в аналоговых ФД [см. (8.129) и рис.8.27] и ЧД [см. (8.133) и рис.8.29].

9. Цифровая модель преобразования частоты (гетеродинирования) зависит от того, какая комбинация частот сигнала и гетеродина используется в качестве промежуточной частоты. Если промежуточная частота равна разности сигнальной и гетеродинной частот, то цифровая модель ПЧ описывается формулами (8.137), а структурная схема модели имеет вид, изображённый на рис.8.30. Для каждой комбинации сигналов схема модели ПЧ строится индивидуально.

10. Полученные алгоритмы идеального детектирования (амплитудного, частотного и фазового) позволяют по имеющейся реализации комплексной огибающей полосового сигнала выделить в дискретной форме законы модуляции амплитуды, частоты и фазы соответственно. В случае совпадения положения нуля на оси времени при модуляции и при детектировании это соответствует когерентному детектированию, а при произвольном выборе начала отсчёта времени — некогерентному детектированию.

Глава 9

ЛИНЕЙНЫЕ АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ПОЛОСОВЫХ СИГНАЛОВ ПО МЕТОДУ КОМПЛЕКСНЫХ ОГИБАЮЩИХ

9.1. Модели линейных полосовых систем на основе свёртки

Полосовые (узкополосные) линейные системы описываются импульсными характеристиками (8.3), которые могут быть представлены в виде

$$h(t) = \mathrm{Re}\left\{ H(t)\, e^{j\varphi_h(t)} e^{j\omega_0 t} \right\} = \mathrm{Re}\left\{ \dot{\mathbf{H}}(t)\, e^{j\omega_0 t} \right\}, \tag{9.1}$$

где

$$\dot{\mathbf{H}}(t) = H(t)\, e^{j\varphi_h(t)} = H_{\mathrm{c}}(t) + jH_{\mathrm{s}}(t) \tag{9.2}$$

— комплексная огибающая импульсной характеристики полосовой линейной системы; $H_{\mathrm{c}}(t)$ и $H_{\mathrm{s}}(t)$ — её квадратурные компоненты.

Комплексная огибающая выходного сигнала полосовой линейной системы $\dot{\mathbf{V}}(t)$ выражается через комплексную огибающую входного сигнала $\dot{\mathbf{U}}(t)$ с помощью комплексной свёртки [24, 30, 41]:

$$\dot{\mathbf{V}}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \dot{\mathbf{H}}(\tau)\, \dot{\mathbf{U}}(t-\tau)\, d\tau . \tag{9.3}$$

Для всех комплексных огибающих, входящих в соотношение (9.3), должна быть выбрана одна и та же опорная частота ω_0. Формула (9.3) описывает комплексный линейный стационарный аналоговый фильтр, приводимый к двухкоординатному векторному вещественному фильтру с перекрёстными связями [29, 37].

Переход от аналоговой системы, описываемой выражением (9.3), к цифровой модели можно осуществить методами, описанными в гл.7. Например, моделирование на основе использования формул численного интегрирования (7.17), (7.18) и (7.20) приводит к алгоритмам скользящего суммирования:

$$\dot{\mathbf{V}}[n] = \sum_{k=0}^{n} \dot{\mathbf{A}}[k]\, \dot{\mathbf{U}}[n-k], \tag{9.4}$$

где

$$\dot{\mathbf{A}}[k] = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dot{\mathbf{H}}[k] & \text{для метода прямоугольников;} \\ \dfrac{T}{4} c_{\text{трап}}[k]\, \dot{\mathbf{H}}[k] & \text{для метода трапеций;} \\ \dfrac{T}{6} c_{\text{симп}}[k]\, \dot{\mathbf{H}}[k] & \text{для метода Симпсона.} \end{cases} \tag{9.5}$$

Коэффициенты $c_{\text{трап}}[k]$ и $c_{\text{симп}}[k]$, входящие в (9.5), определяются выражениями (7.19) и (7.21) соответственно.

При моделировании по методу замены аналоговых (непрерывных) систем эквивалентными дискретными системами (см. § 7.2) комплексной свёртке (9.3) соответствует дискретный алгоритм (9.4), в котором весовые коэффициенты определяются по формуле

$$\dot{\mathbf{A}}[k]=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{H}}_{\text{пнч}}[k]=\frac{1}{2}\left[k_0(t)*\dot{\mathbf{H}}(t)\right]_{t=kT}, \tag{9.6}$$

где $*$ — символ свёртки; $k_0(t)$ — импульсная характеристика интерполирующего фильтра; $\dot{\mathbf{H}}_{\text{пнч}}[n]$ — дискретизированная комплексная огибающая импульсной характеристики ПНЧ комплексного фильтра.

Величина шага дискретизации $T=1/f_{\text{д}}$ в алгоритме (9.4) определяется шириной спектра полосового сигнала (8.1), а не его верхней граничной частотой (см. § 8.2).

В случае, когда импульсная характеристика полосовой системы (8.3) имеет ограниченную протяжённость во времени (или может быть ограничена), верхний предел в формуле (9.4) следует заменить на M. При этом, представляя все входящие в неё комплексные огибающие в декартовой форме

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{U}}[n]=U_{\text{c}}[n]+jU_{\text{s}}[n];\\ \dot{\mathbf{V}}[n]=V_{\text{c}}[n]+jV_{\text{s}}[n];\\ \dot{\mathbf{A}}[n]=A_{\text{c}}[n]+jA_{\text{s}}[n],\end{cases} \tag{9.7}$$

после перемножения комплексных чисел и разделения вещественных и мнимых частей в (9.4) получим символическое матричное уравнение в конечных разностях:

$$\begin{pmatrix}V_{\text{c}}[n]\\ V_{\text{s}}[n]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{\text{c}}(z) & -A_{\text{s}}(z)\\ A_{\text{s}}(z) & A_{\text{c}}(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_{\text{c}}[n]\\ U_{\text{s}}[n]\end{pmatrix}, \tag{9.8}$$

где

$$A_{\text{c}}(z)=\sum_{n=0}^{M}A_{\text{c}}[n]\,z^{-n};\quad A_{\text{s}}(z)=\sum_{n=0}^{M}A_{\text{s}}[n]\,z^{-n}. \tag{9.9}$$

Структурная схема цифровой модели (нерекурсивного ЦФ), описываемой уравнением (9.8), изображена на рис.4.8, а эквивалентная дискретная передаточная функция имеет вид [ср. с (4.40)]

$$H(z)=A_{\text{c}}(z)+jA_{\text{s}}(z)=\sum_{k=0}^{M}\left\{A_{\text{c}}[k]+jA_{\text{s}}[k]\right\}z^{-k}. \tag{9.10}$$

Таким образом, цифровые модели полосовых систем, построенные по методу комплексных огибающих на основе алгоритмов дискретной свёртки, сво-

дятся к комплексным скалярным или к вещественным двухкоординатным векторным нерекурсивным ЦФ (см. рис.4.8). АЧХ и ФЧХ этих фильтров описываются выражениями (4.45) и (4.46) соответственно.

9.2. Метод укороченных передаточных функций

Полосовые системы можно моделировать, используя экономичные рекуррентные алгоритмы, описанные в § 7.3 — 7.6. Для этого следует воспользоваться *методом укороченных передаточных функций* (методом укороченных дифференциальных уравнений), разработанным С.И. Евтяновым [31].

Передаточная функция аналоговой полосовой линейной системы при описании её по методу комплексной огибающей имеет дробно-рациональный вид [ср. с (7.25)]:

$$\dot{\mathbf{H}}(p)=\frac{\dot{\mathrm{A}}(p)}{1+\dot{\mathrm{B}}(p)}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{M}\dot{\alpha}_k p^k}{1+\sum\limits_{k=1}^{N}\dot{\beta}_k p^k},\quad M<N, \tag{9.11}$$

где коэффициенты $\dot{\alpha}_k\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $\dot{\beta}_k\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ в общем случае являются комплексными.

Функция $\dot{\mathbf{H}}(p)$ является укороченной передаточной функцией полосовой линейной системы [29 — 31, 37, 41], входящей в символическое дифференциальное уравнение

$$\dot{\mathbf{V}}(t)=\dot{\mathbf{H}}(p)\,\dot{\mathbf{U}}(t), \tag{9.12}$$

связывающее комплексные огибающие полосового сигнала на входе $\dot{\mathbf{U}}(t)$ и на выходе $\dot{\mathbf{V}}(t)$ системы. При моделировании по методу комплексных огибающих уравнение (9.12) приближённо заменяет полное дифференциальное уравнение системы (7.6). Укороченная передаточная функция $\dot{\mathbf{H}}(p)$ и комплексная огибающая импульсной характеристики $\dot{\mathbf{H}}(t)$ полосовой системы связаны между собой парой преобразований Лапласа • [30, 41]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{H}}(p)=\dfrac{1}{2}L\left\{\dot{\mathbf{H}}(t)\right\}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\infty}\dot{\mathbf{H}}(t)\,e^{-pt}dt; \\ \dot{\mathbf{H}}(t)=2\,L^{-1}\left\{\dot{\mathbf{H}}(p)\right\}=\dfrac{1}{\pi j}\displaystyle\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\dot{\mathbf{H}}(p)\,e^{pt}dp. \end{cases} \tag{9.13}$$

• Отличие выражений (9.13) от (7.3) состоит в коэффициентах перед прямым и обратным преобразованиями Лапласа.

Процедура определения укороченной передаточной функции $\dot{\mathbf{H}}(p)$ состоит из следующих операций [4, 31]:

- комплексный коэффициент передачи (неукороченный) полосовой системы записывается в виде отношения двух полиномов

$$\mathrm{H}(j\omega)=\frac{P(j\omega,\delta)}{Q(j\omega,\delta)}, \tag{9.14}$$

где δ — малый параметр, физически представляющий собой затухание одного из колебательных контуров избирательной системы; $j\omega$ — оператор;

- вводится в рассмотрение новая переменная $\Omega=\omega-\omega_0$, имеющая смысл расстройки текущей частоты ω относительно резонансной ω_0 (для узкополосных систем $\Omega/\omega_0\sim\delta$), и выражение (9.14) представляется в виде

$$\mathrm{H}(j\omega_0+j\Omega)=\frac{P(j\omega_0+j\Omega,\delta)}{Q(j\omega_0+j\Omega,\delta)}; \tag{9.15}$$

- разложение числителя и знаменателя (9.15) в двойные ряды Тейлора [32] по степеням $j\Omega$ и δ в точке ($j\Omega=0$, $\delta=0$) даёт соотношение

$$\mathrm{H}(j\omega_0+j\Omega)=\frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,m!}\frac{\partial^{m+n}}{\partial(j\Omega)^m\partial\delta^n}P(j\omega_0+j\Omega,\delta)\big|_{j\Omega=0,\ \delta=0}(j\Omega)^m\delta^n}{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,m!}\frac{\partial^{m+n}}{\partial(j\Omega)^m\partial\delta^n}Q(j\omega_0+j\Omega,\delta)\big|_{j\Omega=0,\ \delta=0}(j\Omega)^m\delta^n}, \tag{9.16}$$

из которого усечением рядов путём отбрасывания членов высших порядков малости определяется укороченный комплексный коэффициент передачи (низкочастотный эквивалент) полосовой избирательной системы $\dot{\mathbf{H}}(j\Omega)$;

- укороченная передаточная функция $\dot{\mathbf{H}}(p)$ получается из $\dot{\mathbf{H}}(j\Omega)$ простой заменой аргумента

$$\dot{\mathbf{H}}(p)=\dot{\mathbf{H}}(j\Omega)\big|_{j\Omega=p}. \tag{9.17}$$

Укороченный комплексный коэффициент передачи резонансного усилительного каскада, настроенного на частоту $\omega_\mathrm{p}=\omega_0+\Omega_0$, где ω_0 — опорная частота, а Ω_0 — расстройка резонансной частоты каскада относительно опорной, равен

$$\dot{\mathbf{H}}(j\Omega)=\frac{SR_\mathrm{к}}{1+\dfrac{j\Omega-j\Omega_0}{\Delta\omega_\mathrm{п}/2}}. \tag{9.18}$$

Здесь S — крутизна сквозной вольт-амперной характеристики усилительного элемента (транзистора); $R_\mathrm{к}$ — резонансное сопротивление параллельного кон-

тура; $\Delta\omega_{\text{п}}$ — его полоса пропускания на уровне $1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$ (затухание 3 дБ). Такая модель каскада применяется, например, для частотных детекторов на расстроенных контурах (см. § 8.5, рис.8.29), а также для многокаскадных усилителей промежуточной частоты с распределённой избирательностью на одиночных контурах, настроенных на резонансную частоту либо расстроенных относительно резонансной частоты (расстроенные двойки, расстроенные тройки).

Для усилительного каскада с двухконтурным полосовым фильтром, настроенным на опорную частоту ω_0, укороченный комплексный коэффициент передачи имеет вид

$$\dot{\mathbf{H}}(j\Omega) = \frac{SR_{\text{к}}(j\beta)}{\beta^2 + \left(1 + \dfrac{j\Omega}{\Delta\omega_{\text{п}}/2}\right)^2}, \tag{9.19}$$

где β — фактор связи; $\Delta\omega_{\text{п}}$ — полоса пропускания одного контура полосового фильтра на уровне $0{,}707$. Такая модель каскада применяется, например, для многокаскадных ПЧ-трактах с распределённой избирательностью на двухконтурных колебательных системах, настроенных на резонансную частоту.

В табл.9.1 приведены выражения для укороченного комплексного коэффициента передачи $\dot{\mathbf{H}}(j\Omega)$, комплексной огибающей импульсной характеристики $\dot{\mathbf{H}}(t)$ и полосы пропускания $\Delta\omega_{0,707}$ некоторых типов линейных стационарных полосовых систем [30].

Таблица 9.1

Полосовая система	$\dot{\mathbf{H}}(j\Omega)$	$\dot{\mathbf{H}}(t)$	$\Delta\omega_{0,707}$
1	2	3	4
Параллельный контур	$\dfrac{K_0}{1 + \dfrac{j\Omega}{\omega_0\delta/2}}$, где $K_0 = \dfrac{S\omega_0 L}{\delta}$; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; $\delta = \omega_0 Cr << 1$	$K_0\omega_0\delta\, e^{-\frac{\omega_0\delta}{2}t}$	$\omega_0\delta$
Последовательный контур	$\dfrac{-j/\delta}{1 + \dfrac{j\Omega}{\omega_0\delta/2}}$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; $\delta = \dfrac{r}{\omega_0 L} << 1$	$\omega_0\, e^{-\frac{\omega_0\delta}{2}t - j\frac{\pi}{2}}$	$\omega_0\delta$

Продолжение табл.9.1

1	2	3	4
Двухконтурный полосовой фильтр	$\dfrac{-jK_0(1+\beta^2)}{\beta^2+\left(1+\dfrac{j\Omega}{\omega_0\delta/2}\right)^2}$, где $K_0=\dfrac{S\omega_0 M}{\delta^2(1+\beta^2)}$; M — взаимная индуктивность между катушками; $\omega_0=1/\sqrt{L_1C_1}=1/\sqrt{L_2C_2}$; $\delta=\omega_0C_1r_1=\omega_0C_2r_2<<1$; $\beta=\dfrac{M}{\delta\sqrt{L_1L_2}}$	$K_0(1+\beta^2)\dfrac{\omega_0\delta}{\beta}\times$ $\times e^{-\frac{\omega_0\delta}{2}t-j\frac{\pi}{2}}\times$ $\times\sin\left(\beta\dfrac{\omega_0\delta}{2}t\right)$	$\omega_0\delta\sqrt{2}$ при $\beta=1$
Расстроенная двойка параллельных контуров	$\dfrac{K_1K_2}{\alpha_0{}^2+\left(1+\dfrac{j\Omega}{\omega_0\delta/2}\right)^2}$, где $K_1=\dfrac{S\omega_1L_1}{\delta}$; $K_2=\dfrac{S\omega_2L_2}{\delta}$; $\omega_1=1/\sqrt{L_1C_1}$; $\omega_2=1/\sqrt{L_2C_2}$; $\delta=\omega_1C_1r_1=\omega_2C_2r_2$; $\omega_0=\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$; $\alpha_0=\dfrac{\omega_0-\omega_1}{\omega_0\delta/2}=\dfrac{\omega_2-\omega_0}{\omega_0\delta/2}$	$K_1K_2\dfrac{\omega_0\delta}{\alpha_0}e^{-\frac{\omega_0\delta}{2}t}\times$ $\times\sin\left(\alpha_0\dfrac{\omega_0\delta}{2}t\right)$	$\omega_0\delta\sqrt{2}$ при $\alpha_0=1$
Многокаскадный усилитель с одиночными настроенными контурами	$\dfrac{K_0^n}{\left(1+\dfrac{j\Omega}{\omega_0\delta/2}\right)^n}$, где $K_0=\dfrac{S\omega_0L}{\delta}$; $\omega_0=1/\sqrt{LC}$; $\delta=\omega_0Cr<<1$	$K_0^n\omega_0\delta\dfrac{(\omega_0\delta t)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}\times$ $\times e^{-\frac{\omega_0\delta}{2}t}$	$\omega_0\delta\times$ $\times\sqrt{\sqrt[n]{2}-1}$

Окончание табл.9.1

1	2	3	4
Идеальный гауссов фильтр	$\exp\left(-\frac{\pi}{2}\frac{\Omega^2}{\Delta^2}-j\Omega\tau_з\right)$, где $\omega_0 >> \Delta$	$\frac{\Delta\sqrt{2}}{\pi}\, e^{-\frac{\Delta^2}{2\pi}(t-\tau_з)^2}$	$\approx 0{,}94\Delta$
Идеальный полосовой фильтр	$\begin{cases} e^{-j\omega\tau_з}, & \lvert\omega\rvert \le \Delta/2; \\ 0, & \lvert\omega\rvert > \Delta/2 \end{cases}$	$\frac{\Delta}{\pi}\frac{\sin\left[\frac{\Delta}{2}(t-\tau_з)\right]}{\frac{\Delta}{2}(t-\tau_з)}$	Δ

Из табл.9.1 видно, что в большинстве важных для практики случаев укороченные комплексные коэффициенты передачи $\dot{\mathbf{H}}(j\Omega)$ полосовых систем, а следовательно, и их укороченные передаточные функции $\dot{\mathbf{H}}(p)$ имеют дробно-рациональный вид (9.11). Идеальный гауссов и идеальный полосовой фильтры представляют интерес для теоретических исследований как удобные математические модели. Характеристики этих моделей удовлетворительно аппроксимируют характеристики реальных полосовых систем, а математический аппарат анализа протекающих в них процессов является более простым.

9.3. Модели линейных полосовых систем на основе рекуррентных алгоритмов

Для получения рекуррентных уравнений, моделирующих процессы в полосовых стационарных линейных системах, необходимо перейти от укороченных аналоговых передаточных функций $\dot{\mathbf{H}}(p)$ к эквивалентным дискретным передаточным функциям $\dot{\mathbf{H}}(z)$. Для этой цели пригодны все методы дискретной аппроксимации, описанные в § 7.4 — 7.6. Применяя их, придём к дискретным комплексным передаточным функциям дробно-рационального вида [ср. с (4.29)]

$$\dot{\mathbf{H}}(z)=\frac{\dot{A}(z^{-1})}{1+\dot{B}(z^{-1})}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{M}\dot{a}_k z^{-k}}{1+\sum\limits_{k=1}^{N}\dot{b}_k z^{-k}} \tag{9.20}$$

и рекуррентным разностным уравнениям

$$\dot{\mathbf{V}}[n]=\dot{\mathbf{H}}(z)\,\dot{\mathbf{U}}[n]=\sum_{k=0}^{M}\dot{a}_k\dot{\mathbf{U}}[n-k]-\sum_{k=1}^{N}\dot{b}_k\dot{\mathbf{V}}[n-k], \tag{9.21}$$

описывающим скалярный комплексный линейный ЦФ (см. § 4.6).

Представляя весовые коэффициенты алгоритма (9.21) и комплексные огибающие сигналов в декартовой форме

$$\begin{cases} \dot{a}_k = a_{ck} + ja_{sk}, \quad k = \overline{0,\ M}; \\ \dot{b}_k = b_{ck} + jb_{sk}, \quad k = \overline{1,\ N}; \\ \dot{\mathbf{U}}[n] = U_c[n] + jU_s[n]; \\ \dot{\mathbf{V}}[n] = V_c[n] + jV_s[n], \end{cases} \tag{9.22}$$

после перемножения и сложения комплексных чисел в (9.21), а также группировки вещественных и мнимых частей получим рекуррентные уравнения цифровой модели линейной полосовой системы [ср. с (4.34)]:

$$\begin{cases} V_c[n] = \sum\limits_{k=0}^{M} a_{ck}U_c[n-k] - \sum\limits_{k=0}^{M} a_{sk}U_s[n-k] - \sum\limits_{k=1}^{N} b_{ck}V_c[n-k] + \sum\limits_{k=1}^{N} b_{sk}V_s[n-k]; \\ V_s[n] = \sum\limits_{k=0}^{M} a_{ck}U_s[n-k] + \sum\limits_{k=0}^{M} a_{sk}U_c[n-k] - \sum\limits_{k=1}^{N} b_{ck}V_s[n-k] - \sum\limits_{k=1}^{N} b_{sk}V_c[n-k]. \end{cases} \tag{9.23}$$

Воспользовавшись обозначениями (4.36), перепишем рекуррентные разностные уравнения (9.23) в символической форме

$$\begin{cases} V_c[n] = A_c(z^{-1})U_c[n] - A_s(z^{-1})U_s[n] - B_c(z^{-1})V_c[n] + B_s(z^{-1})V_s[n]; \\ V_s[n] = A_c(z^{-1})U_s[n] + A_s(z^{-1})U_c[n] - B_c(z^{-1})V_s[n] - B_s(z^{-1})V_c[n]. \end{cases} \tag{9.24}$$

Укрупнённая структурная схема комплексного ЦФ в прямой форме реализации, описываемого уравнениями (9.23) или (9.24), приведена на рис.4.6. Нетрудно получить структурную схему комплексного ЦФ в канонической форме реализации (см. рис.4.7).

Система уравнений (9.24) может быть представлена в виде матричного равенства [1, 4, 5]:

$$\begin{pmatrix} V_c[n] \\ V_s[n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + B_c(z^{-1}) & -B_s(z^{-1}) \\ B_s(z^{-1}) & 1 + B_c(z^{-1}) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_c(z^{-1}) & -A_s(z^{-1}) \\ A_s(z^{-1}) & A_c(z^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_c[n] \\ U_s[n] \end{pmatrix}. \tag{9.25}$$

Операция обращения матрицы означает, что вещественный двухкоординатный векторный фильтр, описываемый выражением (9.25), имеет обратные связи, в том числе и перекрёстные. Такой фильтр, эквивалентный скалярному комплексному ЦФ, является рекурсивным (см. рис.4.6 и 4.9) [условия эквивалентности получены в § 4.7; см. формулы (4.53) и (4.59)].

Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики скалярного комплексного ЦФ рассмотрены в § 4.6. Их отличие от соответствующих характеристик скалярного вещественного ЦФ состоит в том, что свойства чётности АЧХ и

нечётности ФЧХ, характерные для скалярных вещественных ЦФ, для комплексных цифровых фильтров несправедливы [см. выражения (4.43) — (4.46)], поэтому на основе комплексных ЦФ можно реализовать произвольные АЧХ, в том числе и несимметричные относительно нулевой частоты.

Практическая реализация комплексных рекурсивных ЦФ при современной элементной базе затруднений не вызывает. Применение комплексных стационарных линейных ЦФ для селекции комплексных огибающих полосовых сигналов позволит решать многие задачи радиоэлектроники, которые в настоящее время решаются аналоговыми методами, и качество их решения во многих случаях не удовлетворяет современным требованиям. Например, частотная селекция полосовых сигналов аналоговыми средствами с использованием фильтров на LC-контурах или на поверхностных акустических волнах (ПАВ) зачастую не обеспечивает подавление в полосе задерживания более 40 — 60 дБ. Цифровые методы фильтрации дают возможность получить существенно большее подавление.

Цифровое детектирование воспроизводит математическую операцию, выполняемую над полосовым сигналом при извлечении закодированной в нём информации (см. § 8.5), в то время как аналоговое детектирование является аппроксимацией этой математической операции. Данное обстоятельство обусловливает более высокую точность воспроизведения передаваемого сообщения при использовании цифрового детектирования полосового сигнала по сравнению с аналоговым детектированием. Таким образом, применение в тракте промежуточной частоты комплексных ЦФ и цифровых детекторов может существенно изменить концепцию построения радиоприёмных устройств.

Краткие итоги

1. Импульсная характеристика линейной стационарной полосовой системы (8.3) может быть описана комплексной огибающей вида (9.2), а реакция полосовой системы на полосовой сигнал с комплексной огибающей $\dot{\mathbf{U}}(t)$ выражается комплексной свёрткой (9.3).

2. Переход от аналоговой свёртки (9.3) к её дискретному эквиваленту (9.4) может осуществляться либо на основе использования формул численного интегрирования, либо по методу замены аналоговых систем эквивалентными дискретными системами. При этом цифровая модель линейной полосовой системы представляет собой скалярный комплексный нерекурсивный ЦФ, структурная схема которого имеет перекрёстные связи (см. рис.4.8).

3. При моделировании полосовых систем на основе рекуррентных алгоритмов используется метод укороченных передаточных функций, описывающих низкочастотные эквиваленты полосовых систем. Впервые такой подход предложил С.И. Евтянов в монографии [31]. Один из методов получения укороченной передаточной функции полосовой системы, описанный в § 9.2, заключается в разложении числителя и знаменателя комплексного коэффициента передачи полосовой системы (9.14) в двойные ряды Тейлора по степеням оператора $j\Omega$ и малого параметра δ согласно (9.16) с последующим усечением рядов путём отбрасывания членов высших порядков малости.

4. Укороченная передаточная функция $\dot{\mathbf{H}}(p)$ полосовой системы и комплексная огибающая её импульсной характеристики $\dot{\mathbf{H}}(t)$ связаны парой преобразований Лапласа (9.13). Для основных типов линейных полосовых систем укороченные комплексные коэффициенты передачи $\dot{\mathbf{H}}(j\Omega)$ и комплексные огибающие импульсных характеристик $\dot{\mathbf{H}}(t)$ приведены в табл.9.1. В большинстве важных для практики случаев укороченные комплексные коэффициенты передачи $\dot{\mathbf{H}}(j\Omega)$ полосовых систем, а следовательно, и их укороченные передаточные функции $\dot{\mathbf{H}}(p)$ имеют дробно-рациональный вид (9.11). Идеальный гауссов и идеальный полосовой фильтры представляют интерес для теоретических исследований как удобные в математическом отношении модели.

5. Для получения рекуррентных уравнений, моделирующих процессы в полосовых стационарных линейных системах, необходимо перейти от укороченных аналоговых передаточных функций $\dot{\mathbf{H}}(p)$ к их дискретным эквивалентам $\dot{\mathbf{H}}(z)$. Для этой цели пригодны все методы дискретной аппроксимации, изложенные в § 7.4 — 7.6. Применение этих методов приводит к дискретным комплексным передаточным функциям дробно-рационального вида (9.20) и рекуррентным уравнениям (9.21), которые описывают скалярный комплексный рекурсивный ЦФ, структурная схема которого изображена на рис.4.6.

6. Скалярный линейный комплексный ЦФ при выполнении условий (4.53) эквивалентен двухкоординатному векторному вещественному ЦФ, характерной особенностью которого являются перекрёстные связи между каналами.

7. Амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики скалярных комплексных ЦФ не обладают свойствами симметрии и антисимметрии, характерными для скалярных вещественных ЦФ, поэтому на основе комплексных ЦФ можно реализовать произвольные АЧХ, в том числе и несимметричные относительно нулевой частоты.

8. Применение в тракте промежуточной частоты комплексных ЦФ и цифровых детекторов может существенно изменить концепцию построения радиоприёмных устройств.

Глава 10

МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ КВАНТОВАНИЯ СИГНАЛОВ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ

10.1. Эффекты квантования в цифровых фильтрах

До сих пор мы рассматривали, строго говоря, дискретные фильтры, которые при достаточно большой разрядности операционных устройств вычислителя по своим свойствам близки к цифровым фильтрам. В цифровой фильтрации весьма важным является аспект, связанный с квантованием сигналов и их кодированием при ограниченном числе разрядов. Эффекты квантования приводят к специфическим погрешностям при обработке сигналов, учёт которых весьма важен. Кроме того, при проектировании ЦФ необходимо определить, какое же минимальное число разрядов в операционных устройствах фильтра является достаточным с точки зрения обеспечения заданной точности обработки сигналов (фильтрации).

Следует различать три основных источника погрешности выходного сигнала в цифровых фильтрах [6]:

- погрешности характеристик ЦФ, обусловленные квантованием коэффициентов фильтра;
- шумы аналого-цифрового преобразования входных сигналов;
- шумы квантования результатов арифметических операций в вычислителе.

Коэффициенты фильтра $a_k \left(k = \overline{0,\ M}\right)$ и $b_k \left(k = \overline{1,\ N}\right)$ представляются в вычислителе конечным числом двоичных разрядов, т.е. приближённо. Они хранятся в постоянной памяти вычислителя и согласно (2.2), (3.7), (3.22), (3.32) и (3.33) определяют все свойства ЦФ, поэтому погрешность задания коэффициентов ЦФ приводит к изменению (деформации) его частотных характеристик. Этот вид погрешностей может быть учтён при проектировании фильтра, в связи с чем его не следует включать в состав выходного шума ЦФ.

Входной сигнал цифрового фильтра $x[n]$, обычно получаемый из аналогового сигнала $x(t)$ путём аналого-цифрового преобразования, представляется с погрешностью, определяемой числом уровней квантования. Эта погрешность, называемая *шумом квантования*, проявляется на выходе ЦФ в виде так называемого *внешнего шума*.

Арифметические операции, выполняемые в цифровых фильтрах согласно алгоритму (2.2), т.е. операции перемножения и сложения чисел, осуществляются с конечной точностью, определяемой числом разрядов операционных устройств вычислителя (разрядной сеткой). Погрешность выполнения этих операций проявляется в выходном сигнале ЦФ в виде так называемого *собственного* (*внутреннего*) *шума*.

10.2. Кодирование чисел в двоичной системе счисления

В вычислительной технике применяется двоичная система счисления, в которой для записи чисел используются две цифры: 0 и 1. Например, число 101101.11011 в двоичной системе • эквивалентно десятичному числу

$$1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0+1\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-2}+0\cdot 2^{-3}+1\cdot 2^{-4}+1\cdot 2^{-5}=$$
$$=45{,}84375_{10}.$$

Здесь нижний индекс указывает на основание системы счисления, его опускают, если известно, о каком основании идёт речь. Двоичная система является самой простой из позиционных систем счисления.

Числа (данные) в цифровых вычислителях могут быть представлены либо в формате с фиксированной точкой, либо в формате с плавающей точкой.

При представлении чисел в формате с фиксированной точкой положение точки, отделяющей целую часть числа от дробной, фиксируется на определённой позиции относительно разрядов числа. В этом случае из S двоичных разрядов машинного слова один разряд (старший) используется для представления знака числа, следующие $S_{\text{ц}}$ разрядов — для представления двоичного кода целой части, а остальные $S_{\text{д}}$ разрядов — для представления двоичного кода дробной части числа (рис.10.1,*а*), т.е. $S=1+S_{\text{ц}}+S_{\text{д}}$. Каждый i-й разряд имеет определённый вес, что позволяет довольно просто реализовать арифметические операции. Цифра 0 в знаковом разряде используется для обозначения положительных чисел, а цифра 1 — отрицательных.

Иногда подразумевается, что разделительная точка находится или перед старшим разрядом числа (т.е. $S_{\text{ц}}=0$), или после младшего разряда (т.е. $S_{\text{д}}=0$). В первом случае могут быть записаны числа, которые по модулю меньше единицы, во втором — только целые числа.

Представление числа в формате с плавающей точкой в общем случае имеет вид [42]

$$x=\beta^p q, \qquad |q|<1, \tag{10.1}$$

где β^p — характеристика; q — мантисса числа x; p — порядок; β — основание характеристики (в десятичной системе счисления $\beta=10$, в двоичной системе $\beta=2$).

Число x называется *нормализованным*, если в старшем числовом разряде мантиссы q стоит цифра, отличная от нуля. Нормализованное представление числа позволяет сохранить в мантиссе наибольшее количество значащих цифр, т.е. повышает точность вычислений [8].

• При записи в двоичной системе счисления целую часть числа принято отделять от дробной точкой, а не запятой.

Мантисса q (правильная дробь со знаком) и порядок p (целое число со знаком) представляются в двоичной системе счисления и образуют машинное слово (рис.10.1,*б*). Знак числа совпадает со знаком мантиссы. Порядок p (положительное или отрицательное число) определяет положение точки, отделяющей целую часть числа x от дробной. В формате с плавающей точкой для кода порядка отводится S_p двоичных разрядов, а для кода мантиссы — S_q разрядов. Таким образом, машинное слово должно содержать $S = 2 + S_p + S_q$ двоичных разрядов (рис.10.1,*б*). Увеличение S_p приводит к расширению диапазона представляемых чисел, а увеличение S_q — к повышению точности.

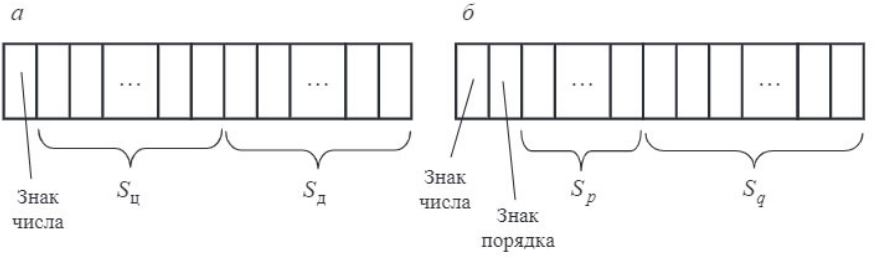


Рис.10.1. Форматы представления чисел в двоичной системе счисления: *а* — с фиксированной точкой; *б* — с плавающей точкой

В формате с фиксированной точкой диапазон представляемых чисел x определяется неравенствами

$$-\left(2^{S_ц}-1\right)\left(1-2^{-S_д}\right) \le x \le \left(2^{S_ц}-1\right)\left(1-2^{-S_д}\right), \qquad (10.2)$$

а шаг квантования равен

$$Q = 2^{-S_д}. \qquad (10.3)$$

Если результат арифметической операции выходит за пределы (10.2), то происходит *переполнение* разрядной сетки, приводящее к искажению результата.

В формате с плавающей точкой нормализованные числа x представляются в диапазоне

$$-2^{\left(2^{S_p}-1\right)}\left(1-2^{-S_q}\right) \le x \le 2^{\left(2^{S_p}-1\right)}\left(1-2^{-S_q}\right), \qquad (10.4)$$

при этом шаг квантования равен

$$Q = 2^{-\left(2^{S_p}-1\right)}\,2^{-1} = 2^{-2^{S_p}}. \qquad (10.5)$$

Вероятность переполнения разрядной сетки при выполнении арифметических операций в формате с плавающей точкой незначительна.

При сложении чисел в формате с плавающей точкой вначале осуществляется выравнивание порядков (меньший порядок приводится к большему путём сдвига мантиссы на соответствующее число двоичных разрядов вправо), сложение мантисс и нормализация результата. При умножении чисел в формате с плавающей точкой производится сложение порядков, умножение мантисс и нормализация результата [8].

Арифметические операции над числами в формате с плавающей точкой намного сложнее операций в формате с фиксированной точкой, поэтому в цифровых фильтрах с аппаратной реализацией чаще используется представление чисел в формате с фиксированной точкой.

Существуют три основных кода для записи чисел в двоичной системе счисления: *прямой*, *обратный* и *дополнительный* [8, 14, 42]. Разрядная сетка в формате с фиксированной точкой содержит $S = 1 + b$ двоичных разрядов (старший разряд знаковый, а остальные разряды числовые: $b = S_{\text{ц}} + S_{\text{д}}$).

Число x в прямом коде представляется следующим образом: в знаковом разряде записывается 0 для положительных чисел и 1 для отрицательных, а числовые разряды кода соответствуют числовым разрядам исходного числа. Таким образом•,

$$[x]_{\text{пр.к}} = \begin{cases} 0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_b, & x \geq 0; \\ 1, x_1 x_2 x_3 \ldots x_b, & x \leq 0, \end{cases} \tag{10.6}$$

где $x_i \left(i = \overline{1,\ b}\right)$ — числовые разряды, представляемые символами двоичного кода (0 и 1). В записи (10.6) положение точки, отделяющей целую часть числа от дробной, не показано.

Модуль числа x можно записать в виде

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{b} x_i 2^{-i} \right) 2^{S_{\text{ц}}}. \tag{10.7}$$

Прямой, обратный и дополнительный коды положительных чисел совпадают, т.е.

$$[x]_{\text{пр.к}} = [x]_{\text{обр.к}} = [x]_{\text{доп.к}} = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_b, \quad x \geq 0. \tag{10.8}$$

Обратный код отрицательного числа представляется следующим образом: в знаковый разряд записывается 1, а числовые разряды модуля исходного числа инвертируются, т.е. число x в обратном коде представляется в виде

$$[x]_{\text{обр.к}} = \begin{cases} 0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_b, & x \geq 0; \\ 1, \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \ldots \overline{x}_b, & x \leq 0, \end{cases} \tag{10.9}$$

где $\overline{x}_i \left(i = \overline{1,\ b}\right)$ — инверсия разряда x_i, т.е. замена символа 0 на символ 1, а символа 1 на символ 0.

• Здесь и далее запятая отделяет знаковый разряд от числовых разрядов.

Дополнительный код отрицательного числа отличается от обратного кода добавлением единицы младшего разряда, т.е. число x в дополнительном коде представляется в виде

$$[x]_{\text{доп.к}} = \begin{cases} 0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_b, & x \geq 0; \\ 1, \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \ldots \overline{x}_b + 2^{-(b-S_{\text{ц}})}, & x \leq 0, \end{cases} \qquad (10.10)$$

где символ $2^{-(b-S_{\text{ц}})}$ означает $2^0 = 1$ для целых чисел и $2^{-S_{\text{д}}}$ для чисел, содержащих дробную часть.

Прямой код используется при выполнении операций умножения. Обратный и дополнительный коды позволяют заменить операцию вычитания операцией сложения с отрицательным числом: $x - y = x + (-y)$. При этом сложение (вычитание) чисел сводится к сложению их кодов с учётом циклического переноса • для обратного кода и без его учёта для дополнительного кода [14]. Операция умножения чисел может осуществляться также в дополнительном коде. В цифровых фильтрах, реализуемых на сигнальных процессорах, арифметические операции обычно выполняют в дополнительном коде.

Как отмечалось выше, результат суммирования двух чисел может выйти за пределы разрядной сетки, в результате чего происходит её переполнение. Для фиксации переполнения при сложении используют модифицированные коды, отличающиеся от обычных (немодифицированных) кодов введением второго (дополнительного) знакового разряда с весом 2^1. Если после выполнения операции сложения значения обоих знаковых разрядов модифицированного кода совпадают, то переполнение разрядной сетки отсутствует. В противном случае имеет место переполнение. При одновременном сложении более двух чисел для обнаружения переполнения разрядной сетки необходимо использовать h дополнительных знаковых разрядов, число которых определяется выражением ••

$$h = \text{int}\{\log_2 k\}, \qquad (10.11)$$

где k — число слагаемых [8].

10.3. Квантование коэффициентов цифрового фильтра

Проектирование ЦФ осуществляется с помощью универсальных ЭВМ, в которых арифметические операции выполняются в формате с плавающей точкой, а разрядная сетка имеет большое число двоичных разрядов. Можно полагать, что коэффициенты $a_k \left(k = \overline{0,\ M}\right)$ и $b_k \left(k = \overline{1,\ N}\right)$ передаточной функции (3.7) спроектированного ЦФ представляются с практически неограниченной точностью. Полученным коэффициентам соответствуют заданные частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) дискретного фильтра.

• Циклический перенос состоит в переносе единицы из знакового разряда с весом 2^1 в младший числовой разряд с последующим сложением.

•• Символ $\text{int}\{B\}$ здесь и далее означает наименьшее целое число, не меньшее B.

Цифровой фильтр реализуют на специализированном вычислителе (сигнальном процессоре), арифметические операции в котором, как правило, выполняются в формате с фиксированной точкой • при меньшей по сравнению с универсальной ЭВМ разрядной сетке. Значения коэффициентов ЦФ квантуются, так как они должны быть представлены с помощью ограниченного количества двоичных разрядов, определяемого разрядной сеткой вычислителя. Другими словами, точные значения коэффициентов $a_k \left(k = \overline{0,\ M}\right)$ и $b_k \left(k = \overline{1,\ N}\right)$ передаточной функции (3.7) заменяются приближёнными (квантованными) значениями

$$\begin{cases} \widetilde{a}_k = a_k + \delta a_k, & k = \overline{0,\ M}; \\ \widetilde{b}_k = b_k + \delta b_k, & k = \overline{1,\ N}, \end{cases} \tag{10.12}$$

где $\delta a_k \left(k = \overline{0,\ M}\right)$ и $\delta b_k \left(k = \overline{1,\ N}\right)$ — погрешности представления коэффициентов фильтра, обусловленные квантованием. Здесь и далее символ $\widetilde{x}$ (тильда над числом x) означает, что помеченная им величина является квантованной.

Передаточная функция скалярного фильтра с квантованными коэффициентами

$$\widetilde{H}(z) = \frac{\widetilde{A}(z^{-1})}{1 + \widetilde{B}(z^{-1})} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} \widetilde{a}_k z^{-k}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{N} \widetilde{b}_k z^{-k}} \tag{10.13}$$

имеет точно такой же дробно-рациональный вид, как и при неквантованных значениях коэффициентов [см. (3.7)]. Однако при изменении коэффициентов несколько изменится положение полюсов и нулей передаточной функции, что, естественно, приведёт к деформации частотных характеристик фильтра.

Операция квантования коэффициентов, являющаяся нелинейной по своей природе, производится однократно (при определении коэффициентов ЦФ), поэтому не влияет на линейность фильтра, а лишь изменяет его характеристики. Другими словами, при квантовании коэффициентов осуществляется переход от линейного фильтра с передаточной функцией (3.7) к линейному фильтру с передаточной функцией (10.13), характеристики которого несколько отличаются от характеристик исходного фильтра [7].

Рассмотрим влияние квантования коэффициентов вещественного скалярного стационарного линейного ЦФ на его частотные характеристики. Подставляя квантованные значения коэффициентов фильтра (10.12) в выражения (3.32)

• Возможна также реализация ЦФ на сигнальном процессоре (DSP) в формате с плавающей точкой, что встречается крайне редко. В этом случае погрешностями выходного сигнала, обусловленными квантованием коэффициентов ЦФ, а также квантованием результатов арифметических операций в вычислителе, можно пренебречь.

и (3.33) и используя второй способ нормировки частоты ЦФ (см. § 3.4), получим выражения для АЧХ и ФЧХ:

$$\widetilde{A}(W)=\sqrt{\frac{\left[\widetilde{a}_0+\sum_{k=1}^{M}\widetilde{a}_k\cos(2\pi kW)\right]^2+\left[\sum_{k=1}^{M}\widetilde{a}_k\sin(2\pi kW)\right]^2}{\left[1+\sum_{k=1}^{N}\widetilde{b}_k\cos(2\pi kW)\right]^2+\left[\sum_{k=1}^{N}\widetilde{b}_k\sin(2\pi kW)\right]^2}}; \qquad (10.14)$$

$$\widetilde{\varphi}(W)=-\mathrm{Arctg}\frac{\sum_{k=1}^{M}\widetilde{a}_k\sin(2\pi kW)}{\widetilde{a}_0+\sum_{k=1}^{M}\widetilde{a}_k\cos(2\pi kW)}+\mathrm{Arctg}\frac{\sum_{k=1}^{N}\widetilde{b}_k\sin(2\pi kW)}{1+\sum_{k=1}^{N}\widetilde{b}_k\cos(2\pi kW)}. \qquad (10.15)$$

Формулы (10.14) и (10.15) используются для расчёта АЧХ и ФЧХ вещественных ЦФ с квантованными коэффициентами. Методика расчёта требуемой разрядности коэффициентов будет описана во 2-м выпуске серии ЦОС.

Рис.10.2 иллюстрирует влияние квантования коэффициентов на амплитудно-частотную характеристику фильтра нижних частот (ФНЧ). Здесь использован второй способ нормировки частоты (см. § 3.4) и приняты следующие обозначения: $W_{\text{п}}$ и $W_{\text{з}}$ — нормированные граничные частоты полос пропускания и задерживания соответственно; $a_{\text{п}}$ и $a_{\text{з}}$ — допустимые затухания в полосах пропускания и задерживания, определяемые техническим заданием на проектирование ЦФ; $a_{\text{п}}^{\text{нк}}$ и $a_{\text{з}}^{\text{нк}}$ — соответственно максимальное затухание в полосе пропускания и минимальное затухание в полосе задерживания, получающиеся при точных (неквантованных) значениях коэффициентов фильтра $a_k\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $b_k\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$.

Рис.10.2 соответствует случаю, когда при проектировании ЦФ получен некоторый запас по затуханию (как в полосе пропускания, так и в полосе задерживания), поэтому деформация АЧХ, вызванная квантованием коэффициентов, не привела к её выходу за назначенные допуски. Если уменьшить число разрядов для представления коэффициентов ЦФ $\widetilde{a}_k\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $\widetilde{b}_k\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$, т.е. увеличить погрешности $\delta a_k\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $\delta b_k\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$, то АЧХ может выйти за допуски. Чем больше допуски на искажения частотных характеристик ЦФ, тем меньше требуемая точность (разрядность) представления коэффициентов цифрового фильтра. Эти допуски следует предусматривать при проектировании фильтра на этапе решения аппроксимационной задачи.

При реализации ЦФ на сигнальных процессорах, работающих в формате с фиксированной точкой, коэффициенты $\widetilde{a}_k\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $\widetilde{b}_k\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ представляются достаточно большим количеством двоичных разрядов (например, 16, 24

или 32), поэтому квантование коэффициентов осуществляется путём округления коэффициентов дискретного фильтра $a_k\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $b_k\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$, полученных в результате решения аппроксимационной задачи. В тех случаях, когда параметры фильтра очень чувствительны к квантованию коэффициентов, целесообразно переходить к обработке в формате с плавающей точкой [7].

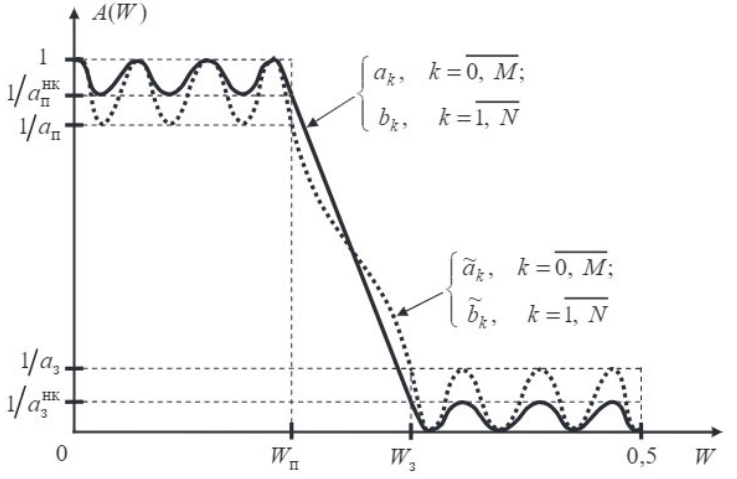


Рис.10.2. Влияние квантования коэффициентов цифрового ФНЧ на амплитудно-частотную характеристику

В дальнейшем, если это не вызывает неверного толкования результатов, мы не будем делать различия между передаточными функциями с квантованными $\widetilde{H}(z)$ и с неквантованными $H(z)$ коэффициентами, полагая, что в этих случаях может быть использован как тот, так и другой вариант. Там же, где необходимо применить передаточную функцию только с квантованными коэффициентами, мы будем писать $\widetilde{H}(z)$.

10.4. Модели аналого-цифрового преобразования сигналов

Устройства, осуществляющие преобразование аналоговых сигналов в дискретную последовательность квантованных по уровню и представленных двоичными кодами (оцифрованных) отсчётов, называются *аналого-цифровыми преобразователями* (АЦП). На рис.10.3 изображена функциональная схема АЦП, работу которого можно представить в виде двухэтапной процедуры. На первом этапе из аналогового сигнала формируется дискретизированная последовательность $x[n]=x(t)\big|_{t=nT}$, в которой отсчёты имеют неограниченную точность (не квантованы). На втором этапе каждый отсчёт $x[n]$ представляется

двоичным кодом с ограниченным числом разрядов. В результате получается квантованная последовательность $\tilde{x}[n]$. В реальных АЦП подобного разделения нет, обе операции выполняются совместно.

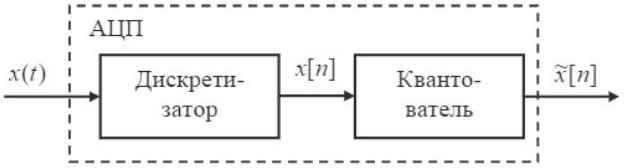


Рис.10.3. Функциональная схема аналого-цифрового преобразователя

Последовательность $e[n]$, значения которой представляют собой разность между квантованными $\tilde{x}[n]$ и неквантованными $x[n]$, т.е. точными значениями отсчётов сигнала

$$e[n] = \tilde{x}[n] - x[n], \tag{10.16}$$

называется *шумом квантования*. При достаточно общих предположениях плотность распределения шума квантования является равномерной [8].

Квантование является нелинейной операцией. Дискретность представления уровней квантованного числа $\tilde{x}[n]$ определяется *шагом квантования* Q. Поскольку число уровней квантования конечно, все отсчёты, выходящие за максимальный $x_{\max}$ или минимальный $x_{\min}$ уровни, округляются до этих значений, что приводит к *аномальным ошибкам* выходного сигнала. Обычно такого ограничения сигнала сверху и снизу стараются избежать путём соответствующего выбора шага квантования Q и размаха входного сигнала $x(t)$. На практике используются два способа квантования: *округление* и *усечение*.

Статическая нелинейная характеристика квантователя, соответствующая операции округления, изображена на рис.10.4,*а*. Ошибка квантования (10.16) за исключением случаев превышения сигналом предельных уровней сигнала $x_{\max}$ и $x_{\min}$ лежит в пределах

$$-\frac{Q}{2} \le e[n] \le \frac{Q}{2}. \tag{10.17}$$

Плотность распределения ошибки квантования по методу округления показана на рис.10.4,*б*.

Статическая нелинейная характеристика квантователя, соответствующая операции усечения при представлении чисел в дополнительном коде, изображена на рис.10.5,*а*, а при представлении чисел в прямом и обратном кодах — на рис.10.6,*а*. Ошибка квантования (10.16) за исключением случаев превышения сигналом предельных уровней сигнала $x_{\max}$ и $x_{\min}$ лежит в пределах

$$-Q \le e[n] \le 0 \tag{10.18}$$

при представлении чисел в дополнительном коде и

$$-Q \le e[n] \le Q \qquad (10.19)$$

при представлении чисел в прямом и обратном кодах. Плотность распределения ошибки квантования по методу усечения показана на рис.10.5,*б* для представления чисел в дополнительном коде и на рис.10.6,*б* для представления чисел в прямом и обратном кодах.

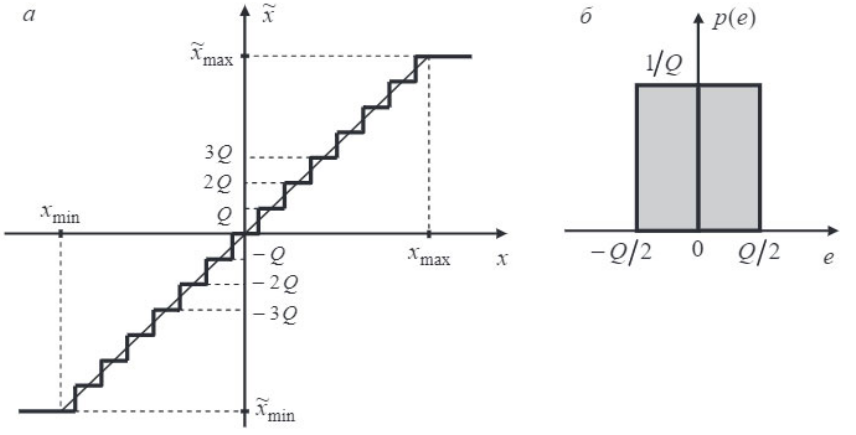


Рис.10.4. Квантование по методу округления: *а* — статическая характеристика квантователя; *б* — плотность распределения ошибки квантования

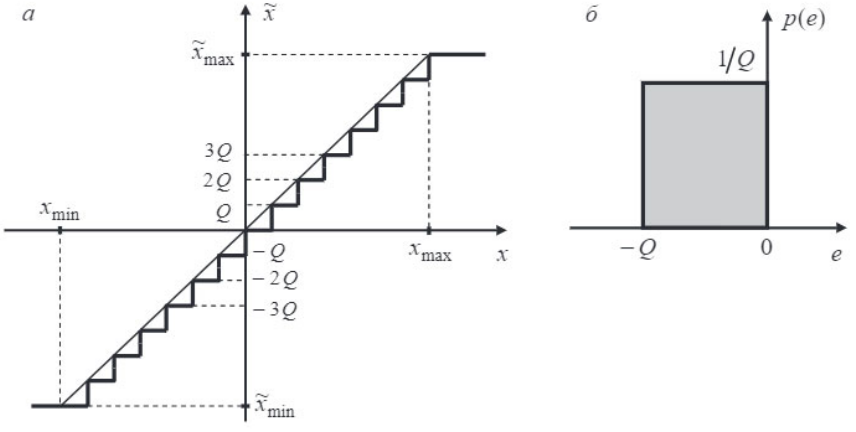


Рис.10.5. Квантование по методу усечения при представлении чисел в дополнительном коде: *а* — статическая характеристика квантователя; *б* — плотность распределения ошибки квантования

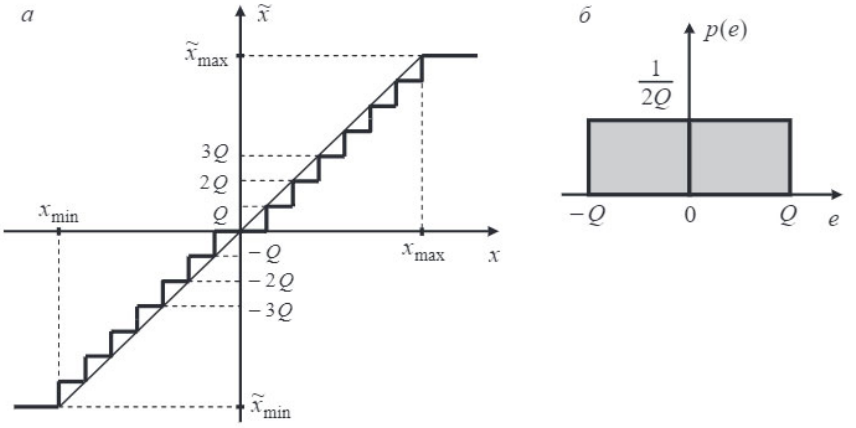


Рис.10.6. Квантование по методу усечения при представлении чисел в прямом и обратном кодах: *а* — статическая характеристика квантователя; *б* — плотность распределения ошибки квантования

При анализе ошибок квантования в выходном сигнале цифрового фильтра обычно принимают следующие допущения относительно характеристик шума квантования $e[n]$:

- последовательность $e[n]$ является стационарным случайным процессом;
- последовательность $e[n]$ не коррелирована с квантуемой последовательностью $x[n]$;
- любые два отсчёта последовательности $e[n]$ не коррелированы между собой, т.е. шум квантования является дискретным белым шумом, корреляционная функция которого $K_e[m] = D_e\delta[m]$.

Следует отметить, что эти допущения справедливы не всегда. Например, если входные отсчёты $x[n]$ являются постоянными, то шум квантования $e[n]$ нельзя считать не коррелированным с квантуемой последовательностью $x[n]$.

Математическое ожидание (среднее значение) m_e и дисперсия $D_e = \sigma_e^2$ шума квантования определяются следующими соотношениями:

$$m_e = \int_{-\infty}^{\infty} e\,p(e)\,de =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при округлении и усечении} \\ & \text{с представлением чисел в прямом и обратном кодах;} \\ -Q/2 & \text{при усечении} \\ & \text{с представлением чисел в дополнительном коде;} \end{cases} \qquad (10.20)$$

$$D_e = \int_{-\infty}^{\infty} (e - m_e)^2 \, p(e) \, de = \frac{Q^2}{\chi_2}, \tag{10.21}$$

где

$$\chi_2 = \begin{cases} 12 & \text{при округлении и усечении} \\ & \text{с представлением чисел в дополнительном коде;} \\ 3 & \text{при усечении} \\ & \text{с представлением чисел в прямом и обратном кодах.} \end{cases} \tag{10.22}$$

При анализе шумов квантования ЦФ применяют линейные и нелинейные модели шумов. В нелинейной модели (рис.10.7,*а*) используется статическая характеристика квантователя $F(x)$, изображённая на рис.10.4,*а* — 10.6,*а*. Здесь $x[n]$ — неквантованный дискретный процесс; $\tilde{x}[n]$ — соответствующий ему квантованный процесс, равный $\tilde{x}[n] = F\{x[n]\}$. Линейная модель квантования, описываемая формулой (10.16), приведена на рис.10.7,*б*. В линейной модели процесс $e[n]$ обычно задаётся статистическими характеристиками.

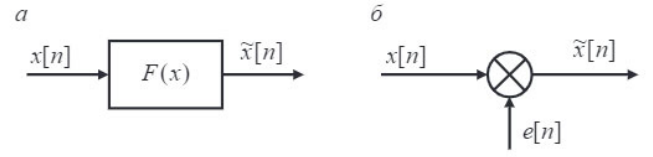


Рис.10.7. Модели квантователей: *а* — нелинейная; *б* — линейная

Нелинейная модель квантования используется, как правило, при моделировании цифровых устройств на ЭВМ, а линейная — при аналитическом исследовании процессов в ЦФ [8].

10.5. Модель квантования результатов арифметических операций

При линейной цифровой фильтрации, как следует из (2.2), выполняются операции умножения, сложения и сдвига отсчётов сигналов на шаг дискретизации $T = 1/f_д$. Если отсчёты входного процесса представлены двоичными кодами с конечной разрядностью, то при их обработке в ЦФ могут получаться числа, для точного представления которых необходимо большее число разрядов. Например, если перемножить два S-разрядных числа, то для точного представления произведения потребуется $2S$ двоичных разрядов. Если далее это произведение не представить S-разрядным числом, то требуемое число разрядов регистров, служащих для хранения последовательных произведений, в рекурсивных ЦФ может возрасти беспредельно. Ясно, что такой вариант построения ЦФ практически неприемлем.

Обычный подход к решению этой проблемы состоит в отбрасывании младших разрядов чисел, образующихся в ЦФ при умножениях сигналов на коэффициенты фильтра • (квантование результатов арифметических операций в ЦФ). При этом используются два стандартных способа квантования: *округление* и *усечение*, которые обсуждались в § 10.4.

На рис.10.8 изображена линейная модель квантования при умножении квантованных отсчётов сигнала $\widetilde{x}[n]$ на квантованный коэффициент $\widetilde{a}_k$. Умножитель здесь рассматривается как устройство, абсолютно точно выполняющее операцию

$$y[n] = \widetilde{a}_k \, \widetilde{x}[n] \; . \tag{10.23}$$

Квантование результата (ограничение числа разрядов в произведении) приводит к появлению ошибки

$$e_k[n] = \widetilde{y}[n] - y[n] = \{\widetilde{\widetilde{a}_k \, \widetilde{x}[n]}\} - \{\widetilde{a}_k \, \widetilde{x}[n]\}. \tag{10.24}$$

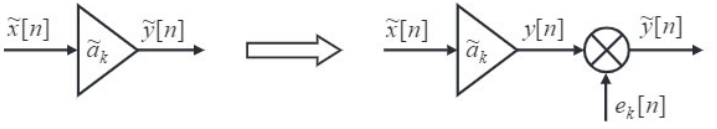


Рис.10.8. Линейная модель квантования результата умножения отсчёта сигнала на коэффициент цифрового фильтра

Ошибку квантования (10.24) можно считать случайным процессом с равномерной плотностью распределения (рис.10.4,*б* — 10.6,*б*). Для моделирования эффектов квантования при выполнении операций умножения в ЦФ необходимо сделать некоторые предположения относительно характеристик источников шумов квантования в шумовой модели цифрового фильтра. Обычно используют следующие допущения [6]:

- любые два отсчёта шума $e_k[n]$ от одного и того же источника не коррелированы, т.е. шум квантования является дискретным белым шумом;
- любые два источника шума $e_k[n]$ и $e_i[n]$, порождаемые квантованием произведений в различных умножителях ЦФ, создают взаимно не коррелированные шумы;
- шум $e_k[n]$ каждого из источников шума квантования произведения сигнала на весовой коэффициент не коррелирован с входной последовательностью.

• Следует иметь в виду, что отбрасывание дробных разрядов при квантовании результатов арифметических операций в ЦФ приводит лишь к возникновению ошибки в представлении произведения (нормальные ошибки). Если же в число отбрасываемых попадают разряды, представляющие целую часть произведения, то происходит искажение результата перемножения (аномальные ошибки). Для устранения аномальных ошибок применяют нормировку сигналов (масштабирование) в ЦФ (см. § 11.7).

10.6. Линейная шумовая модель рекурсивного цифрового фильтра при прямой форме реализации

Структурную схему одномерного скалярного вещественного линейного стационарного рекурсивного ЦФ при прямой форме реализации, изображённую на рис.4.2, уточним с учётом квантования коэффициентов фильтра, квантования входного сигнала и квантования результатов арифметических операций. Для этого воспользуемся линейными моделями квантования (рис.10.7,*б* и 10.8), квантованными значениями коэффициентов фильтра (10.12), а также сформулированными в § 10.5 допущениями относительно характеристик источников шумов квантования. Структурная схема рекурсивного ЦФ при прямой форме реализации с учётом шумов квантования изображена на рис.10.9, где $e_0[n]$ — шум квантования входного сигнала $x[n]$; $e_k[n]$ $\left(k=\overline{1,\ M+N+1}\right)$ — шумы квантования произведений отсчётов сигналов на весовые коэффициенты.

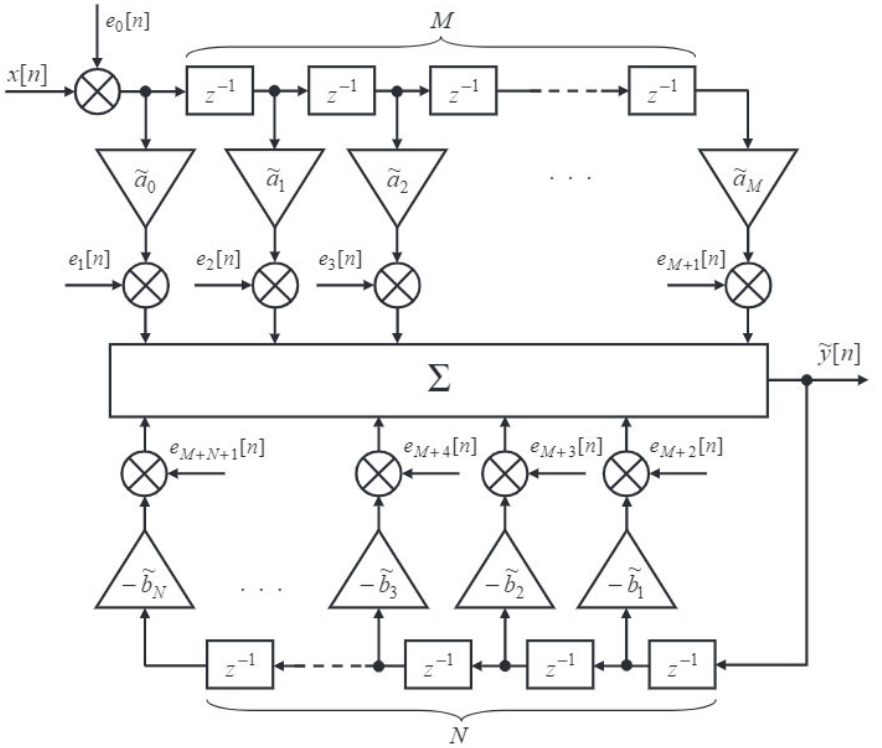


Рис.10.9. Структурная схема рекурсивного ЦФ при прямой форме реализации с учётом эффектов квантования (линейная модель)

Алгоритм работы рекурсивного цифрового фильтра с учётом эффектов квантования, структурная схема которого изображена на рис.10.9, описывается линейным разностным уравнением [ср. с (2.2)]

$$\tilde{y}[n]=\sum_{k=0}^{M}\left\{\tilde{a}_k\left(x[n-k]+e_0[n-k]\right)+e_{k+1}[n]\right\}-\sum_{k=1}^{N}\left\{\tilde{b}_k\tilde{y}[n-k]-e_{M+k+1}[n]\right\}, \tag{10.25}$$

где

$$e_{k+1}[n]=\{\widetilde{\tilde{a}_k\,\tilde{x}[n-k]}\}-\{\tilde{a}_k\,\tilde{x}[n-k]\},\quad k=\overline{0,\,M}; \tag{10.26}$$

$$e_{M+k+1}[n]=\{\widetilde{-\tilde{b}_k\,\tilde{y}[n-k]}\}-\{-\tilde{b}_k\,\tilde{y}[n-k]\},\quad k=\overline{1,\,N}. \tag{10.27}$$

Поскольку внутренние шумы ЦФ (10.26) и (10.27) входят в правую часть выражения (10.25) аддитивно, то уравнение (10.25) можно переписать в следующем виде:

$$\tilde{y}[n]=\sum_{k=0}^{M}\tilde{a}_k\left\{x[n-k]+e_0[n-k]\right\}-\sum_{k=1}^{N}\tilde{b}_k\tilde{y}[n-k]+\gamma[n], \tag{10.28}$$

где

$$\gamma[n]=\sum_{k=1}^{M+N+1}e_k[n] \tag{10.29}$$

— приведённый к входу многовходового сумматора *внутренний шум* ЦФ, обусловленный квантованием результатов арифметических операций.

На рис.10.10 изображены полная (*а*) и укрупнённая (*б*) структурные схемы вещественного рекурсивного ЦФ, описываемого уравнением (10.28).

На основании допущений, принятых в § 10.5 относительно характеристик источников шумов квантования, в ЦФ по схеме рис.10.9 математическое ожидание m_γ и дисперсия D_γ эквивалентного шума $\gamma[n]$, приведённого к входу многовходового сумматора, согласно (10.29) соответственно равны

$$m_\gamma=\sum_{k=1}^{M+N+1}m_{e_k};\qquad D_\gamma=\sum_{k=1}^{M+N+1}D_{e_k}, \tag{10.30}$$

а модульная оценка максимального значения последовательности $\gamma[n]$ определяется соотношением •

$$\max_n\left|\gamma[n]\right|\le\sum_{k=1}^{M+N+1}\max_n\left|e_k[n]\right|. \tag{10.31}$$

• Здесь использовано известное свойство модулей: модуль суммы не превосходит сумму модулей слагаемых.

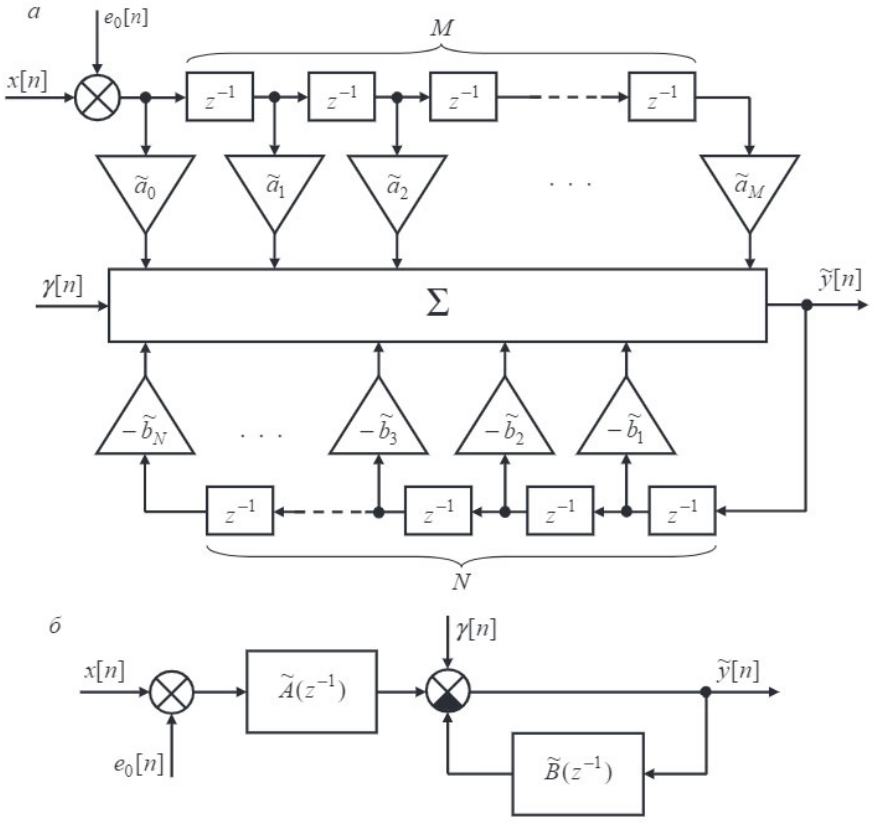


Рис.10.10. Структурные схемы рекурсивного ЦФ при прямой форме реализации с приведённым к входу многовходового сумматора внутренним шумом квантования (линейная модель): *а* — полная; *б* — укрупнённая

При реализации ЦФ на сигнальном процессоре все операции алгоритма фильтрации (2.2) выполняются с одинаковой разрядностью, поэтому все шумы квантования произведений сигналов на весовые коэффициенты имеют одинаковые статистические характеристики. В этом случае выражения (10.30) для математического ожидания и дисперсии эквивалентного собственного шума ЦФ можно записать в виде

$$m_\gamma = (M+N+1)\,m_e; \qquad D_\gamma = (M+N+1)\,D_e, \tag{10.32}$$

а модульную оценку (10.31) в виде

$$\max_n \left|\gamma[n]\right| \le (M+N+1)\max_n \left|e_k[n]\right|. \tag{10.33}$$

10.7. Линейная шумовая модель рекурсивного цифрового фильтра при канонической форме реализации

Структурная схема одномерного скалярного вещественного стационарного линейного рекурсивного цифрового фильтра при канонической форме реализации (см. рис.4.3), уточнённая с учётом эффектов квантования, приведена на рис.10.11, где использованы те же обозначения, что и в схеме рис.10.9.

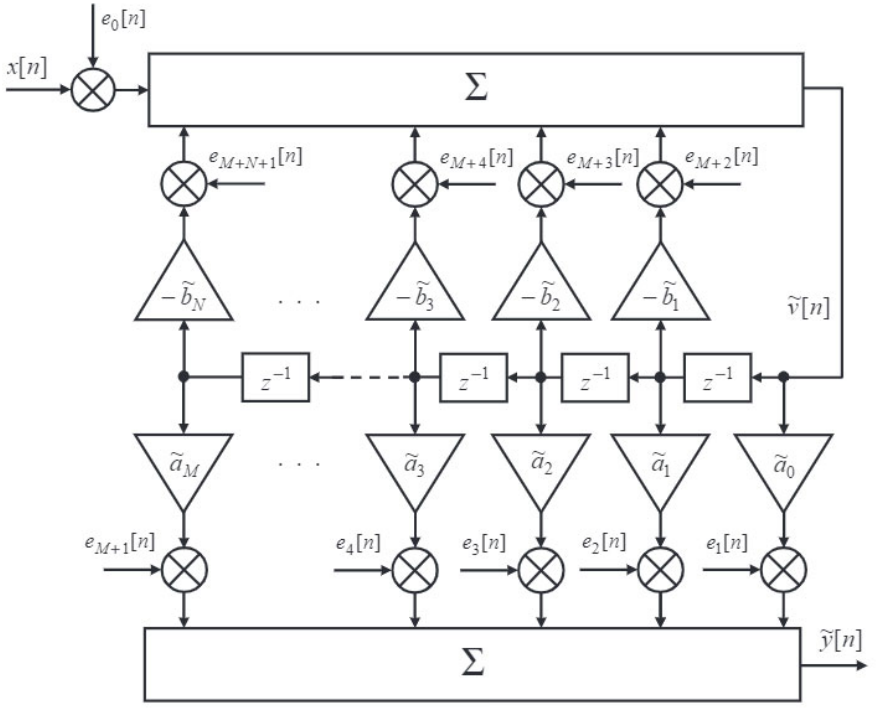


Рис.10.11. Структурная схема рекурсивного ЦФ при канонической форме реализации с учётом эффектов квантования (линейная модель)

Алгоритм работы рекурсивного ЦФ при канонической форме реализации (рис.10.11) описывается системой линейных разностных уравнений [ср. с (4.1)]

$$\begin{cases} \widetilde{v}[n] = \{x[n] + e_0[n]\} - \sum\limits_{k=1}^{N} \{\widetilde{b}_k \widetilde{v}[n-k] - e_{M+k+1}[n]\}; \\ \widetilde{y}[n] = \sum\limits_{k=0}^{M} \{\widetilde{a}_k \widetilde{v}[n-k] + e_{k+1}[n]\}, \end{cases} \tag{10.34}$$

где

$$e_{k+1}[n]=\{\widetilde{\widetilde{a}_k\,\tilde{v}[n-k]}\}-\{\tilde{a}_k\,\tilde{v}[n-k]\},\quad k=\overline{0,\,M};\tag{10.35}$$

$$e_{M+k+1}[n]=\{\widetilde{-\tilde{b}_k\,\tilde{v}[n-k]}\}-\{-\tilde{b}_k\,\tilde{v}[n-k]\},\quad k=\overline{1,\,N}.\tag{10.36}$$

Поскольку внутренние шумы ЦФ (10.35) и (10.36) входят в правые части выражений (10.34) аддитивно, уравнения (10.34) можно записать в виде

$$\begin{cases}\tilde{v}[n]=\{x[n]+e_0[n]\}-\sum\limits_{k=1}^{N}\tilde{b}_k\,\tilde{v}[n-k]+\gamma_N[n];\\ \tilde{y}[n]=\sum\limits_{k=0}^{M}\tilde{a}_k\,\tilde{v}[n-k]+\gamma_M[n],\end{cases}\tag{10.37}$$

где

$$\gamma_M[n]=\sum_{k=1}^{M+1}e_k[n];\qquad \gamma_N[n]=\sum_{k=M+2}^{M+N+1}e_k[n]\tag{10.38}$$

— приведённые к входам многовходовых сумматоров *внутренние шумы* ЦФ, обусловленные квантованием результатов арифметических операций.

На основании допущений, принятых в § 10.5 относительно характеристик источников шумов квантования, в ЦФ по схеме рис.10.11 математические ожидания (m_{γ_M}, m_{γ_N}) и дисперсии (D_{γ_M}, D_{γ_N}) эквивалентных внутренних шумов ($\gamma_M[n]$, $\gamma_N[n]$), приведённых к входам многовходовых сумматоров, согласно выражениям (10.38) соответственно равны

$$\begin{cases}m_{\gamma_M}=\sum\limits_{k=1}^{M+1}m_{e_k};\qquad m_{\gamma_N}=\sum\limits_{k=M+2}^{M+N+1}m_{e_k};\\ D_{\gamma_M}=\sum\limits_{k=1}^{M+1}D_{e_k};\qquad D_{\gamma_N}=\sum\limits_{k=M+2}^{M+N+1}D_{e_k}.\end{cases}\tag{10.39}$$

Модульные оценки максимальных значений последовательностей $\gamma_M[n]$ и $\gamma_N[n]$ определяются соотношениями

$$\max_n\left|\gamma_M[n]\right|\le\sum_{k=1}^{M+1}\max_n\left|e_k[n]\right|;\qquad \max_n\left|\gamma_N[n]\right|\le\sum_{k=M+2}^{M+N+1}\max_n\left|e_k[n]\right|.\tag{10.40}$$

При реализации ЦФ на сигнальном процессоре все операции алгоритма фильтрации (4.1) выполняются с одинаковой разрядностью, поэтому все шумы квантования произведений сигналов на весовые коэффициенты имеют одинаковые статистические характеристики. В этом случае выражения (10.39) для математических ожиданий и дисперсий эквивалентных собственных шумов ЦФ, а

также (10.40) для максимальных модульных оценок отсчётов собственных шумов можно записать в виде

$$\begin{cases} m_{\gamma_M} = (M+1)\, m_e; & m_{\gamma_N} = N m_e; \\ D_{\gamma_M} = (M+1)\, D_e; & D_{\gamma_N} = N D_e; \end{cases} \tag{10.41}$$

$$\max_n \left| \gamma_M[n] \right| \le (M+1) \max_n \left| e_k[n] \right|; \quad \max_n \left| \gamma_N[n] \right| \le N \max_n \left| e_k[n] \right|. \tag{10.42}$$

На рис.10.12 изображены полная (*а*) и укрупнённая (*б*) структурные схемы одномерного скалярного вещественного стационарного линейного рекурсивного ЦФ при канонической форме реализации, описываемого системой уравнений (10.37).

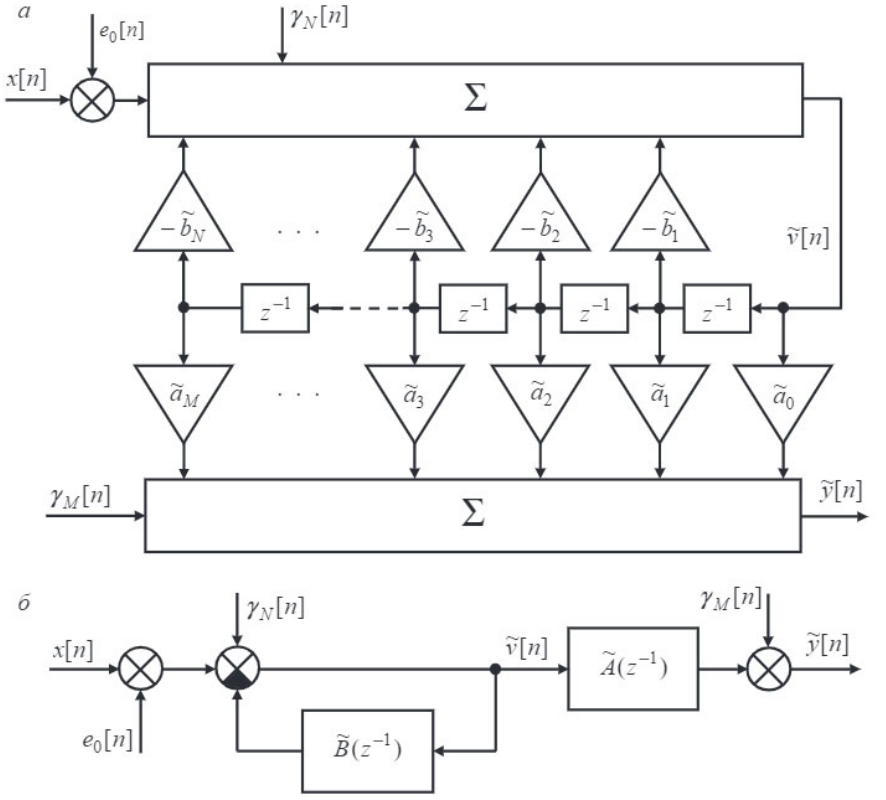


Рис.10.12. Структурные схемы рекурсивного ЦФ при канонической форме реализации с приведёнными к входам многовходовых сумматоров внутренними шумами квантования (линейная модель): *а* — полная; *б* — укрупнённая

При прямой форме реализации рекурсивного ЦФ (см. рис.10.10) эквивалентный внутренний шум $\gamma[n]$, обусловленный квантованием произведений отсчётов сигналов на весовые коэффициенты, действует на входе одного многовходового сумматора, а при канонической форме реализации (см. рис.10.12) шум квантования $\gamma[n]$ разделён на две составляющие ($\gamma_M[n]$ и $\gamma_N[n]$), действующие на входах разных многовходовых сумматоров, между которыми расположены линейные инерционные звенья. Из выражений (10.29) и (10.38) видно, что $\gamma[n] = \gamma_M[n] + \gamma_N[n]$.

Сравнивая рис.4.1 и 10.12, нетрудно видеть, что эквивалентный внутренний шум нерекурсивного ЦФ равен $\gamma_M[n]$, а его характеристики описываются выражениями (10.39) — (10.42).

10.8. Обобщённая линейная шумовая модель цифрового фильтра (схема Л.Б. Джексона)

Цифровые фильтры сложной структуры могут быть получены соединением более простых блоков. Применяют три типа соединений: каскадное (последовательное), параллельное и соединение с обратной связью (см. § 4.5). Обобщённая линейная шумовая модель ЦФ сложной структуры, пригодная для анализа шумов квантования и эффектов переполнения регистров операционных устройств в любых стационарных линейных цифровых фильтрах, предложена Л.Б. Джексоном [6]. Она разработана исходя из предположения, что линейный ЦФ состоит из определённого числа стандартных блоков, структурные схемы которых приведены на рис.10.10 и 10.12.

Обобщённая линейная шумовая модель Л.Б. Джексона представляет собой направленный граф, изображённый на рис.10.13, где приняты следующие обозначения:

$x[n]$ — дискретизированный неквантованный входной сигнал;

$e_0[n]$ — шум квантования входного сигнала (внешний шум ЦФ);

$H(z)$ — передаточная функция ЦФ (от входа до выхода);

$\gamma_r[n]\left(r = \overline{1,\ L}\right)$ — эквивалентный шум квантования, приведённый к входу r-го многовходового сумматора, т.е. шум квантования результатов умножения сигналов на весовые коэффициенты в умножителях, подключённых к его входам (см. рис.10.10 и 10.12);

$G_r(z)\left(r = \overline{1,\ L}\right)$ — передаточная функция части ЦФ от входа r-го многовходового сумматора до выхода фильтра;

$v_r[n]\left(r = \overline{1,\ L}\right)$ — сигнал на выходе r-го многовходового сумматора;

$F_r(z)\left(r = \overline{1,\ L}\right)$ — передаточная функция части ЦФ от входа фильтра до выхода r-го многовходового сумматора;

$\tilde{y}[n]$ — квантованный выходной сигнал ЦФ.

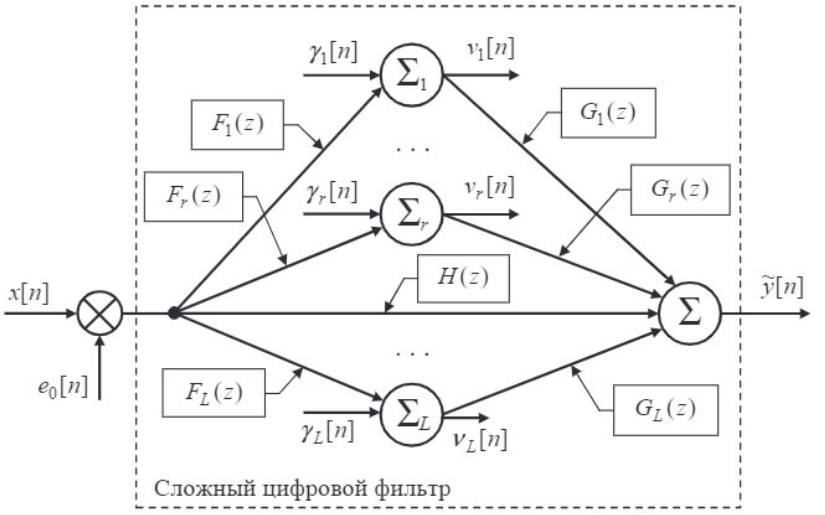


Рис.10.13. Обобщённая линейная шумовая модель цифрового фильтра (схема Л.Б. Джексона)

Для стандартного блока стационарного линейного рекурсивного ЦФ при прямой форме реализации, изображённого на рис.10.10,*б*, передаточные функции схемы Л.Б. Джексона имеют следующий вид:

$$H(z)=\frac{A(z^{-1})}{1+B(z^{-1})};\quad G_1(z)=\frac{1}{1+B(z^{-1})};\quad F_1(z)=\frac{A(z^{-1})}{1+B(z^{-1})}. \tag{10.43}$$

Аналогично можно получить передаточные функции схемы Л.Б. Джексона для стандартного блока линейного рекурсивного ЦФ при канонической форме реализации, изображённого на рис.10.12,*б*:

$$\begin{cases} H(z)=\dfrac{A(z^{-1})}{1+B(z^{-1})};\quad G_1(z)=G_{(N)}(z)=\dfrac{A(z^{-1})}{1+B(z^{-1})};\quad G_2(z)=G_{(M)}(z)=1; \\ F_1(z)=F_{(N)}(z)=\dfrac{1}{1+B(z^{-1})};\quad F_2(z)=F_{(M)}(z)=\dfrac{A(z^{-1})}{1+B(z^{-1})}. \end{cases} \tag{10.44}$$

В случае стандартного блока линейного нерекурсивного ЦФ передаточные функции линейной шумовой модели Л.Б. Джексона принимают вид

$$H(z)=A(z^{-1});\quad G_1(z)=G_{(M)}(z)=1;\quad F_1(z)=F_{(M)}(z)=A(z^{-1}). \tag{10.45}$$

Передаточные функции связаны с импульсными характеристиками парой Z-преобразований (3.4), поэтому импульсные характеристики, соответствующие передаточным функциям обобщённой линейной шумовой модели цифрового

фильтра (см. рис.10.13), можно найти по передаточным функциям с помощью обратного Z-преобразования:

$$h[n]=Z^{-1}\{H(z)\};\quad g_r[n]=Z^{-1}\{G_r(z)\};\quad f_r[n]=Z^{-1}\{F_r(z)\},\quad r=\overline{1,\ L}. \tag{10.46}$$

10.9. Передаточные функции схемы Л.Б. Джексона при различных соединениях блоков цифрового фильтра

В данном параграфе рассмотрим примеры использования обобщённой линейной шумовой модели Л.Б. Джексона для построения шумовых моделей конкретных ЦФ сложной структуры. Будем предполагать, что сложный цифровой фильтр построен из рекурсивных блоков при прямой (см. рис.10.10) или/и при канонической (см. рис.10.12) формах реализации. Передаточные функции сложных ЦФ с различными способами соединения блоков получены в § 4.5. Для простоты изложения рассмотрим структуры сложного фильтра, состоящие из двух блоков (результаты обобщаются на большее количество соединяемых блоков очевидным образом).

◆ Каскадное соединение при прямой форме реализации блоков

На рис.10.14 изображена линейная шумовая модель сложного ЦФ каскадной структуры (два блока) при прямой форме реализации рекурсивных блоков (см. рис.10.10,*б*). Структурная схема модели содержит два многовходовых сумматора, на входах которых действуют эквивалентные шумы квантования результатов арифметических операций ($\gamma_1[n]=\gamma_{M_1}[n]+\gamma_{N_1}[n]$ и $\gamma_2[n]=\gamma_{M_2}[n]+\gamma_{N_2}[n]$ соответственно).

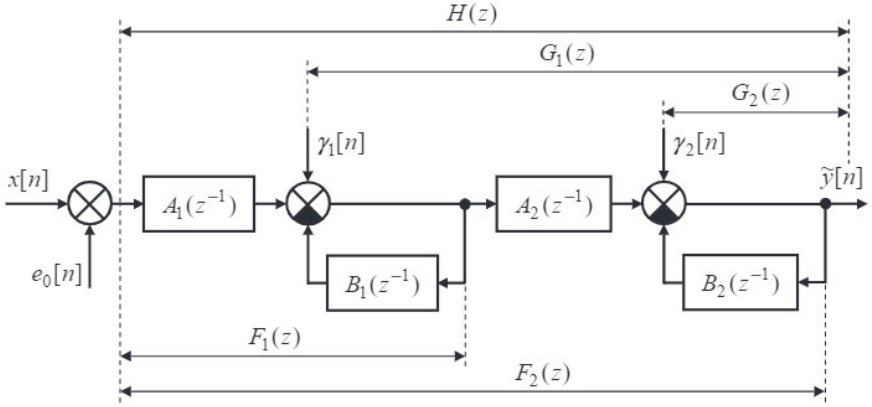


Рис.10.14. Линейная шумовая модель каскадной структуры ЦФ при прямой форме реализации блоков

Произведём разметку схемы (рис.10.14) для парциальных передаточных функций обобщённой линейной шумовой модели ЦФ (см. рис.10.13) и вычислим эти передаточные функции. Используя результаты § 4.5, получим

$$\begin{cases} H(z)=\dfrac{A_1(z^{-1})}{1+B_1(z^{-1})}\,\dfrac{A_2(z^{-1})}{1+B_2(z^{-1})}; \\ G_1(z)=\dfrac{1}{1+B_1(z^{-1})}\,\dfrac{A_2(z^{-1})}{1+B_2(z^{-1})}; \quad G_2(z)=\dfrac{1}{1+B_2(z^{-1})}; \\ F_1(z)=\dfrac{A_1(z^{-1})}{1+B_1(z^{-1})}; \quad F_2(z)=\dfrac{A_1(z^{-1})}{1+B_1(z^{-1})}\,\dfrac{A_2(z^{-1})}{1+B_2(z^{-1})}. \end{cases} \tag{10.47}$$

◆ Каскадное соединение при канонической форме реализации блоков

На рис.10.15 приведена линейная шумовая модель ЦФ каскадной структуры (два блока) при канонической форме реализации рекурсивных блоков (см. рис.10.12, *б*). Здесь выходной многовходовый сумматор первого блока объединён с входным многовходовым сумматором второго блока, поэтому структурная схема модели содержит не четыре, а три многовходовых сумматора, на входы которых подаются эквивалентные шумы квантования результатов арифметических операций (собственные шумы фильтра $\gamma_{N_1}[n]$, $\gamma_{M_1}[n]+\gamma_{N_2}[n]$ и $\gamma_{M_2}[n]$ соответственно). Внешний шум квантования $e_0[n]$ подаётся на вход первого многовходового сумматора вместе с сигналом $x[n]$.

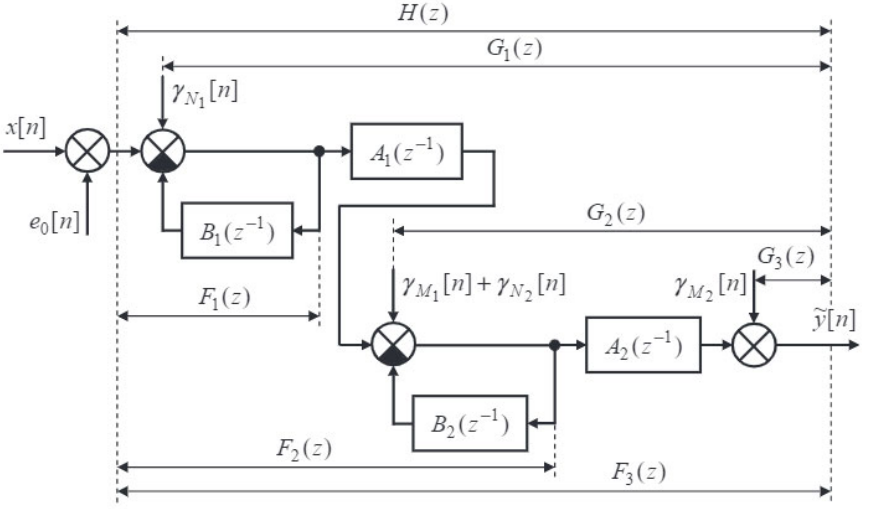


Рис.10.15. Линейная шумовая модель каскадной структуры ЦФ при канонической форме реализации блоков

Выполним разметку схемы (рис.10.15) для парциальных передаточных функций обобщённой линейной шумовой модели ЦФ (см. рис.10.13) и вычислим эти передаточные функции. Используя результаты § 4.5, получим

$$\begin{cases} H(z)=\dfrac{A_1(z^{-1})}{1+B_1(z^{-1})}\,\dfrac{A_2(z^{-1})}{1+B_2(z^{-1})}; \\ G_1(z)=\dfrac{A_1(z^{-1})}{1+B_1(z^{-1})}\,\dfrac{A_2(z^{-1})}{1+B_2(z^{-1})}; \quad G_2(z)=\dfrac{A_2(z^{-1})}{1+B_2(z^{-1})}; \quad G_3(z)=1; \\ F_1(z)=\dfrac{1}{1+B_1(z^{-1})}; \quad F_2(z)=\dfrac{A_1(z^{-1})}{1+B_1(z^{-1})}\,\dfrac{1}{1+B_2(z^{-1})}; \\ F_3(z)=\dfrac{A_1(z^{-1})}{1+B_1(z^{-1})}\,\dfrac{A_2(z^{-1})}{1+B_2(z^{-1})}. \end{cases} \tag{10.48}$$

В § 4.3 отмечалось, что структурные схемы дискретного стационарного линейного фильтра при прямой и канонической формах реализации отличаются лишь порядком расположения звеньев с передаточными функциями $A(z^{-1})$ и $1\big/\left[1+B(z^{-1})\right]$ (см. рис.4.2,*б* и 4.3,*б*). Поскольку динамические звенья стационарных линейных систем коммутативны (перестановочны), характеристики дискретного фильтра при различных формах реализации совершенно одинаковы.

Цифровые фильтры, работающие даже по линейному алгоритму фильтрации (2.2) или (4.1), за счёт квантования сигналов являются принципиально нелинейными системами, в которых динамические звенья некоммутативны, поэтому порядок следования звеньев в ЦФ существенно влияет на шумовые свойства фильтра (это можно видеть при сопоставлении структурных схем, изображённых на рис.10.10,*б* и 10.12,*б*, а также на рис.10.14 и 10.15). Шумы квантования на выходе ЦФ при прямой и канонической формах реализации различны (оценка дисперсий шумов квантования для линейных шумовых моделей ЦФ будет дана в гл.11).

Возможен также вариант построения ЦФ каскадной структуры, когда некоторые блоки выполнены при прямой форме реализации, а остальные — при канонической форме. В этом случае за счёт рационального размещения блоков можно уменьшить уровень собственных шумов квантования на выходе ЦФ.

◆ Параллельное соединение при прямой форме реализации блоков

Линейная шумовая модель цифрового фильтра параллельной структуры при прямой форме реализации рекурсивных блоков (см. рис.10.10,*б*) изображена на рис.10.16. Структурная схема содержит два многовходовых сумматора, на входах которых действуют эквивалентные шумы квантования результатов арифметических операций ($\gamma_1[n]=\gamma_{M_1}[n]+\gamma_{N_1}[n]$ и $\gamma_2[n]=\gamma_{M_2}[n]+\gamma_{N_2}[n]$ соответственно).

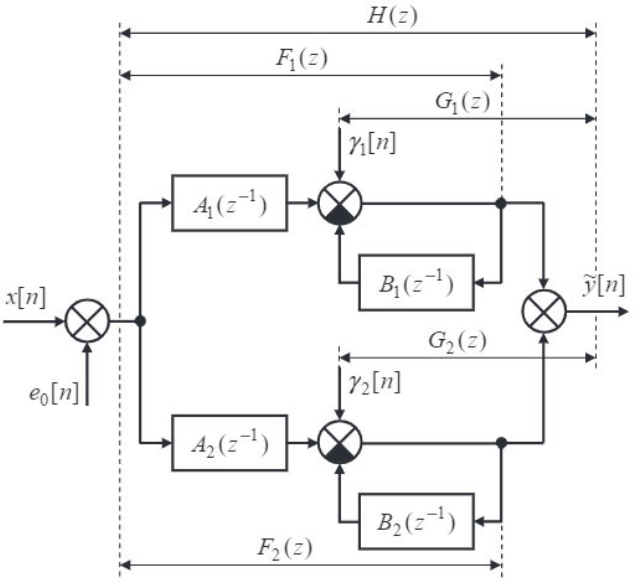


Рис.10.16. Линейная шумовая модель параллельной структуры ЦФ при прямой форме реализации блоков

Произведём разметку схемы (рис.10.16) для парциальных передаточных функций обобщённой линейной шумовой модели ЦФ (см. рис.10.13) и вычислим эти передаточные функции. Используя результаты § 4.5, получим

$$\begin{cases} H(z)=\dfrac{A_1(z^{-1})}{1+B_1(z^{-1})}+\dfrac{A_2(z^{-1})}{1+B_2(z^{-1})}; \\ G_1(z)=\dfrac{1}{1+B_1(z^{-1})}; \quad G_2(z)=\dfrac{1}{1+B_2(z^{-1})}; \\ F_1(z)=\dfrac{A_1(z^{-1})}{1+B_1(z^{-1})}; \quad F_2(z)=\dfrac{A_2(z^{-1})}{1+B_2(z^{-1})}. \end{cases} \tag{10.49}$$

◆ Параллельное соединение при канонической форме реализации блоков

На рис.10.17 изображена линейная шумовая модель цифрового фильтра параллельной структуры при канонической форме реализации рекурсивных блоков (см. рис.10.12,*б*). Здесь выходной многовходовый сумматор первого блока объединён с выходным многовходовым сумматором второго блока, поэтому структурная схема модели содержит не четыре, а только три многовходовых сумматора, на входы которых подаются эквивалентные шумы квантования

результатов арифметических операций ($\gamma_{N_1}[n]$, $\gamma_{N_2}[n]$ и $\gamma_{M_1}[n]+\gamma_{M_2}[n]$ соответственно).

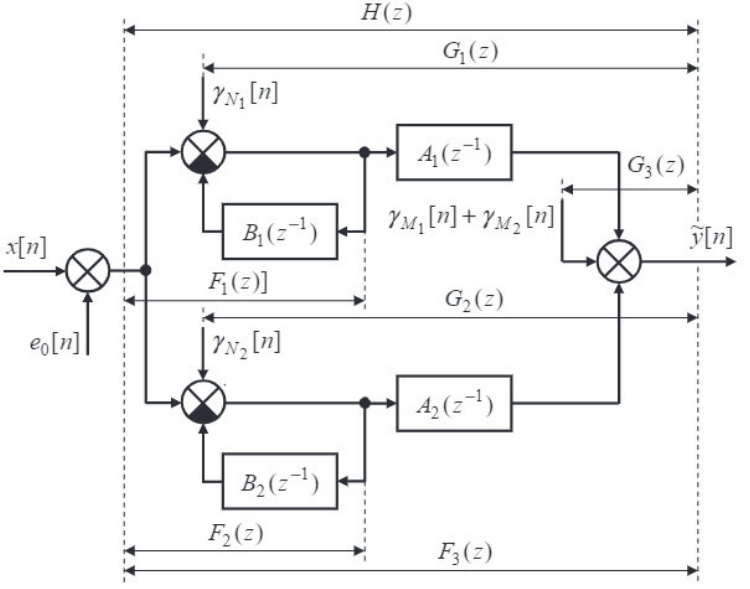


Рис.10.17. Линейная шумовая модель двухзвенной параллельной структуры ЦФ при канонической форме реализации блоков

Произведём разметку схемы (рис.10.17) для парциальных передаточных функций обобщённой линейной шумовой модели ЦФ (см. рис.10.13) и вычислим эти передаточные функции. Используя результаты § 4.5, получим

$$\begin{cases} H(z)=\dfrac{A_1(z^{-1})}{1+B_1(z^{-1})}+\dfrac{A_2(z^{-1})}{1+B_2(z^{-1})}; \\ G_1(z)=\dfrac{A_1(z^{-1})}{1+B_1(z^{-1})}; \quad G_2(z)=\dfrac{A_2(z^{-1})}{1+B_2(z^{-1})}; \quad G_3(z)=1; \\ F_1(z)=\dfrac{1}{1+B_1(z^{-1})}; \quad F_2(z)=\dfrac{1}{1+B_2(z^{-1})}; \quad F_3(z)=\dfrac{A_1(z^{-1})}{1+B_1(z^{-1})}+\dfrac{A_2(z^{-1})}{1+B_2(z^{-1})}. \end{cases} \tag{10.50}$$

◆ Соединение с обратной связью при прямой форме реализации блоков

На рис.10.18 изображена линейная шумовая модель цифрового фильтра сложной структуры, состоящего из двух рекурсивных блоков при прямой форме

реализации (см. рис.10.10,*б*), которые соединены таким образом, что образуют контур отрицательной обратной связи. Структурная схема модели содержит два многовходовых сумматора, на входах которых действуют эквивалентные шумы квантования результатов арифметических операций ($\gamma_1[n]=\gamma_{M_1}[n]+\gamma_{N_1}[n]$ и $\gamma_2[n]=\gamma_{M_2}[n]+\gamma_{N_2}[n]$ соответственно).

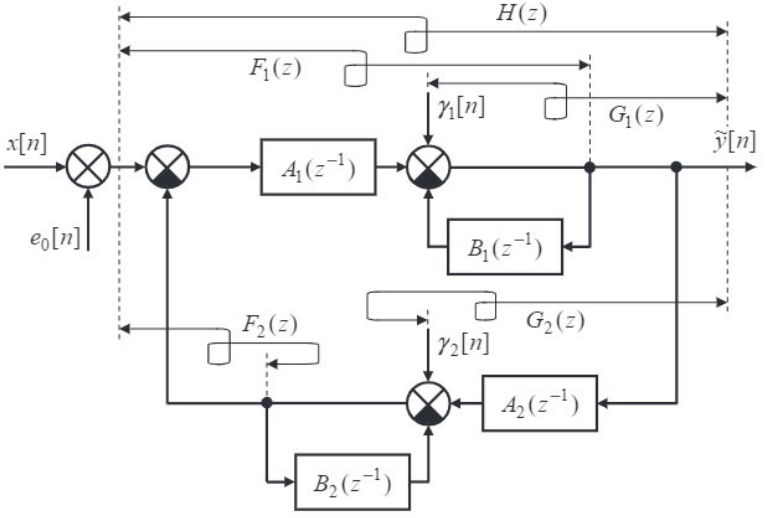


Рис.10.18. Линейная шумовая модель ЦФ, состоящего из двух блоков, образующих контур отрицательной обратной связи, при прямой форме реализации блоков

Произведём разметку схемы (рис.10.18) для парциальных передаточных функций • обобщённой линейной шумовой модели ЦФ (см. рис.10.13) и вычислим эти передаточные функции. Используя результаты § 4.5, получим

$$H(z)=\frac{A_1(z^{-1})\big/\left[1+B_1(z^{-1})\right]}{1+\left\{A_1(z^{-1})\big/\left[1+B_1(z^{-1})\right]\right\}\left\{A_2(z^{-1})\big/\left[1+B_2(z^{-1})\right]\right\}}=$$

$$=\frac{A_1(z^{-1})+A_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1})}{1+B_1(z^{-1})+B_2(z^{-1})+B_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1})+A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})};\qquad(10.51)$$

$$G_1(z)=\frac{1\big/\left[1+B_1(z^{-1})\right]}{1+\left\{A_1(z^{-1})\big/\left[1+B_1(z^{-1})\right]\right\}\left\{A_2(z^{-1})\big/\left[1+B_2(z^{-1})\right]\right\}}=$$

• Стрелка с петлёй здесь означает, что вычисление передаточной функции следует производить с учётом обхода по контуру главной обратной связи.

$$= \frac{1 + B_2(z^{-1})}{1 + B_1(z^{-1}) + B_2(z^{-1}) + B_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1}) + A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})}; \qquad (10.52)$$

$$G_2(z) = \frac{\left\{-1 \Big/ \left[1 + B_2(z^{-1})\right]\right\} \left\{A_1(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right]\right\}}{1 + \left\{A_1(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right]\right\} \left\{A_2(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_2(z^{-1})\right]\right\}} =$$

$$= \frac{-A_1(z^{-1})}{1 + B_1(z^{-1}) + B_2(z^{-1}) + B_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1}) + A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})}; \qquad (10.53)$$

$$F_1(z) = \frac{A_1(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right]}{1 + \left\{A_1(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right]\right\} \left\{A_2(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_2(z^{-1})\right]\right\}} =$$

$$= \frac{A_1(z^{-1}) + A_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1})}{1 + B_1(z^{-1}) + B_2(z^{-1}) + B_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1}) + A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})}; \qquad (10.54)$$

$$F_2(z) = \frac{\left\{A_1(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right]\right\} \left\{A_2(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_2(z^{-1})\right]\right\}}{1 + \left\{A_1(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right]\right\} \left\{A_2(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_2(z^{-1})\right]\right\}} =$$

$$= \frac{A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})}{1 + B_1(z^{-1}) + B_2(z^{-1}) + B_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1}) + A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})}. \qquad (10.55)$$

Из выражений (10.51) — (10.55) видно, что при соединении двух блоков с обратной связью все передаточные функции схемы Л.Б. Джексона имеют дробно-рациональный вид, причём все они имеют один и тот же знаменатель, а отличаются лишь числителями. Корни знаменателя, т.е. корни характеристического уравнения

$$1 + B_1(z^{-1}) + B_2(z^{-1}) + B_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1}) + A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1}) = 0, \qquad (10.56)$$

являются полюсами передаточных функций $H(z)$, $G_1(z)$, $G_2(z)$, $F_1(z)$ и $F_2(z)$. Для устойчивости ЦФ необходимо и достаточно, чтобы корни уравнения (10.56) находились внутри круга единичного радиуса (см. § 3.7).

◆ Соединение с обратной связью при канонической форме реализации блоков

На рис.10.19 приведена линейная шумовая модель цифрового фильтра, состоящего из двух рекурсивных блоков при канонической форме реализации (см. рис.10.12, *б*), которые соединены таким образом, что образуют контур отрицательной обратной связи. Структурная схема модели содержит четыре многовходовых сумматора, на входах которых действуют эквивалентные шумы квантования результатов умножения сигналов на весовые коэффициенты (соответственно $\gamma_{N_1}[n]$, $\gamma_{M_1}[n]$, $\gamma_{N_2}[n]$ и $\gamma_{M_2}[n]$).

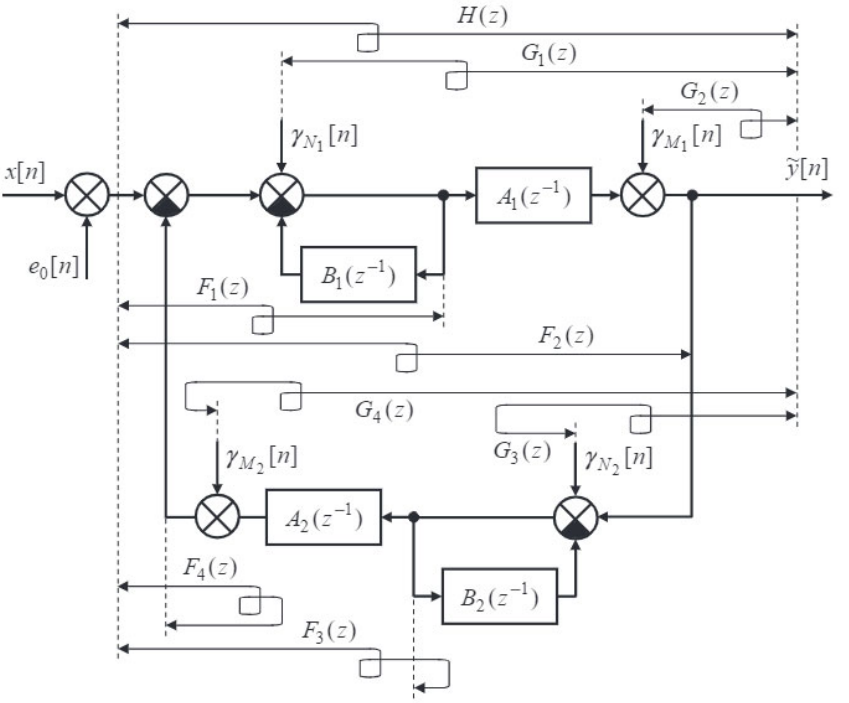


Рис.10.19. Линейная шумовая модель ЦФ, состоящего из двух блоков, образующих контур отрицательной обратной связи, при канонической форме реализации блоков

Произведём разметку схемы (рис.10.19) для парциальных передаточных функций • обобщённой линейной шумовой модели ЦФ (см. рис.10.13) и вычислим эти передаточные функции. Используя результаты § 4.5, получим следующие выражения:

$$H(z)=\frac{A_1(z^{-1})\big/\left[1+B_1(z^{-1})\right]}{1+\left\{A_1(z^{-1})\big/\left[1+B_1(z^{-1})\right]\right\}\left\{A_2(z^{-1})\big/\left[1+B_2(z^{-1})\right]\right\}}=$$

$$=\frac{A_1(z^{-1})+A_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1})}{1+B_1(z^{-1})+B_2(z^{-1})+B_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1})+A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})};\qquad(10.57)$$

$$G_1(z)=\frac{A_1(z^{-1})\big/\left[1+B_1(z^{-1})\right]}{1+\left\{A_1(z^{-1})\big/\left[1+B_1(z^{-1})\right]\right\}\left\{A_2(z^{-1})\big/\left[1+B_2(z^{-1})\right]\right\}}=$$

• См. сноску на с.287.

$$= \frac{A_1(z^{-1}) + A_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1})}{1 + B_1(z^{-1}) + B_2(z^{-1}) + B_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1}) + A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})}; \qquad (10.58)$$

$$G_2(z) = \frac{1}{1 + \left\{ A_1(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right] \right\} \left\{ A_2(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_2(z^{-1})\right] \right\}} =$$

$$= \frac{1 + B_1(z^{-1}) + B_2(z^{-1}) + B_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1})}{1 + B_1(z^{-1}) + B_2(z^{-1}) + B_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1}) + A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})}; \qquad (10.59)$$

$$G_3(z) = \frac{-\left\{ A_2(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_2(z^{-1})\right] \right\} \left\{ A_1(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right] \right\}}{1 + \left\{ A_1(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right] \right\} \left\{ A_2(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_2(z^{-1})\right] \right\}} =$$

$$= \frac{-A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})}{1 + B_1(z^{-1}) + B_2(z^{-1}) + B_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1}) + A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})}; \qquad (10.60)$$

$$G_4(z) = \frac{-A_1(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right]}{1 + \left\{ A_1(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right] \right\} \left\{ A_2(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_2(z^{-1})\right] \right\}} =$$

$$= \frac{-A_1(z^{-1}) - A_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1})}{1 + B_1(z^{-1}) + B_2(z^{-1}) + B_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1}) + A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})}; \qquad (10.61)$$

$$F_1(z) = \frac{1 \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right]}{1 + \left\{ A_1(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right] \right\} \left\{ A_2(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_2(z^{-1})\right] \right\}} =$$

$$= \frac{1 + B_2(z^{-1})}{1 + B_1(z^{-1}) + B_2(z^{-1}) + B_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1}) + A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})}; \qquad (10.62)$$

$$F_2(z) = \frac{A_1(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right]}{1 + \left\{ A_1(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right] \right\} \left\{ A_2(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_2(z^{-1})\right] \right\}} =$$

$$= \frac{A_1(z^{-1}) + A_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1})}{1 + B_1(z^{-1}) + B_2(z^{-1}) + B_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1}) + A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})}; \qquad (10.63)$$

$$F_3(z) = \frac{\left\{ A_1(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right] \right\} \left\{ 1 \Big/ \left[1 + B_2(z^{-1})\right] \right\}}{1 + \left\{ A_1(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_1(z^{-1})\right] \right\} \left\{ A_2(z^{-1}) \Big/ \left[1 + B_2(z^{-1})\right] \right\}} =$$

$$= \frac{A_1(z^{-1})}{1 + B_1(z^{-1}) + B_2(z^{-1}) + B_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1}) + A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})}; \qquad (10.64)$$

$$F_4(z)=\frac{\left\{A_1(z^{-1})\Big/\left[1+B_1(z^{-1})\right]\right\}\left\{A_2(z^{-1})\Big/\left[1+B_2(z^{-1})\right]\right\}}{1+\left\{A_1(z^{-1})\Big/\left[1+B_1(z^{-1})\right]\right\}\left\{A_2(z^{-1})\Big/\left[1+B_2(z^{-1})\right]\right\}}=$$

$$=\frac{A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})}{1+B_1(z^{-1})+B_2(z^{-1})+B_1(z^{-1})\,B_2(z^{-1})+A_1(z^{-1})\,A_2(z^{-1})}. \qquad (10.65)$$

Выражения (10.57) — (10.65) для передаточных функций схемы Джексона имеют дробно-рациональный вид с одним и тем же знаменателем, а отличаются лишь числителями. Корни знаменателя (полюсы передаточных функций) являются корнями характеристического уравнения (10.56). В устойчивом ЦФ корни уравнения (10.56) находятся внутри круга единичного радиуса (см. § 3.7).

Методика построения линейных шумовых моделей цифровых фильтров, рассмотренная в § 10.6 — 10.8 и в настоящем параграфе, пригодна для любых ЦФ, работающих по линейному алгоритму фильтрации [см. (2.2), (2.9), (3.11), (4.60)]. В случае скалярных фильтров (вещественных или комплексных) форма реализации одних звеньев сложного ЦФ может быть прямой (см. рис.10.10,*б*), а других канонической (см. рис.10.12,*б*). Способы соединений блоков в структуре сложного фильтра могут быть разнообразными (каскадный, параллельный и с обратной связью). Данная методика применима также к комплексным и векторным линейным цифровым фильтрам (см. § 4.6 и 4.7).

10.10. Шумы квантования в векторных цифровых фильтрах простой структуры

Рассмотрим шумовые модели одномерных векторных стационарных линейных ЦФ простой структуры •, описываемых векторно-матричным линейным разностным уравнением (3.11) [см. также (4.60)].

Структурные схемы и характеристики одномерных векторных вещественных стационарных линейных дискретных фильтров •• получены в § 4.7. В настоящем параграфе мы будем строить шумовые модели вещественного векторного цифрового фильтра, для чего воспользуемся линейными моделями шумов квантования сигналов в АЦП, шумов квантования результатов умножения сигналов на весовые коэффициенты ЦФ (см. § 10.4 и 10.5), а также методикой построения структурных схем, рассмотренной в гл.4.

Уравнение линейной векторной фильтрации (3.11) с учётом эффектов квантования сигналов примет вид [ср. с (10.25)]

$$\tilde{\mathbf{y}}[n]=\sum_{k=0}^{M}\left\{\mathbf{a}_k\left(\mathbf{x}[n-k]+\mathbf{e}_0[n-k]\right)+\mathbf{e}_{\mathrm{A}(k)}[n]\cdot\mathbf{1}\right\}-$$

• Скалярные комплексные ЦФ здесь и далее рассматриваются как частный случай двухкоординатных векторных ЦФ [условия эквивалентности описываются соотношениями (4.53)].

•• Поскольку эффекты квантования в них не учитывались.

$$-\sum_{k=1}^{N}\left\{\mathbf{b}_k\,\tilde{\mathbf{y}}[n-k]-\mathbf{e}_{\mathrm{B}(k)}[n]\cdot\mathbf{1}\right\}, \tag{10.66}$$

где $\mathbf{a}_k\left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $\mathbf{b}_k\left(k=\overline{1,\ N}\right)$ — квадратные матрицы размера $R\times R$, элементами которых являются постоянные коэффициенты векторного ЦФ; R — размерность векторных сигналов $\mathbf{x}[n]$ и $\mathbf{y}[n]$; $\mathbf{e}_0[n]$ — R-координатный вектор входных шумов; $\mathbf{e}_{\mathrm{A}(k)}[n]\left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и $\mathbf{e}_{\mathrm{B}(k)}[n]\left(k=\overline{1,\ N}\right)$ — квадратные матрицы размера $R\times R$, элементами которых являются отсчёты шумов квантования результатов умножения сигналов на весовые коэффициенты ЦФ; **1** — единичный вектор, т.е. R-координатный вектор, все элементы которого равны единице.

Рассмотрим двухкоординатный векторный ЦФ, алгоритм работы которого (10.66) конкретизируется следующим образом [1]:

$$\begin{pmatrix}\tilde{y}_1[n]\\ \tilde{y}_2[n]\end{pmatrix}=\sum_{k=0}^{M}\left\{\begin{pmatrix}a_{k_{11}} & a_{k_{12}}\\ a_{k_{21}} & a_{k_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1[n-k]+e_{1(0)}[n-k]\\ x_2[n-k]+e_{2(0)}[n-k]\end{pmatrix}\right\}+$$

$$+\sum_{k=0}^{M}\left\{\begin{pmatrix}e_{11_{\mathrm{A}(k)}}[n] & e_{12_{\mathrm{A}(k)}}[n]\\ e_{21_{\mathrm{A}(k)}}[n] & e_{22_{\mathrm{A}(k)}}[n]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\}-\sum_{k=1}^{N}\left\{\begin{pmatrix}b_{k_{11}} & b_{k_{12}}\\ b_{k_{21}} & b_{k_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{y}_1[n-k]\\ \tilde{y}_2[n-k]\end{pmatrix}\right\}+$$

$$+\sum_{k=0}^{N}\left\{\begin{pmatrix}e_{11_{\mathrm{B}(k)}}[n] & e_{12_{\mathrm{B}(k)}}[n]\\ e_{21_{\mathrm{B}(k)}}[n] & e_{22_{\mathrm{B}(k)}}[n]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\}, \tag{10.67}$$

где

$$\begin{pmatrix}e_{1(0)}[n]\\ e_{2(0)}[n]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{x}_1[n]-x_1[n]\\ \tilde{x}_2[n]-x_2[n]\end{pmatrix} \tag{10.68}$$

— двухкоординатный вектор шумов квантования входных сигналов в двухканальном АЦП [ср. с (10.16)];

$$\begin{pmatrix}e_{11_{\mathrm{A}(k)}}[n] & e_{12_{\mathrm{A}(k)}}[n]\\ e_{21_{\mathrm{A}(k)}}[n] & e_{22_{\mathrm{A}(k)}}[n]\end{pmatrix},\quad k=\overline{0,\ M}; \tag{10.69}$$

$$\begin{pmatrix}e_{11_{\mathrm{B}(k)}}[n] & e_{12_{\mathrm{B}(k)}}[n]\\ e_{21_{\mathrm{B}(k)}}[n] & e_{22_{\mathrm{B}(k)}}[n]\end{pmatrix},\quad k=\overline{1,\ N} \tag{10.70}$$

— квадратные матрицы шумов квантования результатов умножения сигналов на весовые коэффициенты (собственных шумов цифрового фильтра), элементы которых описываются следующими выражениями [ср. с формулами (10.26) и (10.27) для скалярных вещественных ЦФ]:

$$e_{11_{\mathrm{A}(k)}}[n]=\overbrace{\left\{a_{k_{11}}\tilde{x}_1[n-k]\right\}}-\left\{a_{k11}\tilde{x}_1[n-k]\right\},\quad k=\overline{0,\ M}; \tag{10.71}$$

$$e_{12_{\mathrm{A}}(k)}[n]=\{\widetilde{a_{k_{12}}\tilde{x}_2[n-k]}\}-\{a_{k_{12}}\tilde{x}_2[n-k]\},\quad k=\overline{0,\ M};\tag{10.72}$$

$$e_{21_{\mathrm{A}}(k)}[n]=\{\widetilde{a_{k_{21}}\tilde{x}_1[n-k]}\}-\{a_{k_{21}}\tilde{x}_1[n-k]\},\quad k=\overline{0,\ M};\tag{10.73}$$

$$e_{22_{\mathrm{A}}(k)}[n]=\{\widetilde{a_{k_{22}}\tilde{x}_2[n-k]}\}-\{a_{k_{22}}\tilde{x}_2[n-k]\},\quad k=\overline{0,\ M};\tag{10.74}$$

$$e_{11_{\mathrm{B}}(k)}[n]=\{\widetilde{-b_{k_{11}}\tilde{y}_1[n-k]}\}-\{-b_{k_{11}}\tilde{y}_1[n-k]\},\quad k=\overline{1,\ N};\tag{10.75}$$

$$e_{12_{\mathrm{B}}(k)}[n]=\{\widetilde{-b_{k_{12}}\tilde{y}_2[n-k]}\}-\{-b_{k_{12}}\tilde{y}_2[n-k]\},\quad k=\overline{1,\ N};\tag{10.76}$$

$$e_{21_{\mathrm{B}}(k)}[n]=\{\widetilde{-b_{k_{21}}\tilde{y}_1[n-k]}\}-\{-b_{k_{21}}\tilde{y}_1[n-k]\},\quad k=\overline{1,\ N};\tag{10.77}$$

$$e_{22_{\mathrm{B}}(k)}[n]=\{\widetilde{-b_{k_{22}}\tilde{y}_2[n-k]}\}-\{-b_{k_{22}}\tilde{y}_2[n-k]\},\quad k=\overline{1,\ N}.\tag{10.78}$$

Перемножая матрицы на векторы в уравнении (10.67), получим выражения для компонент векторного сигнала на выходе ЦФ [1]:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1[n]=&\sum_{k=0}^{M}\left\{a_{k_{11}}\left(x_1[n-k]+e_{1(0)}[n-k]\right)+a_{k_{12}}\left(x_2[n-k]+e_{2(0)}[n-k]\right)\right\}+\\&+\sum_{k=0}^{M}\left\{e_{11_{\mathrm{A}}(k)}[n]+e_{12_{\mathrm{A}}(k)}[n]\right\}-\sum_{k=1}^{N}\left\{b_{k_{11}}\tilde{y}_1[n-k]+b_{k_{12}}\tilde{y}_2[n-k]\right\}+\\&+\sum_{k=1}^{N}\left\{e_{11_{\mathrm{B}}(k)}[n]+e_{12_{\mathrm{B}}(k)}[n]\right\};\end{aligned}\tag{10.79}$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_2[n]=&\sum_{k=0}^{M}\left\{a_{k_{21}}\left(x_1[n-k]+e_{1(0)}[n-k]\right)+a_{k_{22}}\left(x_2[n-k]+e_{2(0)}[n-k]\right)\right\}+\\&+\sum_{k=0}^{M}\left\{e_{21_{\mathrm{A}}(k)}[n]+e_{22_{\mathrm{A}}(k)}[n]\right\}-\sum_{k=1}^{N}\left\{b_{k_{21}}\tilde{y}_1[n-k]+b_{k_{22}}\tilde{y}_2[n-k]\right\}+\\&+\sum_{k=1}^{N}\left\{e_{21_{\mathrm{B}}(k)}[n]+e_{22_{\mathrm{B}}(k)}[n]\right\}.\end{aligned}\tag{10.80}$$

По этим уравнениям может быть построена полная структурная схема одномерного двухкоординатного векторного вещественного стационарного линейного рекурсивного ЦФ при прямой форме реализации. Схема оказывается довольно громоздкой, поэтому мы ограничимся рассмотрением укрупнённой структурной схемы, для построения которой возьмём Z-преобразование от обеих частей уравнений (10.79) и (10.80). Полагая, что входной сигнал $\mathbf{x}[n]=\mathbf{0}$ при

$n<0$, а начальные условия в ЦФ нулевые: $y_1[-n]=0,\ y_2[-n]=0\ \left(n=\overline{1,\ N}\right)$, воспользуемся теоремой линейности Z-преобразования [см. (1.27) и (1.28)] и теоремой запаздывания [см. (1.34)]. В результате, используя обозначения (4.51), получим систему алгебраических уравнений для Z-образов:

$$\begin{cases} Y_1(z)=A_{11}(z^{-1})\{X_1(z)+E_1(z)\}+A_{12}(z^{-1})\{X_2(z)+E_2(z)\}- \\ \qquad -B_{11}(z^{-1})Y_1(z)-B_{12}(z^{-1})Y_2(z)+\Gamma_1(z); \\ Y_2(z)=A_{21}(z^{-1})\{X_1(z)+E_1(z)\}+A_{22}(z^{-1})\{X_2(z)+E_2(z)\}- \\ \qquad -B_{21}(z^{-1})Y_1(z)-B_{22}(z^{-1})Y_2(z)+\Gamma_2(z), \end{cases} \tag{10.81}$$

где

$$E_1(z)=Z\{e_{1(0)}[n]\};\quad E_2(z)=Z\{e_{2(0)}[n]\} \tag{10.82}$$

— Z-преобразования от *реализаций* шумов квантования входных сигналов в АЦП (внешних шумов);

$$\gamma_{1_A}[n]=\sum_{k=0}^{M}\{e_{11_{A(k)}}[n]+e_{12_{A(k)}}[n]\}; \tag{10.83}$$

$$\gamma_{2_A}[n]=\sum_{k=0}^{M}\{e_{21_{A(k)}}[n]+e_{22_{A(k)}}[n]\}; \tag{10.84}$$

$$\gamma_{1_B}[n]=\sum_{k=1}^{N}\{e_{11_{B(k)}}[n]+e_{12_{B(k)}}[n]\}; \tag{10.85}$$

$$\gamma_{2_B}[n]=\sum_{k=1}^{N}\{e_{21_{B(k)}}[n]+e_{22_{B(k)}}[n]\} \tag{10.86}$$

— *реализации* приведённых к входам многовходовых сумматоров шумов квантования результатов умножения сигналов на весовые коэффициенты (внутренних шумов);

$$\Gamma_1(z)=Z\{\gamma_{1_A}[n]+\gamma_{1_B}[n]\};\quad \Gamma_2(z)=Z\{\gamma_{2_A}[n]+\gamma_{2_B}[n]\}. \tag{10.87}$$

Выражения (10.82) и (10.87) описывают Z-образы реализаций мгновенных значений соответствующих шумов квантования (внешних и внутренних).

Построенная по уравнениям (10.81) укрупнённая структурная схема одномерного двухкоординатного векторного вещественного стационарного рекурсивного линейного ЦФ с учетом шумов квантования изображена на рис.10.20 [1], где

$$\begin{cases} \gamma_1[n]=Z^{-1}\{\Gamma_1(z)\}=\gamma_{1_A}[n]+\gamma_{1_B}[n]; \\ \gamma_2[n]=Z^{-1}\{\Gamma_2(z)\}=\gamma_{2_A}[n]+\gamma_{2_B}[n] \end{cases} \tag{10.88}$$

— координаты вектора приведённых к входам многовходовых сумматоров шумов квантования результатов умножения сигналов на весовые коэффициенты.

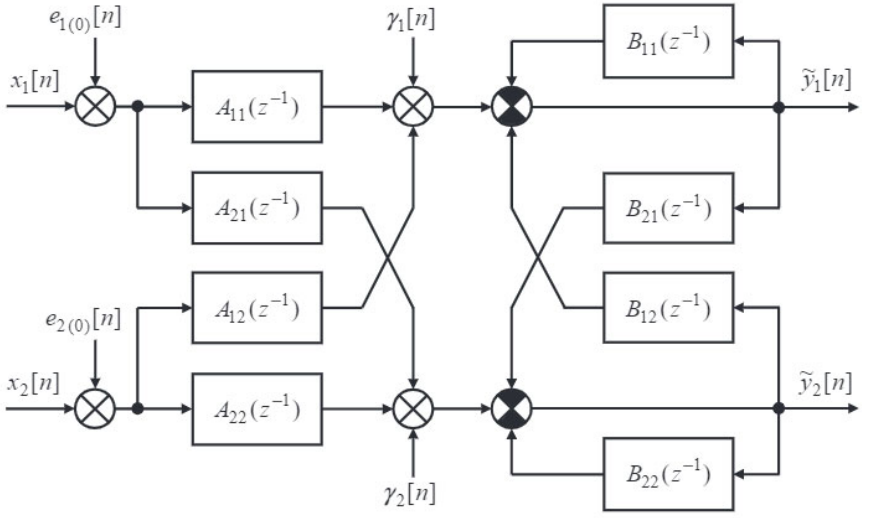


Рис.10.20. Укрупнённая структурная схема одномерного двухкоординатного векторного вещественного стационарного рекурсивного линейного ЦФ с учётом шумов квантования (линейная модель)

Полученная линейная шумовая модель ЦФ представляет собой линейную дискретную систему с несколькими входами, для которой справедлив принцип суперпозиции (наложения), поэтому прохождение каждого из воздействий на выходы ЦФ не зависит от других воздействий, а совокупный эффект на выходе равен *сумме* выходных эффектов от всех воздействий. Для анализа линейной шумовой модели ЦФ можно использовать хорошо развитый аппарат теории дискретных линейных систем, базирующийся на принципе суперпозиции.

Используя обозначения (3.15), запишем разностное уравнение линейной R-координатной векторной цифровой фильтрации с учётом эффектов квантования сигналов (10.66) в символической форме•:

$$\tilde{\mathbf{y}}[n]=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}(z^{-1})\left\{\mathbf{x}[n]+\mathbf{e}_0[n]\right\}+\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}(z^{-1})\right]^{-1}\boldsymbol{\gamma}[n]. \qquad (10.89)$$

При этом алгебраическое векторно-матричное уравнение для Z-образов имеет вид

$$\tilde{\mathbf{Y}}(z)=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}(z^{-1})\left\{\mathbf{X}(z)+\mathbf{E}_0(z)\right\}+\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}(z^{-1})\right]^{-1}\boldsymbol{\Gamma}(z). \qquad (10.90)$$

• См. сноску на с.191.

Структурная схема векторного ЦФ, описываемого уравнениями (10.89) и (10.90), изображена на рис.10.21 (ср. с рис.10.10,*б*), где $\mathbf{x}[n]$ — R-координатный вектор неквантованных входных сигналов; $\tilde{\mathbf{y}}[n]$ — R-координатный вектор выходных сигналов (квантованных); $\mathbf{e}_0[n]$ — R-координатный вектор внешних шумов; $\boldsymbol{\gamma}[n]$ — R-координатный вектор внутренних (собственных) шумов квантования.

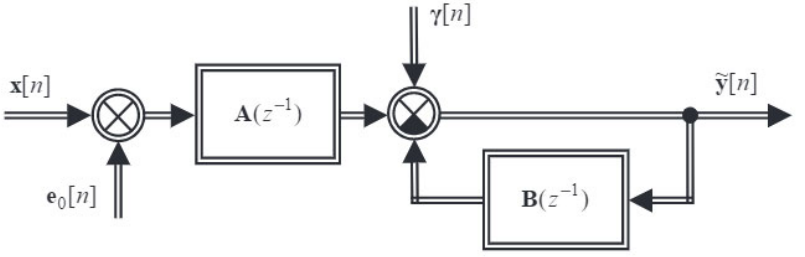


Рис.10.21. Линейная шумовая модель R-координатного векторного рекурсивного ЦФ

Рассмотренный выше двухкоординатный векторный ЦФ (см. рис.10.20) проясняет физический смысл шумовых векторов $\mathbf{e}_0[n]$ и $\boldsymbol{\gamma}[n]$, а также механизм формирования их координат.

Обозначим координаты вектора • $\mathbf{e}_0[n]$

$$e_{i(0)}[n] = \tilde{x}_i[n] - x_i[n], \quad i = \overline{1,\ R}\,. \tag{10.91}$$

Введём также обозначения для шумовых компонент, составляющих координаты вектора •• $\boldsymbol{\gamma}[n]$:

$$e_{il_{\mathrm{A}}(k)}[n] = \{\widetilde{a_{k\,il}\tilde{x}_l[n-k]}\} - \{a_{k\,il}\tilde{x}_l[n-k]\}, \quad k = \overline{0,\ M}, \quad i, l = \overline{1,\ R}\,; \tag{10.92}$$

$$e_{il_{\mathrm{B}}(k)}[n] = \{\widetilde{-b_{k\,il}\tilde{y}_l[n-k]}\} - \{-b_{k\,il}\tilde{y}_l[n-k]\}, \quad k = \overline{1,\ N}, \quad i,\ l = \overline{1,\ R}\,. \tag{10.93}$$

Тогда выражение для координат шумового вектора $\boldsymbol{\gamma}[n]$ можно записать в следующем виде •••:

$$\gamma_i[n] = \sum_{l=1}^{R}\left\{\sum_{k=0}^{M} e_{il_{\mathrm{A}}(k)}[n] + \sum_{k=1}^{N} e_{il_{\mathrm{B}}(k)}[n]\right\}, \quad i = \overline{1,\ R}\,. \tag{10.94}$$

Разработанные линейные шумовые модели векторных ЦФ (см. рис.10.20 и 10.21) позволяют осуществлять анализ как сигналов, так и шумов квантования

• Ср. с (10.68).
•• Ср. с (10.71) — (10.78).
••• Ср. с (10.83) — (10.88).

(в том числе статистический). Кроме того, на их основе могут быть построены линейные шумовые модели векторных ЦФ сложной структуры.

Следует отметить внешнее сходство линейных шумовых моделей скалярных и векторных цифровых фильтров (ср. рис.10.10,*б* и 10.21), что позволяет некоторые • свойства скалярных ЦФ экстраполировать на более сложные векторные ЦФ.

10.11. Шумы квантования в векторных цифровых фильтрах сложной структуры

Векторные ЦФ сложной структуры, точно так же как и скалярные, могут быть получены соединением элементарных блоков (см. § 4.7). Применяют три типа соединений: каскадное (последовательное), параллельное и соединение с обратной связью. На рис.4.11 показаны двухзвенные структуры векторных ЦФ для названных типов соединений. При известных матрицах передаточных функций блоков $\mathbf{H}_r(z)$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$ и способах их соединения матрицы передаточных функций векторного ЦФ сложной структуры $\mathbf{H}(z)$ определяются по формулам (4.70) при каскадном соединении L блоков, (4.71) при параллельном соединении L блоков и (4.74) при соединении двух блоков с отрицательной обратной связью ••.

Полагая, что векторный ЦФ сложной структуры состоит из соединённых определённым образом простых векторных блоков (см. рис.10.21), можно составить для него обобщённую линейную шумовую модель (схему Л.Б. Джексона — рис.10.22), пригодную для анализа шумов квантования на выходе векторного ЦФ, а также для оценки максимальных модульных значений сигналов (ср. с рис.10.13).

В схеме рис.10.22 использованы следующие обозначения:

$\mathbf{x}[n]$ — R-координатный вектор входных сигналов (неквантованных);

$\mathbf{e}_0[n]$ — R-координатный вектор шумов квантования входных сигналов (внешние шумы ЦФ);

$\mathbf{H}(z)$ — матрица передаточных функций ЦФ (от входа до выхода) размера $R\times R$;

$\boldsymbol{\gamma}_r[n]$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$ — R-координатный вектор эквивалентных шумов квантования, приведённых к входу r-го векторного сумматора, т.е. шумов квантования результатов умножения сигналов на весовые коэффициенты в умножителях, подключённых к его входам (см. рис.10.21);

$\mathbf{G}_r(z)$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$ — матрица передаточных функций размера $R\times R$ части ЦФ от входа r-го векторного сумматора до выхода фильтра;

• Но не все!

•• Ср. с формулами (4.13), (4.22) и (4.29) для скалярных ЦФ сложной структуры.

$\mathbf{v}_r[n]$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$ — R-координатный вектор сигналов на выходе r-го векторного сумматора;

$\mathbf{F}_r(z)$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$ — матрица передаточных функций размера $R\times R$ части ЦФ от входа фильтра до выхода r-го векторного сумматора;

$\tilde{\mathbf{y}}[n]$ — R-координатный вектор квантованных выходных сигналов ЦФ.

Сравнение схем, изображённых на рис.10.13 и 10.22, показывает, что они идентичны с точностью до ранга математических объектов (на рис.10.13 используются скалярные величины, а на рис.10.22 — векторно-матричные).

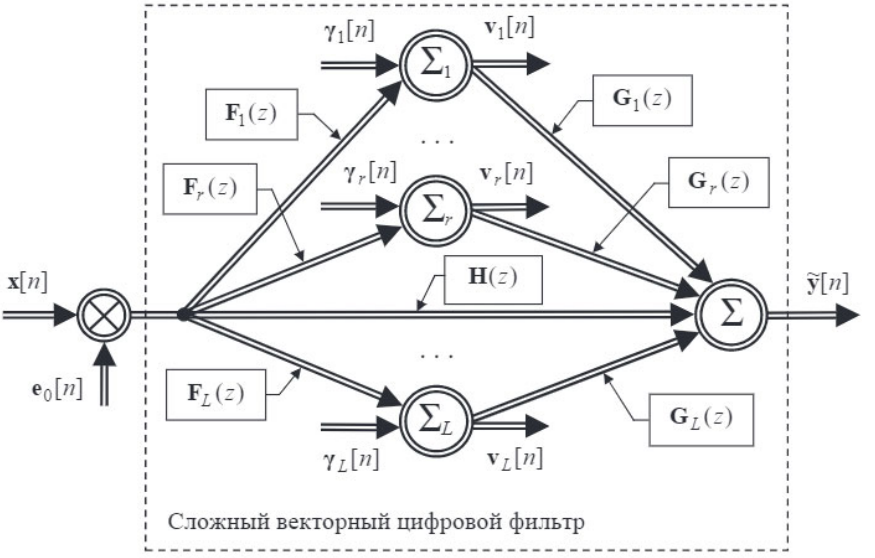


Рис.10.22. Обобщённая линейная шумовая модель векторного ЦФ сложной структуры (схема Л.Б. Джексона)

Для стандартного блока векторного стационарного линейного рекурсивного ЦФ при прямой форме реализации, изображённого на рис.10.21, передаточные функции схемы Л.Б. Джексона имеют следующий вид:

$$\mathbf{F}_1(z)=\mathbf{H}(z)=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}(z^{-1});\quad \mathbf{G}_1(z)=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}(z^{-1})\right]^{-1}. \quad (10.95)$$

Практический интерес представляет двухкоординатный векторный вещественный ЦФ, поскольку при выполнении условий (4.53) он эквивалентен скалярному комплексному ЦФ. Элементы матрицы передаточных функций $\mathbf{H}(z)$ размера 2×2 получены в § 4.7 [см. формулы (4.54) — (4.57)]; элементы матрицы $\mathbf{F}_1(z)$ определяются этими же формулами.

Используя шумовую модель ЦФ, изображённую на рис.10.20, найдём элементы матрицы $\mathbf{G}_1(z)$ размера 2×2. Для этого в системе алгебраических уравнений (10.81) для Z-образов будем полагать $A_{11}(z^{-1}) = A_{12}(z^{-1}) = A_{12}(z^{-1}) = A_{21}(z^{-1}) = A_{22}(z^{-1}) = 0$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} Y_1(z) = \Gamma_1(z) - B_{11}(z^{-1})\,Y_1(z) - B_{12}(z^{-1})\,Y_2(z); \\ Y_2(z) = \Gamma_2(z) - B_{21}(z^{-1})\,Y_1(z) - B_{22}(z^{-1})\,Y_2(z). \end{cases} \tag{10.96}$$

Полагая $\Gamma_2(z) = 0$, решим систему уравнений (10.96) относительно $Y_1(z)$, а затем относительно $Y_2(z)$. Используя определение (3.8) элементов матрицы передаточных функций, находим

$$G_{11}(z) = \frac{Y_1(z)}{\Gamma_1(z)} = \frac{1 + B_{22}(z^{-1})}{1 + B_{11}(z^{-1}) + B_{22}(z^{-1}) + B_{11}(z^{-1})B_{22}(z^{-1}) - B_{12}(z^{-1})B_{21}(z^{-1})}; \tag{10.97}$$

$$G_{21}(z) = \frac{Y_2(z)}{\Gamma_1(z)} = \frac{-B_{21}(z^{-1})}{1 + B_{11}(z^{-1}) + B_{22}(z^{-1}) + B_{11}(z^{-1})B_{22}(z^{-1}) - B_{12}(z^{-1})B_{21}(z^{-1})}. \tag{10.98}$$

Аналогично, полагая $\Gamma_1(z) = 0$, решим систему уравнений (10.96) относительно $Y_1(z)$, а затем относительно $Y_2(z)$. Используя определение (3.8) элементов матрицы передаточных функций, будем иметь

$$G_{12}(z) = \frac{Y_1(z)}{\Gamma_2(z)} = \frac{-B_{12}(z^{-1})}{1 + B_{11}(z^{-1}) + B_{22}(z^{-1}) + B_{11}(z^{-1})B_{22}(z^{-1}) - B_{12}(z^{-1})B_{21}(z^{-1})}; \tag{10.99}$$

$$G_{22}(z) = \frac{Y_2(z)}{\Gamma_2(z)} = \frac{1 + B_{11}(z^{-1})}{1 + B_{11}(z^{-1}) + B_{22}(z^{-1}) + B_{11}(z^{-1})B_{22}(z^{-1}) - B_{12}(z^{-1})B_{21}(z^{-1})}. \tag{10.100}$$

Передаточные функции (4.54) — (4.57), а также (10.97) — (10.100) с учётом условий эквивалентности (4.53) двухкоординатного векторного вещественного ЦФ скалярному комплексному фильтру используются для анализа скалярных комплексных ЦФ.

В качестве примера нахождения матриц передаточных функций схемы Л.Б. Джексона $\mathbf{H}(z)$, $\mathbf{G}_r(z)$ и $\mathbf{F}_r(z)$ $\left(r = \overline{1,\, L}\right)$ рассмотрим двухкаскадный векторный ЦФ, схема которого изображена на рис.10.23. Разметка структурной схемы векторного фильтра точно такая же, как и в случае двухкаскадного скалярного ЦФ (см. рис.10.14).

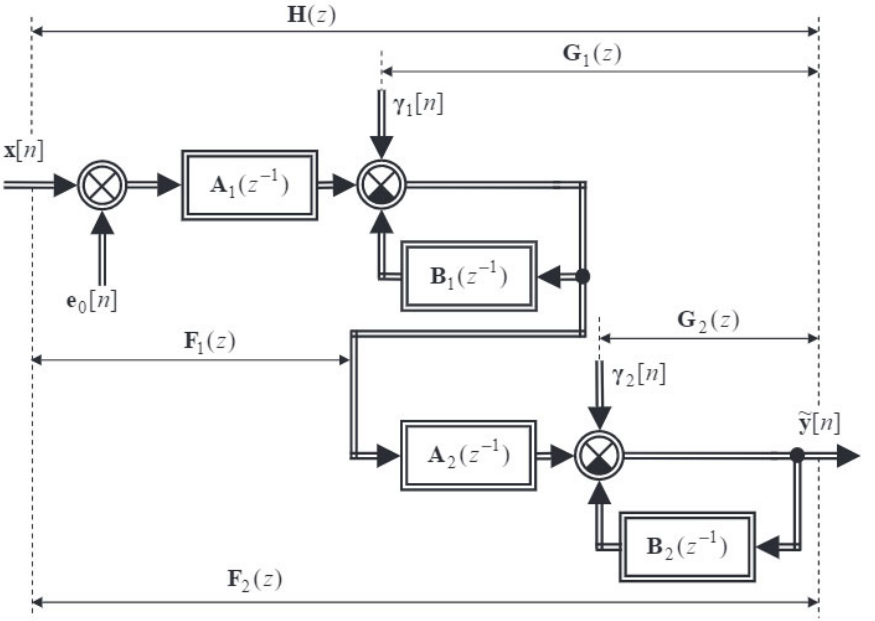


Рис.10.23. Линейная шумовая модель двухкаскадного векторного ЦФ

Матрицы передаточных функций схемы имеют следующий вид •:

$$\mathbf{H}(z)=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_2(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_1(z^{-1}); \qquad (10.101)$$

$$\mathbf{G}_1(z)=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_2(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1}; \qquad (10.102)$$

$$\mathbf{G}_2(z)=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1}; \qquad (10.103)$$

$$\mathbf{F}_1(z)=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_1(z^{-1}); \qquad (10.104)$$

$$\mathbf{F}_2(z)=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_2(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_1(z^{-1}). \qquad (10.105)$$

Аналогичный подход, основанный на применении линейных моделей шумов квантования, можно использовать также при построении шумовых моделей нелинейных устройств, рассмотренных в гл.8. Однако модели эквивалентных шумов квантования результатов арифметических операций $\gamma[n]$ в случае нелинейных устройств являются более сложными, чем модели собственных шумов линейных ЦФ, описываемые формулами (10.29) — (10.33), (10.38) — (10.42).

• Ср. с соответствующими формулами для двухкаскадного скалярного ЦФ (10.47).

Кроме того, анализ шумовых моделей в случае нелинейных устройств существенно сложнее, чем в случае линейных ЦФ, поскольку для них не справедлив принцип суперпозиции. Тем не менее анализ шумовых моделей нелинейных устройств может осуществляться, например, методами математического моделирования.

В сигнальных процессорах (DSP) входные сигналы $x[n]$, результаты умножения отсчётов сигналов на весовые коэффициенты и сложения, а также выходные сигналы $y[n]$ представляются с различной разрядностью, поэтому шаг квантования согласно (10.3) для входного сигнала, для результатов умножения отсчётов сигналов на весовые коэффициенты и для выходного сигнала будет различным.

В табл.10.1 приведены разрядности основных узлов некоторых типов DSP [7], где использованы следующие обозначения: $S_{\text{п}}$ — разрядность ячеек памяти; $S_{\text{умн}}$ — разрядность выходного регистра умножителя; $S_{\text{сум}}$ — разрядность выходного регистра сумматора; $S_{\text{вх}}$ — разрядность отсчётов входного сигнала; $S_{\text{вых}}$ — разрядность отсчётов выходного сигнала.

Таблица 10.1

Процессор	Разрядность				
	$S_{\text{п}}$	$S_{\text{умн}}$	$S_{\text{сум}}$	$S_{\text{вх}}$	$S_{\text{вых}}$
DSP56000	24	48	56	≤24	≤24
DSP56100	16	32	40	≤16	≤16
DSP56300	24	48	56	≤24	≤24

Отсчёты входного сигнала $\tilde{x}[n]$ с разрядностью $S_{\text{вх}}$ поступают на вход DSP либо с АЦП, либо от другой цифровой системы. В процессе реализации алгоритма ЦОС требуется запоминание содержимого аккумулятора (АСС). Операнд, находящийся в АСС, должен быть переписан в память. При этом выполняется квантование кода с разрядностью $S_{\text{сум}}$ до кода с разрядностью $S_{\text{п}}$. Полученные в результате обработки в DSP отсчёты выходного сигнала $\tilde{y}[n]$ с разрядностью $S_{\text{п}}$ подаются на выход DSP с разрядностью $S_{\text{вых}}$. Они могут быть использованы в дальнейшем в цифровом виде для последующей обработки. В другом случае отсчёты $\tilde{y}[n]$ с выхода DSP поступают на цифроаналоговый преобразователь (ЦАП), при этом разрядность выходного кода $S_{\text{вых}}$ может быть меньше, чем $S_{\text{п}}$, тогда выполняется квантование кода с разрядностью $S_{\text{п}}$ до кода с разрядностью $S_{\text{вых}}$ [7]. В последующем изложении мы не будем учитывать эту составляющую выходного шума ЦФ, полагая, что в случае надобности она может быть учтена довольно просто.

Краткие итоги

1. Существуют три основных источника погрешности выходного сигнала в цифровых фильтрах: 1) погрешности характеристик ЦФ, обусловленные квантованием коэффициентов фильтра; 2) шумы аналого-цифрового преобразования входных сигналов (внешние шумы квантования); 3) шумы квантования результатов арифметических операций в вычислителе (внутренние шумы квантования).

2. Операция квантования коэффициентов фильтра является нелинейной по своей природе. Она производится однократно при определении коэффициентов ЦФ, поэтому не влияет на линейность фильтра, а лишь в небольших пределах деформирует (изменяет) его характеристики, в частности частотные.

3. Числа (данные) в цифровых вычислителях могут быть представлены либо в формате с фиксированной точкой, либо в формате с плавающей точкой. Арифметические операции над числами в формате с плавающей точкой намного сложнее операций в формате с фиксированной точкой, поэтому в цифровых фильтрах с аппаратной реализацией чаще используется представление чисел в формате с фиксированной точкой. При этом числа представляют в прямом, в обратном или в дополнительном кодах (в ЦФ чаще применяют дополнительный код). Обратный и дополнительный коды позволяют заменить операцию вычитания операцией сложения с отрицательным числом: $x - y = x + (-y)$.

4. Квантование является нелинейной операцией. Дискретность представления уровней квантованного числа $\tilde{x}[n]$ определяется *шагом квантования* Q. На практике используются два способа квантования: *округление* и *усечение*. Статические характеристики квантователей по методам округления и усечения изображены на рис.10.4,*а* — 10.6,*а*, а плотности распределения ошибок квантования — на рис.10.4,*б* — 10.6,*б*. При использовании формата с фиксированной точкой шаг квантования определяется числом разрядов, представляющих дробную часть чисел [см. (10.3)], а при использовании формата с плавающей точкой — числом разрядов, представляющих порядок чисел [см. (10.5)]. Диапазон представляемых чисел в формате с фиксированной точкой определяется числом разрядов, представляющих как целую, так и дробную часть чисел [см. (10.2)], а в формате с плавающей точкой — числом разрядов, представляющих как порядок чисел, так и мантиссу чисел [см. (10.4)].

5. Собственные (внутренние) шумы квантования ЦФ обусловлены квантованием результатов умножения отсчётов сигналов на весовые коэффициенты фильтра (см. рис.10.8).

6. Для построения шумовых моделей ЦФ, которые учитывают эффекты квантования сигналов, применяют либо нелинейные (рис.10.7,*а*), либо линейные (рис.10.7,*б*) модели шумов квантования. Нелинейные модели квантователей обычно используются при моделировании цифровых устройств на ЭВМ, а линейные — при аналитическом исследовании.

7. Линейные шумовые модели рекурсивного ЦФ при прямой форме реализации приведены на рис.10.9 и 10.10, а при канонической форме реализации — на рис.10.11 и 10.12. Эти модели описываются уравнениями (10.25) и (10.28) при прямой форме реализации ЦФ и уравнениями (10.34) и (10.37) при канонической форме реализации.

8. Для цифровых фильтров сложной структуры Л.Б. Джексоном предложена *обобщённая линейная шумовая модель*, изображённая на рис.10.13. Модель является универсальной и пригодна для анализа шумов квантования любых ЦФ. Эта модель пригодна как для расчёта характеристик шумов квантования на выходе ЦФ, так и для оценки максимальных (по модулю) уровней сигналов в любых точках структурной схемы ЦФ. В обобщённой линейной шумовой модели используются следующие характеристики и процессы: передаточная функция части фильтра от входа r-го многовходового сумматора до выхода ЦФ $G_r(z)$ $\left(r = \overline{1,\ L}\right)$; передаточная функция части фильтра от входа цифрового фильтра до выхода r-го многовходового сумматора $F_r(z)$ $\left(r = \overline{1,\ L}\right)$; приведённый к входу r-го многовходового сумматора шум

квантования результатов арифметических операций $\gamma_r[n]$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$; сигнал на выходе r-го многовходового сумматора $v_r[n]$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$. Названные передаточные функции для одномерных скалярных вещественных стационарных рекурсивных линейных ЦФ при прямой форме реализации (рис.10.10,*б*) описываются формулами (10.43), а при канонической форме реализации (рис.10.12,*б*) — формулами (10.44).

9. Структурные схемы сложных ЦФ состоят из структурных схем звеньев более простой структуры (см. § 4.5). Примеры линейных шумовых моделей ЦФ, состоящих из двух рекурсивных блоков при последовательном и параллельном соединении блоков, а также при соединении с обратной связью, приведены на рис.10.14 — 10.19. Передаточные функции схемы Джексона $H(z)$, $G_r(z)$ и $F_r(z)$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$ для этих линейных шумовых моделей ЦФ описываются формулами (10.47) — (10.55) и (10.57) — (10.65).

10. Укрупнённая структурная схема одномерного линейного стационарного рекурсивного вещественного двухкоординатного векторного ЦФ с учётом шумов квантования изображена на рис.10.20. Она описывается уравнениями (10.67), а также (10.81).

11. При выполнении условий (4.53) вещественный рекурсивный двухкоординатный векторный ЦФ эквивалентен комплексному скалярному цифровому фильтру. При этих условиях все результаты, относящиеся к двухкоординатным векторным ЦФ, распространяются и на шумовые модели одномерных скалярных комплексных стационарных рекурсивных линейных ЦФ.

12. Линейная шумовая модель одномерного R-координатного вещественного векторного стационарного рекурсивного линейного ЦФ простой структуры приведена на рис.10.21. Она описывается векторно-матричными уравнениями в конечных разностях (10.66) и (10.89) либо векторно-матричным алгебраическим уравнением (10.90) для Z-образов. По форме записи эти уравнения похожи на уравнения, описывающие шумовую модель одномерного скалярного рекурсивного линейного ЦФ при прямой форме реализации [ср. уравнения (10.66) и (10.28)]. Различия заключаются в ранге используемых математических объектов. Имеет определённое сходство также и топология укрупнённых линейных шумовых моделей скалярного и векторного ЦФ (ср. рис. 10.10,*б* и 10.21). Модели векторов эквивалентных шумов квантования для схемы, изображённой на рис.10.21, описываются выражениями (10.91) — (10.94).

13. Отмеченное выше формальное сходство укрупнённых линейных шумовых моделей скалярного и векторного ЦФ позволяет обобщить обобщённую линейную шумовую модель Л.Б. Джексона (см. рис.10.13) на векторные ЦФ сложной структуры (см. рис.10.22). Физический смысл матриц передаточных функций $\mathbf{H}(z)$, $\mathbf{G}_r(z)$ и $\mathbf{F}_r(z)$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$ вещественного векторного ЦФ сложной структуры по сути аналогичен физическому смыслу передаточных функций $H(z)$, $G_r(z)$ и $F_r(z)$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$ скалярного вещественного ЦФ сложной структуры. Методика нахождения матриц передаточных функций $\mathbf{H}(z)$, $\mathbf{G}_r(z)$ и $\mathbf{F}_r(z)$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$ векторного ЦФ также аналогична методике нахождения передаточных функций $H(z)$, $G_r(z)$ и $F_r(z)$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$ вещественного скалярного ЦФ сложной структуры (см. § 10.9 и 4.7). Необходимо лишь помнить о некоммутативности операции перемножения матриц, а также о том, что в матричной алгебре отсутствует операция деления матриц.

Глава 11

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ШУМОВ КВАНТОВАНИЯ НА ВЫХОДЕ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

11.1. Методы анализа линейных дискретных систем при детерминированных и случайных воздействиях

При анализе ЦФ решаются следующие основные задачи:

- оценка максимального по модулю значения сигнала в структурной схеме цифрового фильтра (модульная оценка);
- оценки характеристик шумов квантования на выходе ЦФ (статистические и модульные).

По этим оценкам определяется необходимое количество разрядов для представления целой $S_{\text{ц}}$ и дробной $S_{\text{д}}$ частей чисел (см. рис.10.1) в сигнальном процессоре (DSP), на базе которого реализуется ЦФ.

Линейные шумовые модели ЦФ, построенные в гл.10, представляют собой линейные дискретные системы с несколькими входами, для которых справедлив *принцип суперпозиции* (наложения), т.е. принцип независимого действия причин, вызывающих то или иное следствие. Таким образом, проявление каждого воздействия на выходе ЦФ может быть рассчитано независимо от других воздействий, а совокупное их проявление равно *сумме* выходных эффектов от каждого из воздействий. Для анализа линейных шумовых моделей ЦФ можно применить хорошо развитый аппарат теории дискретных линейных систем, базирующийся на принципе суперпозиции.

Существуют два подхода к оценке влияния шумов квантования на погрешность обработки сигналов в цифровых системах: *детерминированный* и *вероятностный*. Детерминированный подход позволяет определить абсолютные границы погрешностей (получить максимальные модульные оценки), а вероятностный подход — статистические оценки (математическое ожидание, дисперсию и др.), что даёт более полную картину явлений, поскольку максимальные значения ошибок имеют малую вероятность.

Для оценки шумов квантования на выходе ЦФ, а также максимальных модульных оценок сигналов в различных точках структурной схемы следует использовать обобщённую линейную шумовую модель ЦФ (схему Л.Б. Джексона, см. рис.10.13). При этом задача сводится к анализу прохождения дискретного процесса $x[n]$ через линейный стационарный дискретный фильтр (рис.11.1), характеристики которого известны. В зависимости от решаемой задачи под процессами $x[n]$ и $y[n]$ на рис.11.1 будем понимать либо полезные сигналы, либо шумы квантования сигналов $e_0[n]$ и $\gamma_r[n]$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$, а под $H(z)$ и $h[n]$ — передаточные функции схемы Л.Б. Джексона $H(z)$, $G_r(z)$, $F_r(z)$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$ и

соответствующие им импульсные характеристики $h[n]$, $g_r[n]$, $f_r[n]$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$ (см. рис.10.13).

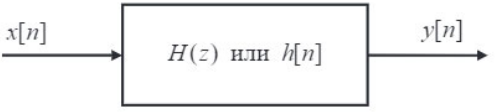


Рис.11.1. Схема для анализа прохождения дискретного процесса $x[n]$ через линейный стационарный дискретный фильтр

При нулевых начальных условиях в фильтре мгновенное значение процесса $y[n]$ описывается выражением (3.1). В установившемся (стационарном) режиме $n\to\infty$, поэтому

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty}h[n-k]\,x[k]=\sum_{k=0}^{\infty}h[k]\,x[n-k]\,. \tag{11.1}$$

◆ Детерминированный подход

Из формулы (11.1) легко получить максимальную модульную оценку • процесса $y[n]$:

$$\max_n\left|y[n]\right|\le\max_n\left|x[n]\right|\sum_{n=0}^{\infty}\left|h[n]\right|. \tag{11.2}$$

Отсюда видно, что для максимальной модульной оценки $y[n]$ требуется вычисление суммы модулей отсчётов импульсной характеристики $h[n]$ ЦФ. Это нетрудно осуществить для нерекурсивного ЦФ, у которого импульсная характеристика имеет конечное число ненулевых отсчётов (см. § 3.6). В случае рекурсивного ЦФ импульсная характеристика $h[n]$ имеет бесконечное число ненулевых отсчётов, поэтому непосредственно просуммировать их модули не удаётся.

Оценку (11.2) для рекурсивного цифрового фильтра можно получить следующим образом.

Рассматривая последовательность $x[n]$ в качестве детерминированной реализации случайного процесса, спектр выходной последовательности $y[n]$ можно найти как произведение спектра входной последовательности на комплексный коэффициент передачи фильтра ••:

$$Y\left(e^{j\omega T}\right)=H\left(e^{j\omega T}\right)X\left(e^{j\omega T}\right). \tag{11.3}$$

• См. сноску на с.68.

•• Этот результат получается применением к формуле (11.1) теоремы о свёртке оригиналов (см. § 1.3) и заменой аргумента z на $e^{j\omega T}$ [см. (3.20)].

Для преобразования Фурье детерминированной последовательности $x[n]$

$$X\left(e^{j\omega T}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega T n} \tag{11.4}$$

введём понятие нормы спектра в пространстве L_p ($p \geq 1$, p – целое) [6, 8, 11]:

$$\left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_p = \left[\frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| X\left(e^{j\omega T}\right)\right|^p d\omega\right]^{1/p}. \tag{11.5}$$

Если интеграл в (11.5) сходится, то норма $\left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_p$ является конечной.

На основе неравенства Гёльдера [9] получим оценку по норме для соотношения (11.3):

$$\left\| Y\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_1 \leq \left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_p \left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_q, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \quad p,\, q \geq 1. \tag{11.6}$$

При целых p и q возможны следующие оценки:

$$\left\| Y\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_1 \leq \left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_1 \left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty; \tag{11.7}$$

$$\left\| Y\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_1 \leq \left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty \left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_1; \tag{11.8}$$

$$\left\| Y\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_1 \leq \left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2 \left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2. \tag{11.9}$$

Выясним смысл норм $\left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_1$, $\left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2$ и $\left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty$, входящих в выражения (11.7) — (11.9).

Представляя детерминированную последовательность $x[n]$ формулой обратного преобразования Фурье (1.83) от её спектра $X\left(e^{j\omega T}\right)$, получим оценку •

$$|x[n]| \leq \frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| X\left(e^{j\omega T}\right)\right| d\omega = \left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_1. \tag{11.10}$$

Таким образом, модуль любого отсчёта последовательности $x[n]$ не превосходит норму её спектра в пространстве L_1. Отсюда получаем максимальную модульную оценку последовательности $x[n]$:

$$\max_n |x[n]| \leq \frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| X\left(e^{j\omega T}\right)\right| d\omega = \left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_1. \tag{11.11}$$

• Здесь использовано известное свойство модуля: $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Из (11.11) следует, что наибольший по модулю отсчёт дискретной последовательности $x[n]$, т.е. $\max\limits_{n}|x[n]|$ не превосходит норму $\left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_1$, по определению (11.5) равную среднему значению модуля спектра этой последовательности.

Для квадрата нормы $\left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2$ по определению (11.5) запишем

$$\left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2 = \frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2 d\omega = \frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T} X\left(e^{j\omega T}\right)X\left(e^{-j\omega T}\right)d\omega. \quad (11.12)$$

Выразив $X\left(e^{-j\omega T}\right)$ через прямое преобразование Фурье (1.82), получим

$$\left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2 = \frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T} X\left(e^{j\omega T}\right)\left\{\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\,e^{j\omega T n}\right\}d\omega =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\left[\frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T} X\left(e^{j\omega T}\right)e^{j\omega T n}\,d\omega\right] = \sum_{n=0}^{\infty} x^2[n]. \quad (11.13)$$

Из формул (11.12) и (11.13) следует, что норма $\left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2$ равна среднеквадратическому значению модуля спектра, а квадрат нормы в пространстве L_2 равен сумме квадратов отсчётов последовательности $x[n]$ (теорема Парсеваля).

Норма $\left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty$ может быть получена предельным переходом в (11.5) при $p \to \infty$:

$$\left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_p = \lim_{p\to\infty}\left[\frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right|^p d\omega\right]^{1/p} =$$

$$= \max_{\omega\in[-\pi/T,\,\pi/T]}\left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right|. \quad (11.14)$$

Для доказательства используем известное равенство $x = e^{\ln(x)}$ и введём обозначение $M_X = \max\limits_{\omega\in[-\pi/T,\,\pi/T]}\left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right|$. В результате будем иметь

$$\lim_{p\to\infty}\left[\frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right|^p d\omega\right]^{1/p} =$$

$$= \exp\left\{\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\ln\left[\frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right|^p d\omega\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{ \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \ln\left[(M_X)^p \, \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| \frac{X\left(e^{j\omega T}\right)}{M_X} \right|^p d\omega \right] \right\} =$$

$$= \exp\left\{ \lim_{p\to\infty} \left[\frac{p \ln(M_X)}{p} + \frac{1}{p} \ln\left(\frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| \frac{X\left(e^{j\omega T}\right)}{M_X} \right|^p d\omega \right) \right] \right\}.$$

Так как в подынтегральном выражении $\left| X\left(e^{j\omega T}\right) \Big/ M_X \right| \le 1$, то интеграл в круглых скобках имеет конечное (не равное нулю) значение, поэтому второе слагаемое в квадратных скобках в пределе при $p \to \infty$ стремится к нулю. Равенство (11.14) для нормы спектра дискретной последовательности $x[n]$ в пространстве L_∞ доказано.

Из формулы (11.4) находим оценку •

$$\left| X\left(e^{j\omega T}\right) \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |x[n]|. \tag{11.15}$$

Отсюда получаем

$$\max_{\omega\in[-\pi/T,\ \pi/T]} \left| X\left(e^{j\omega T}\right) \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |x[n]|. \tag{11.16}$$

Из выражений (11.14) и (11.16) следует, что сумма модулей отсчётов бесконечной (в общем случае комплексной) последовательности $x[n]$ не меньше максимального значения модуля спектра этой последовательности $\left| X\left(e^{j\omega T}\right) \right|$ в частотном диапазоне $\omega \in [-\pi/T,\ \pi/T]$, которое, в свою очередь, равно норме спектра $\left\| X\left(e^{j\omega T}\right) \right\|_\infty$:

$$\max_{\omega\in[-\pi/T,\ \pi/T]} \left| X\left(e^{j\omega T}\right) \right| = \left\| X\left(e^{j\omega T}\right) \right\|_\infty \le \sum_{n=0}^{\infty} |x[n]|. \tag{11.17}$$

В случае вещественной последовательности $x[n]$ модуль её спектра является чётной функцией частоты ω [см. (1.84)], поэтому выражение (11.11) можно представить в виде

$$\max_n |x[n]| \le \left\| X\left(e^{j\omega T}\right) \right\|_1 = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} \left| X\left(e^{j\omega T}\right) \right| d\omega = 2 \int_0^{0,5} \left| X\left(e^{j2\pi W}\right) \right| dW, \tag{11.18}$$

где $W = \omega T/(2\pi) = f/f_д$ — нормированная частота (см. § 3.4).

• См. сноску на с.68.

Аналогично для вещественной последовательности $x[n]$ формулу (11.13) можно записать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^2[n] = \left\| X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2 = \frac{T}{\pi}\int_0^{\pi/T} \left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2 d\omega = 2\int_0^{0,5} \left|X\left(e^{j2\pi W}\right)\right|^2 dW, \tag{11.19}$$

а формулу (11.17) в виде

$$\max_{\omega\in[0,\ \pi/T]} \left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right| = \max_{W\in[0;\ 0,5]} \left|X\left(e^{j2\pi W}\right)\right| = \left\|X\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty \le \sum_{n=0}^{\infty} |x[n]|. \tag{11.20}$$

На основании изложенного модульную оценку (11.2) выходной последовательности $y[n]$ в соответствии с неравенством (11.8) запишем следующим образом:

$$\max_n |y[n]| \le \max_n |x[n]| \ \max_\omega \left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|. \tag{11.21}$$

Здесь $\max\limits_\omega \left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right| = \max\limits_\omega A(\omega T)$ — максимальное значение АЧХ цифрового фильтра [см. (3.18)], где $\omega\in[-\pi/T,\ \pi/T]$ для комплексных и $\omega\in[0,\ \pi/T]$ для вещественных ЦФ.

Аналогично, модульная оценка (11.2) выходной последовательности $y[n]$ на основе неравенства (11.7) принимает вид

$$\max_n |y[n]| \le \max_n |h[n]| \ \max_\omega \left|X\left(e^{j\omega T}\right)\right|. \tag{11.22}$$

Для практического использования оценка в форме (11.21) более удобна, чем оценка в форме (11.22).

◆ Вероятностный подход

При вероятностном подходе часто ограничиваются расчётом математического ожидания m_y и дисперсии D_y выходной величины $y[n]$ линейной системы (см. рис.11.1). При нормальном (гауссовском) распределении эти моменты распределения полностью характеризуют выходной процесс $y[n]$ в установившемся (стационарном) режиме. Для более полной характеристики процесса $y[n]$ требуется определить корреляционную функцию или же спектральную плотность мощности.

При негауссовском распределении входного процесса $x[n]$ математического ожидания и дисперсии (моментов первого и второго порядков) обычно недостаточно для полного описания выходного процесса $y[n]$, поэтому требуются находить также моменты высших порядков. Однако прохождение через

линейную систему процесса $x[n]$ с негауссовским распределением сопровождается нормализацией процесса $y[n]$ на выходе системы, что оправдывает использование для его описания только двух моментов распределения (математического ожидания и дисперсии).

При нулевых начальных условиях в фильтре (рис.11.1) мгновенное значение процесса $y[n]$ в установившемся (стационарном) режиме описывается формулой (3.1) с бесконечным верхним пределом суммы. Усредняя обе части этого равенства по ансамблю реализаций, получим выражение для математического ожидания m_y процесса $y[n]$:

$$m_y = m_x \sum_{n=0}^{\infty} h[n]. \tag{11.23}$$

Сумму отсчётов импульсной характеристики ЦФ в (11.23) можно найти, используя формулу связи (3.4) передаточной функции $H(z)$ с импульсной характеристикой $h[n]$ или формулу связи (3.21) комплексной частотной характеристики $H\left(e^{j\omega T}\right)$ с импульсной характеристикой $h[n]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h[n] = H(z)\big|_{z=1} = H\left(e^{j\omega T}\right)\Big|_{\omega=0} = A(\omega T)\big|_{\omega=0}. \tag{11.24}$$

Таким образом, связь между математическими ожиданиями процессов на входе и выходе ЦФ определяется выражением

$$m_y = m_x \left| H\left(e^{j\omega T}\right)\right|_{\omega=0}. \tag{11.25}$$

Найдём корреляционную функцию и дисперсию процесса на выходе ЦФ.

Введём в рассмотрение центрированные процессы, т.е. процессы с нулевыми математическими ожиданиями:

$$\mathring{x}[n] = x[n] - m_x; \quad \mathring{y}[n] = y[n] - m_y, \tag{11.26}$$

и в соответствии с (3.1) запишем выражения для выходного центрированного процесса в два различных момента «дискретного времени»:

$$\mathring{y}[n_1] = \sum_{k=0}^{n_1} h[k]\,\mathring{x}[n_1 - k]; \quad \mathring{y}[n_2] = \sum_{i=0}^{n_2} h[i]\,\mathring{x}[n_2 - i]. \tag{11.27}$$

Перемножим равенства (11.27):

$$\mathring{y}[n_1]\,\mathring{y}[n_2] = \sum_{k=0}^{n_1}\sum_{i=0}^{n_2} h[k]\,h[i]\,\mathring{x}[n_1 - k]\,\mathring{x}[n_2 - i], \tag{11.28}$$

после чего усредним обе части (11.28) по ансамблю реализаций. В результате получим формулу, связывающую корреляционные функции процессов на входе и на выходе линейного дискретного фильтра:

$$K_y[n_1, n_2] = \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{i=0}^{n_2} h[k]\, h[i]\, K_x[n_1 - k, n_2 - i], \qquad (11.29)$$

где

$$K_x[n_1, n_2] = M\{\mathring{x}[n_1]\, \mathring{x}[n_2]\}; \quad K_y[n_1, n_2] = M\{\mathring{y}[n_1]\, \mathring{y}[n_2]\}; \qquad (11.30)$$

$M\{...\}$ — символ статистического усреднения (математического ожидания).

Если входной процесс $x[n]$ стационарный (таковым является, например, шум квантования), то его корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов:

$$K_x[n_1, n_2] = K_x[n_2 - n_1] = K_x[m]. \qquad (11.31)$$

Тогда выражение для корреляционной функции выходного процесса примет вид

$$K_y[n_1, n_1 + m] = \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{i=0}^{n_1+m} h[k]\, h[i]\, K_x[m + k - i]. \qquad (11.32)$$

Формула (11.32) описывает корреляционную функцию выходного процесса в переходном режиме, поэтому несмотря на стационарность входного процесса $x[n]$ выходной процесс $y[n]$ будет нестационарным и его корреляционная функция зависит от двух аргументов.

При $n_1 \to \infty$ из (11.32) получим установившееся (стационарное) значение корреляционной функции выходного процесса

$$K_y[m] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} h[k]\, h[i]\, K_x[m + k - i]. \qquad (11.33)$$

С учётом того, что дисперсия стационарного случайного процесса равна его корреляционной функции при нулевом значении аргумента, т.е. $D_y = K_y[0]$, из выражения (11.33) получим

$$D_y = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} h[k]\, h[i]\, K_x[k - i]. \qquad (11.34)$$

Если случайный входной процесс $x[n]$ представляет собой дискретный белый шум (а именно таковым является шум квантования, см. § 10.4 и 10.5), его корреляционная функция равна [6]

$$K_x[m] = D_x \delta[m], \qquad (11.35)$$

где $\delta[m]$ — единичный импульс [см. (1.4)].

Подставляя (11.35) в выражение (11.34), с учётом фильтрующего свойства единичного импульса будем иметь

$$D_y = D_x \sum_{n=0}^{\infty} h^2[n]. \qquad (11.36)$$

Формула (11.36) является основой для получения оценок мощности шумов квантования на выходе ЦФ. Входящая в неё сумма квадратов отсчётов импульсной характеристики фильтра может быть получена интегрированием передаточной функции $H(z)$.

Действительно, используя выражения (1.21) и (1.15), можно записать

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^2[n] = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_C H(z)\, z^{n-1}\, dz \right] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C H(z) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} h[n]\, z^n \right\} z^{-1}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_C H(z) H(z^{-1})\, z^{-1}\, dz. \qquad (11.37)$$

Здесь C — замкнутый контур в Z-плоскости, охватывающий все полюсы функции $H(z)\, z^{-1}$, но не охватывающий полюсы функции $H(z^{-1})$. Таким контуром может быть, например, окружность единичного радиуса. Равенство (11.37) представляет собой дискретный вариант формулы Релея.

Подставляя в (11.37) $z = e^{j\omega T}$, получим другую формулу для вычисления суммы квадратов отсчётов импульсной характеристики ЦФ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^2[n] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| H\left(e^{j\omega T}\right) \right|^2 d\omega = \int_{-0,5}^{0,5} \left| H\left(e^{j2\pi W}\right) \right|^2 dW = \left\| H\left(e^{j\omega T}\right) \right\|_2^2 \qquad (11.38)$$

[теорема Парсеваля, ср. с (11.13) и (11.19)].

Расчёт дисперсии ошибки квантования на выходе линейного цифрового фильтра (см. рис.11.1) в установившемся режиме можно осуществить на основе другого подхода, исходя из спектральных представлений.

Спектральная плотность мощности $S(z)$ дискретного стационарного случайного процесса определяется как двустороннее Z-преобразование от корреляционной функции:

$$S(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K[m]\, z^{-m} = F(z) + F(z^{-1}) - K[0], \qquad (11.39)$$

где $F(z) = Z\{K[m]\}$ — обычное, т.е. одностороннее Z-преобразование от корреляционной функции $K[m]$, определяемое в соответствии с формулой (1.15).

Подставляя выражение (11.33) в (11.39), получим

$$S_y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_y[m]\, z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} h[k]\, h[i]\, K_x[m+k-i]\, z^{-m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \sum_{i=0}^{\infty} h[i] \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_x[m+k-i]\, z^{-m}. \qquad (11.40)$$

Произведём в (11.40) замену индекса суммирования $m_1 = m + k - i$. Тогда с учётом выражений (3.4) и (11.39) будем иметь

$$S_y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} h[i]\, z^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, z^{k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_x[m_1]\, z^{-m_1} =$$

$$= H(z)\, H(z^{-1})\, S_x(z). \qquad (11.41)$$

Подстановкой $z = e^{j\omega T}$ в формулу (11.41) получим

$$S_y\left(e^{j\omega T}\right) = \left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2 S_x\left(e^{j\omega T}\right). \qquad (11.42)$$

Корреляционная функция является вещественной чётной функцией временного сдвига, т.е. $K[-m] = K[m]$, поэтому согласно (11.39) имеем

$$S\left(e^{j\omega T}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K[m]\, e^{-j\omega T m} = \sum_{m=1}^{\infty} K[m]\left(e^{j\omega T m} + e^{-j\omega T m}\right) + K[0] =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{\infty} K[m]\cos(\omega T m) + K[0]. \qquad (11.43)$$

Отсюда видно, что спектральная плотность мощности $S\left(e^{j\omega T}\right)$ также является вещественной чётной функцией частоты ω.

Дисперсия D дискретного стационарного случайного процесса может быть найдена интегрированием его спектральной плотности мощности:

$$D = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} S\left(e^{j\omega T}\right) d\omega. \qquad (11.44)$$

Из выражения (11.44) следует, что спектральная плотность мощности дискретного белого шума равна его дисперсии •, т.е. $S\left(e^{j\omega T}\right) = S_0 = D$. С учётом этого обстоятельства подстановкой выражения (11.42) в (11.44) будем иметь

$$D_y = D_x\left[\frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T}\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2 d\omega\right] = D_x\left\|H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2. \qquad (11.45)$$

Полученный результат совпадает с формулой (11.36), где сумма квадратов отсчётов импульсной характеристики фильтра вычисляется по формуле Парсеваля (11.38).

• Действительно, полагая $S\left(e^{j\omega T}\right) = S_0$ при $\omega \in [-\pi/T, \pi/T]$, по формуле (11.44) получаем $D = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} S_0\, d\omega = S_0$.

Для получения модульной оценки $\max\limits_{n}\left|y[n]\right|$ процесса на выходе рекурсивного фильтра (см. рис.11.1), а также для нахождения математического ожидания m_y и дисперсии D_y этого процесса требуется вычисление следующих бесконечных сумм, составленных из отсчётов импульсной характеристики $h[n]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|h[n]\right|;\quad \sum_{n=0}^{\infty}h[n];\quad \sum_{n=0}^{\infty}h^2[n].$$

Эти суммы могут быть получены с использованием амплитудно-частотной характеристики ЦФ $A(\omega T)$, определяемой теоретически или экспериментально. Первая сумма равна максимальному значению АЧХ на интервале, равном частоте дискретизации $\omega_д$ [см. (11.16)], вторая — значению АЧХ на нулевой частоте [см. (11.24)], а третья — среднему квадрату АЧХ на интервале, равном частоте дискретизации $\omega_д$ [см. (11.38)].

11.2. Оценка максимального уровня сигналов в скалярном вещественном цифровом фильтре

При проектировании ЦФ необходимо знать максимальные уровни сигналов в различных точках структурной схемы. Это позволяет выбрать разрядность операционных устройств фильтра таким образом, чтобы избежать переполнения разрядной сетки процессора, что является важным в случае представления данных в формате с фиксированной точкой (см. § 10.2).

Для ЦФ сложной структуры оценку максимальных уровней сигналов на выходах многовходовых сумматоров можно осуществить, используя обобщённую линейную шумовую модель (схему Л.Б. Джексона — см. рис.10.13).

Обозначим

$$X=\max_{n}\left|x[n]\right|;\quad Y=\max_{n}\left|y[n]\right| \tag{11.46}$$

— максимальные модульные значения сигналов соответственно на входе $x[n]$ и выходе $y[n]$ ЦФ;

$$V_r=\max_{n}\left|v_r[n]\right|,\quad r=\overline{1,\,L} \tag{11.47}$$

— максимальное модульное значение сигнала $v_r[n]$ на выходе r-го многовходового сумматора $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$.

Во многих случаях выход ЦФ сложной структуры совпадает с выходом одного из многовходовых сумматоров, например при каскадном соединении блоков или при соединении с обратной связью (см. § 10.9). Вход сложного ЦФ в некоторых случаях одновременно является входом одного или нескольких многовходовых сумматоров, например при канонической форме реализации входного блока фильтра (см. рис.10.12 и 10.17).

В соответствии с выражениями (11.2), (11.20) и (11.21) получим модульные оценки сигналов в ЦФ:

$$\begin{cases} Y \le X \left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_{\infty} = X \max\limits_{\omega} \left| H\left(e^{j\omega T}\right)\right| \le X \sum\limits_{n=0}^{\infty} |h[n]|; \\ V_r \le X \left\| F_r\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_{\infty} = X \max\limits_{\omega} \left| F_r\left(e^{j\omega T}\right)\right| \le X \sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_r[n]|, \quad r = \overline{1,\ L}, \end{cases} \tag{11.48}$$

где $F_r(z)$ $\left(r = \overline{1,\ L}\right)$ — передаточная функция части ЦФ от входа до выхода r-го многовходового сумматора; $H(z)$ — передаточная функция всего ЦФ от входа до выхода (см. рис.10.13).

Произведём модульную оценку сигналов на выходах умножителей на весовые коэффициенты (см. рис.10.10 и 10.12). Пусть

$$v_{\mathrm{B}rk}[n] = b_{rk}\, v_r[n], \quad r = \overline{1,\ L}, \quad k = \overline{1,\ N_r} \tag{11.49}$$

— сигнал на выходе k-го умножителя, подключённого к r-му многовходовому сумматору, т.е. умножителя на весовой коэффициент b_{rk} (умножителя, стоящего в цепи обратной связи), а $v_r[n]$ — сигнал на выходе r-го многовходового сумматора;

$$v_{\mathrm{A}rm}[n] = a_{rm} v_{\underline{r}}[n], \quad r = \overline{1,\ L}, \quad m = \overline{0,\ M_r} \tag{11.50}$$

— сигнал на выходе m-го умножителя, подключённого к r-му многовходовому сумматору, т.е. умножителя на весовой коэффициент a_{rm} (умножителя, стоящего в цепи прямой передачи сигнала), а $v_{\underline{r}}[n]$ — сигнал на выходе $\underline{r}$-го многовходового сумматора, т.е. сумматора, выход которого подключён к r-му блоку ЦФ (сигналом $v_{\underline{r}}[n]$ в частном случае может быть входной сигнал $x[n]$).

Из выражений (11.49) и (11.50) найдём модульные оценки уровней сигналов на выходах умножителей на весовые коэффициенты:

$$V_{\mathrm{B}rk} = \max_{n} \left| v_{\mathrm{B}rk}[n]\right| = \max_{n} \left| v_r[n]\right| \cdot \left| b_{rk}\right| = V_r \left| b_{rk}\right|, \quad r = \overline{1,\ L}, \quad k = \overline{1,\ N_r}; \tag{11.51}$$

$$V_{\mathrm{A}rm} = \max_{n} \left| v_{\mathrm{A}rm}[n]\right| = \max_{n} \left| v_{\underline{r}}[n]\right| \cdot \left| a_{rm}\right| = V_{\underline{r}} \left| a_{rm}\right|, \quad r = \overline{1,\ L}, \quad m = \overline{0,\ M_r}. \tag{11.52}$$

Максимальный уровень сигнала в ЦФ $V = \max\limits_{n} \left| v[n]\right|$ можно получить из оценок (11.46) — (11.48), (11.51) и (11.52):

$$V \le \max_{r,\ k,\ m} \left\{ X,\ Y,\ V_r,\ V_{\mathrm{B}rk},\ V_{\mathrm{A}rm} \right\}, \quad r = \overline{1,\ L}, \quad k = \overline{1,\ N_r}, \quad m = \overline{0,\ M_r}. \tag{11.53}$$

Эта оценка используется для определения необходимой разрядности операционных устройств • сигнального процессора (DSP), на котором реализуют цифровой фильтр.

Пример 11.1. Для скалярного вещественного рекурсивного ЦФ с передаточной функцией

$$H(z)=\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}},$$

коэффициенты которой $a_0=0{,}5$, $a_1=-2{,}6$, $a_2=-2{,}3$, $b_1=-1{,}2$, $b_2=0{,}56$, требуется найти максимальную модульную оценку сигналов в структуре фильра. На входе ЦФ действует сигнал, максимальное значение которого $X=\max\limits_n|x[n]|=1$.

Прямая форма реализации. Расчётная шумовая модель ЦФ имеет вид, показанный на рис.10.10,*б*, где $A(z^{-1})=a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}$; $B(z^{-1})=1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}$. Передаточные функции, используемые в обобщённой линейной шумовой модели ЦФ (см. рис.10.13), согласно (10.43) равны

$$F_1(z)=H(z)=\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}.$$

По формуле (3.32) находим соответствующие им амплитудно-частотные характеристики:

$$\left|F_1\left(e^{j\omega T}\right)\right|=\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|=\left|\frac{a_0+a_1e^{-j\omega T}+a_2e^{-j2\omega T}}{1+b_1e^{-j\omega T}+b_2e^{-j2\omega T}}\right|=$$

$$=\sqrt{\frac{[a_0+a_1\cos(\omega T)+a_2\cos(2\omega T)]^2+[a_1\sin(\omega T)+a_2\sin(2\omega T)]^2}{[1+b_1\cos(\omega T)+b_2\cos(2\omega T)]^2+[b_1\sin(\omega T)+b_2\sin(2\omega T)]^2}}.$$

Эти характеристики рассчитаны с помощью системы компьютерной математики Mathcad и представлены на рис.11.2.

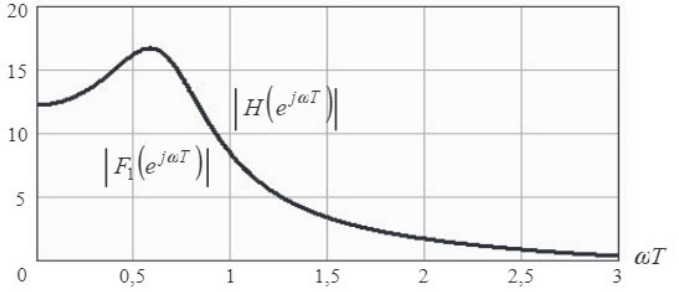


Рис.11.2. Амплитудно-частотные характеристики обобщённой линейной шумовой модели скалярного вещественного рекурсивного ЦФ второго порядка с коэффициентами $a_0=0{,}5$, $a_1=-2{,}6$, $a_2=-2{,}3$, $b_1=-1{,}2$, $b_2=0{,}56$

• Для представления целой части чисел $S_{\text{ц}}$, см. рис.10.1.

Нормы комплексных частотных характеристик $F_1\left(e^{j\omega T}\right)$ и $H\left(e^{j\omega T}\right)$ в пространстве L_∞ определим согласно выражению (11.14) с помощью рассчитанных АЧХ (см. рис.11.2):

$$\left\| F_1\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty = \left\| H\left(e^{j\omega I}\right)\right\|_\infty =$$

$$= \max_{\omega\in[-\pi/T,\ \pi/T]}\left|F_1\left(e^{j\omega T}\right)\right| = \max_{\omega\in[-\pi/T,\ \pi/T]}\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right| = 16{,}669\,.$$

По формулам (11.48) найдём максимальные модульные оценки Y и V_1 (здесь выход многовходового сумматора одновременно является и выходом ЦФ):

$$Y = \max_n\left|y[n]\right| = V_1 = \max_n\left|v_1[n]\right| \le X \max_{\omega\in[-\pi/T,\ \pi/T]}\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right| = 1\cdot 16{,}669 = 16{,}669\,.$$

По формулам (11.51) получим модульные оценки сигналов на выходах умножителей на весовые коэффициенты в цепи обратной связи:

$$V_{B_1} = V_1\left|b_1\right| = 16{,}669\cdot 1{,}2 = 20{,}0028\,; \qquad V_{B_2} = V_1\left|b_2\right| = 16{,}669\cdot 0{,}56 = 9{,}33464\,,$$

а по формулам (11.52) — модульные оценки сигналов на выходах умножителей на весовые коэффициенты в цепи прямой передачи сигнала:

$$V_{A_0} = X\left|a_0\right| = 1\cdot 0{,}5 = 0{,}5\,; \quad V_{A_1} = X\left|a_1\right| = 1\cdot 2{,}6 = 2{,}6\,; \quad V_{A_2} = X\left|a_2\right| = 1\cdot 2{,}3 = 2{,}3\,.$$

Воспользовавшись выражением (11.53), получаем максимальную модульную оценку сигналов в фильтре:

$$V \le \max\{X,\ Y,\ V_1,\ V_{B_1},\ V_{B_2},\ V_{A_0},\ V_{A_1},\ V_{A_2}\} =$$

$$= \max\{1;\ 16{,}669;\ 16{,}669;\ 20{,}0028;\ 9{,}33464;\ 0{,}5;\ 2{,}6;\ 2{,}3\} = 20{,}0028\,.$$

Максимальное значение модуля сигнала в ЦФ имеет место на выходе умножителя на весовой коэффициент b_1.

Каноническая форма реализации. Расчётная шумовая модель ЦФ имеет вид, показанный на рис.10.12,*б*, где $A(z^{-1}) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$; $B(z^{-1}) = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$. Используемые в обобщённой линейной шумовой модели ЦФ (см. рис.10.13) передаточные функции согласно (10.44) и равны

$$F_1(z) = F_{(N)}(z) = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}; \qquad F_2(z) = F_{(M)}(z) = H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}\,.$$

Амплитудно-частотные характеристики, соответствующие передаточным функциям $F_2(z) = H(z)$, получены выше при анализе ЦФ при прямой форме реализации (соответствующий график приведён на рис.11.2). Там же найдены нормы комплексных частотных характеристик в пространстве L_∞:

$$\left\| F_2\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty = \left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty = 16{,}669\,.$$

По формуле (3.32) находим амплитудно-частотную характеристику, соответствующую передаточной функции $F_1(z)$:

$$\left|F_1\left(e^{j\omega T}\right)\right| = \frac{1}{\left|1 + b_1 e^{-j\omega T} + b_2 e^{-j2\omega T}\right|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left[1 + b_1\cos(\omega T) + b_2\cos(2\omega T)\right]^2 + \left[b_1\sin(\omega T) + b_2\sin(2\omega T)\right]^2}}\,.$$

АЧХ $\left|F_1\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ рассчитана с помощью системы компьютерной математики Mathcad и представлена на рис.11.3.

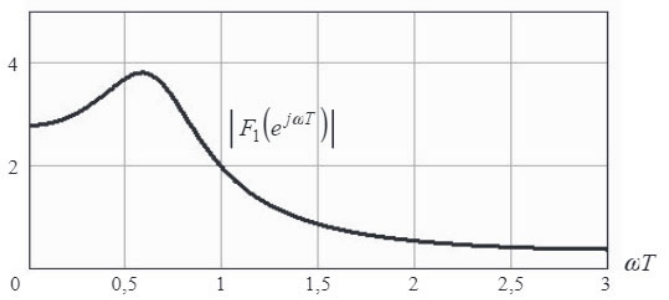


Рис.11.3. АЧХ $\left|F_1\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ обобщённой линейной шумовой модели скалярного вещественного рекурсивного ЦФ второго порядка с коэффициентами $a_0 = 0{,}5$, $a_1 = -2{,}6$, $a_2 = -2{,}3$, $b_1 = -1{,}2$, $b_2 = 0{,}56$

Норму комплексной частотной характеристики $F_1\left(e^{j\omega T}\right)$ в пространстве L_∞ определим согласно выражению (11.14) с помощью рассчитанных АЧХ (см. рис.11.3):

$$\left\| F_1\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty = \max_{\omega\in[-\pi/T,\ \pi/T]}\left|F_1\left(e^{j\omega T}\right)\right| = 3{,}803.$$

По формулам (11.48) найдём максимальные модульные оценки $Y = V_2$ и V_1 (здесь выход второго многовходового сумматора одновременно является и выходом ЦФ):

$$Y = \max_n|y[n]| = V_2 = \max_n|v_2[n]| \le X \max_{\omega\in[-\pi/T,\ \pi/T]}\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right| = 1\cdot 16{,}669 = 16{,}669;$$

$$V_1 = \max_n|v_1[n]| \le X \max_{\omega\in[-\pi/T,\ \pi/T]}\left|F_1\left(e^{j\omega T}\right)\right| = 1\cdot 3{,}803 = 3{,}803.$$

По формулам (11.51) получим модульные оценки сигналов на выходах умножителей на весовые коэффициенты в цепи обратной связи:

$$V_{B_1} = V_1|b_1| = 3{,}803\cdot 1{,}2 = 4{,}5636; \qquad V_{B_2} = V_1|b_2| = 3{,}803\cdot 0{,}56 = 2{,}12968,$$

а по формулам (11.52) — модульные оценки сигналов на выходах умножителей на весовые коэффициенты в цепи прямой передачи сигнала:

$$V_{A_0} = V_1|a_0| = 3{,}308\cdot 0{,}5 = 1{,}654; \qquad V_{A_1} = V_1|a_1| = 3{,}308\cdot 2{,}6 = 8{,}6008;$$

$$V_{A_2} = V_1|a_2| = 3{,}308\cdot 2{,}3 = 7{,}6084.$$

Воспользовавшись выражением (11.53), получаем максимальную модульную оценку сигналов в фильтре:

$$V \le \max\{X,\ Y,\ V_1,\ V_2,\ V_{B_1},\ V_{B_2},\ V_{A_0},\ V_{A_1},\ V_{A_2}\} =$$

$$= \max\{1;\ 16{,}669;\ 3{,}308;\ 16{,}669;\ 4{,}5636;\ 2{,}12968;\ 1{,}654;\ 8{,}6008;\ 7{,}6084\} = 16{,}669.$$

Здесь максимальное значение модуля сигнала имеет место на выходе ЦФ.

Пример 11.2. Для скалярного вещественного нерекурсивного ЦФ, передаточная функция которого имеет вид

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}$$

требуется найти максимальный уровень сигнала. На входе ЦФ действует сигнал, максимальное значение которого $X=\max\limits_{n}\left|x[n]\right|=1$.

Расчётная шумовая модель ЦФ имеет вид, показанный на рис.10.10,*б*, где

$$A(z^{-1})=\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}; \qquad B(z^{-1})=0.$$

Используемые в схеме Л.Б. Джексона (см. рис.10.13) передаточные функции согласно выражениям (10.43) и (10.45) равны

$$F_1(z)=H(z)=\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}.$$

В случае нерекурсивных ЦФ для максимальных модульных оценок сигналов в структуре фильтра удобнее пользоваться не нормами комплексных частотных характеристик в пространстве L_∞, а суммами модулей отсчётов импульсных характеристик [см. (11.17)]. С учётом выражения (3.45) запишем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|f_1[n]\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|h[n]\right|=\sum_{k=0}^{M}\left|a_k\right|.$$

По формуле (11.48) найдём максимальную модульную оценку сигнала на выходе ЦФ:

$$Y=\max_{n}\left|y[n]\right|\le X\sum_{k=0}^{M}\left|a_k\right|=\sum_{k=0}^{M}\left|a_k\right|,$$

а по формулам (11.52) — максимальные модульные оценки сигналов на выходах умножителей на весовые коэффициенты в цепи прямой передачи сигнала:

$$V_{\mathrm{A}_m}=X\left|a_m\right|=\left|a_m\right|, \quad m=\overline{0,\,M}.$$

Воспользовавшись (11.53), получим максимальную модульную оценку сигналов в фильтре:

$$V\le\max_{m}\left\{X, Y, V_{\mathrm{A}_m}\right\}=\max_{m}\left\{1,\ \sum_{k=0}^{M}\left|a_k\right|,\ \left|a_m\right|,\ \left(m=\overline{0,\,M}\right)\right\}=\sum_{k=0}^{M}\left|a_k\right|.$$

Здесь максимальное значение модуля сигнала имеет место на выходе ЦФ.

11.3. Детерминированные оценки шумов квантования на выходе скалярного вещественного цифрового фильтра

Используя обобщённую линейную шумовую модель ЦФ (см. § 10.8), модели шумов квантования (см. § 10.4 — 10.7) и методику анализа ЦФ, изложенную в § 11.1, найдём детерминированную (максимальную модульную) оценку шумов квантования на выходе цифрового фильтра. Будем полагать заданными структуру и характеристики фильтра, а также максимальные модульные значения шумов квантования на входе ЦФ (шум аналого-цифрового преобразования)

и на выходах умножителей (шумы квантования результатов арифметических операций).

Пусть

$$E_0 = \max_n \left| e_0[n] \right| \tag{11.54}$$

— максимальное по модулю значение ошибки квантования входного сигнала;

$$E_{rk} = \max_n \left| e_{rk}[n] \right|, \quad r = \overline{1,\ L}, \quad k = \overline{1,\ M_r + N_r + 1} \tag{11.55}$$

— максимальное по модулю значение ошибки квантования сигнала на выходе k-го умножителя, подключённого к r-му многовходовому сумматору. Здесь $M_r + N_r + 1 \left(r = \overline{1,\ L} \right)$ — количество умножителей, подключённых к r-му многовходовому сумматору при прямой форме реализации блоков сложного ЦФ • (см. рис.10.9); L — число многовходовых сумматоров в обобщённой линейной шумовой модели ЦФ (см. рис.10.13).

Максимальная модульная оценка значений эквивалентного шума квантования на входе r-го многовходового сумматора (см. рис.10.10, 10.12 и 10.13) может быть получена в соответствии с формулами (10.31) или (10.40):

$$\Gamma_r = \max_n \left| \gamma_r[n] \right| \le \sum_{k=0}^{M_r + N_r + 1} E_{rk}, \quad r = \overline{1,\ L}. \tag{11.56}$$

Если разрядность всех умножителей одинакова, то ошибки квантования на их выходах будут одинаковыми E_r. Тогда выражение (11.56) примет вид

$$\Gamma_r \le (M_r + N_r + 1) E_r, \quad r = \overline{1,\ L}. \tag{11.57}$$

Максимальная модульная оценка составляющей ошибки фильтрации на выходе ЦФ, обусловленной квантованием входного сигнала в АЦП $e_{y_{\text{вх}}}[n]$, согласно (11.2) и (11.21) определяется выражением

$$E_{y_{\text{вх}}} = \max_n \left| e_{y_{\text{вх}}}[n] \right| \le \max_n \left| e_0[n] \right| \max_{\omega} \left| H\left(e^{j\omega T} \right) \right| =$$

$$= E_0 \left\| H\left(e^{j\omega T} \right) \right\|_\infty \le E_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left| h[n] \right|. \tag{11.58}$$

Аналогично получается также максимальная модульная оценка составляющей выходной ошибки фильтрации $e_{y_r}[n] \left(r = \overline{1,\ L} \right)$, обусловленной эквива-

---

• При прямой форме реализации к r-му многовходовому сумматору подключено $M_r + N_r + 1 \left(r = \overline{1,\ L} \right)$ умножителей на весовые коэффициенты (см. рис.10.9), а при канонической форме к верхнему многовходовому сумматору подключено N_r, а к нижнему $M_r + 1 \left(r = \overline{1,\ L} \right)$ умножителей (см. рис.10.11).

лентным шумом квантования на входе r-го многовходового сумматора (см. рис.10.13):

$$E_{y_r} = \max_n \left| e_{y_r}[n] \right| \le \max_n \left| \gamma_r[n] \right| \max_{\omega} \left| G_r\left(e^{j\omega T} \right) \right| =$$

$$= \Gamma_r \left\| G_r\left(e^{j\omega T} \right) \right\|_\infty \le \Gamma_r \sum_{n=0}^{\infty} \left| g_r[n] \right|, \quad r = \overline{1, L}. \tag{11.59}$$

Суммируя E_{y_r} по всем многовходовым сумматорам (по всем $r = \overline{1, L}$), получим максимальную модульную оценку собственных (внутренних) шумов квантования на выходе ЦФ:

$$E_{y_{\text{соб}}} = \max_n \left| e_{y_{\text{соб}}}[n] \right| \le \sum_{r=1}^{L} E_{y_r} \le \sum_{r=1}^{L} \max_n \left| \gamma_r[n] \right| \max_{\omega} \left| G_r\left(e^{j\omega T} \right) \right| =$$

$$= \sum_{r=1}^{L} \Gamma_r \left\| G_r\left(e^{j\omega T} \right) \right\|_\infty \le \sum_{r=1}^{L} \Gamma_r \sum_{n=0}^{\infty} \left| g_r[n] \right|. \tag{11.60}$$

Объединяя (11.58) и (11.60), найдём максимальную модульную оценку шумов квантования на выходе ЦФ:

$$E_y = \max_n \left| e_y[n] \right| \le E_{y_{\text{вх}}} + E_{y_{\text{соб}}} \le$$

$$\le \max_n \left| e_0[n] \right| \max_{\omega} \left| H\left(e^{j\omega T} \right) \right| + \sum_{r=1}^{L} \max_n \left| \gamma_r[n] \right| \max_{\omega} \left| G_r\left(e^{j\omega T} \right) \right| =$$

$$= E_0 \left\| H\left(e^{j\omega T} \right) \right\|_\infty + \sum_{r=1}^{L} \Gamma_r \left\| G_r\left(e^{j\omega T} \right) \right\|_\infty \le E_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left| h[n] \right| + \sum_{r=1}^{L} \Gamma_r \sum_{n=0}^{\infty} \left| g_r[n] \right|. \tag{11.61}$$

В формулах (11.58) — (11.61) приведены три формы выражений для мАксимальных модульных оценок шумов квантования ЦФ: через амплитудно-частотные характеристики $\left| H\left(e^{j\omega T} \right) \right|$, $\left| G_r\left(e^{j\omega T} \right) \right|$, через нормы комлексных частотных характеристик в пространстве L_∞ $\left\| H\left(e^{j\omega T} \right) \right\|_\infty$, $\left\| G_r\left(e^{j\omega T} \right) \right\|_\infty$ и через импульсные характеристики $h[n]$, $g_r[n]$ $\left(r = \overline{1, L} \right)$. Первые две формы удобны для рекурсивных, а третья — для нерекурсивных ЦФ.

Максимальная модульная оценка выходной ошибки шумов квантования ЦФ (11.61) даёт абсолютные границы погрешностей обработки сигналов. Такие значения ошибки $e_y[n]$ имеют малую вероятность, поэтому оценка (11.61) является слишком «осторожной» и используется лишь в тех случаях, когда недопустимы даже единичные ошибки большого уровня. На практике чаще пользуются вероятностными оценками шумов квантования ЦФ (см. § 11.4).

Пример 11.3. Для скалярного вещественного рекурсивного ЦФ с передаточной функцией (см.пример 11.1)

$$H(z)=\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}},$$

коэффициенты которой $a_0=0{,}5$, $a_1=-2{,}6$, $a_2=-2{,}3$, $b_1=-1{,}2$, $b_2=0{,}56$, требуется найти максимальную модульную оценку ошибки квантования на выходе фильтра. Квантование сигналов в АЦП и в операционных устройствах ЦФ осуществляется по методу усечения с представлением чисел в дополнительном коде при разрядности дробной части $S_д$.

Прямая форма реализации. Расчётная шумовая модель ЦФ имеет вид, показанный на рис.10.10,*б*, где $A(z^{-1})=a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}$; $B(z^{-1})=1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}$. Передаточные функции, используемые в обобщённой линейной шумовой модели ЦФ (см. рис.10.13), согласно выражениям (10.43) равны

$$H(z)=\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}};\qquad G_1(z)=\frac{1}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}.$$

По формуле (3.32) находим соответствующие им амплитудно-частотные характеристики:

$$\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|=\left|\frac{a_0+a_1e^{-j\omega T}+a_2e^{-j2\omega T}}{1+b_1e^{-j\omega T}+b_2e^{-j2\omega T}}\right|=$$

$$=\sqrt{\frac{[a_0+a_1\cos(\omega T)+a_2\cos(2\omega T)]^2+[a_1\sin(\omega T)+a_2\sin(2\omega T)]^2}{[1+b_1\cos(\omega T)+b_2\cos(2\omega T)]^2+[b_1\sin(\omega T)+b_2\sin(2\omega T)]^2}};$$

$$\left|G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right|=\frac{1}{\left|1+b_1e^{-j\omega T}+b_2e^{-j2\omega T}\right|}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{[1+b_1\cos(\omega T)+b_2\cos(2\omega T)]^2+[b_1\sin(\omega T)+b_2\sin(2\omega T)]^2}}.$$

Эти характеристики рассчитаны в примере 11.1 с помощью системы компьютерной математики Mathcad и представлены на рис.11.2 и 11.3 (на рис.11.3 представлена АЧХ $\left|F_1\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ для канонической формы реализации, соответствующая АЧХ $\left|G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ для прямой формы реализации рассматриваемого ЦФ). Там же были найдены нормы соответствующих комплексных частотных характеристик в пространстве L_∞:

$$\left\|H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty=\max_{\omega\in[-\pi/T,\,\pi/T]}\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|=16{,}669;$$

$$\left\|G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty=\max_{\omega\in[-\pi/T,\,\pi/T]}\left|G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right|=3{,}803.$$

Используя модели квантования (10.3), (10.18) и (10.31), по формулам (11.58), (11.60) и (11.61) получим максимальные модульные оценки шумов квантования на выходе ЦФ:

$$E_{y_{вх}}\le 2^{-S_д}\left\|H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty=2^{-S_д}\cdot 16{,}669;$$

$$E_{y_{\text{соб}}} \le 5 \cdot 2^{-S_д} \left\| G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty = 5 \cdot 2^{-S_д} \cdot 3{,}803 = 2^{-S_д} \cdot 19{,}015;$$

$$E_y \le 2^{-S_д} \cdot 16{,}669 + 2^{-S_д} \cdot 19{,}015 = 2^{-S_д} \cdot 35{,}684.$$

Здесь учтено, что к входам многовходового сумматора (см. рис.10.9 и 10.10) подключены выходы пяти умножителей на весовые коэффициенты.

Каноническая форма реализации. Расчётная шумовая модель ЦФ имеет вид, показанный на рис.10.12,*б*, где $A(z^{-1}) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$; $B(z^{-1}) = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$. Используемые в обобщённой линейной шумовой модели ЦФ (см. рис.10.13) передаточные функции согласно (10.44) равны

$$G_1(z) = G_{(N)}(z) = H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}; \qquad G_2(z) = G_{(M)}(z) = 1.$$

Нормы комплексных частотных характеристик $\left| G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ и $\left| H\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ в пространстве L_∞ равны•:

$$\left\| G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty = \left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty = 16{,}669.$$

Норма комплексной частотной характеристики $\left| G_2\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ в пространстве L_∞ определяется очевидным образом:

$$\left\| G_2\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty = \max_{\omega \in [-\pi/T,\ \pi/T]} \left| G_2\left(e^{j\omega T}\right)\right| = 1.$$

Используя модели квантования (10.3), (10.18) и (10.31), по формулам (11.58), (11.60) и (11.61) получим максимальные модульные оценки шумов квантования на выходе ЦФ:

$$E_{y_{\text{вх}}} \le 2^{-S_д} \left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty = 2^{-S_д} \cdot 16{,}669;$$

$$E_{y_{\text{соб}}} \le 2 \cdot 2^{-S_д} \left\| G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty + 3 \cdot 2^{-S_д} \left\| G_2\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty =$$

$$= 2 \cdot 2^{-S_д} \cdot 16{,}669 + 3 \cdot 2^{-S_д} \cdot 1 = 2^{-S_д} \cdot 36{,}338;$$

$$E_y \le 2^{-S_д} \cdot 16{,}669 + 2^{-S_д} \cdot 36{,}338 = 2^{-S_д} \cdot 53{,}007.$$

Здесь учтено, что к входам первого многовходового сумматора (см. рис.10.12) подключены выходы двух умножителей, а к входам второго — трёх умножителей на весовые коэффициенты. В данном примере границы максимальной погрешности за счёт шумов квантования сигналов в ЦФ при канонической форме реализации больше, чем при прямой форме.

Пример 11.4. Для нерекурсивного вещественного ЦФ с передаточной функцией

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}$$

• См. пример 11.1 (прямая форма реализации). На рис.11.2 представлена АЧХ $\left| F_1\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ для прямой формы реализации, соответствующая АЧХ $\left| G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ для канонической формы реализации рассматриваемого в данном примере ЦФ.

требуется найти модульную оценку ошибки квантования на выходе фильтра. Квантование сигналов в АЦП и в операционных устройствах ЦФ осуществляется по методу усечения с представлением чисел в дополнительном коде при разрядности дробной части $S_д$.

Расчётная шумовая модель ЦФ имеет вид, показанный на рис.10.10,*б*. В ней

$$A(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}; \qquad B(z^{-1}) = 0$$

(см. пример 11.2).

Используемые в схеме Л.Б. Джексона (см. рис.10.13) передаточные функции согласно выражениям (10.43) и (10.45) равны

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}; \qquad G_1(z) = 1.$$

В случае нерекурсивных ЦФ для максимальных модульных оценок шумов квантования удобнее пользоваться не нормами комплексных частотных характеристик в пространстве L_∞, а суммами модулей отсчётов импульсных характеристик [см. (11.17)]. В соответствии с формулами (3.44) и (3.45) для передаточной функции $H(z)$ найдём сумму модулей отсчётов импульсной характеристики:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| h[n] \right| = \sum_{k=0}^{M} \left| a_k \right|.$$

Для передаточной функции $G_1(z) = 1$ согласно (3.4) по формуле обратного Z-преобразования получаем $g_1[n] = \delta[n]$ [см. выражение (1.4) и табл.1.1], отсюда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| g_1[n] \right| = 1.$$

Используя модель квантования (10.3), (10.18) и (10.31), по формулам (11.58), (11.60) и (11.61) получим максимальные модульные оценки шумов квантования на выходе ЦФ:

$$E_{y_{вх}} \le 2^{-S_д} \sum_{k=0}^{M} \left| a_k \right|; \qquad E_{y_{соб}} \le (M+1) \cdot 2^{-S_д} \sum_{n=0}^{\infty} \left| g[n] \right| = (M+1) \cdot 2^{-S_д};$$

$$E_y \le 2^{-S_д} \left[\sum_{k=0}^{M} \left| a_k \right| + (M+1) \right].$$

Здесь учтено, что к входам сумматора подключено $M+1$ умножителей на весовые коэффициенты a_k $\left(k = \overline{0, M}\right)$.

11.4. Вероятностные оценки шумов квантования на выходе скалярного вещественного цифрового фильтра

Используя обобщённую линейную шумовую модель цифрового фильтра (схему Л.Б. Джексона, см. § 10.8), модели шумов квантования (см. § 10.4 — 10.7) и методику анализа, изложенную в § 11.1, найдём вероятностные оценки шумов квантования на выходе ЦФ. Будем полагать заданными структуру и ха-

рактеристики фильтра, а также математические ожидания и дисперсии шумов квантования на входе ЦФ (шум АЦП или внешний шум фильтра) и на выходах умножителей на весовые коэффициенты (шумы квантования результатов арифметических операций).

Пусть

$$m_0 = M\{e_0[n]\}; \quad D_0 = M\{(e_0[n] - m_0)^2\} \tag{11.62}$$

— математическое ожидание и дисперсия шумов квантования сигнала на входе цифрового фильтра;

$$m_{rk} = M\{e_{rk}[n]\}; \quad D_{rk} = M\{(e_{rk}[n] - m_{rk})^2\}, \quad r = \overline{1,\ L}, \quad k = \overline{1,\ M_r + N_r + 1} \tag{11.63}$$

— математическое ожидание и дисперсия шумов квантования результатов арифметических операций на выходе k-го умножителя, подключённого к r-му многовходовому сумматору. Здесь $M\{...\}$ — символ математического ожидания; $M_r + N_r + 1$ — количество умножителей на весовые коэффициенты, подключённых к r-му многовходовому сумматору (см. рис.10.9 — 10.12); L — число многовходовых сумматоров (количество блоков) в обобщённой линейной шумовой модели цифрового фильтра (см. рис.10.13).

В соответствии с формулами (10.30) и (10.39) получаем математическое ожидание и дисперсию эквивалентного шума квантования на входе r-го многовходового сумматора (см. рис.10.10, 10.12 и 10.13):

$$m_{\gamma_r} = \sum_{k=1}^{M_r + N_r + 1} m_{rk}; \quad D_{\gamma_r} = \sum_{k=1}^{M_r + N_r + 1} D_{rk}, \quad r = \overline{1,\ L}. \tag{11.64}$$

Если разрядность всех операционных устройств ЦФ одинакова, то и статистические характеристики шумов квантования на выходах всех умножителей на весовые коэффициенты также будут одинаковыми. При этом выражения (11.64) примут вид [ср. с (10.32) и (10.41)]

$$m_{\gamma_r} = (M_r + N_r + 1)\, m_e; \quad D_{\gamma_r} = (M_r + N_r + 1)\, D_e, \quad r = \overline{1,\ L}. \tag{11.65}$$

Здесь $m_e = m_{rk}$; $D_e = D_{rk}$ $\left(r = \overline{1,\ L}, \quad k = \overline{1,\ M_r + N_r + 1}\right)$.

Математическое ожидание и дисперсия составляющей выходной ошибки фильтрации, обусловленной квантованием входного сигнала в АЦП $e_{y_{\text{вх}}}[n]$, согласно (11.23), (11.25), (11.36) и (11.45) оцениваются выражениями

$$\begin{cases} m_{y_{\text{вх}}} = m_0 \sum\limits_{n=0}^{\infty} h[n] = m_0 \left| H\left(e^{j\omega T}\right)\right|_{\omega=0}; \\ D_{y_{\text{вх}}} = D_0 \sum\limits_{n=0}^{\infty} h^2[n] = D_0 \left[\dfrac{T}{2\pi} \int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| H\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2 d\omega\right] = D_0 \left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2. \end{cases} \tag{11.66}$$

Аналогично рассчитываются также математическое ожидание и дисперсия составляющей выходной ошибки фильтрации $e_{y_r}[n]\left(r=\overline{1,\ L}\right)$, обусловленной эквивалентным шумом квантования на входе r-го многовходового сумматора (см. рис.10.13):

$$\begin{cases} m_{y_r} = m_{\gamma_r}\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_r[n] = m_{\gamma_r}\left|G_r\left(e^{j\omega T}\right)\right|_{\omega=0}; \\ D_{y_r} = D_{\gamma_r}\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_r^2[n] = D_{\gamma_r}\left[\dfrac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\left|G_r\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2 d\omega\right] = D_{\gamma_r}\left\|G_r\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2, \\ r=\overline{1,\ L}. \end{cases} \qquad (11.67)$$

Суммируя m_{y_r} и D_{y_r} по всем многовходовым сумматорам (по всем $r=\overline{1,\ L}$), найдём математическое ожидание $m_{y_{\text{соб}}}$ и дисперсию $D_{y_{\text{соб}}}$ собственных шумов квантования на выходе цифрового фильтра:

$$\begin{cases} m_{y_{\text{соб}}} = \sum\limits_{r=1}^{L} m_{\gamma_r}\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_r[n] = \sum\limits_{r=1}^{L} m_{\gamma_r}\left|G_r\left(e^{j\omega T}\right)\right|_{\omega=0}; \\ D_{y_{\text{соб}}} = \sum\limits_{r=1}^{L} D_{\gamma_r}\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_r^2[n] = \sum\limits_{r=1}^{L} D_{\gamma_r}\left[\dfrac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\left|G_r\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2 d\omega\right] = \\ \qquad = \sum\limits_{r=1}^{L} D_{\gamma_r}\left\|G_r\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2. \end{cases} \qquad (11.68)$$

Объединяя выражения (11.66) и (11.68), получим математическое ожидание m_y и дисперсию D_y шумов квантования на выходе ЦФ:

$$\begin{cases} m_y = m_{y_{\text{вх}}} + m_{y_{\text{соб}}} = m_0\sum\limits_{n=0}^{\infty} h[n] + \sum\limits_{r=1}^{L} m_{\gamma_r}\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_r[n] = \\ \qquad = m_0\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|_{\omega=0} + \sum\limits_{r=1}^{L} m_{\gamma_r}\left|G_r\left(e^{j\omega T}\right)\right|_{\omega=0}; \\ D_y = D_{y_{\text{вх}}} + D_{y_{\text{соб}}} = D_0\sum\limits_{n=0}^{\infty} h^2[n] + \sum\limits_{r=1}^{L} D_{\gamma_r}\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_r^2[n] = \\ \quad = D_0\left[\dfrac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2 d\omega\right] + \sum\limits_{r=1}^{L} D_{\gamma_r}\left[\dfrac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\left|G_r\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2 d\omega\right]. \end{cases} \qquad (11.69)$$

В формулах (11.66) — (11.69) приведены две формы выражений для математического ожидания и дисперсии шумов квантования: через импульсные $h[n]$, $g_r[n]$ и через амплитудно-частотные $\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|$, $\left|G_r\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ $\left(r=\overline{1,L}\right)$ характеристики. Первая форма удобна для нерекурсивных, а вторая — для рекурсивных цифровых фильтров.

Используя квадрат нормы комплексной частотной характеристики в пространстве L_2 [см. (11.13) и (11.38)], перепишем вторую формулу (11.69) в компактной форме:

$$D_y = D_0 \left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2 + \sum_{r=1}^{L} D_{\gamma_r} \left\| G_r\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2. \qquad (11.70)$$

В § 11.9 матричный аналог формулы (11.70) будет использован для анализа шумов квантования на выходах векторных вещественных стационарных линейных ЦФ.

Пример 11.5. Для скалярного вещественного рекурсивного ЦФ с передаточной функцией (см.примеры 11.1 и 11.3)

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}},$$

коэффициенты которой $a_0 = 0{,}5$, $a_1 = -2{,}6$, $a_2 = -2{,}3$, $b_1 = -1{,}2$, $b_2 = 0{,}56$, требуется найти математическое ожидание и дисперсию шумов квантования на выходе фильтра. Квантование сигналов в АЦП и в операционных устройствах фильтра осуществляется по методу усечения с представлением чисел в дополнительном коде при разрядности дробной части чисел $S_д$.

Прямая форма реализации. Передаточные функции, используемые в обобщённой линейной шумовой модели ЦФ (см. рис.10.3), согласно выражениям (10.43) равны

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}; \qquad G_1(z) = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}.$$

По формуле (3.32) находим соответствующие им амплитудно-частотные характеристики:

$$\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right| = \left|\frac{a_0 + a_1 e^{-j\omega T} + a_2 e^{-j2\omega T}}{1 + b_1 e^{-j\omega T} + b_2 e^{-j2\omega T}}\right| =$$

$$= \sqrt{\frac{\left[a_0 + a_1\cos(\omega T) + a_2\cos(2\omega T)\right]^2 + \left[a_1\sin(\omega T) + a_2\sin(2\omega T)\right]^2}{\left[1 + b_1\cos(\omega T) + b_2\cos(2\omega T)\right]^2 + \left[b_1\sin(\omega T) + b_2\sin(2\omega T)\right]^2}};$$

$$\left|G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right| = \frac{1}{\left|1 + b_1 e^{-j\omega T} + b_2 e^{-j2\omega T}\right|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left[1 + b_1\cos(\omega T) + b_2\cos(2\omega T)\right]^2 + \left[b_1\sin(\omega T) + b_2\sin(2\omega T)\right]^2}}.$$

С помощью системы компьютерной математики Mathcad рассчитаем параметры, необходимые для определения математического ожидания и дисперсии шумов квантования на выходе ЦФ [см. (11.69)]:

$$\left| H\left(e^{j\omega T}\right)\right|_{\omega=0} = 12{,}222; \qquad \left| G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right|_{\omega=0} = 2{,}778;$$

$$\left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2 = \frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\left| H\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2 d\omega = 66{,}602;$$

$$\left\| G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2 = \frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\left| G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2 d\omega = 3{,}568.$$

Используя модель квантования (10.3), (10.20) — (10.22) и (10.32), по формулам (11.66) — (11.69) находим математическое ожидание и дисперсию шумов квантования в цифровом фильтре:

$$m_{y_{\text{вх}}} = -\frac{2^{-S_\text{д}}}{2}\left| H\left(e^{j\omega T}\right)\right|_{\omega=0} = -\frac{2^{-S_\text{д}}}{2}\cdot 12{,}222;$$

$$m_{y_{\text{соб}}} = -5\cdot\frac{2^{-S_\text{д}}}{2}\left| G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right|_{\omega=0} = -\frac{2^{-S_\text{д}}}{2}\cdot 5\cdot 2{,}778;$$

$$m_y = -\frac{2^{-S_\text{д}}}{2}\cdot 12{,}222 - \frac{2^{-S_\text{д}}}{2}\cdot 5\cdot 2{,}778 = -2^{-S_\text{д}}\cdot 13{,}056;$$

$$D_{y_{\text{вх}}} = \frac{2^{-2S_\text{д}}}{12}\left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2 = \frac{2^{-2S_\text{д}}}{12}\cdot 66{,}602;$$

$$D_{y_{\text{соб}}} = 5\cdot\frac{2^{-2S_\text{д}}}{12}\left\| G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2 = \frac{2^{-2S_\text{д}}}{12}\cdot 5\cdot 3{,}568;$$

$$D_y = \frac{2^{-2S_\text{д}}}{12}\cdot 66{,}602 + 5\cdot\frac{2^{-2S_\text{д}}}{12}\cdot 3{,}568 = 2^{-2S_\text{д}}\cdot 7{,}037.$$

Здесь учтено, что к входам многовходового сумматора (см. рис.10.10) подключены выходы пяти умножителей на весовые коэффициенты.

Каноническая форма реализации. Передаточные функции, используемые в обобщённой линейной шумовой модели ЦФ (см. рис.10.3), согласно выражениям (10.44) равны

$$G_1(z) = H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}; \qquad G_2(z) = 1.$$

Параметры, используемые для нахождения математических ожиданий дисперсий шумов квантования на выходе ЦФ [см. (11.69)], рассчитаем с помощью системы компьютерной математики Mathcad. Результаты расчётов следующие:

$$\left| G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right|_{\omega=0} = \left| H\left(e^{j\omega T}\right)\right|_{\omega=0} = 12{,}222; \qquad \left| G_2\left(e^{j\omega T}\right)\right|_{\omega=0} = 1;$$

$$\left\| G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2 = \left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2 = \frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\pi/T}^{\pi/T}\left| H\left(e^{j\omega T}\right)\right|^2 d\omega = 66{,}602;$$

$$\left\| G_2\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2 = 1.$$

Используя модель квантования (10.3), (10.20) — (10.22) и (10.32), по формулам (11.66) — (11.69) находим математическое ожидание и дисперсию шумов квантования в цифровом фильтре:

$$m_{y_{\text{вх}}} = -\frac{2^{-S_\text{д}}}{2}\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|_{\omega=0} = -\frac{2^{-S_\text{д}}}{2}\cdot 12{,}222;$$

$$m_{y_{\text{соб}}} = -2\cdot\frac{2^{-S_\text{д}}}{2}\left|G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right|_{\omega=0} - 3\cdot\frac{2^{-S_\text{д}}}{2}\left|G_2\left(e^{j\omega T}\right)\right|_{\omega=0} = -\frac{2^{-S_\text{д}}}{2}\cdot 27{,}444;$$

$$m_y = -\frac{2^{-S_\text{д}}}{2}\cdot 12{,}222 - \frac{2^{-S_\text{д}}}{2}\cdot 27{,}444 = -2^{-S_\text{д}}\cdot 19{,}833;$$

$$D_{y_{\text{вх}}} = \frac{2^{-2S_\text{д}}}{12}\left\|H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2 = \frac{2^{-2S_\text{д}}}{12}\cdot 66{,}602;$$

$$D_{y_{\text{соб}}} = 2\cdot\frac{2^{-2S_\text{д}}}{12}\left\|G_1\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2 + 3\cdot\frac{2^{-2S_\text{д}}}{12}\left\|G_2\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2 = \frac{2^{-2S_\text{д}}}{12}\cdot 136{,}204;$$

$$D_y = \frac{2^{-2S_\text{д}}}{12}\cdot 66{,}602 + \frac{2^{-2S_\text{д}}}{12}\cdot 136{,}204 = 2^{-2S_\text{д}}\cdot 16{,}901.$$

Здесь учтено, что к входам первого многовходового сумматора (см. рис.10.12) подключены выходы двух умножителей, а к входам второго — трёх умножителей на весовые коэффициенты.

В данном примере математическое ожидание и дисперсия шумов квантования при канонической форме реализации ЦФ больше, чем при прямой форме.

Пример 11.6. Для нерекурсивного вещественного ЦФ с передаточной функцией (см. пример 11.4)

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}$$

требуется найти математическое ожидание и дисперсию шумов квантования на выходе фильтра. Квантование сигналов в АЦП и в операционных устройствах ЦФ осуществляется по методу усечения с представлением чисел в дополнительном коде при разрядности дробной части чисел $S_\text{д}$.

В случае нерекурсивных ЦФ для статистических оценок шумов квантования удобнее пользоваться не амплитудно-частотными, а импульсными характеристиками.

Используемые в схеме Л.Б. Джексона (см. рис.10.13) передаточные функции согласно выражениям (10.43) и (10.45) равны

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}; \qquad G_1(z) = 1.$$

Им соответствуют импульсные характеристики [см. (3.44) и пример 11.4]

$$\sum_{n=0}^{\infty} h[n] = \sum_{k=0}^{M} a_k; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} h^2[n] = \sum_{k=0}^{M} a_k^2;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_1[n] = 1; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} g_1^2[n] = 1.$$

Используя модель квантования (10.3), (10.20) — (10.22) и (10.32), по формулам (11.66) — (11.69) находим математическое ожидание и дисперсию шумов квантования в цифровом фильтре:

$$m_{y_{\text{вх}}} = -\frac{2^{-S_{\text{д}}}}{2}\sum_{k=0}^{M} a_k\,; \qquad m_{y_{\text{соб}}} = -(M+1)\cdot\frac{2^{-S_{\text{д}}}}{2}\cdot 1\,;$$

$$m_y = -\frac{2^{-S_{\text{д}}}}{2}\left[\sum_{k=0}^{M} a_k + (M+1)\right];$$

$$D_{y_{\text{вх}}} = \frac{2^{-2S_{\text{д}}}}{12}\sum_{k=0}^{M} a_k^2\,; \qquad D_{y_{\text{соб}}} = (M+1)\,\frac{2^{-2S_{\text{д}}}}{12}\cdot 1\,;$$

$$D_y = \frac{2^{-2S_{\text{д}}}}{12}\left[\sum_{k=0}^{M} a_k^2 + (M+1)\right].$$

Здесь учтено, что к входам сумматора подключено $M+1$ умножителей на весовые коэффициенты a_k $\left(k=\overline{0,M}\right)$.

11.5. Сравнение шумовых характеристик скалярных вещественных рекурсивных цифровых фильтров при прямой и канонической формах реализации

Результаты примеров 11.3 и 11.5 свидетельствуют о том, что шумы квантования рекурсивных ЦФ при прямой и канонической формах реализации различны. Рассмотрим линейные шумовые модели рекурсивного ЦФ, изображённые на рис.10.10 и 10.12, и сравним их по уровню шумов квантования на выходе фильтра. Максимальные шумовые выбросы встречаются сравнительно редко, поэтому наиболее адекватной характеристикой шума квантования на выходе ЦФ является его дисперсия•.

Внешний шум $e_0[n]$ проходит на выход ЦФ при обеих формах реализации фильтра одинаково (рис.10.10,*б*, 10.12,*б* и 10.13), поэтому представляют интерес лишь внутренние шумы, обусловленные квантованием результатов арифметических операций.

Используя модель внутренних шумов ЦФ (10.21), (10.22) и (10.32), а также шумовую модель, представленную на рис.10.10,*б*, по формуле (11.68) с учётом (10.43) найдём дисперсию собственных шумов квантования на выходе рекурсивного ЦФ при прямой форме реализации:

$$D_{y_{\text{соб}}}^{\text{пр}} = \frac{Q^2}{\chi}\,(M+N+1)\left[\frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T}\left|\frac{1}{1+B(e^{-j\omega T})}\right|^2 d\omega\right]. \qquad (11.71)$$

Аналогично, используя модель внутренних шумов ЦФ (10.21), (10.22) и (10.41), а также шумовую модель, изображённую на рис.10.12,*б*, по формуле

• В аналоговых системах дисперсия равна мощности шума на сопротивлении 1 Ом.

(11.68) с учётом (10.44) найдём дисперсию собственных шумов квантования на выходе рекурсивного ЦФ при канонической форме реализации:

$$D_{y_{\text{соб}}}^{\text{кан}} = \frac{Q^2}{\chi} N \left[\frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| \frac{A(e^{-j\omega T})}{1 + B(e^{-j\omega T})} \right|^2 d\omega \right] + \frac{Q^2}{\chi} (M+1). \qquad (11.72)$$

Выражения (11.71) и (11.72) удобно представить, используя понятие нормы комплексной частотной характеристики в пространстве L_2 [см. (11.70)]:

$$D_{y_{\text{соб}}}^{\text{пр}} = \frac{Q^2}{\chi} (M+N+1) \left\| \frac{1}{1 + B(e^{-j\omega T})} \right\|_2^2; \qquad (11.73)$$

$$D_{y_{\text{соб}}}^{\text{кан}} = \frac{Q^2}{\chi} N \left\| \frac{A(e^{-j\omega T})}{1 + B(e^{-j\omega T})} \right\|_2^2 + \frac{Q^2}{\chi} (M+1). \qquad (11.74)$$

Отсюда получим условия, при выполнении которых дисперсия собственного шума квантования на выходе ЦФ при прямой форме реализации будет меньше или больше, чем при канонической форме:

$$\left\| \frac{1}{1 + B(e^{-j\omega T})} \right\|_2^2 - 1 \lessgtr \frac{N}{M+1} \left[\left\| \frac{A(e^{-j\omega T})}{1 + B(e^{-j\omega T})} \right\|_2^2 - \left\| \frac{1}{1 + B(e^{-j\omega T})} \right\|_2^2 \right]. \qquad (11.75)$$

Верхний знак неравенства в (11.75) соответствует случаю $D_{y_{\text{соб}}}^{\text{пр}} < D_{y_{\text{соб}}}^{\text{кан}}$, а нижний — случаю $D_{y_{\text{соб}}}^{\text{пр}} > D_{y_{\text{соб}}}^{\text{кан}}$.

Пример 11.7. Для рекурсивного ЦФ третьего порядка с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{5 + 7{,}5\, z^{-1} - 1{,}575\, z^{-2} - 2{,}581\, z^{-3}}{1 + 0{,}8\, z^{-1} + 0{,}85\, z^{-2} - 0{,}328\, z^{-3}}$$

выяснить, при какой форме реализации дисперсия собственных шумов на выходе ЦФ меньше.

Здесь $M = 3$; $N = 3$; $A(z^{-1}) = 5 + 7{,}5\, z^{-1} - 1{,}575\, z^{-2} - 2{,}581\, z^{-3}$;

$$B(z^{-1}) = 0{,}8\, z^{-1} + 0{,}85\, z^{-2} - 0{,}328\, z^{-3}.$$

С помощью системы компьютерной математики Mathcad по формуле (11.12) найдём квадраты норм в пространстве L_2:

$$\left\| \frac{A(e^{-j\omega T})}{1 + B(e^{-j\omega T})} \right\|_2^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| \frac{A(e^{-j\omega T})}{1 + B(e^{-j\omega T})} \right|^2 d\omega = 187{,}714;$$

$$\left\| \frac{1}{1 + B(e^{-j\omega T})} \right\|_2^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| \frac{1}{1 + B(e^{-j\omega T})} \right|^2 d\omega = 2{,}929.$$

По формуле (11.75) получим неравенство $1{,}929 < 138{,}58875$, из которого следует, что при прямой форме реализации ЦФ имеет меньшую дисперсию собственных шумов квантования на выходе, чем при канонической форме. К такому же выводу можно прийти прямым расчётом дисперсии по формуле (11.68) с использованием линейных шумовых моделей, представленных на рис.10.10 и 10.12.

Пример 11.8. Для рекурсивного ЦФ третьего порядка с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{0{,}5 + 0{,}75\,z^{-1} - 0{,}1575\,z^{-2} - 0{,}2581\,z^{-3}}{1 + 0{,}8\,z^{-1} + 0{,}85\,z^{-2} - 0{,}328\,z^{-3}}$$

выяснить, при какой форме реализации дисперсия собственных шумов на выходе ЦФ меньше.

Здесь $M = 3;\ N = 3;\ A(z^{-1}) = 0{,}5 + 0{,}75\,z^{-1} - 0{,}1575\,z^{-2} - 0{,}2581\,z^{-3};$

$$B(z^{-1}) = 0{,}8\,z^{-1} + 0{,}85\,z^{-2} - 0{,}328\,z^{-3}.$$

По сравнению с передаточной функцией примера 11.7 здесь все коэффициенты числителя уменьшены в десять раз.

С помощью системы компьютерной математики Mathcad по формуле (11.12) найдём квадраты норм в пространстве L_2:

$$\left\| \frac{A(e^{-j\omega T})}{1 + B(e^{-j\omega T})} \right\|_2^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| \frac{A(e^{-j\omega T})}{1 + B(e^{-j\omega T})} \right|^2 d\omega = 1{,}877;$$

$$\left\| \frac{1}{1 + B(e^{-j\omega T})} \right\|_2^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| \frac{1}{1 + B(e^{-j\omega T})} \right|^2 d\omega = 2{,}929.$$

По формуле (11.75) получим неравенство $1{,}929 > -0{,}768$, из которого следует, что при канонической форме реализации ЦФ имеет меньшую дисперсию собственных шумов квантования на выходе, чем при прямой форме. К такому же выводу можно прийти прямым расчётом дисперсии по формуле (11.60) с использованием линейных шумовых моделей, представленных на рис.10.10 и 10.12.

Из изложенного следует, что дисперсия собственных шумов квантования на выходе рекурсивного ЦФ зависит от формы реализации последнего. Коэффициенты числителя $a_k \left(k = \overline{0,\ M}\right)$ передаточной функции (3.7) при прямой форме реализации не влияют на дисперсию собственных шумов квантования на выходе ЦФ $D_{y_{\text{соб}}}^{\text{пр}}$. При канонической форме реализации дисперсия $D_{y_{\text{соб}}}^{\text{кан}}$ очень сильно зависит от этих коэффициентов (увеличение коэффициентов приводит к увеличению дисперсии шумов квантования). Поэтому выбор формы реализации рекурсивного ЦФ должен осуществляться с учётом оценки (11.75).

11.6. Устойчивость цифровых фильтров с учётом ограниченной разрядности операционных устройств

Цифровой фильтр, работающий по линейному алгоритму, из-за ограниченной разрядности операционных устройств является *нелинейной системой*.

Нелинейности обусловлены квантованием результатов арифметических операций в умножителях на весовые коэффициенты и возможным переполнением регистров в сумматорах [8].

В § 3.7 рассматривалась устойчивость базового, т.е. линейного дискретного фильтра. Применительно к ЦФ сделаем несколько замечаний, касающихся проблемы устойчивости. Для рекурсивных ЦФ, как и для всех нелинейных систем, существуют различные понятия устойчивости: устойчивость положения равновесия, устойчивость процессов, асимптотическая устойчивость.

Из устойчивости положения равновесия, определяемого при $x[n] \equiv 0$ для всех $n \geq 0$, не следует устойчивость процессов (при $x[n] \not\equiv 0$ для $n \geq 0$). Критерии устойчивости положения равновесия и устойчивости процессов имеют различную формулировку [8, 10, 14]. Устойчивость процессов в рекурсивных ЦФ зависит от входных сигналов, т.е. процесс, вызванный одним воздействием $x[n]$, может быть устойчивым, а другим воздействием — неустойчивым.

Предыдущий анализ эффектов квантования базировался на предположении, что уровни сигналов в цифровом фильтре значительно превышают шаг квантования. Это позволяло полагать, что шумы квантования результатов умножения сигналов на весовые коэффициенты не коррелированы с соответствующими сигналами, не коррелированы от выборки к выборке и от источника шума к источнику (см. рис.10.9 и 10.11). В § 10.4 и 10.5 при построении линейных шумовых моделей ЦФ были сделаны допущения относительно шумов квантования: предположения о статистических характеристиках шумов, а также предположение о том, что шумы квантования вносят лишь нормальные ошибки в выходной процесс ЦФ, т.е. аномальные ошибки отсутствуют•.

По многим причинам уровни сигналов в некоторых точках структурной схемы ЦФ могут стать очень малыми (сравнимыми с шагом квантования), по крайней мере, на короткие промежутки времени. В этом случае шумы квантования могут быть сильно коррелированными. При нарушении сформулированных в § 10.4 и 10.5 допущений в рекурсивных ЦФ возникают специфические для нелинейных систем эффекты, получившие название *предельных циклов*. Различают два вида предельных циклов:

- *предельные циклы низкого уровня*, связанные с квантованием отсчётов обрабатываемого сигнала;
- *предельные циклы высокого уровня*, связанные с переполнением регистров операционных устройств ЦФ.

Предельные циклы низкого уровня имеют вид последовательности отсчётов, огибающая которых является либо постоянной величиной, либо периодическим колебанием определённой амплитуды и частоты.

• Линейные модели шумов квантования [см. (10.16) и (10.24), а также рис.10.7,*б* и 10.8] описывают нормальные ошибки обработки сигнала в ЦФ. Для учёта аномальных ошибок, связанных с переполнением регистров операционных устройств, необходимо пользоваться нелинейными моделями квантования (рис.10.4 — 10.6 и 10.7,*а*).

Изучение предельных циклов важно по двум причинам. Во-первых, в системах связи отключение сигнала может вызвать эффекты предельного цикла низкого уровня, что весьма нежелательно. Во-вторых, предельные циклы можно использовать для генерации периодических последовательностей [4]. Предельные циклы низкого уровня рассматривались в [6, 7, 10, 11, 28]. Анализ предельных циклов представляет собой сложную задачу. Аналитические методы позволяют получить результат лишь при довольно грубых допущениях, поэтому целесообразно проводить его методами математического моделирования. Однако при этом результаты имеют частный характер, а для их обобщения требуется набор определённой статистики.

Эффекты предельных циклов изучались Р.Б. Блэкманом, Л.Б. Джексоном и другими американскими учёными.

Амплитудные интервалы, в которых возникают предельные циклы низкого уровня, Р.Б. Блэкман назвал *мёртвыми зонами*.

Л.Б. Джексон исследовал предельные циклы в ЦФ первого и второго порядков, используя понятие «эффективных значений» коэффициентов фильтра. При этом учитывалось, что предельные циклы возникают только тогда, когда округление (квантование) коэффициентов приводит к появлению полюсов передаточной функции на единичной окружности Z-плоскости [6].

Следуя методике [28], рассмотрим эффект мёртвой зоны в рекурсивном цифровом фильтре N-го порядка при прямой форме реализации, описываемом линейным алгоритмом (2.2). Пусть постоянный входной сигнал $x[n]=X$, а выходной сигнал достигает установившегося значения $y[n]=Y$, необязательно равного предсказанной величине $Y_{\text{точн}}$, которую можно получить, если выполнять арифметические операции в алгоритме (2.2) с бесконечной точностью. Тогда из (2.2) получаем

$$\tilde{y}[n]=Y=\sum_{k=0}^{M} a_k X-\sum_{k=1}^{N} b_k Y+e_y[n], \tag{11.76}$$

где $\left|e_y[n]\right|\le Q/2$ (Q — шаг квантования).

Это позволяет записать следующее неравенство для Y:

$$\left|\left(1+\sum_{k=1}^{N} b_k\right)\left[Y-\sum_{k=0}^{M} a_k X\Big/\left(1+\sum_{k=1}^{N} b_k\right)\right]\right|\le\frac{Q}{2}. \tag{11.77}$$

Точное установившееся значение $Y_{\text{точн}}$ будет равно

$$Y_{\text{точн}}=\sum_{k=0}^{M} a_k X\Big/\left(1+\sum_{k=1}^{N} b_k\right), \tag{11.78}$$

так что отклонение реальной величины Y от точной $Y_{\text{точн}}$ удовлетворяет неравенству

$$\left| Y - Y_{\text{точн}} \right| \le \frac{Q}{2\left| 1 + \sum_{k=1}^{N} b_k \right|}. \qquad (11.79)$$

Формула (11.79) определяет необходимое условие для существования постоянной ошибки на выходе рекурсивного ЦФ в установившемся режиме при постоянном входном сигнале. Общее число ступеней (шагов) квантования Q в мёртвой зоне примерно равно усилению по постоянному току (на нулевой частоте) фильтра, имеющего только полюсы. Необходимое условие будет и достаточным, если последние N отсчётов выходного сигнала для ЦФ N-го порядка равны и лежат в пределах мёртвой зоны. Если вместо квантования по методу округления использовать квантование по методу усечения, ширина мёртвой зоны останется такой же, но не будет симметричной относительно $Y_{\text{точн}}$ [28].

Из изложенного следует, что для ЦФ первого порядка с нулевым входным сигналом $x[n] = X = 0$ выходной сигнал не упадёт до нуля, а «повиснет», как только будет достигнута граница мёртвой зоны. У фильтров высокого порядка возможны более сложные эффекты: у них выходной сигнал может пройти через мёртвую зону и достигнуть другого её края или могут возникнуть стационарные колебания. Иногда можно избежать эффекта мёртвой зоны путём добавления небольшого шума на входе ЦФ [28].

Амплитуда колебаний при предельных циклах низкого уровня сравнима с уровнем шума квантования и при большой разрядности регистров операционных устройств ЦФ является относительно малой. Формула для оценки амплитуды колебаний предельного цикла на выходе ЦФ при прямой форме реализации с квантованием по методу усечения имеет вид [7]:

$$E_{\text{вых}} \le Q \max_{\omega \in [-\pi/T,\ \pi/T]} \left| G\left(e^{j\omega T} \right) \right| \le Q \sum_{n=0}^{\infty} \left| g[n] \right| \le$$

$$\le \begin{cases} Q \dfrac{1}{1-\rho} & \text{для ЦФ первого порядка;} \\ Q \dfrac{1}{(1-\rho)\sin\theta} & \text{для ЦФ второго порядка,} \end{cases} \qquad (11.80)$$

где Q — шаг квантования; $G(z)$ — передаточная функция линейной шумовой модели ЦФ [см. рис.10.13 и (10.43)]; ρ — расстояние от полюса до центра единичной окружности Z-плоскости; θ — угол расположения полюса в Z-плоскости.

Отсюда следует, что в рекурсивных ЦФ первого и второго порядков амплитуда колебаний предельного цикла низкого уровня тем больше, чем ближе к единичной окружности Z-плоскости расположены полюсы передаточной функции. Для фильтра второго порядка, кроме того, амплитуда колебаний зависит от угла расположения комплексно-сопряжённых полюсов θ, и она тем больше,

чем ближе величина θ к 0 или π. При уменьшении шага квантования $Q = 2^{-S_д}$, т.е. при увеличении количества разрядов $S_д$, представляющих дробную часть чисел, амплитуда колебаний предельного цикла низкого уровня уменьшается. Таким образом, увеличение разрядности операционных устройств ЦФ, приводящее к снижению уровня шумов квантования на выходе фильтра, одновременно приводит к уменьшению амплитуды предельных циклов низкого уровня.

Предельные циклы высокого уровня могут возникать в рекурсивных ЦФ, если при выполнении арифметических операций происходит переполнение регистров оперативной памяти. В этом случае ЦФ становится *существенно нелинейной системой*, в выходном сигнале появляются аномальные ошибки, т.е. фильтр перестаёт быть работоспособным. Эффекты предельных циклов высокого уровня проявляются либо в виде «насыщения», либо в виде стационарных колебаний на выходе ЦФ.

Для предотвращения переполнения регистров ЦФ можно принять следующие меры:

- выбор разрядности операционных устройств ЦФ таким образом, чтобы максимальный по модулю сигнал, определяемый по формуле (11.53), не приводил к переполнению регистров сигнального процессора. При этом должна быть предусмотрена жёсткая нормировка входного сигнала $|x[n]| \le A$, где $A < X$ [см (11.46)], чтобы обеспечить некоторый рабочий запас, не допускающий превышения входным сигналом $x[n]$ в процессе эксплуатации максимального уровня X. Это приводит к небольшому уменьшению отношения сигнал/шум на выходе ЦФ, зато предотвращает переполнение регистров процессора;
- масштабирование сигналов в цифровом фильтре при жёсткой нормировке входного сигнала [7].

11.7. Масштабирование сигналов в цифровых фильтрах

Если в цифровом фильтре, арифметические операции в котором выполняются в формате с фиксированной точкой, амплитуда входного сигнала окажется достаточной для превышения диапазона представления чисел в регистрах операционных устройств, то произойдёт переполнение регистров и выходной сигнал сильно исказится.

С другой стороны, если амплитуда входного сигнала оказывается чрезвычайно малой, то фильтр будет работать неэффективно и выходное отношение сигнал/шум будет малым, поэтому для оптимальной работы фильтра в условиях воздействия сигналов различных уровней необходимо провести их масштабирование [8].

Масштабирование сигналов в ЦФ применяется с целью предотвращения переполнения регистров операционных устройств, а также для улучшения шумовых характеристик фильтра.

Масштабные множители вводятся в структурную схему ЦФ таким образом, чтобы нормировать сигнал по максимуму модуля в любой точке схемы фильтра к значению $Y = 2^{S_{\text{ц}}}$, где $S_{\text{ц}}$ — число разрядов разрядной сетки операционных устройств для представления двоичных кодов целой части чисел [8]. Величина Y рассчитывается по формуле (11.48). При этом масштабный множитель на входе элементарного блока ЦФ (см. рис.10.10 и 10.12) выбирается таким образом, чтобы сигнал в произвольной точке данного блока по модулю не превышал уровня Y:

$$\Psi_r = Y / V_{,}, \qquad (11.81)$$

где $V_{,}$ — максимально возможное значение сигнала (по модулю) в блоке ЦФ без введения масштабного множителя. Величина $V_{,}$ рассчитывается по методике, приведённой в § 11.2.

Масштабные множители могу быть введены в схему ЦФ различными способами. Рассмотрим некоторые из них [14].

♦ Можно ввести масштабный множитель на входе $\Psi_{\text{вх}}$ и масштабный множитель на выходе $\Psi_{\text{вых}}$ цифрового фильтра (рис.11.4). Если выбрать масштабный множитель $\Psi_{\text{вх}}$ согласно (11.81), то для сохранения неизменной передаточной функции $H(z)$ ЦФ с учётом масштабных множителей необходимо, чтобы $\Psi_{\text{вых}} = 1 / \Psi_{\text{вх}}$. Этот способ масштабирования неэффективен, поскольку в некоторых точках структурной схемы фильтра отношение сигнал/шум оказывается меньше максимально возможной величины. В результате наибольшее возможное отношение сигнал/шум на выходе ЦФ не обеспечивается [14].



Рис.11.4. Введение масштабных множителей на входе и выходе цифрового фильтра

♦ Другой способ нормировки сигналов заключается в том, что в каждый блок вводится масштабный множитель путём изменения коэффициентов числителей $a_{ri}\left(i = \overline{0,\ M_r}\right)$ передаточных функций $H_r(z) = \dfrac{A_r(z^{-1})}{1 + B_r(z^{-1})}$ $\left(r = \overline{1,\ L}\right)$ рекурсивных блоков ЦФ. Соответствующая методика разработана Л.Б. Джексоном и изложена в [6]. Однако такой способ введения масштабных множителей не всегда целесообразен, так как в ряде случаев (например, при каскадной реализации ЦФ) он может потребовать увеличения количества умножителей в каждом блоке [14].

♦ Третий способ нормировки сигналов заключается в том, что масштабные множители вводятся между элементарными блоками ЦФ [8, 14]. Каскадная

и параллельная структуры рекурсивных ЦФ с введёнными масштабными множителями показаны на рис.11.5. Этот способ нормировки не требует изменения коэффициентов числителей передаточных функций блоков ЦФ и поэтому является наиболее предпочтительным при каскадной реализации ЦФ.

Величины масштабных множителей должны выбираться так, чтобы максимальные значения сигналов в любой точке любого звена цифрового фильтра не превышали по модулю Y. Масштабные множители на входах элементарных блоков (см. рис.11.5) определяются по формулам

$$\Psi_{r\,\text{вх}} = Y \big/ V_{(r)}, \quad r = \overline{1,\, L}, \tag{11.82}$$

где $V_{(r)}$ $\left(r = \overline{1,\, L}\right)$ — максимально возможный уровень сигнала (по модулю) в любой точке r-го блока без введения масштабного множителя в данном блоке, но с учётом масштабных множителей в предыдущих блоках [для оценки величин $V_{(r)}$ $\left(r = \overline{1,\, L}\right)$ следует воспользоваться методикой, рассмотренной в § 11.2].

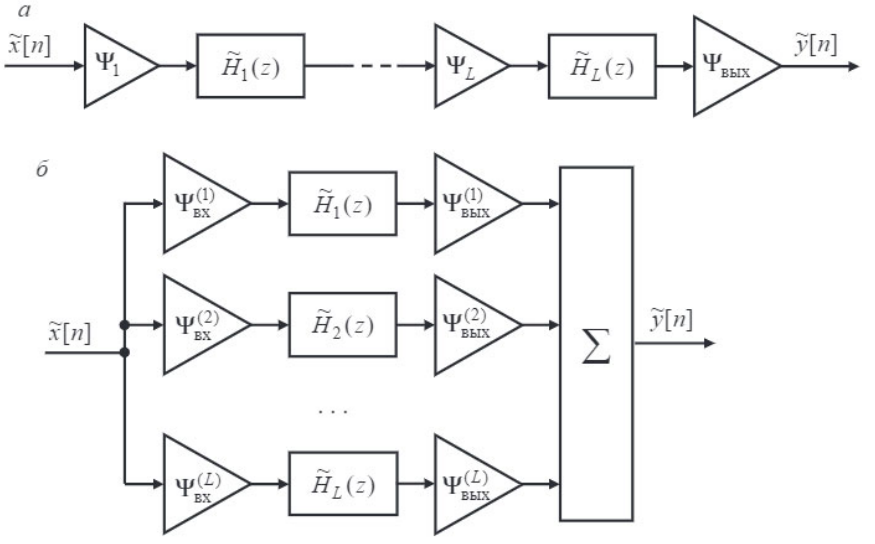


Рис.11.5. Введение масштабных множителей между элементарными блоками ЦФ при каскадной (*а*) и параллельной (*б*) структурах

Масштабные множители на выходе последнего блока цифрового фильтра каскадной структуры выбираются так, чтобы передаточная функция ЦФ $H(z)$ после их введения осталась неизменной:

$$\Psi_{\text{вых}} = 1 \Big/ \prod_{r=1}^{L} \Psi_r \,. \tag{11.83}$$

Аналогично выбираются масштабные множители на выходе произвольного блока ЦФ параллельной структуры:

$$\Psi_{\text{вых}}^{(r)} = \frac{1}{\Psi_{\text{вх}}^{(r)}}, \quad r = \overline{1,\ L}. \tag{11.84}$$

Для упрощения реализации масштабные множители Ψ целесообразно выбирать равными 2^k ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$), так как операция умножения на такие множители сводится к сдвигу двоичного кода числа в регистре на k позиций влево, если k положительное, или вправо, если k отрицательное число.

11.8. Расстановка блоков в цифровых фильтрах каскадной структуры

Цифровой фильтр, работающий по линейному алгоритму (2.2), благодаря эффектам квантования, строго говоря, является нелинейным устройством. Если в линейном дискретном фильтре, описываемом передаточной функцией (4.13), все блоки коммутативны, т.е. могут быть расположены в произвольном порядке, то о ЦФ этого сказать нельзя. Изменение порядка следования блоков каскадной структуры (другими словами, изменение способа группировки нулей и полюсов передаточной функции ЦФ) может привести к изменению уровня шумов цифрового фильтра, возникающих в результате квантования чисел в его операционных устройствах.

Запишем передаточную функцию ЦФ каскадной структуры с квантованными коэффициентами [см. (10.13)] в виде

$$\widetilde{H}(z) = \prod_{r=1}^{L} \widetilde{H}_r(z) = \prod_{r=1}^{L} \frac{\widetilde{A}_r(z^{-1})}{1 + \widetilde{B}_r(z^{-1})}. \tag{11.85}$$

Дисперсия выходного шума, а также требуемая разрядность операционных устройств в рекурсивном ЦФ с передаточной функцией вида (11.85) зависит от попарного подбора числителей $\widetilde{A}_r(z^{-1})$ и знаменателей $1 + \widetilde{B}_r(z^{-1})$ передаточных функций элементарных блоков $\widetilde{H}_r(z)$ $\left(r = \overline{1,\ L}\right)$, а также от их расстановки [8].

Варианты расстановки рекурсивных блоков ЦФ каскадной структуры анализировались в [6, 8, 14]. Рекомендованы следующие правила подбора пар из $\widetilde{A}_r(z^{-1})$ и $1 + \widetilde{B}_r(z^{-1})$ $\left(r = \overline{1,\ L}\right)$ при расстановке элементарных блоков:

♦
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\widetilde{h}_1[n]\right| > \sum_{n=0}^{\infty} \left|\widetilde{h}_2[n]\right| > \sum_{n=0}^{\infty} \left|\widetilde{h}_3[n]\right| > ... > \sum_{n=0}^{\infty} \left|\widetilde{h}_L[n]\right|; \tag{11.86}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\widetilde{h}_1[n]\right| < \sum_{n=0}^{\infty} \left|\widetilde{h}_2[n]\right| < \sum_{n=0}^{\infty} \left|\widetilde{h}_3[n]\right| < ... < \sum_{n=0}^{\infty} \left|\widetilde{h}_L[n]\right|, \tag{11.87}$$

где $\widetilde{h}_r[n]\ \left(r=\overline{1,\ L}\right)$ — импульсная характеристика r-го элементарного блока с квантованными коэффициентами;

♦
$$\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{h}_1^2[n]>\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{h}_2^2[n]>\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{h}_3^2[n]>\ldots>\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{h}_L^2[n]; \tag{11.88}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{h}_1^2[n]<\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{h}_2^2[n]<\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{h}_3^2[n]<\ldots<\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{h}_L^2[n]; \tag{11.89}$$

♦
$$\rho_1>\rho_2>\rho_3>\ldots>\rho_L; \tag{11.90}$$

$$\rho_1<\rho_2<\rho_3<\ldots<\rho_L, \tag{11.91}$$

где

$$\rho_r=\frac{\left\|\widetilde{H}_r\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_{\infty}}{\left\|\widetilde{H}_r\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2},\quad r=\overline{1,\ L}; \tag{11.92}$$

$\left\|\widetilde{H}_r\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_p\ \left(p\geq 1,\ r=\overline{1,\ L}\right)$ — норма частотной характеристики r-го элементарного блока с квантованными коэффициентами в пространстве L_p [см. (11.5), (11.12) и (11.14)].

Из всех расстановок блоков (11.86) — (11.91) целесообразно применить ту, для которой требуемая разрядность операционных устройств цифрового фильтра минимальна.

В монографии [6] приводится следующая рекомендация по подбору числителей $\widetilde{A}_r(z^{-1})$ и знаменателей $1+\widetilde{B}_r(z^{-1})$ передаточных функций элементарных блоков $\widetilde{H}_r(z)\ \left(r=\overline{1,\ L}\right)$: оптимальным с точки зрения минимизации шумов квантования ЦФ является такой их подбор, при котором

$$\left\|\frac{\widetilde{A}_r\left(e^{j\omega T}\right)}{1+\widetilde{B}_r\left(e^{j\omega T}\right)}\right\|_{\infty}\to\min,\quad r=\overline{1,\ L}. \tag{11.93}$$

Во многих случаях это правило приводит к объединению в пары полюсов с ближайшими к ним нулями на Z-плоскости [6]. Примеры оптимального подбора пар полюсов и нулей элементарных блоков ЦФ рассмотрены в [6, 8, 14].

11.9. Оценки шумов квантования в векторных цифровых фильтрах простой структуры

В данном параграфе рассматриваются векторные цифровые фильтры простой структуры, описываемые векторно-матричным разностным уравнением (3.11). Структурные схемы и характеристики одномерных вещественных век-

торных стационарных рекурсивных линейных ЦФ (точнее, дискретных фильтров, поскольку эффекты квантования в них не учитывались) получены в § 4.6, а линейные шумовые модели — в § 10.10 и 10.11.

Рассмотренные в § 11.1 методы анализа скалярных линейных дискретных систем могут быть экстраполированы на векторные дискретные системы. На рис. 11.6 изображена модель одномерного векторного вещественного стационарного линейного ЦФ простой структуры (ср. с рис.11.1).

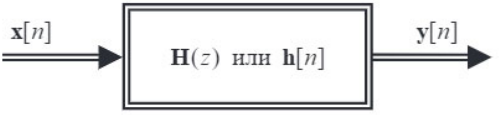


Рис.11.6. Схема для анализа прохождения дискретного векторного процесса $\mathbf{x}[n]$ через векторный линейный стационарный дискретный фильтр

В зависимости от решаемой задачи под векторными процессами $\mathbf{x}[n]$ и $\mathbf{y}[n]$ на рис.11.6 будем понимать либо R-координатные векторные полезные сигналы, либо векторные шумы квантования $\mathbf{e}_0[n]$ и $\boldsymbol{\gamma}_r[n]$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$, а под $\mathbf{H}(z)$ — матрицы передаточных функций размера $R\times R$ схемы Л.Б. Джексона (см. рис.10.22) $\mathbf{H}(z)$, $\mathbf{G}_r(z)$, $\mathbf{F}_r(z)$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$ и соответствующие им матрицы импульсных характеристик $\mathbf{h}[n]$, $\mathbf{g}_r[n]$, $\mathbf{f}_r[n]$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$.

Для скалярных ЦФ простой структуры (см. рис. 11.1) детерминированный анализ осуществлялся на основе формул (11.2) и (11.21), а вероятностный — основе формул (11.23), (11.25), (11.36) и (11.45). Запишем их аналоги в векторно-матричной форме.

Введём в рассмотрение спектральные образы векторных и матричных объектов:

$\mathbf{X}\left(e^{j\omega T}\right)$ и $\mathbf{Y}\left(e^{j\omega T}\right)$ — R-координатные векторы, координаты которых представляют комплексные спектры координат векторных процессов $\mathbf{x}[n]$ и $\mathbf{y}[n]$ соответственно:

$$\begin{cases} X_i\left(e^{j\omega T}\right)=F\{x_i[n]\}; \\ Y_i\left(e^{j\omega T}\right)=F\{y_i[n]\}, \end{cases} \quad i=\overline{1,\,R}; \tag{11.94}$$

$\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right)$ — матрица комплексных частотных характеристик размера $R\times R$, элементы которой согласно (3.20) образуются из элементов матрицы передаточных функций $\mathbf{H}(z)$:

$$H_{il}\left(e^{j\omega T}\right)=H_{il}(z)\Big|_{z=\exp(j\omega T)}, \quad i,\,l=\overline{1,\,R} \tag{11.95}$$

[элементы матрицы комплексных частотных характеристик определяются выражением (3.23)].

◆ **Детерминированный подход**

Согласно определению нормы скалярной функции в пространстве L_p [см. (11.5)] образуем нормы • координат (11.94) в пространстве L_1 [см. (11.11)] и элементов (11.95) в пространстве L_∞ [см. (11.14)]:

$$\max_n |x_i[n]| \le \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| X_i\left(e^{j\omega T}\right)\right| d\omega = \left\| X_i\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_1, \quad i = \overline{1,\ R}; \tag{11.96}$$

$$\max_n |y_i[n]| \le \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left| Y_i\left(e^{j\omega T}\right)\right| d\omega = \left\| Y_i\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_1, \quad i = \overline{1,\ R}; \tag{11.97}$$

$$\left\| H_{il}\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty = \max_{\omega \in [-\pi/T,\ \pi/T]} \left| H_{il}\left(e^{j\omega T}\right)\right|, \quad i,\ l = \overline{1,\ R}. \tag{11.98}$$

Из координат (11.96) и (11.97) построим R-координатные векторы $\mathbf{X}_{\max}$, и $\mathbf{Y}_{\max}$, а из элементов (11.98) — квадратную матрицу $\mathbf{H}_\infty$ размера $R \times R$. Используя их, запишем векторно-матричный аналог скалярной формулы (11.21):

$$\mathbf{Y}_{\max} \le \mathbf{H}_\infty \mathbf{X}_{\max}. \tag{11.99}$$

Неравенство (11.99) используется при детерминированном подходе к анализу векторных ЦФ (максимальная модульная оценка сигналов в структуре ЦФ и шумов квантования на выходе ЦФ).

◆ **Вероятностный подход**

Согласно определениям математического ожидания (10.20) и дисперсии (10.21) шумов квантования ЦФ для векторных процессов $\mathbf{x}[n]$ и $\mathbf{y}[n]$ расчётной схемы, изображённой на рис.11.6, построим R-координатные векторы математических ожиданий ($\mathbf{X}_M$ и $\mathbf{Y}_M$) и векторы дисперсий ($\mathbf{X}_D$ и $\mathbf{Y}_D$), координаты которых определяются выражениями

$$\begin{cases} X_{M_i} = M\{x_i[n]\}; \\ Y_{M_i} = M\{y_i[n]\}, \end{cases} \quad i = \overline{1,\ R}; \tag{11.100}$$

$$\begin{cases} X_{D_i} = M\left\{\left(x_i[n] - X_{M_i}\right)^2\right\}; \\ Y_{D_i} = M\left\{\left(y_i[n] - Y_{M_i}\right)^2\right\}, \end{cases} \quad i = \overline{1,\ R}. \tag{11.101}$$

Здесь $M\{\dots\}$ — символ математического ожидания.

• Напомним, что нормы функций в пространстве L_p представляют собой вещественные неотрицательные числа.

Из элементов матрицы комплексных частотных характеристик $\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right)$ размера $R\times R$ в соответствии с (11.24) сформируем элементы

$$H_{M_{i\,l}} = H_{i\,l}\left(e^{j\omega T}\right)\Big|_{\omega=0}, \quad i,\, l=\overline{1,\, R}, \tag{11.102}$$

равные значениям элементов исходной матрицы на нулевой частоте, а в соответствии с (11.38) — элементы

$$H_{D_{i\,l}} = \left\| H_{i\,l}\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2, \quad i,\, l=\overline{1,\, R}, \tag{11.103}$$

равные квадратам норм элементов матрицы $\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right)$ в пространстве L_2.

Из элементов (11.102) построим квадратную матрицу $\mathbf{H}_M$ размера $R\times R$, а из элементов (11.103) — матрицу $\mathbf{H}_D$. Используя их, запишем аналоги скалярных формул (11.25) и (11.45) в векторно-матричной форме•:

$$\mathbf{Y}_M = \mathbf{H}_M\,\mathbf{X}_M; \tag{11.104}$$

$$\mathbf{Y}_D = \mathbf{H}_D\,\mathbf{X}_D. \tag{11.105}$$

Эти выражения используются для анализа векторных вещественных ЦФ при вероятностном подходе••.

◆ Максимальные модульные оценки сигналов в векторном ЦФ простой структуры

Для схемы, изображённой на рис.10.21, при заданных максимальных модульных значениях координат входного вектора $\mathbf{x}[n]$ полезного сигнала по формуле (11.99) рассчитываются максимальные модульные оценки координат выходного вектора $\mathbf{y}[n]$ полезного сигнала.

Максимальные модульные оценки сигналов на выходах умножителей на весовые коэффициенты векторного ЦФ определяется следующими выражениями, аналогичными формулам (11.51) и (11.52) при $r=1$ для скалярного ЦФ [2]:

$$\begin{cases} V_{B\,k_{i\,l}} = Y_{\max_l}\left|\, b_{k_{i\,l}}\right|, \quad k=\overline{1,\, N}; \\ V_{A\,m_{i\,l}} = X_{\max_l}\left|\, a_{m_{i\,l}}\right|, \quad m=\overline{0,\, M}, \end{cases} \quad i,\, l=\overline{1,\, R}. \tag{11.106}$$

• В литературе по матричному анализу [47, 76] рассматриваются нормы векторов и матриц (норма вектора или матрицы — это неотрицательное вещественное число); здесь же мы используем векторы и матрицы, элементы которых являются нормами [см. (11.98)] или квадратами норм [см. (11.103)] от функций (11.95), т.е. матрицы $\mathbf{H}_\infty$ и $\mathbf{H}_D$, составленные из соответствующих норм.

•• Для анализа скалярных комплексных ЦФ используется аппарат анализа двухкоординатных векторных вещественных фильтров, эквивалентных скалярным комплексным [условия эквивалентности описываются формулами (4.53)].

Выбирая наибольшее значение из максимальных модульных оценок входных и выходных сигналов, а также из оценок (11.106) во внутренних точках структурной схемы векторного ЦФ, можно записать

$$V = \max_{k,\, m,\, i,\, l} \left\{ X_i, Y_l, V_{B\, k_{il}}, V_{A\, m_{il}} \right\}, \quad k = \overline{1,\, N}, \quad m = \overline{0,\, M}, \quad i,\, l = \overline{1,\, R} \qquad (11.107)$$

[ср. с формулой (11.53) при $r = 1$].

Оценка (11.107) используется при определении числа разрядов $S_{\text{ц}}$ операционных устройств DSP для представления кодов целых частей отсчётов сигналов в векторном ЦФ простой структуры.

◆ Детерминированные оценки шумов квантования в векторном ЦФ простой структуры

Для линейной шумовой модели векторного ЦФ простой структуры, изображённой на рис.10.21, введём следующие обозначения R-координатных векторов:

$\mathbf{E}_0$ — вектор максимальных модульных оценок шумов квантования входных сигналов (вектора $\mathbf{e}_0[n]$), т.е. внешних шумов квантования, координаты которого $E_{0_i} = \max\limits_n \left| e_{0_i}[n] \right| \ \left(i = \overline{1,\, R} \right)$;

$\mathbf{E}_y$ — вектор максимальных модульных оценок шумов квантования сигналов на выходе векторного ЦФ (в составе вектора $\tilde{\mathbf{y}}[n]$), координаты которого $E_{y_i} = \max\limits_n \left| e_{y_i}[n] \right| \ \left(i = \overline{1,\, R} \right)$;

$\boldsymbol{\Gamma}$ — вектор максимальных модульных оценок шумов квантования результатов умножения сигналов на весовые коэффициенты, приведённых к входу векторного сумматора (внутренних шумов квантования — вектора $\boldsymbol{\gamma}[n]$), координаты которого $\Gamma_i = \max\limits_n \left| \gamma_i[n] \right| \ \left(i = \overline{1,\, R} \right)$.

Аналогично тому, как из элементов матрицы $\mathbf{H}(z)$ была построена матрица $\mathbf{H}_\infty$ размера $R \times R$ [см. (11.98)], из элементов матрицы $\mathbf{G}_1(z)$ [см. (10.95)] построим матрицу $\mathbf{G}_{1\infty}$ размера $R \times R$, элементы которой равны нормам в пространстве L_∞ [см. (11.14)] элементов матрицы комплексных частотных характеристик $\mathbf{G}_1\left(e^{j\omega T}\right)$:

$$\left\| G_{1\, il}\left(e^{j\omega T}\right) \right\|_\infty = \max_{\omega \in [-\pi/T,\, \pi/T]} \left| G_{1\, il}\left(e^{j\omega T}\right) \right|, \quad i,\, l = \overline{1,\, R}. \qquad (11.108)$$

Согласно (11.99) получим максимальные модульные оценки составляющих вектора $\mathbf{E}_y$:

$$\mathbf{E}_{y_{\text{вх}}} \le \mathbf{H}_\infty \mathbf{E}_0, \qquad (11.109)$$

обусловленных внешними шумами квантования [ср. с выражением (11.58) для скалярного вещественного ЦФ], и

$$\mathbf{E}_{y_{\text{соб}}} \le \mathbf{G}_{1\infty}\,\mathbf{\Gamma}, \tag{11.110}$$

обусловленных собственными шумами квантования [ср. с формулой (11.60) при $r=1$ для скалярного вещественного ЦФ].

Объединяя (11.109) и (11.110), получим

$$\mathbf{E}_y \le \mathbf{E}_{y_{\text{вх}}} + \mathbf{E}_{y_{\text{соб}}} \le \mathbf{H}_\infty \mathbf{E}_0 + \mathbf{G}_{1\infty}\,\mathbf{\Gamma} \tag{11.111}$$

[ср. с (11.61) при $r=1$ для скалярного вещественного ЦФ].

◆ Вероятностные оценки шумов квантования в векторном ЦФ простой структуры

Для линейной шумовой модели векторного ЦФ простой структуры, изображённой на рис.10.21, введём следующие обозначения R-координатных векторов:

$\mathbf{m}_0$ — вектор математических ожиданий шумов квантования входных сигналов (вектора $\mathbf{e}_0[n]$), т.е. внешних шумов квантования; координаты вектора $\mathbf{m}_0$ определяются выражением [ср. с (11.62)] $m_{0_i} = M\{e_{0_i}[n]\}\ \left(i=\overline{1,\ R}\right)$;

$\mathbf{D}_0$ — вектор дисперсий шумов квантования входных сигналов (вектора $\mathbf{e}_0[n]$), т.е. внешних шумов квантования; координаты вектора $\mathbf{D}_0$ определяются выражением [ср. с (11.62)] $D_{0_i} = M\left\{\left(e_{0_i}[n]-m_{0_i}\right)^2\right\}\ \left(i=\overline{1,\ R}\right)$;

$\mathbf{m}_y$ — вектор математических ожиданий шумов квантования сигналов на выходе векторного ЦФ (в составе вектора $\tilde{\mathbf{y}}[n]$); координаты вектора $\mathbf{m}_y$ определяются выражением $m_{y_i} = M\{y_i[n]\}\ \left(i=\overline{1,\ R}\right)$;

$\mathbf{D}_y$ — вектор дисперсий шумов квантования сигналов на выходе векторного ЦФ (в составе вектора $\tilde{\mathbf{y}}[n]$); координаты вектора $\mathbf{D}_y$ определяются выражением $Y_{D_i} = M\left\{\left(y_i[n]-Y_{M_i}\right)^2\right\}\ \left(i=\overline{1,\ R}\right)$;

$\mathbf{m}_\gamma$ — вектор математических ожиданий внутренних шумов квантования, приведённых к входу векторного сумматора (вектора $\boldsymbol{\gamma}[n]$); координаты вектора $\mathbf{m}_\gamma$ определяются выражением $m_{\gamma_i} = M\{\gamma_i[n]\}\ \left(i=\overline{1,\ R}\right)$;

$\mathbf{D}_\gamma$ — вектор дисперсий внутренних шумов квантования, приведённых к входу векторного сумматора (вектора $\boldsymbol{\gamma}[n]$); координаты вектора $\mathbf{D}_\gamma$ определяются выражением $D_{\gamma_i} = M\left\{\left(\gamma_i[n]-m_{\gamma_i}\right)^2\right\}\ \left(i=\overline{1,\ R}\right)$.

Для нахождения характеристик вектора $\boldsymbol{\gamma}[n]$, описывающего приведённые в входу векторного сумматора (см. рис.10.21) шумы квантования арифметиче-

ских операций (внутренние шумы квантования), следует пользоваться выражением (10.94).

Аналогично тому, как из элементов матрицы $\mathbf{H}(z)$ была построена матрица $\mathbf{H}_D$ размера $R \times R$ [см. (11.103)], из элементов матрицы $\mathbf{G}_1(z)$ [см. (10.95)] построим матрицу $\mathbf{G}_{1D}$ размера $R \times R$, элементы которой равны квадратам норм в пространстве L_2 [см. (11.38)] элементов матрицы комплексных частотных характеристик $\mathbf{G}_1\left(e^{j\omega T}\right)$:

$$G_{D_{1\,il}} = \left\| G_{1\,il}\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2, \quad i,\, l = \overline{1,\, R}. \tag{11.112}$$

Кроме того, построим матрицу $\mathbf{G}_{M_1}$ размера $R \times R$, элементы которой равны значениям элементов матрицы комплексных частотных характеристик $\mathbf{G}_1\left(e^{j\omega T}\right)$ на нулевой частоте [ср. с (11.102)]:

$$G_{M_{1\,il}} = G_{1\,il}\left(e^{j\omega T}\right)\Big|_{\omega=0}, \quad i,\, l = \overline{1,\, R}. \tag{11.113}$$

Согласно (11.104) и (11.105) получим оценки векторов математических ожиданий и дисперсий составляющих выходного шума векторного ЦФ

$$\mathbf{m}_{y_{\text{вх}}} = \mathbf{H}_M\, \mathbf{m}_0; \tag{11.114}$$

$$\mathbf{D}_{y_{\text{вх}}} = \mathbf{H}_D\, \mathbf{D}_0, \tag{11.115}$$

обусловленных внешними шумами квантования [ср. с выражением (11.66) для скалярного вещественного ЦФ], и

$$\mathbf{m}_{y_{\text{соб}}} = \mathbf{G}_{M_1}\, \mathbf{m}_\gamma; \tag{11.116}$$

$$\mathbf{D}_{y_{\text{соб}}} = \mathbf{G}_{D_1}\, \mathbf{D}_\gamma, \tag{11.117}$$

обусловленных собственными шумами квантования [ср. с формулой (11.68) при $r = 1$ для скалярного вещественного ЦФ].

Объединяя (11.114) с (11.116) и (11.115) с (11.117), получим

$$\mathbf{m}_y = \mathbf{m}_{y_{\text{вх}}} + \mathbf{m}_{y_{\text{соб}}} = \mathbf{H}_M\, \mathbf{m}_0 + \mathbf{G}_{M_1}\, \mathbf{m}_\gamma; \tag{11.118}$$

$$\mathbf{D}_y = \mathbf{D}_{y_{\text{вх}}} + \mathbf{D}_{y_{\text{соб}}} = \mathbf{H}_D\, \mathbf{D}_0 + \mathbf{G}_{D_1}\, \mathbf{D}_\gamma \tag{11.119}$$

[ср. с (11.69) при $r = 1$ для скалярного вещественного ЦФ].

11.10. Оценки шумов квантования в векторных цифровых фильтрах сложной структуры

Рассмотренная методика анализа эффектов конечной разрядности векторных ЦФ простой структуры (см. рис. 10.21) очевидным образом обобщается на векторные ЦФ сложной структуры, линейная шумовая модель которых изобра-

жена на рис.10.22 (схема Джексона). При этом необходимо учитывать топологию соединения блоков векторных ЦФ (см. § 4.7) и особенности матричных операций, в соответствии с чем определяются матрицы передаточных функций $\mathbf{H}(z)$, $\mathbf{G}_r(z)$, $\mathbf{F}_r(z)$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$ схемы Л.Б. Джексона. По этим матрицам передаточных функций следует найти соответствующие матрицы комплексных частотных характеристик $\mathbf{H}\left(e^{j\omega T}\right)$, $\mathbf{G}_r\left(e^{j\omega T}\right)$, $\mathbf{F}_r\left(e^{j\omega T}\right)$, $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$.

Далее требуется построить квадратные матрицы размера $R\times R$, элементы которых (вещественные неотрицательные константы) соответственно равны

- нормам в пространстве L_∞ элементов матриц комплексных частотных характеристик: $\mathbf{H}_\infty$ [см. (11.98)], $\mathbf{G}_{r\,\infty}$ и $\mathbf{F}_{r\,\infty}$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$, где

$$\left\| G_{r\,il}\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty = \max_{\omega\in[-\pi/T,\,\pi/T]}\left| G_{r\,il}\left(e^{j\omega T}\right)\right|,\quad r=\overline{1,\,L},\quad i,\,l=\overline{1,\,R}; \tag{11.120}$$

$$\left\| F_{r\,il}\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty = \max_{\omega\in[-\pi/T,\,\pi/T]}\left| F_{r\,il}\left(e^{j\omega T}\right)\right|,\quad r=\overline{1,\,L},\quad i,\,l=\overline{1,\,R}; \tag{11.121}$$

- квадратам норм в пространстве L_2 элементов матриц комплексных частотных характеристик: $\mathbf{H}_D$ [см. (11.103)] и $\mathbf{G}_{D_r}$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$, где

$$G_{D_r\,il}=\left\| G_{r\,il}\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2,\quad r=\overline{1,\,L},\quad i,\,l=\overline{1,\,R}; \tag{11.122}$$

- значениям элементов матриц комплексных частотных характеристик на нулевой частоте: $\mathbf{H}_M$ [см. (11.102)] и $\mathbf{G}_{M_r}$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$, где

$$G_{M_r\,il}=G_{r\,il}\left(e^{j\omega T}\right)\Big|_{\omega=0},\quad r=\overline{1,\,L},\quad i,\,l=\overline{1,\,R}. \tag{11.123}$$

Кроме того, согласно модели внутренних шумов квантования (10.94) необходимо построить R-координатные векторы $\boldsymbol{\gamma}_r[n]$ и $\mathbf{v}_r[n]$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$ для схемы Л.Б. Джексона (см. рис.10.22), и по ним определить векторы, элементы которых являются вещественными неотрицательными константами:

- вектор $\boldsymbol{\Gamma}_r$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$ максимальных модульных оценок шумов квантования результатов умножения сигналов на весовые коэффициенты, приведённых к входу r-го векторного сумматора; координаты вектора определяются выражением

$$\Gamma_{r_i}=\max_n\left|\gamma_{r\,i}[n]\right|,\quad r=\overline{1,\,L},\quad i=\overline{1,\,R}; \tag{11.124}$$

- вектор $\mathbf{m}_{\gamma_r}$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$ математических ожиданий внутренних шумов квантования, приведённых к входу r-го векторного сумматора; координаты вектора определяются выражением

$$m_{\gamma_{r_i}}=M\left\{\gamma_{r_i}[n]\right\},\quad r=\overline{1,\,L},\quad i=\overline{1,\,R}; \tag{11.125}$$

- вектор $\mathbf{D}_{\gamma_r}$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$ дисперсий внутренних шумов квантования, приведённых к входу r-го векторного сумматора; координаты вектора определяются выражением

$$D_{\gamma_{r\,i}}=M\left\{\left(\gamma_{r\,i}[n]-m_{\gamma_{r\,i}}\right)^2\right\},\quad r=\overline{1,\ L},\quad i=\overline{1,\ R};\tag{11.126}$$

- вектор $\mathbf{V}_r$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$ максимальных модульных оценок сигналов на выходе r-го векторного сумматора (r-го блока); координаты вектора определяются выражением

$$V_{r_i}=\max_n\left|v_{r\,i}[n]\right|,\quad r=\overline{1,\ L},\quad i=\overline{1,\ R}.\tag{11.127}$$

Построенные таким образом векторные и матричные объекты для универсальной шумовой модели векторного ЦФ сложной структуры (см. рис.10.22) позволяют в компактной форме записать все оценочные соотношения, используемые как при детерминированном, так и при вероятностном подходе к анализу цифровых фильтров.

◆ Максимальные модульные оценки сигналов в векторном ЦФ сложной структуры

Для схемы, изображённой на рис.10.22 (схема Л.Б. Джексона), при заданных максимальных модульных значениях координат входного вектора $\mathbf{x}[n]$ полезного сигнала согласно формуле (11.99) рассчитываются максимальные модульные оценки координат выходного вектора $\mathbf{y}[n]$ полезного сигнала и выходов векторных сумматоров:

$$\begin{cases}\mathbf{Y}_{\max}\le\mathbf{H}_\infty\mathbf{X}_{\max};\\ \mathbf{V}_r\le\mathbf{F}_{r\,\infty}\mathbf{X}_{\max},\quad r=\overline{1,\ L}.\end{cases}\tag{11.128}$$

Максимальные модульные оценки сигналов на выходах умножителей на весовые коэффициенты векторного ЦФ определяется следующими выражениями, аналогичными формулам (11.51) и (11.52) для скалярного фильтра и (11.106) для векторного ЦФ простой структуры [2]:

$$\begin{cases}V_{Brk_{i\,l}}=V_{r\,l}\left|b_{rk_{i\,l}}\right|,\quad k=\overline{1,\ N_r};\\ V_{Arm_{i\,l}}=V_{\underline{r}\,l}\left|a_{rm_{i\,l}}\right|,\quad m=\overline{0,\ M_r},\end{cases}\quad r=\overline{1,\ L},\quad i,\ l=\overline{1,\ R}.\tag{11.129}$$

Здесь $\mathbf{V}_{\underline{r}}$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$ — максимальные модульные оценки сигналов на выходе $\underline{r}$-го векторного многовходового сумматора, т.е. сумматора, выход которого подключён к r-му блоку ЦФ сложной структуры (в частном случае это может быть входной сигнал, максимальная модульная оценка которого задаётся вектором $\mathbf{X}_{\max}$).

Выбирая наибольшее значение из максимальных модульных оценок входных $\mathbf{X}_{\max}$ и выходных $\mathbf{Y}_{\max}$ сигналов, сигналов на выходах векторных сумматоров $\mathbf{V}_r$ $\left(r=\overline{1,\ L}\right)$, а также из оценок (11.129) во внутренних точках структурных схем блоков векторного ЦФ сложной структуры, можно записать

$$V=\max_{r,\,k,\,m,\,i,\,l}\left\{X_i,\ Y_l,\ V_{r_i},\ V_{Brk_{il}},\ V_{Arm_{il}}\right\},\quad r=\overline{1,\ L},\quad k=\overline{1,\ N_r},\quad m=\overline{0,\ M_r},$$
$$i,\ l=\overline{1,\ R} \qquad (11.130)$$

[ср. с формулой (11.53) для скалярного ЦФ и (11.107) для векторного ЦФ простой структуры].

Оценка (11.130) используется при определении числа разрядов $S_{\text{ц}}$ операционных устройств DSP для представления кодов целых частей отсчётов сигналов в векторном ЦФ сложной структуры.

◆ Детерминированные оценки шумов квантования в векторном ЦФ сложной структуры

Максимальная модульная оценка вектора $\mathbf{E}_y$ складывается из двух составляющих: вектора $\mathbf{E}_{y_{\text{вх}}}$, обусловленного внешними шумами квантования, которые поступают на вход ЦФ в результате квантования аналоговых сигналов, и вектора $\mathbf{E}_{y_{\text{соб}}}$, обусловленного собственными (внутренними) шумами квантования результатов арифметических операций (см. § 10.5).

Для векторных ЦФ сложной структуры (см. рис.10.22) вектор $\mathbf{E}_{y_{\text{вх}}}$, как и в случае векторных фильтров простой структуры (см. рис.10.21), рассчитывается по формуле (11.109).

Составляющие вектора $\mathbf{E}_{y_{\text{соб}}}$, обусловленные r-м блоком векторного ЦФ сложной структуры (см. рис.10.22), оцениваются соотношением, аналогичным (11.110):

$$\mathbf{E}_{y_{\text{соб}\,r}}\le\mathbf{G}_{r\,\infty}\,\mathbf{\Gamma}_r,\quad r=\overline{1,\ L}. \qquad (11.131)$$

Суммируя (11.131) по всем r (т.е. по всем блокам ЦФ сложной структуры, см. рис.10.22), получим оценку

$$\mathbf{E}_{y_{\text{соб}}}\le\sum_{r=1}^{L}\mathbf{G}_{r\,\infty}\,\mathbf{\Gamma}_r. \qquad (11.132)$$

Объединяя оценки (11.131) и (11.132), получим

$$\mathbf{E}_y\le\mathbf{E}_{y_{\text{вх}}}+\mathbf{E}_{y_{\text{соб}}}\le\mathbf{H}_\infty\mathbf{E}_0+\sum_{r=1}^{L}\mathbf{G}_{r\,\infty}\,\mathbf{\Gamma}_r \qquad (11.133)$$

[ср. с (11.61) для скалярных вещественных ЦФ и (11.111) для векторных ЦФ простой структуры].

Оценка (11.109) и (11.132) используются при определении числа разрядов $S_д$ операционных устройств DSP для представления кодов дробных частей отсчётов сигналов в векторном ЦФ сложной структуры при детерминированном подходе.

◆ Вероятностные оценки шумов квантования в векторном ЦФ сложной структуры

При вероятностном подходе к анализу векторы математических ожиданий $\mathbf{m}_y$ и дисперсий $\mathbf{D}_y$ шумов квантования сигналов на выходе векторного ЦФ (в составе вектора $\tilde{\mathbf{y}}[n]$) складываются из векторов $\mathbf{m}_{y_{вх}}$, $\mathbf{D}_{y_{вх}}$, обусловленных внешними шумами квантования, которые поступают на вход ЦФ в результате квантования аналоговых сигналов, и векторов $\mathbf{m}_{y_{соб}}$, $\mathbf{D}_{y_{соб}}$, обусловленных собственными (внутренними) шумами квантования результатов арифметических операций (см. § 10.5).

Для векторных ЦФ сложной структуры (см. рис.10.22) оценки векторов $\mathbf{m}_{y_{вх}}$ и $\mathbf{D}_{y_{вх}}$, как и в случае векторных ЦФ простой структуры (см. рис.10.21), рассчитываются по формулам (11.114) и (11.115) соответственно.

Составляющие векторов $\mathbf{m}_{y_{соб}}$ и $\mathbf{D}_{y_{соб}}$, обусловленные r-м блоком векторного ЦФ сложной структуры (см. рис.10.22), оцениваются соотношениями, аналогичными (11.116) и (11.117):

$$\mathbf{m}_{y_{соб_r}} = \mathbf{G}_{M_r}\,\mathbf{m}_{\gamma_r}, \quad r = \overline{1,\,L}; \tag{11.134}$$

$$\mathbf{D}_{y_{соб_r}} = \mathbf{G}_{D_r}\,\mathbf{D}_{\gamma_r}, \quad r = \overline{1,\,L}. \tag{11.135}$$

Суммируя (11.134) и (11.135) по всем r (т.е. по всем блокам ЦФ сложной структуры, см. рис.10.22), получим оценки векторов математических ожиданий и дисперсий собственных шумов квантования на выходе ЦФ:

$$\mathbf{m}_{y_{соб}} = \sum_{r=1}^{L} \mathbf{G}_{M_r}\,\mathbf{m}_{\gamma_r}; \tag{11.136}$$

$$\mathbf{D}_{y_{соб}} = \sum_{r=1}^{L} \mathbf{G}_{D_r}\,\mathbf{D}_{\gamma_r}. \tag{11.137}$$

Объединяя оценки (11.134) с (11.136) и (11.135) с (11.137), получим расчётные формулы для оценки вектора математических ожиданий и вектора дисперсий шумов квантования сигналов на выходе векторного ЦФ (в составе вектора $\tilde{\mathbf{y}}[n]$):

$$\mathbf{m}_y = \mathbf{m}_{y_{вх}} + \mathbf{m}_{y_{соб}} = \mathbf{H}_M\,\mathbf{m}_0 + \sum_{r=1}^{L} \mathbf{G}_{M_r}\,\mathbf{m}_{\gamma_r} \tag{11.138}$$

$$\mathbf{D}_y = \mathbf{D}_{y_{\text{вх}}} + \mathbf{D}_{y_{\text{соб}}} = \mathbf{H}_D\,\mathbf{D}_0 + \sum_{r=1}^{L} \mathbf{G}_{D_r}\,\mathbf{D}_{\gamma_r} \qquad (11.139)$$

[ср. с (11.69) для скалярных вещественных ЦФ, а также с (11.118) и (11.119) соответственно для векторных ЦФ простой структуры].

Оценки (11.114), (11.115) и (11.136), (11.137) используются при определении числа разрядов $S_д$ операционных устройств DSP для представления кодов дробных частей отсчётов сигналов в векторном ЦФ сложной структуры при вероятностном подходе.

В разработанной методике векторных ЦФ наиболее трудоёмкой операцией является построение моделей эквивалентных собственных шумов квантования результатов умножения сигналов на весовые коэффициенты в векторном цифровом фильтре сложной структуры (см. рис.11.22). Используя (10.94), запишем общее выражение для координат векторов $\boldsymbol{\gamma}_r[n]$ $\left(r = \overline{1,\ L}\right)$:

$$\gamma_{r_i}[n] = \sum_{l=1}^{R} \left\{ \sum_{k=0}^{M_r} e_{il_{\mathrm{A}_r}(k)}[n] + \sum_{k=1}^{N_r} e_{il_{\mathrm{B}_r}(k)}[n] \right\}, \quad r = \overline{1,\ L}, \quad i = \overline{1,\ R}\ . \qquad (11.140)$$

Далее согласно выражениям (11.124) — (11.126) следует построить векторы $\boldsymbol{\Gamma}_r$, $\mathbf{m}_{\gamma_r}$, $\mathbf{D}_{\gamma_r}$, $\left(r = \overline{1,\ L}\right)$, используемые при анализе шумов квантования в векторных ЦФ сложной структуры при детерминированном и вероятностном подходах.

Краткие итоги

1. Построенные в гл.10 линейные шумовые модели ЦФ позволяют, оставаясь в рамках линейной теории, производить анализ нелинейных эффектов, обусловленных квантованием сигналов в цифровых фильтрах. Для этих моделей справедлив принцип суперпозиции, поэтому вклад в шумы квантования на выходе ЦФ от каждого источника шума квантования можно рассчитывать независимо от действия других источников шума.

2. Существуют два подхода к оценке влияния шумов квантования на погрешность обработки сигналов в цифровых системах: *детерминированный* и *вероятностный*. Детерминированный подход позволяет определить абсолютные границы погрешностей (получить максимальные модульные оценки), а вероятностный подход — статистические оценки (математическое ожидание, дисперсию и др.), что даёт более полную картину явлений, поскольку максимальные значения ошибок имеют малую вероятность.

3. При детерминированном подходе получают максимальные модульные оценки выходных сигналов, либо выходного шума квантования, которые определяются согласно выражению (11.2). При этом требуется вычисление параметра (вещественного числа), равного сумме модулей отсчётов импульсной характеристики. В случае нерекурсивного ЦФ вычисление этого параметра не представляет проблем, поскольку его импульсная характеристика имеет конечное число ненулевых отсчётов. Сложнее обстоит дело с рекурсивным ЦФ, импульсная характеристика которого имеет бесконечное число ненулевых отсчётов.

4. В случае рекурсивных цифровых фильтров вычисление суммы модулей отсчётов импульсных характеристик осуществляется косвенным образом на основе использования понятия нормы спектра сигнала и нормы комплексной частотной характеристики фильтра в пространстве L_p ($p \geq 1$) [см. (11.5)].

В теории цифровых фильтров практическое значение имеют следующие нормы комплексной частотной характеристики: $\left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_1$, $\left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2$ и $\left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty$. Первая из этих норм определяет максимальный по модулю отсчёт импульсной характеристики ЦФ $\max\limits_n \left| h[n] \right|$ [см. (11.11)], вторая — среднеквадратическое значение АЧХ на интервале, равном частоте дискретизации [см. (11.38)], а третья — максимальное значение АЧХ на интервале, равном частоте дискретизации [см. (11.14)]. Кроме того, квадрат нормы $\left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2$ равен сумме квадратов отсчётов импульсной характеристики [см. (11.38)], а норма $\left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_\infty$ равна сумме модулей отсчётов импульсной характеристики ЦФ [см. (11.14) и (11.16)]. Нормы комплексной частотной характеристики фильтра в пространстве L_p ($p \geq 1$) получают, используя вещественную функцию — амплитудно-частотную характеристику $A(\omega T)$ — на конечном интервале частот $\omega \in [-\pi/T,\ \pi/T]$, поэтому при вычислении норм $\left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_1$ и $\left\| H\left(e^{j\omega T}\right)\right\|_2^2$ могут применяться численные методы. Амплитудно-частотная характеристика ЦФ определяется теоретически либо экспериментально. Максимальные модульные оценки входного и выходного сигналов, либо входного и выходного шумов квантования связаны формулой (11.2) в случае нерекурсивного и формулой (11.21) в случае рекурсивного ЦФ.

5. При вероятностном подходе обычно ограничиваются расчётом математического ожидания и дисперсии выходной величины линейной системы. В установившемся режиме математические ожидания и дисперсии шумов квантования на входе и выходе нерекурсивного ЦФ связаны формулами (11.23) и (11.36), а рекурсивного ЦФ — формулами (11.25) и (11.45) соответственно.

6. Модульная оценка уровней сигналов в различных точках структурной схемы ЦФ необходима для того, чтобы правильно выбрать число разрядов процессора для представления целой части кодов чисел, гарантирующее отсутствие переполнения регистров операционных устройств. При сложной структуре ЦФ оценка максимальных уровней сигналов на выходе фильтра и на выходах многовходовых сумматоров производится по формулам (11.48). Результаты этих оценок, в свою очередь, используются для оценок максимальных уровней сигналов на выходах умножителей на весовые коэффициенты по формулам (11.51) и (11.52) во всех блоках сложного ЦФ. Максимальный по модулю уровень сигнала в ЦФ в соответствии с (11.53) определяется как максимальное значение из всех оценок (11.48), (11.51), (11.52).

7. Детерминированные оценки шумов квантования цифрового фильтра базируются на обобщённой линейной шумовой модели ЦФ (см. рис.10.13) при заданных структуре и характеристиках фильтра. Исходными данными являются максимальные модульные значения шумов квантования на входе ЦФ и на выходах умножителей на весовые коэффициенты. При детерминированных (модульных) оценках составляющая внешнего шума квантования на выходе цифрового фильтра определяется по формуле (11.58), составляющая собственных (внутренних) шумов квантования — по формуле (11.60), а суммарного выходного шума ЦФ — по формуле (11.61).

8. Вероятностные оценки шумов квантования цифрового фильтра базируются на обобщённой линейной шумовой модели ЦФ (см. рис.10.13) при заданных структуре и характеристиках фильтра. Исходными данными являются математические ожидания и дисперсии шумов квантования на входе ЦФ и на выходах умножителей на весовые коэффициенты. При вероятностном подходе математическое ожидание и дисперсия составляющей внешнего шума квантования на выходе ЦФ рассчитываются по формуле (11.66), составляющей собственных (внутренних) шумов квантования — по формуле (11.68), а суммарного выходного шума ЦФ — по формуле (11.69).

9. Шумы квантования на выходе рекурсивного ЦФ при прямой и канонической формах реализации имеют разные дисперсии. В § 11.5 получена формула (11.75), позволяющая без полного анализа путём сравнения квадратов норм частотных характеристик частей фильтра в пространстве L_2 судить о том, при какой форме реализации дисперсия собственных шумов квантования на выходе ЦФ имеет меньшее значение.

10. Цифровой фильтр, работающий по линейному алгоритму, из-за ограниченной разрядности операционных устройств является *нелинейной системой*. Для рекурсивных ЦФ, как и для всех нелинейных систем, существуют различные понятия устойчивости: устойчивость положения равновесия, устойчивость процессов, асимптотическая устойчивость. Из устойчивости положения равновесия, определяемого при $x[n] \equiv 0$ для всех $n \geq 0$, не следует устойчивость процессов (при $x[n] \neq 0$ для $n \geq 0$). Критерии устойчивости положения равновесия и устойчивости процессов имеют различную формулировку. Устойчивость процессов в рекурсивных цифровых фильтрах зависит от входных сигналов, т.е. процесс, вызванный одним воздействием $x[n]$, может быть устойчивым, а другим воздействием — неустойчивым.

11. При нарушении сформулированных в § 10.4 и 10.5 допущений о характеристиках шумов квантования в рекурсивных ЦФ возникают специфические для нелинейных систем эффекты, получившие название *предельных циклов*. Различают два вида предельных циклов: 1) *предельные циклы низкого уровня*, связанные с квантованием отсчётов обрабатываемого сигнала; 2) *предельные циклы высокого уровня*, связанные с переполнением регистров операционных устройств ЦФ.

Предельные циклы низкого уровня имеют вид последовательности отсчётов, огибающая которых является либо постоянной величиной, либо периодическим колебанием определённой амплитуды и частоты. Амплитуда колебаний при предельных циклах низкого уровня сравнима с уровнем шума квантования и при большой разрядности регистров операционных устройств ЦФ является относительно малой. Амплитуда колебаний предельного цикла на выходе ЦФ при прямой форме реализации с квантованием по методу усечения оценивается формулой (11.80). Предельные циклы высокого уровня могут возникать в рекурсивных ЦФ, если при выполнении арифметических операций происходит переполнение регистров. В этом случае ЦФ становится *существенно нелинейной системой*, в выходном сигнале появляются аномальные ошибки, т.е. фильтр перестаёт быть работоспособным. Эффекты предельных циклов высокого уровня проявляются либо в виде «насыщения», либо в виде стационарных колебаний на выходе ЦФ.

12. С целью предотвращения переполнения регистров операционных устройств, а также для улучшения шумовых характеристик ЦФ применяется масштабирование сигналов. Масштабные множители вводятся в структурную схему цифрового фильтра таким образом, чтобы нормировать сигнал по максимуму модуля сигнала в любой точке схемы фильтра к значению $Y = 2^{S_{\text{ц}}}$, где $S_{\text{ц}}$ — число разрядов разрядной сетки операционных устройств для представления двоичных кодов целой части чисел. Для упрощения реализации масштабные множители Ψ целесообразно выбирать равными 2^k ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$), так как операция умножения на такие множители сводится к сдвигу двоичного кода числа в регистре на k по-

зиций влево, если k положительное, или вправо, если k отрицательное число. Примеры расстановки масштабных множителей в ЦФ приведены на рис.11.4 и 11.5.

13. Изменение порядка следования блоков каскадной структуры (другими словами, изменение способа группировки нулей и полюсов передаточной функции ЦФ) может привести к изменению уровня шумов цифрового фильтра, возникающих в результате квантования чисел в его операционных устройствах. Это объясняется тем, что ЦФ благодаря эффектам квантования, строго говоря, является нелинейным устройством. Рекомендуемые варианты расстановки блоков ЦФ каскадной структуры описываются формулами (11.86) — (11.91). Из всех расстановок блоков (11.86) — (11.91) целесообразно применить ту, для которой требуемая разрядность операционных устройств ЦФ минимальна.

14. Учитывая внешнее сходство укрупнённых структурных схем скалярных и векторных вещественных ЦФ (ср. рис.10.10,*б* и 10.21, а также рис.10.13 и 10.22), математический аппарат, используемый для анализа скалярных ЦФ, может быть модифицирован на векторные цифровые фильтры. При этом расчётная схема для анализа скалярных ЦФ, изображённая на рис.11.1, заменяется её векторным аналогом, изображённым на рис.11.6; скалярные соотношения вида (11.21), (11.25) и (11.45) заменяются векторно-матричными (11.99), (11.104) и (11.105) соответственно. Векторно-матричная запись математических выражений для векторных ЦФ является более компактной и обозримой, чем координатная. При этом формируется «объектовое» восприятие структурных единиц, из которых строится векторный ЦФ сложной структуры.

При анализе векторных ЦФ необходимо учитывать два обстоятельства: 1) соединяемые блоки векторных ЦФ должны иметь одинаковую размерность векторов; 2) операция умножения матриц в общем случае некоммутативна, поэтому порядок следования блоков не может быть изменён (изменение порядка следования блоков влечёт изменение характеристик фильтра). При каскадном соединении блоков векторного ЦФ их матрицы передаточных функций перемножаются [см. (4.70)], а при параллельном — суммируются [см. (4.71)]. При соединении блоков с обратной связью матрица передаточных функций результирующего ЦФ определяется по формуле (4.74).

15. Для векторных ЦФ простой структуры (см. рис.10.21) максимальные модульные оценки полезных сигналов в структуре ЦФ описываются выражениями (11.99), (11.106) и (11.107), детерминированные оценки шумов квантования — соотношениями (11.109) — (11.111), а вероятностные оценки — формулами (11.114) — (11.119).

16. Для векторных ЦФ сложной структуры (см. рис.10.21) максимальные модульные оценки полезных сигналов в структуре ЦФ описываются выражениями (11.99), (11.128) — (11.130), детерминированные (максимальные модульные) оценки шумов квантования — соотношениями (11.109), (11.131) — (11.133), а вероятностные оценки — формулами (11.114), (11.115), (11.134) — (11.139).

17. При выполнении условий (4.53) двухкоординатный векторный вещественный ЦФ эквивалентен скалярному комплексному цифровому фильтру, поэтому все результаты, относящиеся к двухкоординатному векторному фильтру, при этих условиях распространяются на шумовые модели одномерных скалярных комплексных ЦФ. Анализ скалярных комплексных ЦФ удобно выполнять по методике анализа векторных вещественных ЦФ.

Глава 12

РЕШЕНИЕ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ОДНОМЕРНЫХ СКАЛЯРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ НЕРЕКУРСИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

12.1. Задачи инженерного исследования и проектирования технических систем и устройств

Все задачи, с которыми приходится иметь дело в инженерной практике при исследовании, проектировании и эксплуатации технических систем, можно разделить на три группы: 1) анализ, 2) синтез, 3) идентификация (табл.12.1).

Таблица 12.1

Задача	Вход	Система	Выход
Анализ	+	+	?
Синтез	+	?	+
Идентификация	?	+	+

Типовая постановка *задачи анализа* следующая: известна система (структура, характеристики и параметры), известно также входное воздействие (или его характеристики), требуется определить реакцию системы (или её характеристики). Задача анализа может иметь как самостоятельное значение, так и входить составной частью в процедуру решения задачи синтеза, например при эвристическом (инженерном) синтезе.

Задача синтеза формулируется следующим образом: известен класс входных воздействий, задана желаемая реакция системы (характеристики выходного сигнала), требуется определить систему (её структуру, характеристики, параметры), отвечающую заданным условиям. Существует два основных подхода к решению задачи синтеза: 1) математический и 2) эвристический (инженерный).

При математическом синтезе выбирается *критерий оптимальности* и исходя из условия задачи осуществляется её математическая формулировка для заданного или выбранного класса систем (например, линейных или нелинейных), т.е. составляются уравнения и (или) другие математические соотношения, решение которых приводит к искомому результату. В этом случае результат синтеза гарантирует получение оптимальной (наилучшей) системы в заданном классе в смысле выбранного критерия оптимальности. Однако провести матема-

тический синтез удаётся далеко не всегда. Во-первых, это связано со сложностью строгого математического описания задачи в условиях априорной неопределённости (не все условия функционирования системы могут быть известны на этапе проектирования); во-вторых, для решения полученных уравнений в математике не всегда имеются разработанные методы; в-третьих, даже при наличии таких методов приходится применять численное решение уравнений; в-четвёртых, при большой размерности задачи уравнения не всегда могут быть решены за приемлемое время и с приемлемыми затратами. В связи с этим математический синтез обычно проводят при довольно грубых допущениях, которые позволяют снизить размерность задачи, но при этом снижается также ценность результата её решения.

Эвристический (инженерный) синтез предполагает использование накопленного опыта проектирования систем подобного класса. Он предполагает разработку математических моделей системы, анализ функционирования этих моделей, сравнение результатов по выбранным показателям качества и выбор наилучшей модели системы. При этом обычно осуществляется поиск наилучшей структуры и оптимизация параметров системы (при математическом синтезе структура и параметры системы получаются в результате решения уравнений оптимизационной задачи). Таким образом, инженерный синтез осуществляется путём многократного решения задачи анализа для разных математических моделей системы (для разных структур) и при различных сочетаниях параметров. Математический синтез даёт «глобальный» результат, т.е. действительно наилучшую систему в смысле выбранного критерия для заданного или выбранного класса систем. Инженерный синтез может гарантировать лишь «локальный» результат, так как физически нереально проанализировать все возможные структуры при всех возможных сочетаниях параметров системы. Однако при инженерном синтезе удаётся учесть влияние на работу системы большого числа различных факторов, что делает результат синтеза более надёжным. Как показывает опыт разработки различных технических систем, синтезированные эвристическими методами системы по основным показателям качества уступают строго оптимальным, т.е. полученным в результате математического синтеза, системам весьма незначительно. Кроме того, строго оптимальная система может оказаться неприемлемо сложной для реализации, поэтому приходится реализовывать квазиоптимальную систему, которая по основным показателям качества близка к системе, синтезированной эвристически.

Типовая *задача идентификации* возникает, например, при физических измерениях, когда известен результат измерения, известны характеристики и параметры измерителя, требуется определить, какое же значение измеряемой величины было на входе измерительной системы.

12.2. Этапы проектирования цифровых фильтров

Проектирование цифровых фильтров (ЦФ) производится на основании технического задания (ТЗ), в котором формулируются как качественные, так и

количественные требования к его характеристикам, а также допуски на характеристики, оговариваются условия работы фильтра, а также могут быть указаны предпочтительные способы реализации, критерии оптимальности и т.д.

Из «реализационных» критериев оптимальности для ЦФ обычно применяют один из следующих: 1) минимальная ёмкость памяти, 2) минимальное число арифметических операций на один отсчёт выходного сигнала. Техническое задание на проектирование ЦФ составляется, исходя из анализа системы более высокого иерархического уровня, в которую ЦФ входит в качестве подсистемы или элемента.

Процедура проектирования ЦФ состоит из ряда последовательно выполняемых этапов. При этом результаты, получаемые в процессе решения задачи на предыдущем этапе, являются исходными данными для задач, решаемых на последующих этапах проектирования. В практике разработки сложных технических устройств широкое применение находят системы автоматизированного проектирования (САПР), основанные на систематизированном использовании ЭВМ для решения проектных задач. Это требует математической формализации задач, решаемых на отдельных этапах проектирования.

Основные этапы проектирования цифрового фильтра схематически представлены на рис.12.1.

Первый этап проектирования — формулировка и решение аппроксимационной задачи. Его цель состоит в математической формулировке задачи вычисления передаточной функции одномерного скалярного стационарного линейного дискретного фильтра по заданным в ТЗ требованиям к характеристикам фильтра, а также в нахождении этой передаточной функции. Поскольку передаточная функция линейной стационарной системы имеет дробно-рациональный вид (3.7), можно сказать, что цель первого этапа проектирования состоит в определении порядка N и коэффициентов $a_k \left(k = \overline{0,\ M} \right)$ и $b_k \left(k = \overline{1,\ N} \right)$ передаточной функции линейного дискретного фильтра. Задача синтеза на первом этапе может решаться либо математическими, либо эвристическими методами.

Второй этап проектирования — расчёт разрядности $S_{\text{К}}$ коэффициентов $\widetilde{a}_k \left(k = \overline{0,\ M} \right)$ и $\widetilde{b}_k \left(k = \overline{1,\ N} \right)$ ЦФ (или, что то же самое, разрядности регистров постоянной памяти процессора). Полученным на первом этапе коэффициентам линейного дискретного фильтра $a_k \left(k = \overline{0,\ M} \right)$ и $b_k \left(k = \overline{1,\ N} \right)$ соответствуют заданные частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ). Эти коэффициенты рассчитываются на универсальной ЭВМ, работающей в формате с плавающей точкой, поэтому точность их представления весьма высокая. При реализации ЦФ на процессоре, работающем в формате с фиксированной точкой, точность представления коэффициентов существенно меньше, что приводит к некоторой деформации частотных характеристик (см. § 10.3). Задача второго этапа состоит в таком выборе разрядности $S_{\text{К}}$ представления коэффициентов ЦФ $\widetilde{a}_k \left(k = \overline{0,\ M} \right)$ и $\widetilde{b}_k \left(k = \overline{1,\ N} \right)$, которая не вызывает выход частотных характеристик ЦФ за оговоренные в ТЗ допуски.

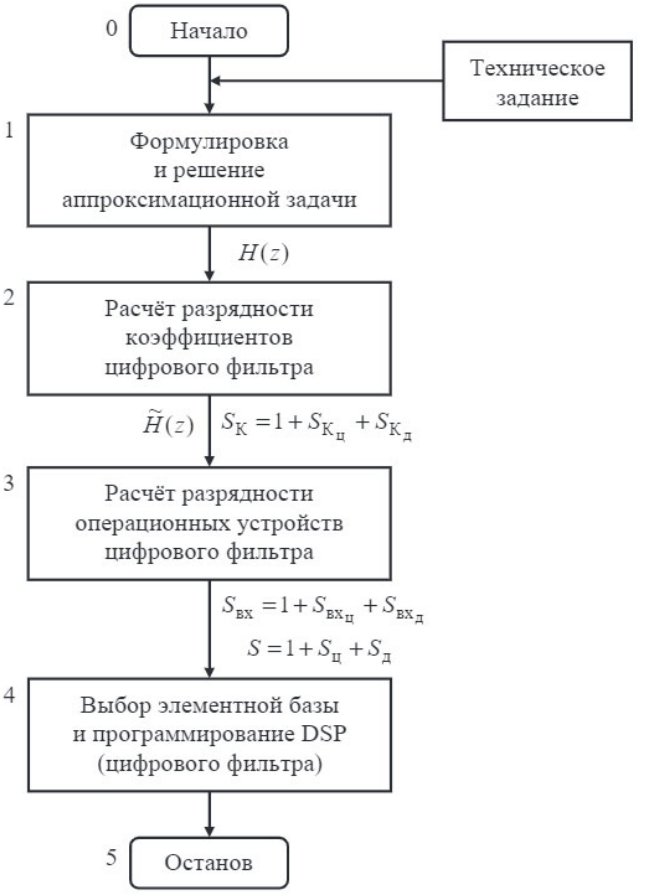


Рис.12.1. Основные этапы проектирования цифрового фильтра

На **третьем этапе** проектирования производится расчёт разрядности операционных устройств ЦФ с учётом заданных в ТЗ динамического диапазона входных сигналов и отношения сигнал/шум на выходе фильтра. При этом должен учитываться диапазон изменения сигналов в различных точках структурной схемы цифрового фильтра.

На **четвёртом этапе** проектирования исходя из требуемого быстродействия и необходимой разрядности процессора осуществляется выбор элементной базы (сигнального процессора — DSP), программирование алгоритма фильтрации, полученного из передаточной функции $\widetilde{H}(z)$ с квантованными коэффициентами, моделирование его работы и «прошивка» этого алгоритма на DSP.

При выборе типа ЦФ необходимо учитывать следующие обстоятельства:

- Нерекурсивные ЦФ при выполнении определённых условий имеют строго линейную ФЧХ •. Дисперсия собственных шумов квантования на выходе нерекурсивных ЦФ, как правило, гораздо меньше, чем на выходе рекурсивных фильтров. Процедура решения аппроксимационной задачи для нерекурсивных фильтров существенно проще, чем для рекурсивных.
- Основной недостаток нерекурсивных ЦФ по сравнению с рекурсивными состоит в том, что при одинаковых требованиях к АЧХ и при отсутствии требований к линейности ФЧХ нерекурсивный фильтр намного сложнее в реализации, чем рекурсивный, что связано с существенно большим числом выполняемых в нём арифметических операций из-за гораздо большего порядка нерекурсивного ЦФ.

12.3. Формулировка аппроксимационной задачи при проектировании скалярных вещественных нерекурсивных цифровых фильтров

Аппроксимационная задача при проектировании скалярных вещественных нерекурсивных ЦФ решается методами математического синтеза. При этом первый этап проектирования ЦФ включает в себя следующие операции [8]:

- Определение *аппроксимируемой функции* $B(W)$, которая представляет идеальную форму заданной в ТЗ характеристики ЦФ. Здесь и далее W — нормированная частота (см. § 3.4). В качестве функций $B(W)$ обычно используются кусочно-линейные выражения.
- Выбор вида *аппроксимирующей функции* $\Phi(W, \mathbf{C})$, значения которой определяют заданную в ТЗ характеристику ЦФ с допустимой погрешностью. Компоненты $c_i \left(i = \overline{0, K}\right)$ вектора $\mathbf{C}$ являются параметрами, либо совпадающими с коэффициентами передаточной функции $H(z)$, либо достаточно просто связанными с ними.
- Выбор *критерия аппроксимации*, т.е. уточнение смысла приближённого равенства

$$\Phi(W, \mathbf{C}) \approx B(W) \qquad (12.1)$$

при заданных значениях W.

- Выбор *весовой функции* аппроксимации $q(W) \geq 0$, задающей требования к точности приближённого равенства (12.1).
- Оценку необходимого порядка фильтра N.
- Нахождение передаточной функции ЦФ $H(z)$.
- Проверку критерия решения, т.е. проверку выполнения заданных в ТЗ требований к характеристикам фильтра.

• См. § 5.1.

Если требования ТЗ выполняются, то можно переходить ко второму этапу проектирования, в противном случае следует повторно решить аппроксимационную задачу при большем порядке фильтра N или же при других весовой $q(W)$ и (или) аппроксимирующей $\Phi(W, \mathbf{C})$ функциях. Возможен также пересмотр критерия аппроксимации.

◆ Аппроксимируемая функция

Аппроксимируемая функция $B(W)$ может быть выбрана различным образом. Для избирательных ЦФ с линейной ФЧХ обычно принимают в полосах пропускания $B(W)=1$, в полосах задерживания $B(W)=0$, а в переходных полосах функция $B(W)$ не задаётся (её значения в этих полосах могут быть любыми в пределах от 0 до 1). На рис.12.2 показан типичный вид аппроксимируемых функций $B(W)$ для четырёх типов избирательных ЦФ.

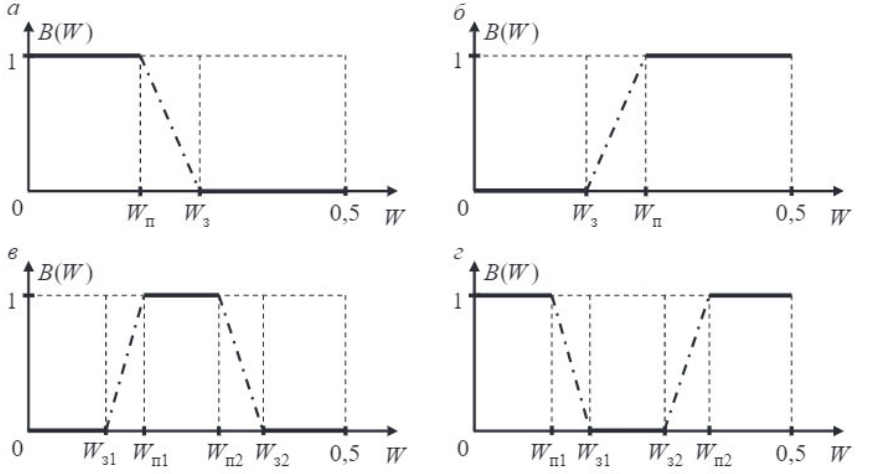


Рис.12.2. Типичный вид аппроксимируемых функций для избирательных ЦФ: *а* — ФНЧ; *б* — ФВЧ; *в* — ПФ; *г* — РФ

Математические выражения аппроксимируемых функций $B(W)$, изображённых на рис.12.2 сплошными линиями, имеют следующий вид:

- для фильтра нижних частот (ФНЧ)

$$B(W)=\begin{cases}1, & 0\le W\le W_{\text{п}};\\ 0, & W_{\text{з}}\le W\le 0{,}5;\end{cases} \tag{11.2}$$

- для фильтра верхних частот (ФВЧ)

$$B(W)=\begin{cases}1, & W_{\text{п}}\le W\le 0{,}5;\\ 0, & 0\le W\le W_{\text{з}};\end{cases} \tag{12.3}$$

- для полосового фильтра (ПФ)

$$B(W)=\begin{cases}1, & W_{п1}\le W\le W_{п2};\\ 0, & 0\le W\le W_{з1},\quad W_{з2}\le W\le 0{,}5;\end{cases} \tag{12.4}$$

- для режекторного фильтра (РФ)

$$B(W)=\begin{cases}1, & 0\le W\le W_{п1},\quad W_{п2}\le W\le 0{,}5;\\ 0, & W_{з1}\le W\le W_{з2}.\end{cases} \tag{12.5}$$

В некоторых случаях аппроксимируемую функцию $B(W)$ необходимо доопределить в переходных полосах таким образом, чтобы она была непрерывной в диапазоне нормированных частот $W\in[0,\ 1/2]$. Один из способов такого доопределения функции $B(W)$ для избирательных ЦФ показан на рис.12.2 штрихпунктирными линиями. Математические выражения доопределённых аппроксимируемых функций $B(W)$, изображённых на рис.12.2, имеют следующий вид:

- для фильтра нижних частот (ФНЧ)

$$B(W)=\begin{cases}1, & 0\le W\le W_{п};\\ (W-W_{з})/(W_{п}-W_{з}), & W_{п}<W<W_{з};\\ 0, & W_{з}\le W\le 0{,}5;\end{cases} \tag{12.6}$$

- для фильтра верхних частот (ФВЧ)

$$B(W)=\begin{cases}0, & 0\le W\le W_{з};\\ (W-W_{з})/(W_{п}-W_{з}), & W_{з}<W<W_{п};\\ 1, & W_{п}\le W\le 0{,}5;\end{cases} \tag{12.7}$$

- для полосового фильтра (ПФ)

$$B(W)=\begin{cases}0, & 0\le W\le W_{з1};\\ (W-W_{з1})/(W_{п1}-W_{з1}), & W_{з1}<W<W_{п1};\\ 1, & W_{п1}\le W\le W_{п2};\\ (W-W_{з2})/(W_{п2}-W_{з2}), & W_{п2}<W<W_{з2};\\ 0, & W_{з2}\le W\le 0{,}5;\end{cases} \tag{12.8}$$

- для режекторного фильтра (РФ)

$$B(W)=\begin{cases}1, & 0\le W\le W_{п1};\\ (W-W_{з1})/(W_{п1}-W_{з1}), & W_{п1}<W<W_{з1};\\ 0, & W_{з1}\le W\le W_{з2};\\ (W-W_{з2})/(W_{п2}-W_{з2}), & W_{з2}<W<W_{п2};\\ 1, & W_{п2}\le W\le 0{,}5.\end{cases} \tag{12.9}$$

Если аппроксимируемая функция $B(W)$ согласно требованиям ТЗ на различных участках частотного диапазона задаётся полем допусков

$$\xi_{i1} \le B(W) \le \xi_{i2}, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \ldots, \tag{12.10}$$

то целесообразно принять [14]

$$B(W) = (\xi_{i1} + \xi_{i2})/2, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \ldots. \tag{12.11}$$

У неминимально-фазовых ЦФ амплитудно-частотная $A(W)$ и фазочастотная $\varphi(W)$ характеристики взаимно не связаны между собой и могут задаваться произвольно •, поэтому при проектировании неминимально-фазовых ЦФ с нелинейной фазочастотной характеристикой на основе требований ТЗ к АЧХ и ФЧХ можно применить две аппроксимируемые функции:

$$\begin{cases} B_1(W) = A(W)\cos\left[\varphi(W)\right]; \\ B_2(W) = A(W)\sin\left[\varphi(W)\right]. \end{cases} \tag{12.12}$$

У минимально-фазовых фильтров амплитудно-частотная $A(W)$ и фазочастотная $\varphi(W)$ характеристики не являются независимыми и связаны парой преобразований Гильберта, т.е. задание одной из них однозначно определяет другую, поэтому при проектировании минимально-фазовых ЦФ обычно аппроксимируемую функцию представляют в виде требуемой АЧХ или её квадрата:

$$B(W) \approx A(W) \text{ или } B(W) \approx A^2(W). \tag{12.13}$$

◆ Весовая функция

Весовая функция $q(W)$ вводится для того, чтобы подчеркнуть относительную важность для аппроксимации отдельных областей частотного диапазона [14]. При тех значениях W, для которых точность приближённого равенства (12.1) должна быть выше, весовая функция $q(W)$ должна быть больше. При любых значениях W весовая функция неотрицательна: $q(W) \ge 0$, поскольку отрицательные значения $q(W)$ не имеют физического смысла.

Если в ТЗ на проектирование ЦФ определено поле допусков (12.10), то весовую функцию обычно выбирают следующим образом:

$$q(W) = \frac{R}{\xi_{i1} - \xi_{i2}}, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \ldots, \tag{12.14}$$

где R — константа (нормирующий множитель), общая для всех частотных интервалов.

◆ Аппроксимирующая функция

Аппроксимирующая функция $\Phi(W, \mathbf{C})$ содержит свободные параметры, подлежащие определению в процессе решения аппроксимационной задачи (век-

• См. § 3.5.

тор параметров $\mathbf{C}$). Если функция $\Phi(W,\ \mathbf{C})$ линейно зависит от координат вектора $\mathbf{C}$, то аппроксимационная задача является *линейной*. Для линейных аппроксимационных задач разработаны эффективные алгоритмы решения [14]. Если функция $\Phi(W,\ \mathbf{C})$ нелинейно зависит от координат вектора $\mathbf{C}$, то аппроксимационная задача будет *нелинейной*. Поскольку для нелинейных задач не существует эффективных алгоритмов решения, их, как правило, стремятся свести к эквивалентным линейным задачам.

Функция $\Phi(W,\ \mathbf{C})$ для линейной аппроксимационной задачи имеет следующий вид:

$$\Phi(W,\ \mathbf{C}) = \langle \mathbf{C},\ \mathbf{\Phi}(W) \rangle = \sum_{i=0}^{K} c_i \Phi_i(W), \tag{12.15}$$

где $\mathbf{\Phi}(W)$ — вектор базисных функций $\Phi_i(W)$; $c_i \left(i = \overline{0,\ K} \right)$ — компоненты вектора $\mathbf{C}$; $\langle ..., ... \rangle$ — символ скалярного произведения векторов.

В качестве базисных функций $\Phi_i(W) \left(i = \overline{0,\ K} \right)$ используются синусоиды или косинусоиды кратных частот, алгебраические или тригонометрические полиномы, а также дробно-рациональные функции, в числителе и знаменателе которых записаны алгебраические или тригонометрические полиномы [13].

◆ **Критерии аппроксимации**

При проектировании ЦФ применяют два основных критерия аппроксимации, уточняющие смысл приближённого равенства (12.1):

- среднеквадратический критерий

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(W) \left[B(W) - \Phi(W,\ \mathbf{C}) \right]^2 dW \to \min; \tag{12.16}$$

- минимаксный (наилучший равномерный или чебышевский) критерий

$$\max_{W \in [\alpha_1,\ \alpha_2]} q(W) \left| B(W) - \Phi(W,\ \mathbf{C}) \right| \to \min, \tag{12.17}$$

где $[\alpha_1, \alpha_2] \subseteq [0,\ 1/2]$ — интервал частот.

Критерии (12.16) и (12.17) могут применяться также совместно (каждый для определённой области частот).

В математическом плане аппроксимационная задача сводится к задаче нахождения оптимального (в смысле выбранного критерия) вектора параметров $\mathbf{C}$ (т.е. к *оптимизационной* задаче). Затем по значениям компонент $c_i \left(i = \overline{0,\ K} \right)$ вектора $\mathbf{C}$ определяют коэффициенты передаточной функции $H(z)$ цифрового фильтра.

Такой подход в случае нерекурсивных ЦФ с линейной ФЧХ приводит к линейной задаче оптимизации, а в случае нерекурсивных ЦФ с нелинейной ФЧХ и рекурсивных ЦФ — к нелинейной задаче. В связи с этим при проектиро-

вании фильтров с нелинейной ФЧХ оптимизационные методы решения аппроксимационной задачи используют сравнительно редко, чаще применяют эвристические методы синтеза.

При проектировании рекурсивных ЦФ наибольшее распространение получили методы эвристического синтеза, основанные на билинейном преобразовании передаточной функции аналогового ФНЧ-прототипа (см. гл.13).

12.4. Применение оконных функций для синтеза нерекурсивных цифровых фильтров с линейными фазочастотными характеристиками

Комплексная частотная характеристика $H\left(e^{j2\pi W}\right)$ любого ЦФ является периодической функцией частоты с периодом, равным частоте дискретизации [•] $\omega_д = 2\pi/T$ или $W_д = 1$, поэтому её можно представить рядом Фурье

$$H\left(e^{j2\pi W}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-j2\pi W n}, \qquad (12.18)$$

где

$$h[n] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H\left(e^{j\omega T}\right) e^{j\omega T n}\, d\omega = \int_{-0,5}^{0,5} H\left(e^{j2\pi W}\right) e^{j2\pi W n}\, dW. \qquad (12.19)$$

Коэффициенты разложения комплексной частотной характеристики ЦФ в ряд Фурье являются отсчётами импульсной характеристики [••] фильтра $h[n]$.

Если положить $e^{j\omega T} = e^{j2\pi W} = z$, то из разложения (12.18) получим

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, z^{-n}, \qquad (12.20)$$

где

$$h[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C H(z)\, z^{n-1}\, dz. \qquad (12.21)$$

Таким образом, путём разложения в ряд Фурье комплексной частотной характеристики цифрового фильтра $H\left(e^{j2\pi W}\right)$ можно определить импульсную характеристику $h[n]$, располагая которой с помощью двустороннего Z-преобразования [•••] нетрудно найти соответствующую передаточную функцию $H(z)$. Однако определённая таким образом передаточная функция описывает *физически нереализуемый* нерекурсивный ЦФ бесконечного порядка.

[•] См. § 3.4.
[••] См. соотношения (3.21).
[•••] См. формулы (1.16) и (1.17).

Для получения передаточной функции конечного порядка• M необходимо провести усечение ряда (12.20), полагая $h[n]=0$ при $|n|>M/2$. Тогда

$$H(z)=h[0]+\sum_{n=1}^{M/2}\left\{h[-n]\ z^{n}+h[n]\ z^{-n}\right\}. \qquad (12.22)$$

Физическая реализуемость ЦФ с передаточной функцией (12.22) может быть достигнута путём умножения $H(z)$ на $z^{-M/2}$:

$$H'(z)=z^{-M/2}H(z). \qquad (12.23)$$

Такая модификация передаточной функции допустима, поскольку АЧХ при этом остаётся неизменной, а групповое время запаздывания (ГВЗ) увеличивается на постоянную величину $TM/2$.

Подстановкой $z=e^{j\omega T}$ в выражения (12.22) и (12.23) можно получить комплексную частотную характеристику физически реализуемого ЦФ:

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=e^{-j\omega TM/2}\left\{h[0]+\sum_{n=1}^{M/2}\left(h[-n]\ e^{j\omega Tn}+h[n]\ e^{-j\omega Tn}\right)\right\}. \qquad (12.24)$$

Рассмотрим два практически важных случая, когда импульсная характеристика симметрична $h[-n]=h[n]$ или антисимметрична $h[-n]=-h[n]$. В первом случае

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=e^{-j\omega T\frac{M}{2}}\left\{h[0]+\sum_{n=1}^{M/2}2h[n]\frac{e^{j\omega Tn}+e^{-j\omega Tn}}{2}\right\}=$$

$$=e^{-j\omega T\frac{M}{2}}\left\{h[0]+\sum_{n=1}^{M/2}2h[n]\cos(\omega Tn)\right\}, \qquad (12.25)$$

а во втором

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=e^{-j\omega T\frac{M}{2}}\sum_{n=1}^{M/2}2\,j\,h[n]\frac{e^{j\omega Tn}-e^{-j\omega Tn}}{2j}=$$

$$=e^{j\frac{\pi}{2}-j\omega T\frac{M}{2}}\sum_{n=1}^{M/2}2h[n]\sin(\omega Tn). \qquad (12.26)$$

Сопоставляя выражение (12.25) с (5.23) и выражение (12.26) с (5.39), нетрудно видеть их совпадение с точностью до обозначений.

Таким образом, при чётном значении M в случае симметричности импульсной характеристики $h[-n]=h[n]$ получается цифровой фильтр с линейной ФЧХ вида 1, а в случае антисимметричности $h[-n]=-h[n]$ — ЦФ с линейной

• Здесь предполагается, что M — чётное число. С помощью простой модификации аналогичные результаты можно получить и для нечётного M (см. § 5.3 и 5.5).

ФЧХ вида 3. Нетрудно показать, что при нечётном значении M в случае симметричности импульсной характеристики $h[-n]=h[n]$ получается ЦФ с линейной ФЧХ вида 2, а в случае антисимметричности $h[-n]=-h[n]$ — ЦФ с линейной ФЧХ вида 4 [см. выражения (5.32) и (5.46)].

Однако простое усечение ряда (12.20) [или ряда (12.18)] приводит к хорошо известному явлению Гиббса [9], которое проявляется в виде выбросов и пульсаций определённого уровня до и после точки разрыва в аппроксимируемой АЧХ. Так, например, при аппроксимации АЧХ идеального избирательного фильтра (ФНЧ, ФВЧ, ПФ или РФ) максимальная амплитуда пульсаций частотных характеристик составляет около 9 % от величины скачка в точке разрыва АЧХ и не уменьшается при увеличении длины импульсной характеристики (порядка фильтра M), т.е. учёт всё большего числа членов ряда Фурье (12.18) не приводит к уменьшению максимальной амплитуды пульсаций. При этом по мере увеличения порядка фильтра M уменьшается ширина выброса.

Поскольку простое усечение ряда (12.18) не приводит к приемлемой аппроксимации АЧХ идеального избирательного фильтра, этот метод мало пригоден для проектирования нерекурсивных ЦФ [6]. Для модификации коэффициентов Фурье $h[n]$ в усечённой формуле (12.18) с тем, чтобы управлять сходимостью ряда Фурье, лучшие результаты даёт метод, основанный на использовании весовой последовательности конечной длины $\vartheta[n]$, называемой окном.

Пусть $H(z)=Z\{h[n]\}$ — передаточная функция физически нереализуемого нестационарного линейного нерекурсивного ЦФ бесконечного порядка, описываемая выражением (12.20);

$$\Theta(z)=Z\{\vartheta[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\vartheta[n]\,z^{-n} \tag{12.27}$$

— передаточная функция окна;

$$H_{\vartheta}(z)=Z\{h[n]\vartheta[n]\} \tag{12.28}$$

— модифицированная окном передаточная функция нерекурсивного ЦФ.

Применив к выражению (12.28) теорему о комплексной свёртке •, найдём передаточную функцию модифицированного ЦФ

$$H_{\vartheta}(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{C}H(v)\,\Theta\!\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv\,. \tag{12.29}$$

В частном случае при $z=e^{j\omega T}$ и $v=e^{j\Omega T}$ из (12.29) можно получить комплексную частотную характеристику модифицированного окном цифрового фильтра

$$H_{\vartheta}\!\left(e^{j\omega T}\right)=\frac{T}{2\pi}\int_{0}^{2\pi/T}H\!\left(e^{j\Omega T}\right)\Theta\!\left(e^{j[\omega-\Omega]Tn}\right)d\Omega\,. \tag{12.30}$$

• См. формулы (1.63) и (1.66).

Спектр функции окна $\Theta\left(e^{j\omega T}\right)=F\{\vartheta[n]\}=\Theta(z)\big|_{z=\exp\{j\omega T\}}$ имеет главный лепесток, содержащий почти всю энергию окна, и боковые лепестки, которые обычно быстро затухают. При определённом выборе функции окна $\vartheta[n]$ удаётся устранить явление Гиббса.

Однако при этом, во-первых, по обе стороны от точки разрыва аппроксимируемой АЧХ (т.е. между полосами пропускания и задерживания) появляются переходные полосы, ширина которых зависит от ширины главного лепестка функции $\Theta\left(e^{j\omega T}\right)$, во-вторых, в полосах пропускания и задерживания возникают ошибки аппроксимации АЧХ, имеющие вид пульсаций, которые обусловлены боковыми лепестками функции $\Theta\left(e^{j\omega T}\right)$. Отсюда следует, что функция окна $\vartheta[n]$ должна обладать следующими свойствами:

- ширина главного лепестка АЧХ окна $\left|\Theta\left(e^{j\omega T}\right)\right|$, содержащего по возможности большую часть общей энергии, должна быть малой;
- энергия в боковых лепестках частотной характеристики окна должна быстро уменьшаться при приближении ω к $\left|\omega_д/2\right|=\left|\pi/T\right|$.

Наиболее часто используются следующие функции окна [11]: прямоугольная, Хэнна, Хэмминга, Блэкмана, Кайзера.

◆ Прямоугольное окно

$(M+1)$-точечное прямоугольное окно, соответствующее простому усечению (без модификации) ряда Фурье (12.18) [см. также (12.22)], описывается весовой функцией

$$\vartheta_R[n]=\begin{cases}1, & |n|\le M/2;\\ 0, & |n|>M/2.\end{cases} \tag{12.31}$$

Комплексная частотная характеристика прямоугольного окна в соответствии с (12.27) при $z=e^{j\omega T}$ равна•

$$\Theta_R\left(e^{j\omega T}\right)=\sum_{n=-M/2}^{M/2}e^{-j\omega nT}=\frac{e^{j\omega MT/2}-e^{-j\omega MT/2}e^{-j\omega T}}{1-e^{-j\omega T}}=$$

$$=\frac{e^{j\omega T(M+1)/2}-e^{-j\omega T(M+1)/2}}{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}=\frac{\sin\left[\omega T(M+1)/2\right]}{\sin(\omega T/2)}. \tag{12.32}$$

Она является вещественной функцией частоты ω.

• Здесь применяется формула конечной суммы членов геометрической прогрессии

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q},$$

где a_1 — первый; a_n — последний член; q — знаменатель геометрической прогрессии.

Поскольку $\Theta_R\left(e^{j\omega T}\right)=0$ при $\omega=2\pi k/[T(M+1)]=k\,\omega_д/(M+1)$ для $k=$ $=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ldots$, то ширина главного лепестка АЧХ окна равна $4\pi/[T(M+1)]=$ $=2\omega_д/(M+1)$. Коэффициент пульсаций (КП), определяемый выражением [11]

$$\text{КП}=\frac{\text{максимальная амплитуда бокового лепестка}}{\text{амплитуда главного лепестка}}\cdot 100\,\%, \qquad (12.33)$$

для прямоугольного окна составляет 22,3 % при $M=10$ и медленно уменьшается с увеличением M.

Пример 12.1. Спроектировать нерекурсивный цифровой ФНЧ с амплитудно-частотной характеристикой

$$\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_п;\\ 0, & \omega_п<|\omega|\le\omega_д/2,\end{cases}$$

используя прямоугольное окно.

В соответствии с (12.21) при $z=e^{j\omega T}$ найдём импульсную характеристику физически нереализуемого ЦФ:

$$h[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{n-1}\,dz=\frac{T}{2\pi}\int_{-\omega_п}^{\omega_п}e^{j\omega Tn}\,d\omega=\frac{T}{2\pi}\,\frac{e^{j\omega Tn}}{jTn}\Bigg|_{-\omega_п}^{\omega_п}=$$

$$=\frac{e^{j\omega_п Tn}-e^{-j\omega_п Tn}}{2j\pi n}=\frac{\sin(\omega_п Tn)}{\pi n}.$$

Согласно выражениям (12.22) и (12.23) получим передаточную функцию физически реализуемого ЦФ:

$$H'(z)=z^{-M/2}\sum_{n=0}^{M/2}\frac{a_n}{2}\left(z^n+z^{-n}\right),$$

где

$$a_n=\begin{cases}h[0]=\dfrac{\omega_п T}{\pi}, & n=0;\\ 2h[n]=\dfrac{2\sin(\omega_п Tn)}{\pi n}, & n=\overline{1,\dfrac{M}{2}}.\end{cases}$$

Комплексная частотная характеристика рассчитанного ЦФ имеет вид

$$H'\left(e^{j\omega T}\right)=e^{-j\omega T\,M/2}\sum_{n=0}^{M/2}\frac{a_n}{2}\left(e^{j\omega Tn}+e^{-j\omega Tn}\right)=e^{-j\omega T\,M/2}\sum_{n=0}^{M/2}a_n\cos(\omega Tn).$$

Сравнивая это выражение с (12.3) [или с (12.25)], нетрудно видеть, что получился цифровой ФНЧ с линейной ФЧХ (фильтр вида 1 — см. § 5.2).

На рис.12.3 изображена АЧХ $A(\omega T)=\left|H'\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ спроектированного цифрового ФНЧ 100-го порядка ($M=100$) при $W_п=f_п/f_д=0{,}2$. На рисунке видны пульсации и выбросы, обусловленные явлением Гиббса. Ширина переходной полосы при использовании прямоугольного окна в данном случае равна $W_{пер}\approx 0{,}0314$.

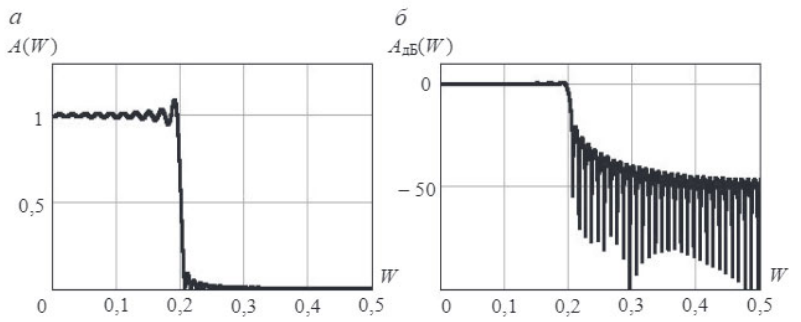


Рис.12.3. АЧХ нерекурсивного цифрового ФНЧ с линейной ФЧХ при $M=100$ и $W_{\text{п}}=0{,}2$, спроектированного при использовании прямоугольного окна: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

◆ Окна Хэнна и Хэмминга

Окна Хэнна и Хэмминга являются сглаженными и описываются весовой функцией [11]

$$\vartheta_H[n]=\begin{cases}\alpha+(1-\alpha)\cos(2\pi n/M), & |n|\le M/2;\\ 0, & |n|>M/2,\end{cases} \tag{12.34}$$

отличаясь лишь значениями параметра α: для окна Хэнна $\alpha=0{,}5$, а для окна Хэмминга $\alpha=0{,}54$.

Комплексную частотную характеристику окна (12.34) найдём, воспользовавшись искусственным приёмом. Представим выражение (12.34) в виде произведения функции $\alpha+(1-\alpha)\cos(2\pi n/M)$, определяемой для всех n на бесконечном интервале, на прямоугольное окно (12.31):

$$\vartheta_H[n]=\vartheta_R[n]\left[\alpha+(1-\alpha)\cos(2\pi n/M)\right]=$$

$$=\alpha\,\vartheta_R[n]+\frac{1-\alpha}{2}\,\vartheta_R[n]\left(e^{j2\pi n/M}+e^{-j2\pi n/M}\right). \tag{12.35}$$

Затем, полагая $z=e^{j\omega T}$, возьмём Z-преобразование от обеих частей равенства (12.35). С учётом выражения для комплексной частотной характеристики прямоугольного окна (12.32) и теоремы умножения аргумента Z-преобразования на комплексную постоянную •

$$X(v\,z)=Z\left\{v^{-n}x[n]\right\}, \tag{12.36}$$

• Доказательство теоремы:

$$X(v\,z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n](vz)^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\,v^{-n}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{v^{-n}x[n]\right\}z^{-n}=Z\left\{v^{-n}x[n]\right\}.$$

получим искомую комплексную частотную характеристику окна (12.34):

$$\Theta_H\left(e^{j\omega T}\right)=\alpha\frac{\sin\left[\omega T(M+1)/2\right]}{\sin(\omega T/2)}+\frac{1-\alpha}{2}\frac{\sin\left[\omega T(M+1)/2-(M+1)\pi/M\right]}{\sin(\omega T/2-\pi/M)}+$$

$$+\frac{1-\alpha}{2}\frac{\sin\left[\omega T(M+1)/2+(M+1)\pi/M\right]}{\sin(\omega T/2+\pi/M)}. \qquad (12.37)$$

Таким образом, комплексные частотные характеристики окон Хэнна и Хэмминга являются вещественными функциями частоты ω. Они могут быть получены путём весового суммирования функции $\Theta_R\left(e^{j\omega T}\right)$ и двух её копий, сдвинутых по частоте на величину $2\pi/(MT)$ вправо и влево. Первое слагаемое в формуле (12.37) равно нулю при $\omega=2\pi k/[T(M+1)]=k\,\omega_д/(M+1)$, а второе и третье — при $\omega=2\pi\left[k+(M+1)/M\right]/\left[T(M+1)\right]=\left[k+(M+1)/M\right]\omega_д/(M+1)$ и $\omega=2\pi\left[k-(M+1)/M\right]/\left[T(M+1)\right]=\left[k-(M+1)/M\right]\omega_д/(M+1)$ соответственно для значений $k=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$. Если $M>>1$, то все слагаемые в (12.37) имеют первый общий нуль на частоте $|\omega|\approx4\pi/[T(M+1)]=2\,\omega_д/(M+1)$, поэтому ширина главного лепестка АЧХ окон Хэнна и Хэмминга приблизительно равна $8\pi/[T(M+1)]=4\omega_д/(M+1)$, т.е. в два раза больше, чем у прямоугольного окна.

Уровень боковых лепестков АЧХ окон Хэнна и Хэмминга значительно ниже, чем у характеристики прямоугольного окна. Так, например, у окна Хэмминга ($\alpha=0{,}54$) в главном лепестке сосредоточено 99,96 % общей энергии, а максимумы боковых лепестков на 40 дБ ниже главного максимума (в прямоугольном окне максимум боковых лепестков ниже главного максимума всего на 14 дБ). Расширение главного лепестка АЧХ окна приводит к расширению переходной полосы между полосами пропускания и задерживания в АЧХ, а уменьшение уровня боковых лепестков — к снижению пульсаций АЧХ [6, 11].

Пример 12.2. Спроектировать нерекурсивный цифровой ФНЧ с амплитудно-частотной характеристикой

$$\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_п;\\ 0, & \omega_п<|\omega|\le\omega_д/2,\end{cases}$$

используя окна Хэнна и Хэмминга.

Импульсную характеристику $h[n]=\sin(\omega_п T n)/(\pi n)$ ЦФ, спроектированного в примере 12.1 с применением прямоугольного окна, умножим на весовую функцию окон (12.34). В результате получим

$$h_ф[n]=\begin{cases}\dfrac{\sin(\omega_п T n)}{\pi n}\left[\alpha+(1-\alpha)\cos\dfrac{2\pi n}{M}\right], & |n|\le M/2;\\ 0, & |n|>M/2.\end{cases}$$

Последовательно применяя к этой функции операции (1.55), (1.49) и (1.50), находим передаточную функцию физически реализуемого ЦФ:

$$H'_{\vartheta}(z) = z^{-M/2} \sum_{n=0}^{M/2} \frac{a'_n}{2} (z^n + z^{-n}),$$

где

$$a'_n = \begin{cases} h[0]\,\vartheta_H[0] = \dfrac{\omega_{\text{д}} T}{\pi}, & n = 0; \\ 2\,h[n]\,\vartheta_H[n] = \dfrac{2\sin(\omega_{\text{д}} T n)}{\pi n}\left[\alpha + (1-\alpha)\cos\dfrac{2\pi n}{M}\right], & n = \overline{1,\, M/2}. \end{cases}$$

На рис.12.4 изображена АЧХ $A(\omega T) = \left| H'_{\vartheta}\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ спроектированного на основе окна Хэмминга ($\alpha = 0{,}54$) линейного нерекурсивного цифрового ФНЧ 100-го порядка ($M = 100$) при $W_{\text{п}} = f_{\text{п}} / f_{\text{д}} = 0{,}2$.

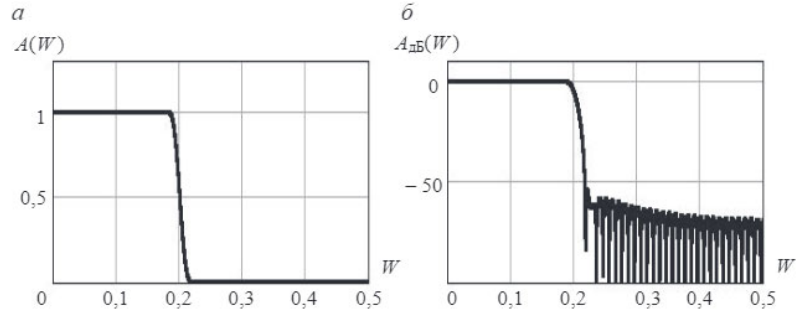


Рис.12.4. АЧХ нерекурсивного цифрового ФНЧ с линейной ФЧХ при $M = 100$ и $W_{\text{п}} = 0{,}2$, спроектированного при использовании окна Хэмминга: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Комплексная частотная характеристика рассчитанного ЦФ имеет вид

$$H'_{\vartheta}\left(e^{j\omega T}\right) = e^{-j\omega T M/2} \sum_{n=0}^{M/2} \frac{a'_n}{2}\left(e^{j\omega T n} + e^{-j\omega T n}\right) = e^{-j\omega T M/2} \sum_{n=0}^{M/2} a'_n \cos(\omega T n).$$

Расчёты показали, что АЧХ цифровых фильтров, спроектированных с использованием окон Хэнна ($\alpha = 0{,}5$) и Хэмминга ($\alpha = 0{,}54$) отличаются мало. Ширина переходной полосы при $\alpha = 0{,}54$ в данном случае равна $W_{\text{пер}} \approx 0{,}052$ (примерно в 1,66 раз больше, чем при использовании прямоугольного окна).

Максимум пульсаций АЧХ у фильтров Хэнна и Хэмминга в полосах пропускания и задерживания существенно меньше, чем у фильтра, спроектированного на основе прямоугольного окна. При этом полностью устраняется влияние эффекта Гиббса (ср. рис.12.3 и 12.4).

◆ Окно Блэкмана

Функция окна Блэкмана подобна рассмотренным выше функциям окон Хэнна и Хэмминга и определяется выражением [11]

$$\vartheta_B[n]=\begin{cases}0{,}42+0{,}5\cos\dfrac{2\pi n}{M}+0{,}08\cos\dfrac{4\pi n}{M}, & |n|\le M/2;\\ 0, & |n|>M/2.\end{cases} \qquad (12.38)$$

Дополнительная косинусоидальная компонента обеспечивает ещё более значительное уменьшение амплитуд пульсаций Гиббса. Однако ширина главного лепестка АЧХ окна возрастает примерно до $12\pi/[T(M+1)]=6\,\omega_д/(M+1)$, т.е. оказывается приблизительно в три раза большей, чем в случае прямоугольного окна.

В табл.12.2, заимствованной из [11], приведены наиболее важные параметры всех рассмотренных окон.

Таблица 12.2

Тип окна	Ширина главного лепестка	Коэффициент пульсаций, %		
		M=10	M=20	M=30
Прямоугольное	$2\omega_д/(M+1)$	22,34	21,89	21,80
Хэнна	$4\omega_д/(M+1)$	2,02	2,67	2,67
Хэмминга	$4\omega_д/(M+1)$	1,47	0,93	0,82
Блэкмана	$6\omega_д/(M+1)$	0,08	0,12	0,12

Пример 12.3. Спроектировать нерекурсивный цифровой ФНЧ с амплитудно-частотной характеристикой

$$\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_п;\\ 0, & \omega_п<|\omega|\le\omega_д/2,\end{cases}$$

используя окно Блэкмана.

Импульсную характеристику $h[n]=\sin(\omega_п T n)/(\pi n)$ нерекурсивного цифрового фильтра, спроектированного в примере 12.1 с применением прямоугольного окна, умножим на весовую функцию (12.38) окна Блэкмана [см. также (12.28)]. В результате получим

$$h_\vartheta[n]=\begin{cases}\dfrac{\sin(\omega_п T n)}{\pi n}\left(0{,}42+0{,}5\cos\dfrac{2\pi n}{M}+0{,}08\cos\dfrac{4\pi n}{M}\right), & |n|\le M/2;\\ 0, & |n|>M/2.\end{cases}$$

Последовательно применяя к этой функции операции (12.28), (12.22) и (12.23) находим передаточную функцию физически реализуемого ЦФ:

$$H'_\vartheta(z)=z^{-M/2}\sum_{n=0}^{M/2}\frac{a''_n}{2}\left(z^n+z^{-n}\right),$$

где

$$a''_n=\begin{cases}h[0]\,\vartheta_B[0]=\dfrac{\omega_п T}{\pi}, & n=0;\\ 2\,h[n]\,\vartheta_B[n]=\dfrac{2\sin(\omega_п T n)}{\pi n}\left(0{,}42+0{,}5\cos\dfrac{2\pi n}{M}+0{,}08\cos\dfrac{4\pi n}{M}\right), & n=\overline{1,\,M/2}.\end{cases}$$

Комплексная частотная характеристика рассчитанного ЦФ имеет вид

$$H'_{\vartheta}\left(e^{j\omega T}\right)=e^{-j\omega T\,M/2}\sum_{n=0}^{M/2}\frac{a''_n}{2}\left(e^{j\omega Tn}+e^{-j\omega Tn}\right)=e^{-j\omega T\,M/2}\sum_{n=0}^{M/2}a''_n\cos(\omega Tn).$$

На рис.12.5 изображена АЧХ $A(\omega T)=\left|H'_{\vartheta}\left(e^{j\omega T}\right)\right|$ спроектированного на основе окна Блэкмана стационарного линейного нерекурсивного цифрового ФНЧ 100-го порядка ($M=100$) при $W_{\text{п}}=f_{\text{п}}/f_{\text{д}}=0{,}2$.

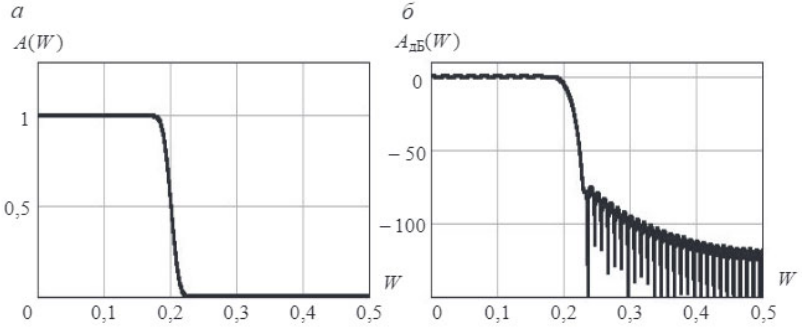


Рис.12.5. АЧХ нерекурсивного цифрового ФНЧ с линейной ФЧХ при $M=100$ и $W_{\text{п}}=0{,}2$, спроектированного при использовании окна Блэкмана: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Ширина переходной полосы в данном случае равна $W_{\text{пер}}\approx 0{,}062$ (примерно в 1,97 раз больше, чем при использовании прямоугольного окна). Максимум пульсаций АЧХ у фильтра Блэкмана в полосах пропускания и задерживания меньше, чем у фильтра, спроектированного на основе прямоугольного окна. При этом полностью устраняется влияние эффекта Гиббса (ср. рис.12.3 и 12.5).

◆ Окно Кайзера

Задача расчёта хороших окон сводится к задаче отыскания ограниченных во времени функций, преобразование Фурье которых наилучшим образом аппроксимируют функции, ограниченные по частоте и имеющие минимальную энергию за пределами заданного интервала частот. При решении этой задачи в замкнутой форме для непрерывных функций времени был введён класс так называемых *вытянутых сфероидальных волновых функций* [6]. Эти функции имеют довольно сложный вид. В качестве наилучшего окна Кайзер предложил относительно простую аппроксимацию этих функций (окно Кайзера)

$$\vartheta_K[n]=\begin{cases}\dfrac{I_0\left(\beta\sqrt{1-(2n/M)^2}\right)}{I_0(\beta)}, & |n|\le M/2;\\ 0, & |n|>M/2,\end{cases}\qquad(12.39)$$

где β — константа, определяющая компромисс между максимальным уровнем боковых лепестков и шириной главного лепестка АЧХ окна; $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, которая представляется быстро сходящимся рядом

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^2 \right]^k . \qquad (12.40)$$

АЧХ дискретного окна Кайзера в замкнутой форме не получена, но Кайзер показал, что для непрерывной функции окна её АЧХ пропорциональна

$$\sin\left[\beta\sqrt{(\omega/\omega_\beta)^2 - 1}\,\right] \Big/ \sqrt{(\omega/\omega_\beta)^2 - 1}\,, \qquad (12.41)$$

где величина ω_β приблизительно равна ширине главного лепестка АЧХ окна Кайзера [6].

Пример 12.4. Спроектировать нерекурсивный цифровой ФНЧ с амплитудно-частотной характеристикой

$$\left| H\left(e^{j\omega T}\right) \right| = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_{\text{п}}; \\ 0, & \omega_{\text{п}} < |\omega| \le \omega_{\text{д}}/2, \end{cases}$$

используя окно Кайзера.

Импульсную характеристику $h[n] = \sin(\omega_{\text{п}} T n)/(\pi n)$ ЦФ, спроектированного в примере 12.1 с применением прямоугольного окна, умножим на весовую функцию (12.39) окна Кайзера [см. также (12.28)]. В результате получим

$$h_\vartheta[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin(\omega_{\text{п}} T n)}{\pi n} \dfrac{I_0\left(\beta\sqrt{1-(2n/M)^2}\right)}{I_0(\beta)}, & |n| \le M/2; \\ 0, & |n| > M/2. \end{cases}$$

Последовательно применяя к этой функции операции (12.28), (12.22) и (12.23), находим передаточную функцию физически реализуемого ЦФ:

$$H'_\vartheta(z) = z^{-M/2} \sum_{n=0}^{M/2} \frac{a'''_n}{2} (z^n + z^{-n}),$$

где

$$a'''_n = \begin{cases} h[0]\,\vartheta_K[0] = \dfrac{\omega_{\text{п}} T}{\pi}, & n = 0; \\ 2\,h[n]\,\vartheta_K[n] = \dfrac{2\sin(\omega_{\text{п}} T n)}{\pi n} \dfrac{I_0\left(\beta\sqrt{1-(2n/M)^2}\right)}{I_0(\beta)}, & n = \overline{1,\, M/2}. \end{cases}$$

На рис.12.6 изображена АЧХ $A(\omega T) = \left| H'_\vartheta\left(e^{j\omega T}\right) \right|$ спроектированного на основе окна Кайзера ($\beta = 5$) линейного нерекурсивного цифрового ФНЧ 100-го порядка ($M = 100$) при $W_{\text{п}} = f_{\text{п}}/f_{\text{д}} = 0{,}2$.

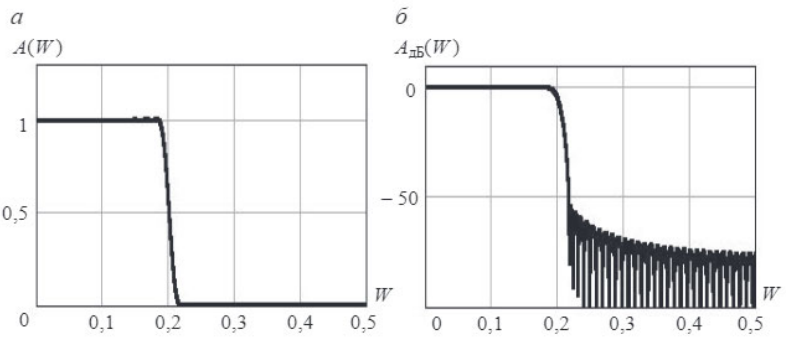


Рис.12.6. АЧХ нерекурсивного цифрового ФНЧ с линейной ФЧХ ($M = 100$ и $W_{\text{п}} = 0{,}2$), спроектированного при использовании окна Кайзера ($\beta = 5$): *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Комплексная частотная характеристика рассчитанного ЦФ имеет вид

$$H'_{\text{ф}}\left(e^{j\omega T}\right) = e^{-j\omega T M/2} \sum_{n=0}^{M/2} \frac{a'''_n}{2}\left(e^{j\omega T n} + e^{-j\omega T n}\right) = e^{-j\omega T M/2} \sum_{n=0}^{M/2} a'''_n \cos(\omega T n).$$

Ширина переходной полосы в данном случае равна $W_{\text{пер}} \approx 0{,}0362$ (примерно в 1,153 раз больше, чем при использовании прямоугольного окна). Соответствующим выбором параметра β пульсации АЧХ в полосах пропускания и задерживания у фильтра Кайзера можно получить меньше, чем у фильтров, спроектированных на основе окон Хэнна, Хэмминга и Блэкмана. При этом полностью устраняется влияние эффекта Гиббса.

Расчёты показали, что увеличение константы β снижает уровень пульсаций амплитудно-частотной характеристики ЦФ, однако расширяет ширину переходной полосы. Например, при $\beta = 30$ пульсации АЧХ практически отсутствуют, а ширина переходной полосы равна $W_{\text{пер}} \approx 0{,}08$.

12.5. Синтез нерекурсивных цифровых фильтров с линейными фазочастотными характеристиками методом разложения аппроксимируемой функции в ряд Фурье

Явление Гиббса [9] обусловливает неустранимую погрешность аппроксимации. Кроме метода оконных функций, рассмотренного в § 12.4, для исключения этого явления можно применить другой приём, заключающийся в устранении разрывов аппроксимируемой функции $B(W)$. С этой целью между полосами пропускания и задерживания вводят переходные полосы (см. рис. 12.2) таким образом, чтобы аппроксимируемая функция $B(W)$ была определена и непрерывна при всех значениях частоты $W \in [0,\ 1/2]$. Её следует доопределить в переходных полосах. Для избирательных ЦФ один из способов такого доопре-

деления показан на рис.12.2 штрих-пунктирными линиями, а доопределённые функции $B(W)$ описываются выражениями (12.6) — (12.9).

Метод синтеза нерекурсивного ЦФ неминимально-фазового типа с линейной ФЧХ, основанный на разложении аппроксимируемой функции в ряд Фурье, описан в [8, 14] и сводится к следующему.

Аппроксимирующая функция определяется выражением (12.15) с системой базисных функций, состоящей из синусоид или косинусоид кратных частот:

$$\Phi_i(W) = \sin(2\pi W i), \quad i = \overline{0,\ K}, \tag{12.42}$$

или

$$\Phi_i(W) = \cos(2\pi W i), \quad i = \overline{0,\ K}. \tag{12.43}$$

Подставляя (12.15) в приближённое равенство (12.1), получим

$$\Phi(W,\ \mathbf{C}) = \sum_{i=0}^{K} c_i\, \Phi_i(W) \approx B(W). \tag{12.44}$$

Сумма в (12.44) представляет собой отрезок ряда Фурье, поэтому компоненты вектора $\mathbf{C}$ можно вычислить по формуле

$$c_i = \varepsilon_i \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} B(W)\, \Phi_i(W)\, dW, \quad i = \overline{0,\ K}, \tag{12.45}$$

где

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 2, & i = 0; \\ 4, & i = \overline{1,\ K}. \end{cases} \tag{12.46}$$

Метод разложения аппроксимируемой функции в ряд Фурье имеет существенные недостатки [14]. Среди них отметим то обстоятельство, что единственный способ повышения точности решения аппроксимационной задачи заключается в увеличении порядка K аппроксимирующей функции $\Phi(W,\ \mathbf{C})$, т.е. в повышении порядка фильтра. Кроме того, в этом методе не работает весовая функция $q(W)$, что приводит к неоптимальному распределению погрешности аппроксимации между различными областями частотного диапазона. Наконец, по условию задачи аппроксимируемая функция $B(W)$ в переходных полосах может принимать любые значения от 0 до 1 (см. рис.12.2), а доопределение функции $B(W)$ накладывает дополнительные ограничения на аппроксимирующую функцию $\Phi(W,\ \mathbf{C})$, что в конечном итоге приводит к увеличению её порядка.

Пример 12.5. Методом разложения аппроксимируемой функции в ряд Фурье спроектировать нерекурсивный цифровой ФНЧ с линейной фазочастотной характеристикой вида 1 (см. § 5.2) при следующих исходных данных:
— граничная частота полосы пропускания $f_{\text{п}} = 2000$ Гц;

— граничная частота полосы задерживания $f_з = 2500$ Гц;

— порядок фильтра $M = 100$;

— частота дискретизации $f_д = 10000$ Гц.

Применяя второй способ нормировки частоты (см. § 3.4), найдём нормированные граничные частоты: $W_п = f_п / f_д = 2000/10000 = 0{,}2$; $W_з = f_з / f_д = 2500/10000 = 0{,}25$. Аппроксимируемая функция $B(W)$ изображена на рис.12.2,*а*. Используем доопределённую в переходной полосе аппроксимируемую функцию (12.6).

Базисные функции согласно (5.23) представляют собой набор косинусоид кратных частот [см. также (12.43)].

С помощью системы компьютерной математики Mathcad по формулам (12.44) при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0{,}5$ вычислим компоненты вектора $\mathbf{C}$ $c_i \left(i = \overline{0, K} \right)$, где $K = M/2$, а затем согласно (5.24) определим отсчёты импульсной характеристики ЦФ $h[n]$, которые равны коэффициентам передаточной функции фильтра •. Полученные значения отсчётов $h[n]$ следующие:

$$h[0] = 8{,}041 \cdot 10^{-4}; \quad h[1] = 1{,}301 \cdot 10^{-4}; \quad h[2] = -7{,}893 \cdot 10^{-4};$$

$$h[3] = -3{,}704 \cdot 10^{-4}; \quad h[4] = 6{,}143 \cdot 10^{-4}; \quad h[5] = 4{,}94 \cdot 10^{-4};$$

$$h[6] = -3{,}621 \cdot 10^{-4}; \quad h[7] = -4{,}373 \cdot 10^{-4}; \quad h[8] = 1{,}139 \cdot 10^{-4};$$

$$h[9] = 1{,}748 \cdot 10^{-4}; \quad h[10] = -6{,}338 \cdot 10^{-6}; \quad h[11] = 2{,}052 \cdot 10^{-4};$$

$$h[12] = 1{,}339 \cdot 10^{-4}; \quad h[13] = -5{,}944 \cdot 10^{-4}; \quad h[14] = -5{,}506 \cdot 10^{-4};$$

$$h[15] = 8{,}208 \cdot 10^{-4}; \quad h[16] = 1{,}147 \cdot 10^{-3}; \quad h[17] = -7{,}469 \cdot 10^{-4};$$

$$h[18] = -1{,}786 \cdot 10^{-3}; \quad h[19] = 3{,}165 \cdot 10^{-4}; \quad h[20] = 2{,}245 \cdot 10^{-3};$$

$$h[21] = 3{,}714 \cdot 10^{-4}; \quad h[22] = -2{,}332 \cdot 10^{-3}; \quad h[23] = -1{,}12 \cdot 10^{-3};$$

$$h[24] = 1{,}954 \cdot 10^{-3}; \quad h[25] = 1{,}615 \cdot 10^{-3}; \quad h[26] = -1{,}217 \cdot 10^{-3};$$

$$h[27] = -1{,}544 \cdot 10^{-3}; \quad h[28] = 4{,}044 \cdot 10^{-4}; \quad h[29] = 7{,}026 \cdot 10^{-4};$$

$$h[30] = -6{,}266 \cdot 10^{-6}; \quad h[31] = 8{,}66 \cdot 10^{-4}; \quad h[32] = 6{,}027 \cdot 10^{-4};$$

$$h[33] = -2{,}832 \cdot 10^{-3}; \quad h[34] = -2{,}741 \cdot 10^{-3}; \quad h[35] = 4{,}497 \cdot 10^{-3};$$

$$h[36] = 6{,}765 \cdot 10^{-3}; \quad h[37] = -4{,}845 \cdot 10^{-3}; \quad h[38] = -0{,}013;$$

$$h[39] = 2{,}582 \cdot 10^{-3}; \quad h[40] = 0{,}02; \quad h[41] = 3{,}864 \cdot 10^{-3};$$

$$h[42] = -0{,}029; \quad h[43] = -0{,}017; \quad h[44] = 0{,}037;$$

$$h[45] = 0{,}041; \quad h[46] = -0{,}044; \quad h[47] = -0{,}091;$$

$$h[48] = 0{,}048; \quad h[49] = 0{,}313;$$

$$h[50] = 0{,}45.$$

Остальные отсчёты $h[n]$ определяются в соответствии с выражением

$$h[n] = h[100 - n] \left(n = \overline{51, 100} \right).$$

На рис.12.7 изображена АЧХ спроектированного цифрового ФНЧ, построенная по формуле (3.50).

• См. § 3.6.

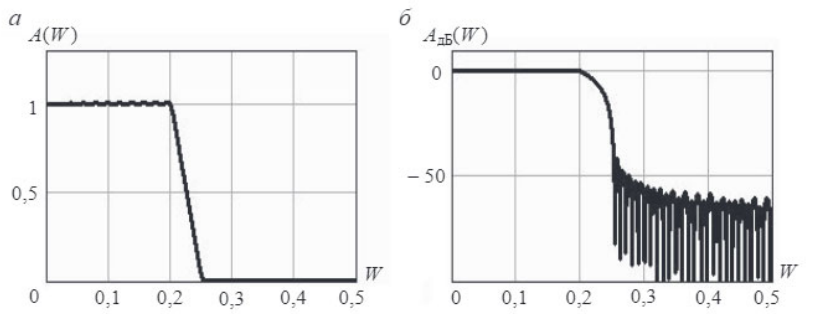


Рис.12.7. АЧХ нерекурсивного цифрового ФНЧ с линейной ФЧХ ($M = 100$; $W_п = 0{,}2$; $W_з = 0{,}25$), спроектированного на основе метода разложения аппроксимируемой функции в ряд Фурье: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Сравнение амплитудно-частотных характеристик цифровых ФНЧ, спроектированных в примерах 12.1 — 12.5 (см. рис.12.3 — 12.7) показывает, что методы оконных функций приводят к сужению полосы пропускания фильтра, а метод разложения аппроксимируемой функции в ряд Фурье такого недостатка не имеет. Этот метод обеспечивает примерно такой же уровень пульсаций АЧХ, как и метод оконных функций с использованием окна Кайзера при $\beta \approx 5$.

Рассмотренные в § 12.4 и 12.5 методы синтеза нерекурсивных ЦФ с линейными ФЧХ являются неоптимальными методами аппроксимации. В них не работает весовая функция $q(W)$, следствием чего является неоптимальное распределение погрешностей аппроксимации в различных областях частотного диапазона (в полосах пропускания и задерживания).

12.6. Решение аппроксимационной задачи для нерекурсивных цифровых фильтров с линейными фазочастотными характеристиками при среднеквадратическом критерии

Наиболее универсальным методом синтеза нерекурсивных ЦФ при среднеквадратическом критерии (12.16), в котором работает весовая функция $q(W)$, является *метод наименьших квадратов* (МНК). Этот метод сводит задачу синтеза ЦФ к задаче поиска экстремума целевой функции (к оптимизационной задаче). В МНК при заданных на частотном интервале $[\alpha_1, \alpha_2] \subseteq [0,\ 1/2]$ весовой $q(W)$, аппроксимируемой $B(W)$ и аппроксимирующей $\Phi(W,\ \mathbf{C})$ функциях требуется определить вектор $\mathbf{C}$, минимизирующий целевую функцию

$$G(\mathbf{C}) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(W)\left[B(W) - \Phi(W,\ \mathbf{C})\right]^2 dW\,. \qquad (12.47)$$

Необходимым условием экстремума целевой функции (12.47) является равенство нулю всех производных целевой функции по координатам вектора параметров $\mathbf{C}$:

$$\frac{\partial G(\mathbf{C})}{\partial c_i} = 0, \quad i = \overline{0,\ K}. \tag{12.48}$$

Равенства (12.48) представляют собой систему уравнений • относительно неизвестных компонент $c_i \left(i = \overline{0,\ K}\right)$ вектора параметров $\mathbf{C}$.

Рассмотрим случай, когда аппроксимирующая функция $\Phi(W,\ \mathbf{C})$ является линейной комбинацией базисных функций [см. (12.15)]. При этом целевая функция примет вид

$$G(\mathbf{C}) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(W) \left[B(W) - \sum_{l=0}^{K} c_l \Phi_l(W) \right]^2 dW. \tag{12.49}$$

Подставив целевую функцию (12.49) в уравнения (12.48), выполним дифференцирование по параметрам $c_i \left(i = \overline{0,\ K}\right)$ в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\frac{\partial G(\mathbf{C})}{\partial c_i} = 2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(W) \left[B(W) - \sum_{l=0}^{K} c_l \Phi_l(W) \right] \left[-\Phi_i(W) \right] dW = 0, \quad i = \overline{0,\ K}. \tag{12.50}$$

Выражения (12.50) представляют систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых параметров $c_i \left(i = \overline{0,\ K}\right)$, являющихся компонентами вектора $\mathbf{C}$:

$$\sum_{l=0}^{K} \eta_{il}\, c_l = \theta_i, \quad i = \overline{0,\ K}, \tag{12.51}$$

где

$$\eta_{il} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(W)\, \Phi_i(W)\, \Phi_l(W)\, dW, \quad i,\ l = \overline{0,\ K}; \tag{12.52}$$

$$\theta_i = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(W)\, B(W)\, \Phi_i(W)\, dW, \quad i = \overline{0,\ K}. \tag{12.53}$$

• В общем случае система уравнений (12.48) является нелинейной и необязательно алгебраической, тогда задача оптимизации будет нелинейной. Не существует общих математических методов решения нелинейных задач оптимизации (в каждом конкретном случае требуется разработка специфической вычислительной процедуры). При высокой размерности задачи эта процедура может оказаться слишком сложной, поэтому на практике часто вместо решения оптимизационной задачи (12.48) применяют эвристические методы синтеза.

Неопределённость аппроксимируемой функции $B(W)$ в переходных полосах частот фильтра не приводит к затруднениям при вычислении интегралов (12.52) и (12.53), если в этих полосах принять весовую функцию $q(W)=0$. Однако, как показали расчёты, значение весовой функции $q(W)=0$ в переходных полосах иногда приводит к «нехорошей» форме АЧХ синтезированного ЦФ, когда коэффициент передачи в этих полосах превышает коэффициент передачи в полосе пропускания. В связи с этим целесообразно всё-таки доопределить аппроксимируемую функцию $B(W)$ в переходных полосах, используя для доопределённой аппроксимируемой функции $B(W)$, например выражения (12.6) — (12.9), и принять в переходных полосах $q(W)\neq 0$.

Систему уравнений (12.51) удобно представить в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{H}\mathbf{C}=\mathbf{\Theta}, \tag{12.54}$$

где $\mathbf{H}$ — квадратная матрица, элементы которой $\eta_{il}\ \left(i,\ l=\overline{0,\ K}\right)$; $\mathbf{C}$ и $\mathbf{\Theta}$ — векторы, компоненты которых соответственно равны c_i и $\theta_i\ \left(i=\overline{0,\ K}\right)$.

Решение уравнения (12.54) находится обращением матрицы $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{C}=\mathbf{H}^{-1}\mathbf{\Theta}. \tag{12.55}$$

По компонентам вектора $\mathbf{C}$ определяются коэффициенты $a_k\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$ передаточной функции $H(z)$ нерекурсивного линейного ЦФ [см. (3.43)], равные отсчётам его импульсной характеристики $h[n]\ \left(n=\overline{0,\ M}\right)$ (см. § 3.6). Для ЦФ с линейной ФЧХ компоненты вектора $\mathbf{C}$ в зависимости от вида фильтра связаны с отсчётами импульсной характеристики $h[n]$ соотношениями (5.24), (5.33), (5.40) и (5.47) соответственно (см. § 5.2 — 5.5).

При одинаковых порядках фильтров метод наименьших квадратов даёт более высокую точность аппроксимации по сравнению с оконными методами и методом разложения аппроксимируемой функции в ряд Фурье.

Пример 12.6. Спроектировать нерекурсивный цифровой ФНЧ с линейной фазочастотной характеристикой вида 1 при следующих исходных данных (см. пример 12.5):

— граничная частота полосы пропускания $f_{\text{п}}=2000$ Гц;

— граничная частота полосы задерживания $f_{\text{з}}=2500$ Гц;

— порядок фильтра $M=100$;

— частота дискретизации $f_{\text{д}}=10000$ Гц.

Применяя второй способ нормировки частоты (см. § 3.4), найдём нормированные граничные частоты: $W_{\text{п}}=f_{\text{п}}/f_{\text{д}}=2000/10000=0{,}2$; $W_{\text{з}}=f_{\text{з}}/f_{\text{д}}=2500/10000=0{,}25$. Аппроксимируемая функция $B(W)$ изображена на рис.12.2,*а*. Используем доопределённую в переходной полосе аппроксимируемую функцию (12.6).

Базисные функции согласно (5.23) представляют собой набор косинусоид кратных частот [см. (12.43)].

Весовую функцию для метода наименьших квадратов выберем следующей:

$$q(W)=\begin{cases}100, & 0\le W\le W_{\text{п}};\\ 5, & W_{\text{п}}<W<W_{\text{з}};\\ 10, & W_{\text{з}}\le W\le 0{,}5.\end{cases}$$

Коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений (12.51) [или, что то же самое, (12.54)] вычислим по формулам (12.52) и (12.53) при $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=0{,}5$. Решение системы по формуле (12.55) даёт искомый вектор параметров $\mathbf{C}$, по компонентам которого $c_i\ \left(i=\overline{0,K}\right)$ в соответствии с (5.24) определим отсчёты импульсной характеристики синтезированного ЦФ:

$$h[n]=\begin{cases}0{,}5\,c_{K-n}, & n=\overline{0,K-1};\\ c_0, & n=K,\end{cases}\qquad \text{где } K=M/2.$$

Остальные отсчёты $h[n]$ найдём из условия симметричности импульсной характеристики ЦФ • относительно центра: $h[n]=h[M-n]\ \left(n=\overline{0,M}\right)$, где $M=2K=100$.

Для расчётов воспользуемся системой компьютерной математики Mathcad. Полученные значения отсчётов импульсной характеристики $h[n]$ следующие:

$$h[0]=1{,}252\cdot10^{-4};\quad h[1]=4{,}526\cdot10^{-4};\quad h[2]=-2{,}467\cdot10^{-4};$$
$$h[3]=-4{,}338\cdot10^{-4};\quad h[4]=1{,}102\cdot10^{-4};\quad h[5]=3{,}401\cdot10^{-4};$$
$$h[6]=7{,}189\cdot10^{-5};\quad h[7]=-1{,}245\cdot10^{-4};\quad h[8]=-1{,}582\cdot10^{-4};$$
$$h[9]=-2{,}272\cdot10^{-4};\quad h[10]=7{,}787\cdot10^{-5};\quad h[11]=6{,}266\cdot10^{-4};$$
$$h[12]=2{,}315\cdot10^{-4};\quad h[13]=-9{,}254\cdot10^{-4};\quad h[14]=-7{,}807\cdot10^{-4};$$
$$h[15]=1{,}019\cdot10^{-3};\quad h[16]=1{,}447\cdot10^{-3};\quad h[17]=-7{,}863\cdot10^{-4};$$
$$h[18]=-2{,}056\cdot10^{-3};\quad h[19]=2{,}132\cdot10^{-4};\quad h[20]=2{,}427\cdot10^{-3};$$
$$h[21]=5{,}706\cdot10^{-4};\quad h[22]=-2{,}384\cdot10^{-3};\quad h[23]=-1{,}325\cdot10^{-3};$$
$$h[24]=1{,}872\cdot10^{-3};\quad h[25]=1{,}766\cdot10^{-3};\quad h[26]=-1{,}032\cdot10^{-3};$$
$$h[27]=-1{,}588\cdot10^{-3};\quad h[28]=1{,}939\cdot10^{-4};\quad h[29]=6{,}235\cdot10^{-4};$$
$$h[30]=1{,}703\cdot10^{-4};\quad h[31]=1{,}502\cdot10^{-3};\quad h[32]=5{,}163\cdot10^{-4};$$
$$h[33]=-3{,}059\cdot10^{-3};\quad h[34]=-2{,}771\cdot10^{-3};\quad h[35]=4{,}706\cdot10^{-3};$$
$$h[36]=6{,}912\cdot10^{-3};\quad h[37]=-4{,}981\cdot10^{-3};\quad h[38]=-0{,}013;$$
$$h[39]=2{,}607\cdot10^{-3};\quad h[40]=0{,}02;\quad h[41]=3{,}97\cdot10^{-3};$$
$$h[42]=-0{,}029;\quad h[43]=-0{,}017;\quad h[44]=0{,}037;$$
$$h[45]=0{,}041;\quad h[46]=-0{,}044;\quad h[47]=-0{,}091;$$
$$h[48]=0{,}048;\quad h[49]=0{,}313;\quad h[50]=0{,}45.$$

Остальные отсчёты определяются в соответствии с выражением

$$h[n]=h[100-n]\ \left(n=\overline{51,100}\right).$$

На рис.12.8 изображена АЧХ спроектированного цифрового ФНЧ, построенная по формуле (3.50).

• См. формулу (5.14).

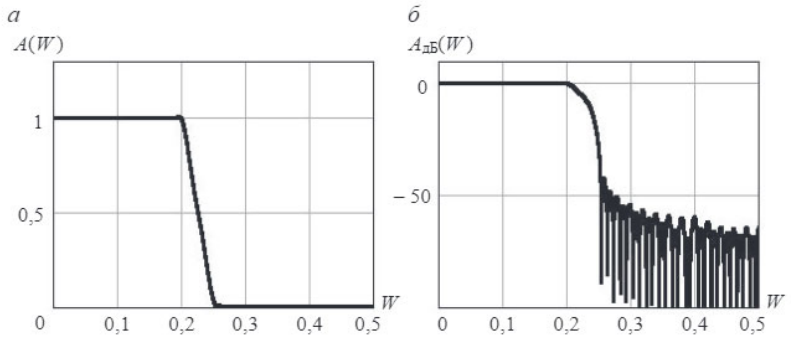


Рис.12.8. АЧХ нерекурсивного цифрового ФНЧ с линейной ФЧХ ($M = 100$; $W_п = 0{,}2$; $W_з = 0{,}25$), спроектированного с использованием метода наименьших квадратов: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Пример 12.7. Используя метод наименьших квадратов, спроектировать нерекурсивный полосовой ЦФ с линейной фазочастотной характеристикой вида 3 (см. § 5.4) при следующих исходных данных:

— граничные частоты полосы пропускания $f_{п1} = 2000$ Гц; $f_{п2} = 2500$ Гц;

— граничные частоты полос задерживания $f_{з1} = 1500$ Гц; $f_{з2} = 3000$ Гц;

— порядок фильтра $M = 200$;

— частота дискретизации $f_д = 10000$ Гц.

Используя второй способ нормировки частоты (см. § 3.4), найдём нормированные значения граничных частот полос пропускания и задерживания полосового фильтра:

$$W_{з1} = f_{з1} / f_д = 0{,}15; \quad W_{п1} = f_{п1} / f_д = 0{,}2;$$

$$W_{п2} = f_{п2} / f_д = 0{,}25; \quad W_{з2} = f_{з2} / f_д = 0{,}3.$$

Доопределённая аппроксимируемая функция $B(W)$ описывается выражением (12.8). Базисные функции $\mathbf{\Phi}_i(W)$ $\left(i = \overline{0, K}\right)$ для синтеза нерекурсивного ЦФ с линейной ФЧХ вида 3 (см. § 5.4) целесообразно выбрать в виде набора синусоид кратных частот [см. (12.42)]. Весовую функцию выберем следующей:

$$q(W) = \begin{cases} 20, & 0 \le W \le W_{з1}; \\ 10, & W_{з1} < W < W_{п1}; \\ 150, & W_{п1} \le W \le W_{п2}; \\ 10, & W_{п2} < W < W_{з2}; \\ 20, & W_{з2} \le W \le 0{,}5. \end{cases}$$

Для расчётов воспользуемся системой компьютерной математики Mathcad.

Коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений (12.51) [или, что то же самое, (12.54)] вычислим по формулам (12.52) и (12.53) при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0{,}5$. Решение системы уравнений по формуле (12.55) даёт искомый вектор параметров $\mathbf{C}$,

по компонентам которого $c_i \left(i = \overline{0,\, K}\right)$ в соответствии с (5.40) определим отсчёты импульсной характеристики синтезированного ЦФ:

$$h[n] = \begin{cases} 0{,}5\, c_{K-n}, & n = \overline{0,\, K-1}; \\ 0, & n = K, \end{cases} \qquad \text{где } K = M/2 .$$

Остальные отсчёты $h[n]$ найдём из условия антисимметричности импульсной характеристики ЦФ • относительно центра: $h[n] = -h[M-n]$ $\left(n = \overline{0,\, M}\right)$, где $M = 2K = 200$.

Коэффициенты передаточной функции нерекурсивного ЦФ равны отсчётам его импульсной характеристики ••. Полученные значения отсчётов импульсной характеристики синтезированного ЦФ следующие:

$$h[0] = -7{,}695 \cdot 10^{-6}; \quad h[1] = -1{,}206 \cdot 10^{-5}; \quad h[2] = -2{,}802 \cdot 10^{-5};$$
$$h[3] = 2{,}102 \cdot 10^{-4}; \quad h[4] = 1{,}905 \cdot 10^{-4}; \quad h[5] = -3{,}041 \cdot 10^{-4};$$
$$h[6] = -3{,}693 \cdot 10^{-4}; \quad h[7] = 1{,}821 \cdot 10^{-4}; \quad h[8] = 3{,}166 \cdot 10^{-4};$$
$$h[9] = -3{,}396 \cdot 10^{-5}; \quad h[10 = -1{,}245 \cdot 10^{-4}; \quad h[11] = -5{,}027 \cdot 10^{-5};$$
$$h[12] = -1{,}725 \cdot 10^{-4}; \quad h[13] = -1{,}274 \cdot 10^{-4}; \quad h[14] = 2{,}658 \cdot 10^{-4};$$
$$h[15] = 2{,}149 \cdot 10^{-4}; \quad h[16] = -1{,}423 \cdot 10^{-4}; \quad h[17] = -1{,}17 \cdot 10^{-4};$$
$$h[18] = 1{,}522 \cdot 10^{-5}; \quad h[19] = 1{,}499 \cdot 10^{-5}; \quad h[20] = 1{,}419 \cdot 10^{-5};$$
$$h[21] = -9{,}283 \cdot 10^{-5}; \quad h[22] = -9{,}28 \cdot 10^{-5}; \quad h[23] = 3{,}166 \cdot 10^{-4};$$
$$h[24] = 3{,}234 \cdot 10^{-4}; \quad h[25] = -4{,}434 \cdot 10^{-4}; \quad h[26] = -5{,}694 \cdot 10^{-4};$$
$$h[27] = 3{,}014 \cdot 10^{-4}; \quad h[28] = 5{,}234 \cdot 10^{-4}; \quad h[29] = -6{,}282 \cdot 10^{-5};$$
$$h[30] = -8{,}102 \cdot 10^{-5}; \quad h[31] = 4{,}168 \cdot 10^{-5}; \quad h[32] = -4{,}163 \cdot 10^{-4};$$
$$h[33] = -2{,}793 \cdot 10^{-4}; \quad h[34] = 5{,}649 \cdot 10^{-4}; \quad h[35] = 4{,}771 \cdot 10^{-4};$$
$$h[36] = -3{,}394 \cdot 10^{-4}; \quad h[37] = -3{,}577 \cdot 10^{-4}; \quad h[38] = 6{,}854 \cdot 10^{-5};$$
$$h[39] = 1{,}363 \cdot 10^{-4}; \quad h[40] = -9{,}958 \cdot 10^{-7}; \quad h[41] = -1{,}244 \cdot 10^{-4};$$
$$h[42] = -9{,}105 \cdot 10^{-5}; \quad h[43] = 4{,}826 \cdot 10^{-4}; \quad h[44] = 4{,}772 \cdot 10^{-4};$$
$$h[45] = -7{,}133 \cdot 10^{-4}; \quad h[46] = -9{,}253 \cdot 10^{-4}; \quad h[47] = 4{,}295 \cdot 10^{-4};$$
$$h[48] = 8{,}154 \cdot 10^{-4}; \quad h[49] = -7{,}981 \cdot 10^{-5}; \quad h[50] = -4{,}273 \cdot 10^{-5};$$
$$h[51] = 8{,}382 \cdot 10^{-5}; \quad h[52] = -9{,}014 \cdot 10^{-4}; \quad h[53] = -5{,}909 \cdot 10^{-4};$$
$$h[54] = 1{,}173 \cdot 10^{-3}; \quad h[55] = 1{,}01 \cdot 10^{-3}; \quad h[56] = -6{,}924 \cdot 10^{-4};$$
$$h[57] = -7{,}42 \cdot 10^{-4}; \quad h[58] = 1{,}147 \cdot 10^{-4}; \quad h[59] = 1{,}602 \cdot 10^{-4};$$
$$h[60] = 2{,}01 \cdot 10^{-4}; \quad h[61] = -1{,}734 \cdot 10^{-4}; \quad h[62] = -1{,}958 \cdot 10^{-4};$$
$$h[63] = 1{,}017 \cdot 10^{-3}; \quad h[64] = 1{,}089 \cdot 10^{-3}; \quad h[65] = -1{,}668 \cdot 10^{-3};$$
$$h[66] = -2{,}228 \cdot 10^{-3}; \quad h[67] = 1{,}263 \cdot 10^{-3}; \quad h[68] = 2{,}121 \cdot 10^{-3};$$
$$h[69] = -2{,}433 \cdot 10^{-4}; \quad h[70] = -3{,}385 \cdot 10^{-5}; \quad h[71] = 2{,}51 \cdot 10^{-4};$$

• См. формулу (5.17).
•• См. формулы (3.44) и (3.45).

$$h[72] = -2{,}678 \cdot 10^{-3}; \quad h[73] = -1{,}807 \cdot 10^{-3}; \quad h[74] = 3{,}718 \cdot 10^{-3};$$
$$h[75] = 3{,}244 \cdot 10^{-3}; \quad h[76] = -2{,}335 \cdot 10^{-3}; \quad h[77] = -2{,}539 \cdot 10^{-3};$$
$$h[78] = 4{,}734 \cdot 10^{-4}; \quad h[79] = 4{,}846 \cdot 10^{-4}; \quad h[80] = 9{,}842 \cdot 10^{-6};$$
$$h[81] = -6{,}075 \cdot 10^{-4}; \quad h[82] = -7{,}331 \cdot 10^{-4}; \quad h[83] = 4{,}63 \cdot 10^{-3};$$
$$h[84] = 5{,}241 \cdot 10^{-3}; \quad h[85] = -9{,}036 \cdot 10^{-3}; \quad h[86] = -0{,}013;$$
$$h[87] = 7{,}859 \cdot 10^{-3}; \quad h[88] = 0{,}015; \quad h[89] = -1{,}713 \cdot 10^{-3};$$
$$h[90] = -3{,}298 \cdot 10^{-5}; \quad h[91] = 2{,}372 \cdot 10^{-3}; \quad h[92] = -0{,}034;$$
$$h[93] = -0{,}027; \quad h[94] = 0{,}07; \quad h[95] = 0{,}081;$$
$$h[96] = -0{,}083; \quad h[97] = -0{,}147; \quad h[98] = 0{,}057;$$
$$h[99] = 0{,}194; \quad h[100] = 0.$$

Остальные отсчёты определяются в соответствии с выражением

$$h[n] = -h[200 - n] \ \left(n = \overline{101, 200}\right).$$

На рис.12.9 изображена АЧХ спроектированного полосового ЦФ, построенная по формуле (3.50). Минимальное затухание в полосах задерживания превышает 50 дБ. Фазочастотная характеристика ЦФ линейная с постоянной групповой задержкой. Величина групповой задержки равна $(M/2)T = M/(2f_д) = 200/(2 \cdot 10000) = 0{,}01$ с.

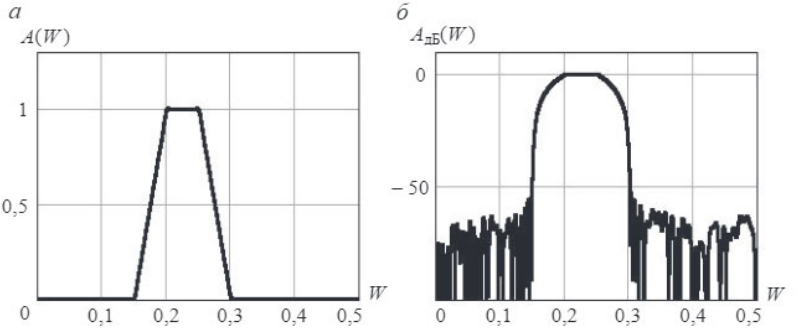


Рис.12.9. АЧХ полосового нерекурсивного ЦФ с линейной ФЧХ ($M = 200$; $W_{з1} = 0{,}15$; $W_{п1} = 0{,}2$; $W_{п2} = 0{,}25$; $W_{з2} = 0{,}3$), спроектированного с использованием метода наименьших квадратов: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

12.7. Решение аппроксимационной задачи для нерекурсивных цифровых фильтров с линейными фазочастотными характеристиками при среднеквадратическом критерии с ограничениями

Метод наименьших квадратов позволяет решить аппроксимационную задачу также при наличии ограничений на характеристики ЦФ [14]. Рассмотрим

простую аппроксимационную задачу с одним ограничением, представляющим собой линейное уравнение относительно коэффициентов c_i $\left(i=\overline{0,\ K}\right)$. Будем искать минимум целевой функции (12.47) при выполнении условия

$$\Phi(W_1,\ \mathbf{C})=p_1, \tag{12.56}$$

где W_1 — фиксированное значение частоты W; p_1 — заданная константа.

Смысл ограничения (12.56) заключается в требовании, чтобы АЧХ фильтра на частоте W_1 имела заданное значение p_1.

Для решения задачи поиска условного экстремума воспользуемся методом неопределённых множителей Лагранжа [9], позволяющим свести задачу отыскания условного экстремума целевой функции $G(\mathbf{C})$ [см. (12.47)] к задаче отыскания безусловного экстремума целевой функции

$$G_1(\mathbf{C},\ \lambda)=G(\mathbf{C})+\lambda[\Phi(W_1,\ \mathbf{C})-p_1], \tag{12.57}$$

где λ — неопределённый множитель Лагранжа.

Необходимые условия экстремума целевой функции (12.57) имеют вид [ср. с (12.48)]

$$\begin{cases} \partial G_1(\mathbf{C},\ \lambda)/\partial c_i=0, \quad i=\overline{0,\ K}; \\ \partial G_1(\mathbf{C},\ \lambda)/\partial \lambda=0. \end{cases} \tag{12.58}$$

Рассмотрим случай, когда аппроксимирующая функция $\Phi(W,\ \mathbf{C})$ является линейной комбинацией базисных функций [см. (12.15)]. Обозначим $\lambda=c_{K+1}$. Тогда целевая функция $G_1(\mathbf{C},\ \lambda)$ примет вид

$$G_1(\mathbf{C},\ \lambda)=G_1(\mathbf{C},\ c_{K+1})=G_1(\overline{\mathbf{C}})=$$

$$=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(W)\left[B(W)-\sum_{l=0}^{K} c_l\,\Phi_l(W)\right]^2 dW+c_{K+1}\left[\sum_{l=0}^{K} c_l\,\Phi_l(W_1)-p_1\right]. \tag{12.59}$$

Дифференцируя целевую функцию $G_1(\mathbf{C},\ c_{K+1})$ согласно (12.58) по компонентам расширенного вектора $\overline{\mathbf{C}}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}\\ c_{K+1}\end{pmatrix}$, получим

$$\partial G_1(\overline{\mathbf{C}})/\partial c_i=$$

$$=\begin{cases} 2\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(W)\left[B(W)-\sum\limits_{l=0}^{K} c_l\,\Phi_l(W)\right]\left[-\Phi_i(W)\right]dW+c_{K+1}\Phi_i(W_1)=0, \quad i=\overline{0,\ K}; \\ \sum\limits_{l=0}^{K} c_l\,\Phi_l(W_1)-p_1=0, \quad i=K+1. \end{cases} \tag{12.60}$$

Соотношения (12.60) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых параметров $c_i \left(i = \overline{0,\ K}\right)$, являющихся компонентами вектора $\mathbf{C}$, и множителя Лагранжа $\lambda = c_{K+1}$:

$$\sum_{l=0}^{K+1} \eta_{il}\, c_l = \theta_i, \quad i = \overline{0,\ K+1}, \tag{12.61}$$

где

$$\eta_{il} = \begin{cases} \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(W)\, \Phi_i(W)\, \Phi_l(W)\, dW, & i,\ l = \overline{0,\ K}; \\ 0{,}5\, \Phi_i(W_1), & i = \overline{0,\ K}, \quad l = K+1; \\ \Phi_l(W_1), & i = K+1, \quad l = \overline{0,\ K}; \\ 0, & i = l = K+1; \end{cases} \tag{12.62}$$

$$\theta_i = \begin{cases} \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(W)\, B(W)\, \Phi_i(W)\, dW, & i = \overline{0,\ K}; \\ p_1, & i = K+1. \end{cases} \tag{12.63}$$

Систему линейных алгебраических уравнений (12.61) удобно представить в векторно-матричной форме:

$$\overline{\mathbf{H}}\ \overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{\Theta}}, \tag{12.64}$$

где $\overline{\mathbf{H}} = \left(\eta_{il}\right)$; $\overline{\mathbf{C}} = \left(c_i\right)$; $\overline{\Theta} = \left(\theta_i\right) \left(i,\ l = \overline{0,\ K+1}\right)$ — расширенные матрица и векторы [ср. с (12.54)].

Решение векторно-матричного уравнения (12.64) можно найти обращением матрицы $\overline{\mathbf{H}}$ [ср. с (12.55)]:

$$\overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{H}}^{-1}\, \overline{\mathbf{\Theta}}. \tag{12.65}$$

Аналогично решается аппроксимационная задача при наличии нескольких ограничений типа (12.56) на характеристики фильтра. При этом каждое ограничение увеличивает размерность искомого расширенного вектора $\overline{\mathbf{C}}$ на единицу.

Отметим, что если базисные функции $\Phi_i(W) \left(i = \overline{0,\ K}\right)$ в выражении для аппроксимирующей функции (12.15) имеют вид (12.42) или (12.43), то решением линейных алгебраических уравнений (12.54) или (12.64) осуществляется математический синтез нерекурсивных ЦФ с линейной ФЧХ [$\varphi(W) = -2\pi W\alpha$ или $\varphi(W) = \pi/2 - 2\pi W\alpha$]. При этом аппроксимирующая функция описывает псевдоАЧХ (см. § 5.1) $\Phi(W, \mathbf{C}) = R(W)$, а аппроксимируемая функция $B(W)$ — идеальную форму АЧХ синтезируемого цифрового фильтра [см. рис.12.2 и выражения (12.2) — (12.5), (12.6) — (12.9)].

Пример 12.8. Амплитудно-частотная характеристика УПЧ изображения телевизионного приёмника, построенного по квазипараллельной схеме, имеет срез Найквиста. Идеализированная форма АЧХ (аппроксимируемая функция) изображена на рис.12.10. Особенность среза Найквиста состоит в том, что на промежуточной частоте изображения $f_{\text{пч}_{\text{из}}} = 38$ МГц амплитуда сигнала подавляется на 6 дБ.

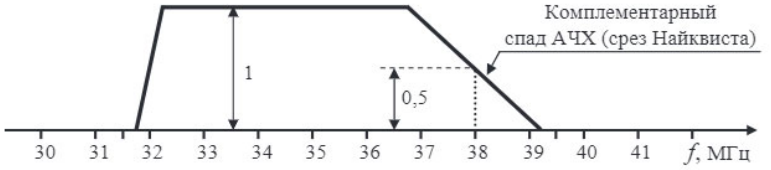


Рис.12.10. Идеализированная форма амплитудно-частотной характеристики УПЧ изображения телевизионного приёмника, построенного по квазипараллельной схеме

Спроектировать нерекурсивный ЦФ для ПЧ-тракта изображения телевизионного приёмника с линейной ФЧХ (фильтр вида 3, см. § 5.4), используя метод наименьших квадратов при ограничении $A(f_{\text{пч}_{\text{из}}}) = 0{,}5$.

Примем порядок ЦФ $M = 300$. Выберем частоту дискретизации $f_{\text{д}} = 100$ МГц и определим нормированные значения граничных частот полос пропускания и задерживания, а также промежуточной частоты сигнала изображения:

$$W_{\text{п1}} = f_{\text{п1}} / f_{\text{д}} = 0{,}3225; \qquad W_{\text{п2}} = f_{\text{п2}} / f_{\text{д}} = 0{,}3675;$$

$$W_{\text{з1}} = f_{\text{з1}} / f_{\text{д}} = 0{,}3175; \qquad W_{\text{з2}} = f_{\text{з2}} / f_{\text{д}} = 0{,}3925;$$

$$W_{\text{пч}_{\text{из}}} = f_{\text{пч}_{\text{из}}} / f_{\text{д}} = 0{,}38.$$

Доопределённая аппроксимируемая функция $B(W)$ фильтра описывается выражением (12.8).

Базисные функции $\Phi_i(W)$ $\left(i = \overline{0, K}, \text{ где } K = M/2 = 150 \right)$ для синтеза нерекурсивного ЦФ с линейной ФЧХ (фильтра вида 3 — см. § 5.4) выбираем в виде набора синусоид кратных частот [см. (12.42)].

Весовую функцию выберем следующей:

$$q(W) = \begin{cases} 100, & 0 \le W \le W_{\text{з1}}; \\ 50, & W_{\text{з1}} < W < W_{\text{п1}}; \\ 200, & W_{\text{п1}} \le W \le W_{\text{п2}}; \\ 10, & W_{\text{п2}} < W < W_{\text{з2}}; \\ 20, & W_{\text{з2}} \le W \le 0{,}5. \end{cases}$$

Для расчётов воспользуемся системой компьютерной математики Mathcad.

Коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений (12.61) [или, что то же самое, (12.64)] вычислим по формулам (12.62) и (12.63) при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0{,}5$.

Решение полученной системы уравнений по формуле (12.65) даёт искомый вектор параметров $\mathbf{C}$, по компонентам которого c_i $\left(i = \overline{0, K} \right)$ в соответствии с (5.40) определим отсчёты импульсной характеристики синтезированного ЦФ:

$$h[n]=\begin{cases}0{,}5\,c_{K-n}, & n=\overline{0,\,K-1};\\ 0, & n=K,\end{cases}\qquad \text{где } K=M/2.$$

Остальные отсчёты $h[n]$ $\left(n=\overline{K+1,\,2K}\right)$ находим из условия антисимметричности импульсной характеристики ЦФ • относительно центра: $h[n]=-h[M-n]$ $\left(n=\overline{0,\,M}\right)$, где $M=2K=300$.

Коэффициенты передаточной функции нерекурсивного ЦФ равны отсчётам его импульсной характеристики (см. § 3.6).

Полученные значения отсчётов импульсной характеристики синтезированного ЦФ следующие:

$$h[0]=1{,}553\cdot10^{-3};\quad h[1]=-7{,}083\cdot10^{-4};\quad h[2]=-2{,}377\cdot10^{-4};$$
$$h[3]=8{,}41\cdot10^{-4};\quad h[4]=-4{,}649\cdot10^{-4};\quad h[5]=-2{,}984\cdot10^{-4};$$
$$h[6]=5{,}886\cdot10^{-4};\quad h[7]=-1{,}283\cdot10^{-4};\quad h[8]=-4{,}536\cdot10^{-4};$$
$$h[9]=3{,}749\cdot10^{-4};\quad h[10]=3{,}297\cdot10^{-4};\quad h[11]=-7{,}729\cdot10^{-4};$$
$$h[12]=2{,}832\cdot10^{-4};\quad h[13]=6{,}653\cdot10^{-4};\quad h[14]=-1{,}036\cdot10^{-3};$$
$$h[15]=3{,}002\cdot10^{-4};\quad h[16]=8{,}137\cdot10^{-4};\quad h[17]=-1{,}116\cdot10^{-3};$$
$$h[18]=2{,}128\cdot10^{-4};\quad h[19]=9{,}163\cdot10^{-4};\quad h[20=-1{,}033\cdot10^{-3};$$
$$h[21]=3{,}081\cdot10^{-5};\quad h[22]=9{,}032\cdot10^{-4};\quad h[23]=-6{,}879\cdot10^{-4};$$
$$h[24]=-4{,}027\cdot10^{-4};\quad h[25]=1{,}053\cdot10^{-3};\quad h[26]=-3{,}736\cdot10^{-4};$$
$$h[27]=-9{,}274\cdot10^{-4};\quad h[28]=1{,}346\cdot10^{-3};\quad h[29]=-4{,}039\cdot10^{-4};$$
$$h[30]=-1{,}054\cdot10^{-3};\quad h[31]=1{,}25\cdot10^{-3};\quad h[32]=6{,}071\cdot10^{-6};$$
$$h[33]=-1{,}316\cdot10^{-3};\quad h[34]=1{,}228\cdot10^{-3};\quad h[35]=4{,}792\cdot10^{-5};$$
$$h[36]=-4{,}61\cdot10^{-4};\quad h[37]=2{,}015\cdot10^{-4};\quad h[38]=1{,}358\cdot10^{-3};$$
$$h[39]=-1{,}841\cdot10^{-3};\quad h[40]=3{,}978\cdot10^{-4};\quad h[41]=1{,}609\cdot10^{-3};$$
$$h[42]=-2{,}056\cdot10^{-3};\quad h[43]=3{,}741\cdot10^{-4};\quad h[44]=1{,}686\cdot10^{-3};$$
$$h[45]=-1{,}946\cdot10^{-3};\quad h[46]=2{,}292\cdot10^{-4};\quad h[47]=1{,}507\cdot10^{-3};$$
$$h[48]=-1{,}314\cdot10^{-3};\quad h[49]=-4{,}101\cdot10^{-4};\quad h[50]=1{,}521\cdot10^{-3};$$
$$h[51]=-5{,}671\cdot10^{-4};\quad h[52]=-1{,}271\cdot10^{-3};\quad h[53]=1{,}716\cdot10^{-3};$$
$$h[54]=3{,}397\cdot10^{-5};\quad h[55]=-2{,}112\cdot10^{-3};\quad h[56]=1{,}983\cdot10^{-3};$$
$$h[57]=4{,}94\cdot10^{-4};\quad h[58]=-2{,}68\cdot10^{-3};\quad h[59]=2{,}171\cdot10^{-3};$$
$$h[60]=6{,}148\cdot10^{-4};\quad h[61]=-2{,}639\cdot10^{-3};\quad h[62]=1{,}519\cdot10^{-3};$$
$$h[63]=1{,}165\cdot10^{-3};\quad h[64]=-2{,}662\cdot10^{-3};\quad h[65]=1{,}054\cdot10^{-3};$$
$$h[66]=1{,}778\cdot10^{-3};\quad h[67]=-2{,}53\cdot10^{-3};\quad h[68]=2{,}649\cdot10^{-4};$$
$$h[69]=2{,}43\cdot10^{-3};\quad h[70]=-2{,}369\cdot10^{-3};\quad h[71]=-4{,}845\cdot10^{-4};$$
$$h[72]=2{,}897\cdot10^{-3};\quad h[73]=2{,}897\cdot10^{-3};\quad h[74]=-1{,}248\cdot10^{-3};$$

• См. формулу (5.17).

$$h[75]=3{,}019\cdot10^{-3};\quad h[76]=-1{,}139\cdot10^{-3};\quad h[77]=-2{,}265\cdot10^{-3};$$
$$h[78]=3{,}15\cdot10^{-3};\quad h[79]=-1{,}817\cdot10^{-4};\quad h[80]=-3{,}458\cdot10^{-3};$$
$$h[81]=3{,}441\cdot10^{-3};\quad h[82]=5{,}928\cdot10^{-4};\quad h[83]=-4{,}408\cdot10^{-3};$$
$$h[84]=3{,}687\cdot10^{-3};\quad h[85]=9{,}389\cdot10^{-4};\quad h[86]=-4{,}535\cdot10^{-3};$$
$$h[87]=3{,}268\cdot10^{-3};\quad h[88]=3{,}268\cdot10^{-3};\quad h[89]=-3{,}912\cdot10^{-3};$$
$$h[90]=1{,}79\cdot10^{-3};\quad h[91]=2{,}301\cdot10^{-3};\quad h[92]=-3{,}205\cdot10^{-3};$$
$$h[93]=-3{,}465\cdot10^{-4};\quad h[94]=4{,}087\cdot10^{-3};\quad h[95]=-3{,}114\cdot10^{-3};$$
$$h[96]=-2{,}076\cdot10^{-3};\quad h[97]=5{,}835\cdot10^{-3};\quad h[98]=-3{,}247\cdot10^{-3};$$
$$h[99]=-3{,}396\cdot10^{-3};\quad h[100]=6{,}973\cdot10^{-3};\quad h[101]=-3{,}303\cdot10^{-3};$$
$$h[102]=-3{,}875\cdot10^{-3};\quad h[103]=6{,}727\cdot10^{-3};\quad h[104]=-2{,}161\cdot10^{-3};$$
$$h[105]=-4{,}616\cdot10^{-3};\quad h[106]=5{,}832\cdot10^{-3};\quad h[107]=-4{,}26\cdot10^{-6};$$
$$h[108]=-6{,}033\cdot10^{-3};\quad h[109]=5{,}14\cdot10^{-3};\quad h[110]=2{,}123\cdot10^{-3};$$
$$h[111]=-7{,}449\cdot10^{-3};\quad h[112]=4{,}376\cdot10^{-3};\quad h[113]=4{,}376\cdot10^{-3};$$
$$h[114]=-7{,}889\cdot10^{-3};\quad h[115]=2{,}961\cdot10^{-3};\quad h[116]=5{,}219\cdot10^{-3};$$
$$h[117]=-6{,}778\cdot10^{-3};\quad h[118]=-6{,}309\cdot10^{-4};\quad h[119]=8{,}199\cdot10^{-3};$$
$$h[120]=-5{,}78\cdot10^{-3};\quad h[121]=-5{,}534\cdot10^{-3};\quad h[122]=0{,}013;$$
$$h[123]=-7{,}106\cdot10^{-3};\quad h[124]=-8{,}855\cdot10^{-3};\quad h[125]=0{,}018;$$
$$h[126]=-0{,}01;\quad h[127]=-8{,}021\cdot10^{-3};\quad h[128]=0{,}019;$$
$$h[129]=-0{,}012;\quad h[130]=-4{,}268\cdot10^{-3};\quad h[131]=0{,}012;$$
$$h[132]=-5{,}319\cdot10^{-3};\quad h[133]=-4{,}345\cdot10^{-3};\quad h[134]=1{,}149\cdot10^{-3};$$
$$h[135]=0{,}012;\quad h[136]=-0{,}015;\quad h[137]=-5{,}689\cdot10^{-3};$$
$$h[138]=0{,}035;\quad h[139]=0{,}035;\quad h[140]=1{,}009\cdot10^{-3};$$
$$h[141]=0{,}054;\quad h[142]=-0{,}073;\quad h[143]=0{,}026;$$
$$h[144]=0{,}056;\quad h[145]=-0{,}102;\quad h[146]=0{,}063;$$
$$h[147]=0{,}036;\quad h[148]=-0{,}111;\quad h[149]=0{,}096;\quad h[150]=0;$$

Остальные отсчёты определяются в соответствии с выражением

$$h[n]=-h[300-n]\ \left(n=\overline{151,\ 300}\right).$$

АЧХ спроектированного полосового ЦФ для ПЧ-тракта изображения телевизионного приёмника, построенная по формуле (3.50), изображена на рис.12.11 (ср. с рис.12.10). Минимальное затухание в полосах задерживания превышает 36 дБ. Правый скат АЧХ (срез Найквиста, его протяжённость по оси частот порядка 2,5 МГц) обеспечивает подавление сигнала на промежуточной частоте изображения 6 дБ, а левый скат является крутым (его протяжённость по оси частот порядка 0,5 МГц).

Фазочастотная характеристика спроектированного ЦФ линейная с постоянной групповой задержкой, равной $(M/2)T=M/\left(2f_{д}\right)=1{,}5\cdot10^{-6}$ с.

Реализация такого фильтра возможна, но вряд ли целесообразна из-за весьма высокой частоты дискретизации (при этом на каждый отсчёт выходного сигнала тре-

буется 301 операция умножения и 300 операций сложения вещественных чисел). Более перспективным представляется использование для ПЧ-тракта изображения телевизионного приёмника комплексного ЦФ.

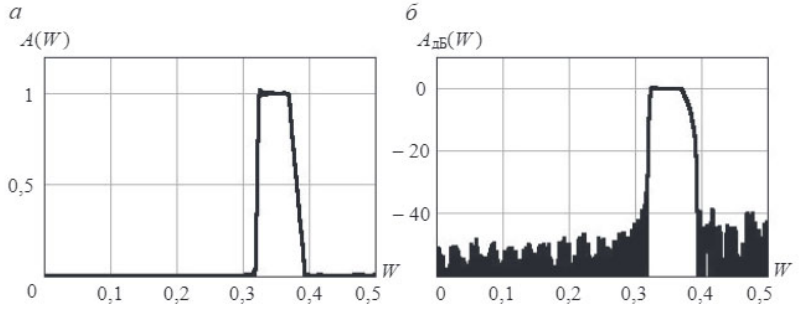


Рис.12.11. АЧХ нерекурсивного ЦФ с линейной ФЧХ для ПЧ-тракта изображения телевизионного приёмника, построенного по квазипараллельной схеме ($M = 300$; $W_{з1} = 0{,}3175$; $W_{п1} = 0{,}3225$; $W_{п2} = 0{,}3675$; $W_{з2} = 0{,}3925$), спроектированного с использованием метода наименьших квадратов при ограничении на АЧХ $A(0{,}38) = 0{,}5$: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

12.8. Решение аппроксимационной задачи для нерекурсивных цифровых фильтров с линейными фазочастотными характеристиками при минимаксном критерии

Рассмотрим совокупность функций (12.15), где $\Phi_i(W)$ $\left(i = \overline{0,\ K}\right)$ — известные базисные функции, например синусоиды или косинусоиды. Пусть, кроме того, заданы аппроксимируемая функция $B(W)$, весовая функция $q(W)$ и замкнутый интервал $[\alpha_1,\ \alpha_2] \subseteq [0,\ 1/2]$. При этом *функцией наилучшего равномерного* (чебышевского) *приближения* называют функцию $\Phi(W,\ \mathbf{C})$ с такими значениями параметров c_i $\left(i = \overline{0,\ K}\right)$, которым соответствует минимальное значение величины

$$\varepsilon(\mathbf{C}) = \max_{W \in [\alpha_1,\ \alpha_2]} \left| \Delta(W,\ \mathbf{C}) \right|, \tag{12.66}$$

где

$$\Delta(W,\ \mathbf{C}) = q(W)\left[B(W) - \Phi(W,\ \mathbf{C})\right] \tag{12.67}$$

— взвешенная функция ошибки аппроксимации.

Величина $\varepsilon(\mathbf{C})$ представляет максимальную погрешность аппроксимации на интервале $[\alpha_1,\ \alpha_2]$.

Очевидно, что функция наилучшего равномерного приближения точно соответствует минимаксному (чебышевскому) критерию (12.17).

Для непрерывной на замкнутом интервале $[\alpha_1, \alpha_2] \subseteq [0, 1/2]$ аппроксимируемой функции $B(W)$ и кусочно-непрерывной на том же интервале весовой функции $q(W)$ существует признак, позволяющий выделить функцию наилучшего равномерного приближения из всех функций класса (12.15). Этот признак устанавливает обобщённая теорема Чебышева [2, 3, 8, 10, 48, 49].

Обобщённая теорема Чебышева. Для того чтобы функция $\Phi(W, \mathbf{C})$ была функцией наилучшего равномерного приближения к функции $B(W)$, необходимо и достаточно, чтобы взвешенная функция ошибки аппроксимации $\Delta(W, \mathbf{C})$ принимала наибольшие и равные друг другу по абсолютной величине и чередующиеся по знаку значения в $K+2$ последовательно расположенных точках $W_\nu \left(\nu = \overline{1,\ K+2}\right)$ интервала $[\alpha_1, \alpha_2]$, называемых *точками альтернанса*:

$$\Delta(W_1, \mathbf{C}) = -\Delta(W_2, \mathbf{C}) = \Delta(W_3, \mathbf{C}) = \ldots = (-1)^{K+1}\Delta(W_{K+2}, \mathbf{C}), \qquad (12.68)$$

где

$$\alpha_1 \le W_1 < W_2 < W_3 < \ldots < W_{K+2} \le \alpha_2. \qquad (12.69)$$

При этом

$$\left|\Delta(W_\nu, \mathbf{C})\right| \ge \left|\Delta(W, \mathbf{C})\right|, \quad \nu = \overline{1,\ K+2}. \qquad (12.70)$$

Система точек (12.69), в которых выполняются условия (12.68), называется чебышевским альтернансом. Наличие чебышевского альтернанса является характеристическим признаком решения задачи (12.17), признаком глобальной оптимальности [50].

На рис.12.12 показан пример взвешенной функции ошибки аппроксимации $\Delta(W, \mathbf{C})$ для функции наилучшего равномерного приближения $\Phi(W, \mathbf{C})$.

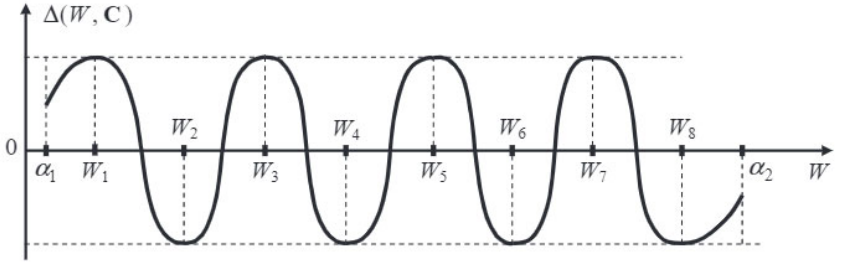


Рис.12.12. Вид взвешенной функции ошибки аппроксимации, удовлетворяющей обобщённой теореме Чебышева, при $K = 6$

Теорема Чебышева справедлива, в частности, для алгебраических и тригонометрических полиномов, а также для дробно-рациональных функций, в числителе и знаменателе которых записаны алгебраические или тригонометрические полиномы [14].

Теорема Чебышева справедлива также при задании аппроксимируемой функции $B(W)$ на отдельных частотных интервалах $[\alpha_1,\ \alpha_2]$, $[\alpha_3,\ \alpha_4]$, … , $[\alpha_m,\ \alpha_{m+1}]$, не имеющих общих точек. В этом случае функция $B(W)$ должна быть доопределена на промежуточных интервалах так, чтобы в целом получилась непрерывная функция на замкнутом интервале $[0,\ 1/2]$, включающем все заданные интервалы. При этом все точки альтернанса $W_\nu\ \left(\nu=\overline{1,\ K+2}\right)$ должны располагаться только на заданных интервалах [7].

В тех случаях, когда для некоторого вектора $\mathbf{C}$ условия (1.95) теоремы Чебышева не выполняются, справедлива следующая теорема Валле – Пуссена [50].

Теорема Валле – Пуссена. Пусть для некоторого вектора $\mathbf{C}$ нашлось не менее $K+2$ последовательно расположенных точек $W_\nu\ \left(\nu=\overline{1,\ K+2}\right)$ интервала $[\alpha_1,\ \alpha_2]$ таких, что

$$\operatorname{sign}\{\Delta(W_1,\ \mathbf{C})\}=-\operatorname{sign}\{\Delta(W_2,\ \mathbf{C})\}=\operatorname{sign}\{\Delta(W_3,\ \mathbf{C})\}=\ldots=$$

$$=(-1)^{K+1}\operatorname{sign}\{\Delta(W_{K+2},\ \mathbf{C})\},\qquad(12.71)$$

и пусть

$$\mu=\min_\nu q(W_\nu)\left|B(W_\nu)-\Phi(W_\nu,\ \mathbf{C})\right|,\qquad(12.72)$$

тогда

$$\min_{\mathbf{C}}\ \max_{W\in[\alpha_1,\ \alpha_2]}\ q(W)\left|B(W)-\Phi(W,\ \mathbf{C})\right|\ge\mu.\qquad(12.73)$$

Система точек $W_\nu\ \left(\nu=\overline{1,\ K+2}\right)$, обладающих свойством (12.71), называется валлепуссеновским (невыровненным) альтернансом.

Смысл теоремы Валле – Пуссена состоит в том, что если в процессе решения задачи (12.17) получен вектор $\mathbf{C}^{(1)}$ такой, что взвешенная функция ошибки аппроксимации (12.67) при этом значении вектора имеет не менее $K+2$ чередующихся по знаку, но не равных по абсолютной величине локальных экстремумов, то величина $\max\limits_\nu q(W_\nu)\left|B(W_\nu)-\Phi(W_\nu,\ \mathbf{C})\right|$ может быть умень-шена; при этом наибольший по абсолютной величине максимум δ_M умень-шится, а наименьший δ_m — увеличится [50].

Аналитически функцию чебышевского приближения можно определить только в исключительных случаях при невысоком порядке фильтра, поэтому практическое значение имеют численные методы решения задачи. Одним из наиболее эффективных методов численного определения функций наилучшего равномерного приближения является алгоритм Е.Я. Ремеза [2, 3, 8, 14, 49, 50]. Этот алгоритм представляет собой итерационный процесс вычисления вектора коэффициентов $\mathbf{C}$ до тех пор, пока условия обобщённой теоремы Чебышева не окажутся выполненными с заданной степенью точности.

Идея алгоритма Е.Я. Ремеза состоит в следующем: нужно каким-либо способом найти валлепуссеновский (невыровненный) альтернанс, а затем с помощью итерационного процесса довести его до чебышевского (выровненного) альтернанса. Это происходит в результате выравнивания модулей локальных экстремумов взвешенной функции ошибки аппроксимации (12.67), т.е. увеличения δ_m и уменьшения δ_M до значения

$$\delta = \min_{\mathbf{C}} \max_{W \in [\alpha_1,\ \alpha_2]} q(W) \left| B(W) - \Phi(W,\ \mathbf{C}) \right|. \qquad (12.74)$$

Функция чебышевского приближения в алгоритме Е.Я. Ремеза строится следующим образом:

$$\Phi(W,\ \mathbf{C}^{(r+1)}) = \Phi(W,\ \mathbf{C}^{(r)}) + \Phi(W,\ \mathbf{P}^{(r)}) = \sum_{i=0}^{K} c_i^{(r+1)} \Phi_i(W) =$$

$$= \sum_{i=0}^{K} \left(c_i^{(r)} + p_i^{(r)} \right) \Phi_i(W) = \sum_{i=0}^{K} c_i^{(r)} \Phi_i(W) + \sum_{i=0}^{K} p_i^{(r)} \Phi_i(W), \qquad (12.75)$$

где $p_i^{(r)} \left(i = \overline{0,\ K} \right)$ — компоненты вектора поправок $\mathbf{P}$ на r-й итерации.

Структура итерационной процедуры [2, 3], называемой алгоритмом Е.Я. Ремеза, приведена на рис.12.13.

В блоке 1 вводят следующие исходные данные: аппроксимируемую функцию $B(W)$; весовую функцию $q(W)$; систему базисных функций $\Phi_i(W)$ $\left(i = \overline{0,\ K} \right)$, с помощью которых аппроксимирующая функция $\Phi(W,\ \mathbf{C})$ представляется в виде (12.15); допустимую относительную погрешность выполнения условий (12.68) обобщённой теоремы Чебышева; нулевое приближение точек альтернанса $W_\nu^{(0)}$ $\left(\nu = \overline{1,\ K+2} \right)$.

В блоке 2 производится вычисление первого приближения вектора параметров $\mathbf{C}^{(1)}$.

Подставляя аппроксимирующую функцию (12.15) в выражение для взвешенной ошибки аппроксимации (12.67), с учётом равенств (12.68) в точках альтернанса получим систему линейных алгебраических уравнений относительно координат искомого вектора параметров $c_i^{(1)} \left(i = \overline{0,\ K} \right)$, а также параметра $\delta^{(1)}$, определяющего величину максимальной ошибки аппроксимации:

$$\sum_{i=0}^{K} c_i^{(1)} \Phi_i(W_\nu^{(0)})\, q(W_\nu^{(0)}) + (-1)^{\nu-1} \delta^{(1)} = B(W_\nu^{(0)})\, q(W_\nu^{(0)}), \quad \nu = \overline{1,\ K+2}. \qquad (12.76)$$

В результате решения системы (12.76) $K+2$ уравнений с $K+2$ неизвестными определяются вектор $\mathbf{C}^{(1)}$ и параметр $\delta^{(1)}$.

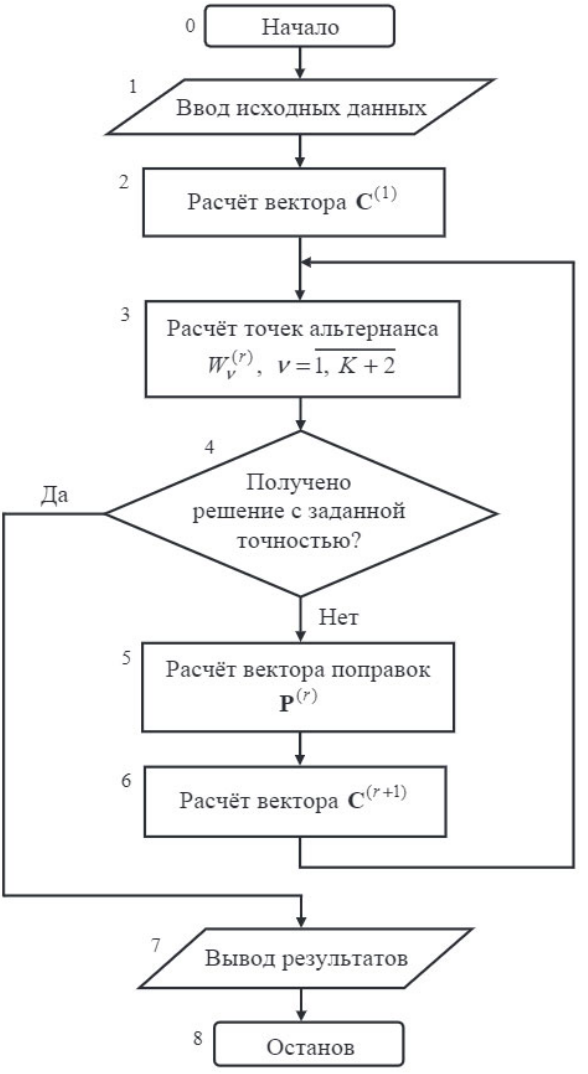


Рис.12.13. Структура алгоритма Е.Я. Ремеза

Для решения задачи на ЭВМ систему линейных алгебраических уравнений (12.76) удобно записать в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{H}^{(0)}\,\overline{\mathbf{C}}^{(1)} = \mathbf{\Theta}^{(0)}, \qquad (12.77)$$

где

$$\mathbf{H}^{(0)} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Phi_0(W_1^{(0)})\,q(W_1^{(0)}) & \Phi_1(W_1^{(0)})\,q(W_1^{(0)}) & \ldots & \Phi_K(W_1^{(0)})\,q(W_1^{(0)}) & 1 \\ \Phi_0(W_2^{(0)})\,q(W_2^{(0)}) & \Phi_1(W_2^{(0)})\,q(W_2^{(0)}) & \ldots & \Phi_K(W_2^{(0)})\,q(W_2^{(0)}) & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi_0(W_{K+1}^{(0)})\,q(W_{K+1}^{(0)}) & \Phi_1(W_{K+1}^{(0)})\,q(W_{K+1}^{(0)}) & \ldots & \Phi_K(W_{K+1}^{(0)})\,q(W_{K+1}^{(0)}) & (-1)^K \\ \Phi_0(W_{K+2}^{(0)})\,q(W_{K+2}^{(0)}) & \Phi_1(W_{K+2}^{(0)})\,q(W_{K+2}^{(0)}) & \ldots & \Phi_K(W_{K+2}^{(0)})\,q(W_{K+2}^{(0)}) & (-1)^{K+1} \end{pmatrix} \tag{12.78}$$

— квадратная матрица размера $(K+2)\times(K+2)$;

$$\overline{\mathbf{C}}^{(1)} = \begin{pmatrix} c_0^{(1)} \\ c_1^{(1)} \\ \ldots \\ c_K^{(1)} \\ \delta^{(1)} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{\Theta}^{(0)} = \begin{pmatrix} B(W_1^{(0)})\,q(W_1^{(0)}) \\ B(W_2^{(0)})\,q(W_2^{(0)}) \\ \ldots \\ B(W_{K+1}^{(0)})\,q(W_{K+1}^{(0)}) \\ B(W_{K+2}^{(0)})\,q(W_{K+2}^{(0)}) \end{pmatrix} \tag{12.79}$$

— $(K+2)$-координатные векторы.

Решение векторно-матричного уравнения (12.77) находится обращением матрицы $\mathbf{H}^{(0)}$:

$$\overline{\mathbf{C}}^{(1)} = \left(\mathbf{H}^{(0)}\right)^{-1}\mathbf{\Theta}^{(0)}. \tag{12.80}$$

При полученном r-м приближении ($r = 1, 2, 3, \ldots$) вектора $\mathbf{C}^{(r)}$ в блоке 3 строится кривая ошибок

$$\Delta(W,\ \mathbf{C}^{(r)}) = q(W)\left[B(W) - \sum_{i=0}^{K} c_i^{(r)}\Phi_i(W)\right], \tag{12.81}$$

а затем определяются точки локальных экстремумов функции (12.81), чередующихся по знаку: $W_\nu^{(r)}\ \left(\nu = \overline{1,\ K+2}\right)$, которые принимаются в качестве точек альтернанса r-го приближения.

На границах локальных интервалов $[\alpha_1,\ \alpha_2]$, $[\alpha_3,\ \alpha_4]$, … , $[\alpha_m,\ \alpha_{m+1}]$ необходимо проверить, следует ли включать концевые точки в число точек альтернанса. Если, например, $\Delta(\alpha_1,\ \mathbf{C}^{(r)}) \neq 0$, т.е. функция ошибок имеет локаль-

ный экстремум, и сохраняется чередование знаков функции ошибок $\Delta(W,\ \mathbf{C}^{(r)})$ в соседних точках локальных экстремумов • [см. (12.68)], то точку $W=\alpha_1$ следует включить в число точек альтернанса. При $\Delta(\alpha_1,\ \mathbf{C}^{(r)})=0$ концевая точка $W=\alpha_1$ не является точкой альтернанса. Аналогично решается вопрос о включении в число точек альтернанса и других концевых точек. Общее число точек альтернанса на интервале $[0,\ 1/2]$ должно быть равно $K+2$.

Далее в блоке 4 осуществляется контроль качества полученного решения. Если при r-м приближении вектора параметров $\mathbf{C}^{(r)}$ аппроксимирующая функция $\Phi(W,\ \mathbf{C}^{(r)})$ с заданной точностью удовлетворяет обобщённой теореме Чебышева, т.е. экстремумы взвешенной функции ошибок (12.67) чередуются по знаку, а их значения равны по модулю с заданной степенью точности [см. (12.68)], то следует переход в блок 7, где производится вывод результатов: компонент вектора параметров $\mathbf{C}^{(r)}$, точек альтернанса $W_\nu^{(r)}\ \left(\nu=\overline{1,\ K+2}\right)$, а также значений ошибки аппроксимации в этих точках $\Delta(W_\nu^{(r)},\ \mathbf{C}^{(r)})$. Затем происходит переход в блок 8, и вычисления заканчиваются.

Если же заданная точность решения не достигнута, то ищется следующее, т.е. $(r+1)$-приближение. В этом случае осуществляется переход в блок 5, где производится расчёт вектора поправок $\mathbf{P}$ для r-й итерации [см. (12.75)] путём решения системы линейных алгебраических уравнений [2, 3, 49, 50]:

$$\sum_{i=0}^{K} p_i^{(r)}\,\Phi_i(W_\nu^{(r)})\,q(W_\nu^{(r)})+(-1)^{\nu-1}\delta^{(r)}=\Delta(W_\nu^{(r)},\ \mathbf{C}^{(r)}),\quad \nu=\overline{1,\ K+2}, \tag{12.82}$$

где $p_i^{(r)}\ \left(i=\overline{0,\ K}\right)$ — компоненты вектора поправок $\mathbf{P}$ r-й итерации.

Система уравнений (12.82) в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{H}^{(r)}\,\overline{\mathbf{P}}^{(r)}=\boldsymbol{\Delta}^{(r)}, \tag{12.83}$$

где

$$\overline{\mathbf{P}}^{(r)}=\begin{pmatrix} p_0^{(r)}\\ p_1^{(r)}\\ \ldots\\ p_K^{(r)}\\ \delta^{(r)}\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{\Delta}^{(r)}=\begin{pmatrix} \Delta(W_1^{(r)},\ \mathbf{C}^{(r)})\\ \Delta(W_2^{(r)},\ \mathbf{C}^{(r)})\\ \ldots\\ \Delta(W_{K+1}^{(r)},\ \mathbf{C}^{(r)})\\ \Delta(W_{K+2}^{(r)},\ \mathbf{C}^{(r)})\end{pmatrix} \tag{12.84}$$

• На практике обычно выполняется соотношение $\left|\Delta(\alpha_1,\mathbf{C}^{(r)})\right|\geq\left|\Delta(W_\nu,\mathbf{C}^{(r)})\right|$, где W_ν — внутренние точки альтернанса на локальном интервале $[\alpha_1,\ \alpha_2]$.

— $(K+2)$-координатные векторы;

$$\mathbf{H}^{(r)} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Phi_0(W_1^{(r)})\,q(W_1^{(r)}) & \Phi_1(W_1^{(r)})\,q(W_1^{(r)}) & \dots & \Phi_K(W_1^{(r)})\,q(W_1^{(r)}) & 1 \\ \Phi_0(W_2^{(r)})\,q(W_2^{(r)}) & \Phi_1(W_2^{(r)})\,q(W_2^{(r)}) & \dots & \Phi_K(W_2^{(r)})\,q(W_2^{(r)}) & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_0(W_{K+1}^{(r)})\,q(W_{K+1}^{(r)}) & \Phi_1(W_{K+1}^{(r)})\,q(W_{K+1}^{(r)}) & \dots & \Phi_K(W_{K+1}^{(r)})\,q(W_{K+1}^{(r)}) & (-1)^K \\ \Phi_0(W_{K+2}^{(r)})\,q(W_{K+2}^{(r)}) & \Phi_1(W_{K+2}^{(r)})\,q(W_{K+2}^{(r)}) & \dots & \Phi_K(W_{K+2}^{(r)})\,q(W_{K+2}^{(r)}) & (-1)^{K+1} \end{pmatrix} \tag{12.85}$$

— квадратная матрица размера $(K+2)\times(K+2)$.

Решение уравнения (12.83) находится обращением матрицы $\mathbf{H}^{(r)}$:

$$\overline{\mathbf{P}}^{(r)} = \left(\mathbf{H}^{(r)}\right)^{-1} \boldsymbol{\Delta}^{(r)}. \tag{12.86}$$

В результате решения системы уравнений (12.82) [или, что то же самое, матричного уравнения (12.83)] получают вектор $\mathbf{P}^{(r)}$ и параметр $\delta^{(r)}$. Затем в блоке 6 вычисляют $(r+1)$-е приближение вектора $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C}^{(r+1)} = \mathbf{C}^{(r)} + \mathbf{P}^{(r)}. \tag{12.87}$$

Далее осуществляется переход в блок 3, где строится кривая ошибок (12.67) при $(r+1)$-м приближении вектора $\mathbf{C}$. Цикл вычислений повторяется до тех пор, пока в блоке контроля качества решения (блок 4) не будет зафиксирована заданная точность полученного решения.

Алгоритм Е.Я. Ремеза обладает высокой (квадратичной) скоростью сходимости. Обычно решение задачи (12.17) достигается за 4 — 5 итераций независимо от размерности вектора $\mathbf{C}$ [50].

Пример 12.9. Спроектировать нерекурсивный цифровой ФНЧ с линейной фазочастотной характеристикой вида 1 при следующих исходных данных (см. пример 1.6):

— граничная частота полосы пропускания $f_{\text{п}} = 2000$ Гц;

— граничная частота полосы задерживания $f_{\text{з}} = 2500$ Гц;

— порядок фильтра $M = 100$;

— частота дискретизации $f_{\text{д}} = 10000$ Гц.

Применяя второй способ нормировки частоты (см. § 3.4), вычислим нормированные граничные частоты: $W_{\text{п}} = f_{\text{п}} / f_{\text{д}} = 0{,}2$; $W_{\text{з}} = f_{\text{з}} / f_{\text{д}} = 0{,}25$.

Доопределённая аппроксимируемая функция $B(W)$ описывается выражением (12.6). Базисные функции согласно (5.23) представляют собой набор косинусоид кратных частот [см. (12.43)].

Весовую функцию для алгоритма Е.Я. Ремеза выберем следующей:

$$q(W)=\begin{cases}100, & 0\le W\le W_{\text{п}};\\ 5, & W_{\text{п}}<W<W_{\text{з}};\\ 10, & W_{\text{з}}\le W\le 0{,}5.\end{cases}$$

Для расчёта воспользуемся системой компьютерной математики Mathcad и алгоритмом Е.Я. Ремеза (см. рис.12.13). В блоке 2 расчёт ведётся по формулам (12.77) — (12.80), в блоке 5 — по формулам (12.83) — (12.86), а в блоке 6 — по формуле (12.87). Поиск точек альтернанса в блоке 3 осуществляется с помощью функций Minimize и Maximize, имеющихся в системе Mathcad. Решение получено за четыре итерации.

По компонентам вектора **C** в соответствии с (5.24) определим отсчёты импульсной характеристики синтезированного ЦФ:

$$h[n]=\begin{cases}0{,}5\ c_{K-n}, & n=\overline{0,\,K-1};\\ c_0, & n=K,\end{cases}\qquad \text{где } K=M/2.$$

Остальные отсчёты $h[n]$ $\left(n=\overline{K+1,\ 2K}\right)$ находим из условия симметричности импульсной характеристики ЦФ • относительно центра: $h[n]=h[M-n]$ $\left(n=\overline{0,\,M}\right)$, где $M=2K=100$.

Коэффициенты передаточной функции нерекурсивного ЦФ равны отсчётам его импульсной характеристики (см. § 3.6).

Полученные значения отсчётов импульсной характеристики синтезированного ЦФ следующие:

$$h[0]=-2{,}358\cdot10^{-4};\quad h[1]=9{,}346\cdot10^{-4};\quad h[2]=-4{,}014\cdot10^{-4};$$
$$h[3]=-5{,}698\cdot10^{-4};\quad h[4]=1{,}335\cdot10^{-5};\quad h[5]=5{,}534\cdot10^{-4};$$
$$h[6]=2{,}764\cdot10^{-4};\quad h[7]=-3{,}223\cdot10^{-4};\quad h[8]=-4{,}806\cdot10^{-4};$$
$$h[9]=-1{,}2\cdot10^{-4};\quad h[10]=5{,}136\cdot10^{-4};\quad h[11]=6{,}257\cdot10^{-4};$$
$$h[12]=-2{,}241\cdot10^{-4};\quad h[13]=-1{,}099\cdot10^{-3};\quad h[14]=-3{,}463\cdot10^{-4};$$
$$h[15]=1{,}332\cdot10^{-3};\quad h[16]=1{,}12\cdot10^{-3};\quad h[17]=-1{,}195\cdot10^{-3};$$
$$h[18]=-1{,}91\cdot10^{-3};\quad h[19]=6{,}621\cdot10^{-4};\quad h[20]=2{,}464\cdot10^{-3};$$
$$h[21]=1{,}86\cdot10^{-4};\quad h[22]=-2{,}597\cdot10^{-3};\quad h[23]=-1{,}093\cdot10^{-3};$$
$$h[24]=2{,}203\cdot10^{-3};\quad h[25]=1{,}736\cdot10^{-3};\quad h[26]=-1{,}383\cdot10^{-3};$$
$$h[27]=-1{,}784\cdot10^{-3};\quad h[28]=4{,}601\cdot10^{-4};\quad h[29]=1{,}006\cdot10^{-3};$$
$$h[30]=8{,}441\cdot10^{-5};\quad h[31]=5{,}517\cdot10^{-4};\quad h[32]=3{,}855\cdot10^{-4};$$
$$h[33]=-2{,}577\cdot10^{-3};\quad h[34]=-2{,}401\cdot10^{-3};\quad h[35]=4{,}328\cdot10^{-3};$$
$$h[36]=6{,}373\cdot10^{-3};\quad h[37]=-4{,}805\cdot10^{-3};\quad h[38]=-0{,}012;$$
$$h[39]=2{,}66\cdot10^{-3};\quad h[40]=0{,}02;\quad h[41]=3{,}692\cdot10^{-3};$$
$$h[42]=-0{,}028;\quad h[43]=-0{,}017;\quad h[44]=0{,}037;$$
$$h[45]=0{,}04;\quad h[46]=-0{,}044;\quad h[47]=-0{,}091;$$
$$h[48]=0{,}048;\quad h[49]=0{,}313;\quad h[50]=0{,}45;$$

• См. сноску на с.381.

Остальные отсчёты определяются в соответствии с выражением

$$h[n] = h[100 - n] \quad \left(n = \overline{51, 100}\right).$$

На рис.12.14 изображена АЧХ спроектированного цифрового ФНЧ, построенная по формуле (3.50).

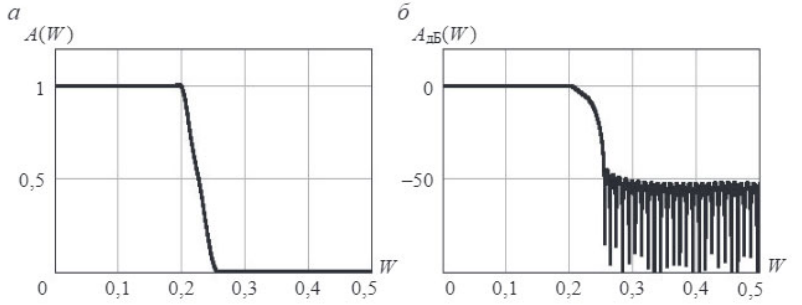


Рис.12.14. АЧХ нерекурсивного цифрового ФНЧ с линейной ФЧХ, спроектированного при минимаксном критерии с использованием алгоритма Е.Я. Ремеза ($M = 100$; $W_п = 0{,}2$; $W_з = 0{,}25$): *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Критерии оптимальности (12.16) и (12.17) являются частными случаями более общего критерия — *критерия минимума нормы взвешенной ошибки аппроксимации* (12.67) *в пространстве* L_p:

$$\left\| q(W)[B(W) - \Phi(W, \mathbf{C})] \right\|_p = \left\{ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left| q(W)[B(W) - \Phi(W, \mathbf{C})] \right|^p dW \right\}^{1/p} \to \min. \tag{12.88}$$

Среднеквадратический критерий (12.16) в терминах нормы получается из (12.88) при $p = 2$ в виде

$$\left\| q(W)[B(W) - \Phi(W, \mathbf{C})] \right\|_2^2 \to \min. \tag{12.89}$$

Минимаксный критерий (12.17) следует из (12.88) при $p \to \infty$:

$$\left\| q(W)[B(W) - \Phi(W, \mathbf{C})] \right\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \left\{ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left| q(W)[B(W) - \Phi(W, \mathbf{C})] \right|^p dW \right\}^{1/p} =$$

$$= \max_{W \in [\alpha_1,\ \alpha_2]} \left| q(W)[B(W) - \Phi(W, \mathbf{C})] \right| \to \min. \tag{12.90}$$

Доказательство соотношения (12.90) аналогично выводу формулы (11.14). С учётом того, что $q(W) \geq 0$, из (12.90) получаем критерий (12.17).

Отметим, что минимаксный критерий (12.17) является более сильным, чем среднеквадратический (12.16), поскольку он ограничивает максимальную ошибку аппроксимации, а среднеквадратический — нет.

12.9. Решение аппроксимационной задачи для нерекурсивных цифровых фильтров методом частотной выборки

Следуя [6], рассмотрим ещё один из неоптимальных[•] методов синтеза — синтез нерекурсивных ЦФ методом частотной выборки.

Нерекурсивный ЦФ однозначно определяется как отсчётами импульсной характеристики $h[n]$ $\left(n=\overline{0,\ M}\right)$, так и коэффициентами её дискретного преобразования Фурье (ДПФ) $H(k)$ $\left(k=\overline{0,\ M}\right)$. Обе эти последовательности связаны соотношениями

$$H(k)=\sum_{n=0}^{M} h[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{M+1}nk},\quad k=\overline{0,\ M}; \tag{12.91}$$

$$h[n]=\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} H(k)\, e^{j\frac{2\pi}{M+1}nk},\quad n=\overline{0,\ M}. \tag{12.92}$$

Коэффициенты ДПФ $H(k)$ $\left(k=\overline{0,\ M}\right)$ равны значениям Z-преобразования импульсной характеристики $h[n]$ $\left(n=\overline{0,\ M}\right)$, взятых в $M+1$ равноотстоящих точках на единичной окружности, т.е.

$$H(k)=H(z)\big|_{z=\exp[j2\pi k/(M+1)]},\quad k=\overline{0,\ M}. \tag{12.93}$$

Z-преобразование импульсной характеристики нерекурсивного ЦФ найдём подстановкой (12.92) в выражение для Z-преобразования[••]:

$$H(z)=\sum_{n=0}^{M} h[n]\, z^{-n}=\sum_{n=0}^{M}\left[\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} H(k)\, e^{j\frac{2\pi}{M+1}nk}\right] z^{-n}=$$

$$=\sum_{k=0}^{M}\frac{H(k)}{M+1}\sum_{n=0}^{M}\left(e^{j\frac{2\pi}{M+1}k} z^{-1}\right)^{n}=\sum_{k=0}^{M}\frac{H(k)}{M+1}\,\frac{1-e^{j2\pi k}\, z^{-(M+1)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{M+1}k} z^{-1}}=$$

[•] Из рассмотренных методов синтеза ЦФ неоптимальными являются метод оконных функций и метод разложения аппроксимируемой функции в ряд Фурье (см. § 12.4 и 12.5).

[••] Здесь используется формула суммы членов конечной геометрической прогрессии со знаменателем q:

$$\sum_{n=0}^{M} q^{n}=\frac{1-q^{M+1}}{1-q}.$$

$$= \frac{1 - z^{-(M+1)}}{M+1} \sum_{k=0}^{M} \frac{H(k)}{1 - z^{-1} e^{j\frac{2\pi}{M+1}k}}. \qquad (12.94)$$

Из соотношения (12.94) следует, что для аппроксимации произвольной непрерывной частотной характеристики следует осуществить её *дискретизацию по частоте* в $M+1$ равноотстоящих точках на единичной окружности, т.е. взять частотную выборку, и найти непрерывную частотную характеристику путём интерполяции между отсчётными точками. При этом ошибка аппроксимации на частотах взятия выборки (в узловых точках) в точности равна нулю, а в промежуточных точках будет иметь конечную величину. Чем более гладкой является аппроксимируемая частотная характеристика, тем меньше ошибка аппроксимации между частотными отсчётами.

Полагая в формуле (12.94) $z = \exp(j2\pi W)$, найдём комплексную частотную характеристику ЦФ:

$$H\left(e^{j2\pi W}\right) = \frac{1 - e^{-j2\pi W(M+1)}}{M+1} \sum_{k=0}^{M} \frac{H(k)}{1 - e^{-j2\pi W} e^{j\frac{2\pi}{M+1}k}} =$$

$$= \frac{e^{-j\pi W M}}{M+1} \sum_{k=0}^{M} H(k)\, e^{-j\pi k/(M+1)} \frac{\sin[\pi W(M+1)]}{\sin[\pi W - \pi k/(M+1)]}. \qquad (12.95)$$

Отсюда следует, что комплексная частотная характеристика ЦФ является линейной комбинацией частотных интерполирующих функций

$$S(2\pi W,\ k) = e^{-j\pi k/(M+1)} \frac{\sin[\pi W(M+1)]}{\sin[\pi W - \pi k/(M+1)]} =$$

$$= \pm e^{-j\pi k/(M+1)} \frac{\sin\{(M+1)[\pi W - \pi k/(M+1)]\}}{\sin[\pi W - \pi k/(M+1)]} \qquad (12.96)$$

со значениями частотных отсчётов $H(k)$ в качестве коэффициентов:

$$H\left(e^{j2\pi W}\right) = \frac{e^{-j\pi W M}}{M+1} \sum_{k=0}^{M} H(k)\, S(2\pi W,\ k). \qquad (12.97)$$

Таким образом, вклад каждого частотного отсчёта $H(k)$ в комплексную частотную характеристику пропорционален его значению, умноженному на интерполирующую функцию $S(2\pi W,\ k)$. Оказалось, что интерполирующие функции, связанные с отсчётами из переходной полосы, обеспечивают хорошее подавление пульсаций АЧХ в примыкающих частотных полосах [6].

В случае селективных фильтров, когда заданная АЧХ резко меняется от полосы к полосе, частотные отсчёты в переходных полосах остаются незаданными переменными. Оптимизируя значения незаданных частотных отсчётов,

которые лежат в переходных полосах, можно получить ЦФ с очень хорошими характеристиками. Примеры расчёта ЦФ с линейными ФЧХ методом частотной выборки приведены в [6].

Краткие итоги

1. В инженерной практике встречаются три типа задач: анализ, синтез и идентификация (см. табл.12.1).

2. Задачи проектирования представляет собой типичную задачу синтеза, которая может решаться либо строгими математическими, либо эвристическими методами. Математический синтез даёт глобальный результат, т.е. действительно наилучшую систему в смысле выбранного критерия для заданного или выбранного класса систем. Эвристический (инженерный) синтез может гарантировать лишь «локальный» результат, так как физически нереально проанализировать все возможные структуры при всех возможных сочетаниях параметров системы.

3. Процедура проектирования ЦФ состоит из ряда последовательно выполняемых этапов. При этом результаты, получаемые в процессе решения задачи на предыдущем этапе, являются исходными данными для задач, решаемых на последующих этапах проектирования. Основные этапы проектирования ЦФ следующие: 1) формулировка и решение аппроксимационной задачи, 2) расчёт разрядности коэффициентов фильтра, 3) расчёт разрядности операционных устройств, 4) выбор элементной базы и программирование DSP (реализация ЦФ).

4. Постановка задачи математического синтеза ЦФ следующая:

- В соответствии с техническим заданием (ТЗ) на проектирование определяется *аппроксимируемая функция* $B(W)$. В качестве функции $B(W)$ для частотно-избирательных ЦФ обычно используется идеализированная АЧХ.
- Выбирается вид *аппроксимирующей функции* $\Phi(W, \mathbf{C})$, значения которой определяют заданную в ТЗ характеристику ЦФ с допустимой погрешностью. При этом компоненты $c_i \left(i = \overline{0,\ K}\right)$ вектора свободных параметров $\mathbf{C}$ либо совпадают с коэффициентами передаточной функции $H(z)$, либо достаточно просто связаны с ними.
- Выбирается *критерий аппроксимации*, уточняющий смысл приближённого равенства (12.1) при заданных значениях частоты W.
- Выбирается *весовая функция* аппроксимации $q(W) \geq 0$, задающая требования к точности приближённого равенства (12.1).

При проектировании ЦФ применяют два основных критерия аппроксимации: среднеквадратический (12.16) и минимаксный (12.17), которые являются частными случаями более общего критерия — *критерия минимума нормы взвешенной ошибки аппроксимации в пространстве* L_p (12.88).

От вида аппроксимирующей функции $\Phi(W, \mathbf{C})$ существенно зависит сложность решения аппроксимационной задачи. Если компоненты $c_i \left(i = \overline{0,\ K}\right)$ вектора $\mathbf{C}$ входят в выражение $\Phi(W, \mathbf{C})$ линейным образом [см. (12.15)], то процедура математического синтеза ЦФ сводится *к линейной оптимизационной задаче*, для которой разработаны эффективные алгоритмы решения. Если же компоненты $c_i \left(i = \overline{0,\ K}\right)$ вектора $\mathbf{C}$ входят в выражение $\Phi(W, \mathbf{C})$ нелинейным образом, то оптимизационная задача также будет нелинейной. Методы решения нелинейных задач оптимизации значительно сложнее, чем линейных, поэтому на практике

вместо нелинейных оптимизационных методов часто применяют эвристические (инженерные) методы синтеза ЦФ.

К линейным оптимизационным задачам сводятся задачи синтеза нерекурсивных стационарных линейных одномерных скалярных вещественных ЦФ с линейными фазочастотными характеристиками. Синтез цифровых фильтров всех других типов приводит к нелинейным оптимизационным задачам.

5. Для синтеза нерекурсивных стационарных линейных одномерных скалярных вещественных ЦФ с линейными ФЧХ, кроме оптимизационных методов, иногда применяют более простые неоптимальные методы, среди которых наиболее популярен *метод оконных функций*. Сущность оконного метода заключается в модификации (12.28) передаточной функции нерекурсивного цифрового фильтра с помощью функции окна таким образом, чтобы улучшить сходимость усечённого ряда Фурье (12.25) или (12.26) и устранить тем самым влияние эффекта Гиббса. Наиболее часто используются оконные функции Хэнна, Хэмминга, Блэкмана и Кайзера. Прямоугольное окно даёт наихудший результат, а окно Кайзера — наилучший (см. примеры 11.1 — 12.4). Оконные методы синтеза ЦФ отличаются простотой, требуют минимальных вычислительных затрат, поэтому находят широкое применение.

6. Для синтеза нерекурсивных стационарных линейных одномерных скалярных вещественных ЦФ с линейными ФЧХ используют также *метод разложения аппроксимируемой функции $B(W)$ в ряд Фурье* (неоптимальный метод). Этот метод имеет два существенных недостатка:

— в нём не работает весовая функция $q(W)$, что приводит к неоптимальному распределению погрешности аппроксимации между различными областями частотного диапазона;

— аппроксимируемая функция $B(W)$ должна быть определена и непрерывна при всех значениях частоты $W \in [0, 1/2]$, поэтому её необходимо доопределить в переходных полосах, что накладывает дополнительные ограничения на аппроксимирующую функцию $\Phi(W, \mathbf{C})$.

7. При среднеквадратическом критерии аппроксимации (12.16) наиболее универсальным методом синтеза ЦФ является *метод наименьших квадратов*. Этот метод сводит задачу синтеза к задаче поиска экстремума целевой функции (12.47), т.е. к оптимизационной задаче. Условия экстремума (12.48) целевой функции представляют собой систему уравнений относительно неизвестных компонент $c_i \left(i = \overline{0, K} \right)$ вектора $\mathbf{C}$, которая в общем случае является нелинейной и необязательно алгебраической, тогда задача оптимизации будет нелинейной. Для линейной аппроксимирующей функции $\Phi(W, \mathbf{C})$ [см. (12.15)] условия экстремума (12.50) целевой функции (12.47) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений, которая записывается в виде (12.51) или в векторно-матричной форме (12.54). Её решение (12.55) находят путём обращения матрицы коэффициентов (12.52). Коэффициенты передаточной функции ЦФ $H(z)$ определяют по найденным компонентам $c_i \left(i = \overline{0, K} \right)$ вектора $\mathbf{C}$.

8. Метод наименьших квадратов позволяет решить аппроксимационную задачу также при наличии ограничений на характеристики ЦФ (задача условной оптимизации). Для решения задачи поиска условного экстремума используется метод неопределённых множителей Лагранжа, позволяющий свести задачу отыскания условного экстремума целевой функции (12.47) к задаче отыскания безусловного экстремума целевой функции (12.57). При этом размерность задачи увеличивается на число ограничений типа равенств [см. (12.56)], накладываемых на аппроксимирующую функцию $\Phi(W, \mathbf{C})$. Необходимые условия экстремума целевой функции (12.57) записываются в виде системы уравнений (12.58). В случае линейной аппроксимирующей функции $\Phi(W, \mathbf{C})$ [см. (12.15)] целевая функция (12.67) принимает вид (12.59). При этом необходимые условия экстремума (12.58) конкретизируются выражениями (12.60) и

представляют собой систему линейных алгебраических уравнений (12.61), которая записывается в векторно-матричной форме (12.64). Её решение (12.65) находят обращением матрицы коэффициентов (12.62). Коэффициенты передаточной функции ЦФ $H(z)$ определяют по найденным компонентам $c_i \left(i = \overline{0, K+1}\right)$ вектора $\overline{\mathbf{C}}$.

9. Минимаксному критерию аппроксимации (12.17) соответствует *функция наилучшего равномерного* (чебышевского) *приближения* из класса функций вида (12.15), которая согласно обобщённой теореме Чебышева обеспечивает взвешенной функции ошибки аппроксимации (12.67) следующее свойство: взвешенная функция ошибки аппроксимации $\Delta(W, \mathbf{C})$ принимает наибольшие и равные друг другу по абсолютной величине и чередующиеся по знаку значения в $K+2$ последовательно расположенных точках $W_\nu \left(\nu = \overline{1, K+2}\right)$ интервала $[\alpha_1, \alpha_2]$, называемых *точками альтернанса* [см. (12.68) и (12.69)]. Это условие является признаком глобальной оптимальности.

Практическое значение для нахождения функции наилучшего равномерного приближения имеет алгоритм Е.Я. Ремеза, который представляет собой итерационный процесс вычисления вектора $\mathbf{C}$, входящего в аппроксимирующую функцию $\Phi(W, \mathbf{C})$, до тех пор, пока условия обобщённой теоремы Чебышева не окажутся выполненными с заданной степенью точности. Идея алгоритма Е.Я. Ремеза состоит в следующем: нужно каким-либо способом найти валлепуссеновский (невыровненный) альтернанс (12.71), а затем с помощью итерационной процедуры довести его до чебышевского (выровненного) альтернанса (12.68). Структура алгоритма Е.Я. Ремеза приведена на рис.12.13. Алгоритм Е.Я. Ремеза обладает высокой (квадратичной) скоростью сходимости. Обычно решение задачи (12.17) достигается за 4 — 5 итераций независимо от размерности вектора $\mathbf{C}$.

Минимаксный критерий является более сильным, чем среднеквадратический критерий, поскольку он ограничивает максимальную ошибку аппроксимации, а среднеквадратический — нет.

10. К неоптимальным методам синтеза ЦФ относится также метод частотной выборки, основанный на интерполяции аппроксимируемой функции $B(W)$. В этом методе комплексная частотная характеристика ЦФ представляется линейной комбинацией частотных интерполирующих функций вида (12.96) со значениями частотных отсчётов в качестве коэффициентов [см. (12.97)]. В случае селективных фильтров, когда заданная АЧХ резко меняется от полосы к полосе, частотные отсчёты в переходных полосах остаются незаданными переменными. Оптимизируя значения незаданных частотных отсчётов, которые лежат в переходных полосах, можно получить ЦФ с очень хорошими характеристиками.

Глава 13

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ СКАЛЯРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ПО НОРМИРОВАННЫМ АНАЛОГОВЫМ ПРОТОТИПАМ

13.1. Общая характеристика метода проектирования рекурсивных линейных цифровых фильтров по аналоговым прототипам

Проектирование рекурсивных линейных ЦФ можно осуществлять на основе оптимизационных методов, рассмотренных в гл.12. Однако при этом задача оптимизации оказывается нелинейной, а методы её решения довольно сложны. В связи с этим проектирование рекурсивных ЦФ обычно осуществляется эвристическими методами синтеза с использованием аналоговых нормированных ФНЧ-прототипов [2, 3, 6, 8, 10, 11, 13, 15].

В рамках этого подхода по заданным техническим требованиям к ЦФ вначале строят передаточную функцию соответствующего аналогового фильтра-прототипа $\mathsf{H}(s)$, а затем заменой аргумента s в $\mathsf{H}(s)$ получают передаточную функцию цифрового фильтра $H(z)$. При этом процедура решения аппроксимационной задачи (см. рис.12.1) является более простой, чем при использовании оптимизационных методов.

Нормировка частоты ФНЧ-прототипа •

$$\Omega = \omega / \omega_{\text{п}} = f / f_{\text{п}} \tag{13.1}$$

уменьшает на единицу число свободных параметров, что снижает трудоёмкость процедуры синтеза его передаточной функции $\mathsf{H}(s)$.

На рис.13.1 представлены два подхода к проектированию рекурсивного ЦФ по аналоговым прототипам [6].

При первом подходе синтезированный нормированный аналоговый ФНЧ-прототип путём денормирования частоты преобразуется в другой аналоговый фильтр (ФНЧ, ФВЧ, полосовой или режекторный), из которого затем получают ЦФ с заданными характеристиками.

При втором подходе синтезированный нормированный аналоговый ФНЧ-прототип дискретизируется сразу же, в результате чего получается нормированный дискретный ФНЧ-прототип, из которого путём денормирования частоты уже в цифровой области получают ЦФ с заданными характеристиками.

• Здесь и далее $f_{\text{п}}$ и $\omega_{\text{п}}$ — соответственно обыкновенная (циклическая) и круговая граничные частоты полосы пропускания ФНЧ.

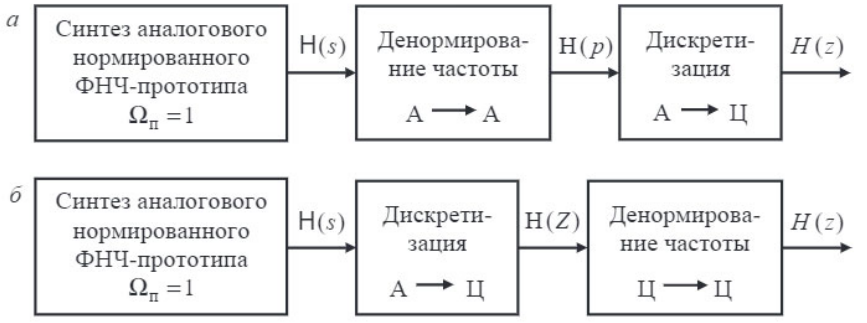


Рис.13.1. Два подхода к проектированию рекурсивных цифровых фильтров по аналоговым прототипам: *а* — первый подход; *б* — второй подход

Рекурсивные ЦФ не обладают строго линейными фазочастотными характеристиками. В связи с этим в случае неминимально-фазовых фильтров приходится рассматривать аппроксимацию заданных АЧХ и ФЧХ [см. (12.12)]. Если же требования к ФЧХ не предъявляются (минимально-фазовый фильтр), то проектирование избирательного ЦФ удобно осуществлять по заданному квадрату амплитудно-частотной характеристики [см. (12.13)]. Наиболее просто решается задача проектирования рекурсивного цифрового фильтра по заданному квадрату АЧХ.

Передаточная функция аналогового нормированного ФНЧ-прототипа является дробно-рациональной функцией комплексного аргумента s:

$$\mathrm{H}(s) = \frac{\mathrm{A}(s)}{\mathrm{B}(s)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k s^k}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k s^k}, \quad m < n, \tag{13.2}$$

где n — порядок ФНЧ-прототипа.

Комплексная частотная характеристика такого фильтра имеет вид

$$\mathrm{H}(j\Omega) = \mathrm{H}(s)\big|_{s=j\Omega} = \frac{\mathrm{A}(j\Omega)}{\mathrm{B}(j\Omega)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k (j\Omega)^k}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k (j\Omega)^k}, \quad m < n. \tag{13.3}$$

Отсюда получаем выражения для амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристик:

$$A(\Omega) = \left|\mathrm{H}(j\Omega)\right| = \left|\frac{\mathrm{A}(j\Omega)}{\mathrm{B}(j\Omega)}\right|; \tag{13.4}$$

$$\varphi(\Omega) = \mathrm{Arg}[\mathsf{H}(j\Omega)] = \mathrm{Arg}[\mathsf{A}(j\Omega)] - \mathrm{Arg}[\mathsf{B}(j\Omega)]. \qquad (13.5)$$

Квадрат амплитудно-частотной характеристики аналогового нормированного ФНЧ-прототипа определяется выражением

$$\left|\mathsf{H}(j\Omega)\right|^2 = \mathsf{H}(j\Omega)\,\mathsf{H}(-j\Omega) = \mathsf{H}(s)\,\mathsf{H}(-s)\big|_{s=j\Omega}. \qquad (13.6)$$

Иногда рассматривают характеристики затухания фильтра $a(\Omega)$ и групповой задержки $\tau(\Omega)$:

$$a(\Omega) = \frac{1}{A(\Omega)} = \frac{1}{\left|\mathsf{H}(j\Omega)\right|} = \left|\frac{\mathsf{B}(j\Omega)}{\mathsf{A}(j\Omega)}\right|; \qquad (13.7)$$

$$\tau(\Omega) = -\frac{d}{d\Omega}\varphi(\Omega). \qquad (13.8)$$

Характеристику затухания часто выражают в логарифмических единицах (децибелах):

$$a_{\text{дБ}}(\Omega) = 20\,\lg[a(\Omega)] = 20\,\lg\left[A^{-1}(\Omega)\right] = 20\,\lg\left[\left|\mathsf{H}(j\Omega)\right|^{-1}\right] = 10\,\lg\left[\mathsf{L}(\Omega^2)\right], \qquad (13.9)$$

где

$$\mathsf{L}(\Omega^2) = a^2(\Omega) = \left|\mathsf{H}(j\Omega)\right|^{-2} = \left[\mathsf{H}(j\Omega)\,\mathsf{H}(-j\Omega)\right]^{-1} \qquad (13.10)$$

— *квадрат характеристики затухания*.

Заменой переменной $\Omega = s/j = -js$ из (13.10) получаем функцию комплексного аргумента s

$$\mathsf{L}(-s^2) = \left|\mathsf{H}(s)\right|^{-2} = \left[\mathsf{H}(s)\,\mathsf{H}(-s)\right]^{-1} = \frac{\mathsf{B}(s)\,\mathsf{B}(-s)}{\mathsf{A}(s)\,\mathsf{A}(-s)}, \qquad (13.11)$$

называемую *функцией затухания* [11].

Располагая функцией затухания $\mathsf{L}(-s^2)$ аналогового нормированного фильтра, можно найти его передаточную функцию $\mathsf{H}(s)$, используя операцию *факторизации*, т.е. разложение функции $1/\mathsf{L}(-s^2)$ на множители, имеющие нули и полюсы в левой и правой полуплоскостях комплексной S-плоскости, и конструирование функции $\mathsf{H}(s)$ только из множителей, содержащих нули и полюсы в левой полуплоскости:

$$\mathsf{H}(s) = \left[\frac{1}{\mathsf{L}(-s^2)}\right]_{\text{лев}} = \left[\frac{\mathsf{A}(s)\,\mathsf{A}(-s)}{\mathsf{B}(s)\,\mathsf{B}(-s)}\right]_{\text{лев}} = \frac{\mathsf{A}(s)}{\mathsf{B}(s)}, \qquad (13.12)$$

где символ $[\ ]_{\text{лев}}$ означает, что из выражения в квадратных скобках берутся только те множители, которые имеют нули и полюсы в левой полуплоскости.

Наиболее часто используют аналоговые нормированные ФНЧ-прототипы следующих видов:

- фильтр Баттерворта, имеющий монотонную АЧХ во всём диапазоне частот;
- фильтр Чебышева типа 1, имеющий равноволновые пульсации АЧХ в полосе пропускания и монотонную АЧХ в полосе задерживания;
- фильтр Чебышева типа 2, имеющий монотонную АЧХ в полосе пропускания и равноволновые пульсации АЧХ в полосе задерживания;
- эллиптический фильтр (фильтр Золотарёва – Кауэра), имеющий равноволновые пульсации АЧХ как в полосе пропускания, так и полосе задерживания;
- фильтр Бесселя характеризуется максимально гладкой характеристикой групповой задержки. Следует отметить, что при дискретизации это свойство аналогового ФНЧ-прототипа Бесселя у цифрового фильтра, вообще говоря, не сохраняется.

13.2. Синтез аналогового нормированного ФНЧ Баттерворта

Аналоговый ФНЧ Баттерворта характеризуются тем, что имеет гладкую амплитудно-частотную характеристику в начале координат (первая производная АЧХ равна нулю при $\Omega = 0$) и монотонно убывающую при увеличении Ω во всём диапазоне частот (рис.13.2,*а*). Квадрат АЧХ аналогового нормированного ФНЧ Баттерворта описывается выражением [6]

$$A^2(\Omega) = \left| \mathrm{H}(j\Omega) \right|^2 = \frac{1}{1 + \left(\Omega^2 \right)^n}, \qquad (13.13)$$

где n — порядок фильтра.

Отсюда видно, что независимо от порядка ФНЧ Баттерворта его затухание на частоте среза $\Omega_{\text{п}} = 1$ составляет 3 дБ.

Согласно (13.10) из выражения (13.13) заменой переменной $\Omega = s/j = -js$ получим функцию затухания

$$\mathrm{L}(-s^2) = 1 + (-s^2)^n = \prod_{k=1}^{2n} \left(s - s_k^{(0)} \right), \qquad (13.14)$$

где $s_k^{(0)} \left(k = \overline{1,\ 2n} \right)$ — нули функции затухания, являющиеся корнями уравнения $1 + (-s^2)^n = 0$.

- При чётных n получаем уравнение $1 + s^{2n} = 0$, откуда $\left(s_k^{(0)} \right)^{2n} = -1 = e^{j\pi(2k-1)}$ и $s_k^{(0)} = e^{j\pi(2k-1)/(2n)} \left(k = \overline{1,\ 2n} \right)$.
- При нечётных n получаем уравнение $1 - s^{2n} = 0$, откуда $\left(s_k^{(0)} \right)^{2n} = 1 = e^{j2\pi(k-1)}$ и $s_k^{(0)} = e^{j\pi(k-1)/n} \left(k = \overline{1,\ 2n} \right)$.

Объединяя эти результаты, запишем

$$s_k^{(0)} = \begin{cases} e^{j\pi(2k-1)/(2n)}, & n - \text{чётное}; \\ e^{j\pi(k-1)/n}, & n - \text{нечётное}, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ 2n}. \qquad (13.15)$$

Поскольку $\left| s_k^{(0)} \right| = 1 \left(k = \overline{1,\ 2n} \right)$, то нули функции затухания (13.14) расположены на единичной окружности S-плоскости $|s| = 1$.

По формуле (13.12) с учётом (13.14) находим передаточную функцию аналогового нормированного ФНЧ Баттерворта

$$\mathsf{H}(s) = \frac{K_0}{\prod\limits_{k=1}^{n} (s - s_{pk})}, \qquad (13.16)$$

где K_0 — константа нормирования; $s_{pk} \left(k = \overline{1,\ n} \right)$ — простые полюсы передаточной функции, являющиеся нулями функции затухания $\mathsf{L}(-s^2)$, расположенными в левой полуплоскости S-плоскости равномерно на окружности единичного радиуса (рис.13.2,*б*). Угловое расстояние между полюсами равно π/n.

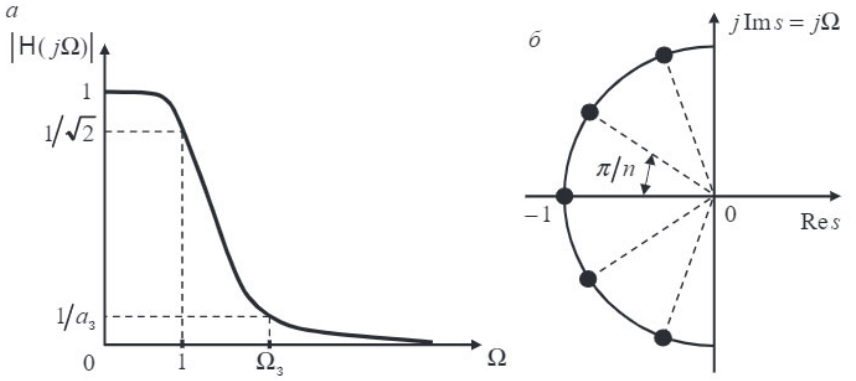


Рис.13.2. АЧХ аналогового нормированного ФНЧ Баттерворта (*а*) и карта полюсов (*б*) его передаточной функции

Таким образом, передаточная функция $\mathsf{H}(s)$ аналогового нормированного ФНЧ Баттерворта имеет только полюсы (нуль находится на бесконечности). Согласно (13.15) получаем общее выражение для полюсов:

$$s_{pk} = \sigma_k + j\Omega_k = \exp\left[\frac{j\pi}{2} \left(1 + \frac{2k-1}{n} \right) \right], \quad k = \overline{1,\ n}. \qquad (13.17)$$

Полюсы являются простыми (некратными). Комплексные полюсы образуют комплексно-сопряжённые пары, вещественный полюс имеется только при нечётном порядке n, его значение $s_{p\,(n+1)/2} = -1$.

Как видно из выражений (13.13), (13.16) и (13.17), порядок n аналогового нормированного ФНЧ Баттерворта является единственным параметром, кото-

рый полностью определяет передаточную функцию $\mathsf{H}(s)$. На практике порядок фильтра n рассчитывают из условия обеспечения определённого ослабления (затухания) $a_з$ на некоторой заданной частоте $\Omega_з > 1$ (уровень АЧХ на граничной частоте полосы задерживания $\Omega_з$ равен $1/a_з$).

Из соотношения (13.13) находим

$$A^2(\Omega_з) = \frac{1}{a_з^2} = \frac{1}{1 + \left(\Omega_з^2\right)^n}. \tag{13.18}$$

Решая это уравнение относительно n, получим формулу •

$$n = \mathrm{int}\left[\frac{\lg\left(a_з^2 - 1\right)}{2\lg(\Omega_з)}\right] = \mathrm{int}\left\{\lg\left(10^{a_{з\,дБ}/10} - 1\right)\Big/\left[2\lg(\Omega_з)\right]\right\}. \tag{13.19}$$

Поскольку комплексные полюсы (13.17) передаточной функции (13.16) образуют комплексно-сопряжённые пары (за исключением вещественного полюса $s_{p\,(n+1)/2} = -1$ при нечётном порядке n), удобно записать передаточную функцию $\mathsf{H}(s)$ в виде произведения передаточных функций элементарных блоков первого и второго порядков с вещественными коэффициентами:

$$\mathsf{H}(s) = K_0\,\Theta(s)\prod_{k=1}^{r}\frac{1}{s^2 + B_{1k}s + B_{0k}}, \tag{13.20}$$

где

$$\Theta(s) = \begin{cases} 1/(s+1), & n - \text{нечётное}; \\ 1, & n - \text{чётное}; \end{cases} \tag{13.21}$$

$$r = \begin{cases} (n-1)/2, & n - \text{нечётное}; \\ n/2, & n - \text{чётное}; \end{cases} \tag{13.22}$$

$$B_{1k} = -\left(s_{pk} + s_{pk}^*\right) = -2\,\mathrm{Re}\left(s_{pk}\right), \quad k = \overline{1,\,r}; \tag{13.23}$$

$$B_{0k} = s_{pk}\,s_{pk}^* = \left|s_{pk}\right|^2, \quad k = \overline{1,\,r}. \tag{13.24}$$

Здесь и далее * — символ комплексного сопряжения; $\mathrm{Re}(...)$ — символ вещественной части комплексного числа.

Нормирующий множитель K_0 (константу нормирования) можно найти из условия $\mathsf{H}(s)\big|_{s=0} = 1$. Используя выражения (13.20) и (13.21), получим

$$K_0 = \prod_{k=1}^{r} B_{0k}. \tag{13.25}$$

• Здесь и далее $\mathrm{int}[N]$ — наименьшее целое число, не меньшее, чем число N [8, 14].

Комплексная частотная характеристика аналогового фильтра с передаточной функцией (13.20) описывается формулой

$$\mathrm{H}(j\Omega) = K_0\,\Theta(j\Omega)\prod_{k=1}^{r}\frac{1}{(j\Omega)^2 + B_{1k}(j\Omega) + B_{0k}}. \qquad (13.26)$$

Отсюда находим выражения для амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик:

$$A(\Omega) = \left|\mathrm{H}(j\Omega)\right| = K_0\left|\Theta(j\Omega)\right|\prod_{k=1}^{r}\frac{1}{\sqrt{\left(B_{0k} - \Omega^2\right)^2 + (B_{1k}\Omega)^2}}; \qquad (13.27)$$

$$\varphi(\Omega) = \mathrm{Arg}\left[\mathrm{H}(j\Omega)\right] = \mathrm{Arg}\left[\Theta(j\Omega)\right] - \sum_{k=1}^{r}\mathrm{Arctg}\frac{B_{1k}\Omega}{B_{0k} - \Omega^2}. \qquad (13.28)$$

Пример 13.1. Спроектировать аналоговый нормированный ФНЧ Баттерворта со следующими параметрами: $\mathrm{H}(s)\big|_{s=0} = 1$; $a_{\text{з дБ}} = 40$ дБ; $\Omega_{\text{з}} = 1{,}5$.

Переводя $a_{\text{з}}$ из децибел в разы, получим $a_{\text{з}} = 100$. Затем, используя выражение (13.19), определим порядок фильтра: $n = 12$.

По формуле (13.17) находим полюсы $s_{pk} = \sigma_k + j\Omega_k\ \left(k = \overline{1,\,12}\right)$ передаточной функции (13.16):

$s_{p1} = -0{,}131 + j\,0{,}991$; $s_{p2} = -0{,}383 + j\,0{,}924$; $s_{p3} = -0{,}609 + j\,0{,}793$;
$s_{p4} = -0{,}793 + j\,0{,}609$; $s_{p5} = -0{,}924 + j\,0{,}383$; $s_{p6} = -0{,}991 + j\,0{,}131$;
$s_{p7} = -0{,}991 - j\,0{,}131$; $s_{p8} = -0{,}924 - j\,0{,}383$; $s_{p9} = -0{,}793 - j\,0{,}609$;
$s_{p10} = -0{,}609 - j\,0{,}793$; $s_{p11} = -0{,}383 - j\,0{,}924$; $s_{p12} = -0{,}131 - j\,0{,}991$.

Поскольку порядок фильтра чётный, все полюсы передаточной функции (13.16) являются комплексными (отсутствует вещественный полюс). При этом комплексные полюсы образуют комплексно-сопряжённые пары: $s_{p12} = s^*_{p1}$; $s_{p11} = s^*_{p2}$; $s_{p10} = s^*_{p3}$; $s_{p9} = s^*_{p4}$; $s_{p8} = s^*_{p5}$; $s_{p7} = s^*_{p6}$. Эти пары дают блоки второго порядка, передаточные функции которых имеют вещественные коэффициенты.

Представим передаточную функцию аналогового нормированного ФНЧ Баттерворта в форме (13.20). Для этого, используя выражения (13.21) — (13.25), при $n = 12$ вычислим функцию $\Theta(s) = 1$; параметр $r = 6$ (количество блоков второго порядка); коэффициент $K_0 = 1$, а также коэффициенты B_{1k}, $B_{0k}\ \left(k = \overline{1,\,6}\right)$ передаточной функции (13.20):

$B_{11} = 0{,}261$; $B_{01} = 1$; $B_{12} = 0{,}765$; $B_{02} = 1$;
$B_{13} = 1{,}218$; $B_{03} = 1$; $B_{14} = 1{,}587$; $B_{04} = 1$;
$B_{15} = 1{,}848$; $B_{05} = 1$; $B_{16} = 1{,}983$; $B_{06} = 1$.

На рис.13.3 изображена амплитудно-частотная характеристика спроектированного фильтра, рассчитанная по формуле (13.27). На граничной частоте полосы задерживания $\Omega_{\text{з}} = 1{,}5$ затухание составляет $a_{\text{з дБ}} = 42{,}262$ дБ.

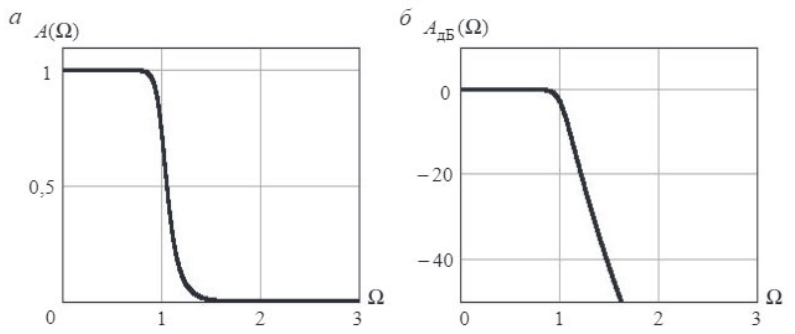


Рис.13.3. АЧХ аналогового нормированного ФНЧ Баттерворта, спроектированного в примере 2.1: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

13.3. Синтез аналоговых нормированных ФНЧ Чебышева

Для фильтров Чебышева характерно то, что они имеют наименьшую величину максимальной ошибки аппроксимации в заданной полосе частот. В зависимости от того, где минимизируется ошибка аппроксимации (в полосе пропускания или в полосе задерживания), различают фильтры Чебышева типа 1 и типа 2. При одинаковых порядках n фильтры Чебышева имеют меньшую ширину переходной полосы, чем фильтры Баттерворта. Амплитудно-частотные характеристики аналоговых нормированных ФНЧ Чебышева обоих типов нечётного и чётного порядков n показаны на рис.13.4.

Квадрат амплитудно-частотной характеристики аналогового нормированного ФНЧ Чебышева типа 1 описывается выражением [6]

$$A^2(\Omega) = \left|\mathrm{H}(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\Omega)}, \tag{13.29}$$

где $T_n(\Omega)$ — полином Чебышева n-го порядка, определяемый соотношением

$$T_n(\Omega) = \begin{cases} \cos\left[n \arccos(\Omega)\right], & |\Omega| \le 1; \\ \mathrm{ch}\left[n\,\mathrm{Arch}(\Omega)\right], & |\Omega| > 1; \end{cases} \tag{13.30}$$

ε — параметр, характеризующий пульсации (или неравномерность) амплитудно-частотной характеристики в полосе пропускания; n — порядок фильтра.

Определим значения квадрата АЧХ (13.29) ФНЧ Чебышева типа 1 в характерных точках.

На нулевой частоте ($\Omega = 0$) из (13.30) имеем

$$T_n(0) = \cos\left[n \arccos(0)\right] = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n - \text{нечётное}; \\ \pm 1, & n - \text{чётное}, \end{cases} \tag{13.31}$$

поэтому из (13.29) следует (рис.13.4,*а*,*б*)

$$A^2(0)=\left|\mathrm{H}(j0)\right|^2=\begin{cases}1, & n-\text{нечётное};\\ 1\Big/\left(1+\varepsilon^2\right), & n-\text{чётное}.\end{cases} \qquad (13.32)$$

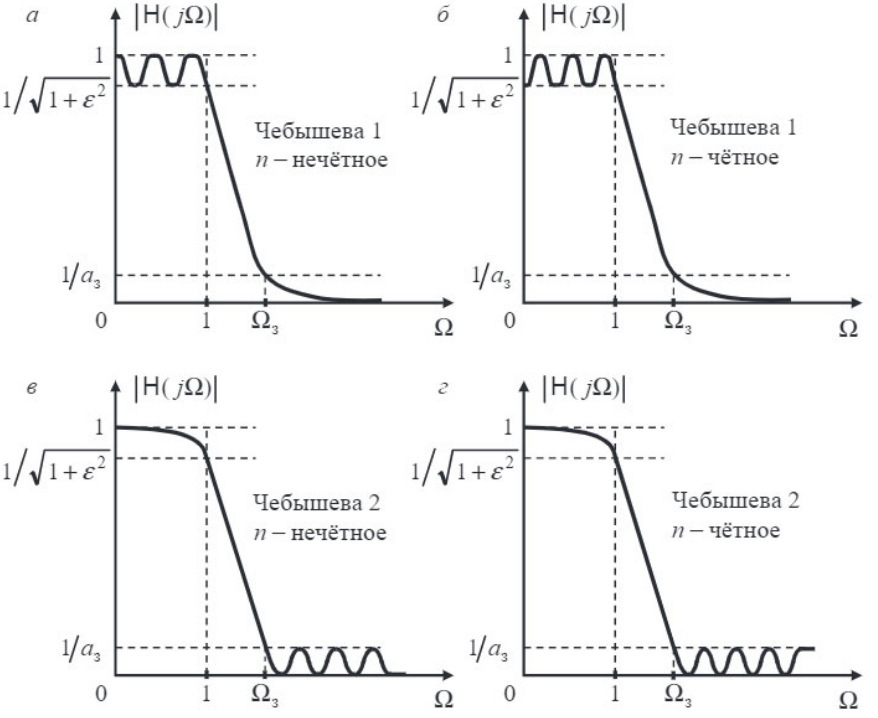


Рис.13.4. Амплитудно-частотные характеристики аналоговых нормированных ФНЧ Чебышева типа 1 (*а*, *б*) и типа 2 (*в*, *г*) нечётного (*а*, *в*) и чётного (*б*, *г*) порядков n

Для $\Omega=1$ (граница полосы пропускания) из (13.29) с учётом (13.30) получим (рис.13.4,*а*,*б*)

$$A^2(1)=\left|\mathrm{H}(j1)\right|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2T_n^2(1)}=\frac{1}{1+\varepsilon^2\cos^2\left[n\arccos(1)\right]}=\frac{1}{1+\varepsilon^2}=\frac{1}{a_{\text{п}}^2}. \qquad (13.33)$$

Для $\Omega=\Omega_{\text{з}}$ (граница полосы задерживания) из (13.29) с учётом (13.30) находим (рис.13.4,*а*,*б*)

$$A^2(\Omega_{\text{з}})=\left|\mathrm{H}(j\Omega_{\text{з}})\right|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2T_n^2(\Omega_{\text{з}})}=\frac{1}{1+\varepsilon^2\,\mathrm{ch}^2\left[n\,\mathrm{Arch}\,(\Omega_{\text{з}})\right]}=\frac{1}{a_{\text{з}}^2}, \qquad (13.34)$$

откуда следует выражение для минимального затухания в полосе задерживания:

$$a_з = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \operatorname{ch}^2 [n \operatorname{Arch} (\Omega_з)]}. \qquad (13.35)$$

Согласно (13.10) из выражения (13.29) заменой переменной $\Omega = s/j = -js$ найдём функцию затухания:

$$\mathsf{L}(-s^2) = 1 + \varepsilon^2 T_n^2(-js) = \prod_{k=1}^{2n} \left(s - s_k^{(0)} \right), \qquad (13.36)$$

где $s_k^{(0)} \left(k = \overline{1,\ 2n}\right)$ — нули функции затухания, являющиеся корнями уравнения $1 + \varepsilon^2 T_n^2(-js) = 0$.

Если $s_k^{(0)} = \sigma_k + j\Omega_k \ \left(k = \overline{1,\ 2n}\right)$ — нуль функции затухания $\mathsf{L}(-s^2)$, то

$$T_n(-j\sigma_k + \Omega_k) = \pm j/\varepsilon, \quad k = \overline{1,\ 2n}. \qquad (13.37)$$

Обозначим

$$\arccos(-j\sigma_k + \Omega_k) = u_k + jv_k, \quad k = \overline{1,\ 2n}, \qquad (13.38)$$

тогда

$$\begin{aligned} -j\sigma_k + \Omega_k &= \cos[\arccos(-j\sigma_k + \Omega_k)] = \cos(u_k + jv_k) = \\ &= \cos(u_k)\cos(jv_k) - \sin(u_k)\sin(jv_k) = \\ &= \cos(u_k)\operatorname{ch}(v_k) + j\sin(u_k)\operatorname{sh}(v_k), \quad k = \overline{1,\ 2n}. \end{aligned} \qquad (13.39)$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \sigma_k = -\sin(u_k)\operatorname{sh}(v_k); \\ \Omega_k = \cos(u_k)\operatorname{ch}(v_k), \end{cases} \quad k = \overline{1,\ 2n}. \qquad (13.40)$$

Аналогично находим значения полинома Чебышева n-го порядка (13.30) в точках $s_k^{(0)} = \sigma_k + j\Omega_k \ \left(k = \overline{1,\ 2n}\right)$:

$$\begin{aligned} T_n(-j\sigma_k + \Omega_k) &= \cos[n \arccos(-j\sigma_k + \Omega_k)] = \cos(nu_k + jnv_k) = \\ &= \cos(nu_k)\cos(jnv_k) - \sin(nu_k)\sin(jnv_k) = \\ &= \cos(nu_k)\operatorname{ch}(nv_k) + j\sin(nu_k)\operatorname{sh}(nv_k) = \pm j/\varepsilon, \quad k = \overline{1,\ 2n}. \end{aligned} \qquad (13.41)$$

Отсюда в соответствии с (13.37) получаем

$$\begin{cases} \cos(nu_k)\operatorname{ch}(nv_k) = 0; \\ \sin(nu_k)\operatorname{sh}(nv_k) = \pm 1/\varepsilon, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ 2n}. \qquad (13.42)$$

Решением первого уравнения (13.42) является

$$u_k = \pi(2k - 1)/(2n), \quad k = \overline{1,\ 2n}. \qquad (13.43)$$

Поскольку $\sin(nu_k)=\pm 1\ \left(k=\overline{1,\ 2n}\right)$, то из второго уравнения (13.42) следует

$$v_k=\pm[\mathrm{Arsh}(1/\varepsilon)]/n,\quad k=\overline{1,\ 2n}. \tag{13.44}$$

(Здесь от номера k зависит только знак $\pm$).

Подставляя (13.43) и (13.44) в соотношения (13.40), получим

$$\begin{cases}\sigma_k=\pm\sin\left[\dfrac{\pi}{2n}(2k-1)\right]\mathrm{sh}\left[\dfrac{\mathrm{Arsh}(1/\varepsilon)}{n}\right];\\ \Omega_k=\cos\left[\dfrac{\pi}{2n}(2k-1)\right]\mathrm{ch}\left[\dfrac{\mathrm{Arsh}(1/\varepsilon)}{n}\right],\end{cases}\quad k=\overline{1,\ 2n}. \tag{13.45}$$

Введём обозначения

$$\varphi=\frac{\mathrm{Arsh}(1/\varepsilon)}{n}; \tag{13.46}$$

$$\eta=e^{\varphi}=\exp\left[\frac{\mathrm{Arsh}(1/\varepsilon)}{n}\right]=\exp\left\{\frac{1}{n}\ln\left[(1/\varepsilon)+\sqrt{(1/\varepsilon)^2+1}\ \right]\right\}=$$

$$=\sqrt[n]{\left(1+\sqrt{1+\varepsilon^2}\right)/\varepsilon}\,. \tag{13.47}$$

Тогда соотношения (13.45) можно записать в виде

$$\begin{cases}\sigma_k=\pm\sin\left[\dfrac{\pi}{2n}(2k-1)\right]\mathrm{sh}(\varphi);\\ \Omega_k=\cos\left[\dfrac{\pi}{2n}(2k-1)\right]\mathrm{ch}(\varphi),\end{cases}\quad k=\overline{1,\ 2n}, \tag{13.48}$$

где согласно (13.47)

$$\begin{cases}\mathrm{sh}(\varphi)=(\eta-\eta^{-1})/2;\\ \mathrm{ch}(\varphi)=(\eta+\eta^{-1})/2.\end{cases} \tag{13.49}$$

Из формул (13.48) следует

$$\frac{\sigma_k^2}{\mathrm{sh}^2(\varphi)}+\frac{\Omega_k^2}{\mathrm{ch}^2(\varphi)}=1,\quad k=\overline{1,\ 2n}, \tag{13.50}$$

т.е. нули $s_k^{(0)}=\sigma_k+j\Omega_k\ \left(k=\overline{1,\ 2n}\right)$ функции затухания $\mathsf{L}(-s^2)$ аналогового нормированного ФНЧ Чебышева типа 1 расположены на эллипсе, малая полуось которого равна $\mathrm{sh}(\varphi)$, а большая $\mathrm{ch}(\varphi)$. Эллипс вытянут вдоль мнимой оси S-плоскости.

По формуле (13.12) с учётом (13.36) находим передаточную функцию $\mathsf{H}(s)$ аналогового нормированного ФНЧ Чебышева типа 1. Она имеет вид (13.16), где $s_{pk}\ \left(k=\overline{1,\ n}\right)$ — простые полюсы передаточной функции, являю-

щиеся нулями функции затухания $\mathsf{L}(-s^2)$, расположенными в левой полуплоскости S-плоскости равномерно на эллипсе (13.50).

Таким образом, передаточная функция $\mathsf{H}(s)$ аналогового нормированного ФНЧ Чебышева типа 1 имеет только полюсы (нуль находится на бесконечности). Из соотношений (13.48) получаем общие выражения для вещественных и мнимых частей полюсов $s_{pk} = \sigma_k + j\Omega_k \left(k = \overline{1,\ n}\right)$ передаточной функции $\mathsf{H}(s)$:

$$\begin{cases} \sigma_k = -\sin\left[\dfrac{\pi}{2n}(2k-1)\right]\mathrm{sh}(\varphi); \\ \Omega_k = \cos\left[\dfrac{\pi}{2n}(2k-1)\right]\mathrm{ch}(\varphi), \end{cases} \quad k = \overline{1,\ n}. \tag{13.51}$$

Поскольку комплексные полюсы передаточной функции (13.16) аналогового нормированного ФНЧ Чебышева типа 1 образуют комплексно-сопряжённые пары (за исключением вещественного полюса $s_{p\,(n+1)/2}$ при нечётном порядке фильтра), удобно записать передаточную функцию $\mathsf{H}(s)$ в виде произведения передаточных функций элементарных блоков первого и второго порядков с вещественными коэффициентами, т.е. в виде (13.20), где

$$\Theta(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{s+\sigma}, & n - \text{нечётное}; \\ 1, & n - \text{чётное}. \end{cases} \tag{13.52}$$

Здесь $\sigma = \left| s_{p\,(n+1)/2} \right|$.

Нормирующий множитель K_0 (константу нормирования) найдём из условия (13.32). В результате получим

$$K_0 = \begin{cases} \sigma \displaystyle\prod_{k=1}^{r} B_{0k}, & n - \text{нечётное}; \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \displaystyle\prod_{k=1}^{r} B_{0k}, & n - \text{чётное}, \end{cases} \tag{13.53}$$

где

$$1\Big/\sqrt{1+\varepsilon^2} = 1/a_{\text{п}} = 10^{-20\lg(a_{\text{п}})/20} = 10^{-a_{\text{пдБ}}/20}. \tag{13.54}$$

Параметр r и коэффициенты B_{1k}, B_{0k} $\left(k = \overline{1,\ r}\right)$, входящие в выражение для передаточной функции аналогового нормированного ФНЧ Чебышева типа 1 в форме (13.20), вычисляются по формулам (13.22) — (13.24) соответственно.

Для нахождения комплексной частотной характеристики $\mathsf{H}(j\Omega)$, АЧХ $A(\Omega)$ и ФЧХ $\varphi(\Omega)$ аналогового нормированного фильтра Чебышева типа 1 с передаточной функцией $\mathsf{H}(s)$ в форме (13.20) следует воспользоваться соответствующими выражениями (13.26) — (13.28).

Квадрат амплитудно-частотной характеристики аналогового нормированного ФНЧ Чебышева типа 2 описывается следующим образом [6]:

$$A^2(\Omega)=\left|H(j\Omega)\right|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2\dfrac{T_n^2(\Omega_з)}{T_n^2(\Omega_з/\Omega)}}=\frac{T_n^2(\Omega_з/\Omega)}{T_n^2(\Omega_з/\Omega)+\varepsilon^2T_n^2(\Omega_з)},\qquad(13.55)$$

где $\Omega_з$ — наинизшая частота, на которой в полосе задерживания достигается заданный уровень ослабления (затухания) $a_з$.

Определим значения квадрата АЧХ (13.55) ФНЧ Чебышева типа 2 в характерных точках.

Полагая $\Omega=0$, получим (рис.13.4,*в*,*г*)

$$A^2(0)=\left|H(j0)\right|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2\dfrac{T_n^2(\Omega_з)}{T_n^2(\Omega_з/0)}}=\frac{1}{1+\varepsilon^2\dfrac{\mathrm{ch}^2[n\,\mathrm{Arch}(\Omega_з)]}{\mathrm{ch}^2[n\,\mathrm{Arch}(\Omega_з/0)]}}=1.\qquad(13.56)$$

Для $\Omega=1$ (граница полосы пропускания) из (13.55) следует (рис.13.4,*в*,*г*)

$$A^2(1)=\left|H(j1)\right|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2\dfrac{T_n^2(\Omega_з)}{T_n^2(\Omega_з/1)}}=$$

$$=\frac{1}{1+\varepsilon^2\dfrac{\mathrm{ch}^2[n\,\mathrm{Arch}(\Omega_з)]}{\mathrm{ch}^2[n\,\mathrm{Arch}(\Omega_з/1)]}}=\frac{1}{1+\varepsilon^2}=\frac{1}{a_п^2}.\qquad(13.57)$$

Для $\Omega=\Omega_з$ (граница полосы задерживания) находим (рис.13.4,*в*,*г*)

$$A^2(\Omega_з)=\left|H(j\Omega_з)\right|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2\dfrac{T_n^2(\Omega_з)}{T_n^2(\Omega_з/\Omega_з)}}=\frac{1}{1+\varepsilon^2\dfrac{T_n^2(\Omega_з)}{T_n^2(1)}}=\frac{1}{1+\varepsilon^2T_n^2(\Omega_з)}=$$

$$=\frac{1}{1+\varepsilon^2\,\mathrm{ch}^2\left[n\,\mathrm{Arch}(\Omega_з)\right]}=\frac{1}{a_з^2}.\qquad(13.58)$$

Сравнение выражения (13.58) с (13.34) показывает, что минимальное затухание в полосе задерживания $a_з$ для аналогового нормированного ФНЧ Чебышева типа 2 определяется формулой (13.35), как и для ФНЧ Чебышева типа 1.

При $\Omega\to\infty$ будем иметь (рис.13.4,*в*,*г*)

$$A^2(\infty)=\left|H(j\infty)\right|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2\dfrac{T_n^2(\Omega_з)}{T_n^2(\Omega_з/\infty)}}=\frac{1}{1+\varepsilon^2\dfrac{\mathrm{ch}^2[n\,\mathrm{Arch}(\Omega_з)]}{\cos^2[n\arccos(0)]}}=$$

$$= \frac{1}{1+\varepsilon^2 \dfrac{\mathrm{ch}^2[n\,\mathrm{Arch}\,(\Omega_з)]}{\cos^2(n\pi/2)}} = \begin{cases} 0, & n - \text{нечётное}; \\ \dfrac{1}{1+\varepsilon^2 \mathrm{ch}^2[n\,\mathrm{Arch}\,(\Omega_з)]}, & n - \text{чётное}. \end{cases} \tag{13.59}$$

Согласно (13.10) из выражения (13.55) заменой переменной $\Omega = s/j = -js$ получим функцию затухания

$$\mathsf{L}(-s^2) = \frac{T_n^2\left(j\Omega_з\, s^{-1}\right) + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega_з)}{T_n^2\left(j\Omega_з\, s^{-1}\right)} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(s - s_k^{(0)}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(s - s_k^{(p)}\right)}, \tag{13.60}$$

где $s_k^{(0)}\ \left(k = \overline{1,\ 2n}\right)$ — нули функции затухания, являющиеся корнями уравнения $T_n^2\left(j\Omega_з\, s^{-1}\right) + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega_з) = 0$; $s_k^{(p)}\ \left(k = \overline{1,\ 2n}\right)$ — полюсы функции затухания, являющиеся корнями уравнения $T_n^2\left(j\Omega_з\, s^{-1}\right) = 0$.

Если $s_k^{(0)} = \sigma_k + j\Omega_k\ \left(k = \overline{1,\ 2n}\right)$ — нуль функции затухания $\mathsf{L}(-s^2)$, то

$$T_n\left(\frac{j\Omega_з}{\sigma_k + j\Omega_k}\right) = \pm j\varepsilon T_n(\Omega_з), \quad k = \overline{1,\ 2n}. \tag{13.61}$$

Введём обозначение

$$\frac{j\Omega_з}{\sigma_k + j\Omega_k} = \alpha_k + j\beta_k, \quad k = \overline{1,\ 2n}, \tag{13.62}$$

а также

$$\arccos\left(\alpha_k + j\beta_k\right) = u_k + jv_k, \quad k = \overline{1,\ 2n}. \tag{13.63}$$

Тогда [см. (13.39)]

$$\alpha_k + j\beta_k = \cos[\arccos\left(\alpha_k + j\beta_k\right)] = \cos\left(u_k + jv_k\right) =$$

$$= \cos(u_k)\,\mathrm{ch}(v_k) + j\sin(u_k)\,\mathrm{sh}(v_k), \quad k = \overline{1,\ 2n}. \tag{13.64}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \alpha_k = \cos(u_k)\,\mathrm{ch}(v_k); \\ \beta_k = \sin(u_k)\,\mathrm{sh}(v_k), \end{cases} \quad k = \overline{1,\ 2n}. \tag{13.65}$$

Аналогично [см. (13.41) и (13.61)]

$$T_n\left(\alpha_k + j\beta_k\right) = \cos[n\arccos\left(\alpha_k + j\beta_k\right)] = \cos\left(nu_k + jnv_k\right) =$$

$$= \cos(nu_k)\,\mathrm{ch}(nv_k) + j\sin(nu_k)\,\mathrm{sh}(nv_k) = \pm j\varepsilon T_n(\Omega_з), \quad k = \overline{1,\ 2n}. \tag{13.66}$$

Отсюда в соответствии с (13.61) с учётом обозначения (13.62) получаем

$$\begin{cases} \cos(nu_k)\,\mathrm{ch}(nv_k)=0; \\ \sin(nu_k)\,\mathrm{sh}(nv_k)=\pm\varepsilon T_n(\Omega_з), \end{cases} \quad k=\overline{1,\ 2n}. \tag{13.67}$$

Решение первого уравнения (13.67) описывается формулой (13.43). Поскольку $\sin(nu_k)=\pm1$ $\left(k=\overline{1,\ 2n}\right)$, то из второго уравнения (13.67) следует

$$v_k=\pm\frac{\mathrm{Arsh}\left[\varepsilon T_n(\Omega_з)\right]}{n}, \quad k=\overline{1,\ 2n}. \tag{13.68}$$

(Здесь от номера k зависит только знак $\pm$).

Подставляя (13.43) и (13.68) в соотношения (13.65), получим

$$\begin{cases} \alpha_k=\cos\left[\dfrac{\pi}{2n}(2k-1)\right]\mathrm{ch}\left\{\dfrac{\mathrm{Arsh}\left[\varepsilon T_n(\Omega_з)\right]}{n}\right\}; \\ \beta_k=\pm\sin\left[\dfrac{\pi}{2n}(2k-1)\right]\mathrm{sh}\left\{\dfrac{\mathrm{Arsh}\left[\varepsilon T_n(\Omega_з)\right]}{n}\right\}, \end{cases} \quad k=\overline{1,\ 2n}. \tag{13.69}$$

Введём обозначения

$$\varphi=\frac{\mathrm{Arsh}\left[\varepsilon T_n(\Omega_з)\right]}{n}; \tag{13.70}$$

$$\gamma=e^{\varphi}=\exp\left\{\frac{\mathrm{Arsh}\left[\varepsilon T_n(\Omega_з)\right]}{n}\right\}=\exp\left\langle\frac{1}{n}\ln\left\{\varepsilon T_n(\Omega_з)+\sqrt{\left[\varepsilon T_n(\Omega_з)\right]^2+1}\right\}\right\rangle=$$

$$=\sqrt[n]{a_з+\sqrt{a_з^2-1}}\,. \tag{13.71}$$

Здесь использовано выражение для $a_з^2$, вытекающее из формулы (13.58).

Теперь соотношения (13.69) можно записать в виде

$$\begin{cases} \alpha_k=\cos\left[\dfrac{\pi}{2n}(2k-1)\right]\mathrm{ch}(\varphi); \\ \beta_k=\pm\sin\left[\dfrac{\pi}{2n}(2k-1)\right]\mathrm{sh}(\varphi), \end{cases} \quad k=\overline{1,\ 2n}, \tag{13.72}$$

где согласно (13.71)

$$\begin{cases} \mathrm{sh}(\varphi)=\left(\gamma-\gamma^{-1}\right)/2; \\ \mathrm{ch}(\varphi)=\left(\gamma+\gamma^{-1}\right)/2. \end{cases} \tag{13.73}$$

Из выражений (13.72) следует

$$\frac{\alpha_k^2}{\mathrm{ch}^2(\varphi)}+\frac{\beta_k^2}{\mathrm{sh}^2(\varphi)}=1, \quad k=\overline{1,\ 2n}, \tag{13.74}$$

т.е. точки $\alpha_k + j\beta_k \ \left(k = \overline{1,\ 2n}\right)$ [см. (13.62)] расположены в комплексной плоскости на эллипсе, малая полуось которого равна $\mathrm{sh}(\varphi)$, а большая $\mathrm{ch}(\varphi)$. Эллипс вытянут вдоль вещественной оси *S*-плоскости.

Преобразуя формулу (13.62), выразим нули функции затухания $\mathrm{L}(-s^2)$:

$$s_k^{(0)} = \sigma_k + j\Omega_k = \frac{j\Omega_з}{\alpha_k + j\beta_k} = \frac{j\Omega_з}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}(\alpha_k - j\beta_k), \quad k = \overline{1,\ 2n}, \tag{13.75}$$

откуда

$$\begin{cases} \sigma_k = \Omega_з\, \beta_k \big/ \left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right); \\ \Omega_k = \Omega_з\, \alpha_k \big/ \left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right), \end{cases} \quad k = \overline{1,\ 2n}. \tag{13.76}$$

Найдём полюсы $s_k^{(p)} = \delta_k + j\lambda_k \ \left(k = \overline{1,\ 2n}\right)$ функции затухания (13.60), являющиеся корнями уравнения

$$T_n\left(\frac{j\Omega_з}{\delta_k + j\lambda_k}\right) = 0, \quad k = \overline{1,\ 2n}. \tag{13.77}$$

Введём обозначение

$$\frac{j\Omega_з}{\delta_k + j\lambda_k} = \eta_k + j\mu_k, \quad k = \overline{1,\ 2n}, \tag{13.78}$$

а также

$$\arccos\left(\eta_k + j\mu_k\right) = u_k + jv_k, \quad k = \overline{1,\ 2n}. \tag{13.79}$$

Тогда [см. (13.39)]

$$\eta_k + j\mu_k = \cos[\arccos\left(\eta_k + j\mu_k\right)] = \cos\left(u_k + jv_k\right) =$$

$$= \cos\left(u_k\right)\mathrm{ch}\left(v_k\right) + j\sin\left(u_k\right)\mathrm{sh}\left(v_k\right), \quad k = \overline{1,\ 2n}. \tag{13.80}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \eta_k = \cos\left(u_k\right)\mathrm{ch}\left(v_k\right); \\ \mu_k = \sin\left(u_k\right)\mathrm{sh}\left(v_k\right), \end{cases} \quad k = \overline{1,\ 2n}. \tag{13.81}$$

Аналогично находим значения полинома Чебышева *n*-го порядка согласно определению (13.30) в точках $\eta_k + j\mu_k \ \left(k = \overline{1,\ 2n}\right)$ [см. (13.41) и (13.78)]:

$$T_n\left(\eta_k + j\mu_k\right) = \cos\left[n\arccos\left(\eta_k + j\mu_k\right)\right] = \cos\left(nu_k + jnv_k\right) =$$

$$= \cos\left(nu_k\right)\mathrm{ch}\left(nv_k\right) + j\sin\left(nu_k\right)\mathrm{sh}\left(nv_k\right) = 0, \quad k = \overline{1,\ 2n}. \tag{13.82}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} \cos\left(nu_k\right)\mathrm{ch}\left(nv_k\right) = 0; \\ \sin\left(nu_k\right)\mathrm{sh}\left(nv_k\right) = 0, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ 2n}. \tag{13.83}$$

Решение первого уравнения (13.83) описывается формулой (13.43). Поскольку $\sin(nu_k) = \pm 1 \left(k = \overline{1,\ 2n}\right)$, то из второго уравнения (13.83) имеем

$$v_k = \pm \operatorname{Arsh}(0)/n = 0, \quad k = \overline{1,\ 2n}. \tag{13.84}$$

(Здесь все значения v_k одинаковы и равны нулю).

Подставляя (13.43) и (13.84) в соотношения (13.81), находим

$$\begin{cases} \eta_k = \cos\left[\dfrac{\pi}{2n}(2k-1)\right]; \\ \mu_k = 0, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ 2n}. \tag{13.85}$$

Используя (13.78), выразим полюсы функции затухания (13.60):

$$s_k^{(p)} = \delta_k + j\lambda_k = \frac{j\Omega_з}{\eta_k + j\mu_k} = \frac{j\Omega_з}{\cos\left[\dfrac{\pi}{2n}(2k-1)\right]}, \quad k = \overline{1,\ 2n}. \tag{13.86}$$

Таким образом, полюсы функции затухания (13.60) являются мнимыми. Из (13.86) следует, что полюсы имеют кратность 2.

По формуле (13.12) с учётом (13.60) найдём передаточную функцию $\mathsf{H}(s)$ аналогового нормированного ФНЧ Чебышева типа 2. Она имеет не только полюсы, но и нули:

$$\mathsf{H}(s) = K_0 \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(s - s_{0k})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(s - s_{pk})}, \tag{13.87}$$

где $s_{pk} = \sigma_k + j\Omega_k \left(k = \overline{1,\ n}\right)$ — простые полюсы передаточной функции, являющиеся нулями функции затухания (13.60), расположенными в левой полуплоскости S-плоскости; $s_{0k} \left(k = \overline{1,\ n}\right)$ — нули передаточной функции, являющиеся простыми (некратными) полюсами функции затухания (13.60).

Вещественные и мнимые части полюсов $s_{pk} = \sigma_k + j\Omega_k \left(k = \overline{1,\ n}\right)$ передаточной функции (13.87) определяются соотношениями [см. (13.72) и (13.76)]

$$\begin{cases} \sigma_k = \Omega_з \beta_k / \left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right); \\ \Omega_k = \Omega_з \alpha_k / \left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right), \end{cases} \quad k = \overline{1,\ n}, \tag{13.88}$$

где

$$\begin{cases} \alpha_k = \cos\left[\dfrac{\pi}{2n}(2k-1)\right]\operatorname{ch}(\varphi); \\ \beta_k = -\sin\left[\dfrac{\pi}{2n}(2k-1)\right]\operatorname{sh}(\varphi), \end{cases} \quad k = \overline{1,\ n}. \tag{13.89}$$

Входящие в (13.89) величины $\mathrm{ch}(\varphi)$ и $\mathrm{sh}(\varphi)$ вычисляются по формулам (13.73), в которых параметр γ определяется выражением (13.71).

Нули $s_{0k}\left(k=\overline{1,\ n}\right)$ передаточной функции (13.87) определяются выражениями [см. (13.86)]

$$s_{0k}=\frac{j\Omega_3}{\cos\left[\pi(2k-1)/2n\right]},\quad k=\overline{1,\ n}. \tag{13.90}$$

Отметим, что при нечётных порядках фильтра n нуль с номером $k=(n+1)/2$ находится в бесконечности.

Поскольку комплексные полюсы и нули передаточной функции (13.87) аналогового нормированного ФНЧ Чебышева типа 2 образуют комплексно-сопряжённые пары (за исключением вещественного полюса $s_{p\ (n+1)/2}$ и мнимого нуля $s_{0\ (n+1)/2}=j\infty$ при нечётном порядке n), удобно записать передаточную функцию $\mathsf{H}(s)$ в виде произведения передаточных функций элементарных блоков первого и второго порядков с вещественными коэффициентами:

$$\mathsf{H}(s)=K_0\,\Theta(s)\prod_{k=1}^{r}\frac{s^2+A_{0k}}{s^2+B_{1k}s+B_{0k}}, \tag{13.91}$$

где функция $\Theta(s)$ описывается выражением (13.52).

Параметр r и коэффициенты B_{1k}, $B_{0k}\left(k=\overline{1,\ r}\right)$, входящие в выражение для передаточной функции аналогового нормированного ФНЧ Чебышева типа 2 в форме (13.91), вычисляются по формулам (13.22) — (13.24) соответственно.

Коэффициенты $A_{0k}\left(k=\overline{1,\ r}\right)$ передаточной функции фильтра $\mathsf{H}(s)$ в форме (13.91) выражаются через её нули:

$$A_{0k}=\left|s_{0k}\right|^2,\quad k=\overline{1,\ r}. \tag{13.92}$$

Нормирующий множитель K_0 определим из условия $\mathsf{H}(s)\big|_{s=0}=1$. В результате получим

$$K_0=\begin{cases}\sigma\displaystyle\prod_{k=1}^{r}\frac{B_{0k}}{A_{0k}}, & n-\text{нечётное};\\[2ex] \displaystyle\prod_{k=1}^{r}\frac{B_{0k}}{A_{0k}}, & n-\text{чётное}.\end{cases} \tag{13.93}$$

Комплексная частотная характеристика аналогового фильтра с передаточной функцией (13. 91) описывается формулой

$$\mathsf{H}(j\Omega)=K_0\,\Theta(j\Omega)\prod_{k=1}^{r}\frac{(j\Omega)^2+A_{0k}}{(j\Omega)^2+B_{1k}(j\Omega)+B_{0k}}. \tag{13.94}$$

Отсюда находим выражения для амплитудно-частотной и фазочастотной[•] характеристик:

$$A(\Omega)=\left|\,\mathrm{H}(j\Omega)\right|=K_0\left|\,\Theta(j\Omega)\right|\prod_{k=1}^{r}\frac{\left|A_{0k}-\Omega^2\right|}{\sqrt{\left(B_{0k}-\Omega^2\right)^2+\left(B_{1k}\Omega\right)^2}};\qquad(13.95)$$

$$\varphi(\Omega)=\mathrm{Arg}\left[\mathrm{H}(j\Omega)\right]=\mathrm{Arg}\left[\,\Theta(j\Omega)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\frac{\pi}{2}\left[1-\mathrm{sgn}\left(A_{0k}-\Omega^2\right)\right]-\sum_{k=1}^{r}\mathrm{Arctg}\frac{B_{1k}\Omega}{B_{0k}-\Omega^2}.\qquad(13.96)$$

Нормированные аналоговые ФНЧ Чебышева типов 1 и 2 полностью определяются тремя из следующих четырёх параметров (см. рис.13.4):

- n — порядок фильтра;
- ε — параметр, характеризующий неравномерность АЧХ в полосе пропускания;
- $a_з$ — параметр, характеризующий ослабление сигнала в полосе задерживания;
- $\Omega_з$ — наименьшая частота, на которой в полосе задерживания фильтра достигается заданное ослабление $a_з$.

Установим связь между параметрами n, ε, $a_з$, $\Omega_з$ аналоговых нормированных ФНЧ Чебышева типов 1 и 2. Для этого, используя формулу (13.35), запишем

$$a_з^2=1+\varepsilon^2\mathrm{ch}^2\left[n\,\mathrm{Arch}(\Omega_з)\right],\qquad(13.97)$$

откуда

$$q=\mathrm{ch}\left[n\,\mathrm{Arch}(\Omega_з)\right].\qquad(13.98)$$

Здесь использовано обозначение[••]

$$q=\sqrt{\frac{a_з^2-1}{\varepsilon^2}}=\sqrt{\frac{a_з^2-1}{a_п^2-1}}=\sqrt{\frac{10^{a_{з\,дБ}/10}-1}{10^{a_{п\,дБ}/10}-1}}.\qquad(13.99)$$

Из (13.98) находим

$$\mathrm{Arch}(q)=n\,\mathrm{Arch}(\Omega_з),\qquad(13.100)$$

откуда, воспользовавшись известным соотношением $\mathrm{Arch}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, получаем формулу для расчёта порядка n аналогового нормированного фильтра

[•] На частоте $\Omega=\sqrt{A_{0k}}\ \left(k=\overline{1,r}\right)$ фазочастотная характеристика элементарного блока второго порядка имеет скачок на $+\pi$.

[••] См. также формулу (13.54).

нижних частот Чебышева, обеспечивающего заданные значения параметров ε, $a_з$ и $\Omega_з$ •:

$$n = \operatorname{int}\left[\frac{\lg\left(q + \sqrt{q^2 - 1}\right)}{\lg\left(\Omega_з + \sqrt{\Omega_з^2 - 1}\right)}\right]. \qquad (13.101)$$

Пример 13.2. Спроектировать аналоговый нормированный ФНЧ Чебышева типа 1 со следующими параметрами: $a_{п\,дБ} = 1{,}5$ дБ; $a_{з\,дБ} = 40$ дБ; $\Omega_з = 1{,}5$. Значение АЧХ на нулевой частоте определяется формулой (13.32).

По формулам (13.99) и (13.101) определим порядок фильтра: $q = 155{,}685$; $n = 6$. Выразим параметр ε через затухание фильтра в полосе пропускания $a_{п\,дБ}$ [см. (13.57)]: $\varepsilon = 0{,}642$. Используя выражения (13.47) и (13.49), вычисляем вспомогательные параметры: $\eta = 1{,}227$; $\operatorname{sh}(\varphi) = 0{,}206$; $\operatorname{ch}(\varphi) = 1{,}021$. Затем по формуле (13.51) находим полюсы $s_{pk} = \sigma_k + j\Omega_k$ $\left(k = \overline{1,\ 6}\right)$ передаточной функции (13.16):

$$s_{p1} = -0{,}053 + j\,0{,}986; \quad s_{p2} = -0{,}145 + j\,0{,}722; \quad s_{p3} = -0{,}199 + j\,0{,}264;$$
$$s_{p4} = -0{,}199 - j\,0{,}264; \quad s_{p5} = -0{,}145 - j\,0{,}722; \quad s_{p6} = -0{,}053 - j\,0{,}986.$$

Представим передаточную функцию $H(s)$ аналогового нормированного ФНЧ Чебышева типа 1 в форме (13.20). Для этого, используя формулы (13.52), (13.53), (13.22) — (13.24), при $n = 6$ вычислим функцию $\Theta(s) = 1$; коэффициент передачи $K_0 = 0{,}049$; параметр $r = 3$, а также коэффициенты B_{1k}, B_{0k} $\left(k = \overline{1,\ 3}\right)$:

$$B_{11} = 0{,}107; \quad B_{01} = 0{,}975; \quad B_{12} = 0{,}291; \quad B_{02} = 0{,}542; \quad B_{13} = 0{,}397; \quad B_{03} = 0{,}109.$$

На рис.13.5 изображена АЧХ спроектированного фильтра, рассчитанная по формуле (13.27). На границе полосы пропускания ($\Omega_п = 1$) затухание $a_{п\,дБ} = 1{,}5$ дБ, а на граничной частоте полосы задерживания $\Omega_з = 1{,}5$ — $a_{з\,дБ} = 40{,}292$ дБ.

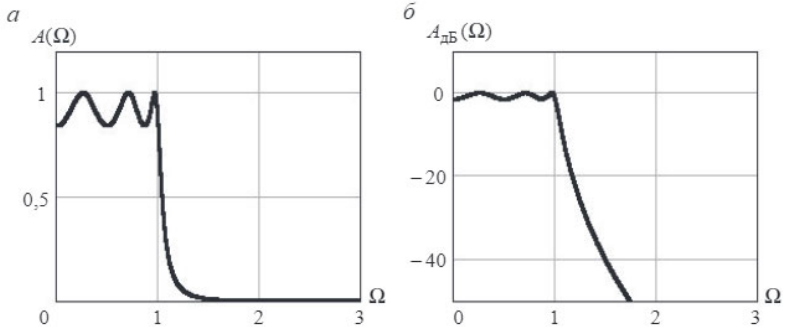


Рис.13.5. АЧХ аналогового нормированного ФНЧ Чебышева типа 1, спроектированного в примере 13.2: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

• См. сноску на с.410.

Пример 13.3. Спроектировать аналоговый нормированный ФНЧ Чебышева типа 2 со следующими параметрами: $a_{\text{п дБ}} = 1{,}5$ дБ; $a_{\text{з дБ}} = 40$ дБ; $\Omega_{\text{з}} = 1{,}5$ (см. пример 13.2). Значение АЧХ на нулевой частоте определяется выражением $\mathrm{H}(s)\big|_{s=0} = 1$.

Порядок фильтра n рассчитан в примере 13.2 ($n = 6$).

Переводя $a_{\text{з}}$ из децибел в разы, получим $a_{\text{з}} = 100$. Затем по формуле (13.71) находим параметр $\gamma = 2{,}418$, а по формулам (13.73) определяем значения $\mathrm{sh}(\varphi) = 1{,}002$ и $\mathrm{ch}(\varphi) = 1{,}416$.

Используя выражения (13.89) и (13.88), вычислим промежуточные переменные α_k, β_k $\left(k = \overline{1,\ 6}\right)$ и полюсы $s_{pk} = \sigma_k + j\Omega_k$ $\left(k = \overline{1,\ 6}\right)$ передаточной функции (13.87):

$$\alpha_1 = 1{,}368;\ \beta_1 = -0{,}259;\ \alpha_2 = 1{,}001;\ \beta_2 = -0{,}709;\ \alpha_3 = 0{,}366;\ \beta_3 = -0{,}968;$$
$$\alpha_4 = -0{,}366;\ \beta_4 = -0{,}968;\ \alpha_5 = -1{,}001;\ \beta_5 = -0{,}709;\ \alpha_6 = -1{,}368;\ \beta_6 = -0{,}259;$$

$$s_{p1} = -0{,}201 + j1{,}059;\quad s_{p2} = -0{,}707 + j0{,}998;\quad s_{p3} = -1{,}355 + j0{,}513;$$
$$s_{p4} = -1{,}355 - j0{,}513;\quad s_{p5} = -0{,}707 - j0{,}998;\quad s_{p6} = -0{,}201 - j1{,}059,$$

а по формулам (13.90) найдём нули s_{0k} $\left(k = \overline{1,\ 6}\right)$ передаточной функции (13.87):

$$s_{01} = j1{,}553;\quad s_{02} = j2{,}121;\quad s_{03} = j5{,}796;$$
$$s_{04} = -j5{,}796;\quad s_{05} = -j2{,}121;\quad s_{06} = -j1{,}553.$$

Представим передаточную функцию $\mathrm{H}(s)$ аналогового нормированного ФНЧ Чебышева типа 2 в форме (13.91). Для этого, используя формулы (13.52), (13.93), (13.22) — (13.24) и (13.92), при $n = 6$ вычислим функцию $\Theta(s) = 1$; коэффициент $K_0 = 0{,}01$; параметр $r = 3$, а также коэффициенты B_{1k}, B_{0k}, A_{0k} $\left(k = \overline{1,\ 3}\right)$:

$$B_{11} = 0{,}402;\ B_{01} = 1{,}161;\ B_{12} = 1{,}413;\ B_{02} = 1{,}495;\ B_{13} = 2{,}71;\ B_{03} = 2{,}099;$$
$$A_{01} = 2{,}412;\quad A_{02} = 4{,}5;\quad A_{03} = 33{,}588.$$

На рис.13.6 изображена АЧХ спроектированного фильтра, рассчитанная по формуле (13.95). На границе полосы пропускания ($\Omega_{\text{п}} = 1$) затухание $a_{\text{п дБ}} = 1{,}417$ дБ, а на граничной частоте полосы задерживания $\Omega_{\text{з}} = 1{,}5$ — $a_{\text{з дБ}} = 40$ дБ.

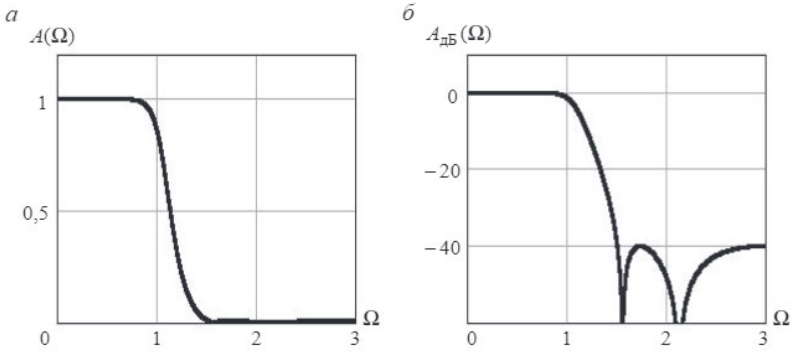


Рис.13.6. АЧХ аналогового нормированного ФНЧ Чебышева типа 2, спроектированного в примере 2.3: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Приведённые примеры 13.2 и 13.3 показывают, что рассмотренная методика проектирования аналоговых нормированных фильтров Чебышева типов 1 и 2 обеспечивает заданное значение максимального затухания в полосе пропускания $a_п$ для фильтра типа 1 и минимального затухания в полосе задерживания $a_з$ для фильтра типа 2. Что касается затухания $a_з$ для фильтра типа 1 и $a_п$ для фильтра типа 2, то за счёт округления • порядка фильтра n, вычисленного по формуле (13.101), они получаются не хуже заданных.

13.4. Синтез аналогового нормированного эллиптического ФНЧ

Для эллиптических фильтров характерно то, что их амплитудно-частотные характеристики имеют равновеликие пульсации как в полосе пропускания, так и в полосе задерживания (рис.13.7). При одинаковых порядках n у эллиптических фильтров обеспечивается более крутой переход от полосы пропускания к полосе задерживания (меньшая ширина переходной полосы), чем у фильтров Баттерворта и Чебышева.

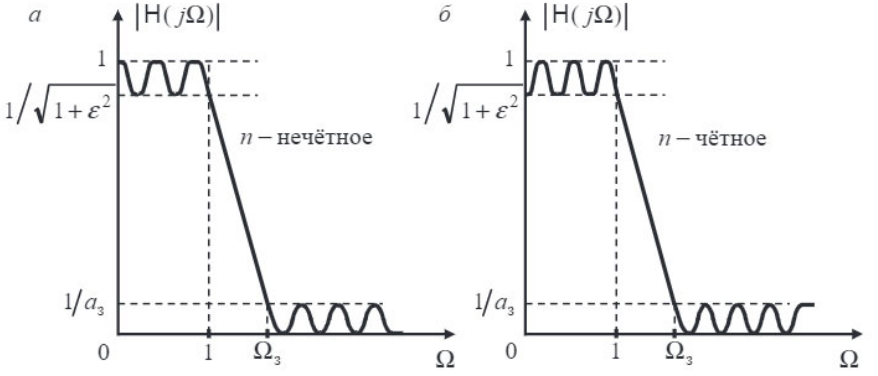


Рис.13.7. Амплитудно-частотные характеристики аналоговых нормированных эллиптических ФНЧ нечётного (*а*) и чётного (*б*) порядков n

Квадрат АЧХ аналогового нормированного эллиптического ФНЧ можно описать следующим выражением [6]:

$$A^2(\Omega) = \left|H(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 R_n^2(\Omega, L)}, \qquad (13.102)$$

где $R_n(\Omega, L)$ — дробно-рациональная функция n-го порядка, у которой число полюсов соответствует числу нулей; L — параметр, характеризующий пульсации функции $R_n(\Omega, L)$.

• См. сноску на с.410.

Типичный вид квадрата функции $R_n(\Omega,\ L)$ показан на рис.13.8. В полосе пропускания $|\Omega|\le 1$ функция $R_n^2(\Omega,\ L)$ осциллирует между нулём и единицей, а в полосе задерживания $|\Omega|\ge\Omega_з$ она осциллирует между L^2 и ∞. При изменении параметра L величина $\Omega_з$ также меняется.

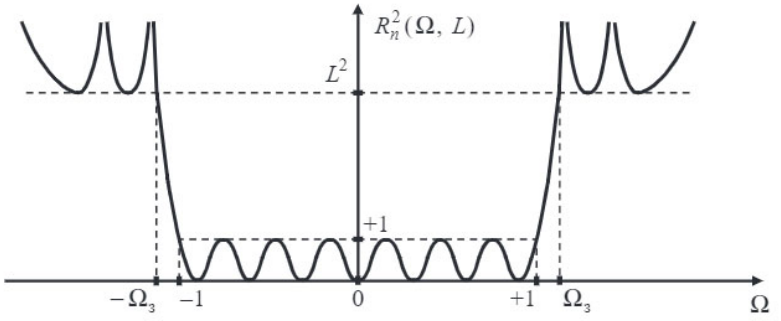


Рис.13.8. Типичный вид квадрата дробно-рациональной функции $R_n(\Omega,\ L)$

В качестве дробно-рациональной функции $R_n(\Omega,\ L)$ для аналогового нормированного эллиптического ФНЧ используется эллиптическая функция Якоби [6, 10, 11, 13, 28]:

$$R_n(\Omega, L)=\mathrm{sn}(\Omega,\ \kappa_1), \tag{13.103}$$

где $\kappa_1=\varepsilon\Big/\sqrt{a_з^2-1}=\sqrt{a_п^2-1}\Big/\sqrt{a_з^2-1}$ — параметр, связанный с максимальным затуханием в полосе пропускания $a_п$ и минимальным затуханием в полосе задерживания $a_з$.

С учётом (13.103) запишем выражение для квадрата АЧХ (13.102) аналогового нормированного эллиптического ФНЧ в виде [28]

$$A^2(\Omega)=\left|\,\mathrm{H}(j\Omega)\right|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2\,\mathrm{sn}^2(\Omega,\ \kappa_1)}. \tag{13.104}$$

Математическая теория эллиптических функций Якоби довольно сложна, поэтому ограничимся лишь элементарными сведениями [9, 11, 57], необходимыми для синтеза эллиптических аналоговых нормированных ФНЧ-прототипов.

Эллиптический интеграл первого рода определяется выражением

$$u\equiv u(\varphi,\ \kappa)=\int_0^{\varphi}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\vartheta}}, \tag{13.105}$$

где $0\le\kappa<1$. Параметр κ называется *модулем*, а верхний предел интегрирования φ — *амплитудой* интеграла.

Значение эллиптического интеграла при $\varphi = \pi/2$

$$u\left(\frac{\pi}{2},\ \kappa\right) = \mathrm{K} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \vartheta}} \tag{13.106}$$

называется *полным эллиптическим интегралом* первого рода.

Из периодичности и чётности подынтегральной функции в (13.105) можно получить следующие важные свойства эллиптического интеграла первого рода:

$$u(n\pi + \varphi_1,\ \kappa) = 2n\mathrm{K} + u(\varphi_1,\ \kappa); \tag{13.107}$$

$$u(\pi/2 + \varphi_1,\ \kappa) = 2\mathrm{K} - u(\pi/2 - \varphi_1,\ \kappa), \tag{13.108}$$

где $0 \le \varphi_1 < \pi/2$.

Из (13.105) следует, что при $\kappa = 0$

$$u(\varphi,\ 0) = \int_0^{\varphi} d\vartheta = \varphi, \tag{13.109}$$

а при $\kappa = 1$

$$u(\varphi,\ 1) = \int_0^{\varphi} \frac{d\vartheta}{\cos\vartheta} = \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right]. \tag{13.110}$$

Функция $u(\varphi, 0)$ растёт линейно с ростом φ, а $u(\varphi, 1)$ имеет разрыв при $\varphi = \pi/2$. В диапазоне изменения амплитуды интеграла (13.105) $0 \le \varphi < \pi/2$

$$u(\varphi,\ 0) \le u(\varphi,\ \kappa) \le u(\varphi,\ 1). \tag{13.111}$$

Из выражения (13.105) следует, что между значениями u и φ имеется взаимно-однозначное соответствие, т.е. каждой паре значений $(u,\ \kappa)$ соответствует единственная амплитуда φ: $\varphi = f(u,\ \kappa)$.

Эллиптические функции Якоби определяются соотношениями

$$\mathrm{sn}(u,\ \kappa) = \sin\varphi; \tag{13.112}$$

$$\mathrm{cn}(u,\ \kappa) = \cos\varphi; \tag{13.113}$$

$$\mathrm{dn}(u,\ \kappa) = \sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \varphi}. \tag{13.114}$$

Нетрудно видеть, что при вещественных значениях аргумента u функции $\mathrm{sn}(u,\ \kappa)$, $\mathrm{cn}(u,\ \kappa)$ и $\mathrm{dn}(u,\ \kappa)$ являются периодическими с периодами $4\mathrm{K}$, $4\mathrm{K}$ и $2\mathrm{K}$ соответственно, т.е.

$$\mathrm{sn}(u + 4\mathrm{K}m,\ \kappa) = \mathrm{sn}(u,\ \kappa); \tag{13.115}$$

$$\mathrm{cn}(u + 4\mathrm{K}m,\ \kappa) = \mathrm{cn}(u,\ \kappa); \tag{13.116}$$

$$\mathrm{dn}(u + 2\mathrm{K}m,\ \kappa) = \mathrm{dn}(u,\ \kappa). \tag{13.117}$$

Первый аргумент эллиптических функций Якоби (13.112) — (13.114) может быть также мнимым jv или комплексным $w = u + jv$. В случае мнимого аргумента jv функции $\mathrm{sn}(jv, \kappa)$, $\mathrm{cn}(jv, \kappa)$ и $\mathrm{dn}(jv, \kappa)$ являются периодическими с периодами $j2K'$, $j4K'$ и $j4K'$ соответственно, т.е.

$$\mathrm{sn}(jv + j2K'n, \kappa) = \mathrm{sn}(jv, \kappa); \tag{13.118}$$

$$\mathrm{cn}(jv + j4K'n, \kappa) = \mathrm{cn}(jv, \kappa); \tag{13.119}$$

$$\mathrm{dn}(jv + j4K'n, \kappa) = \mathrm{dn}(jv, \kappa), \tag{13.120}$$

где

$$K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - (\kappa')^2 \sin^2 \vartheta}}; \tag{13.121}$$

$$\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2} \tag{13.122}$$

— параметр, называемый *дополнительным модулем*.

Величина K', определяемая формулой (13.121), называется полным эллиптическим интегралом первого рода, соответствующим дополнительному модулю κ'.

Объединяя свойства периодичности (13.115) — (13.117) и (13.118) — (13.120), получим для комплексного аргумента $w = u + jv$ двоякую периодичность эллиптических функций Якоби:

$$\mathrm{sn}(w + 4Km + j2K'n, \kappa) = \mathrm{sn}(w, \kappa); \tag{13.123}$$

$$\mathrm{cn}(w + 4Km + j4K'n, \kappa) = \mathrm{cn}(w, \kappa); \tag{13.124}$$

$$\mathrm{dn}(w + 2Km + j4K'n, \kappa) = \mathrm{dn}(w, \kappa). \tag{13.125}$$

Для функции $\mathrm{sn}(w, \kappa)$ комплексная плоскость $w = u + jv$ может быть разбита на *прямоугольники периодов*, как показано на рис.13.9.

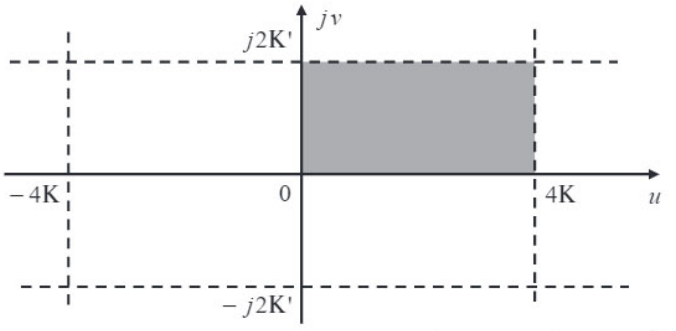


Рис.13.9. Прямоугольник периодов эллиптической функции Якоби $\mathrm{sn}(w, \kappa)$

Прямоугольник с вершинами $(0,\,0)$, $(0,\,4\mathrm{K})$, $(4\mathrm{K},\,j2\mathrm{K}')$, $(0,\,j2\mathrm{K}')$ называется *фундаментальным прямоугольником периодов* (на рис.13.9 он покрыт серой заливкой). Значения эллиптической функции $\mathrm{sn}(\mathrm{w},\,\kappa)$ внутри этого прямоугольника и на любых двух соседних сторонах определяют значения данной функции на всей W-плоскости. Аналогично можно построить *прямоугольники периодов* для эллиптических функций Якоби $\mathrm{cn}(\mathrm{w},\,\kappa)$ и $\mathrm{dn}(\mathrm{w},\,\kappa)$.

Эллиптические функции Якоби могут быть представлены в виде [11]

$$\mathrm{sn}(\mathrm{w},\,\kappa)=\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\,\frac{\theta_1\left(\dfrac{\mathrm{w}}{2\mathrm{K}},\,q\right)}{\theta_0\left(\dfrac{\mathrm{w}}{2\mathrm{K}},\,q\right)}; \tag{13.126}$$

$$\mathrm{cn}(\mathrm{w},\,\kappa)=\frac{\sqrt{\kappa'}}{\sqrt{\kappa}}\,\frac{\theta_2\left(\dfrac{\mathrm{w}}{2\mathrm{K}},\,q\right)}{\theta_0\left(\dfrac{\mathrm{w}}{2\mathrm{K}},\,q\right)}; \tag{13.127}$$

$$\mathrm{dn}(\mathrm{w},\,\kappa)=\sqrt{\kappa'}\,\frac{\theta_3\left(\dfrac{\mathrm{w}}{2\mathrm{K}},\,q\right)}{\theta_0\left(\dfrac{\mathrm{w}}{2\mathrm{K}},\,q\right)}, \tag{13.128}$$

где параметр q, называемый *модулярной постоянной*, определяется формулой

$$q=\exp\left(-\pi\,\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\right), \tag{13.129}$$

а функции $\theta_i[\,\mathrm{w}/(2\mathrm{K}),\,q\,]\left(i=\overline{0,\,3}\right)$ описываются рядами

$$\theta_0\left(\frac{\mathrm{w}}{2\mathrm{K}},\,q\right)=1+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m q^{m^2}\cos\left(2m\pi\,\frac{\mathrm{w}}{2\mathrm{K}}\right); \tag{13.130}$$

$$\theta_1\left(\frac{\mathrm{w}}{2\mathrm{K}},\,q\right)=2q^{1/4}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^{m(m+1)}\sin\left[(2m+1)\pi\,\frac{\mathrm{w}}{2\mathrm{K}}\right]; \tag{13.131}$$

$$\theta_2\left(\frac{\mathrm{w}}{2\mathrm{K}},\,q\right)=2q^{1/4}\sum_{m=0}^{\infty}q^{m(m+1)}\cos\left[(2m+1)\pi\,\frac{\mathrm{w}}{2\mathrm{K}}\right]; \tag{13.132}$$

$$\theta_3\left(\frac{\mathrm{w}}{2\mathrm{K}},\,q\right)=1+2\sum_{m=1}^{\infty}q^{m^2}\cos\left(2m\pi\,\frac{\mathrm{w}}{2\mathrm{K}}\right). \tag{13.133}$$

Ряды (13.130) — (13.133) быстро сходятся, поэтому их можно использовать для вычисления эллиптических функций Якоби с любой желаемой степенью точности.

Отображение точек W-плоскости, соответствующих комплексному аргументу $\mathrm{w} = u + jv$ эллиптических функций Якоби, в точки $s = \sigma + j\Omega$ комплексной S-плоскости, требуемое для построения функции $R_n(\Omega, L)$ [см. (13.102)], осуществляется согласно выражению [11]*

$$\Omega = j\,\mathrm{sn}(\mathrm{w}, \kappa). \qquad (13.134)$$

Рассмотрим свойства этого преобразования (отображения). В силу двоякой периодичности эллиптической функции Якоби $\mathrm{sn}(\mathrm{w}, \kappa)$ точки w_p, а также все точки вида $\mathrm{w} = \mathrm{w}_p + 4m\mathrm{K} + j2n\mathrm{K}'$ отображаются в одну точку S-плоскости, поэтому достаточно рассмотреть только точки фундаментального прямоугольника периодов (см. рис.13.9, область с серой заливкой). Представляют интерес следующие три области:

- *область* 1: $\mathrm{w} = u$, где $0 \le u \le \mathrm{K}$;
- *область* 2: $\mathrm{w} = \mathrm{K} + jv$, где $0 \le v \le \mathrm{K}'$;
- *область* 3: $\mathrm{w} = u + j\mathrm{K}'$, где $0 \le u \le \mathrm{K}$.

В области 1 имеем $s = j\,\mathrm{sn}(u, \kappa)$. Если $u = 0$, то $s = j\,\mathrm{sn}(0, \kappa) = j0$, а если $u = \mathrm{K}$, то $s = j\,\mathrm{sn}(\mathrm{K}, \kappa) = j1$. Таким образом, преобразование (13.134) отображает точки вещественной оси W-плоскости в интервале $u \in [0, \mathrm{K}]$ в точки мнимой оси S-плоскости, расположенные в интервале $j\Omega \in [j0,\ j1]$.

В области 2 согласно (13.134) $s = j\,\mathrm{sn}(\mathrm{K} + jv, \kappa)$. Это выражение после несложных преобразований можно привести к виду $s = j \big/ \mathrm{dn}(v, \kappa')$. Если $v = 0$, то $s = j \big/ \mathrm{dn}(0, \kappa') = j1$, а если $v = \mathrm{K}'$, то $s = j \big/ \mathrm{dn}(\mathrm{K}', \kappa') = j \big/ \kappa$. Таким образом, преобразование (13.134) отображает точки комплексной W-плоскости, лежащие на линии $\mathrm{w} = \mathrm{K} + jv$, где $0 \le v \le \mathrm{K}'$, в точки мнимой оси S-плоскости, расположенные в интервале $j\Omega \in [j1,\ j \big/ \kappa]$.

В области 3 соотношение (13.134) превращается в $s = j\,\mathrm{sn}(u + j\mathrm{K}',\ \kappa)$, из которого после несложных преобразований получаем $s = j \big/ [\kappa\,\mathrm{sn}(u, \kappa)]$. Если $u = 0$, то $s = j \big/ [\kappa\,\mathrm{sn}(0, \kappa)] = j\infty$, а если $u = \mathrm{K}$, то $s = j \big/ [\kappa\,\mathrm{sn}(\mathrm{K}, \kappa)] = j \big/ \kappa$. Таким образом, посредством преобразования (13.134) точки комплексной W-плоскости, лежащие на линии $\mathrm{w} = u + j\mathrm{K}'$, где $u \in [0, \mathrm{K}]$, отображаются в точки мнимой оси S-плоскости, расположенные между $j\infty$ и $j \big/ \kappa$.

Для точек W-плоскости $\mathrm{w} = -u + jv$, соответствующих точкам $\mathrm{w} = u + jv$ рассмотренных выше областей 1, 2 и 3, получается отображение (13.134), показанное на рис.13.10. При этом точкам W-плоскости A, B, C, D, E, F (рис.13.10,*а*) соответствуют точки S-плоскости A', B', C', D', E', F' (рис.13.10,*б*), так что замкнутый контур $ABCDEF$ отображается во всю мнимую ось S-плоскости.

---

* В монографии [11] использовано преобразование $\Omega = \sqrt{\kappa}\,\mathrm{sn}(\mathrm{w}, \kappa)$.

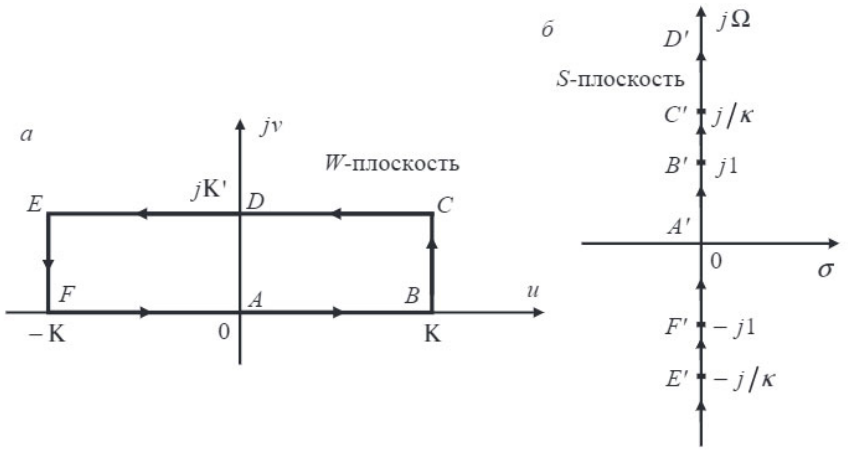


Рис.13.10. Отображение (13.134) точек W-плоскости ($а$) в точки S-плоскости ($б$)

Методика проектирования аналогового нормированного эллиптического ФНЧ-прототипа, строится по той же схеме, что и в случае фильтров Баттерворта и Чебышева (см. § 13.2 и 13.3).

Заменой переменной $\Omega = s/j = -js$ в формуле (13.104) получаем функцию затухания согласно выражению (13.10):

$$\mathsf{L}(-s^2) = 1 + \varepsilon^2 \operatorname{sn}^2(-js,\, \kappa_1) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(s - s_k^{(0)}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(s - s_k^{(p)}\right)}, \qquad (13.135)$$

затем определяются нули $s_k^{(0)}\left(k = \overline{1,\, 2n}\right)$ и полюсы $s_k^{(p)}\left(k = \overline{1,\, 2n}\right)$ этой функции, для чего необходимо воспользоваться соотношениями (13.126), (13.130) и (13.131).

По формуле (13.12) с учётом (13.135) находится передаточная функция $\mathsf{H}(s)$ аналогового нормированного эллиптического ФНЧ. Она описывается формулой (13.87) и имеет как полюсы $s_{pk} = \sigma_k + j\Omega_k\left(k = \overline{1,\, n}\right)$, так и нули $s_{0k}\left(k = \overline{1,\, n}\right)$. При этом полюсы передаточной функции $\mathsf{H}(s)$ являются нулями функции затухания $\mathsf{L}(-s^2)$, которые расположены в левой полуплоскости S-плоскости, а нули $\mathsf{H}(s)$ — простыми (некратными) полюсами функции затухания (13.135).

Поскольку комплексные полюсы и нули передаточной функции (13.87) аналогового нормированного эллиптического ФНЧ образуют комплексно-со-

пряжённые пары (за исключением вещественного полюса $s_{p\,(n+1)/2}$ и мнимого нуля $s_{0\,(n+1)/2} = j\infty$ при нечётном порядке n), удобно записать передаточную функцию $\mathsf{H}(s)$ в виде произведения передаточных функций элементарных блоков первого и второго порядков с вещественными коэффициентами, т.е. в виде (13.91), где функция $\Theta(s)$ описывается выражением (13.52).

Параметр r, входящий в выражение для передаточной функции нормированного эллиптического ФНЧ в форме (13.91), вычисляется по формуле (13.22).

Методика расчёта коэффициентов σ, A_{0k}, B_{1k}, B_{0k} $\left(k = \overline{1,\, r}\right)$ и нормирующего множителя K_0 передаточной функции $\mathsf{H}(s)$ эллиптического фильтра в форме (13.91) приведена в монографии А. Антонью [11]. Мы рассмотрим эту методику в модифицированном виде таким образом, чтобы нормированная граничная частота полосы пропускания была равна единице [•]: $\Omega_{\text{п}} = 1$. При этом изменим некоторые обозначения, использованные в [11].

Коэффициент избирательности определим следующим образом:

$$\kappa_{\text{и}} = \Omega_{\text{п}} / \Omega_{\text{з}} = 1 / \Omega_{\text{з}} . \tag{13.136}$$

По заданному коэффициенту избирательности $\kappa_{\text{и}}$ вычисляются вспомогательные параметры

$$\kappa'_{\text{и}} = \sqrt{1 - \kappa_{\text{и}}^2} ; \tag{13.137}$$

$$q_0 = \frac{1 - \sqrt{\kappa'_{\text{и}}}}{2\left(1 + \sqrt{\kappa'_{\text{и}}}\right)} ; \tag{13.138}$$

$$q = q_0 + 2\left(q_0\right)^5 + 15\left(q_0\right)^9 + 150\left(q_0\right)^{13} . \tag{13.139}$$

По заданным значениям затухания ($a_{\text{п дБ}}$, $a_{\text{з дБ}}$) и полученному значению параметра q определяется требуемый порядок фильтра [••]:

$$n = \operatorname{int}\left\{ \frac{\lg\left[16\left(10^{a_{\text{з дБ}}/10} - 1\right) \Big/ \left(10^{a_{\text{п дБ}}/10} - 1\right)\right]}{\lg\left(\dfrac{1}{q}\right)} \right\} . \tag{13.140}$$

Далее вычисляется вспомогательный параметр

$$\Lambda = \frac{1}{2n} \ln\left(\frac{10^{a_{\text{п дБ}}/20} + 1}{10^{a_{\text{п дБ}}/20} - 1} \right), \tag{13.141}$$

[•] Синтезированный в [11] аналоговый нормированный эллиптический ФНЧ имеет граничные частоты полосы пропускания $\Omega_{\text{п}}$ и полосы задерживания $\Omega_{\text{з}}$ такие, что $\sqrt{\Omega_{\text{п}}\Omega_{\text{з}}} = 1$.

[••] См. сноску на с.410.

через который определяется модуль (абсолютная величина) вещественного полюса $\sigma = \left| s_{p\,(n+1)/2} \right|$, входящий в выражение (13.52):

$$\sigma_0 = \left| \frac{2q^{1/4} \sum\limits_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \operatorname{sh}\left[(2m+1)\Lambda\right]}{1 + 2\sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \operatorname{ch}(2m\Lambda)} \right|; \qquad (13.142)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\kappa_{\text{и}}}}. \qquad (13.143)$$

По заданному коэффициенту избирательности $\kappa_{\text{и}}$ и найденной величине σ_0 вычисляется вспомогательный параметр

$$\Xi = \sqrt{\left(1 + \sigma_0^2 \kappa_{\text{и}}\right)\left(1 + \frac{\sigma_0^2}{\kappa_{\text{и}}}\right)}. \qquad (13.144)$$

Далее следует найти параметры Ω_k и V_k $\left(k = \overline{1,\ r}\right)$, с помощью которых определяются коэффициенты передаточной функции (13.91) аналогового нормированного эллиптического ФНЧ:

$$\Omega_k = \frac{2q^{1/4} \sum\limits_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin\left[\frac{(2m+1)\pi\mu_k}{n}\right]}{1 + 2\sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos\left(\frac{2m\pi\mu_k}{n}\right)}, \quad k = \overline{1,\ r}, \qquad (13.145)$$

где

$$\mu_k = \begin{cases} k, & n - \text{нечётное}; \\ k - \dfrac{1}{2}, & n - \text{чётное}, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}; \qquad (13.146)$$

$$V_k = \sqrt{\left(1 - \Omega_k^2 \kappa_{\text{и}}\right)\left(1 - \frac{\Omega_k^2}{\kappa_{\text{и}}}\right)}, \quad k = \overline{1,\ r}. \qquad (13.147)$$

Наконец, используя полученные значения величин σ_0 [см. (13.142)], Ξ [см. (13.144)], Ω_k и V_k $\left(k = \overline{1,\ r}\right)$ [см. (13.145) и (13.147)], можно определить коэффициенты A_{0k}, B_{1k}, B_{0k} $\left(k = \overline{1,\ r}\right)$ передаточной функции аналогового нормированного эллиптического ФНЧ в форме (13.91):

$$A_{0k} = \frac{1}{\Omega_k^2 \kappa_{\text{и}}}, \quad k = \overline{1,\ r}; \qquad (13.148)$$

$$B_{1k} = \frac{2\sigma_0 V_k}{\left(1+\sigma_0^2\,\Omega_k^2\right)\sqrt{\kappa'_{\text{и}}}}, \quad k=\overline{1,\ r}\,; \tag{13.149}$$

$$B_{0k} = \frac{(\sigma_0 V_k)^2 + (\Xi\Omega_k)^2}{\left(1+\sigma_0^2\,\Omega_k^2\right)^2\,\kappa'_{\text{и}}}, \quad k=\overline{1,\ r}\,. \tag{13.150}$$

Нормирующий множитель K_0 (константу нормирования) найдём из условия (13.32). В результате получим

$$K_0 = \begin{cases} \sigma \prod\limits_{k=1}^{r} B_{0k}/A_{0k}\,, & n-\text{нечётное;} \\ 10^{-a_{\text{п дБ}}/20} \prod\limits_{k=1}^{r} B_{0k}/A_{0k}\,, & n-\text{чётное.} \end{cases} \tag{13.151}$$

Действительное минимальное затухание в полосе задерживания отличается от заданного из-за округления порядка фильтра n [см. (13.140)]. Его величина определяется выражением

$$a_{\text{з дБ}} = 10\lg\left(\frac{10^{a_{\text{п дБ}}/10}-1}{16q^n}+1\right). \tag{13.152}$$

Ряды в формулах (13.142) и (13.145) сходятся очень быстро, поэтому в большинстве практических случаев достаточно просуммировать три или четыре члена ряда [11].

Для нахождения комплексной частотной характеристики $\mathsf{H}(j\Omega)$, АЧХ $A(\Omega)$ и ФЧХ $\varphi(\Omega)$ аналогового нормированного эллиптического фильтра с передаточной функцией $\mathsf{H}(s)$ в форме (13.91) следует воспользоваться соответствующими выражениями (13.94) — (13.96).

Пример 13.4. Спроектировать аналоговый нормированный эллиптический фильтр нижних частот со следующими параметрами (см. примеры 13.2 и 13.3): $a_{\text{п дБ}} = 1{,}5$ дБ; $a_{\text{з дБ}} = 40$ дБ; $\Omega_{\text{з}} = 1{,}25$. Значение амплитудно-частотной характеристики на нулевой частоте определяется формулой (13.32).

Как и в примерах 13.1 — 13.3, для расчётов воспользуемся системой компьютерной математики Mathcad.

Для представления передаточной функции $\mathsf{H}(s)$ в форме (13.91) выполним следующие вычисления.

По формуле (13.136) определяем коэффициент избирательности $\kappa'_{\text{и}} = 0{,}667$, затем используя выражения (13.137) — (13.140), вычисляем вспомогательные параметры и порядок фильтра: $\kappa'_{\text{и}} = 0{,}745$; $q_0 = 0{,}037$; $q = 0.037$; $n = 4$. В соответствии с (13.52) при $n = 4$ получаем $\Theta(s) = 1$.

По формулам (13.141) — (13.144) находим параметры: $\Lambda = 0{,}306$; $\sigma_0 = 0.297$; $\sigma = 0{,}364$ и $\Xi = 1{,}095$. В соответствии с (13.22) определяем параметр $r = 2$.

Используя формулы (13.146), (13.145) и (13.147), получаем элементы массивов μ_k, Ω_k и V_k $\left(k = \overline{1, 2}\right)$:

$$\mu_1 = 0{,}5; \quad \mu_2 = 1{,}5; \qquad \Omega_1 = 0{,}352; \quad \Omega_2 = 0{,}769; \qquad V_1 = 0{,}864; \quad V_2 = 0{,}261.$$

По формулам (13.148) — (13.151) вычисляем коэффициенты A_{0k}, B_{1k}, B_{0k} $\left(k = \overline{1, 2}\right)$ передаточной функции фильтра в форме (13.91) и нормирующий множитель K_0 (константу нормирования):

$$A_{01} = 12{,}099; \qquad A_{02} = 2{,}536;$$
$$B_{11} = 0{,}622; \qquad B_{01} = 0{,}315;$$
$$B_{12} = 0{,}181; \qquad B_{02} = 0{,}969;$$
$$K_0 = 8{,}375 \cdot 10^{-3}.$$

На рис.13.11 изображена АЧХ спроектированного фильтра, рассчитанная по формуле (13.95). На границе полосы пропускания ($\Omega_п = 1$) затухание $a_{п\,дБ} = 1{,}5$ дБ, а на граничной частоте полосы задерживания $\Omega_з = 1{,}5$ — $a_{з\,дБ} = 41{,}541$ дБ. Проверка по формуле (13.152) даёт такой же результат.

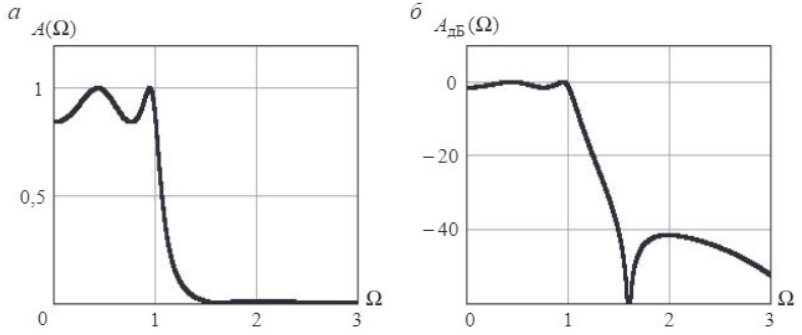


Рис.13.11. АЧХ аналогового нормированного эллиптического ФНЧ, спроектированного в примере 13.4: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

В рассмотренных примерах 13.1 — 13.4 проектировались аналоговые нормированные ФНЧ с одинаковой шириной переходной полосы ($\Omega_з = 1{,}5$) и одинаковым затуханием в полосе задерживания $a_{з\,дБ} = 40$ дБ. В этих условиях наибольший порядок имеет фильтр Баттерворта, а наименьший — эллиптический. При одинаковых порядках фильтров n эллиптический фильтр имеет наименьшую ширину переходной полосы между граничными частотами полосы пропускания $\Omega_п$ и полосы задерживания $\Omega_з$, а фильтр Баттерворта — наибольшую. По перечисленным показателям фильтры Чебышева занимают промежуточное положение.

13.5. Аналоговый нормированный ФНЧ Бесселя

В идеальном случае групповое время запаздывания фильтра (групповая задержка) $\tau(\Omega) = -d\varphi(\Omega)/d\Omega$ не должно зависеть от частоты или, что то же самое, фазовый сдвиг $\varphi(\Omega)$ должен быть линейной функцией частоты. Основное назначение фильтров Баттерворта, Чебышева и эллиптических, рассмотренных в предыдущих параграфах, является обеспечение заданной амплитудно-частотной характеристики. Фазочастотные характеристики этих фильтров нелинейные.

Фильтр Бесселя имеет максимально плоскую характеристику групповой задержки $\tau(\Omega)$ в начале координат.

Передаточная функция аналогового фильтра Бесселя имеет только полюсы, расположенные на окружности с центром на вещественной полуоси S-плоскости. Она описывается выражением [ср. с (13.2)]

$$\mathsf{H}(s) = \frac{K_0}{\sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k s^k}, \tag{13.153}$$

где [6, 52]

$$\beta_k = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}\, k!\,(n-k)!}, \quad k = \overline{0,\ n}. \tag{13.154}$$

Обычно аналоговый фильтр Бесселя рассчитывают, задаваясь порядком фильтра n. Далее по формулам (13.154) вычисляют коэффициенты полинома знаменателя передаточной функции (13.153), после чего она представляется в виде (13.16).

Поскольку комплексные полюсы передаточной функции (13.16) аналогового нормированного ФНЧ Бесселя образуют комплексно-сопряжённые пары (за исключением вещественного полюса $s_{p\,(n+1)/2}$ при нечётном порядке фильтра), удобно записать передаточную функцию $\mathsf{H}(s)$ в виде произведения передаточных функций элементарных блоков первого и второго порядков с вещественными коэффициентами, т.е. в виде (13.20), где функция $\Theta(s)$ описывается выражением (13.52). Параметр r и коэффициенты B_{1k}, B_{0k} $\left(k = \overline{1,\ r}\right)$, входящие в выражение для передаточной функции аналогового ФНЧ Бесселя в форме (13.20), вычисляются по формулам (13.22) — (13.24) соответственно. Нормирующий множитель K_0 определяется из условия $\mathsf{H}(s)\big|_{s=0} = 1$:

$$K_0 = \begin{cases} \left|s_{p\,(n+1)/2}\right| \prod\limits_{k=1}^{r} B_{0k}, & n - \text{нечётное}; \\ \prod\limits_{k=1}^{r} B_{0k}, & n - \text{чётное}. \end{cases} \tag{13.155}$$

В отличие от фильтров Баттерворта частота среза фильтров Бесселя зависит от их порядка, что затрудняет работу с ними. Частота среза Ω_c определяется выражением [6]

$$\Omega_c = \sqrt[n]{\beta_0}\,. \tag{13.156}$$

Для нормирования Ω_c к единице все полюсы передаточной функции $H(s)$ фильтра Бесселя в форме (2.16) нужно разделить на $\sqrt[n]{\beta_0}$. При этом групповое время запаздывания $\tau(\Omega)$ вместо 1 становится равным $\sqrt[n]{\beta_0}$, а уровень АЧХ на частоте $\Omega = 1$ уменьшается при увеличении порядка фильтра [6].

Комплексная частотная характеристика $H(j\Omega)$, АЧХ $A(\Omega)$ и ФЧХ $\varphi(\Omega)$ аналогового фильтра Бесселя с передаточной функцией $H(s)$ в форме (13.20) определяются соответствующими выражениями (13.26) — (13.28).

Характеристику группового времени запаздывания $\tau(\Omega)$ можно получить, продифференцировав по частоте (13.28) с учётом выражения (13.52):

$$\tau(\Omega) = -\frac{d\varphi(\Omega)}{d\Omega} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^2 + \Omega^2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{B_{1k}B_{0k} + B_{1k}\Omega^2}{\left(B_{0k} - \Omega^2\right)^2 + \left(B_{1k}\Omega\right)^2}, & n - \text{нечётное;} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{B_{1k}B_{0k} + B_{1k}\Omega^2}{\left(B_{0k} - \Omega^2\right)^2 + \left(B_{1k}\Omega\right)^2}, & n - \text{чётное.} \end{cases} \tag{13.157}$$

Пример 13.5. Спроектировать аналоговый ФНЧ Бесселя 10-го порядка.

По формуле (13.154) вычислим коэффициенты передаточной функции (13.153):

$$\beta_0 = 6{,}547 \cdot 10^8; \quad \beta_1 = 6{,}547 \cdot 10^8; \quad \beta_2 = 3{,}101 \cdot 10^8; \quad \beta_3 = 9{,}189 \cdot 10^7;$$
$$\beta_4 = 1{,}892 \cdot 10^7; \quad \beta_5 = 2{,}838 \cdot 10^6; \quad \beta_6 = 3{,}153 \cdot 10^5; \quad \beta_7 = 2{,}574 \cdot 10^4;$$
$$\beta_8 = 1{,}485 \cdot 10^3; \quad \beta_9 = 55; \quad \beta_{10} = 1.$$

Используя функцию polyroots(β) в системе компьютерной математики Mathcad, определяем полюсы передаточной функции $H(s)$:

$$S_{p1} = -6{,}922 + j\,0{,}868; \quad S_{p2} = -6{,}922 - j\,0{,}868;$$
$$S_{p3} = -6{,}615 + j\,2{,}612; \quad S_{p4} = -6{,}615 - j\,2{,}612;$$
$$S_{p5} = -5{,}968 + j\,4{,}389; \quad S_{p6} = -5{,}968 - j\,4{,}389;$$
$$S_{p7} = -4{,}886 + j\,6{,}225; \quad S_{p8} = -4{,}886 - j\,6{,}225;$$
$$S_{p9} = -3{,}109 + j\,8{,}233; \quad S_{p10} = -3{,}109 - j\,8{,}233.$$

Для нормирования Ω_c к единице все полюсы передаточной функции $H(s)$ фильтра Бесселя в форме (13.16) разделим на $\sqrt[n]{\beta_0} = 7.614$. В результате получим:

$$s_{p1} = -0{,}909 + j\,0{,}114; \quad s_{p2} = -0{,}909 - j\,0{,}114;$$

$$s_{p3} = -0{,}869 + j\,0{,}343; \qquad s_{p4} = -0{,}869 - j\,0{,}343;$$
$$s_{p5} = -0{,}784 + j\,0{,}576; \qquad s_{p6} = -0{,}784 - j\,0{,}576;$$
$$s_{p7} = -0{,}642 + j\,0{,}818; \qquad s_{p8} = -0{,}642 - j\,0{,}818;$$
$$s_{p9} = -0{,}408 + j\,1{,}081; \qquad s_{p10} = -0{,}408 - j\,1{,}081.$$

Представим передаточную функцию $H(s)$ аналогового нормированного ФНЧ Бесселя в форме (13.20). Для этого, используя выражения (13.52), (13.22) — (13.24), при $n = 10$ вычислим функцию $\Theta(s) = 1$, параметр $r = 5$, а также коэффициенты B_{1k}, B_{0k} $\left(k = \overline{1,5}\right)$:

$$B_{11} = 1{,}818; \quad B_{01} = 0{,}84; \qquad B_{12} = 1{,}738; \quad B_{02} = 0{,}873;$$
$$B_{13} = 1{,}568; \quad B_{03} = 0{,}946; \qquad B_{14} = 1{,}283; \quad B_{04} = 1{,}08.$$
$$B_{15} = 0{,}817; \quad B_{05} = 1{,}336.$$

По формуле (13.155) находим $K_0 = 1$.

Амплитудно-частотная характеристика фильтра рассчитывается по формуле (13.27), а характеристика группового запаздывания — по формуле (13.157). Построенные по этим формулам частотные характеристики спроектированного фильтра изображены на рис.13.12.

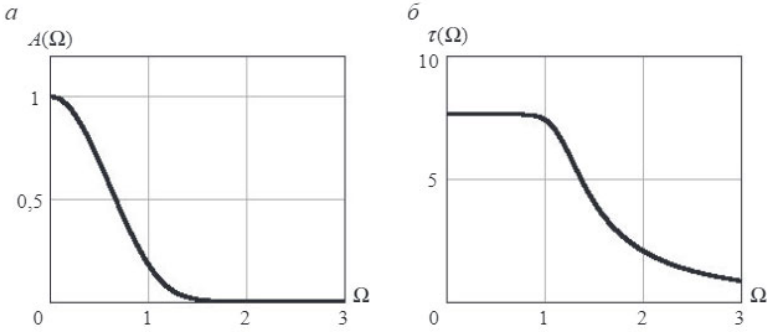


Рис.13.12. АЧХ (*а*) и ГВЗ (*б*) аналогового нормированного фильтра Бесселя 10-го порядка, спроектированного в примере 13.5

При дискретизации аналоговых фильтров Бесселя характерное для них свойство максимальной гладкости зависимости $\tau(\Omega)$, вообще говоря, не сохраняется [6].

13.6. Обобщённая форма представления передаточной функции аналогового нормированного ФНЧ-прототипа

Сопоставляя выражения (13.20) и (13.91) с учётом (13.21) и (13.52), описывающие передаточные функции аналоговых нормированных ФНЧ Баттерворта, Чебышева, эллиптических и Бесселя, можно прийти к обобщённой форме

представления передаточной функции $\mathsf{H}(s)$, пригодной для описания ФНЧ-прототипов при каскадной форме реализации на основе блоков первого и второго порядков с вещественными коэффициентами:

$$\mathsf{H}(s)=\frac{K_0}{F\,s+Q}\prod_{k=1}^{r}\frac{C\,s^2+A_{0k}}{s^2+B_{1k}\,s+B_{0k}}, \tag{13.158}$$

где коэффициенты F, Q, C, A_{0k} $\left(k=\overline{1,\,r}\right)$ для различных типов аналоговых нормированных ФНЧ определяются согласно табл.13.1.

Таблица 13.1

Коэффициент в (13.158)	Порядок фильтра n	Тип аналогового нормированного ФНЧ-прототипа				
		Баттерворта	Чебышева типа 1	Чебышева типа 2	эллиптический	Бесселя
F	нечётн.	1	1	1	1	1
	чётн.	0	0	0	0	0
Q	нечётн.	1	σ	σ	σ	σ
	чётн.	1	1	1	1	1
C	нечётн.	0	0	1	1	0
	чётн.	0	0	1	1	0
A_{0k}	нечётн.	1	1	A_{0k}	A_{0k}	1
	чётн.	1	1	A_{0k}	A_{0k}	1
Здесь $k=\overline{1,\,r}$						

Из формулы (13.158) получим выражения для комплексной частотной характеристики $\mathsf{H}(j\Omega)$, АЧХ $A(\Omega)$ и ФЧХ $\varphi(\Omega)$:

$$\mathsf{H}(j\Omega)=\frac{K_0}{j\Omega F+Q}\prod_{k=1}^{r}\frac{(j\Omega)^2C+A_{0k}}{(j\Omega)^2+B_{1k}(j\Omega)+B_{0k}}; \tag{13.159}$$

$$A(\Omega)=\left|\,\mathsf{H}(j\Omega)\right|=\frac{K_0}{\sqrt{Q^2+(\Omega F)^2}}\prod_{k=1}^{r}\frac{\left|A_{0k}-\Omega^2C\right|}{\sqrt{\left(B_{0k}-\Omega^2\right)^2+(\Omega B_{1k})^2}}; \tag{13.160}$$

$$\varphi(\Omega)=\operatorname{Arg}\left[\mathsf{H}(j\Omega)\right]=-\operatorname{Arctg}(\Omega F/Q)+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\frac{\pi}{2}\left[1-\operatorname{sgn}\left(A_{0k}-\Omega^2C\right)\right]-\sum_{k=1}^{r}\operatorname{Arctg}\frac{\Omega B_{1k}}{B_{0k}-\Omega^2}. \tag{13.161}$$

Представление передаточной функции $H(s)$ аналогового нормированного ФНЧ-прототипа в форме (13.158) позволяет с единых позиций осуществить последующие этапы синтеза рекурсивных ЦФ (см. рис.13.1). Такое представление особенно удобно при денормировании частоты (см. § 13.7).

13.7. Денормирование частоты в аналоговой области

Для синтеза аналогового нормированного ФНЧ-прототипа необходимо располагать значением нормированной граничной частоты полосы задерживания $\Omega_з$, на которой обеспечивается необходимое затухание $a_з$ (см. рис.13.2,*а*, 13.4 и 13.7).

В техническом задании (ТЗ) на проектирование избирательных фильтров задаются граничные частоты полос пропускания и задерживания, а также максимальное затухание в полосах пропускания $a_п$ и минимальное затухание в полосах задерживания $a_з$ (рис.13.13, где частоты f — натуральные, а частоты $W = f/f_д$ — нормированные «цифровые»).

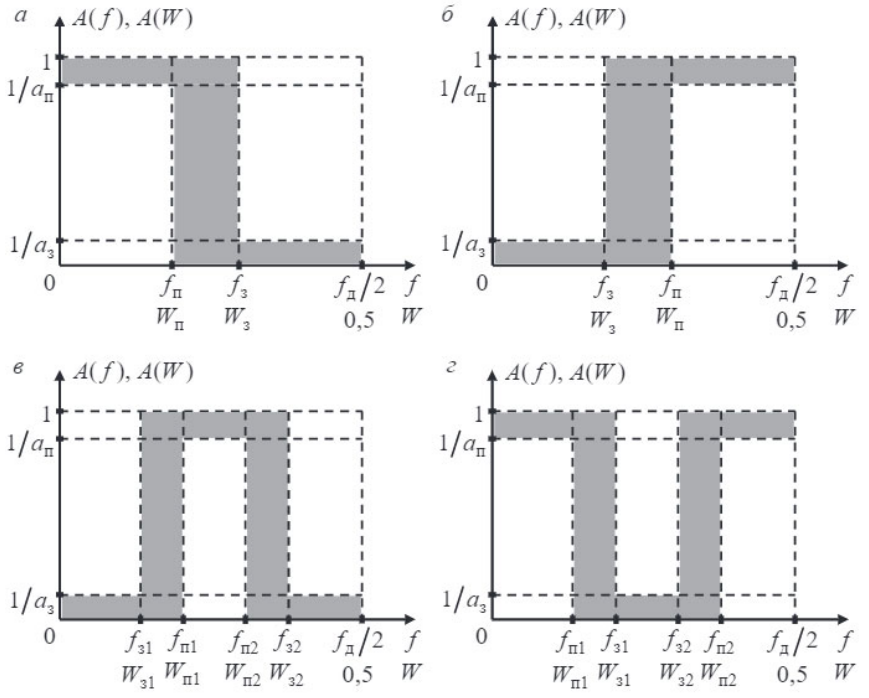


Рис.13.13. Допуски на АЧХ избирательных фильтров: *а* — ФНЧ; *б* — ФВЧ; *в* — полосового фильтра; *г* — режекторного фильтра

Нормирование частоты аналогового ФНЧ-прототипа согласно (13.1), как отмечалось в § 13.1, на единицу уменьшает число свободных параметров, что существенно упрощает процедуру синтеза. Формулы, по которым осуществляется нормирование частоты аналоговых избирательных фильтров (ФНЧ, ФВЧ, полосового и режекторного), т.е. переход $f \to \Omega$, сведены в табл.13.2. В ней приведены также выражения для расчёта нормированной граничной частоты полосы задерживания $\Omega_з$ аналогового нормированного ФНЧ-прототипа. По этим формулам происходит переход к так называемым *низкочастотным эквивалентам* избирательных фильтров.

После синтеза аналогового нормированного ФНЧ-прототипа по методикам, изложенным в § 13.2 — 13.5, переход к ЦФ производится на основе методов дискретизации, которые будут рассмотрены в § 13.8. При этом могут быть использованы два подхода [6], схематически представленные на рис.13.1. В настоящем параграфе рассматривается первый подход (см. рис.13.1,*а*).

Таблица 13.2

Тип фильтра	Формула нормирования частоты	Формула для расчёта $\Omega_з$
ФНЧ	$\Omega = \dfrac{f}{f_п}$	$\Omega_з = \dfrac{f_з}{f_п}$
ФВЧ	$\Omega = \dfrac{f_п}{f}$	$\Omega_з = \dfrac{f_п}{f_з}$
Полосовой фильтр (ПФ)	$\Omega = \dfrac{f_0}{\Delta f}\left(\dfrac{f}{f_0} - \dfrac{f_0}{f}\right)$	$\Omega_з = \min\{\Omega_{з1},\ \Omega_{з2}\}$, где $\Omega_{з1} = \dfrac{f_0}{\Delta f}\left(\dfrac{f_{з1}}{f_0} - \dfrac{f_0}{f_{з1}}\right)$; $\Omega_{з2} = \dfrac{f_0}{\Delta f}\left(\dfrac{f_{з2}}{f_0} - \dfrac{f_0}{f_{з2}}\right)$
Режекторный фильтр (РФ)	$\Omega = \dfrac{\Delta f / f_0}{\left(\dfrac{f}{f_0} - \dfrac{f_0}{f}\right)}$	$\Omega_з = \min\{\Omega_{з1},\ \Omega_{з2}\}$, где $\Omega_{з1} = \dfrac{\Delta f / f_0}{\left(\dfrac{f_{з1}}{f_0} - \dfrac{f_0}{f_{з1}}\right)}$; $\Omega_{з2} = \dfrac{\Delta f / f_0}{\left(\dfrac{f_{з2}}{f_0} - \dfrac{f_0}{f_{з2}}\right)}$
Здесь $f_0 = \sqrt{f_{п1} f_{п2}}$; $\Delta f = f_{п2} - f_{п1}$		

Операция денормирования частоты в аналоговой области сводится к отображению $s \to p$, т.е. к отображению комплексной S-плоскости в комплексную P-плоскость [•]. При таком отображении должны сохраняться избирательные (селективные) свойства [••], устойчивость, а также дробно-рациональный вид передаточной функции [см. (13.2)] аналогового фильтра.

Селективные свойства аналогового фильтра сохраняются, если при отображении $s \to p$ мнимая ось S-плоскости $j\Omega = j\,\mathrm{Im}(s)$ отображается в мнимую ось P-плоскости $j\omega = j\,\mathrm{Im}(p)$.

Необходимым и достаточным условием устойчивости аналогового фильтра является расположение всех полюсов передаточной функции фильтра в левой части плоскости её комплексного аргумента. Отсюда следует, что устойчивость аналогового фильтра при отображении $s \to p$ сохраняется в том случае, если левая полуплоскость S-плоскости $\mathrm{Re}(s) < 0$ отображается также в левую полуплоскость P-плоскости $\mathrm{Re}(p) < 0$. В этом случае все полюсы передаточной функции $\mathrm{H}(s)$ устойчивого ФНЧ-прототипа, находящиеся в левой полуплоскости S-плоскости, будут отображаться в полюсы передаточной функции $\mathrm{H}(p)$ избирательного аналогового фильтра, которые будут находиться также в левой полуплоскости P-плоскости.

Дробно-рациональный вид передаточной функции $\mathrm{H}(s)$ при переходе к передаточной функции $\mathrm{H}(p)$ сохраняется, если отображение $s \to p$ также имеет дробно-рациональный вид.

Математически операция денормирования частоты в аналоговой области сводится к замене аргумента:

$$\mathrm{H}(p) = \mathrm{H}(s)\big|_{s=\xi(p)}, \qquad (13.162)$$

где функция $s = \xi(p)$ удовлетворяет всем сформулированным выше требованиям сохранения селективности, устойчивости и дробно-рационального вида передаточной функции.

Поскольку денормирование частоты — операция, обратная нормированию, соответствующие формулы денормирования могут быть получены из выражений табл.13.2. Для аналоговых избирательных фильтров (ФНЧ, ФВЧ, полосового и режекторного) формулы денормирования частоты $s = \xi(p)$ сведены в табл.13.3.

[•] Точки комплексных плоскостей $s \in S$, $p \in P$, где s — комплексный аргумент передаточной функции аналогового ФНЧ-прототипа $\mathrm{H}(s)$, а p — комплексный аргумент передаточной функции аналогового избирательного фильтра $\mathrm{H}(p)$. Отображение $s \to p$ должно быть конформным, при котором сохраняются углы между линиями, проходящими через данную точку. В этом случае два семейства взаимно ортогональных координатных линий S-плоскости отображается в два семейства взаимно ортогональных координатных линий P-плоскости.

[••] По величине затухания в полосах пропускания $a_{\text{п}}$ и задерживания $a_{\text{з}}$.

Таблица 13.3

Тип аналогового фильтра	Формула замены оператора $s=\xi(p)$
ФНЧ	$s=\dfrac{p}{\omega_{\text{п}}}$
ФВЧ	$s=\dfrac{\omega_{\text{п}}}{p}$
Полосовой фильтр (ПФ)	$s=\dfrac{p^2+\omega_0^2}{\Delta\omega\, p}$
Режекторный фильтр (РФ)	$s=\dfrac{\Delta\omega\, p}{p^2+\omega_0^2}$
Здесь $\omega_{\text{п}}=2\pi f_{\text{п}}$ — частота среза; $\omega_0=2\pi f_0$ — центральная частота; $\Delta\omega=\omega_{\text{п}2}-\omega_{\text{п}1}=2\pi\Delta f$ — ширина полосы пропускания	

В результате денормирования частоты по формулам $s=\xi(p)$ табл.13.3 из передаточной функции дробно-рационального вида $\mathsf{H}(s)$ получается передаточная функция $\mathrm{H}(p)$ также дробно-рационального вида. Порядок N передаточной функции $\mathrm{H}(p)$ равен порядку n передаточной функции $\mathsf{H}(s)$ нормированного аналогового ФНЧ-прототипа при переходе к ФНЧ или к ФВЧ и удвоенному порядку $2n$ функции $\mathsf{H}(s)$ при переходе к полосовому или к режекторному фильтру (см. табл.13.3):

$$\mathrm{H}(p)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{M}\mathrm{a}_k p^k}{1+\sum\limits_{k=1}^{N}\mathrm{b}_k p^k}=K_0\frac{\prod\limits_{k=1}^{M}(p-p_{0k})}{\prod\limits_{k=1}^{N}(p-p_{pk})},\quad M<N, \tag{13.163}$$

где

$$N=\begin{cases} n, & \text{ФНЧ - прототип} \to \text{ФНЧ или ФВЧ;}\\ 2n, & \text{ФНЧ - прототип} \to \text{ПФ или РФ;}\end{cases} \tag{13.164}$$

$$M=\begin{cases} m, & \text{ФНЧ - прототип} \to \text{ФНЧ или ФВЧ;}\\ 2m, & \text{ФНЧ - прототип} \to \text{ПФ или РФ;}\end{cases} \tag{13.165}$$

$p_{0k}\left(k=\overline{1,\,M}\right)$ — нули; $p_{pk}\left(k=\overline{1,\,N}\right)$ — полюсы передаточной функции $\mathrm{H}(p)$ избирательного аналогового фильтра.

Аналоговый фильтр с передаточной функцией (13.163) может быть описан обыкновенным дифференциальным уравнением N-го порядка

$$y(t)=\sum_{k=0}^{M} \mathrm{a}_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)-\sum_{k=1}^{N} \mathrm{b}_k \frac{d^k}{dt^k} y(t), \qquad (13.166)$$

коэффициенты которого $\mathrm{a}_k \left(k=\overline{0,\, M}\right)$ и $\mathrm{b}_k \left(k=\overline{0,\, N}\right)$ равны коэффициентам передаточной функции (13.163).

Для передаточной функции аналогового нормированного ФНЧ-прототипа $\mathrm{H}(s)$ в форме (13.158) с учётом табл.13.3 найдём передаточные функции аналоговых фильтров после денормирования частоты (13.162).

◆ **Фильтры нижних и верхних частот (ФНЧ и ФВЧ)**

Подстановки $s=p/\omega_{\text{п}}$ и $s=\omega_{\text{п}}/p$ (см. табл.13.3) в выражение (13.158) приводят к формуле

$$\mathrm{H}(p)=\frac{\mathrm{Q}_1 p+\mathrm{Q}_0}{\mathrm{F}_1 p+\mathrm{F}_0} \prod_{k=1}^{r} \frac{\mathrm{E}_{2k}\, p^2+\mathrm{E}_{0k}}{p^2+\mathrm{D}_{1k}\, p+\mathrm{D}_{0k}}. \qquad (13.167)$$

Коэффициенты Q_1, Q_0, F_1, F_0, E_{2k}, E_{0k}, D_{1k}, D_{0k} $\left(k=\overline{1,\, r}\right)$ передаточной функции (13.167) аналогового фильтра выражаются через коэффициенты $K_0, F,\ Q, C, A_{0k}, B_{1k}, B_{0k}$ $\left(k=\overline{1,\, r}\right)$ передаточной функции ФНЧ-прототипа в форме (13.158) и параметр денормирования $\omega_{\text{п}}$. Для удобства пользования эти коэффициенты сведены в табл.13.4.

Таблица 13.4

Коэффициенты в (13.167)	Фильтр нижних частот (ФНЧ)		Фильтр верхних частот (ФВЧ)	
	n нечётн.	n чётн.	n нечётн.	n чётн.
Q_1	0		K_0	0
Q_0	$K_0\,\omega_{\text{п}}$	K_0	0	K_0
F_1	F		Q	0
F_0	$Q\,\omega_{\text{п}}$	1	$\omega_{\text{п}}$	1
E_{2k}	C		A_{0k}/B_{0k}	
E_{0k}	$A_{0k}\,\omega_{\text{п}}^2$		$C\,\omega_{\text{п}}^2/B_{0k}$	
D_{1k}	$B_{1k}\,\omega_{\text{п}}$		$B_{1k}\,\omega_{\text{п}}/B_{0k}$	
D_{0k}	$B_{0k}\,\omega_{\text{п}}^2$		$\omega_{\text{п}}^2/B_{0k}$	
Здесь n — порядок аналогового нормированного ФНЧ-прототипа; $k=\overline{1,\, r}$				

Из передаточной функции (13.167) получим выражения для комплексной частотной характеристики $\mathrm{H}(j\omega)$, АЧХ $A(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$:

$$\mathrm{H}(j\omega)=\frac{j\omega \mathrm{Q}_1+\mathrm{Q}_0}{j\omega \mathrm{F}_1+\mathrm{F}_0}\prod_{k=1}^{r}\frac{(j\omega)^2\mathrm{E}_{2k}+\mathrm{E}_{0k}}{(j\omega)^2+j\omega \mathrm{D}_{1k}+\mathrm{D}_{0k}}; \qquad (13.168)$$

$$A(\omega)=|\mathrm{H}(j\omega)|=\frac{\sqrt{\mathrm{Q}_0{}^2+(\omega \mathrm{Q}_1)^2}}{\sqrt{\mathrm{F}_0{}^2+(\omega \mathrm{F}_1)^2}}\prod_{k=1}^{r}\frac{\left|\mathrm{E}_{0k}-\omega^2\mathrm{E}_{2k}\right|}{\sqrt{\left(\mathrm{D}_{0k}-\omega^2\right)^2+(\omega \mathrm{D}_{1k})^2}}; \qquad (13.169)$$

$$\varphi(\omega)=\mathrm{Arg}[\mathrm{H}(j\omega)]=\mathrm{Arctg}\frac{\omega \mathrm{Q}_1}{\mathrm{Q}_0}-\mathrm{Arctg}\frac{\omega \mathrm{F}_1}{\mathrm{F}_0}+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\frac{\pi}{2}\left[1-\mathrm{sgn}\left(\mathrm{E}_{0k}-\omega^2\mathrm{E}_{2k}\right)\right]-\sum_{k=1}^{r}\mathrm{Arctg}\frac{\omega \mathrm{D}_{1k}}{\mathrm{D}_{0k}-\omega^2}. \qquad (13.170)$$

Пример 13.6. Провести денормирование частоты аналогового ФНЧ-прототипа, спроектированного в примере 13.1 (фильтр Баттерворта), при следующих исходных данных:

— тип избирательного фильтра после денормирования — ФНЧ;

— граничная частота полосы пропускания $f_{\text{п}}=1{,}0$ кГц;

— передаточную функцию представить в форме (13.167).

Для проектирования фильтра составлена программа в системе компьютерной математики Mathcad.

Круговая частота границы полосы пропускания $\omega_{\text{п}}=2\pi f_{\text{п}}=6{,}283\cdot 10^3$ рад/с.

Для ФНЧ-прототипа Баттерворта при $n=12$ согласно табл.13.1 находим $F=0$; $Q=1$; $C=0$; $A_{0k}=1$ $\left(k=\overline{1,\,6}\right)$.

Используя коэффициенты $K_0=1$, F, Q, C, A_{0k}, B_{1k}, B_{0k} $\left(k=\overline{1,\,6}\right)$ передаточной функции ФНЧ-прототипа в форме (13.158), полученные в примере 13.1, по формулам табл.13.4 вычислим коэффициенты передаточной функции аналогового фильтра нижних частот в форме (13.167):

$$\mathrm{F}_1=0;\quad \mathrm{F}_0=1;\quad \mathrm{Q}_1=0;\quad \mathrm{Q}_0=1;$$

$$\mathrm{E}_{2k}=0;\ \mathrm{E}_{0k}=3{,}948\cdot 10^7;\ \mathrm{D}_{0k}=3{,}948\cdot 10^7\ \left(k=\overline{1,\,6}\right);$$

$$\mathrm{D}_{11}=1{,}64\cdot 10^3;\quad \mathrm{D}_{12}=4{,}809\cdot 10^3;\quad \mathrm{D}_{13}=7{,}65\cdot 10^3;$$

$$\mathrm{D}_{14}=9{,}97\cdot 10^3;\quad \mathrm{D}_{15}=1{,}161\cdot 10^4;\quad \mathrm{D}_{16}=1{,}246\cdot 10^4.$$

На рис.13.14 изображена АЧХ спроектированного аналогового фильтра нижних частот 12-го порядка ($N=12$), рассчитанная по формуле (13.169). Граничные частоты фильтра после денормирования частоты: $f_{\text{п}}=1{,}0$ кГц, $f_{\text{з}}=1{,}5$ кГц. Максимальное затухание в полосе пропускания $a_{\text{п дБ}}=3$ дБ, а минимальное затухание в полосе задерживания $a_{\text{з дБ}}=42{,}262$ дБ, что совпадает с параметрами затухания на граничных частотах ФНЧ-прототипа (см. пример 13.1).

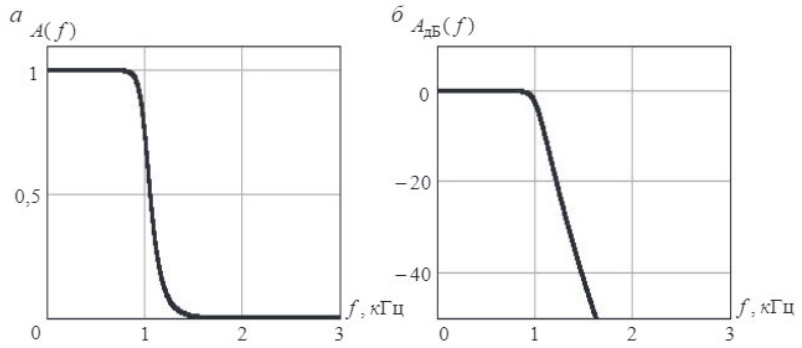


Рис.13.14. АЧХ аналогового ФНЧ ($N=12$), спроектированного в примере 13.6: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Пример 13.7. Провести денормирование частоты аналогового ФНЧ-прототипа, спроектированного в примере 13.2, при следующих исходных данных:
— тип избирательного фильтра после денормирования — ФВЧ;
— граничная частота полосы пропускания $f_{\text{п}}=1{,}0$ кГц;
— передаточную функцию представить в форме (13.167).

Для проектирования фильтра составлена программа в системе компьютерной математики Mathcad.

Круговая частота границы полосы пропускания $\omega_{\text{п}}=2\pi f_{\text{п}}=6{,}283\cdot10^{3}$ рад/с.

Для ФНЧ-прототипа Чебышева типа 1 при $n=6$ по табл.13.1 находим $F=0$; $Q=1$; $C=0$; $A_{0k}=1$ $\left(k=\overline{1,\,3}\right)$.

Используя коэффициенты $K_0=0{,}049$, F, Q, C, A_{0k}, B_{1k}, B_{0k} $\left(k=\overline{1,\,3}\right)$ передаточной функции ФНЧ-прототипа в форме (13.158), полученные в примере 13.2, по формулам табл.13.4 вычислим коэффициенты передаточной функции H(p) аналогового фильтра верхних частот в форме (13.167):

$$\mathrm{F}_1=0;\quad \mathrm{F}_0=1;\qquad \mathrm{Q}_1=0;\quad \mathrm{Q}_0=0{,}049;$$
$$\mathrm{E}_{21}=1{,}025;\quad \mathrm{E}_{22}=1{,}844;\quad \mathrm{E}_{23}=9{,}148;$$
$$\mathrm{E}_{0k}=0\ \left(k=\overline{1,\,3}\right);$$
$$\mathrm{D}_{11}=686{,}089;\qquad \mathrm{D}_{01}=4{,}048\cdot10^{7};$$
$$\mathrm{D}_{12}=3{,}371\cdot10^{3};\qquad \mathrm{D}_{02}=7{,}279\cdot10^{7};$$
$$\mathrm{D}_{13}=2{,}284\cdot10^{4};\qquad \mathrm{D}_{03}=3{,}611\cdot10^{8}.$$

На рис.13.15 изображена АЧХ спроектированного аналогового фильтра верхних частот 6-го порядка ($N=6$), рассчитанная по формуле (13.169). Граничные частоты фильтра после денормирования частоты: $f_{\text{п}}=1{,}0$ кГц, $f_{\text{з}}=666{,}66$ Гц. Максимальное затухание в полосе пропускания $a_{\text{п дБ}}=1{,}5$ дБ, а минимальное затухание в полосе задерживания $a_{\text{з дБ}}=40{,}292$ дБ, что совпадает с параметрами затухания на граничных частотах ФНЧ-прототипа (см. пример 13.2).

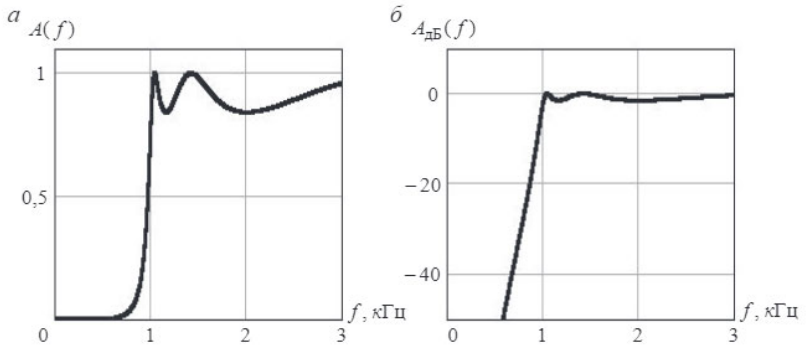


Рис.13.15. АЧХ аналогового ФВЧ ($N = 6$), спроектированного в примере 13.7: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

◆ Полосовой и режекторный фильтры (ПФ и РФ), первый способ

Подстановки $s = \dfrac{p^2 + \omega_0^2}{\Delta\omega\, p}$ и $s = \dfrac{\Delta\omega\, p}{p^2 + \omega_0^2}$ (см. табл.13.3) в передаточную функцию (13.158) приводят к формуле

$$\mathrm{H}(p) = \frac{\mathrm{Q}_2 p^2 + \mathrm{Q}_1 p + \mathrm{Q}_0}{\mathrm{F}_2 p^2 + \mathrm{F}_1 p + \mathrm{F}_0} \prod_{k=1}^{r} \frac{\mathrm{E}_{4k} p^4 + \mathrm{E}_{2k} p^2 + \mathrm{E}_{0k}}{p^4 + \mathrm{D}_{3k} p^3 + \mathrm{D}_{2k} p^2 + \mathrm{D}_{1k} p + \mathrm{D}_{0k}}. \quad (13.171)$$

Коэффициенты Q_2, Q_1, Q_0, F_2, F_1, F_0, E_{4k}, E_{2k}, E_{0k}, D_{3k}, D_{2k}, D_{1k}, D_{0k} $\left(k = \overline{1,\, r}\right)$ передаточной функции (13.171) аналогового фильтра выражаются через коэффициенты K_0, F, Q, C, A_{0k}, B_{1k}, B_{0k} $\left(k = \overline{1,\, r}\right)$ передаточной функции ФНЧ-прототипа в форме (13.158) и параметры денормирования ω_0, $\Delta\omega$. Для удобства пользования эти коэффициенты сведены в табл.13.5.

Таблица 13.5

Коэффициенты в (13.171)	Полосовой фильтр (ПФ)		Режекторный фильтр (РФ)	
1	**2**		**3**	
	n нечётн.	n чётн.	n нечётн.	n чётн.
Q_2	0		K_0	0
Q_1	$K_0\,\Delta\omega$	0	0	
Q_0	0	K_0	$K_0\,\omega_0^2$	K_0
F_2	F		Q	0

Окончание табл. 13.5

1	2		3	
	n нечётн.	n чётн.	n нечётн.	n чётн.
F_1	$Q\,\Delta\omega$	0	$F\,\Delta\omega$	
F_0	ω_0^2	1	$Q\omega_0^2$	1
E_{4k}	C		A_{0k}/B_{0k}	
E_{2k}	$A_{0k}\Delta\omega^2+2C\omega_0^2$		$\left(C\,\Delta\omega^2+2A_{0k}\omega_0^2\right)/B_{0k}$	
E_{0k}	$C\omega_0^4$		$A_{0k}\omega_0^4/B_{0k}$	
D_{3k}	$B_{1k}\,\Delta\omega$		$B_{1k}\,\Delta\omega/B_{0k}$	
D_{2k}	$B_{0k}\,\Delta\omega^2+2\omega_0^2$		$\left(\Delta\omega^2+2B_{0k}\,\omega_0^2\right)/B_{0k}$	
D_{1k}	$B_{1k}\,\omega_0^2\Delta\omega$		$B_{1k}\,\omega_0^2\Delta\omega/B_{0k}$	
D_{0k}	ω_0^4		ω_0^4	
Здесь n — порядок аналогового нормированного ФНЧ-прототипа; $k=\overline{1,\,r}$				

Из передаточной функции (13.171) получим выражения для комплексной частотной характеристики $\mathrm{H}(j\omega)$, АЧХ $A(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$:

$$\mathrm{H}(j\omega)=\frac{(j\omega)^2\,\mathrm{Q}_2+j\omega\,\mathrm{Q}_1+\mathrm{Q}_0}{(j\omega)^2\,\mathrm{F}_2+j\omega\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_0}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{r}\frac{(j\omega)^4\,\mathrm{E}_{4k}+(j\omega)^2\,\mathrm{E}_{2k}+\mathrm{E}_{0k}}{(j\omega)^4+(j\omega)^3\,\mathrm{D}_{3k}+(j\omega)^2\,\mathrm{D}_{2k}+j\omega\mathrm{D}_{1k}+\mathrm{D}_{0k}};\qquad(13.172)$$

$$A(\omega)=|\,\mathrm{H}(j\omega)\,|=\frac{\sqrt{\left(\mathrm{Q}_0-\omega^2\mathrm{Q}_2\right)^2+\left(\omega\,\mathrm{Q}_1\right)^2}}{\sqrt{\left(\mathrm{F}_0-\omega^2\mathrm{F}_2\right)^2+\left(\omega\,\mathrm{F}_1\right)^2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{r}\frac{\left|\,\mathrm{E}_{0k}+\omega^4\mathrm{E}_{4k}-\omega^2\mathrm{E}_{2k}\,\right|}{\sqrt{\left(\mathrm{D}_{0k}+\omega^4-\omega^2\mathrm{D}_{2k}\right)^2+\left(\omega\,\mathrm{D}_{1k}-\omega^3\mathrm{D}_{3k}\right)^2}};\qquad(13.173)$$

$$\varphi(\omega)=\mathrm{Arg}[\,\mathrm{H}(j\omega)\,]=\mathrm{Arctg}\frac{\omega\,\mathrm{Q}_1}{\mathrm{Q}_0-\omega^2\mathrm{Q}_2}-\mathrm{Arctg}\frac{\omega\,\mathrm{F}_1}{\mathrm{F}_0-\omega^2\mathrm{F}_2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\frac{\pi}{2}\left[1-\operatorname{sgn}\left(\mathrm{E}_{0k}+\omega^4\mathrm{E}_{4k}-\omega^2\mathrm{E}_{2k}\right)\right]-\sum_{k=1}^{r}\operatorname{Arctg}\frac{\omega\,\mathrm{D}_{1k}-\omega^3\mathrm{D}_{3k}}{\mathrm{D}_{0k}+\omega^4-\omega^2\mathrm{D}_{2k}}. \tag{13.174}$$

Пример 13.8. Провести денормирование частоты аналогового ФНЧ-прототипа, спроектированного в примере 13.3, при следующих исходных данных:
— тип избирательного фильтра после денормирования — полосовой;
— граничные частоты полосы пропускания: $f_{\text{п}1}=20$ кГц; $f_{\text{п}2}=22$ кГц;
— передаточную функцию представить в форме (13.171).

Для проектирования фильтра составлена программа в системе компьютерной математики Mathcad.

Согласно примечанию табл.13.2 получаем центральную частоту и полосу пропускания фильтра: $f_0=20{,}98$ кГц; $\Delta f=2$ кГц (соответствующие им круговые частоты $\omega_0=2\pi f_0=1{,}318\cdot10^5$ рад/с и $\Delta\omega=2\pi\Delta f=1{,}257\cdot10^4$ рад/с).

Для ФНЧ-прототипа Чебышева типа 2 при $n=6$ ($r=3$) по табл.13.1 находим $C=1$; $F=0$; $Q=1$. Коэффициенты A_{0k} $\left(k=\overline{1,\,3}\right)$ возьмём из примера 13.3.

Используя коэффициенты $K_0=0{,}01$, F, Q, C, A_{0k}, B_{1k}, B_{0k} $\left(k=\overline{1,\,3}\right)$ передаточной функции ФНЧ-прототипа в форме (13.158), полученные в примере 13.3, по формулам табл.13.5 вычислим коэффициенты передаточной функции аналогового полосового фильтра в форме (13.171):

$$\mathrm{Q}_2=0;\quad \mathrm{Q}_1=0;\quad \mathrm{Q}_0=0{,}01;\qquad \mathrm{F}_2=0;\quad \mathrm{F}_1=0;\quad \mathrm{F}_0=1;$$

$$\mathrm{E}_{21}=3{,}512\cdot10^{10};\quad \mathrm{E}_{22}=3{,}545\cdot10^{10};\quad \mathrm{E}_{23}=4{,}005\cdot10^{10};$$

$$\mathrm{E}_{4k}=1;\quad \mathrm{E}_{0k}=3{,}017\cdot10^{20};\quad \mathrm{D}_{0k}=3{,}017\cdot10^{20}\quad \left(k=\overline{1,\,3}\right);$$

$$\mathrm{D}_{31}=5{,}047\cdot10^{3};\quad \mathrm{D}_{21}=3{,}492\cdot10^{10};\quad \mathrm{D}_{11}=8{,}767\cdot10^{13};$$

$$\mathrm{D}_{32}=1{,}776\cdot10^{4};\quad \mathrm{D}_{22}=3{,}498\cdot10^{10};\quad \mathrm{D}_{12}=3{,}085\cdot10^{14};$$

$$\mathrm{D}_{33}=3{,}406\cdot10^{4};\quad \mathrm{D}_{23}=3{,}507\cdot10^{10};\quad \mathrm{D}_{13}=5{,}916\cdot10^{14}.$$

На рис.13.16 представлена АЧХ спроектированного аналогового полосового фильтра 12-го порядка ($N=12$), рассчитанная по формуле (13.173).

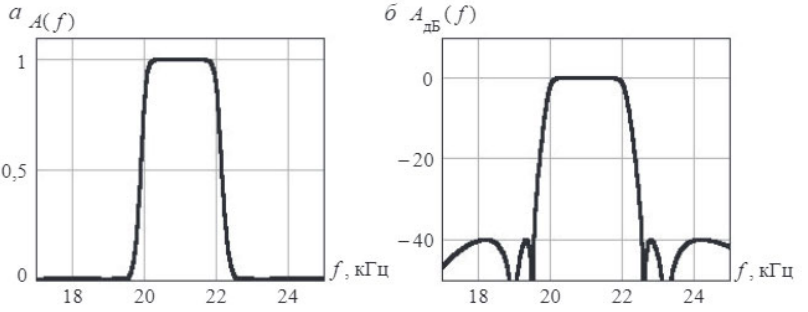


Рис.13.16. АЧХ аналогового полосового фильтра ($N=12$), спроектированного в примере 13.8: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Граничные частоты АЧХ аналогового полосового фильтра после денормирования частоты: $f_{п1} = 20$ кГц, $f_{п2} = 22$ кГц, $f_{з1} = 19{,}317$ кГц, $f_{з2} = 22{,}52974$ кГц. Максимальное затухание в полосе пропускания $a_{п\,дБ} = 1{,}417$ дБ, а минимальное затухание в полосе задерживания $a_{з\,дБ} = 40$ дБ, что совпадает с параметрами затухания на граничных частотах ФНЧ-прототипа (см. пример 13.3). При этом ширина полосы пропускания по заданному уровню $-1{,}5$ дБ равна $\Delta f_п = 2{,}0083$ кГц.

Пример 13.9. Провести денормирование частоты аналогового ФНЧ-прототипа, спроектированного в примере 13.4, при следующих исходных данных:
— тип избирательного фильтра после денормирования — режекторный;
— граничные частоты полос пропускания: $f_{п1} = 20$ кГц; $f_{п2} = 22$ кГц;
— передаточную функцию представить в форме (13.171).

Для проектирования фильтра составлена программа в системе компьютерной математики Mathcad.

Согласно примечанию табл.13.2 получаем центральную частоту и ширину полосы режекции аналогового фильтра по уровню $-1{,}5$ дБ: $f_0 = 20{,}98$ кГц; $\Delta f = 2$ кГц (им соответствуют круговые частоты $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1{,}318 \cdot 10^5$ рад/с и $\Delta\omega = 2\pi\Delta f = 1{,}257 \cdot 10^4$ рад/с).

Для эллиптического ФНЧ-прототипа при $n = 4$ $(r = 2)$ по табл.13.1 находим $C = 1$; $F = 0$; $Q = 1$. Коэффициенты A_{0k} $\left(k = \overline{1,\ 2}\right)$ возьмём из примера 13.4.

Используя коэффициенты $K_0 = 8{,}375 \cdot 10^{-3}$, F, Q, C, A_{0k}, B_{1k}, B_{0k} $\left(k = \overline{1,\ 2}\right)$ передаточной функции ФНЧ-прототипа в форме (13.158), полученные в примере 13.4, по формулам табл.13.5 вычислим коэффициенты передаточной функции аналогового режекторного фильтра в форме (13.171):

$$Q_2 = 0;\quad Q_1 = 0;\quad Q_0 = 8{,}375 \cdot 10^{-3};\quad F_2 = 0;\quad F_1 = 0;\quad F_0 = 1;$$

$$E_{41} = 38{,}406;\quad E_{21} = 1{,}335 \cdot 10^{12};\quad E_{01} = 1{,}159 \cdot 10^{22};$$

$$E_{42} = 2{,}616;\quad E_{22} = 9{,}105 \cdot 10^{10};\quad E_{02} = 7{,}893 \cdot 10^{20};$$

$$D_{31} = 2{,}482 \cdot 10^4;\quad D_{21} = 3{,}524 \cdot 10^{10};\quad D_{11} = 4{,}312 \cdot 10^{14};\quad D_{01} = 3{,}017 \cdot 10^{20};$$

$$D_{32} = 2{,}343 \cdot 10^3;\quad D_{22} = 3{,}49 \cdot 10^{10};\quad D_{12} = 4{,}07 \cdot 10^{13};\quad D_{02} = 3{,}017 \cdot 10^{20}.$$

На рис.13.17 представлена амплитудно-частотная характеристика спроектированного аналогового режекторного фильтра 8-го порядка $(N = 8)$, рассчитанная по формуле (13.173).

Граничные частоты аналогового режекторного фильтра после денормирования частоты: $f_{п1} = 20$ кГц, $f_{п2} = 22$ кГц, $f_{з1} = 20{,}3320103$ кГц, $f_{з2} = 21{,}653436$ кГц. Максимальное затухание в полосе пропускания $a_{п\,дБ} = 1{,}5$ дБ, а минимальное затухание в полосе задерживания $a_{з\,дБ} = 41{,}541$ дБ. Заданное затухание в полосе задерживания $a_{з\,дБ} = 40$ дБ получается на граничных частотах $f_{з1} = 20{,}314522$ кГц и $f_{з2} = 21{,}65938$ кГц, что совпадает с параметрами затухания на граничных частотах ФНЧ-прототипа (см. пример 13.4). При этом ширина полосы режекции по заданному уровню -40 дБ равна $\Delta f_з = 1{,}344868$ кГц.

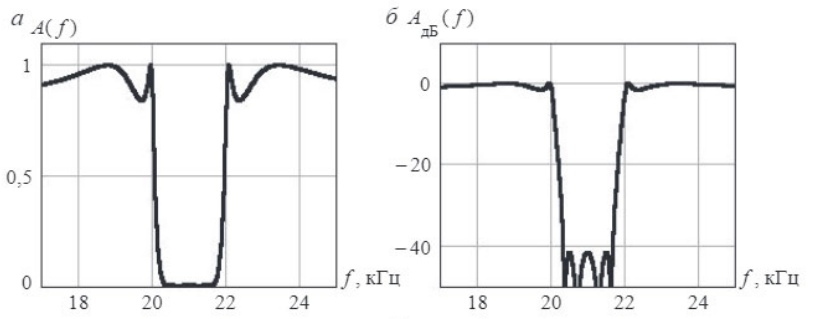


Рис.2.17. АЧХ аналогового режекторного фильтра ($N = 8$), спроектированного в примере 2.9: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Рассмотренный подход к денормированию частоты аналогового нормированного ФНЧ-прототипа с передаточной функцией (13.158) приводит к аналоговым полосовым и режекторным фильтрам, передаточные функции которых могут быть представлены в виде произведения передаточных функций блоков второго и четвёртого порядков [см. (13.171)].

Поскольку наиболее часто применяется реализация фильтров в виде каскадного соединения блоков первого и второго порядков, возникает необходимость определения полюсов и нулей передаточных функций блоков четвёртого порядка с целью разбиения каждого из них на два блока второго порядка. Для того чтобы избежать процедуры нахождения корней полиномов четвёртого порядка, используем следующий приём.

◆ **Полосовой и режекторный фильтры (ПФ и РФ), второй способ**

Передаточную функцию аналогового нормированного ФНЧ-прототипа (13.158) представим в нуль-полюсной форме [см. также (13.16), (13.20), (13.87) и (13.91)]:

$$\mathsf{H}(s) = \begin{cases} \dfrac{K_0}{F\,s + Q} \displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{(s - s_{pk})(s - s_{pk}^*)} & \text{для фильтра, не имеющего нулей;} \\ \dfrac{K_0}{F\,s + Q} \displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{(s - s_{0k})(s - s_{0k}^*)}{(s - s_{pk})(s - s_{pk}^*)} & \text{для фильтра, имеющего нули,} \end{cases} \tag{13.175}$$

где K_0 — масштабный множитель (коэффициент усиления); коэффициенты F и Q для различных ФНЧ-прототипов определяются по табл.13.1; s_{pk} и s_{pk}^* — комплексно-сопряжённые полюсы, а s_{0k} и s_{0k}^* — комплексно-сопряжённые нули $\left(k = \overline{1,\ r}\right)$ передаточной функции $\mathsf{H}(s)$.

Комплексно-сопряжённые полюсы и нули (конечные нули имеются лишь при $C=1$) можно найти по коэффициентам передаточной функции $\mathsf{H}(s)$, заданной в форме (13.158):

$$\begin{cases} s_{pk} = -\dfrac{B_{1k}}{2} + j\sqrt{B_{0k} - \left(\dfrac{B_{1k}}{2}\right)^2}; \\ s^*_{pk} = -\dfrac{B_{1k}}{2} - j\sqrt{B_{0k} - \left(\dfrac{B_{1k}}{2}\right)^2}, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}; \tag{13.176}$$

$$\begin{cases} s_{0k} = j\sqrt{A_{0k}}; \\ s^*_{0k} = -j\sqrt{A_{0k}}, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}. \tag{13.177}$$

Комплексно-сопряжённые полюсы и нули (если они имеются) передаточных функций нормированных ФНЧ-прототипов Баттерворта, Чебышева и Бесселя определяются непосредственно в процессе синтеза (см. § 13.2, 13.3 и 13.5), а в случае эллиптических фильтров их следует находить по формулам (13.176) и (13.177).

Целесообразно рассмотреть раздельно случаи наличия и отсутствия конечных нулей передаточной функции аналогового нормированного ФНЧ-прототипа $\mathsf{H}(s)$. Подробно исследуем более сложный случай, когда фильтр имеет конечные нули передаточной функции.

Введём обозначения

$$\begin{cases} \sigma_k = -\dfrac{B_{1k}}{2}; \quad \Omega_k = \sqrt{B_{0k} - \left(\dfrac{B_{1k}}{2}\right)^2}; \\ \lambda_k = \sqrt{A_{0k}}, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}, \tag{13.178}$$

тогда

$$\begin{cases} s_{pk} = \sigma_k + j\Omega_k; \quad s^*_{pk} = \sigma_k - j\Omega_k; \\ s_{0k} = j\lambda_k; \qquad\qquad s^*_{0k} = -j\lambda_k, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}. \tag{13.179}$$

♦ Для *полосового фильтра* подстановка $s = \dfrac{p^2 + \omega_0^2}{\Delta\omega\, p}$ (см. табл.13.3) в передаточную функцию (13.175) при наличии конечных нулей приводит к следующей формуле:

$$\mathrm{H}(p) = \frac{K_0}{F\dfrac{p^2+\omega_0^2}{\Delta\omega\, p} + Q} \prod_{k=1}^{r} \frac{\left(\dfrac{p^2+\omega_0^2}{\Delta\omega\, p} - j\lambda_k\right)\left(\dfrac{p^2+\omega_0^2}{\Delta\omega\, p} + j\lambda_k\right)}{\left(\dfrac{p^2+\omega_0^2}{\Delta\omega\, p} - \sigma_k - j\Omega_k\right)\left(\dfrac{p^2+\omega_0^2}{\Delta\omega\, p} - \sigma_k + j\Omega_k\right)} =$$

$$= \frac{K_0 \Delta\omega\, p}{Fp^2 + Q\Delta\omega\, p + F\omega_0^2} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{r} \frac{\left(p^2 - j\lambda_k \Delta\omega\, p + \omega_0^2 \right)\left(p^2 + j\lambda_k \Delta\omega\, p + \omega_0^2 \right)}{\left[p^2 - (\sigma_k + j\Omega_k)\Delta\omega\, p + \omega_0^2 \right]\left[p^2 - (\sigma_k - j\Omega_k)\Delta\omega\, p + \omega_0^2 \right]}. \quad (13.180)$$

Найдём полюсы и нули функции, стоящей под знаком произведения в выражении (13.180):

$$\begin{cases} p_{pk}^{(1,2)} = \dfrac{(\sigma_k + j\Omega_k)\Delta\omega}{2} \pm \sqrt{\left[\dfrac{(\sigma_k + j\Omega_k)\Delta\omega}{2} \right]^2 - \omega_0^2}\,; \\ p_{pk}^{(3,4)} = \dfrac{(\sigma_k - j\Omega_k)\Delta\omega}{2} \pm \sqrt{\left[\dfrac{(\sigma_k - j\Omega_k)\Delta\omega}{2} \right]^2 - \omega_0^2}\,, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}; \quad (13.181)$$

$$\begin{cases} p_{0k}^{(1,2)} = j\left[\dfrac{\lambda_k \Delta\omega}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \left(\dfrac{\lambda_k \Delta\omega}{2} \right)^2} \right]; \\ p_{0k}^{(3,4)} = -j\left[\dfrac{\lambda_k \Delta\omega}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \left(\dfrac{\lambda_k \Delta\omega}{2} \right)^2} \right], \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}. \quad (13.182)$$

Введём обозначения

$$\begin{cases} \alpha_k = \dfrac{(\sigma_k + j\Omega_k)\Delta\omega}{2}; \qquad \beta_k = \dfrac{(\sigma_k - j\Omega_k)\Delta\omega}{2}; \\ \gamma_k = \sqrt{\left[\dfrac{(\sigma_k + j\Omega_k)\Delta\omega}{2} \right]^2 - \omega_0^2}\,; \quad \eta_k = \sqrt{\left[\dfrac{(\sigma_k - j\Omega_k)\Delta\omega}{2} \right]^2 - \omega_0^2}\,, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}; \quad (13.183)$$

$$\mu_k = \frac{\lambda_k \Delta\omega}{2}; \quad \nu_k = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{\lambda_k \Delta\omega}{2} \right)^2}, \quad k = \overline{1,\ r}. \quad (13.184)$$

Тогда выражения для полюсов (13.181) и нулей (13.182) функции под знаком произведения в (13.180) можно записать в компактной форме:

$$\begin{cases} p_{pk}^{(1,2)} = \alpha_k \pm \gamma_k; \\ p_{pk}^{(3,4)} = \beta_k \pm \eta_k, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}; \quad (13.185)$$

$$\begin{cases} p_{0k}^{(1,2)} = j(\mu_k \pm \nu_k); \\ p_{0k}^{(3,4)} = -j(\mu_k \pm \nu_k), \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}. \quad (13.186)$$

Аналитически исследовать полюсы (13.185) и нули (13.186) на комплексную сопряжённость довольно сложно, поэтому воспользуемся численными методами. Численные расчёты, проведённые с использованием системы Mathcad, показали, что комплексно-сопряжёнными являются полюсы $p_{pk}^{(1)}$ и $p_{pk}^{(3)}$, $p_{pk}^{(2)}$ и $p_{pk}^{(4)}$, а также нули $p_{0k}^{(1)}$ и $p_{0k}^{(3)}$, $p_{0k}^{(2)}$ и $p_{0k}^{(4)}$ $\left(k=\overline{1,\ r}\right)$ передаточной функции (2.175) фильтра, т.е. $p_{pk}^{(3)}=p_{pk}^{(1)*}$; $p_{pk}^{(4)}=p_{pk}^{(2)*}$; $p_{0k}^{(3)}=p_{0k}^{(1)*}$; $p_{0k}^{(4)}=p_{0k}^{(2)*}$ $\left(k=\overline{1,\ r}\right)$. Для получения блоков второго порядка, передаточные функции которых имеют вещественные коэффициенты, комплексно-сопряжённые полюсы (и нули, если они имеются) следует сгруппировать попарно. Тогда

$$\mathrm{H}(p)=\begin{cases}\dfrac{K_0\Delta\omega p}{Fp^2+Q\Delta\omega p+F\omega_0^2}\displaystyle\prod_{k=1}^{r}\frac{\Delta\omega p}{\left(p-p_{pk}^{(1)}\right)\left(p-p_{pk}^{(3)}\right)}\frac{\Delta\omega p}{\left(p-p_{pk}^{(2)}\right)\left(p-p_{pk}^{(4)}\right)};\\ \dfrac{K_0\Delta\omega p}{Fp^2+Q\Delta\omega p+F\omega_0^2}\displaystyle\prod_{k=1}^{r}\frac{\left(p-p_{0k}^{(1)}\right)\left(p-p_{0k}^{(3)}\right)}{\left(p-p_{pk}^{(1)}\right)\left(p-p_{pk}^{(3)}\right)}\frac{\left(p-p_{0k}^{(2)}\right)\left(p-p_{0k}^{(4)}\right)}{\left(p-p_{pk}^{(2)}\right)\left(p-p_{pk}^{(4)}\right)},\end{cases}\tag{13.187}$$

где первое выражение в правой части соответствует случаю отсутствия, а второе — случаю наличия нулей передаточной функции ФНЧ-прототипа.

Подстановкой (13.185) и (13.186) в (13.187) после несложных преобразований получим выражение для передаточной функции $\mathrm{H}(p)$ аналогового полосового фильтра в следующем виде:

$$\mathrm{H}(p)=\frac{\mathrm{Q}_2p^2+\mathrm{Q}_1p+\mathrm{Q}_0}{\mathrm{F}_2p^2+\mathrm{F}_1p+\mathrm{F}_0}\prod_{k=1}^{r}\frac{\mathrm{T}_{2k}p^2+\mathrm{T}_{1k}p+\mathrm{T}_{0k}}{p^2+\mathrm{G}_{1k}p+\mathrm{G}_{0k}}\frac{\overline{\mathrm{T}}_{2k}p^2+\overline{\mathrm{T}}_{1k}p+\overline{\mathrm{T}}_{0k}}{p^2+\overline{\mathrm{G}}_{1k}p+\overline{\mathrm{G}}_{0k}}.\tag{13.188}$$

Коэффициенты Q_2, Q_1, Q_0, F_2, F_1, F_0, T_{2k}, T_{1k}, T_{0k}, G_{1k}, G_{0k}, $\overline{\mathrm{T}}_{2k}$, $\overline{\mathrm{T}}_{1k}$, $\overline{\mathrm{T}}_{0k}$, $\overline{\mathrm{G}}_{1k}$, $\overline{\mathrm{G}}_{0k}$ $\left(k=\overline{1,\ r}\right)$ передаточной функции (13.188) полосового фильтра выражаются через коэффициенты K_0, F, Q, A_{0k}, B_{1k}, B_{0k} $\left(k=\overline{1,\ r}\right)$ передаточной функции ФНЧ-прототипа $\mathrm{H}(s)$ в форме (13.158) и параметры денормирования ω_0, $\Delta\omega$. Для удобства пользования эти коэффициенты сведены в табл.13.6.

Из передаточной функции (13.188) получим выражения для комплексной частотной характеристики $\mathrm{H}(j\omega)$, амплитудно-частотной $A(\omega)$ и фазочастотной $\varphi(\omega)$ характеристик:

$$\mathrm{H}(j\omega)=\frac{(j\omega)^2\mathrm{Q}_2+j\omega\,\mathrm{Q}_1+\mathrm{Q}_0}{(j\omega)^2\mathrm{F}_2+j\omega\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_0}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{r}\frac{(j\omega)^2\mathrm{T}_{2k}+j\omega\mathrm{T}_{1k}+\mathrm{T}_{0k}}{(j\omega)^2+j\omega\mathrm{G}_{1k}+\mathrm{G}_{0k}}\frac{(j\omega)^2\overline{\mathrm{T}}_{2k}+j\omega\overline{\mathrm{T}}_{1k}+\overline{\mathrm{T}}_{0k}}{(j\omega)^2+j\omega\overline{\mathrm{G}}_{1k}+\overline{\mathrm{G}}_{0k}};\tag{13.189}$$

Таблица 13.6

Коэффициенты в (13.188)	ФНЧ-прототип без нулей передаточной функции		ФНЧ-прототип с нулями передаточной функции	
	n нечётн.	n чётн.	n нечётн.	n чётн.
Q_2	0		0	
Q_1	$K_0\,\Delta\omega$	0	$K_0\,\Delta\omega$	0
Q_0	0	K_0	0	K_0
F_2	F		F	
F_1	$Q\,\Delta\omega$	0	$Q\,\Delta\omega$	0
F_0	ω_0^2	1	ω_0^2	1
T_{2k}	0		1	
T_{1k}	$\Delta\omega$		0	
T_{0k}	0		$(\mu_k+\nu_k)^2$	
G_{1k}	$-(\alpha_k+\gamma_k)-(\beta_k+\eta_k)$		$-(\alpha_k+\gamma_k)-(\beta_k+\eta_k)$	
G_{0k}	$(\alpha_k+\gamma_k)(\beta_k+\eta_k)$		$(\alpha_k+\gamma_k)(\beta_k+\eta_k)$	
$\overline{\mathrm{T}}_{2k}$	0		1	
$\overline{\mathrm{T}}_{1k}$	$\Delta\omega$		0	
$\overline{\mathrm{T}}_{0k}$	0		$(\mu_k-\nu_k)^2$	
$\overline{\mathrm{G}}_{1k}$	$-(\alpha_k-\gamma_k)-(\beta_k-\eta_k)$		$-(\alpha_k-\gamma_k)-(\beta_k-\eta_k)$	
$\overline{\mathrm{G}}_{0k}$	$(\alpha_k-\gamma_k)(\beta_k-\eta_k)$		$(\alpha_k-\gamma_k)(\beta_k-\eta_k)$	
Здесь n — порядок аналогового нормированного ФНЧ-прототипа; $k=\overline{1,\,r}$				

$$A(\omega)=\left|\,\mathrm{H}(j\omega)\right|=\frac{\sqrt{\left(\mathrm{Q}_0-\omega^2\mathrm{Q}_2\right)^2+\left(\omega\mathrm{Q}_1\right)^2}}{\sqrt{\left(\mathrm{F}_0-\omega^2\mathrm{F}_2\right)^2+\left(\omega\mathrm{F}_1\right)^2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{r}\frac{\sqrt{\left(\mathrm{T}_{0k}-\omega^2\mathrm{T}_{2k}\right)^2+\left(\omega\mathrm{T}_{1k}\right)^2}}{\sqrt{\left(\mathrm{G}_{0k}-\omega^2\right)^2+\left(\omega\mathrm{G}_{1k}\right)^2}}\,\frac{\sqrt{\left(\overline{\mathrm{T}}_{0k}-\omega^2\overline{\mathrm{T}}_{2k}\right)^2+\left(\omega\overline{\mathrm{T}}_{1k}\right)^2}}{\sqrt{\left(\overline{\mathrm{G}}_{0k}-\omega^2\right)^2+\left(\omega\overline{\mathrm{G}}_{1k}\right)^2}};\qquad(13.190)$$

$$\varphi(\omega)=\operatorname{Arg}[\,\mathrm{H}(j\omega)\,]=\operatorname{Arctg}\frac{\omega \mathrm{Q}_1}{\mathrm{Q}_0-\omega^2\mathrm{Q}_2}-\operatorname{Arctg}\frac{\omega \mathrm{F}_1}{\mathrm{F}_0-\omega^2\mathrm{F}_2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\operatorname{Arctg}\frac{\omega \mathrm{T}_{1k}}{\mathrm{T}_{0k}-\omega^2\mathrm{T}_{2k}}-\sum_{k=1}^{r}\operatorname{Arctg}\frac{\omega \mathrm{G}_{1k}}{\mathrm{G}_{0k}-\omega^2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\operatorname{Arctg}\frac{\omega \overline{\mathrm{T}}_{1k}}{\overline{\mathrm{T}}_{0k}-\omega^2\overline{\mathrm{T}}_{2k}}-\sum_{k=1}^{r}\operatorname{Arctg}\frac{\omega \overline{\mathrm{G}}_{1k}}{\overline{\mathrm{G}}_{0k}-\omega^2}. \qquad (13.191)$$

Пример 13.10. Провести денормирование частоты аналогового ФНЧ-прототипа, спроектированного в примере 13.3, при следующих исходных данных:
— тип избирательного фильтра после денормирования — полосовой;
— граничные частоты полосы пропускания: $f_{\text{п}1}=20$ кГц; $f_{\text{п}2}=22$ кГц;
— передаточную функцию представить в форме (13.188).

Для проектирования фильтра составлена программа в системе компьютерной математики Mathcad.

Согласно примечанию табл.13.2 получаем центральную частоту и полосу пропускания фильтра: $f_0=20{,}98$ кГц; $\Delta f=2$ кГц (соответствующие им круговые частоты $\omega_0=2\pi f_0=1{,}318\cdot10^5$ рад/с и $\Delta\omega=2\pi\Delta f=1{,}257\cdot10^4$ рад/с).

Для ФНЧ-прототипа Чебышева типа 2 при $n=6$ $(r=3)$ по табл.13.1 находим $C=1$; $F=0$; $Q=1$. Коэффициенты A_{0k} $\left(k=\overline{1,\,3}\right)$ возьмём из примера 13.3.

По табл.13.6 определим коэффициенты блока передаточной функции (13.188), не входящего под символ произведения (см. пример 13.8):

$$\mathrm{Q}_2=0;\quad \mathrm{Q}_1=0;\quad \mathrm{Q}_0=0{,}01;\qquad \mathrm{F}_2=0;\quad \mathrm{F}_1=0;\quad \mathrm{F}_0=1.$$

Нули и полюсы передаточной функции аналогового нормированного ФНЧ-прототипа найдены в примере 13.3:

$$s_{01}=j1{,}553;\qquad s_{02}=j2{,}121;\qquad s_{03}=j5{,}796;$$

$$s_{04}=-j5{,}796;\qquad s_{05}=-j2{,}121;\qquad s_{06}=-j1{,}553;$$

$$s_{p1}=-0{,}201+j1{,}059;\qquad s_{p2}=-0{,}707+j0{,}998;\qquad s_{p3}=-1{,}355+j0{,}513;$$

$$s_{p4}=-1{,}355-j0{,}513;\qquad s_{p5}=-0{,}707-j0{,}998;\qquad s_{p6}=-0{,}201-j1{,}059.$$

По ним определяем параметры σ_k, Ω_k, λ_k $\left(k=\overline{1,\,3}\right)$ [см. (13.179)]:

$$\sigma_1=-0{,}201;\quad \Omega_1=1{,}059;\quad \sigma_2=-0{,}707;\quad \Omega_2=0{,}998;\quad \sigma_3=-1{,}355;\quad \Omega_3=0{,}513;$$

$$\lambda_1=1{,}553;\quad \lambda_2=2{,}121;\quad \lambda_3=5{,}796.$$

Согласно обозначениям (13.183) и (13.184) найдём промежуточные массивы α_k, β_k, γ_k, η_k, μ_k, ν_k $\left(k=\overline{1,\,3}\right)$:

$$\alpha_1=-1{,}262\cdot10^3+j6{,}652\cdot10^3;\qquad \alpha_2=-4{,}439\cdot10^3+j6{,}271\cdot10^3;$$

$$\alpha_3=-8{,}514\cdot10^3+j3{,}223\cdot10^3;\qquad \beta_1=-1{,}262-j6{,}652\cdot10^3;$$

$$\beta_2=-4{,}439\cdot10^3-j6{,}271\cdot10^3;\qquad \beta_3=-8{,}514\cdot10^3-j3{,}223\cdot10^3;$$

$$\gamma_1=63{,}607-j1{,}32\cdot10^5;\quad \gamma_2=211{,}102-j1{,}319\cdot10^5;\quad \gamma_3=208{,}563-j1{,}316\cdot10^5;$$

$$\eta_1=63{,}607+j1{,}32\cdot10^5;\quad \eta_2=211{,}102+j1{,}319\cdot10^5;\quad \eta_3=208{,}563+j1{,}316\cdot10^5;$$

$$\mu_1 = 9{,}757\cdot 10^3; \qquad \mu_2 = 1{,}333\cdot 10^4; \qquad \mu_3 = 3{,}641\cdot 10^4;$$
$$\nu_1 = 1{,}322\cdot 10^5; \qquad \nu_2 = 1{,}325\cdot 10^5; \qquad \nu_3 = 1{,}367\cdot 10^5.$$

По формулам табл.13.6 вычисляем коэффициенты передаточной функции аналогового полосового фильтра в форме (13.188):

$$\mathrm{T}_{2k} = 1;\ \mathrm{T}_{1k} = 0;\ \overline{\mathrm{T}}_{2k} = 1;\ \overline{\mathrm{T}}_{1k} = 0 \quad \left(k = \overline{1,\ 3}\right);$$
$$\mathrm{T}_{01} = 2{,}014\cdot 10^{10}; \qquad \mathrm{T}_{02} = 2{,}126\cdot 10^{10}; \qquad \mathrm{T}_{03} = 2{,}998\cdot 10^{10};$$
$$\overline{\mathrm{T}}_{01} = 1{,}498\cdot 10^{10}; \qquad \overline{\mathrm{T}}_{02} = 1{,}419\cdot 10^{10}; \qquad \overline{\mathrm{T}}_{03} = 1{,}006\cdot 10^{10};$$
$$\mathrm{G}_{11} = 2{,}396\cdot 10^3; \quad \mathrm{G}_{01} = 1{,}57\cdot 10^{10}; \qquad \mathrm{G}_{12} = 8{,}457\cdot 10^3; \quad \mathrm{G}_{02} = 1{,}579\cdot 10^{10};$$
$$\mathrm{G}_{13} = 1{,}661\cdot 10^4; \quad \mathrm{G}_{03} = 1{,}654\cdot 10^{10}; \qquad \overline{\mathrm{G}}_{11} = 2{,}651\cdot 10^3; \quad \overline{\mathrm{G}}_{01} = 1{,}921\cdot 10^{10};$$
$$\overline{\mathrm{G}}_{12} = 9{,}301\cdot 10^3; \quad \overline{\mathrm{G}}_{02} = 1{,}91\cdot 10^{10}; \qquad \overline{\mathrm{G}}_{13} = 1{,}745\cdot 10^4; \quad \overline{\mathrm{G}}_{03} = 1{,}824\cdot 10^{10}.$$

АЧХ аналогового полосового фильтра 12-го порядка [см. (13.164) и (13.165)], построенная по формуле (13.190), полностью совпадает с АЧХ, построенной по формуле (13.173), которая приведена на рис.13.16 (см. пример 13.8).

♦ Для *режекторного фильтра* подстановка $s = \dfrac{\Delta\omega\, p}{p^2 + \omega_0^2}$ (см. табл.13.3) в передаточную функцию (13.175) при наличии конечных нулей приводит к формуле

$$\mathrm{H}(p) = \frac{K_0}{F\dfrac{\Delta\omega\, p}{p^2+\omega_0^2} + Q} \prod_{k=1}^{r} \frac{\left(\dfrac{\Delta\omega\, p}{p^2+\omega_0^2} - j\lambda_k\right)\left(\dfrac{\Delta\omega\, p}{p^2+\omega_0^2} + j\lambda_k\right)}{\left(\dfrac{\Delta\omega\, p}{p^2+\omega_0^2} - \sigma_k - j\Omega_k\right)\left(\dfrac{\Delta\omega\, p}{p^2+\omega_0^2} - \sigma_k + j\Omega_k\right)} =$$

$$= \frac{K_0 p^2 + K_0\omega_0^2}{Q\,p^2 + F\,\Delta\omega\, p + Q\omega_0^2} \prod_{k=1}^{r} \frac{-j\lambda_k p^2 + \Delta\omega\, p - j\lambda_k\omega_0^2}{-(\sigma_k + j\Omega_k)\,p^2 + \Delta\omega\, p - (\sigma_k + j\Omega_k)\,\omega_0^2} \times$$

$$\times \frac{j\lambda_k p^2 + \Delta\omega\, p + j\lambda_k\omega_0^2}{-(\sigma_k - j\Omega_k)\,p^2 + \Delta\omega\, p - (\sigma_k - j\Omega_k)\,\omega_0^2} = \frac{K_0 p^2 + K_0\omega_0^2}{Q\,p^2 + F\,\Delta\omega\, p + Q\omega_0^2} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{r} \frac{\mathrm{K}_k^2\left(p^2 - \dfrac{\Delta\omega}{j\lambda_k}\, p + \omega_0^2\right)\left(p^2 + \dfrac{\Delta\omega}{j\lambda_k}\, p + \omega_0^2\right)}{\left(p^2 - \dfrac{\Delta\omega}{\sigma_k + j\Omega_k}\, p + \omega_0^2\right)\left(p^2 - \dfrac{\Delta\omega}{\sigma_k - j\Omega_k}\, p + \omega_0^2\right)}, \qquad (13.192)$$

где

$$\mathrm{K}_k = \sqrt{\frac{j\lambda_k}{\sigma_k + j\Omega_k}\,\frac{-j\lambda_k}{\sigma_k - j\Omega_k}} = \sqrt{\frac{\lambda_k^2}{\sigma_k^2 + \Omega_k^2}}, \quad k = \overline{1,\ r}, \qquad (13.193)$$

— коэффициенты передачи каждого из «сопряжённых» блоков второго порядка.

Найдём полюсы и нули функции под знаком произведения в (13.192):

$$\begin{cases} p_{pk}^{(1,2)} = \dfrac{\Delta\omega}{2(\sigma_k + j\Omega_k)} \pm \sqrt{\left[\dfrac{\Delta\omega}{2(\sigma_k + j\Omega_k)}\right]^2 - \omega_0^2}\,; \\ p_{pk}^{(3,4)} = \dfrac{\Delta\omega}{2(\sigma_k - j\Omega_k)} \pm \sqrt{\left[\dfrac{\Delta\omega}{2(\sigma_k - j\Omega_k)}\right]^2 - \omega_0^2}\,, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}\,; \tag{13.194}$$

$$\begin{cases} p_{0k}^{(1,2)} = -j\left[\dfrac{\Delta\omega}{2\lambda_k} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \left(\dfrac{\Delta\omega}{2\lambda_k}\right)^2}\right]; \\ p_{0k}^{(3,4)} = j\left[\dfrac{\Delta\omega}{2\lambda_k} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \left(\dfrac{\Delta\omega}{2\lambda_k}\right)^2}\right], \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}\,. \tag{13.195}$$

Введём обозначения

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_k = \dfrac{\Delta\omega}{2(\sigma_k + j\Omega_k)}; \qquad \tilde{\beta}_k = \dfrac{\Delta\omega}{2(\sigma_k - j\Omega_k)}; \\ \tilde{\gamma}_k = \sqrt{\left[\dfrac{\Delta\omega}{2(\sigma_k + j\Omega_k)}\right]^2 - \omega_0^2}\,; \quad \tilde{\eta}_k = \sqrt{\left[\dfrac{\Delta\omega}{2(\sigma_k - j\Omega_k)}\right]^2 - \omega_0^2}\,, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}\,; \tag{13.196}$$

$$\tilde{\mu}_k = \frac{\Delta\omega}{2\lambda_k}; \quad \tilde{\nu}_k = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{2\lambda_k}\right)^2}, \quad k = \overline{1,\ r}\,. \tag{13.197}$$

Тогда выражения для полюсов (13.194) и нулей (13.195) функции под знаком произведения в (13.192) можно записать в компактной форме:

$$\begin{cases} p_{pk}^{(1,2)} = \tilde{\alpha}_k \pm \tilde{\gamma}_k; \\ p_{pk}^{(3,4)} = \tilde{\beta}_k \pm \tilde{\eta}_k, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}\,; \tag{13.198}$$

$$\begin{cases} p_{0k}^{(1,2)} = -j(\tilde{\mu}_k \pm \tilde{\nu}_k); \\ p_{0k}^{(3,4)} = j(\tilde{\mu}_k \pm \tilde{\nu}_k), \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}\,. \tag{13.199}$$

Аналитически исследовать полюсы (13.198) и нули (13.199) на комплексную сопряжённость довольно сложно, поэтому воспользуемся численными методами. Численные расчёты показали, что комплексно-сопряжёнными являются полюсы $p_{pk}^{(1)}$ и $p_{pk}^{(3)}$, $p_{pk}^{(2)}$ и $p_{pk}^{(4)}$, а также нули $p_{0k}^{(1)}$ и $p_{0k}^{(3)}$, $p_{0k}^{(2)}$ и $p_{0k}^{(4)}$ $\left(k = \overline{1,\ r}\right)$, т.е. $p_{pk}^{(3)} = p_{pk}^{(1)*}$; $p_{pk}^{(4)} = p_{pk}^{(2)*}$; $p_{0k}^{(3)} = p_{0k}^{(1)*}$; $p_{0k}^{(4)} = p_{0k}^{(2)*}$ $\left(k = \overline{1,\ r}\right)$. Для получения блоков второго порядка, передаточные функции которых имеют вещественные

коэффициенты, комплексно-сопряжённые полюсы (и нули, если они имеются) следует сгруппировать попарно. Тогда

$$\mathrm{H}(p)=\begin{cases}\dfrac{K_0\Delta\omega p}{Fp^2+Q\Delta\omega p+F\omega_0^2}\displaystyle\prod_{k=1}^{r}\frac{\Gamma_k\left(p^2+\omega_0^2\right)}{\left(p-p_{pk}^{(1)}\right)\left(p-p_{pk}^{(3)}\right)}\frac{\Gamma_k\left(p^2+\omega_0^2\right)}{\left(p-p_{pk}^{(2)}\right)\left(p-p_{pk}^{(4)}\right)}; \\ \dfrac{K_0\Delta\omega p}{Fp^2+Q\Delta\omega p+F\omega_0^2}\displaystyle\prod_{k=1}^{r}\frac{\mathrm{K}_k\left(p-p_{0k}^{(1)}\right)\left(p-p_{0k}^{(3)}\right)}{\left(p-p_{pk}^{(1)}\right)\left(p-p_{pk}^{(3)}\right)}\frac{\mathrm{K}_k\left(p-p_{0k}^{(2)}\right)\left(p-p_{0k}^{(4)}\right)}{\left(p-p_{pk}^{(2)}\right)\left(p-p_{pk}^{(4)}\right)},\end{cases} \tag{13.200}$$

где первое выражение в правой части соответствует случаю отсутствия, а второе — случаю наличия нулей передаточной функции ФНЧ-прототипа;

$$\Gamma_k=\frac{1}{\sqrt{\sigma_k^2+\Omega_k^2}},\quad k=\overline{1,\ r}. \tag{13.201}$$

Подстановкой (13.198) и (13.199) в (13.200) после несложных преобразований получим выражение для передаточной функции $\mathrm{H}(p)$ аналогового режекторного фильтра в форме (13.188).

Коэффициенты $\mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_0, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_0, \mathrm{T}_{2k}, \mathrm{T}_{1k}, \mathrm{T}_{0k}, \mathrm{G}_{1k}, \mathrm{G}_{0k}, \overline{\mathrm{T}}_{2k}, \overline{\mathrm{T}}_{1k}, \overline{\mathrm{T}}_{0k}, \overline{\mathrm{G}}_{1k}, \overline{\mathrm{G}}_{0k}\ \left(k=\overline{1,\ r}\right)$ передаточной функции (13.188) аналогового режекторного фильтра выражаются через коэффициенты $K_0, F, Q, A_{0k}, B_{1k}, B_{0k}\ \left(k=\overline{1,\ r}\right)$ передаточной функции ФНЧ-прототипа $\mathrm{H}(s)$ в форме (13.158) и параметры денормирования ω_0, $\Delta\omega$. Для удобства пользования эти коэффициенты сведены в табл.13.7.

Таблица 13.7

Коэффициенты в (13.188)	ФНЧ-прототип без нулей передаточной функции		ФНЧ-прототип с нулями передаточной функции	
1	**2**		**3**	
	n нечётн.	n чётн.	n нечётн.	n чётн.
Q_2	K_0	0	K_0	0
Q_1	0		0	
Q_0	$K_0\,\omega_0^2$	K_0	$K_0\,\omega_0^2$	K_0
F_2	Q	0	Q	0
F_1	$F\Delta\omega$		$F\Delta\omega$	
F_0	$Q\omega_0^2$	1	$Q\omega_0^2$	1

Окончание табл.13.7

1	2	3
T_{2k}	Γ_k	K_k
T_{1k}	0	0
T_{0k}	$\Gamma_k\omega_0^2$	$K_k(\tilde{\mu}_k+\tilde{\nu}_k)^2$
G_{1k}	$-(\tilde{\alpha}_k+\tilde{\gamma}_k)-(\tilde{\beta}_k+\tilde{\eta}_k)$	$-(\tilde{\alpha}_k+\tilde{\gamma}_k)-(\tilde{\beta}_k+\tilde{\eta}_k)$
G_{0k}	$(\tilde{\alpha}_k+\tilde{\gamma}_k)(\tilde{\beta}_k+\tilde{\eta}_k)$	$(\tilde{\alpha}_k+\tilde{\gamma}_k)(\tilde{\beta}_k+\tilde{\eta}_k)$
$\overline{T}_{2k}$	Γ_k	K_k
$\overline{T}_{1k}$	0	0
$\overline{T}_{0k}$	$\Gamma_k\omega_0^2$	$K_k(\tilde{\mu}_k-\tilde{\nu}_k)^2$
$\overline{G}_{1k}$	$-(\tilde{\alpha}_k-\tilde{\gamma}_k)-(\tilde{\beta}_k-\tilde{\eta}_k)$	$-(\tilde{\alpha}_k-\tilde{\gamma}_k)-(\tilde{\beta}_k-\tilde{\eta}_k)$
$\overline{G}_{0k}$	$(\tilde{\alpha}_k-\tilde{\gamma}_k)(\tilde{\beta}_k-\tilde{\eta}_k)$	$(\tilde{\alpha}_k-\tilde{\gamma}_k)(\tilde{\beta}_k-\tilde{\eta}_k)$
Здесь n — порядок аналогового нормированного ФНЧ-прототипа; $k=\overline{1,\ r}$		

Комплексная частотная характеристика $H(j\omega)$, АЧХ $A(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ аналогового режекторного фильтра с передаточной функцией (13.188) описываются формулами (13.189) — (13.191) соответственно.

Пример 13.11. Провести денормирование частоты аналогового ФНЧ-прототипа, спроектированного в примере 13.4, при следующих исходных данных:
— тип избирательного фильтра после денормирования — режекторный;
— граничные частоты полос пропускания: $f_{п1}=20$ кГц; $f_{п2}=22$ кГц;
— передаточную функцию представить в форме (13.188).

Для проектирования фильтра составлена программа в системе компьютерной математики Mathcad.

Согласно примечанию табл.13.2 получаем центральную частоту и ширину полосы режекции аналогового фильтра по уровню $-1{,}5$ дБ: $f_0=20{,}98$ кГц; $\Delta f=2$ кГц (им соответствуют круговые частоты $\omega_0=2\pi f_0=1{,}318\cdot10^5$ рад/с и $\Delta\omega=2\pi\Delta f=1{,}257\cdot10^4$ рад/с).

Для эллиптического ФНЧ-прототипа при $n=4$ по табл.13.1 находим $C=1$; $F=0$; $Q=1$, а также $K_0=8{,}375\cdot10^{-3}$; $r=2$ (см. пример 13.4).

По табл.13.7 определим коэффициенты блока передаточной функции (13.188), не входящего под символ произведения (см. пример 13.9):

$$Q_2=0;\quad Q_1=0;\quad Q_0=8{,}375\cdot10^{-3};\quad F_2=0;\quad F_1=0;\quad F_0=1.$$

Используя коэффициенты передаточной функции $H(s)$ в форме (13.91) эллиптического аналогового нормированного ФНЧ-прототипа, найденные в примере 13.4 ($A_{01}=12{,}099$; $A_{02}=2{,}536$; $B_{11}=0{,}622$; $B_{01}=0{,}315$; $B_{12}=0{,}181$; $B_{02}=0{,}969$), по формулам (13.176) и (13.177) получим нули и полюсы передаточной функции $H(s)$ в форме (13.158):

$$s_{p1}=-0{,}311+j\,0{,}467; \quad s_{p1}^{*}=-0{,}311-j\,0{,}467;$$

$$s_{p2}=-0{,}09+j\,0{,}98; \quad s_{p2}^{*}=-0{,}09-j\,0{,}98;$$

$$s_{01}=j\,3{,}478; \quad s_{01}^{*}=-j\,3{,}478; \quad s_{02}=j\,1{,}592; \quad s_{02}^{*}=-j\,1{,}592.$$

По ним определяем параметры σ_k, Ω_k, λ_k $\left(k=\overline{1,\,2}\right)$ [см. (13.179)]:

$$\sigma_1=-0{,}311; \quad \Omega_1=0{,}467; \quad \sigma_2=-0{,}09; \quad \Omega_2=0{,}98; \quad \lambda_1=3{,}478; \quad \lambda_2=1{,}592.$$

Согласно обозначениям (13.196) и (13.197) найдём промежуточные массивы $\hat{\alpha}_k$, $\hat{\beta}_k$, $\hat{\gamma}_k$, $\hat{\eta}_k$, $\hat{\mu}_k$, $\hat{\nu}_k$ $\left(k=\overline{1,\,2}\right)$:

$$\hat{\alpha}_1=-6{,}206\cdot10^{3}-j\,9{,}316\cdot10^{3}; \quad \hat{\alpha}_2=-585{,}695-j\,6{,}355\cdot10^{3};$$

$$\hat{\beta}_1=-6{,}206\cdot10^{3}+j\,9{,}316\cdot10^{3}; \quad \hat{\beta}_2=-585{,}695+j\,6{,}355\cdot10^{3};$$

$$\hat{\gamma}_1=438{,}096+j\,1{,}32\cdot10^{5}; \quad \hat{\gamma}_2=28{,}209+j\,1{,}319\cdot10^{5};$$

$$\hat{\eta}_1=438{,}096-j\,1{,}32\cdot10^{5}; \quad \hat{\eta}_2=28{,}209-j\,1{,}319\cdot10^{5};$$

$$\hat{\mu}_1=1{,}806\cdot10^{3}, \quad \hat{\mu}_2=3{,}946\cdot10^{3}; \quad \hat{\nu}_1=1{,}318\cdot10^{5}, \quad \hat{\nu}_2=1{,}319\cdot10^{5}.$$

В соответствии с (13.193) определяем коэффициенты передачи каждого из «сопряжённых» блоков второго порядка:

$$K_1=6{,}197; \quad K_2=1{,}617.$$

По формулам табл.13.7 вычисляем коэффициенты передаточной функции аналогового режекторного фильтра в форме (13.188):

$$T_{1k}=0;\ \overline{T}_{1k}=0\ \left(k=\overline{1,\,2}\right);$$

$$T_{21}=6{,}197; \quad T_{01}=1{,}106\cdot10^{11}; \quad T_{22}=1{,}617; \quad T_{02}=2{,}983\cdot10^{10};$$

$$\overline{T}_{21}=6{,}197; \quad \overline{T}_{01}=1{,}047\cdot10^{11}; \quad \overline{T}_{22}=1{,}617; \quad \overline{T}_{02}=2{,}646\cdot10^{10};$$

$$G_{11}=1{,}154\cdot10^{4}; \quad G_{01}=1{,}508\cdot10^{10}; \quad G_{12}=1{,}115\cdot10^{3}; \quad G_{02}=1{,}577\cdot10^{10};$$

$$\overline{G}_{11}=1{,}329\cdot10^{4}; \quad \overline{G}_{01}=2{,}001\cdot10^{10}; \quad \overline{G}_{12}=1{,}228\cdot10^{3}; \quad \overline{G}_{02}=1{,}913\cdot10^{10}.$$

АЧХ аналогового режекторного фильтра 8-го порядка [см. (13.164) и (13.165)], построенная по формуле (13.190), полностью совпадает с АЧХ, построенной по формуле (13.173), которая приведена на рис.13.17 (см. пример 13.9).

Рассмотренные примеры 13.8 — 13.11 подтвердили, что представление передаточных функций аналоговых полосовых и режекторных фильтров в формах (13.171) и (13.188) эквивалентно.

Полученные в настоящем параграфе результаты можно использовать как вспомогательные при проектировании рекурсивных ЦФ, так и самостоятельные при проектировании аналоговых избирательных фильтров. Далее в гл.14 будут рассмотрены вопросы проектирования аналоговых и цифровых фильтров с использованием системы компьютерной математики MATLAB.

13.8. Методы дискретизации аналоговых фильтров

Преобразование аналогового фильтра в эквивалентный ему цифровой • фильтр называется *дискретизацией*. С математической точки зрения дискретизация фильтра представляет собой отображение непрерывного пространства в дискретное, при котором сохраняется дробно-рациональный вид передаточной функции фильтра:

$$\mathrm{H}(p) \to H(z). \tag{13.202}$$

На практике операция дискретизации осуществляется путём замены аргумента $p = \eta(z)$ в передаточной функции аналогового фильтра:

$$H(z) = \mathrm{H}(p)\big|_{p=\eta(z)}. \tag{13.203}$$

Отображение $p \to z$ должно быть конформным •• и удовлетворять следующим требованиям [6]:

1) ось $j\omega$ комплексной P-плоскости должна отображаться в единичную окружность Z-плоскости (окружность единичного радиуса, для которой $|z| = 1$);
2) точки левой половины комплексной P-плоскости, для которых $\mathrm{Re}(p) < 0$, должны отображаться во внутреннюю часть круга единичного радиуса комплексной Z-плоскости ($|z| < 1$), а точки правой половины P-плоскости, для которых $\mathrm{Re}(p) > 0$, — во внешнюю часть круга единичного радиуса Z-плоскости ($|z| > 1$).

Схематически такое отображение показано на рис.13.18.

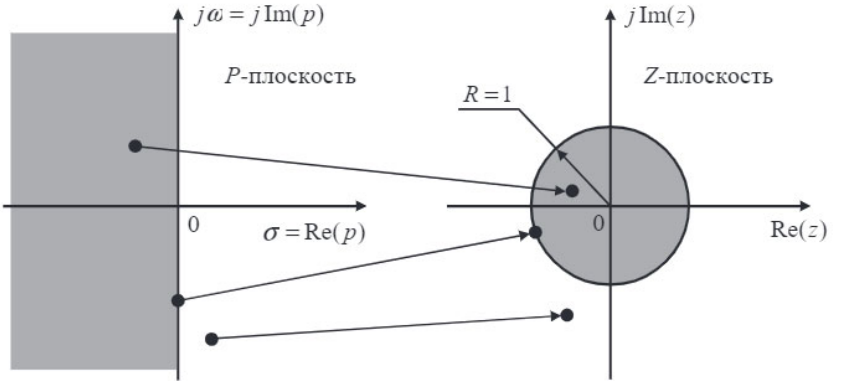


Рис.13.18. Требования к отображению непрерывного пространства в дискретное (комплексной P-плоскости в комплексную Z-плоскость)

• Строго говоря, при этом получается не цифровой, а дискретный фильтр.
•• См. сноску на с.443.

Благодаря свойству равномерности отображения (13.202) выполнение первого требования позволяет при переходе к дискретной системе сохранить селективные свойства аналоговой системы, а выполнение второго требования гарантирует, что при дискретизации устойчивой аналоговой системы получится устойчивая дискретная система. Выполнение обоих указанных требований к отображению $p \to z$ сохраняет устойчивость и селективные свойства отображаемой аналоговой системы.

Связь между комплексными переменными

$$z = e^{pT} \text{ или } p = \frac{1}{T}\ln(z) \tag{13.204}$$

непосредственно не может быть использована для построения передаточной функции дискретного фильтра $H(z)$ по передаточной функции аналогового фильтра $\mathrm{H}(p)$, так как при замене переменной $p = (1/T)\ln(z)$ при дробно-рациональной функции $\mathrm{H}(p)$ функция $H(z)$ не будет дробно-рациональной.

Некоторые преобразования $p = \eta(z)$ описаны в монографии [6]. Мы рассмотрим лишь те из них, которые наиболее часто используются при проектировании цифровых фильтров.

◆ **Билинейное преобразование**

Комплексную переменную p в (13.204) представим в виде ряда [58]:

$$p = \frac{1}{T}\ln(z) = \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2k-1} = \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^{2k-1} =$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{1}{3}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^{3} + \frac{1}{5}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^{5} + \ldots\right], \quad |z| > 0. \tag{13.205}$$

Первое приближение для p

$$p = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = 2f_{\text{д}}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{13.206}$$

называется *билинейным преобразованием*.

Поскольку билинейное преобразование представляет собой дробно-рациональную функцию, то при его использовании из дробно-рациональной передаточной функции аналогового фильтра $\mathrm{H}(p)$ получается дробно-рациональная передаточная функция дискретного фильтра $H(z)$.

Покажем, что билинейное преобразование (13.206) удовлетворяет обоим требованиям к отображению $p \to z$. С этой целью запишем выражение (13.206) в разрешённом относительно z виде

$$z = \frac{2f_{\text{д}} + p}{2f_{\text{д}} - p}. \tag{13.207}$$

Подставляя в (13.207) $p = j\omega$ и вычисляя модуль, получим $|z| = 1$. Таким образом, мнимая ось $j\omega$ P-плоскости при билинейном преобразовании отображается в единичную окружность Z-плоскости (см. рис.13.19).

Подставим в (13.207) $p = \sigma + j\omega$:

$$z = \frac{2f_д + \sigma + j\omega}{2f_д - \sigma - j\omega} \tag{13.208}$$

и найдём модуль переменной z:

$$|z| = \sqrt{\frac{(2f_д + \sigma)^2 + \omega^2}{(2f_д - \sigma)^2 + \omega^2}}. \tag{13.209}$$

Отсюда следует, что при $\sigma < 0$ $|z| < 1$, а при $\sigma > 0$ $|z| > 1$. Другими словами, левая полуплоскость P-плоскости при билинейном преобразовании отображается во внутреннюю часть круга единичного радиуса комплексной Z-плоскости, а правая полуплоскость P-плоскости — во внешнюю часть круга единичного радиуса Z-плоскости (см. рис.13.19). Таким образом, билинейное преобразование (13.206) удовлетворяет всем требованиям к отображениям при дискретизации аналогового фильтра.

В методе билинейного преобразования передаточная функция дискретного фильтра $H(z)$ согласно (13.203) получается из передаточной функции аналогового фильтра $\mathrm{H}(p)$ с помощью алгебраической подстановки (13.206):

$$H(z) = \mathrm{H}(p)\big|_{p = 2f_д \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}. \tag{13.210}$$

При этом порядки знаменателей функций $H(z)$ и $\mathrm{H}(p)$ одинаковы, а порядки числителей могут отличаться.

При билинейном преобразовании происходит деформация частотной шкалы. Это объясняется тем, что мнимая ось P-плоскости (длина оси бесконечная) отображается в единичную окружность Z-плоскости (длина окружности равна 2π). В результате связь между частотами аналогового $\omega_а$ и цифрового $\omega_ц$ фильтров оказывается существенно нелинейной [6].

Подставляя в (13.206) $p = j\omega_а$ и $z = \exp(j\omega_ц T)$, будем иметь

$$j\omega_а = \frac{2}{T} \frac{1 - \exp(-j\omega_ц T)}{1 + \exp(-j\omega_ц T)}. \tag{13.211}$$

Умножая числитель и знаменатель (13.211) на $\exp(j\omega_ц T/2)$, после несложных преобразований получим формулу связи «аналоговых» и «цифровых» частот:

$$\omega_а = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_ц T}{2}\right). \tag{13.212}$$

Зависимость (13.212) показана на рис.13.19. Для небольших значений частоты $\omega_{ц}$ отображение (13.212) почти линейно, однако для большей части частотной шкалы оно существенно нелинейно.

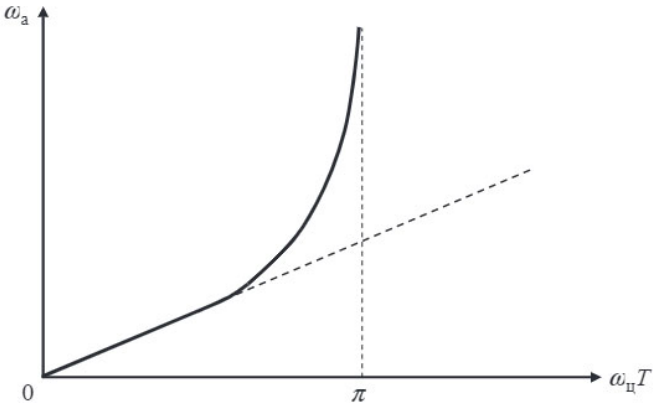


Рис.13.19. Деформация частотной шкалы при билинейном преобразовании

При проектировании избирательных ЦФ деформация частотной шкалы, описываемая соотношением (13.212), может быть скомпенсирована. Метод компенсации довольно прост. Он состоит в том, что при синтезе аналогового фильтра-прототипа его характерные частоты [•] пересчитывают в соответствии с выражением (13.212). В результате после билинейного преобразования получается дискретный фильтр, все характерные частоты которого совпадают с заданными.

При билинейном преобразовании отсутствует *эффект наложения*, свойственный рассматриваемому далее методу инвариантного преобразования импульсной характеристики.

Дискретизация по методу билинейного преобразования (13.210) позволяет получить из передаточной функции физически реализуемого устойчивого аналогового фильтра $H(p)$ передаточную функцию также физически реализуемого устойчивого дискретного фильтра [••] $H(z)$. Однако при этом ни импульсные, ни фазочастотные характеристики аналогового и дискретного фильтров не совпадают [6].

Применим билинейное преобразование (13.206) к передаточным функциям аналоговых фильтров [•••] (13.167), (13.171) и (13.188).

[•] Граничные частоты полос пропускания и задерживания (см. рис.13.13).

[••] Переход от дискретного фильтра к цифровому осуществляется далее квантованием коэффициентов передаточной функции (см. рис.12.1

[•••] См. формулу (13.210).

♦ Билинейное преобразование передаточной функции аналогового фильтра в форме (13.167) приводит к передаточной функции дискретного фильтра:

$$H(z)=\frac{a_0+a_1z^{-1}}{1+b_1z^{-1}}\prod_{k=1}^{r}\frac{a_{0k}+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}{1+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}. \qquad (13.213)$$

Коэффициенты передаточной функции (13.213), выраженные через коэффициенты передаточной функции (13.167), сведены в табл.13.8.

Таблица 13.8

Коэффициенты в (13.213)	Выражения для коэффициентов дискретного фильтра	
	n нечётн.	n чётн.
a_0	$[\mathrm{Q}_0+(2f_д)\mathrm{Q}_1]/[\mathrm{F}_0+(2f_д)\mathrm{F}_1]$	K_0
a_1	$[\mathrm{Q}_0-(2f_д)\mathrm{Q}_1]/[\mathrm{F}_0+(2f_д)\mathrm{F}_1]$	0
b_1	$[\mathrm{F}_0-(2f_д)\mathrm{F}_1]/[\mathrm{F}_0+(2f_д)\mathrm{F}_1]$	0
a_{0k}	$[\mathrm{E}_{0k}+(2f_д)^2\mathrm{E}_{2k}]/[\mathrm{D}_{0k}+(2f_д)\mathrm{D}_{1k}+(2f_д)^2]$	
a_{1k}	$2[\mathrm{E}_{0k}-(2f_д)^2\mathrm{E}_{2k}]/[\mathrm{D}_{0k}+(2f_д)\mathrm{D}_{1k}+(2f_д)^2]$	
a_{2k}	$[\mathrm{E}_{0k}+(2f_д)^2\mathrm{E}_{2k}]/[\mathrm{D}_{0k}+(2f_д)\mathrm{D}_{1k}+(2f_д)^2]$	
b_{1k}	$2[\mathrm{D}_{0k}-(2f_д)^2]/[\mathrm{D}_{0k}+(2f_д)\mathrm{D}_{1k}+(2f_д)^2]$	
b_{2k}	$[\mathrm{D}_{0k}-(2f_д)\mathrm{D}_{1k}+(2f_д)^2]/[\mathrm{D}_{0k}+(2f_д)\mathrm{D}_{1k}+(2f_д)^2]$	
Здесь n — порядок аналогового нормированного ФНЧ-прототипа; $k=\overline{1,\ r}$		

Подставляя в (13.213) $z=e^{j\omega T}$, получим комплексную частотную характеристику дискретного фильтра:

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=\frac{a_0+a_1e^{-j\omega T}}{1+b_1e^{-j\omega T}}\prod_{k=1}^{r}\frac{a_{0k}+a_{1k}e^{-j\omega T}+a_{2k}e^{-j2\omega T}}{1+b_{1k}e^{-j\omega T}+b_{2k}e^{-j2\omega T}}. \qquad (13.214)$$

Воспользовавшись формулой Эйлера $e^{-j\omega T}=\cos(\omega T)-j\sin(\omega T)$, найдём выражения для амплитудно-частотной $A(\omega T)$ и фазочастотной $\varphi(\omega T)$ характеристик дискретного фильтра с передаточной функцией (13.213):

$$A(\omega T)=\left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|=\sqrt{\frac{[a_0+a_1\cos(\omega T)]^2+[a_1\sin(\omega T)]^2}{[1+b_1\cos(\omega T)]^2+[b_1\sin(\omega T)]^2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{r}\sqrt{\frac{[\,a_{0k}+a_{1k}\cos(\omega T)+a_{2k}\cos(2\omega T)\,]^2+[\,a_{1k}\sin(\omega T)+a_{2k}\sin(2\omega T)\,]^2}{[\,1+b_{1k}\cos(\omega T)+b_{2k}\cos(2\omega T)\,]^2+[\,b_{1k}\sin(\omega T)+b_{2k}\sin(2\omega T)\,]^2}}; \tag{13.215}$$

$$\varphi(\omega T)=\operatorname{Arg}\left[H\left(e^{j\omega T}\right)\right]=-\operatorname{Arctg}\frac{a_1\sin(\omega T)}{a_0+a_1\cos(\omega T)}+\operatorname{Arctg}\frac{b_1\sin(\omega T)}{1+b_1\cos(\omega T)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\left[-\operatorname{Arctg}\frac{a_{1k}\sin(\omega T)+a_{2k}\sin(2\omega T)}{a_k+a_{1k}\cos(\omega T)+a_{2k}\cos(2\omega T)}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{Arctg}\frac{b_{1k}\sin(\omega T)+b_{2k}\sin(2\omega T)}{1+b_{1k}\cos(\omega T)+b_{2k}\cos(2\omega T)}\right]. \tag{13.216}$$

Пример 13.12. Провести дискретизацию аналогового фильтра нижних частот, спроектированного в примере 13.6, при следующих исходных данных:

— частота дискретизации $f_д = 5{,}0$ кГц;

— передаточную функцию дискретного фильтра представить в форме (13.213).

По формулам табл.13.8 найдём коэффициенты передаточной функции (13.213):

$$a_0=1;\quad a_1=0;\quad b_1=0;$$

$$a_{01}=0{,}253;\quad a_{11}=0{,}507;\quad a_{21}=0{,}253;\quad b_{11}=-0{,}777;\quad b_{21}=0{,}79;$$

$$a_{02}=0{,}21;\quad a_{12}=0{,}421;\quad a_{22}=0{,}21;\quad b_{12}=-0{,}645;\quad b_{22}=0{,}487;$$

$$a_{03}=0{,}183;\quad a_{13}=0{,}366;\quad a_{23}=0{,}183;\quad b_{13}=-0{,}56;\quad b_{23}=0{,}292;$$

$$a_{04}=0{,}165;\quad a_{14}=0{,}33;\quad a_{24}=0{,}165;\quad b_{14}=-0{,}506;\quad b_{24}=0{,}166;$$

$$a_{05}=0{,}154;\quad a_{15}=0{,}309;\quad a_{25}=0{,}154;\quad b_{15}=-0{,}474;\quad b_{25}=0{,}091;$$

$$a_{06}=0{,}15;\quad a_{16}=0{,}299;\quad a_{26}=0{,}15;\quad b_{16}=-0{,}458;\quad b_{26}=0{,}056.$$

На рис.13.20 приведена АЧХ спроектированного дискретного фильтра нижних частот 12-го порядка ($N=12$), построенная по формуле (13.215). Здесь использована шкала нормированных частот: $W = f/f_д$.

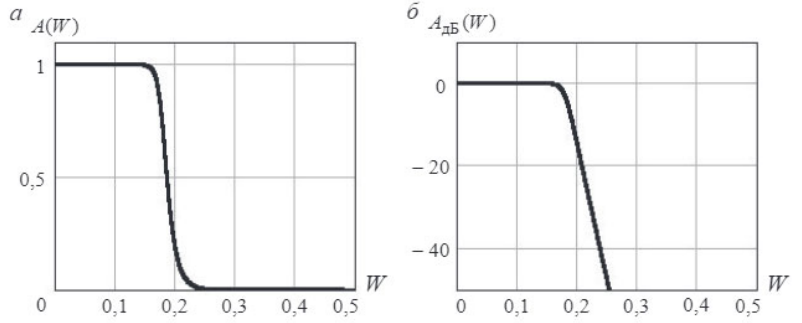


Рис.13.20. АЧХ дискретного ФНЧ Баттерворта 12-го порядка, спроектированного в примере 13.12: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Граничная частота полосы пропускания спроектированного дискретного фильтра $f_{\text{п(ц)}} = 892{,}845$ Гц при $f_{\text{п(а)}} = 1{,}0$ кГц, что соответствует деформации частотной шкалы (13.212) при дискретизации по методу билинейного преобразования.

Пример 13.13. Провести дискретизацию аналогового фильтра верхних частот, спроектированного в примере 13.7, при следующих исходных данных:
— частота дискретизации $f_{\text{д}} = 5{,}0$ кГц;
— передаточную функцию дискретного фильтра представить в форме (13.213).

По формулам табл.13.8 наёдём коэффициенты передаточной функции (13.213):

$$a_0 = 0{,}049; \quad a_1 = 0; \quad b_1 = 0;$$

$$a_{01} = 0{,}696; \quad a_{11} = -1{,}392; \quad a_{21} = 0{,}696; \quad b_{11} = -0{,}808; \quad b_{21} = 0{,}907;$$

$$a_{02} = 0{,}893; \quad a_{12} = -1{,}786; \quad a_{22} = 0{,}893; \quad b_{12} = -0{,}263; \quad b_{22} = 0{,}674;$$

$$a_{03} = 1{,}327; \quad a_{13} = -2{,}653; \quad a_{23} = 1{,}327; \quad b_{13} = -0{,}757; \quad b_{23} = 0{,}337.$$

АЧХ спроектированного дискретного фильтра верхних частот 6-го порядка ($N = 6$), построенная по формуле (13.215), приведена на рис.13.21. Здесь использована шкала нормированных частот: $W = f / f_{\text{д}}$.

Граничная частота полосы пропускания спроектированного дискретного фильтра $f_{\text{п(ц)}} = 892{,}845$ Гц при $f_{\text{п(а)}} = 1{,}0$ кГц, что соответствует деформации частотной шкалы (13.212) при дискретизации по методу билинейного преобразования.

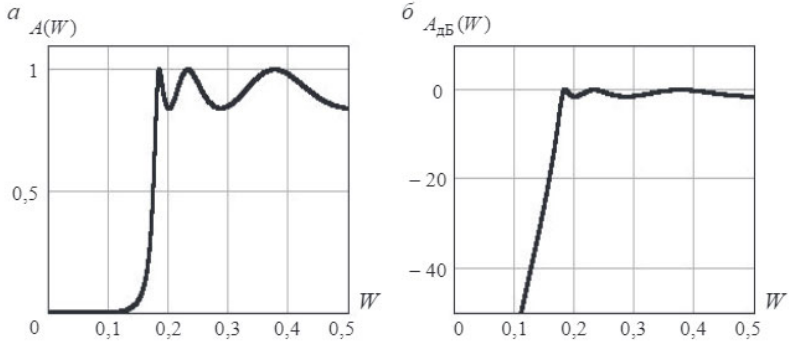


Рис.13.21. АЧХ дискретного фильтра верхних частот Чебышева первого типа 6-го порядка, спроектированного в примере 13.13: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

♦ Билинейное преобразование передаточной функции аналогового фильтра в форме (13.171) приводит к передаточной функции дискретного фильтра:

$$H(z) = \frac{a_0 + + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \prod_{k=1}^{r} \frac{a_{0k} + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2} + a_{3k} z^{-3} + a_{4k} z^{-4}}{1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2} + b_{3k} z^{-3} + b_{4k} z^{-4}}. \tag{13.217}$$

Коэффициенты передаточной функции (13.217), выраженные через коэффициенты передаточной функции (13.171), сведены в табл.13.9.

Таблица 13.9

Коэффициенты в (13.217)	Выражения для коэффициентов дискретного фильтра	
1	**2**	
	n нечётн.	n чётн.
a_0	$\dfrac{Q_0+(2f_д)Q_1+(2f_д)^2Q_2}{F_0+(2f_д)F_1+(2f_д)^2F_2}$	K_0
a_1	$\dfrac{2\left[Q_0-(2f_д)^2Q_2\right]}{F_0+(2f_д)F_1+(2f_д)^2F_2}$	0
a_2	$\dfrac{Q_0-(2f_д)Q_1+(2f_д)^2Q_2}{F_0+(2f_д)F_1+(2f_д)^2F_2}$	0
b_1	$\dfrac{2\left[F_0-(2f_д)^2F_2\right]}{F_0+(2f_д)F_1+(2f_д)^2F_2}$	0
b_2	$\dfrac{F_0-(2f_д)F_1+(2f_д)^2F_2}{F_0+(2f_д)F_1+(2f_д)^2F_2}$	0
a_{0k}	$\dfrac{E_{0k}+(2f_д)^2E_{2k}+(2f_д)^4E_{4k}}{D_{0k}+(2f_д)D_{1k}+(2f_д)^2D_{2k}+(2f_д)^3D_{3k}+(2f_д)^4}$	
a_{1k}	$\dfrac{4\left[E_{0k}-(2f_д)^4E_{4k}\right]}{D_{0k}+(2f_д)D_{1k}+(2f_д)^2D_{2k}+(2f_д)^3D_{3k}+(2f_д)^4}$	
a_{2k}	$\dfrac{2\left[3E_{0k}-(2f_д)^2E_{2k}+3(2f_д)^4E_{4k}\right]}{D_{0k}+(2f_д)D_{1k}+(2f_д)^2D_{2k}+(2f_д)^3D_{3k}+(2f_д)^4}$	
a_{3k}	$\dfrac{4\left[E_{0k}-(2f_д)^4E_{4k}\right]}{D_{0k}+(2f_д)D_{1k}+(2f_д)^2D_{2k}+(2f_д)^3D_{3k}+(2f_д)^4}$	
a_{4k}	$\dfrac{E_{0k}+(2f_д)^2E_{2k}+(2f_д)^4E_{4k}}{D_{0k}+(2f_д)D_{1k}+(2f_д)^2D_{2k}+(2f_д)^3D_{3k}+(2f_д)^4}$	
b_{1k}	$\dfrac{2\left[2D_{0k}+(2f_д)D_{1k}-(2f_д)^3D_{3k}-2(2f_д)^4\right]}{D_{0k}+(2f_д)D_{1k}+(2f_д)^2D_{2k}+(2f_д)^3D_{3k}+(2f_д)^4}$	

Окончание табл. 13.9

1	2
b_{2k}	$\dfrac{2\left[3\mathrm{D}_{0k}-(2f_д)^2\mathrm{D}_{2k}+3(2f_д)^4\right]}{\mathrm{D}_{0k}+(2f_д)\mathrm{D}_{1k}+(2f_д)^2\mathrm{D}_{2k}+(2f_д)^3\mathrm{D}_{3k}+(2f_д)^4}$
b_{3k}	$\dfrac{2\left[2\mathrm{D}_{0k}-(2f_д)\mathrm{D}_{1k}+(2f_д)^3\mathrm{D}_{3k}-2(2f_д)^4\right]}{\mathrm{D}_{0k}+(2f_д)\mathrm{D}_{1k}+(2f_д)^2\mathrm{D}_{2k}+(2f_д)^3\mathrm{D}_{3k}+(2f_д)^4}$
b_{4k}	$\dfrac{\mathrm{D}_{0k}-(2f_д)\mathrm{D}_{1k}+(2f_д)^2\mathrm{D}_{2k}-(2f_д)^3\mathrm{D}_{3k}+(2f_д)^4}{\mathrm{D}_{0k}+(2f_д)\mathrm{D}_{1k}+(2f_д)^2\mathrm{D}_{2k}+(2f_д)^3\mathrm{D}_{3k}+(2f_д)^4}$
Здесь n — порядок аналогового нормированного ФНЧ-прототипа; $k=\overline{1,\ r}$	

Комплексная частотная характеристика $H\left(e^{j\omega T}\right)$, амплитудно-частотная $A(\omega T)$ и фазочастотная $\varphi(\omega T)$ характеристики дискретного фильтра с передаточной функцией (13.217) описываются следующими выражениями:

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=\frac{a_0+a_1e^{-j\omega T}+a_2e^{-j2\omega T}}{1+b_1e^{-j\omega T}+b_2e^{-j2\omega T}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{r}\frac{a_{0k}+a_{1k}e^{-j\omega T}+a_{2k}e^{-j2\omega T}+a_{3k}e^{-j3\omega T}+a_{4k}e^{-j4\omega T}}{1+b_{1k}e^{-j\omega T}+b_{2k}e^{-j2\omega T}+b_{3k}e^{-j3\omega T}+b_{4k}e^{-j4\omega T}};\qquad(13.218)$$

$$A(\omega T)=\sqrt{\frac{[\,a_0+a_1\cos(\omega T)+a_2\cos(2\omega T)\,]^2+[\,a_1\sin(\omega T)+a_2\sin(2\omega T)\,]^2}{[\,1+b_1\cos(\omega T)+b_2\cos(2\omega T)\,]^2+[\,b_1\sin(\omega T)+b_2\sin(2\omega T)\,]^2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{r}\left\{\frac{[\,a_{0k}+a_{1k}\cos(\omega T)+a_{2k}\cos(2\omega T)+a_{3k}\cos(3\omega T)+a_{4k}\cos(4\omega T)\,]^2+}{[\,1+b_{1k}\cos(\omega T)+b_{2k}\cos(2\omega T)+b_{3k}\cos(3\omega T)+b_{4k}\cos(4\omega T)\,]^2+}\right.\rightarrow$$

$$\left.\rightarrow\frac{+[\,a_{1k}\sin(\omega T)+a_{2k}\sin(2\omega T)+a_{3k}\sin(3\omega T)+a_{4k}\sin(4\omega T)\,]^2}{+[\,b_{1k}\sin(\omega T)+b_{2k}\sin(2\omega T)+b_{3k}\sin(3\omega T)+b_{4k}\sin(4\omega T)\,]^2}\right\}^{1/2};\qquad(13.219)$$

$$\varphi(\omega T)=$$

$$=-\mathrm{Arctg}\frac{a_1\sin(\omega T)+a_2\sin(2\omega T)}{a_0+a_1\cos(\omega T)+a_2\cos(2\omega T)}+\mathrm{Arctg}\frac{b_1\sin(\omega T)+b_2\sin(2\omega T)}{1+b_1\cos(\omega T)+b_2\cos(2\omega T)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\left[-\mathrm{Arctg}\frac{a_{1k}\sin(\omega T)+a_{2k}\sin(2\omega T)+a_{3k}\sin(3\omega T)+a_{4k}\sin(4\omega T)}{a_{0k}+a_{1k}\cos(\omega T)+a_{2k}\cos(2\omega T)+a_{3k}\cos(3\omega T)+a_{4k}\cos(4\omega T)}+\right.$$

$$+\operatorname{Arctg}\frac{b_{1k}\sin(\omega T)+b_{2k}\sin(2\omega T)+b_{3k}\sin(3\omega T)+b_{4k}\sin(4\omega T)}{1+b_{1k}\cos(\omega T)+b_{2k}\cos(2\omega T)+b_{3k}\cos(3\omega T)+b_{4k}\cos(4\omega T)}\Bigg]. \quad (13.220)$$

Пример 13.14. Провести дискретизацию аналогового полосового фильтра, спроектированного в примере 13.8, при следующих исходных данных:
— частота дискретизации $f_д = 70$ кГц;
— передаточную функцию дискретного фильтра представить в форме (13.217).

Для проектирования фильтра составлена программа в системе компьютерной математики Mathcad.

По формулам табл.13.9 найдём коэффициенты передаточной функции (13.217):

$$a_0 = 0{,}01;\quad a_1 = 0;\quad a_2 = 0;\quad b_1 = 0;\quad b_2 = 0;$$
$$a_{01} = 0{,}984;\quad a_{11} = -0{,}236;\quad a_{21} = 1{,}961;\quad a_{31} = -0{,}236;\quad a_{41} = 0{,}984;$$
$$b_{11} = -0{,}238;\quad b_{21} = 1{,}967;\quad b_{31} = -0{,}234;\quad b_{41} = 0{,}963;$$
$$a_{02} = 0{,}944;\quad a_{12} = -0{,}225;\quad a_{22} = 1{,}863;\quad a_{32} = -0{,}225;\quad a_{42} = 0{,}944;$$
$$b_{12} = -0{,}233;\quad b_{22} = 1{,}875;\quad b_{32} = -0{,}218;\quad b_{42} = 0{,}874;$$
$$a_{03} = 0{,}949;\quad a_{13} = -0{,}213;\quad a_{23} = 1{,}643;\quad a_{33} = -0{,}213;\quad a_{43} = 0{,}949;$$
$$b_{13} = -0{,}226;\quad b_{23} = 1{,}769;\quad b_{33} = -0{,}199;\quad b_{43} = 0{,}772.$$

На рис.13.22 приведена АЧХ спроектированного дискретного полосового фильтра 12-го порядка ($N = 12$), построенная по формуле (13.219). Здесь использована шкала нормированных частот: $W = f/f_д$.

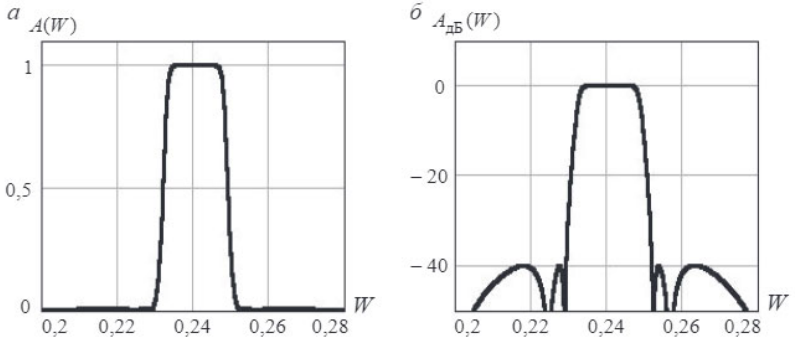


Рис.13.22. АЧХ дискретного полосового фильтра Чебышева второго типа 12-го порядка, спроектированного в примере 13.14: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Граничные частоты полосы пропускания синтезированного дискретного полосового фильтра при $a_п = 1{,}417$ дБ равны $f_{п1(ц)} = 16{,}3$ кГц и $f_{п2(ц)} = 17{,}36$ кГц, а полос задерживания при $a_з = 40$ дБ — $f_{з1(ц)} = 16{,}04$ кГц и $f_{з2(ц)} = 17{,}62$ кГц. Величины граничных частот дискретного фильтра отличаются от соответствующих граничных

частот аналогового фильтра, спроектированного в примере 13.8. Эти отличия объясняются деформацией частотной шкалы (13.212) при дискретизации аналогового фильтра по методу билинейного преобразования.

Пример 13.15. Провести дискретизацию аналогового режекторного фильтра, спроектированного в примере 13.9, при следующих исходных данных:

— частота дискретизации $f_д = 70$ кГц;

— передаточную функцию дискретного фильтра представить в форме (13.217).

Для проектирования фильтра составлена программа в системе компьютерной математики Mathcad.

По формулам табл.13.9 найдём коэффициенты передаточной функции (13.217):

$$a_0 = 8{,}375 \cdot 10^{-3};\quad a_1 = 0;\quad a_2 = 0;\qquad b_1 = 0;\quad b_2 = 0;$$

$$a_{01} = 34{,}883;\quad a_{11} = -8{,}413;\quad a_{21} = 70{,}248;\quad a_{31} = -8{,}413;\quad a_{41} = 34{,}883;$$

$$b_{11} = -0{,}229;\quad b_{21} = 1{,}816;\quad b_{31} = -0{,}209;\quad b_{41} = 0{,}829;$$

$$a_{02} = 2{,}589;\quad a_{12} = -0{,}624;\quad a_{22} = 5{,}207;\quad a_{32} = -0{,}624;\quad a_{42} = 2{,}589;$$

$$b_{12} = -0{,}24;\quad b_{22} = 1{,}988;\quad b_{32} = -0{,}237;\quad b_{42} = 0{,}982.$$

На рис.13.23 приведена АЧХ спроектированного дискретного режекторного фильтра 8-го порядка ($N = 8$), построенная по формуле (13.219). Здесь использована шкала нормированных частот: $W = f / f_д$.

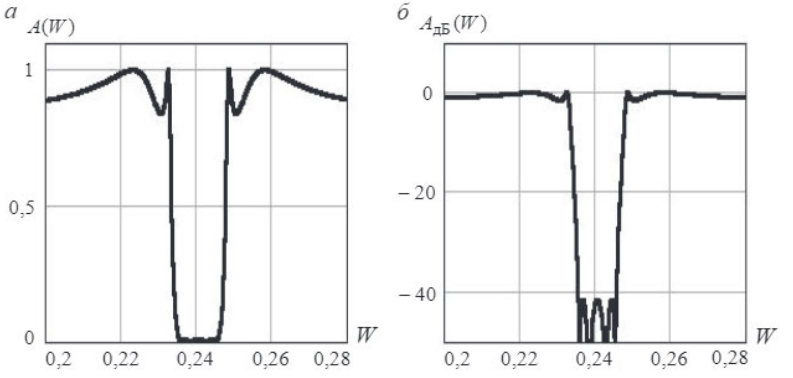


Рис.13.23. АЧХ дискретного режекторного фильтра эллиптического типа 8-го порядка, спроектированного в примере 13.15: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Граничные частоты полос пропускания синтезированного дискретного режекторного фильтра при $a_п = 1{,}5$ дБ равны $f_{п1(ц)} = 16{,}3$ кГц и $f_{п2(ц)} = 17{,}36$ кГц, а полосы задерживания при $a_э = 41.541$ дБ — $f_{э1(ц)} = 16{,}47$ кГц и $f_{э2(ц)} = 17{,}18$ кГц. Величины граничных частот дискретного фильтра отличаются от соответствующих граничных частот аналогового фильтра, спроектированного в примере 13.9. Эти отличия объясняются деформацией частотной шкалы (13.212) при дискретизации аналогового фильтра по методу билинейного преобразования.

♦ Билинейное преобразование передаточной функции аналогового фильтра в форме (13.188) приводит к передаточной функции дискретного фильтра:

$$H(z)=\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}\prod_{k=1}^{r}\frac{a_{0k}+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}{1+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}\,\frac{\overline{a}_{0k}+\overline{a}_{1k}z^{-1}+\overline{a}_{2k}z^{-2}}{1+\overline{b}_{1k}z^{-1}+\overline{b}_{2k}z^{-2}}. \tag{13.221}$$

Коэффициенты передаточной функции (13.221), выраженные через коэффициенты передаточной функции (13.188), сведены в табл.13.10.

Комплексная частотная характеристика $H\left(e^{j\omega T}\right)$, амплитудно-частотная $A(\omega T)$ и фазочастотная $\varphi(\omega T)$ характеристики дискретного фильтра с передаточной функцией (13.221) описываются следующими выражениями:

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=\frac{a_0+a_1e^{-j\omega T}+a_2e^{-j2\omega T}}{1+b_1e^{-j\omega T}+b_2e^{-j2\omega T}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{r}\frac{a_{0k}+a_{1k}e^{-j\omega T}+a_{2k}e^{-j2\omega T}}{1+b_{1k}e^{-j\omega T}+b_{2k}e^{-j2\omega T}}\,\frac{\overline{a}_{0k}+\overline{a}_{1k}e^{-j\omega T}+\overline{a}_{2k}e^{-j2\omega T}}{1+\overline{b}_{1k}e^{-j\omega T}+\overline{b}_{2k}e^{-j2\omega T}}; \tag{13.222}$$

$$A(\omega T)=\sqrt{\frac{[\,a_0+a_1\cos(\omega T)+a_2\cos(2\omega T)\,]^2+[\,a_1\sin(\omega T)+a_2\sin(2\omega T)\,]^2}{[\,1+b_1\cos(\omega T)+b_2\cos(2\omega T)\,]^2+[\,b_1\sin(\omega T)+b_2\sin(2\omega T)\,]^2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{r}\sqrt{\frac{[\,a_{0k}+a_{1k}\cos(\omega T)+a_{2k}\cos(2\omega T)\,]^2+[\,a_{1k}\sin(\omega T)+a_{2k}\sin(2\omega T)\,]^2}{[\,1+b_{1k}\cos(\omega T)+b_{2k}\cos(2\omega T)\,]^2+[\,b_{1k}\sin(\omega T)+b_{2k}\sin(2\omega T)\,]^2}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{[\,\overline{a}_{0k}+\overline{a}_{1k}\cos(\omega T)+\overline{a}_{2k}\cos(2\omega T)\,]^2+[\,\overline{a}_{1k}\sin(\omega T)+\overline{a}_{2k}\sin(2\omega T)\,]^2}{\left[1+\overline{b}_{1k}\cos(\omega T)+\overline{b}_{2k}\cos(2\omega T)\right]^2+\left[\overline{b}_{1k}\sin(\omega T)+\overline{b}_{2k}\sin(2\omega T)\right]^2}}; \tag{13.223}$$

$$\varphi(\omega T)=$$

$$=-\mathrm{Arctg}\frac{a_1\sin(\omega T)+a_2\sin(2\omega T)}{a_0+a_1\cos(\omega T)+a_2\cos(2\omega T)}+\mathrm{Arctg}\frac{b_1\sin(\omega T)+b_2\sin(2\omega T)}{1+b_1\cos(\omega T)+b_2\cos(2\omega T)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\left[-\mathrm{Arctg}\frac{a_{1k}\sin(\omega T)+a_{2k}\sin(2\omega T)}{a_{0k}+a_{1k}\cos(\omega T)+a_{2k}\cos(2\omega T)}+\right.$$

$$+\mathrm{Arctg}\frac{b_{1k}\sin(\omega T)+b_{2k}\sin(2\omega T)}{1+b_{1k}\cos(\omega T)+b_{2k}\cos(2\omega T)}-\mathrm{Arctg}\frac{\overline{a}_{1k}\sin(\omega T)+\overline{a}_{2k}\sin(2\omega T)}{\overline{a}_{0k}+\overline{a}_{1k}\cos(\omega T)+\overline{a}_{2k}\cos(2\omega T)}+$$

$$\left.+\mathrm{Arctg}\frac{\overline{b}_{1k}\sin(\omega T)+\overline{b}_{2k}\sin(2\omega T)}{1+\overline{b}_{1k}\cos(\omega T)+\overline{b}_{2k}\cos(2\omega T)}\right]. \tag{13.224}$$

Таблица 13.10

Коэффициенты в (13.221)	Выражения для коэффициентов дискретного фильтра	
	n нечётн.	n чётн.
a_0	$\dfrac{Q_0+(2f_д)Q_1+(2f_д)^2Q_2}{F_0+(2f_д)F_1+(2f_д)^2F_2}$	K_0
a_1	$\dfrac{2\left[Q_0-(2f_д)^2Q_2\right]}{F_0+(2f_д)F_1+(2f_д)^2F_2}$	0
a_2	$\dfrac{Q_0-(2f_д)Q_1+(2f_д)^2Q_2}{F_0+(2f_д)F_1+(2f_д)^2F_2}$	0
b_1	$\dfrac{2\left[F_0-(2f_д)^2F_2\right]}{F_0+(2f_д)F_1+(2f_д)^2F_2}$	0
b_2	$\dfrac{F_0-(2f_д)F_1+(2f_д)^2F_2}{F_0+(2f_д)F_1+(2f_д)^2F_2}$	0
a_{0k}	$\left[T_{0k}+(2f_д)^2T_{2k}\right]/\left[G_{0k}+(2f_д)G_{1k}+(2f_д)^2\right]$	
a_{1k}	$2\left[T_{0k}-(2f_д)^2T_{2k}\right]/\left[G_{0k}+(2f_д)G_{1k}+(2f_д)^2\right]$	
a_{2k}	$\left[T_{0k}+(2f_д)^2T_{2k}\right]/\left[G_{0k}+(2f_д)G_{1k}+(2f_д)^2\right]$	
b_{1k}	$2\left[G_{0k}-(2f_д)^2\right]/\left[G_{0k}+(2f_д)G_{1k}+(2f_д)^2\right]$	
b_{2k}	$\left[G_{0k}-(2f_д)G_{1k}+(2f_д)^2\right]/\left[G_{0k}+(2f_д)G_{1k}+(2f_д)^2\right]$	
$\overline{a}_{0k}$	$\left[\overline{T}_{0k}+(2f_д)^2\overline{T}_{2k}\right]/\left[\overline{G}_{0k}+(2f_д)\overline{G}_{1k}+(2f_д)^2\right]$	
$\overline{a}_{1k}$	$2\left[\overline{T}_{0k}-(2f_д)^2\overline{T}_{2k}\right]/\left[\overline{G}_{0k}+(2f_д)\overline{G}_{1k}+(2f_д)^2\right]$	
$\overline{a}_{2k}$	$\left[\overline{T}_{0k}+(2f_д)^2\overline{T}_{2k}\right]/\left[\overline{G}_{0k}+(2f_д)\overline{G}_{1k}+(2f_д)^2\right]$	
$\overline{b}_{1k}$	$2\left[\overline{G}_{0k}-(2f_д)^2\right]/\left[\overline{G}_{0k}+(2f_д)\overline{G}_{1k}+(2f_д)^2\right]$	
$\overline{b}_{2k}$	$\left[\overline{G}_{0k}-(2f_д)\overline{G}_{1k}+(2f_д)^2\right]/\left[\overline{G}_{0k}+(2f_д)\overline{G}_{1k}+(2f_д)^2\right]$	
Здесь n — порядок аналогового нормированного ФНЧ-прототипа; $k=\overline{1,\ r}$		

Пример 13.16. Провести дискретизацию аналогового полосового фильтра, спроектированного в примере 13.10, при следующих исходных данных:

— частота дискретизации $f_д = 70$ кГц;

— передаточную функцию дискретного фильтра представить в форме (13.221).

Для проектирования фильтра составлена программа в системе компьютерной математики Mathcad.

Коэффициенты передаточной функции (13.221) найдём, используя табл.13.10:

$$a_0 = 0{,}01;\quad a_1 = 0;\quad a_2 = 0;\qquad b_1 = 0;\quad b_2 = 0;$$

$$a_{01} = 1{,}115;\quad a_{11} = 0{,}03;\quad a_{21} = 1{,}115;\qquad b_{11} = -0{,}219;\quad b_{21} = 0{,}981;$$

$$\overline{a}_{01} = 0{,}883;\quad \overline{a}_{11} = -0{,}236;\quad \overline{a}_{21} = 0{,}883;\qquad \overline{b}_{11} = -0{,}02;\quad \overline{b}_{21} = 0{,}981;$$

$$a_{02} = 1{,}117;\quad a_{12} = 0{,}091;\quad a_{22} = 1{,}117;\qquad b_{12} = -0{,}208;\quad b_{22} = 0{,}935;$$

$$\overline{a}_{02} = 0{,}845;\quad \overline{a}_{12} = -0{,}27;\quad \overline{a}_{22} = 0{,}845;\qquad \overline{b}_{12} = -0{,}025;\quad \overline{b}_{22} = 0{,}935;$$

$$a_{03} = 1{,}289;\quad a_{13} = 0{,}54;\quad a_{23} = 1{,}289;\qquad b_{13} = -0{,}159;\quad b_{23} = 0{,}879;$$

$$\overline{a}_{03} = 0{,}736;\quad \overline{a}_{13} = -0{,}473;\quad \overline{a}_{23} = 0{,}736;\qquad \overline{b}_{13} = -0{,}067;\quad \overline{b}_{23} = 0{,}879.$$

АЧХ дискретного полосового фильтра 12-го порядка ($N = 12$), построенная по формуле (13.223), полностью совпадает с АЧХ, приведённой на рис.13.22 (см. пример 13.14), которая построена по формуле (13.219).

Пример 13.17. Провести дискретизацию аналогового режекторного фильтра, спроектированного в примере 13.11, при следующих исходных данных:

— частота дискретизации $f_д = 70$ кГц;

— передаточную функцию дискретного фильтра представить в форме (13.221).

Для проектирования фильтра составлена программа в системе компьютерной математики Mathcad.

Коэффициенты передаточной функции (13.221) найдём, используя табл.13.10:

$$a_0 = 8{,}375 \cdot 10^{-3};\quad a_1 = 0;\quad a_2 = 0;\qquad b_1 = 0;\quad b_2 = 0;$$

$$a_{01} = 6{,}395;\quad a_{11} = -0{,}597;\quad a_{21} = 6{,}395;\qquad b_{11} = -0{,}249;\quad b_{21} = 0{,}911;$$

$$\overline{a}_{01} = 5{,}455;\quad \overline{a}_{11} = -0{,}807;\quad \overline{a}_{21} = 5{,}455;\qquad \overline{b}_{11} = 0{,}02;\quad \overline{b}_{21} = 0{,}91;$$

$$a_{02} = 1{,}732;\quad a_{12} = -0{,}105;\quad a_{22} = 1{,}732;\qquad b_{12} = -0{,}215;\quad b_{22} = 0{,}991;$$

$$\overline{a}_{02} = 1{,}495;\quad \overline{a}_{12} = -0{,}269;\quad \overline{a}_{22} = 1{,}495;\qquad \overline{b}_{12} = -0{,}024;\quad \overline{b}_{22} = 0{,}991.$$

АЧХ дискретного режекторного фильтра 8-го порядка ($N = 8$), построенная по формуле (13.223), полностью совпадает с АЧХ, приведённой на рис.13.23 (см. пример 13.15), которая построена по формуле (13.219).

Примеры 13.14 — 13.17 подтвердили эквивалентность представления передаточных функций дискретных полосовых и режекторных фильтров $H(z)$ в формах (13.217) и (13.221).

Деформация частотной шкалы (13.212) при дискретизации по методу билинейного преобразования (13.210) наблюдалась в примерах 13.12 — 13.17. При этом характерные частоты ЦФ (граничные частоты полос пропускания и задерживания) не соответствуют характерным частотам аналоговых фильтров.

Для того чтобы получить дискретный фильтр с заданными характерными частотами, синтез фильтра необходимо выполнять в следующей последовательности:

1) по формуле (13.212) пересчитать заданные «цифровые» граничные частоты полос пропускания и задерживания в соответствующие «аналоговые» граничные частоты;
2) по формулам табл.13.2 осуществить нормирование частоты, т.е. переход к безразмерной аналоговой частоте Ω и определить безразмерную аналоговую граничную частоту полосы задерживания $\Omega_з$ аналогового ФНЧ-прототипа;
3) провести синтез аналогового нормированного ФНЧ-прототипа по методике, изложенной в § 13.2 — 13.5;
4) осуществить денормирование частоты в аналоговой области (см. § 13.7);
5) методом билинейного преобразования (13.210) получить передаточную функцию дискретного фильтра $H(z)$.

◆ **Инвариантное преобразование импульсной характеристики**

Этот метод, называемый также методом стандартного Z-преобразования, состоит в том, что в качестве импульсной характеристики проектируемого ЦФ используется дискретизированная импульсная характеристика соответствующего аналогового фильтра [6].

Полагая, что все полюсы передаточной функции аналогового фильтра $\mathrm{H}(p)$ простые, разложим (13.163) на простые дроби:

$$\mathrm{H}(p)=\sum_{k=1}^{N}\frac{C_k}{p-p_{pk}}, \tag{13.225}$$

где $p_{pk}\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ — полюсы передаточной функции $\mathrm{H}(p)$;

$$C_k=\mathrm{H}(p)\left(p-p_{pk}\right)\Big|_{p=p_{pk}},\quad k=\overline{1,\ N}, \tag{13.226}$$

— вычеты передаточной функции $\mathrm{H}(p)$ в соответствующих полюсах.

Импульсная характеристика $h(t)$ аналогового фильтра с передаточной функцией (13.225) имеет вид

$$h(t)=\sum_{k=1}^{N}C_k\exp\left(p_{pk}t\right),\quad t\ge 0. \tag{13.227}$$

Дискретизируя её с шагом $T=1/f_д$, получим импульсную характеристику дискретного фильтра:

$$h[n]=\sum_{k=1}^{N}C_k\exp\left(p_{pk}Tn\right),\quad n\ge 0. \tag{13.228}$$

По формуле (3.4) найдём передаточную функцию дискретного фильтра:

$$H(z)=Z\{h[n]\}=\sum_{n=0}^{\infty}h[n]\,z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}C_k\exp\left(p_{pk}Tn\right)z^{-n}. \tag{13.229}$$

Меняя порядок суммирования в (13.229) и воспользовавшись формулой суммы членов бесконечной геометрической прогрессии [9], получим

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{n=0}^{\infty}\left[\exp\left(p_{pk}T\right) z^{-1}\right]^n=\sum_{k=1}^{N}\frac{C_k}{1-\exp\left(p_{pk}T\right) z^{-1}}. \qquad (13.230)$$

Сравнивая формулы (13.225) и (13.230), видим, что в данном случае переход (13.202) осуществляется с помощью отображения, при котором происходит замена

$$\frac{1}{p-p_{pk}} \to \frac{1}{1-\exp\left(p_{pk}T\right) z^{-1}}, \quad k=\overline{1,\ N}. \qquad (13.231)$$

Это отображение имеет вид [10]

$$z=e^{pT}. \qquad (13.232)$$

На рис.13.24 показано отображение (13.232) *P*-плоскости в *Z*-плоскость. При этом любая горизонтальная полоса *P*-плоскости шириной $2\pi/T$ отображается во всю *Z*-плоскость. Левая половина каждой такой полосы отображается во внутреннюю область единичного круга *Z*-плоскости, а правая половина — во внешнюю область. Мнимая ось $j\omega$ *P*-плоскости отображается в единичную окружность *Z*-плоскости так, что образ каждого отрезка оси $j\omega$ длиной $2\pi/T$ представляет собой всю единичную окружность $|z|=1$. Таким образом, метод инвариантного преобразования импульсной характеристики не соответствует простому алгебраическому отображению *P*-плоскости в *Z*-плоскость.

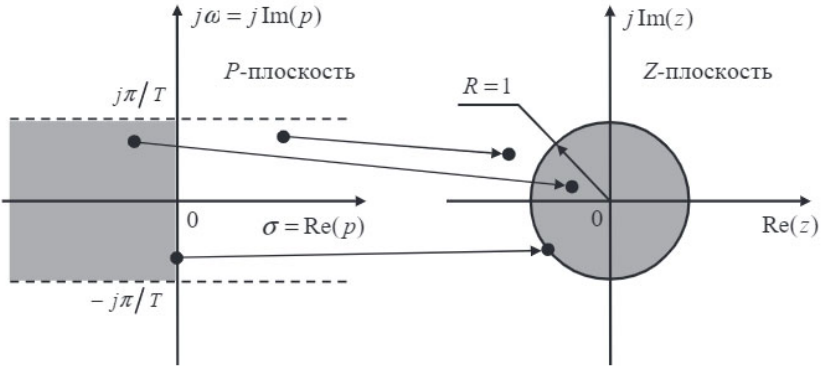


Рис.13.24. Отображение непрерывного пространства в дискретное (комплексной *P*-плоскости в комплексную *Z*-плоскость) по методу инвариантного преобразования импульсной характеристики

Частотная характеристика дискретного фильтра, полученного методом инвариантного преобразования импульсной характеристики, образуется путём

наложения сдвинутых частотных характеристик дискретизируемого аналогового фильтра [6]:

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{H}\left(j\omega+j\frac{2\pi k}{T}\right). \qquad (13.233)$$

Из-за явления наложения частотная характеристика ЦФ может существенно отличаться от частотной характеристики исходного аналогового фильтра. Из (13.233) следует, что эффект наложения не будет искажать частотную характеристику ЦФ в том случае, если $\mathrm{H}(j\omega)=0$ при $|\omega|>\pi/T$. Тогда

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=\frac{1}{T}\mathrm{H}(j\omega) \text{ при } |\omega|\le\pi/T. \qquad (13.234)$$

Однако аналоговые фильтры не обладают резко ограниченной полосой пропускания, поэтому на практике до начала преобразования необходимо вводить дополнительный ФНЧ, гарантирующий соответствующее ограничение полосы пропускания аналогового фильтра [6].

Возможна модификация метода инвариантного преобразования импульсной характеристики на случай кратных полюсов передаточной функции аналогового фильтра (см., например, [1]).

◆ **Z-формы**

Этот метод основан на представлении передаточной функции аналогового фильтра в виде

$$\mathrm{H}(p)=\left(\sum_{k=0}^{M}\frac{\mathrm{a}_k}{p^{N-k}}\right)\Big/\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{\mathrm{b}_k}{p^{N-k}}\right),\quad M<N \qquad (13.235)$$

получаемом путём деления числителя и знаменателя дробно-рациональной передаточной функции (13.163) на p^N.

В передаточной функции (13.235) элементарными являются интегрирующие звенья $1/p^k\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$. Заменяя аналоговые интегрирующие звенья на соответствующие цифровые интеграторы, можно получить передаточную функцию эквивалентного дискретного фильтра $H(z)$. Этот вопрос рассматривался в § 7.6).

Следуя [58, 59], приведём теоретическое обоснование такого подхода, получившего название *метода Z-форм*. Согласно (13.204) запишем

$$p^{-1}=\frac{T}{\ln(z)}. \qquad (13.236)$$

Используя разложение (13.205), представим выражение (13.236) в виде

$$p^{-1}=\frac{T/2}{v+\dfrac{v^3}{3}+\dfrac{v^5}{5}+\ldots}=\frac{T/2}{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v^{2k-1}}{2k-1}}, \qquad (13.237)$$

где

$$v=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \qquad (13.238)$$

Последовательное деление в (13.237) приводит к ряду Лорана:

$$p^{-1}=\frac{T}{2}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{3}v-\frac{4}{45}v^3-\frac{44}{945}v^5-...\right). \qquad (13.239)$$

Поскольку ряд (13.239) довольно быстро сходится, ограничимся его главной частью, т.е.

$$p^{-1}=\frac{T}{2v}=\frac{T}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}. \qquad (13.240)$$

Выражение (13.240) является Z-формой, соответствующей оператору p^{-1}.

Возводя обе части выражения (13.239) в квадрат, получим

$$p^{-2}=\frac{T^2}{4}\left[\frac{1}{v^2}-\frac{2}{v}\left(\frac{1}{3}v+\frac{4}{45}v^3+\frac{44}{945}v^5+...\right)+\left(\frac{1}{3}v+\frac{4}{45}v^3+\frac{44}{945}v^5+...\right)^2\right]=$$

$$=\frac{T^2}{4}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{2}{3}-\frac{1}{15}v^2-\frac{32}{945}v^4-...\right). \qquad (13.241)$$

Ограничим ряд Лорана (13.241) главной частью и постоянным членом:

$$p^{-2}=\frac{T^2}{4}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{T^2}{12}\,\frac{1+10z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}. \qquad (13.242)$$

Выражение (13.242) является Z-формой, соответствующей оператору p^{-2}.

Аналогичным образом можно получить Z-форму, соответствующую оператору p^{-k}. Для этого следует возвести в k-ю степень обе части ряда Лорана (13.239) и использовать главную часть и постоянный член. В табл.13.11, заимствованной из [59], приведены несколько Z-форм.

Таблица 13.11

Оператор p^{-k}	Z-форма
1	**2**
p^{-1}	$\frac{T}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$
p^{-2}	$\frac{T^2}{12}\,\frac{1+10z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}$
p^{-3}	$\frac{T^3}{2}\,\frac{z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$

Окончание табл.13.11

1	2
p^{-4}	$\frac{T^4}{6}\frac{z^{-1}+4z^{-2}+z^{-3}}{(1-z^{-1})^4}-\frac{T^4}{120}$
p^{-5}	$\frac{T^5}{24}\frac{z^{-1}+11z^{-2}+11z^{-3}+z^{-4}}{(1-z^{-1})^5}$
p^{-6}	$\frac{T^6}{120}\frac{z^{-1}+26z^{-2}+66z^{-3}+26z^{-4}+z^{-5}}{(1-z^{-1})^6}-\frac{T^6}{30240}$

После замены операторов $p^{-k}\left(k=\overline{1,\,N}\right)$ в передаточной функции (13.235) соответствующими Z-формами полученную передаточную функцию дискретного фильтра $H(z)$ следует привести к дробно-рациональному виду.

13.9. Денормирование частоты в цифровой области

Денормирование частоты в цифровой области (см. рис.13.1,*б*) позволяет получить ЦФ с заданными характеристиками, используя нормированный цифровой ФНЧ-прототип.

Билинейное преобразование (13.210) передаточной функции $\mathrm{H}(s)$ аналогового ФНЧ-прототипа с частотой среза $\Omega_{\text{п}}=1$ приводит к цифровому ФНЧ-прототипу, передаточная функция которого

$$\mathrm{H}(Z)=\mathrm{H}(s)\big|_{s=2f_{\text{д}}\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}}. \tag{13.243}$$

Частота среза (верхняя граничная частота полосы пропускания) цифрового ФНЧ-прототипа за счёт деформации частотной шкалы согласно (13.212) определяется выражением

$$\Omega_{\text{п}}^{(\text{ц})}=\frac{2}{T}\operatorname{arctg}\left(\frac{T}{2}\right). \tag{13.244}$$

Денормирование частоты в цифровой области состоит в замене аргумента Z передаточной функции цифрового ФНЧ-прототипа $\mathrm{H}(Z)$ соответствующими дробно-рациональными функциями, полученными А.Дж. Константинидисом [6, 10, 11, 13], т.е.

$$H(z)=\mathrm{H}(Z)\big|_{Z^{-1}=\vartheta(z^{-1})}. \tag{13.245}$$

Функции $Z^{-1}=\vartheta(z^{-1})$, называемые преобразованиями Константинидиса, приведены в табл.13.12.

В преобразованиях Константинидиса единичная окружность Z-плоскости отображается в такую же окружность один или несколько раз, поэтому, хотя ча-

стотная шкала при отображении деформируется, особенности АЧХ исходного фильтра сохраняются [6]. По этой причине, например, эллиптический цифровой ФНЧ-прототип преобразуется в другой эллиптический ЦФ, а чебышевский цифровой ФНЧ-прототип — в другой чебышевский ЦФ.

Таблица 13.12

Тип фильтра	Преобразование аргумента при денормировании частоты $Z^{-1}=\vartheta(z^{-1})$	Параметры преобразования
ФНЧ	$Z^{-1}=\dfrac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$	$\alpha=\dfrac{\sin\left[\left(\Omega_{\text{п}}^{(\text{ц})}-\omega_{\text{п}}^{(\text{ц})}\right)T/2\right]}{\sin\left[\left(\Omega_{\text{п}}^{(\text{ц})}+\omega_{\text{п}}^{(\text{ц})}\right)T/2\right]}$, где $\omega_{\text{п}}^{(\text{ц})}$ — заданная частота среза цифрового ФНЧ
ФВЧ	$Z^{-1}=-\dfrac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}$	$\alpha=-\dfrac{\cos\left[\left(\Omega_{\text{п}}^{(\text{ц})}-\omega_{\text{п}}^{(\text{ц})}\right)T/2\right]}{\cos\left[\left(\Omega_{\text{п}}^{(\text{ц})}+\omega_{\text{п}}^{(\text{ц})}\right)T/2\right]}$, где $\omega_{\text{п}}^{(\text{ц})}$ — заданная частота среза цифрового ФВЧ
Полосовой фильтр	$Z=\dfrac{z^{-2}-\dfrac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+\dfrac{k-1}{k+1}}{\dfrac{k-1}{k+1}z^{-2}-\dfrac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+1}$	$\alpha=\dfrac{\cos\left[\left(\omega_{\text{п}2}^{(\text{ц})}+\omega_{\text{п}1}^{(\text{ц})}\right)T/2\right]}{\cos\left[\left(\omega_{\text{п}2}^{(\text{ц})}-\omega_{\text{п}1}^{(\text{ц})}\right)T/2\right]}$; $k=\operatorname{ctg}\left[\left(\omega_{\text{п}2}^{(\text{ц})}-\omega_{\text{п}1}^{(\text{ц})}\right)\dfrac{T}{2}\right]\times\operatorname{tg}\left(\Omega_{\text{п}}^{(\text{ц})}\dfrac{T}{2}\right)$, где $\omega_{\text{п}1}^{(\text{ц})}$, $\omega_{\text{п}2}^{(\text{ц})}$ — заданные нижняя и верхняя частоты среза полосового ЦФ
Режекторный фильтр	$Z=\dfrac{z^{-2}-\dfrac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+\dfrac{1-k}{1+k}}{\dfrac{1-k}{1+k}z^{-2}-\dfrac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+1}$	$\alpha=\dfrac{\cos\left[\left(\omega_{\text{п}2}^{(\text{ц})}+\omega_{\text{п}1}^{(\text{ц})}\right)T/2\right]}{\cos\left[\left(\omega_{\text{п}2}^{(\text{ц})}-\omega_{\text{п}1}^{(\text{ц})}\right)T/2\right]}$; $k=\operatorname{tg}\left[\left(\omega_{\text{п}2}^{(\text{ц})}-\omega_{\text{п}1}^{(\text{ц})}\right)\dfrac{T}{2}\right]\times\operatorname{tg}\left(\Omega_{\text{п}}^{(\text{ц})}\dfrac{T}{2}\right)$, где $\omega_{\text{п}1}^{(\text{ц})}$, $\omega_{\text{п}2}^{(\text{ц})}$ — заданные нижняя и верхняя частоты среза режекторного ЦФ

13.10. Обобщённое билинейное преобразование

Рассмотренные в § 13.7 — 13.9 методы расчёта передаточной функции ЦФ с заданными характеристиками представляют собой трёхэтапные процедуры (см. рис.13.1), включающие синтез нормированного аналогового ФНЧ-прототипа, денормирование частоты в аналоговой или цифровой области, а также дискретизацию аналогового фильтра.

В [8, 15] описан метод расчёта рекурсивных ЦФ, основанный на *обобщённом билинейном преобразовании*, при котором задача решается в два этапа:

1-й этап — синтез аналогового нормированного ФНЧ-прототипа;

2-й этап — дискретизация аналогового фильтра с одновременным денормированием частоты.

Метод обобщённого билинейного преобразования основан на объединении второго и третьего этапов проектирования рекурсивных ЦФ при первом подходе (см. рис.13.1,*а*) с использованием билинейного преобразования при дискретизации аналогового фильтра. В данном методе применяется следующая замена аргументов:

$$H(z) = \mathrm{H}(p)\big|_{p=\eta(z)} = \left[\mathrm{H}(s)\big|_{s=\xi(p)}\right]\Big|_{p=\eta(z)} =$$

$$= \mathrm{H}(s)\big|_{s=\Phi(z)}, \qquad (13.246)$$

где

$$s = \Phi(z) = \xi[\eta(z)]. \qquad (13.247)$$

В методе обобщённого билинейного преобразования естественным образом учитывается деформация шкалы «цифровых» частот, свойственная билинейному преобразованию, и осуществляется компенсация деформации частотной шкалы на этапе синтеза аналогового нормированного ФНЧ-прототипа.

Расчётные формулы для проектирования рекурсивных ЦФ методом обобщённого билинейного преобразования приведены в табл.13.13 [2, 3, 8, 15].

Таблица 13.13

Тип фильтра	Вид выражений	Расчётные формулы
1	**2**	**3**
ФНЧ	НГЦЧ	$W_{\text{п}}$, $W_{\text{з}}$
	ФЗАПФ	$s = g\dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$
	ПП	$g = \operatorname{ctg}(\pi W_{\text{п}})$
	ФСНАЦЧ	$\Omega = g\,\operatorname{tg}(\pi W)$
	НГАЧПЗ	$\Omega_{\text{з}} = \lvert\, g\,\operatorname{tg}(\pi W_{\text{з}})\rvert$

Окончание табл. 13.13

1	2	3
ФВЧ	НГЦЧ	$W_{\text{п}},\ W_{\text{з}}$
	ФЗАПФ	$s = g\dfrac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$
	ПП	$g = \operatorname{tg}(\pi W_{\text{п}})$
	ФСНАЦЧ	$\Omega = -g\operatorname{ctg}(\pi W)$
	НГАЧПЗ	$\Omega_{\text{з}} = \lvert -g\operatorname{ctg}(\pi W_{\text{з}})\rvert$
Полосовой фильтр	НГЦЧ	$W_{\text{з1}},\ W_{\text{п1}},\ W_{\text{п2}},\ W_{\text{з2}}$
	ФЗАПФ	$s = g\dfrac{1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}$
	ПП	$g = \operatorname{ctg}[\pi(W_{\text{п2}}-W_{\text{п1}})];\quad \zeta = \dfrac{\cos[\pi(W_{\text{п2}}+W_{\text{п1}})]}{\cos[\pi(W_{\text{п2}}-W_{\text{п1}})]}$
	ФСНАЦЧ	$\Omega = g\dfrac{\zeta-\cos(2\pi W)}{\sin(2\pi W)}$
	НГАЧПЗ	$\Omega_{\text{з}} = \min\{\lvert\Omega_{\text{з}}'\rvert, \lvert\Omega_{\text{з}}''\rvert\}$, где $\Omega_{\text{з}}' = g\dfrac{\zeta-\cos(2\pi W_{\text{з1}})}{\sin(2\pi W_{\text{з1}})};\quad \Omega_{\text{з}}'' = g\dfrac{\zeta-\cos(2\pi W_{\text{з2}})}{\sin(2\pi W_{\text{з2}})}$
Режекторный фильтр	НГЦЧ	$W_{\text{п1}},\ W_{\text{з1}},\ W_{\text{з2}},\ W_{\text{п2}}$
	ФЗАПФ	$s = g\dfrac{1-z^{-2}}{1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}}$
	ПП	$g = \operatorname{tg}[\pi(W_{\text{п2}}-W_{\text{п1}})];\quad \zeta = \dfrac{\cos[\pi(W_{\text{п2}}+W_{\text{п1}})]}{\cos[\pi(W_{\text{п2}}-W_{\text{п1}})]}$
	ФСНАЦЧ	$\Omega = g\dfrac{\sin(2\pi W)}{\cos(2\pi W)-\zeta}$
	НГАЧПЗ	$\Omega_{\text{з}} = \min\{\lvert\Omega_{\text{з}}'\rvert, \lvert\Omega_{\text{з}}''\rvert\}$, где $\Omega_{\text{з}}' = g\dfrac{\sin(2\pi W_{\text{з1}})}{\cos(2\pi W_{\text{з1}})-\zeta};\quad \Omega_{\text{з}}'' = g\dfrac{\sin(2\pi W_{\text{з2}})}{\cos(2\pi W_{\text{з2}})-\zeta}$

Во втором столбце таблицы (вид выражений) использованы следующие аббревиатуры:

НГЦЧ — нормированные граничные «цифровые» частоты;

ФЗАПФ — формула замены аргумента передаточной функции $\mathsf{H}(s)$;

ПП — параметры преобразования;

ФСНАЦЧ — формула связи нормированных «аналоговых» и «цифровых» частот;

НГАЧПЗ — нормированная граничная «аналоговая» частота полосы задерживания для ФНЧ-прототипа.

Последовательность проектирования рекурсивных ЦФ методом обобщённого билинейного преобразования следующая.

1. По заданным в техническом задании (см. рис.13.13) граничным частотам полос пропускания $f_{\text{п}i}$ и задерживания $f_{\text{з}i}$ $\left(i=\overline{1,\,2}\right)$, а также выбранной или заданной частоте дискретизации $f_{\text{д}}$, используя формулу $W = f \,/\, f_{\text{д}}$, определяют нормированные граничные «цифровые» частоты $W_{\text{п}i}$, $W_{\text{з}i}$ $\left(i=\overline{1,\,2}\right)$ ЦФ.

2. По нормированным граничным «цифровым» частотам полос пропускания $W_{\text{п}i}$ $\left(i=\overline{1,\,2}\right)$ с помощью выражений ПП (см. табл.13.13) вычисляют параметры преобразования g и ζ, входящие в формулы замены аргумента передаточной функции (ФЗАПФ), т.е. в формулы отображения точек S-плоскости в точки Z-плоскости.

3. По нормированным граничным «цифровым» частотам полос задерживания $W_{\text{з}i}$ $\left(i=\overline{1,\,2}\right)$ и параметрам преобразования g и ζ с помощью формул НГАЧПЗ (см. табл.13.13) вычисляют нормированную граничную частоту полосы задерживания $\Omega_{\text{з}}$ аналогового ФНЧ-прототипа.

4. Используя найденное значение $\Omega_{\text{з}}$ и заданные в ТЗ параметры затухания фильтра в полосах пропускания $a_{\text{п}}$ и задерживания $a_{\text{з}}$ (см. рис.13.13), проводят синтез аналогового нормированного ФНЧ-прототипа, в результате чего получают передаточную функцию $\mathsf{H}(s)$. Синтез выполняют по методикам, описанным в § 13.2 — 13.5. Передаточную функцию $\mathsf{H}(s)$ удобно представить в форме (13.158).

5. Осуществляя замену аргумента s в передаточной функции $\mathsf{H}(s)$ аналогового нормированного ФНЧ-прототипа выражениями ФЗАПФ (см. табл.13.13), получают передаточную функцию проектируемого цифрового фильтра $H(z)$. После этой замены необходимо выполнить элементарные алгебраические преобразования с целью приведения $H(z)$ к стандартному виду, зависящему от формы реализации фильтра.

При прямой форме реализации ЦФ передаточную функцию $H(z)$ требуется представить в дробно-рациональнм виде (3.7), при каскадной форме — в виде произведения [см. (13.213), (13.217) и (13.221)], а при параллельной форме — в виде суммы передаточных функций элементарных блоков. Передаточные

функции элементарных блоков, в свою очередь, также должны быть представлены в дробно-рациональном виде (3.7).

Применим изложенную методику к передаточной функции $\mathsf{H}(s)$ аналогового нормированного ФНЧ-прототипа при каскадной форме реализации [см. (13.158)]. В результате получим передаточную функцию $H(z)$ ЦФ в форме (13.213) при проектировании ФНЧ или ФВЧ и в форме (13.217) при проектировании полосового или режекторного фильтра. Для удобства пользования коэффициенты передаточной функции $H(z)$ цифрового фильтра в формах (13.213) и (13.217) сведены в табл.13.14.

Таблица 13.14

Тип фильтра	Передаточные функции блоков $\mathsf{H}_k(s)$ и $H_k(z)$	Выражения для коэффициентов цифрового фильтра
1	**2**	**3**
ФНЧ	$\dfrac{K_0}{Fs+Q} \to$ $\to \dfrac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}}$	n нечётн. $a_0 = K_0/\beta$; $a_1 = K_0/\beta$; $b_1 = (Q - Fg)/\beta$, где $\beta = Fg + Q$
		n чётн. $a_0 = K_0$; $a_1 = 0$; $b_1 = 0$
	$\prod_{k=1}^{r} \dfrac{Cs^2 + A_{0k}}{s^2 + B_{1k}s + B_{0k}} \to$ $\to \prod_{k=1}^{r} \dfrac{a_{0k} + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}$	$a_{0k} = \left(Cg^2 + A_{0k}\right)/\beta_k$; $a_{1k} = 2\left(A_{0k} - Cg^2\right)/\beta_k$; $a_{2k} = \left(Cg^2 + A_{0k}\right)/\beta_k$; $b_{1k} = 2\left(B_{0k} - g^2\right)/\beta_k$; $b_{2k} = \left(g^2 - B_{1k}g + B_{0k}\right)/\beta_k$, где $\beta_k = g^2 + B_{1k}g + B_{0k}$
ФВЧ	$\dfrac{K_0}{Fs+Q} \to$ $\to \dfrac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}}$	n нечётн. $a_0 = K_0/\beta$; $a_1 = -K_0/\beta$; $b_1 = (Fg - Q)/\beta$, где $\beta = Fg + Q$
		n чётн. $a_0 = K_0$; $a_1 = 0$; $b_1 = 0$

Продолжение табл.13.14

1	2	3
ФВЧ	$\prod_{k=1}^{r}\frac{Cs^2+A_{0k}}{s^2+B_{1k}s+B_{0k}}\to$ $\to\prod_{k=1}^{r}\frac{a_{0k}+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}{1+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}$	$a_{0k}=\left(Cg^2+A_{0k}\right)/\beta_k$; $a_{1k}=2\left(Cg^2-A_{0k}\right)/\beta_k$; $a_{2k}=\left(Cg^2+A_{0k}\right)/\beta_k$; $b_{1k}=2\left(g^2-B_{0k}\right)/\beta_k$; $b_{2k}=\left(g^2-B_{1k}g+B_{0k}\right)/\beta_k$, где $\beta_k=g^2+B_{1k}g+B_{0k}$
Полосовой фильтр	$\frac{K_0}{Fs+Q}\to$ $\to\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$	n нечётн. $a_0=K_0/\beta$; $a_1=0$; $a_2=-K_0/\beta$; $b_1=-2Fg\zeta/\beta$; $b_2=(Fg-Q)/\beta$, где $\beta=Fg+Q$
		n чётн. $a_0=K_0$; $a_1=0$; $a_2=0$; $b_1=0$; $b_2=0$
	$\prod_{k=1}^{r}\frac{Cs^2+A_{0k}}{s^2+B_{1k}s+B_{0k}}\to$ $\to\prod_{k=1}^{r}\frac{\sum_{i=0}^{4}a_{ik}z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{4}b_{ik}z^{-i}}$	$a_{0k}=\left(Cg^2+A_{0k}\right)/\beta_k$; $a_{1k}=-4Cg^2\zeta/\beta_k$; $a_{2k}=2\left\lfloor Cg^2\left(1+2\zeta^2\right)-A_{0k}\right\rfloor/\beta_k$; $a_{3k}=-4Cg^2\zeta/\beta_k$; $a_{4k}=\left(Cg^2+A_{0k}\right)/\beta_k$; $b_{1k}=-2g\zeta(B_{1k}+2g)/\beta_k$; $b_{2k}=2\left\lfloor g^2\left(1+2\zeta^2\right)-B_{0k}\right\rfloor/\beta_k$; $b_{3k}=2g\zeta(B_{1k}-2g)/\beta_k$; $b_{4k}=\left(g^2-B_{1k}g+B_{0k}\right)/\beta_k$, где $\beta_k=g^2+B_{1k}g+B_{0k}$

Окончание табл. 13.14

1	2	3
Режекторный фильтр	$\frac{K_0}{Fs+Q}\rightarrow$ $\rightarrow\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$	n нечётн. $a_0=K_0/\beta$; $a_1=-2K_0\zeta/\beta$; $a_2=K_0/\beta$; $b_1=-2Q\zeta/\beta$; $b_2=(Q-Fg)/\beta$, где $\beta=Fg+Q$
		n чётн. $a_0=K_0$; $a_1=0$; $a_2=0$; $b_1=0$; $b_2=0$
	$\prod_{k=1}^{r}\frac{Cs^2+A_{0k}}{s^2+B_{1k}s+B_{0k}}\rightarrow$ $\rightarrow\prod_{k=1}^{r}\frac{\sum_{i=0}^{4}a_{ik}z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{4}b_{ik}z^{-i}}$	$a_{0k}=\left(Cg^2+A_{0k}\right)/\beta_k$; $a_{1k}=-4A_{0k}\zeta/\beta_k$; $a_{2k}=2\left[A_{0k}\left(1+2\zeta^2\right)-Cg^2\right]/\beta_k$; $a_{3k}=-4A_{0k}\zeta/\beta_k$; $a_{4k}=\left(Cg^2+A_{0k}\right)/\beta_k$; $b_{1k}=-2\zeta(B_{1k}g+2B_{0k})/\beta_k$; $b_{2k}=2\left[B_{0k}\left(1+2\zeta^2\right)-g^2\right]/\beta_k$; $b_{3k}=2\zeta(B_{1k}g-2B_{0k})/\beta_k$; $b_{4k}=\left(g^2-B_{1k}g+B_{0k}\right)/\beta_k$, где $\beta_k=g^2+B_{1k}g+B_{0k}$
Здесь n — порядок аналогового нормированного ФНЧ-прототипа		

Пример 13.18. Методом обобщённого билинейного преобразования спроектировать цифровой ФНЧ с частотной характеристикой Баттерворта при следующих исходных данных:

— граничная частота полосы пропускания $f_{\text{п}}=1{,}0$ кГц;

— максимальное затухание в полосе пропускания $a_{\text{п}_{\text{дБ}}}=3$ дБ;

— граничная частота полосы задерживания $f_{\text{з}}=1{,}5$ кГц;

— минимальное затухание в полосе задерживания $a_{\text{з}_{\text{дБ}}}=40$ дБ;

— частота дискретизации $f_{\text{д}}=5{,}0$ кГц.

Расчёты проведём, используя систему компьютерной математики Mathcad.

По формуле $W = f / f_д$ находим нормированные граничные «цифровые» частоты полосы пропускания $W_п = 0{,}2$ и полосы задерживания $W_з = 0{,}3$, а по формулам табл.13.13 вычислим параметр преобразования $g = 1{,}376$, входящий в формулу замены аргумента передаточной функции $H(s)$, и нормированную граничную частоту полосы задерживания аналогового нормированного ФНЧ-прототипа $\Omega_з = 1{,}894$.

По методике § 13.2 при $\Omega_з = 1{,}894$, $a_п = 3$ дБ и $a_з = 40$ дБ проведём синтез нормированного аналогового ФНЧ-прототипа Баттерворта. В результате получим передаточную функцию $H(s)$ 8-го порядка в форме (13.158), коэффициенты которой равны соответственно (см. табл.13.1):

$$n = 8;\quad r = 4;\quad K_0 = 1;\quad F = 0;\quad Q = 1;\quad C = 0;\quad A_{0k} = 1;\ B_{0k} = 1\ \left(k = \overline{1,4}\right);$$
$$B_{11} = 0{,}39;\quad B_{12} = 1{,}111;\quad B_{13} = 1{,}663;\quad B_{14} = 1{,}962.$$

Используя формулы табл.13.14 для ФНЧ, вычислим коэффициенты передаточной функции $H(z)$ в форме (13.213) для проектируемого цифрового фильтра нижних частот 8-го порядка:

$$a_0 = 1;\quad a_1 = 0;\quad b_1 = 0;$$
$$a_{01} = 0{,}291;\quad a_{11} = 0{,}583;\quad a_{21} = 0{,}291;\quad b_{11} = -0{,}521;\quad b_{21} = 0{,}687;$$
$$a_{02} = 0{,}226;\quad a_{12} = 0{,}452;\quad a_{22} = 0{,}226;\quad b_{12} = -0{,}404;\quad b_{22} = 0{,}309;$$
$$a_{03} = 0{,}193;\quad a_{13} = 0{,}386;\quad a_{23} = 0{,}193;\quad b_{13} = -0{,}345;\quad b_{23} = 0{,}117;$$
$$a_{04} = 0{,}179;\quad a_{14} = 0{,}358;\quad a_{24} = 0{,}179;\quad b_{14} = -0{,}32;\quad b_{24} = 0{,}035.$$

Амплитудно-частотная характеристика спроектированного цифрового ФНЧ Баттерворта 8-го порядка ($N = 8$), рассчитанная по формуле (13.215), изображена на рис.13.25, где использована нормированная частота $W = f / f_д$.

На граничной частоте полосы пропускания $f_п = 1{,}0$ кГц затухание $a_п = 3$ дБ, а на граничной частоте полосы задерживания $f_з = 1{,}5$ кГц — $a_з = 44{,}397$ дБ. Таким образом, все параметры спроектированного цифрового ФНЧ соответствуют заданным техническим требованиям.

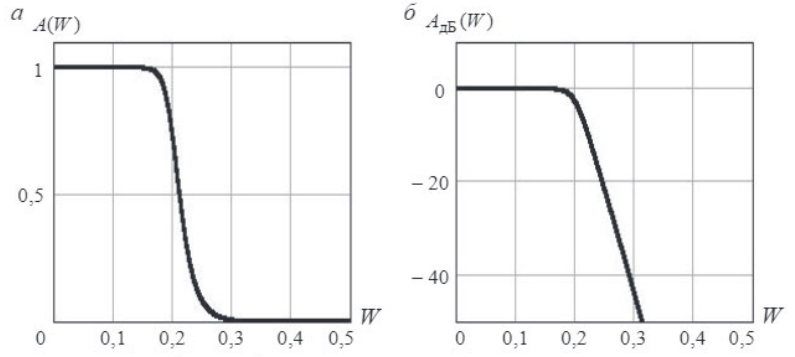


Рис.13.25. АЧХ цифрового фильтра нижних частот Баттерворта 8-го порядка, спроектированного в примере 13.18: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Пример 13.19. Методом обобщённого билинейного преобразования спроектировать цифровой ФВЧ с частотной характеристикой Чебышева типа 1 при следующих исходных данных:

— граничная частота полосы пропускания $f_{\text{п}} = 1{,}0$ кГц;

— максимальное затухание в полосе пропускания $a_{\text{п}_{\text{дБ}}} = 1{,}5$ дБ;

— граничная частота полосы задерживания $f_{\text{з}} = 667$ Гц;

— минимальное затухание в полосе задерживания $a_{\text{з}_{\text{дБ}}} = 40$ дБ;

— частота дискретизации $f_{\text{д}} = 5{,}0$ кГц.

По формуле $W = f \big/ f_{\text{д}}$ находим нормированные граничные «цифровые» частоты полосы пропускания $W_{\text{п}} = 0{,}2$ и полосы задерживания $W_{\text{з}} = 0{,}133$, а по формулам табл.13.13 вычислим параметр преобразования $g = 0{,}727$, входящий в формулу замены аргумента передаточной функции $\mathrm{H}(s)$, и нормированную граничную частоту полосы задерживания аналогового нормированного ФНЧ-прототипа $\Omega_{\text{з}} = 1{,}631$.

По методике § 13.3 при $\Omega_{\text{з}} = 1{,}631$, $a_{\text{п}} = 1{,}5$ дБ и $a_{\text{з}} = 40$ дБ проведём синтез нормированного аналогового ФНЧ-прототипа Чебышева типа 1. В результате получим передаточную функцию $\mathrm{H}(s)$ 6-го порядка в форме (13.158), коэффициенты которой равны соответственно (см. табл.13.1):

$$n = 6;\quad r = 3;\quad K_0 = 0{,}049;\quad F = 0;\quad Q = 1;\quad C = 0;\quad A_{0k} = 1\ \left(k = \overline{1,3}\right);$$

$$B_{11} = 0{,}107;\quad B_{01} = 0{,}975;\quad B_{12} = 0{,}291;\quad B_{02} = 0{,}542;\quad B_{13} = 0{,}397;\quad B_{03} = 0{,}109.$$

Используя формулы табл.13.14 для ФВЧ, вычислим коэффициенты передаточной функции $H(z)$ в форме (13.213) для проектируемого цифрового фильтра верхних частот 6-го порядка:

$$a_0 = 0{,}049;\quad a_1 = 0;\quad b_1 = 0;$$

$$a_{01} = 0{,}633;\quad a_{11} = -1{,}265;\quad a_{21} = 0{,}633;\quad b_{11} = -0{,}566;\quad b_{21} = 0{,}902;$$

$$a_{02} = 0{,}78;\quad a_{12} = -1{,}561;\quad a_{22} = 0{,}78;\quad b_{12} = -0{,}023;\quad b_{22} = 0{,}67;$$

$$a_{03} = 1{,}08;\quad a_{13} = -2{,}16;\quad a_{23} = 1{,}08;\quad b_{13} = 0{,}904;\quad b_{23} = 0{,}376.$$

АЧХ спроектированного цифрового ФВЧ Чебышева первого типа 6-го порядка ($N = 6$), рассчитанная по формуле (13.215), изображена на рис.13.26.

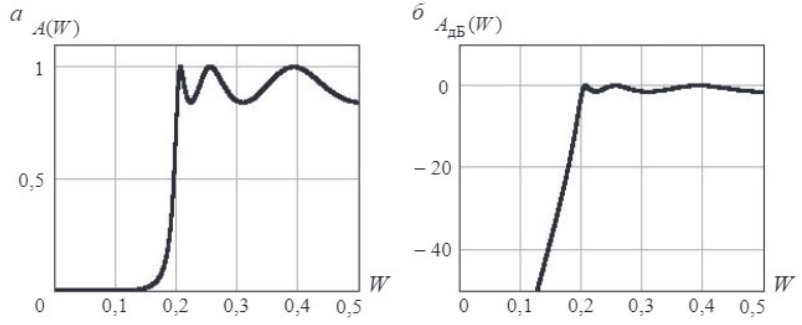


Рис.13.26. АЧХ цифрового фильтра верхних частот Чебышева первого типа 6-го порядка, спроектированного в примере 13.19: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

На граничной частоте полосы пропускания $f_{\text{п}} = 1{,}0$ кГц затухание $a_{\text{п}} = 1{,}5$ дБ, а на граничной частоте полосы задерживания $f_{\text{з}} = 667$ Гц — $a_{\text{з}} = 45{,}968$ дБ. Таким образом, все параметры спроектированного цифрового ФВЧ соответствуют заданным техническим требованиям.

Пример 13.20. Методом обобщённого билинейного преобразования спроектировать цифровой полосовой фильтр с частотной характеристикой Чебышева типа 2 при следующих исходных данных:

— граничные частоты полосы пропускания: $f_{\text{п}1} = 20$ кГц, $f_{\text{п}2} = 22$ кГц;

— максимальное затухание в полосе пропускания $a_{\text{п}_{\text{дБ}}} = 1{,}5$ дБ;

— граничные частоты полос задерживания: $f_{\text{з}1} = 19{,}3$ кГц, $f_{\text{з}2} = 22{,}7$ кГц;

— минимальное затухание в полосах задерживания $a_{\text{з}_{\text{дБ}}} = 40$ дБ;

— частота дискретизации $f_{\text{д}} = 70$ кГц.

Для проектирования фильтра составлена программа в системе компьютерной математики Mathcad.

Используя формулу $W = f \,/\, f_{\text{д}}$, вычисляем нормированные граничные «цифровые» частоты полосы пропускания ($W_{\text{п}1} = 0{,}286$; $W_{\text{п}2} = 0{,}314$) и полос задерживания ($W_{\text{з}1} = 0{,}276$; $W_{\text{з}2} = 0{,}324$), а по формулам табл.13.13 находим параметры преобразования ($g = 11{,}111$ и $\zeta = -0{,}31$), входящие в формулу замены аргумента передаточной функции $\mathrm{H}(s)$, и нормированную граничную частоту полосы задерживания аналогового нормированного ФНЧ-прототипа $\Omega_{\text{з}} = 1{,}682$.

По методике § 13.3 при $\Omega_{\text{з}} = 1{,}682$, $a_{\text{п}} = 1{,}5$ дБ и $a_{\text{з}} = 40$ дБ проведём синтез нормированного аналогового ФНЧ-прототипа Чебышева 2. В результате получим передаточную функцию $\mathrm{H}(s)$ 6-го порядка в форме (13.158), коэффициенты которой равны соответственно (см. табл.13.1):

$$n = 6;\quad r = 3;\quad K_0 = 0{,}01;\quad F = 0;\quad Q = 1;\quad C = 1;$$

$$A_{01} = 3{,}032;\qquad B_{11} = 0{,}45;\quad B_{01} = 1{,}46;$$

$$A_{02} = 5{,}657;\qquad B_{12} = 1{,}584;\quad B_{02} = 1{,}88;$$

$$A_{03} = 42{,}228;\qquad B_{13} = 3{,}039;\quad B_{03} = 2{,}639.$$

Используя формулы табл.13.14 для полосового фильтра, вычислим коэффициенты передаточной функции $H(z)$ проектируемого цифрового полосового фильтра 12-го порядка в форме (13.217):

$$a_0 = 0{,}01;\quad a_1 = 0;\quad a_2 = 0;\qquad b_1 = 0;\quad b_2 = 0;$$

$$a_{01} = 0{,}974;\quad a_{11} = 1{,}179;\quad a_{21} = 2{,}22;\quad a_{31} = 1{,}179;\quad a_{41} = 0{,}974;$$

$$b_{11} = 1{,}203;\quad b_{21} = 2{,}244;\quad b_{31} = 1{,}155;\quad b_{41} = 0{,}923;$$

$$a_{02} = 0{,}903;\quad a_{12} = 1{,}072;\quad a_{22} = 1{,}981;\quad a_{32} = 1{,}072;\quad a_{42} = 0{,}903;$$

$$b_{12} = 1{,}148;\quad b_{22} = 2{,}034;\quad b_{32} = 0{,}995;\quad b_{42} = 0{,}754;$$

$$a_{03} = 1{,}036;\quad a_{13} = 0{,}958;\quad a_{23} = 1{,}314;\quad a_{33} = 0{,}958;\quad a_{43} = 1{,}036;$$

$$b_{13} = 1{,}09;\quad b_{23} = 1{,}809;\quad b_{33} = 0{,}827;\quad b_{43} = 0{,}578.$$

АЧХ спроектированного полосового ЦФ Чебышева второго типа 12-го порядка ($N = 12$), рассчитанная по формуле (13.219), изображена на рис.13.27.

На граничных частотах полосы пропускания $f_{п1} = 20$ кГц и $f_{п2} = 22$ кГц затухание $a_п = 0{,}276$ дБ (что меньше допустимого $a_п = 1{,}5$ дБ). На граничных частотах полос задерживания затухания получились различные: на $f_{з1} = 19{,}3$ кГц $a_з = 40$ дБ, а на $f_{з2} = 22{,}7$ кГц $a_з = 68{,}648$ дБ, т.е. правый срез АЧХ несколько круче левого. Минимальное затухание в полосе задерживания $a_{з\,min} = 40$ дБ. Таким образом, все параметры спроектированного цифрового полосового фильтра соответствуют заданным техническим требованиям.

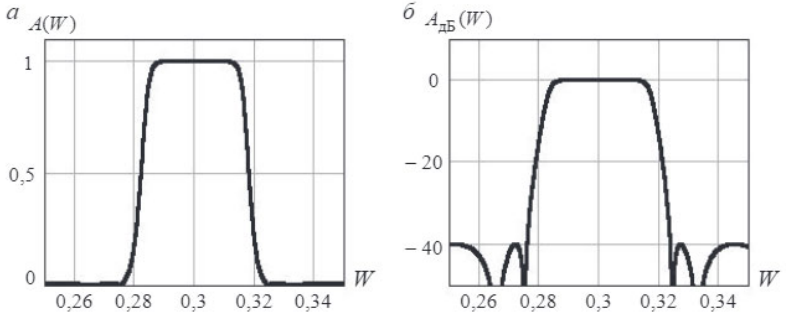


Рис.13.27. АЧХ цифрового полосового фильтра Чебышева второго типа 12-го порядка, спроектированного в примере 13.20: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Пример 13.21. Методом обобщённого билинейного преобразования спроектировать цифровой режекторный фильтр эллиптического типа при следующих исходных данных:

— граничные частоты полос пропускания $f_{п1} = 20$ кГц, $f_{п2} = 22$ кГц;

— максимальное затухание в полосах пропускания $a_{п\,дБ} = 1{,}5$ дБ;

— граничные частоты полосы задерживания $f_{з1} = 20{,}3$ кГц и $f_{з2} = 21{,}7$ кГц;

— минимальное затухание в полосе задерживания $a_{з\,дБ} = 40$ дБ;

— частота дискретизации $f_д = 70$ кГц.

Расчёты проведём, используя систему компьютерной математики Mathcad.

Используя формулу $W = f / f_д$, вычисляем нормированные граничные «цифровые» частоты полос пропускания ($W_{п1} = 0{,}286$; $W_{п2} = 0{,}314$) и полосы задерживания ($W_{з1} = 0{,}29$; $W_{з2} = 0{,}31$), а по формулам табл.13.13 находим параметры преобразования ($g = 0{,}09$ и $\zeta = -0{,}31$), входящие в формулу замены аргумента передаточной функции $H(s)$, и нормированную граничную частоту полосы задерживания аналогового нормированного ФНЧ-прототипа $\Omega_з = 1{,}416$.

По методике § 13.4 при $\Omega_з = 1{,}416$, $a_п = 1{,}5$ дБ и $a_з = 40$ дБ проведём синтез нормированного аналогового ФНЧ-прототипа эллиптического типа. В результате получим передаточную функцию $H(s)$ 5-го порядка в форме (13.158), коэффициенты которой равны соответственно (см. табл.13.1):

$$n = 5;\quad r = 2;\quad K_0 = 0{,}014;\quad F = 1;\quad Q = 0{,}295;\quad C = 1;$$

$A_{01} = 4{,}704$; $B_{11} = 0{,}39$; $B_{01} = 0{,}504$; $A_{02} = 2{,}152$; $B_{12} = 0{,}109$; $B_{02} = 0{,}979$.

Используя формулы табл.13.14 для режекторного фильтра, вычислим коэффициенты передаточной функции $H(z)$ проектируемого цифрового режекторного фильтра 10-го порядка в форме (13.217):

$$a_0 = 0{,}037;\quad a_1 = 0{,}023;\quad a_2 = 0{,}037;\quad b_1 = 0{,}476;\quad b_2 = 0{,}533;$$
$$a_{01} = 8{,}612;\quad a_{11} = 10{,}67;\quad a_{21} = 20{,}475;\quad a_{31} = 10{,}67;\quad a_{41} = 8{,}612;$$
$$b_{11} = 1{,}183;\quad b_{21} = 2{,}167;\quad b_{31} = 1{,}103;\quad b_{41} = 0{,}872;$$
$$a_{02} = 2{,}167;\quad a_{12} = 2{,}68;\quad a_{22} = 5{,}134;\quad a_{32} = 2{,}68;\quad a_{42} = 2{,}167;$$
$$b_{12} = 1{,}225;\quad b_{22} = 2{,}326;\quad b_{32} = 1{,}213;\quad b_{42} = 0{,}98.$$

АЧХ спроектированного режекторного ЦФ 10-го порядка ($N = 10$), рассчитанная по формуле (13.219), изображена на рис.13.28, где использована нормированная частота $W = f / f_д$.

На граничных частотах полос пропускания $f_{п1} = 20$ кГц и $f_{п2} = 22$ кГц затухание $a_п = 1{,}5$ дБ. На граничных частотах полос задерживания затухания получились различные: на $f_{з1} = 20{,}3$ кГц $a_з = 52{,}398$ дБ, а на $f_{з2} = 21{,}7$ кГц $a_з = 61{,}803$ дБ, т.е. правый срез АЧХ несколько круче левого. Минимальное затухание в полосе задерживания $a_{з_{min}} = 52{,}398$ дБ. Таким образом, все параметры спроектированного цифрового режекторного фильтра соответствуют заданным техническим требованиям.

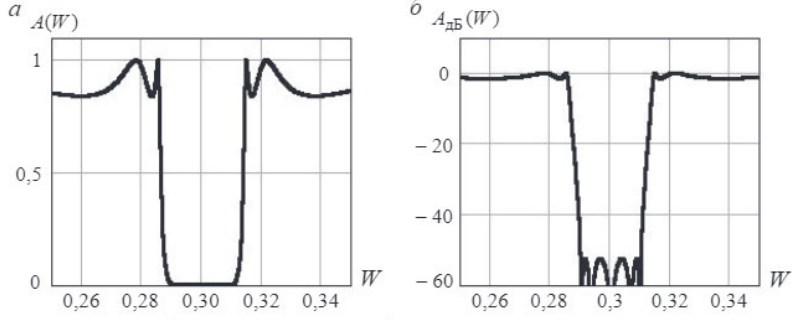


Рис.13.28. АЧХ цифрового режекторного фильтра эллиптического типа 10-го порядка, спроектированного в примере 13.21: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Предложенная методика синтеза ЦФ на основе обобщённого билинейного преобразования приводит к каскадной структуре фильтра, состоящего из блоков первого и второго порядков при синтезе ФНЧ или ФВЧ [см. (13.213)] и из блоков второго и четвёртого порядков при синтезе полосового или режекторного фильтров [см. (13.217)].

Иногда желательна реализация полосового или режекторного ЦФ в виде каскадного соединения блоков первого и второго порядков. При этом возникает необходимость определения полюсов и нулей передаточных функций блоков четвёртого порядка с целью разбиения каждого из них на два блока второго по-

рядка. Для того чтобы избежать процедуры нахождения корней полиномов четвёртого порядка, используем следующий приём.

Передаточную функцию $H(s)$ аналогового нормированного ФНЧ-прототипа (13.158) выразим через полюсы и нули, т.е. представим в форме (13.175), где комплексно-сопряжённые полюсы s_{pk}, s_{pk}^* и нули (если они имеются) s_{0k}, s_{0k}^* $\left(k=\overline{1,\ r}\right)$ передаточной функции $H(s)$ определяются либо непосредственно в процессе синтеза ФНЧ-прототипа (см. § 13.2, 13.3 и 13.5), либо вычисляются по формулам (13.176) и (13.177). Используем обозначения (13.178) и (13.179).

Целесообразно раздельно рассмотреть случаи наличия и отсутствия конечных нулей передаточной функции $H(s)$. Подробно исследуем более сложный случай, когда фильтр имеет конечные нули передаточной функции.

♦ В случае полосового фильтра подстановка $s=g\dfrac{1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}$ (см. табл.13.13) в выражение (13.175) при наличии конечных нулей ФНЧ-прототипа приводит к формуле

$$H(z)=\frac{K_0}{F\,g\dfrac{1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}+Q}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{r}\frac{\left(g\dfrac{1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}-j\lambda_k\right)\left(g\dfrac{1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}+j\lambda_k\right)}{\left(g\dfrac{1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}-\sigma_k-j\Omega_k\right)\left(g\dfrac{1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}-\sigma_k+j\Omega_k\right)}=$$

$$=\frac{K_0\left(1-z^{-2}\right)}{Fg\left(1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}\right)+Q\left(1-z^{-2}\right)}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{r}\frac{\left[\left(g+j\lambda_k\right)z^{-2}-2g\zeta z^{-1}+\left(g-j\lambda_k\right)\right]\times}{\left[\left(g+\sigma_k+j\Omega_k\right)z^{-2}-2g\zeta z^{-1}+\left(g-\sigma_k-j\Omega_k\right)\right]\times}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{\times\left[\left(g-j\lambda_k\right)z^{-2}-2g\zeta z^{-1}+\left(g+j\lambda_k\right)\right]}{\times\left[\left(g+\sigma_k-j\Omega_k\right)z^{-2}-2g\zeta z^{-1}+\left(g-\sigma_k+j\Omega_k\right)\right]}=$$

$$=\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}\prod_{k=1}^{r}\frac{\left[\left(g+j\lambda_k\right)-2g\zeta z+\left(g-j\lambda_k\right)z^2\right]\times}{\left[\left(g+\sigma_k+j\Omega_k\right)-2g\zeta\ z+\left(g-\sigma_k-j\Omega_k\right)z^2\right]\times}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{\times\left[\left(g-j\lambda_k\right)-2g\zeta\ z+\left(g+j\lambda_k\right)z^2\right]}{\times\left[\left(g+\sigma_k-j\Omega_k\right)-2g\zeta\ z+\left(g-\sigma_k+j\Omega_k\right)z^2\right]}=$$

$$= \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \prod_{k=1}^{r} \frac{\overline{\mathrm{K}}_k^2 \left(\frac{g + j\lambda_k}{g - j\lambda_k} - \frac{2g\zeta}{g - j\lambda_k} z + z^2 \right) \times}{\left(\frac{g + \sigma_k + j\Omega_k}{g - \sigma_k - j\Omega_k} - \frac{2g\zeta}{g - \sigma_k - j\Omega_k} z + z^2 \right) \times} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\times \left(\frac{g - j\lambda_k}{g + j\lambda_k} - \frac{2g\zeta}{g + j\lambda_k} z + z^2 \right)}{\times \left(\frac{g + \sigma_k - j\Omega_k}{g - \sigma_k + j\Omega_k} - \frac{2g\zeta}{g - \sigma_k + j\Omega_k} z + z^2 \right)}, \qquad (13.248)$$

где

$$a_0 = \frac{K_0}{Fg + Q}; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = \frac{-K_0}{Fg + Q}; \quad b_1 = \frac{-2Fg\zeta}{Fg + Q}; \quad b_2 = \frac{Fg - Q}{Fg + Q}; \qquad (13.249)$$

$$\overline{\mathrm{K}}_k = \sqrt{\frac{g^2 + \lambda_k^2}{(g - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2}}, \quad k = \overline{1,\ r}. \qquad (13.250)$$

Коэффициенты F и Q определяют по табл.13.1.

Найдём полюсы и нули функции под знаком произведения в (13.248):

$$\begin{cases} z_{pk}^{(1,2)} = \frac{g\zeta}{g - \sigma_k - j\Omega_k} \pm \sqrt{\left(\frac{g\zeta}{g - \sigma_k - j\Omega_k} \right)^2 - \frac{g + \sigma_k + j\Omega_k}{g - \sigma_k - j\Omega_k}}; \\ z_{pk}^{(3,4)} = \frac{g\zeta}{g - \sigma_k + j\Omega_k} \pm \sqrt{\left(\frac{g\zeta}{g - \sigma_k + j\Omega_k} \right)^2 - \frac{g + \sigma_k - j\Omega_k}{g - \sigma_k + j\Omega_k}}, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}; \qquad (13.251)$$

$$\begin{cases} z_{0k}^{(1,2)} = \frac{g\zeta}{g - j\lambda_k} \pm \sqrt{\left(\frac{g\zeta}{g - j\lambda_k} \right)^2 - \frac{g + j\lambda_k}{g - j\lambda_k}}; \\ z_{0k}^{(3,4)} = \frac{g\zeta}{g + j\lambda_k} \pm \sqrt{\left(\frac{g\zeta}{g + j\lambda_k} \right)^2 - \frac{g - j\lambda_k}{g + j\lambda_k}}, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}. \qquad (13.252)$$

Введём обозначения

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{g\zeta}{g - \sigma_k - j\Omega_k}; \quad \beta_k = \frac{g\zeta}{g - \sigma_k + j\Omega_k}; \\ \gamma_k = \sqrt{\left(\frac{g\zeta}{g - \sigma_k - j\Omega_k} \right)^2 - \frac{g + \sigma_k + j\Omega_k}{g - \sigma_k - j\Omega_k}}; \quad k = \overline{1,\ r}; \\ \eta_k = \sqrt{\left(\frac{g\zeta}{g - \sigma_k + j\Omega_k} \right)^2 - \frac{g + \sigma_k - j\Omega_k}{g - \sigma_k + j\Omega_k}}, \end{cases} \qquad (13.253)$$

$$\begin{cases} \mu_k = \dfrac{g\zeta}{g - j\lambda_k}; \quad \nu_k = \dfrac{g\zeta}{g + j\lambda_k}; \\ \chi_k = \sqrt{\left(\dfrac{g\zeta}{g - j\lambda_k}\right)^2 - \dfrac{g + j\lambda_k}{g - j\lambda_k}}; \quad k = \overline{1,\ r}. \\ \vartheta_k = \sqrt{\left(\dfrac{g\zeta}{g + j\lambda_k}\right)^2 - \dfrac{g - j\lambda_k}{g + j\lambda_k}}, \end{cases} \tag{13.254}$$

Тогда выражения для полюсов (13.251) и нулей (13.252) функции под знаком произведения в (13.248) можно записать в компактной форме:

$$\begin{cases} z_{pk}^{(1,2)} = \alpha_k \pm \gamma_k; \\ z_{pk}^{(3,4)} = \beta_k \pm \eta_k, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}; \tag{13.255}$$

$$\begin{cases} z_{0k}^{(1,2)} = \mu_k \pm \chi_k; \\ z_{0k}^{(3,4)} = \nu_k \pm \vartheta_k, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}. \tag{13.256}$$

Аналитическое исследование полюсов (13.255) и нулей (13.256) на комплексную сопряжённость представляет довольно сложную задачу, поэтому воспользуемся численными методами. Численные расчёты показали, что комплексно-сопряжёнными являются полюсы $z_{pk}^{(1)}$ и $z_{pk}^{(3)}$, $z_{pk}^{(2)}$ и $z_{pk}^{(4)}$, а также нули $z_{0k}^{(1)}$ и $z_{0k}^{(3)}$, $z_{0k}^{(1)}$ и $z_{0k}^{(4)}$ $\left(k = \overline{1,\ r}\right)$ передаточной функции полосового фильтра $H(z)$, т.е. $z_{pk}^{(3)} = z_{pk}^{(1)*}$; $z_{pk}^{(4)} = z_{pk}^{(2)*}$; $z_{0k}^{(3)} = z_{0k}^{(1)*}$; $z_{0k}^{(4)} = z_{0k}^{(2)*}$ $\left(k = \overline{1,\ r}\right)$. Для получения блоков второго порядка, передаточные функции которых имеют вещественные коэффициенты, комплексно-сопряжённые полюсы (и нули, если они имеются) следует сгруппировать попарно. Тогда

$$H(z) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \prod\limits_{k=1}^{r} \dfrac{\overline{\Gamma}_k\left(1 - z^{-2}\right)}{\left(1 - z_{pk}^{(1)} z^{-1}\right)\left(1 - z_{pk}^{(3)} z^{-1}\right)} \dfrac{\overline{\Gamma}_k\left(1 - z^{-2}\right)}{\left(1 - z_{pk}^{(2)} z^{-1}\right)\left(1 - z_{pk}^{(4)} z^{-1}\right)}; \\ \dfrac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \prod\limits_{k=1}^{r} \dfrac{\overline{\mathrm{K}}_k\left(1 - z_{0k}^{(1)} z^{-1}\right)\left(1 - z_{0k}^{(3)} z^{-1}\right)}{\left(1 - z_{pk}^{(1)} z^{-1}\right)\left(1 - z_{pk}^{(3)} z^{-1}\right)} \dfrac{\overline{\mathrm{K}}_k\left(1 - z_{0k}^{(2)} z^{-1}\right)\left(1 - z_{0k}^{(4)} z^{-1}\right)}{\left(1 - z_{pk}^{(2)} z^{-1}\right)\left(1 - z_{pk}^{(4)} z^{-1}\right)}, \end{cases} \tag{13.257}$$

где первое выражение в правой части соответствует случаю отсутствия, а второе — случаю наличия нулей передаточной функции ФНЧ-прототипа $\mathrm{H}(s)$;

$$\overline{\Gamma}_k = \frac{1}{\sqrt{(g - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2}}, \quad k = \overline{1,\ r}. \tag{13.258}$$

Передаточная функция (13.257) путём перемножения биномов в круглых скобках приводится к форме (13.221). Для удобства пользования её коэффициенты сведены в табл.13.15.

Таблица 13.15

Коэффициенты в (13.221)	ФНЧ-прототип без нулей передаточной функции		ФНЧ-прототип с нулями передаточной функции	
	n нечётн.	n чётн.	n нечётн.	n чётн.
a_0	$K_0/(Fg+Q)$	K_0	$K_0/(Fg+Q)$	K_0
a_1	0	0	0	0
a_2	$-K_0/(Fg+Q)$	0	$-K_0/(Fg+Q)$	0
b_1	$-2Fg\zeta/(Fg+Q)$	0	$-2Fg\zeta/(Fg+Q)$	0
b_2	$(Fg-Q)/(Fg+Q)$	0	$(Fg-Q)/(Fg+Q)$	0
a_{0k}	$\overline{\Gamma}_k$		$\overline{\mathrm{K}}_k$	
a_{1k}	0		$-\overline{\mathrm{K}}_k[(\mu_k+\chi_k)+(\nu_k+\vartheta_k)]$	
a_{2k}	$-\overline{\Gamma}_k$		$\overline{\mathrm{K}}_k(\mu_k+\chi_k)(\nu_k+\vartheta_k)$	
b_{1k}	$-(\alpha_k+\gamma_k)-(\beta_k+\eta_k)$		$-(\alpha_k+\gamma_k)-(\beta_k+\eta_k)$	
b_{2k}	$(\alpha_k+\gamma_k)(\beta_k+\eta_k)$		$(\alpha_k+\gamma_k)(\beta_k+\eta_k)$	
$\overline{a}_{0k}$	$\overline{\Gamma}_k$		$\overline{\mathrm{K}}_k$	
$\overline{a}_{1k}$	0		$-\overline{\mathrm{K}}_k[(\mu_k-\chi_k)+(\nu_k-\vartheta_k)]$	
$\overline{a}_{2k}$	$-\overline{\Gamma}_k$		$\overline{\mathrm{K}}_k(\mu_k-\chi_k)(\nu_k-\vartheta_k)$	
$\overline{b}_{1k}$	$-(\alpha_k-\gamma_k)-(\beta_k-\eta_k)$		$-(\alpha_k-\gamma_k)-(\beta_k-\eta_k)$	
$\overline{b}_{2k}$	$(\alpha_k-\gamma_k)(\beta_k-\eta_k)$		$(\alpha_k-\gamma_k)(\beta_k-\eta_k)$	
Здесь n — порядок аналогового нормированного ФНЧ-прототипа; $k=\overline{1,\ r}$				

Пример 13.22. Методом обобщённого билинейного преобразования спроектировать цифровой полосовой фильтр с частотной характеристикой Чебышева типа 2 при следующих исходных данных (см. пример 13.20):

— граничные частоты полосы пропускания: $f_{\text{п}1}=20$ кГц, $f_{\text{п}2}=22$ кГц;

— максимальное затухание в полосе пропускания $a_{\text{п}_{\text{дБ}}}=1{,}5$ дБ;

— граничные частоты полос задерживания: $f_{\text{з}1}=19{,}3$ кГц, $f_{\text{з}2}=22{,}7$ кГц;

— минимальное затухание в полосах задерживания $a_{\text{з}_{\text{дБ}}}=40$ дБ;

— частота дискретизации $f_{\text{д}}=70$ кГц;

— передаточную функцию ЦФ представить в форме (13.221).

Для проектирования фильтра составлена программа в системе компьютерной математики Mathcad.

Используем полученный в примере 13.20 нормированный аналоговый ФНЧ-прототип Чебышева типа 2 с передаточной функцией $H(s)$ в форме (13.158), коэффициенты которой следующие:

$$n=6;\quad r=3;\quad K_0=0{,}01;\quad F=0;\quad Q=1;\quad C=1;$$

$$A_{01}=3{,}032;\qquad B_{11}=0{,}45;\quad B_{01}=1{,}46;$$

$$A_{02}=5{,}657;\qquad B_{12}=1{,}584;\quad B_{02}=1{,}88;$$

$$A_{03}=42{,}228;\qquad B_{13}=3{,}039;\quad B_{03}=2{,}639.$$

По формулам табл.13.15 вычислим коэффициенты передаточной функции $H(z)$ проектируемого полосового ЦФ 12-го порядка в форме (13.221):

$$a_0=0{,}01;\quad a_1=0;\quad a_2=0;\qquad b_1=0;\quad b_2=0;$$

$$a_{01}=0{,}987;\quad a_{11}=0{,}307;\quad a_{21}=0{,}987;\qquad b_{11}=0{,}403;\quad b_{21}=0{,}959;$$

$$\overline{a}_{01}=0{,}987;\quad \overline{a}_{11}=0{,}888;\quad \overline{a}_{21}=0{,}987;\qquad \overline{b}_{11}=0{,}8;\quad \overline{b}_{21}=0{,}962;$$

$$a_{02}=0{,}95;\quad a_{12}=0{,}185;\quad a_{22}=0{,}95;\qquad b_{12}=0{,}394;\quad b_{22}=0{,}864;$$

$$\overline{a}_{02}=0{,}95;\quad \overline{a}_{12}=0{,}943;\quad \overline{a}_{22}=0{,}95;\qquad \overline{b}_{12}=0{,}754;\quad \overline{b}_{22}=0{,}872;$$

$$a_{03}=1{,}018;\quad a_{13}=-0{,}52;\quad a_{23}=1{,}018;\qquad b_{13}=0{,}456;\quad b_{23}=0{,}756;$$

$$\overline{a}_{03}=1{,}018;\quad \overline{a}_{13}=1{,}461;\quad \overline{a}_{23}=1{,}018;\qquad \overline{b}_{12}=0{,}633;\quad \overline{b}_{22}=0{,}764.$$

АЧХ спроектированного полосового ЦФ 12-го порядка ($N=12$), рассчитанная по формуле (13.223), полностью совпадает с АЧХ, приведённой на рис.13.27 (см. пример 13.20), которая построена по формуле (13.219).

♦ В случае режекторного фильтра подстановка $s=g\dfrac{1-z^{-2}}{1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}}$ (см. табл.13.13) в выражение (13.175) при наличии конечных нулей ФНЧ-прототипа приводит к формуле

$$H(z)=\frac{K_0}{F\,g\dfrac{1-z^{-2}}{1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}}+Q}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{r}\frac{\left(g\dfrac{1-z^{-2}}{1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}}-j\lambda_k\right)\left(g\dfrac{1-z^{-2}}{1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}}+j\lambda_k\right)}{\left(g\dfrac{1-z^{-2}}{1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}}-\sigma_k-j\Omega_k\right)\left(g\dfrac{1-z^{-2}}{1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}}-\sigma_k+j\Omega_k\right)}=$$

$$=\frac{K_0\left(1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}\right)}{Fg\left(1-z^{-2}\right)+Q\left(1-2\zeta z^{-1}+z^{-2}\right)}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{r}\frac{\left[-\left(g+j\lambda_k\right)z^{-2}+2j\lambda_k\zeta\,z^{-1}+\left(g-j\lambda_k\right)\right]\times}{\left[-\left(g+\sigma_k+j\Omega_k\right)z^{-2}+2\zeta\left(\sigma_k+j\Omega_k\right)z^{-1}+\left(g-\sigma_k-j\Omega_k\right)\right]\times}\rightarrow$$

$$\to\frac{\times\left[-(g-j\lambda_k)z^{-2}-2j\lambda_k\zeta\ z^{-1}+(g+j\lambda_k)\right]}{\times\left[-(g+\sigma_k-j\Omega_k)z^{-2}+2\zeta(\sigma_k-j\Omega_k)z^{-1}+(g-\sigma_k+j\Omega_k)\right]}=$$

$$=\frac{K_0-2K_0\zeta z^{-1}+K_0z^{-2}}{(Fg+Q)-2Q\zeta z^{-1}+(Q-Fg)z^{-2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{r}\frac{\left[-(g+j\lambda_k)+2j\lambda_k\zeta z+(g-j\lambda_k)z^2\right]\times}{\left[-(g+\sigma_k+j\Omega_k)+2\zeta(\sigma_k+j\Omega_k)z+(g-\sigma_k-j\Omega_k)z^2\right]\times}\to$$

$$\to\frac{\times\left[-(g-j\lambda_k)-2j\lambda_k\zeta z+(g+j\lambda_k)z^2\right]}{\times\left[-(g+\sigma_k-j\Omega_k)+2\zeta(\sigma_k-j\Omega_k)z+(g-\sigma_k+j\Omega_k)z^2\right]}=$$

$$=\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}\prod_{k=1}^{r}\frac{\overline{\mathrm{K}}_k^2\left(-\dfrac{g+j\lambda_k}{g-j\lambda_k}+\dfrac{2j\lambda_k\zeta}{g-j\lambda_k}z+z^2\right)\times}{\left(-\dfrac{g+\sigma_k+j\Omega_k}{g-\sigma_k-j\Omega_k}+\dfrac{2\zeta(\sigma_k+j\Omega_k)}{g-\sigma_k-j\Omega_k}z+z^2\right)\times}\to$$

$$\to\frac{\times\left(-\dfrac{g-j\lambda_k}{g+j\lambda_k}-\dfrac{2j\lambda_k\zeta}{g+j\lambda_k}z+z^2\right)}{\times\left(-\dfrac{g+\sigma_k-j\Omega_k}{g-\sigma_k+j\Omega_k}+\dfrac{2\zeta(\sigma_k-j\Omega_k)}{g-\sigma_k+j\Omega_k}z+z^2\right)},\qquad(13.259)$$

где

$$a_0=\frac{K_0}{Fg+Q};\ \ a_1=\frac{-2K_0\zeta}{Fg+Q};\ \ a_2=\frac{K_0}{Fg+Q};\ \ b_1=\frac{-2Q\zeta}{Fg+Q};\ \ b_2=\frac{Q-Fg}{Fg+Q};\quad(13.260)$$

коэффициенты $\overline{\mathrm{K}}_k\ \left(k=\overline{1,\ r}\right)$ определяются выражениями (13.250).

Найдём полюсы и нули функции под знаком произведения в (13.259):

$$\begin{cases}z_{pk}^{(1,2)}=\dfrac{-\zeta(\sigma_k+j\Omega_k)}{g-\sigma_k-j\Omega_k}\pm\sqrt{\left[\dfrac{\zeta(\sigma_k+j\Omega_k)}{g-\sigma_k-j\Omega_k}\right]^2+\dfrac{g+\sigma_k+j\Omega_k}{g-\sigma_k-j\Omega_k}};\\ z_{pk}^{(3,4)}=\dfrac{-\zeta(\sigma_k-j\Omega_k)}{g-\sigma_k+j\Omega_k}\pm\sqrt{\left[\dfrac{\zeta(\sigma_k-j\Omega_k)}{g-\sigma_k+j\Omega_k}\right]^2+\dfrac{g+\sigma_k-j\Omega_k}{g-\sigma_k+j\Omega_k}},\end{cases}\quad k=\overline{1,\ r};\quad(13.261)$$

$$\begin{cases}z_{0k}^{(1,2)}=\dfrac{-j\lambda_k\zeta}{g-j\lambda_k}\pm\sqrt{\left(\dfrac{-j\lambda_k\zeta}{g-j\lambda_k}\right)^2+\dfrac{g+j\lambda_k}{g-j\lambda_k}};\\ z_{0k}^{(3,4)}=\dfrac{j\lambda_k\zeta}{g+j\lambda_k}\pm\sqrt{\left(\dfrac{j\lambda_k\zeta}{g+j\lambda_k}\right)^2+\dfrac{g-j\lambda_k}{g+j\lambda_k}},\end{cases}\quad k=\overline{1,\ r}.\qquad(13.262)$$

Введём обозначения

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_k = \dfrac{-\zeta(\sigma_k + j\Omega_k)}{g - \sigma_k - j\Omega_k}; \quad \hat{\beta}_k = \dfrac{-\zeta(\sigma_k - j\Omega_k)}{g - \sigma_k + j\Omega_k}; \\ \hat{\gamma}_k = \sqrt{\left[\dfrac{\zeta(\sigma_k + j\Omega_k)}{g - \sigma_k - j\Omega_k}\right]^2 + \dfrac{g + \sigma_k + j\Omega_k}{g - \sigma_k - j\Omega_k}}; \qquad k = \overline{1,\ r}; \\ \hat{\eta}_k = \sqrt{\left[\dfrac{\zeta(\sigma_k - j\Omega_k)}{g - \sigma_k + j\Omega_k}\right]^2 + \dfrac{g + \sigma_k - j\Omega_k}{g - \sigma_k + j\Omega_k}}, \end{cases} \tag{13.263}$$

$$\begin{cases} \tilde{\mu}_k = \dfrac{-j\lambda_k\zeta}{g - j\lambda_k}; \quad \tilde{\nu}_k = \dfrac{j\lambda_k\zeta}{g + j\lambda_k}; \\ \tilde{\chi}_k = \sqrt{\left(\dfrac{-j\lambda_k\zeta}{g - j\lambda_k}\right)^2 + \dfrac{g + j\lambda_k}{g - j\lambda_k}}; \quad k = \overline{1,\ r}. \\ \tilde{\vartheta}_k = \sqrt{\left(\dfrac{j\lambda_k\zeta}{g + j\lambda_k}\right)^2 + \dfrac{g - j\lambda_k}{g + j\lambda_k}}, \end{cases} \tag{13.264}$$

Тогда выражения для полюсов (13.261) и нулей (13.262) функции под знаком произведения в (13.259) можно записать в компактной форме:

$$\begin{cases} z_{pk}^{(1,2)} = \hat{\alpha}_k \pm \hat{\gamma}_k; \\ z_{pk}^{(3,4)} = \hat{\beta}_k \pm \hat{\eta}_k, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}; \tag{13.265}$$

$$\begin{cases} z_{0k}^{(1,2)} = \tilde{\mu}_k \pm \tilde{\chi}_k; \\ z_{0k}^{(3,4)} = \tilde{\nu}_k \pm \tilde{\vartheta}_k, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ r}. \tag{13.266}$$

Аналитическое исследование полюсов (13.265) и нулей (13.266) на комплексную сопряжённость представляет довольно сложную задачу, поэтому воспользуемся численными методами. Численные расчёты, проведённые с использованием системы компьютерной математики Mathcad, показали, что комплексно-сопряжёнными являются полюсы $z_{pk}^{(1)}$ и $z_{pk}^{(3)}$, $z_{pk}^{(2)}$ и $z_{pk}^{(4)}$, а также нули $z_{0k}^{(1)}$ и $z_{0k}^{(3)}$, $z_{0k}^{(1)}$ и $z_{0k}^{(4)}$ $\left(k = \overline{1,\ r}\right)$ передаточной функции режекторного фильтра $H(z)$, т.е. $z_{pk}^{(3)} = z_{pk}^{(1)*}$; $z_{pk}^{(4)} = z_{pk}^{(2)*}$; $z_{0k}^{(3)} = z_{0k}^{(1)*}$; $z_{0k}^{(4)} = z_{0k}^{(2)*}$ $\left(k = \overline{1,\ r}\right)$. Для получения блоков второго порядка, передаточные функции которых имеют вещественные коэффициенты, комплексно-сопряжённые полюсы (и нули, если они имеются) следует сгруппировать попарно. Тогда

$$H(z) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \prod\limits_{k=1}^{r} \dfrac{\overline{\Gamma}_k \left(1 - 2\zeta\ z^{-1} + z^{-2}\right)}{\left(1 - z_{pk}^{(1)} z^{-1}\right)\left(1 - z_{pk}^{(3)} z^{-1}\right)} \dfrac{\overline{\Gamma}_k \left(1 - 2\zeta\ z^{-1} + z^{-2}\right)}{\left(1 - z_{pk}^{(2)} z^{-1}\right)\left(1 - z_{pk}^{(4)} z^{-1}\right)}; \\ \dfrac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \prod\limits_{k=1}^{r} \dfrac{\overline{\mathrm{K}}_k \left(1 - z_{0k}^{(1)} z^{-1}\right)\left(1 - z_{0k}^{(3)} z^{-1}\right)}{\left(1 - z_{pk}^{(1)} z^{-1}\right)\left(1 - z_{pk}^{(3)} z^{-1}\right)} \dfrac{\overline{\mathrm{K}}_k \left(1 - z_{0k}^{(2)} z^{-1}\right)\left(1 - z_{0k}^{(4)} z^{-1}\right)}{\left(1 - z_{pk}^{(2)} z^{-1}\right)\left(1 - z_{pk}^{(4)} z^{-1}\right)}, \end{cases} \tag{13.267}$$

где первое выражение в правой части соответствует случаю отсутствия, а второе — случаю наличия нулей передаточной функции ФНЧ-прототипа; коэффициенты $\overline{\mathrm{K}}_k$, $\overline{\Gamma}_k$ $\left(k = \overline{1,\ r}\right)$ определяются выражениями (13.250) и (13.258).

Передаточная функция (13.267) путём перемножения биномов в круглых скобках приводится к форме (13.221). Для удобства пользования её коэффициенты сведены в табл.13.16.

Таблица 13.16

Коэффициенты в (13.221)	ФНЧ-прототип без нулей передаточной функции		ФНЧ-прототип с нулями передаточной функции	
	n нечётн.	n чётн.	n нечётн.	n чётн.
a_0	$K_0 / (Fg + Q)$	K_0	$K_0 / (Fg + Q)$	K_0
a_1	$-2K_0\zeta / (Fg + Q)$	0	$-2K_0\zeta / (Fg + Q)$	0
a_2	$K_0 / (Fg + Q)$	0	$K_0 / (Fg + Q)$	0
b_1	$-2Q\zeta / (Fg + Q)$	0	$-2Q\zeta / (Fg + Q)$	0
b_2	$(Q - Fg) / (Fg + Q)$	0	$(Q - Fg) / (Fg + Q)$	0
a_{0k}	$\overline{\Gamma}_k$		$\overline{\mathrm{K}}_k$	
a_{1k}	$-2\zeta\overline{\Gamma}_k$		$-\overline{\mathrm{K}}_k[(\hat{\mu}_k + \hat{\chi}_k) + (\hat{\nu}_k + \hat{\vartheta}_k)]$	
a_{2k}	$\overline{\Gamma}_k$		$\overline{\mathrm{K}}_k(\hat{\mu}_k + \hat{\chi}_k)(\hat{\nu}_k + \hat{\vartheta}_k)$	
b_{1k}	$-(\hat{\alpha}_k + \hat{\gamma}_k) - (\hat{\beta}_k + \hat{\eta}_k)$		$-(\hat{\alpha}_k + \hat{\gamma}_k) - (\hat{\beta}_k + \hat{\eta}_k)$	
b_{2k}	$(\hat{\alpha}_k + \hat{\gamma}_k)(\hat{\beta}_k + \hat{\eta}_k)$		$(\hat{\alpha}_k + \hat{\gamma}_k)(\hat{\beta}_k + \hat{\eta}_k)$	
$\overline{a}_{0k}$	$\overline{\Gamma}_k$		$\overline{\mathrm{K}}_k$	
$\overline{a}_{1k}$	$-2\zeta\overline{\Gamma}_k$		$-\overline{\mathrm{K}}_k[(\hat{\mu}_k - \hat{\chi}_k) + (\hat{\nu}_k - \hat{\vartheta}_k)]$	
$\overline{a}_{2k}$	$\overline{\Gamma}_k$		$\overline{\mathrm{K}}_k(\hat{\mu}_k - \hat{\chi}_k)(\hat{\nu}_k - \hat{\vartheta}_k)$	
$\overline{b}_{1k}$	$-(\hat{\alpha}_k - \hat{\gamma}_k) - (\hat{\beta}_k - \hat{\eta}_k)$		$-(\hat{\alpha}_k - \hat{\gamma}_k) - (\hat{\beta}_k - \hat{\eta}_k)$	
$\overline{b}_{2k}$	$(\hat{\alpha}_k - \hat{\gamma}_k)(\hat{\beta}_k - \hat{\eta}_k)$		$(\hat{\alpha}_k - \hat{\gamma}_k)(\hat{\beta}_k - \hat{\eta}_k)$	
Здесь n — порядок аналогового нормированного ФНЧ-прототипа; $k = \overline{1,\ r}$				

Пример 13.23. Методом обобщённого билинейного преобразования спроектировать цифровой режекторный фильтр эллиптического типа при следующих исходных данных (см. пример 13.21):

— граничные частоты полос пропускания $f_{п1} = 20$ кГц, $f_{п2} = 22$ кГц;

— максимальное затухание в полосах пропускания $a_{п_{дБ}} = 1{,}5$ дБ;

— граничные частоты полосы задерживания $f_{з1} = 20{,}3$ кГц и $f_{з2} = 21{,}7$ кГц;

— минимальное затухание в полосе задерживания $a_{з_{дБ}} = 40$ дБ;

— частота дискретизации $f_д = 70$ кГц;

— передаточную функцию цифрового фильтра представить в форме (13.221).

Для проектирования фильтра составлена программа в системе компьютерной математики Mathcad.

Воспользуемся полученным в примере 13.21 нормированным аналоговым эллиптическим ФНЧ-прототипом с передаточной функцией $H(s)$ в форме (13.158), коэффициенты которой следующие:

$$n = 5;\quad r = 2;\quad K_0 = 0{,}014;\quad F = 1;\quad Q = 0{,}295;\quad C = 1;$$

$$A_{01} = 4{,}704;\quad B_{11} = 0{,}39;\quad B_{01} = 0{,}504;\quad A_{02} = 2{,}152;\quad B_{12} = 0{,}109;\quad B_{02} = 0{,}979.$$

По формулам табл.13.16 вычислим коэффициенты передаточной функции $H(z)$ проектируемого режекторного ЦФ 10-го порядка в форме (13.221):

$$a_0 = 0{,}037;\quad a_1 = 0{,}023;\quad a_2 = 0{,}037;\quad b_1 = 0{,}476;\quad b_2 = 0{,}533;$$

$$a_{01} = 2{,}935;\quad a_{11} = 1{,}578;\quad a_{21} = 2{,}935;\quad b_{11} = 0{,}368;\quad b_{21} = 0{,}931;$$

$$\overline{a}_{01} = 2{,}935;\quad \overline{a}_{11} = 2{,}049;\quad \overline{a}_{21} = 2{,}935;\quad \overline{b}_{11} = 0{,}815;\quad \overline{b}_{21} = 0{,}936;$$

$$a_{02} = 1{,}472;\quad a_{12} = 0{,}739;\quad a_{22} = 1{,}472;\quad b_{12} = 0{,}441;\quad b_{22} = 0{,}99;$$

$$\overline{a}_{02} = 1{,}472;\quad \overline{a}_{12} = 1{,}082;\quad \overline{a}_{22} = 1{,}472;\quad \overline{b}_{12} = 0{,}784;\quad \overline{b}_{22} = 0{,}99.$$

АЧХ спроектированного режекторного ЦФ 10-го порядка ($N = 10$), рассчитанная по формуле (13.223), полностью совпадает с АЧХ, приведённой на рис.13.28 (см. пример 13.21), которая построена по формуле (13.219).

Примеры 13.20 — 13.23 подтвердили, что представление передаточных функций $H(z)$ полосовых и режекторных цифровых фильтров каскадной структуры в формах (13.217) и (13.221) эквивалентно.

Краткие итоги

1. Проектирование одномерных скалярных вещественных стационарных рекурсивных линейных ЦФ обычно осуществляется эвристическими методами синтеза с использованием аналоговых нормированных ФНЧ-прототипов. В рамках этого подхода по заданным техническим требованиям к ЦФ вначале строят передаточную функцию аналогового нормированного ФНЧ-прототипа $H(s)$, а затем заменой аргумента s в $H(s)$ получают передаточную функцию

цифрового (точнее, дискретного) фильтра $H(z)$. Процедура перехода от $H(s)$ к $H(z)$ предполагает денормирование частоты и дискретизацию. Денормирование частоты может осуществляться либо в аналоговой, либо в цифровой области. Этим различаются два подхода к проектированию рекурсивных ЦФ, представленные на рис.13.1.

2. Передаточная функция нормированного аналогового ФНЧ-прототипа $H(s)$ является дробно-рациональной функцией комплексного аргумента s. Нормировка частоты ФНЧ-прототипа уменьшает на единицу число свободных параметров, что снижает трудоёмкость процедуры синтеза его передаточной функции $H(s)$. Синтез ФНЧ-прототипа обычно осуществляется по заданному квадрату АЧХ.

3. Наиболее часто используют аналоговые нормированные ФНЧ-прототипы следующих видов:

- фильтр Баттерворта, имеющий монотонную АЧХ во всём диапазоне частот;
- фильтр Чебышева типа 1, имеющий равноволновые пульсации АЧХ в полосе пропускания и монотонную АЧХ в полосе задерживания;
- фильтр Чебышева типа 2, имеющий монотонную АЧХ в полосе пропускания и равноволновые пульсации АЧХ в полосе задерживания;
- эллиптический фильтр (фильтр Золотарёва-Кауэра), имеющий равноволновые пульсации АЧХ как в полосе пропускания, так и полосе задерживания;
- фильтр Бесселя характеризуется максимально плоской характеристикой групповой задержки в начале координат.

4. Передаточная функция нормированного ФНЧ-прототипа Баттерворта (13.16) имеет только полюсы, которые располагаются в левой части S-плоскости равномерно на окружности единичного радиуса (см. рис.13.2). Затухание у нормированного ФНЧ Баттерворта на границе полосы пропускания (на частоте $\Omega = 1$) равно 3 дБ независимо от порядка фильтра n. Порядок n аналогового нормированного ФНЧ Баттерворта является единственным параметром, который полностью определяет его передаточную функцию $H(s)$. Методика синтеза аналогового нормированного ФНЧ-прототипа Баттерворта изложена в § 13.2.

5. Для фильтров Чебышева характерно то, что они имеют наименьшую величину максимальной ошибки аппроксимации в заданной полосе частот. В зависимости от того, где минимизируется ошибка аппроксимации (в полосе пропускания или в полосе задерживания), различают фильтры Чебышева типа 1 и типа 2. При одинаковых порядках n фильтры Чебышева имеют меньшую ширину переходной полосы, чем фильтры Баттерворта. Передаточная функция $H(s)$ аналогового нормированного ФНЧ-прототипа Чебышева типа 1 имеет только полюсы [см. (13.16)], а типа 2 имеет как полюсы, так и нули [см. (13.87)]. Полюсы располагаются в левой части S-плоскости на эллипсе, а нули — на мнимой оси. Полюсы и нули являются простыми (некратными). Методика синтеза аналоговых нормированных ФНЧ-прототипов Чебышева обоих типов изложена в § 13.3.

6. Для эллиптического фильтра характерно то, что его АЧХ имеет равновеликие пульсации как в полосе пропускания, так и в полосе задерживания. При одинаковых порядках n у эллиптического фильтра обеспечивается меньшая ширина переходной полосы, чем у фильтров Баттерворта и Чебышева. Передаточная функция $H(s)$ эллиптического аналогового нормированного ФНЧ-прототипа имеет как полюсы, так и нули [см. (13.87)]. Полюсы располагаются в левой части S-плоскости, а нули — на мнимой оси. Методика синтеза эллиптического аналогового нормированного ФНЧ-прототипа изложена в § 13.4.

7. Передаточная функция нормированного ФНЧ-прототипа Бесселя имеет только полюсы [см. (13.16)]. Методика синтеза аналогового нормированного фильтра нижних частот Бесселя изложена в § 13.5.

8. Передаточные функции $H(s)$ аналоговых нормированных ФНЧ-прототипов всех рассмотренных видов (Баттерворта, Чебышева обоих типов, эллиптического и Бесселя) с конечными нулями [см. (13.87)] и с единственным нулём в бесконечности [см. (13.16)], а также чётного и нечётного порядков n удобно представить в обобщённой форме (13.158), где коэффициенты F, Q, C, A_{0k} $\left(k=\overline{1,r}\right)$ для различных типов фильтров определяются согласно табл.13.1. Обобщённая форма (13.158) представления $H(s)$ позволяет с единых позиций осуществлять последующие процедуры синтеза ЦФ (см. рис.13.1) — денормирование частоты и дискретизацию. Комплексная частотная характеристика, АЧХ и ФЧХ при этом описываются выражениями (13.159) — (13.161) соответственно.

9. В техническом задании на проектирование частотно-избирательных фильтров задаются граничные частоты полос пропускания и задерживания, а также максимальное затухание в полосах пропускания и минимальное затухание в полосах задерживания (см. рис.13.13). Для синтеза аналогового нормированного ФНЧ-прототипа необходимо располагать значением нормированной граничной частоты полосы задерживания $\Omega_з$, на которой обеспечивается необходимое затухание $a_з$ (см. рис.13.2, 13.4 и 13.7). Переход к нормированным частотам Ω для четырёх типов частотно-избирательных фильтров осуществляется по формулам табл.13.2. Обратная операция — денормирование частоты в аналоговой области (см. рис.13.1) — сводится к замене аргумента передаточной функции аналогового нормированного ФНЧ-прототипа $H(s)$ в соответствии с (13.162). Формулы замены аргумента $s=\xi(p)$ сведены в табл.13.3. В результате денормирования частоты получается передаточная функция аналогового фильтра $H(p)$ с заданными характерными частотами (граничными частотами полос пропускания и задерживания). При этом переход от нормированного ФНЧ-прототипа к аналоговым ФНЧ и ФВЧ не изменяет порядка передаточной функции $H(p)$, а переход к полосовому и режекторному фильтрам сопровождается удвоением порядка передаточной функции $H(p)$ аналогового фильтра.

10. Применение формул табл.13.3 к передаточной функции $H(s)$ аналогового нормированного ФНЧ-прототипа в обобщённой форме (13.158) приводит к передаточным функциям (13.167) для аналоговых ФНЧ и ФВЧ и (13.171) для аналоговых полосового и режекторного фильтров. Коэффициенты этих передаточных функций, выраженные через коэффициенты функции $H(s)$ и параметры денормирования, сведены в табл.13.4 и 13.5 соответственно. Комплексная частотная характеристика, АЧХ и ФЧХ аналогового фильтра с передаточной функцией (13.167) описываются выражениями (13.168) — (13.170), а фильтра с передаточной функцией (13.171) — выражениями (13.172) — (13.174) соответственно.

11. Передаточная функция (13.171) содержит r блоков четвёртого порядка. Иногда более предпочтительной является реализация фильтра в виде каскадного соединения блоков второго порядка. В этом случае следует использовать нуль-полюсное представление (13.175) передаточной функции аналогового нормированного ФНЧ-прототипа $H(s)$, применить формулы замены аргумента $s=\xi(p)$ для полосового и режекторного фильтров из табл.13.3, а затем сгруппировать попарно комплексно-сопряжённые полюсы и нули (если последние имеются) в полученной передаточной функции $H(p)$. В результате выполнения этих операций передаточные функции аналоговых полосового и режекторного фильтров удаётся записать в форме (13.188). Коэффициенты передаточной функции $H(p)$ полосового фильтра сведены в табл.13.6, а режекторного фильтра — в табл.13.7. Обе формы представления (13.171) и (13.188) передаточной функции $H(p)$ аналоговых полосового и режекторного фильтров эквивалентны, что подтверждается рассмотренными примерами 13.8 — 13.11. Комплексная частотная характеристика, АЧХ и ФЧХ аналогового фильтра с передаточной функцией (13.188) описываются выражениями (13.189) — (13.191) соответственно.

12. Преобразование аналогового фильтра в эквивалентный ему цифровой (точнее, дискретный) фильтр называется *дискретизацией*. Дискретизация осуществляется путём замены аргумента $p = \eta(z)$ в передаточной функции аналогового фильтра [см. (13.203)]. С математической точки зрения дискретизация представляет собой конформное отображение комплексной P-плоскости в комплексную Z-плоскость, т.е. отображение $p \to z$. При этом должны удовлетворяться следующие требования (см. рис.13.18), гарантирующие сохранение селективных свойств и устойчивости отображаемой аналоговой системы: 1) ось $j\omega$ комплексной P-плоскости должна отображаться в единичную окружность Z-плоскости; 2) точки левой половины комплексной P-плоскости, должны отображаться во внутреннюю часть круга единичного радиуса комплексной Z-плоскости, а точки правой половины P-плоскости — во внешнюю часть круга единичного радиуса Z-плоскости.

13. Билинейное преобразование (13.206) удовлетворяет всем требованиям к отображению $p \to z$, сформулированным выше. При билинейном преобразовании отсутствует эффект наложения сдвинутых АЧХ аналогового фильтра. «Аналоговые» и «цифровые» частоты при билинейном преобразовании не совпадают, т.е. происходит деформация частотной шкалы [см. (13.212)]. При проектировании избирательных ЦФ деформация частотной шкалы, описываемая соотношением (13.212), компенсируется соответствующим пересчётом заданных граничных частот полос пропускания и задерживания.

14. Билинейное преобразование передаточной функции $H(p)$ аналогового фильтра в форме (13.167) приводит к передаточной функции дискретного фильтра $H(z)$ в форме (13.213), коэффициенты которой сведены в табл.13.8. Комплексная частотная характеристика, АЧХ и ФЧХ дискретного фильтра с передаточной функцией (13.213) описываются выражениями (13.214) — (13.216) соответственно.

15. Билинейное преобразование передаточной функции $H(p)$ аналогового фильтра в форме (13.171) приводит к передаточной функции дискретного фильтра $H(z)$ в форме (2.217), коэффициенты которой сведены в табл.13.9. Комплексная частотная характеристика, АЧХ и ФЧХ дискретного фильтра с передаточной функцией (13.217) описываются выражениями (2.218) — (2.220) соответственно.

16. Билинейное преобразование передаточной функции $H(p)$ аналогового фильтра в форме (13.188) приводит к передаточной функции дискретного фильтра $H(z)$ в форме (2.221), коэффициенты которой сведены в табл.13.10. Комплексная частотная характеристика, АЧХ и ФЧХ дискретного фильтра с передаточной функцией (13.221) описываются выражениями (13.222) — (13.224) соответственно.

17. Из других методов дискретизации находят применение метод инвариантного преобразования импульсной характеристики и метод Z-форм. Частотная характеристика дискретного фильтра, полученного методом инвариантного преобразования импульсной характеристики, образуется путём наложения сдвинутых частотных характеристик дискретизируемого аналогового фильтра [см. (13.233)], что может привести к существенному искажению АЧХ цифрового фильтра. Эффект наложения не будет искажать частотную характеристику ЦФ в том случае, если $H(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \pi/T$. Метод Z-форм требует преобразования структуры аналогового фильтра таким образом, чтобы его передаточная функция была представлена в форме (13.235), где элементарными являются интегрирующие звенья k-го порядка. Далее операторы $p^{-k}\left(k = \overline{1, N}\right)$ передаточной функции (13.235) заменяются соответствующими дробно-рациональными функциями комплексного аргумента z^{-1}, которые называются Z-формами. Некоторые из Z-форм приведены в табл.13.11.

18. Денормирование частоты может осуществляться также в цифровой области (см. рис.13.1) согласно выражению (13.245). При этом вначале осуществляется дискретизация

аналогового нормированного ФНЧ-прототипа [см. (13.243)], в результате чего получается цифровой нормированный ФНЧ-прототип. Формулы денормирования частоты в цифровой области, называемые преобразованиями Константинидиса, приведены в табл.13.12.

19. Этап денормирования частоты в аналоговой области и этап дискретизации по методу билинейного преобразования могут быть объединены в одну процедуру (13.246) с использованием суперпозиции (образования сложной функции) подстановок согласно (13.247). Этот метод получил название *обобщённого билинейного преобразования*. При использовании обобщённого билинейного преобразования естественным образом учитывается деформация шкалы «цифровых» частот, свойственная билинейному преобразованию, и осуществляется компенсация деформации частотной шкалы на этапе синтеза аналогового нормированного ФНЧ-прототипа. Расчётные формулы обобщённого билинейного преобразования приведены в табл.13.13.

20. Применение обобщённого билинейного преобразования к передаточной функции $\mathrm{H}(s)$ аналогового нормированного ФНЧ-прототипа при каскадной форме реализации (13.158) приводит к передаточной функции $H(z)$ цифрового фильтра в форме (13.213) при проектировании ФНЧ или ФВЧ и в форме (13.217) при проектировании полосового или режекторного фильтра. Коэффициенты передаточной функции $H(z)$ для обеих форм представления сведены в табл.13.14.

21. Передаточная функция ЦФ в форме (13.217) содержит r блоков четвёртого порядка. Иногда более предпочтительной является реализация фильтра в виде каскадного соединения блоков второго порядка. В этом случае следует использовать нуль-полюсное представление (13.175) передаточной функции аналогового нормированного ФНЧ-прототипа $\mathrm{H}(s)$, применить к ней формулы замены аргумента обобщённого билинейного преобразования для полосового и режекторного фильтров из табл.13.13, а затем сгруппировать попарно комплексно-сопряжённые полюсы и нули (если последние имеются) в полученной передаточной функции $H(z)$. В результате выполнения этих операций передаточные функции цифровых полосового и режекторного фильтров удаётся записать в форме (13.221). Коэффициенты передаточной функции $H(z)$ цифрового полосового фильтра сведены в табл.13.15, а цифрового режекторного фильтра — в табл.13.16. Обе формы представления (13.217) и (13.221) передаточной функции $H(z)$ цифровых фильтров полосового и режекторного типов эквивалентны, что подтверждается рассмотренными примерами 13.20 — 13.23.

Глава 14

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MATLAB ДЛЯ СИНТЕЗА ОДНОМЕРНЫХ СКАЛЯРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

14.1. Общие сведения о системе MATLAB

Система компьютерной математики MATLAB представляет пользователям мощные средства для самых серьёзных вычислений и моделирования динамических объектов и систем. В числе пользователей системы MATLAB и пакетов её расширений — специалисты в области математики и многих сфер её прикладного применения, большинство ведущих университетов мира и свыше миллиона легальных пользователей (инженеров, научных работников, преподавателей и студентов вузов) во всём мире [54 — 56].

Одним из самых замечательных качеств системы MATLAB является её расширяемость. Любая новая функция или фрагмент программы, записанные в виде m-файла, готовы для дальнейшего применения наряду с почти тысячью уже заранее встроенных в систему мощных и гибких функций. А с помощью пакетов расширения MATLAB легко адаптируется к решению различных классов математических и технических задач.

Версия программного комплекса MATLAB 6.0 появилась в конце 2000 года•. Она содержит базовую систему MATLAB — МАТричную ЛАБораторию — и десятки пакетов расширения в самых разных областях компьютерной математики. Система основана на использовании современных и высокоэффективных алгоритмов матричных операций, базирующихся на известных и хорошо апробированных пакетах матричных вычислений LINPACK, ARPACK и EISPACK. Состав системы MATLAB + Simulink представлен на рис.14.1.

Основными компонентами системы MATLAB являются базовая система MATLAB 6.0 и пакет моделирования систем Simulink 4.0. Остальные пакеты расширения разбиты на 4 категории — расширения Extension MATLAB и Extension Simulink, а также комплексы пакетов расширения Blockset и Toolbox. Пакеты расширения по обработке сигналов и изображений входят в комплекс Toolbox и являются расширениями базовой системы MATLAB 6. Работа всех пакетов расширения невозможна без базовой системы MATLAB.

Система MATLAB выполняет операции над векторами и матрицами. Упорядоченный одномерный массив называют *вектором*, а двумерный — *мат-*

• В настоящее время существуют версии MATLAB 7.4.

рицей. Массивы в общем случае характеризуются размерностью и размером. *Размерность* массива определяет его структурную организацию в виде одной строки или одного столбца (размерность 1), страницы (размерность 2), параллелепипеда (размерность 3) и т.д. MATLAB допускает задание и использование многомерных массивов ряда типов, в том числе массивов ячеек и структур [54].

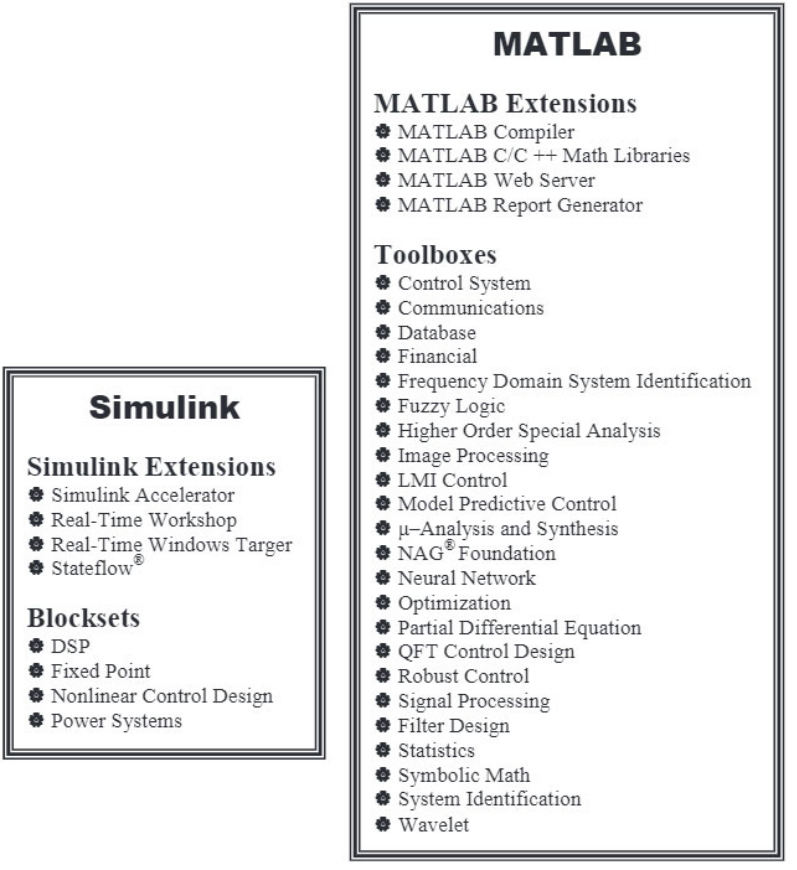


Рис.14.1. Состав системы MATLAB 6.0

Размер вектора — это число его элементов, а размер матрицы определяется числом её строк и столбцов. Обычно размер матрицы указывают как $m \times n$.

Интересно отметить, что даже обычные числа и переменные в MATLAB рассматриваются как матрицы размера 1×1, что даёт единообразные формы и методы проведения операций над обычными числами и массивами, включая

векторы и матрицы. Это также означает, что большинство вычислительных функций в системе MATLAB может работать с аргументами в виде векторов и матриц, вычисляя значения для каждого их элемента.

Важнейшие пакеты расширения системы MATLAB 6 ориентированы на обработку и фильтрацию сигналов и изображений. Это пакеты расширения **Signal Processing Toolbox**, **Filter Design Toolbox**, **Wavelet Toolbox** и **Image Processing Toolbox**. Они предоставляют пользователю методы генерации и обработки сигналов и изображений, а также самую современную инструментальную технику машинного проектирования аналоговых и дискретных (цифровых) фильтров различного назначения. Ныне эти средства составляют основу проектирования многих новейших систем и устройств в области радиоэлектроники, связи, телекоммуникаций, контроля и управления.

Система MATLAB состоит из многих тысяч файлов, находящихся в множестве папок. Файл — это некоторая совокупность данных в широком понимании, хранящаяся в памяти компьютера (обычно на дисковых накопителях) и объединённых под некоторым именем *файла*, после которого через точку указывается *расширение файла*. Файлы могут содержать машинные коды (исполняемые файлы), тексты (текстовые файлы), исходные данные для математических расчётов и результаты их выполнения.

В системе MATLAB особое значение имеют файлы двух типов — с расширением .mat и .m. Вторые — это текстовые файлы, содержащие внешние определения команд и функций системы. Именно к ним относится большая часть команд и функций, в том числе задаваемых пользователем для решения своих специфических задач.

Нередко встречаются и файлы с расширением .c (на языке C), файлы с откомпилированными кодами с расширением .mex и другие. Исполняемые файлы имеют расширение .exe [52].

Система MATLAB создана таким образом, что любые (подчас весьма сложные) вычисления можно выполнять в режиме *прямых вычислений*, т.е. без подготовки программы. Это превращает MATLAB в необычайно мощный калькулятор, который способен производить не только обычные для калькуляторов вычисления, но и операции с векторами и матрицами, комплексными числами, рядами, полиномами. MATLAB позволяет почти мгновенно задать и вывести графики различных функций — от простой синусоиды до сложной трёхмерной функции [54].

Работа с системой в режиме прямых вычислений носит диалоговый характер и происходит по правилу «задал вопрос — получил ответ». Пользователь набирает на клавиатуре вычисляемое выражение, редактирует его (если нужно) в командной строке и завершает ввод нажатием клавиши Enter.

Центральным понятием всех математических систем является *математическое выражение*. Оно задаёт то, что должно быть вычислено в численном (реже символьном) виде. Математические выражения строятся на основе чисел, констант, переменных, операторов, функций и разных спецзнаков. В некоторых случаях вводимое математическое выражение может оказаться настолько длин-

ным, что для него не хватит одной строки. В этом случае часть выражения можно перенести на новую строку с помощью знака многоточия … (3 или более точек), что предотвращает заход строк в невидимую область окна.

♦ Типы данных системы MATLAB

Числа в MATLAB представляются в обычном виде: целые, дробные, вещественные. В мантиссе чисел целая часть отделяется от дробной не запятой, а точкой, что принято в большинстве языков программирования. Для отделения порядка числа от мантиссы используется символ e. Знак «плюс» у чисел не проставляется, а знак «минус» у числа называют *унитарным минусом*. Пробелы между символами в числах не допускаются.

По умолчанию MATLAB выдаёт численные результаты в *нормализованной форме* с четырьмя цифрами после десятичной точки и одной до неё. Операции над числами выполняются в формате, который принято называть форматом чисел с *двойной точностью*. Для установки формата представления чисел используется команда >> format name, где name — имя формата. Задание формата сказывается только на форме вывода чисел. Вычисления всё равно происходят в формате с двойной точностью, а ввод чисел возможен в любом удобном для пользователя виде.

Числа могут быть *комплексными*: $z = \mathrm{Re}(x) + \mathrm{Im}(x) * j$, содержащими вещественную $\mathrm{Re}(z)$ и мнимую $\mathrm{Im}(z)$ части. Мнимая часть имеет множитель i или j, означающий корень квадратный из -1. Функция $\mathrm{real}(z)$ возвращает вещественную часть числа $\mathrm{Re}(z)$, а функция $\mathrm{imag}(z)$ — мнимую, $\mathrm{Im}(z)$.

Константа — это предварительно определённое числовое или символьное значение, представленное уникальным именем. Числа являются безымянными *числовыми константами*. Некоторые виды констант в MATLAB принято называть *системными переменными*, поскольку, с одной стороны, они задаются системой при её загрузке, а с другой — могут переопределяться. Вот некоторые из них: i или j — мнимая единица; pi — число $\pi = 3.1415926...$; eps — погрешность для операций с плавающей точкой (2^{-52}); realmin — наименьшее число с плавающей точкой (2^{-1022}); realmax — наибольшее число с плавающей точкой (2^{1023}); inf — значение машинной бесконечности; ans — переменная, хранящая результат последней операции и обычно вызывающая его отображение на экране дисплея; NaN — указание на нечисловой характер данных (Not a Number).

Символьная константа — это цепочка символов, заключённая в апострофы, например: 'привет'; '2+3'. Если в апострофы помещено арифметическое выражение, то оно *не выполняется* и рассматривается просто как цепочка символов.

Поскольку MATLAB используется для достаточно сложных вычислений, важное значение имеет наглядность их описания. Оно достигается, в частности, применением *текстовых комментариев*, которые вводятся с помощью символа %, например: % Задание функции вычисления факториала.

Переменные — это имеющие имена объекты, способные хранить некоторые, обычно разные по значению, данные. В зависимости от этих данных переменные могут быть числовыми или символьными, векторными или матричными. В системе MATLAB можно задавать переменным определённые значения. Для этого используется операция *присваивания*, вводимая знаком равенства:

Имя переменной = Выражение.

Типы переменных заранее не декларируются. Они определяются выражением, значение которого присваивается переменной. Так, если это выражение — вектор или матрица, то переменная будет векторной или матричной.

Имя переменной (её *идентификатор*) может содержать сколько угодно символов, но запоминается и идентифицируется только 31 начальный символ. Имя любой переменной не должно совпадать с именами других переменных, функций и процедур, т.е. оно должно быть уникальным. Имя должно начинаться с буквы, может содержать цифры и символ _. Недопустимо включать в имена переменных пробелы и специальные знаки, например +, –, *, / и т.д., поскольку в этом случае правильная интерпретация выражений становится невозможной.

Переменные могут быть скалярными и индексированными, т.е. элементами векторов или матриц. Могут использоваться и символьные переменные, причём символьные значения заключаются в апострофы, например s = 'Demo'.

В памяти переменные занимают определённое место, называемое *рабочей областью* (workspace). Для очистки рабочей области используется функция clear в различных формах, например:

- clear — уничтожение определений всех переменных;
- clear x — уничтожение определения переменной x;
- clear a, b, c — уничтожение определений нескольких переменных.

Во избежание непроизводительных потерь памяти при работе с объёмными данными (массивами) следует использовать команду tt pack, осуществляющую дефрагментацию рабочей области. Эта команда переписывает все определения рабочей области на жёсткий диск, очищает её и затем опять записывает все определения, но без «дыр» и «мусора» в рабочую область памяти.

Оператор — это специальное обозначение для определённой операции над данными — *операндами*. Например, простейшими арифметическими операторами являются символы (знаки) сложения +, вычитания –, умножения * и деления /. Операторы используются совместно с операндами.

Функции — это имеющие уникальные имена объекты, выполняющие определённые преобразования над своими аргументами и при этом возвращающие результаты этих преобразований. *Возврат результата* — отличительная черта функций. При этом результат вычисления функции с одним выходным параметром подставляется на место её вызова, что позволяет использовать функции в математических выражениях. Функции, в общем случае, имеют список аргументов (параметров), заключённый в круглые скобки. Многие функции допускают ряд форм записи, отличающихся списком параметров. Если функция возвращает несколько значений, то она записывается в виде [Y1, Y2, ...] = func

(X1, X2, …), где Y1, Y2, … — список выходных аргументов (значений функции); X1, X2, … — список входных аргументов (параметров).

Функции могут быть *встроенными* (внутренними) и *внешними*, или *m-функциями*. Внешние функции содержат свои определения в m-файлах. Встроенные функции хранятся в откомпилированном ядре системы MATLAB, в силу чего они выполняются предельно быстро. В системе MATLAB имеется около 800 встроенных функций.

Очень часто необходимо произвести формирование упорядоченных числовых последовательностей. Для этого в MATLAB используется оператор : (двоеточие): Начальное значение: Шаг: Конечное значение.

Данная конструкция порождает последовательность чисел, которая начинается с начального значения, идёт с заданным шагом и завершается конечным значением. При этом действуют следующие правила:

- Начальное значение < Конечное значение Шаг > 0;
- Начальное значение > Конечное значение Шаг < 0.

Если шаг не задан, то он принимает значение 1.

Переменные с множеством упорядоченных значений принято называть *ранжированными*.

Важное значение при диалоге с системой MATLAB имеет *диагностика ошибок*. Иногда в ходе вывода данных вычислений появляются сокращение NaN (от слов Not a Number — не число). Оно обозначает неопределённость, например вида 0/0 или Inf/Inf , где Inf — переменная со значением машинной бесконечности. Могут появляться и различные предупреждения об ошибках (на английском языке). Например, при делении на 0 конечного числа появляется предупреждение: «Warning: Devide by Zero» («Внимание: Деление на нуль»). Диапазон чисел, представляемых в системе, лежит от 10^{-308} до 10^{308}. Предупреждения (обычно после слова Warning) не останавливают вычисления и лишь предупреждают пользователя о том, что диагностируемая ошибка способна повлиять на ход вычислений. Сообщение об ошибке (после знаков ???) останавливает вычисления.

♦ Приёмы работы с векторами и матрицами

Для задания вектор-строки надо перечислить значения его элементов в квадратных скобках, разделяя их пробелами или запятыми, например a = [1 2 3 4] или a = [1, 2, 3, 4]. Задание матрицы требует указания различных строк. Для разделения строк используется знак ; (точка с запятой). Этот же знак в конце ввода предотвращает вывод матрицы или вектора на экран дисплея. Так, например, ввод M = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9] задаёт квадратную матрицу $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, а ввод b = [5; 2; 1; 4] задаёт вектор-столбец.

Возможен ввод элементов матриц и векторов в виде арифметических выражений, например V = [5/8, exp(5), sqrt(10)].

Для указания отдельного элемента вектора или матрицы их рассматривают как *индексированные переменные*. Для этого используются выражения вида V(i) или M(i; j). Выражение M(i) с одним индексом даёт доступ к элементам матрицы, развёрнутым в один столбец. Такая матрица образуется из исходной, если подряд выписать её столбцы.

Возможно задание векторов и матриц с комплексными элементами.

Наряду с операциями над отдельными элементами матриц и векторов система MATLAB позволяет производить операции умножения, деления и возведения в степень сразу над всеми элементами, т.е. над массивами. Для этого перед символом операции ставится точка. Так, если M — матрица, а * — оператор умножения, то M.*2 даст матрицу, все элементы которой умножены на скаляр — число 2.

Для формирования матриц и выполнения ряда матричных операций возникает необходимость удаления отдельных столбцов и строк матрицы. Для этого используются пустые квадратные скобки [ ]. Проделаем это над матрицей M: M = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]. Удалим второй столбец: M(:,2) = [ ]. Получим матрицу $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$. А теперь удалим вторую строку: M(2,:) = [ ]. Получим матрицу $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$.

♦ Сессия MATLAB

Сеанс работы с MATLAB принято называть *сессией* [54]. Сессия, в сущности, является текущим документом, отражающим работу пользователя с системой MATLAB. В ней имеются строки ввода, вывода и сообщений об ошибках. Входящие в сессию определения переменных и функций, расположенные в рабочей области памяти (но не саму сессию), можно записать на диск (в файл формата .mat), используя команду save. Команда load позволяет считать с диска данные рабочей области. Фрагменты сессии можно оформить в виде дневника с помощью команды diary.

Для завершения работы с системой MATLAB можно использовать команды quit, exit или комбинацию клавиш Ctrl+Q. Если необходимо сохранить значения всех переменных (векторов и матриц) системы, то перед этим следует дать команду save нужной формы. Команда load после загрузки системы считывает значения переменных и позволяет начать работу с системой с того момента, когда она была прервана.

14.2. Проектирование аналоговых фильтров с использованием системы MATLAB

Система компьютерной математики MATLAB и её пакеты расширения ориентированы прежде всего на цифровую обработку сигналов, поэтому функции, связанные с расчётом аналоговых фильтров, являются вспомогательными.

В основном они используются для синтеза нормированных аналоговых ФНЧ-прототипов при проектировании рекурсивных ЦФ. Большая часть этих функций относится к пакету **Signal Processing**.

♦ Функция расчёта частотных характеристик аналогового фильтра (freqs)

Аналоговые линейные фильтры описываются *передаточными функциями*, которые могут быть представлены в двух формах:

- дробно-рациональной[•] [ср. с (13.163) и (13.2)]

$$\mathrm{H}(p)=\frac{\alpha_1 p^M+\alpha_2 p^{M-1}+\ldots+\alpha_M p+\alpha_{M+1}}{\beta_1 p^N+\beta_2 p^{N-1}+\ldots+\beta_N p+\beta_{N+1}}=\left(\sum_{k=1}^{M+1}\alpha_k p^{M+1-k}\right)\Bigg/\left(\sum_{k=1}^{N+1}\beta_k p^{N+1-k}\right); \tag{14.1}$$

- нуль-полюсной

$$\mathrm{H}(p)=K\left[\prod_{k=1}^{M}(p-p_{0k})\right]\Bigg/\left[\prod_{k=1}^{N}(p-p_{pk})\right]. \tag{14.2}$$

Здесь M и N — степени полиномов числителя и знаменателя; p — комплексная переменная (аргумент); K — коэффициент усиления[••]; $p_{0k}\left(k=\overline{1,\,M}\right)$ — нули, а $p_{pk}\left(k=\overline{1,\,N}\right)$ — полюсы передаточной функции.

Комплексная частотная характеристика $\mathrm{H}(j\omega)$ аналогового линейного фильтра (КЧХ) определяется из (14.1) или (14.2) при $p=j\omega$.

Функция **freqs** реализует расчёт КЧХ в ряде следующих вариантов:

- h = freqs (a, b, w) — по заданным в векторах a и b коэффициентам передаточной функции фильтра $\mathrm{H}(p)$ вычисляет вектор h отсчётов КЧХ фильтра $\mathrm{H}(j\omega)$, соответствующий вектору частот w;
- [h, w] = freqs (a, b) — вычисляет векторы h отсчётов КЧХ и частот w, автоматически определяя диапазон частот её представления;
- [h, w] = freqs (a, b, n) — вычисляет векторы h отсчётов КЧХ и частот w в n точках. Если n не задано, оно выбирается по умолчанию равным 200;
- freqs (a, b) — вычисляет КЧХ и выводит графики АЧХ и ФЧХ.

Пример 14.1. Для построения графиков АЧХ и ФЧХ аналогового фильтра с передаточной функцией

$$\mathrm{H}(p)=\frac{p^3+2{,}5\,p^2+3{,}5\,p+1}{p^4-3{,}3\,p^3+4\,p^2-2{,}5\,p+1}$$

в командном окне нужно набрать следующие команды [52]:

[•] В системе MATLAB нумерация коэффициентов при степенях p в полиномах числителя и знаменателя передаточной функции (14.1) отличается от нумерации коэффициентов, принятой в (13.163): в формуле (13.163) коэффициенты нумеруются в порядке увеличения степеней p, а в формуле (13.1) — в порядке уменьшения степеней комплексного аргумента p.

[••] Коэффициент K не следует отождествлять с коэффициентом K_0, используемым в гл.13.

```
>> a=[1  2.5  3.5  1];
>> b=[1  –3.3  4  –2.5  1];
>> freqs(a, b)
```

При этом система MATLAB рассчитает амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики фильтра в логарифмическом масштабе, которые изображены на рис.14.2.

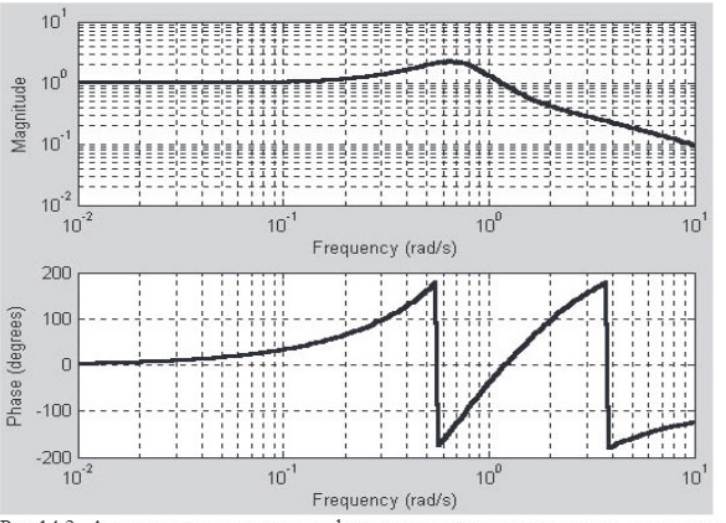


Рис.14.2. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики аналогового фильтра, рассчитанные в примере 14.1

Для того чтобы вместо построения графиков получить вектор рассчитанных значений комплексного коэффициента передачи, нужно присвоить результат, возвращаемый функцией **freqs**, какой-либо переменной: h = freqs (a, b);. Точка с запятой в конце строки подавляет вывод рассчитанного вектора h на экран монитора.

Если использовать второй выходной параметр, то в нём функция возвратит вектор частот, для которых рассчитаны значения КЧХ: [h, w] = freqs (a, b).

Можно принудительно задать количество точек на частотной оси, если использовать третий входной параметр n (при этом частоты по-прежнему логарифмически распределены от 0,1 до 10: [h, w] = freqs (a, b, n).

Для построения графика АЧХ в линейном масштабе в командном окне MATLAB нужно набрать следующие команды:

```
>> [h, w] = freqs (a, b);
>> plot (w/(2*pi), abs(h))
>> grid on
```

Построенная при этом АЧХ фильтра, рассмотренного в примере 14.1, в линейном масштабе показана на рис.14.3.

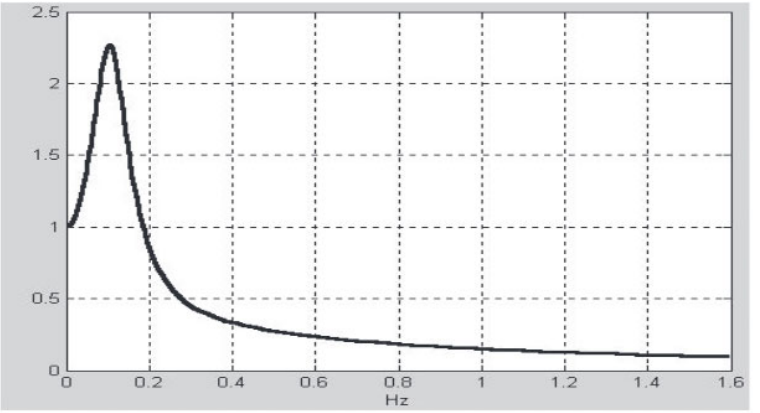


Рис.14.3. АЧХ аналогового фильтра в линейном масштабе, рассчитанная в примере 14.1

Наконец, можно принудительно задать частоты для анализа также с помощью третьего входного параметра, которым в данном случае является вектор круговых частот w. Признаком, отличающим данную ситуацию от предыдущей, является векторный характер третьего входного параметра. Возвращать значения частот в данном случае не имеет смысла: h = freqs (a, b, w);.

♦ **Функция построения графиков фазочастотных характеристик (unwrap)**

ФЧХ аналоговой цепи обычно содержит большое количество разрывов (скачков). Те из них, величины которых равны 180°, действительно являются скачками ФЧХ, а остальные, величина которых составляет 360°, являются «фиктивными». Они возникают из-за того, что результаты вычисления фазы комплексного числа лежат в диапазоне ±180°. Наличие этих многочисленных скачков затрудняет восприятие истинной формы ФЧХ и маскирует скачки «настоящие». Избавиться от лишних разрывов позволяет функция **unwrap**, которая ищет в переданном ей векторе скачки между соседними элементами, превышающие заданную пороговую величину (по умолчанию равную π), и сдвигает соответствующие фрагменты вектора на $\pm 2\pi$ нужное число раз [52].

Пример 14.2. Для аналогового линейного фильтра, рассмотренного в примере 14.1, построить ФЧХ в линейном масштабе по оси частот, устранив скачки фазы.

В командном окне нужно набрать следующие команды:

```
>> [h, w]=freqs(a, b);
>> phi=angle(h);
>> phi=unwrap(phi);
>> plot(w/(2*pi), phi*180/pi)
>> grid on
```

Построенная по этой программе ФЧХ с устранёнными скачками фазы аналогового фильтра, рассмотренного в примере 14.1, показана на рис.14.4.

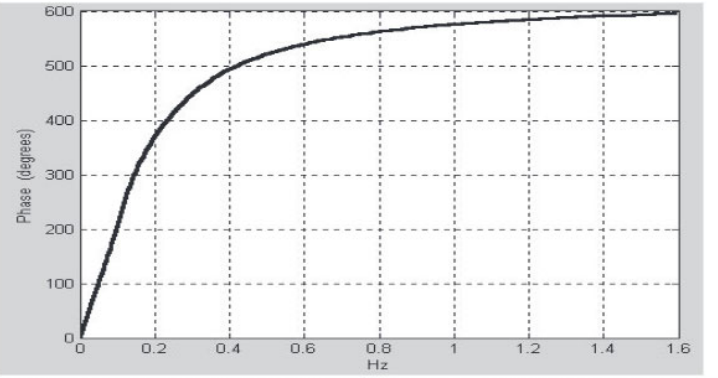


Рис.14.4. ФЧХ с устранёнными скачками фазы аналогового фильтра (см. пример 14.1)

При необходимости можно задать порог обнаружения скачков, указав его в качестве второго аргумента функции **unwrap**: y = unwrap(x, threshold);.

♦ **Описание линейных систем в пространстве состояний**

Для описания линейных динамических систем, кроме алгоритма работы, импульсной характеристики, передаточной функции, комплексной частотной характеристики, АЧХ и ФЧХ, в настоящее время применяют *пространство состояний* [52, 61 — 64]. В пространстве состояний можно описывать стационарные и нестационарные, одномерные и многомерные системы, довольно просто учитываются начальные условия. Пространство состояний позволяет описывать также нелинейные системы [61, 62].

В этом методе состояние системы N-го порядка описывается *вектором состояния* $\mathbf{s}(t)$ размера $N\times 1$, а собственные колебания линейной системы и реакция на входной сигнал — системой векторно-матричных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mathbf{s}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{s}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{s}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{x}(t), \end{cases} \tag{14.3}$$

где $\mathbf{x}(t)$ — вектор-столбец входных сигналов размера $R\times 1$; $\mathbf{y}(t)$ — вектор-столбец выходных сигналов размера $L\times 1$; $\mathbf{A}(t)$ — квадратная матрица размера $N\times N$ (матрица коэффициентов системы); $\mathbf{B}(t)$ — прямоугольная матрица размера $N\times R$ (матрица управления); $\mathbf{C}(t)$ — прямоугольная матрица размера $L\times N$ (матрица выхода); $\mathbf{D}(t)$ — прямоугольная матрица размера $L\times R$ (матрица обхода).

Систему уравнений (14.3) необходимо решать с учётом вектора начальных условий (начального состояния) системы

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}(t_0). \tag{14.4}$$

Уравнения (14.3) описывают в пространстве состояний многомерные нестационарные линейные системы. В случае многомерных стационарных линейных систем элементы всех матриц уравнений (14.3) являются константами, т.е. $\mathbf{A}(t)=\mathbf{A}$, $\mathbf{B}(t)=\mathbf{B}$, $\mathbf{C}(t)=\mathbf{C}$, $\mathbf{D}(t)=\mathbf{D}$.

Для одномерных стационарных линейных систем уравнения (14.3) принимают вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mathbf{s}(t)=\mathbf{A}\,\mathbf{s}(t)+\mathbf{B}\,x(t); \\ y(t)=\mathbf{C}\,\mathbf{s}(t)+D\,x(t), \end{cases} \tag{14.5}$$

где входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы, а также коэффициент D являются скалярными величинами.

От представления одномерной стационарной линейной системы в пространстве состояний (14.5) можно перейти к передаточной функции (14.1). Для этого следует применить преобразование Лапласа к уравнениям (14.5), затем, подставляя изображение по Лапласу вектора состояний $\mathbf{S}(p)$ из первого уравнения во второе, исключить его и взять отношение изображений по Лапласу $Y(p)/X(p)$ при нулевых начальных условиях. В результате получим

$$\mathrm{H}(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\mathbf{C}\,(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+D, \tag{14.6}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица размера $N\times N$. Если $D=0$, то в (14.1) степень полинома числителя меньше степени полинома знаменателя.

В литературе [61 — 64] описаны различные способы перехода от передаточной функции $\mathrm{H}(p)$ в форме (14.1) к матричным объектам $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$. Результаты одного из таких способов • приведены в [52]:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -\beta_2/\beta_1 & -\beta_3/\beta_1 & -\beta_4/\beta_1 & \ldots & -\beta_N/\beta_1 & -\beta_{N+1}/\beta_1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{14.7}$$

$$\mathbf{B}=(1\quad 0\quad 0\quad \ldots\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}; \tag{14.8}$$

$$\mathbf{C}=(0\quad \ldots\quad 0\quad \alpha_1\quad \alpha_2\quad \ldots\quad \alpha_M\quad \alpha_{M+1}), \tag{14.9}$$

где $(\ldots)^{\mathrm{T}}$ — символ транспонирования.

• Такое представление матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, выраженное через коэффициенты передаточной функции в дробно-рациональной форме (14.1), применяется в системе MATLAB.

♦ **Функции преобразования способов описания линейных систем**

В пакете **Signal Processing** имеется ряд функций, предназначенных для преобразования системы описаний из одной формы в другую•.

Формы описания систем в *именах функций* обозначаются следующим образом:

tf — коэффициенты полиномов числителя и знаменателя передаточной функции (transfer function) в форме (14.1):
- a — вектор-строка коэффициентов числителя (в порядке убывания степеней);
- b — вектор-строка коэффициентов знаменателя (в порядке убывания степеней);

zp — нули и полюсы (zero and poles) — корни полиномов числителя и знаменателя передаточной функции в форме (14.2):
- z — вектор-столбец нулей;
- p — вектор-столбец полюсов;
- k — коэффициент усиления (скаляр);

ss — описание в пространстве состояний (state space) согласно (14.5):
- A — квадратная матрица связи вектора состояния с его производной;
- B — вектор-столбец связи входного сигнала с производной вектора состояния;
- C — вектор-строка связи вектора состояния с выходным сигналом;
- D — скалярный коэффициент связи входного сигнала с выходным.

Для входных и выходных параметров функций преобразования используются следующие обозначения:

Функция **tf2zp** преобразует наборы коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции (14.1) в векторы нулей и полюсов, рассчитывая также значение общего коэффициента усиления: [z, p, k] = tf2zp (a, b).

Функция **zp2tf** является обратной по отношению к функции tf2zp: она осуществляет преобразование векторов нулей и полюсов передаточной функции (14.2), а также коэффициента усиления в наборы коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции (14.1): [a, b] = zp2tf (z, p, k).

Функция **tf2ss** преобразует наборы коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции (14.1) в параметры представления системы в пространстве состояний (3.5): [A, B, C, D] = tf2ss (a, b).

Функция **ss2tf** является обратной по отношению к функции tf2ss: она преобразует параметры представления системы в пространстве состояний (14.5) в наборы коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции (14.1): [a, b] = ss2tf (A, B, C, D).

• По-английски цифра «2» (two) произносится сходно с частицей «to», служащей, среди прочего, для указания на конечную цель или результат какого-либо процесса. Поэтому цифра «2» традиционно используется в середине идентификаторов функций, осуществляющих различные преобразования [52].

Функция **zp2ss** преобразует векторы нулей и полюсов передаточной функции (14.2), а также коэффициент усиления в параметры представления системы в пространстве состояний (3.5): [A, B, C, D] = zp2ss (z, p, k).

Функция **ss2zp** является обратной по отношению к функции zp2ss: она преобразует параметры представления системы в пространстве состояний (14.5) в векторы нулей и полюсов передаточной функции (14.2), а также коэффициент усиления: [z, p, k] = ss2zp (A, B, C, D).

♦ **Разложение передаточной функции на простые дроби**

Передаточную функцию аналогового линейного фильтра (14.1) или (14.2) можно представить в виде суммы простых дробей. В общем случае это представление имеет следующий вид [9]:

$$\mathrm{H}(p) = C_0 + \sum_{k=1}^{S} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{R_{ki}}{(p - p_{pk})^i}, \qquad (14.10)$$

где C_0 — целая часть передаточной функции, отличная от нуля только при равенстве степеней полиномов числителя и знаменателя [см. (14.1)]; S — число различных полюсов p_{pk} передаточной функции $\mathrm{H}(p)$; m_k — кратность полюса p_{pk} $\left(\sum_{k=1}^{S} m_k = N\right)$; $R_{ki}\left(k = \overline{1,\ S},\ i = \overline{1,\ m_k}\right)$ — числа, называемые *вычетами* передаточной функции $\mathrm{H}(p)$, определяемые выражениями [39]

$$R_{ki} = \frac{1}{(i-1)!} \lim_{p \to p_{pk}} \frac{d^{i-1}}{dp^{i-1}} \left[\mathrm{H}(p) \left(p - p_{pk}\right)^{m_k} \right], \quad k = \overline{1,\ S},\ i = \overline{1,\ m_k}. \qquad (14.11)$$

Если все полюсы передаточной функции простые (не кратные), то разложение (14.10) принимает вид

$$\mathrm{H}(p) = C_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{(p - p_{pk})}, \qquad (14.12)$$

где

$$R_k = \lim_{p \to p_{pk}} \left[\mathrm{H}(p) \left(p - p_{pk}\right) \right], \quad k = \overline{1,\ N}. \qquad (14.13)$$

Полюсы передаточной функции (14.1) могут быть вещественными либо комплексными (при этом они образуют комплексно-сопряжённые пары). Вычеты, соответствующие комплексно-сопряжённым полюсам, также являются комплексно-сопряжёнными.

В системе MATLAB имеется функция **residue**, которая осуществляет преобразование передаточной функции из дробно-рациональной формы (14.1) в сумму простых дробей (14.10) либо из суммы простых дробей в дробно-рациональную форму (направление преобразования зависит от числа входных параметров): [r, p, k] = residue (a, b) или [a, b] = residue (r, p, k). Здесь a и b — векторы

коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции (14.1); p — вектор-столбец полюсов; r — вектор-столбец соответствующих им вычетов с учётом кратности полюсов; k — вектор-строка коэффициентов целой части передаточной функции •.

Функция **residue** находится не в пакете **Signal Processing**, а в базовой библиотеке MATLAB.

Вычислительная задача разложения дробно-рациональной функции на простые дроби плохо обусловлена, т.е. малые вариации исходных данных могут приводить к большим погрешностям вычисления полюсов и вычетов. В таких случаях документация MATLAB рекомендует применить либо нуль-полюсное описание системы, либо описание в пространстве состояний [52].

♦ **Функции расчёта аналоговых нормированных ФНЧ–прототипов**

Все функции MATLAB для расчёта аналоговых нормированных ФНЧ-прототипов с частотой среза $\Omega_c = 1$ возвращают векторы-столбцы нулей z и полюсов p передаточной функции ••, а также значение коэффициента усиления k [см. (13.16) и (13.87)]. В случае надобности перехода к дробно-рациональной форме передаточной функции используется функция [a, b] = zp2tf (z, p, k).

Аналоговый нормированный ФНЧ-прототип Баттерворта (см. § 13.2) в системе MATLAB рассчитывается с помощью функции **buttap**:

[z, p, k] = buttap (n),

где входной целочисленный параметр n — порядок фильтра.

Аналоговый нормированный ФНЧ-прототип Чебышева типа 1 (см. § 13.3) в системе MATLAB рассчитывается с помощью функции **cheb1ap**:

[z, p, k] = cheb1ap (n, Rp),

где n — порядок фильтра; Rp — уровень пульсаций АЧХ (максимальное затухание) в полосе пропускания (в децибелах).

Аналоговый нормированный ФНЧ-прототип Чебышева типа 2 (см. § 13.3) в системе MATLAB рассчитывается с помощью функции **cheb2ap**:

[z, p, k] = cheb2ap (n, Rs),

где n — порядок фильтра; Rs — уровень пульсаций АЧХ (минимальное затухание) в полосе задерживания (в децибелах).

• Если степень числителя в (14.1) меньше степени знаменателя, то k — нулевой вектор.

•• В системе MATLAB частота среза разных аналоговых нормированных ФНЧ-прототипов определяется по-разному: для фильтра Баттерворта она определяется по уровню $1/\sqrt{2}$, для фильтра Чебышева типа 1 и эллиптического фильтра — по уровню пульсаций (максимального затухания) в полосе пропускания, для фильтра Чебышева типа 2 — по уровню пульсаций (минимального затухания) в полосе задерживания [52]. В методике синтеза аналоговых нормированных ФНЧ-прототипов, изложенной в гл.13, частота среза $\Omega_c = 1$ для фильтров Баттерворта, Чебышева типа 1 и эллиптического определяется по таким же уровням, однако частота среза $\Omega_c = 1$ фильтра Чебышева типа 2 определяется иначе: уровень затухания на ней однозначно не определён, но находится в пределах от 0 до 3 дБ (см. примеры 13.1 — 13.4).

Аналоговый нормированный эллиптический ФНЧ-прототип (см. § 13.4) в системе MATLAB рассчитывается с помощью функции **ellipap**:

```
[z, p, k] = ellipap (n, Rp, Rs),
```

где n — порядок фильтра; Rp — уровень пульсаций АЧХ (максимальное затухание) в полосе пропускания, а Rs — уровень пульсаций АЧХ (минимальное затухание) в полосе задерживания (в децибелах).

Аналоговый ФНЧ-прототип Бесселя (см. § 13.5) в системе MATLAB рассчитывается с помощью функции **besselap**:

```
[z, p, k] = besselap (n),
```

где n — порядок фильтра.

♦ **Функции денормирования частоты в аналоговой области**

Аналоговые селективные фильтры — ФНЧ (low-pass filter), ФВЧ (high-pass filter), полосовой фильтр (band-pass filter) и режекторный фильтр (band-stop filter) — можно получить путём денормирования частоты аналогового нормированного ФНЧ-прототипа (см. § 13.7 и рис.13.1).

В системе MATLAB для денормирования частоты ФНЧ-прототипа используются следующие четыре функции [52, 54]:

- **lp2lp** — изменение частоты среза ФНЧ (low-pass);
- **lp2hp** — преобразование ФНЧ в ФВЧ (high-pass);
- **lp2bp** — преобразование ФНЧ в полосовой фильтр (pass-pass);
- **lp2bs** — преобразование ФНЧ в режекторный фильтр (pass-stop).

Принцип составления их имён следующий: первый элемент lp (low-pass — ФНЧ), второй элемент «2» — символ преобразования, третий элемент — тип результирующего фильтра.

Все функции денормирования частоты могут преобразовывать аналоговые нормированные ФНЧ-прототипы, заданные двумя способами — в виде коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции в форме (14.1) либо в пространстве состояний [см. (14.5), (14.7) — (14.9)]. Различаются эти два варианта по числу входных и выходных параметров.

Формулы денормирования частоты (см. табл.13.3) и функции MATLAB сведены в табл.14.1.

Таблица 14.1

Тип аналогового фильтра	Формула замены оператора $s = \xi(p)$	Функции MATLAB в двух формах
ФНЧ	$s = \dfrac{p}{\omega_{\text{п}}}$	[a1, b1] = lp2lp (a, b, w0) [A1, B1, C1, D1] = lp2lp (A, B. C, D, w0)
ФВЧ	$s = \dfrac{\omega_{\text{п}}}{p}$	[a1, b1] = lp2hp (a, b, w0) [A1, B1, C1, D1] = lp2hp (A, B. C, D, w0)

Окончание табл.14.1

Полосовой фильтр (ПФ)	$s = Q\dfrac{(p/\omega_0)^2 + 1}{p/\omega_0}$	[a1, b1] = lp2bp (a, b, w0, Bw) [A1, B1, C1, D1] = lp2bp (A, B. C, D, w0, Bw)
Режекторный фильтр (РФ)	$s = \dfrac{p/\omega_0}{Q\left[(p/\omega_0)^2 + 1\right]}$	[a1, b1] = lp2bs (a, b, w0, Bw) [A1, B1, C1, D1] = lp2bs (A, B. C, D, w0, Bw)
Примечание 1. $\omega_п = 2\pi f_п$; $\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$; $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi \Delta f$; $Q = \omega_0/(\omega_2 - \omega_1)$; ω_1 и ω_2 — соответственно нижняя и верхняя граничные частоты полосы пропускания для ПФ и полосы задерживания для РФ. Примечание 2. В функциях MATLAB w0 — частота среза для ФНЧ и ФВЧ или центральная частота для ПФ и РФ (рад/с); Bw — полоса пропускания для ПФ или задерживания для РФ (рад/с)		

♦ **Функции синтеза аналоговых фильтров**

Для синтеза аналогового фильтра (см. рис.13.1) необходимо выполнить две операции: синтезировать нормированный аналоговый ФНЧ-прототип и преобразовать его к нужному типу фильтра с заданными частотами среза (осуществить денормирование частоты). Эта последовательность действий оформлена в виде следующих функций MATLAB [52, 54]:

- butter (n, w0, type, 's') — синтез фильтра Баттерворта;
- cheby1 (n, Rp, w0, type, 's') — синтез фильтра Чебышева типа 1;
- cheby2 (n, Rs, w0, type, 's') — синтез фильтра Чебышева типа 2;
- ellyp (n, Rp, Rs, w0, type, 's') — синтез эллиптического фильтра;
- besself (n, w0, type) — синтез фильтра Бесселя.

Перечисленные функции, за исключением функции besself, позволяют синтезировать как аналоговые, так и дискретные фильтры. Признаком синтеза аналогового фильтра служит строковый параметр 's', используемый в качестве последнего входного параметра. Параметры n, Rp, Rs (их состав зависит от типа фильтра) — это параметры ФНЧ-прототипов: n — порядок фильтра, Rp — максимальное затухание в полосе пропускания, Rs — минимальное затухание в полосе задерживания (в децибелах).

Параметры w0 и type используются совместно для задания типа фильтра и значений его частот среза (в радианах в секунду):

- **ФНЧ:** w0 — скаляр, параметр type отсутствует;
- **ФВЧ:** w0 — скаляр, параметр type = 'high';
- **полосовой фильтр:** w0 — двухэлементный вектор частот среза [w1, w2], параметр type отсутствует;
- **режекторный фильтр:** w0 — двухэлементный вектор частот среза фильтра [w1, w2], параметр type = 'stop'.

Отметим, что в данных функциях при разработке полосовых и режекторных фильтров в качестве параметров задаются именно *частоты среза*, а не средняя частота и полоса пропускания, как в функциях преобразования нормированных ФНЧ-прототипов (см. табл.14.1).

В зависимости от того, сколько выходных параметров указывается при вызове, функции синтеза фильтров могут возвращать результаты синтеза в виде коэффициентов полиномов числителя и знаменателя при дробно-рациональном представлении (14.1) передаточной функции (два выходных параметра); нулей, полюсов и коэффициента усиления при нуль-полюсном представлении (14.2) передаточной функции (три выходных параметра); параметров пространства состояний (четыре выходных параметра) [52]:

- [a, b] = … ;
- [z, p, k] = … ;
- [A, B, C, D] = … ,

где многоточиями обозначены функции синтеза фильтров в системе MATLAB.

Действия, выполняемые функциями расчёта аналоговых фильтров, следующие:

1) производится синтез аналоговых нормированных ФНЧ-прототипов с заданными параметрами АЧХ;
2) полученные нули и полюсы преобразуются в параметры пространства состояний;
3) производится преобразование аналоговых нормированных ФНЧ-прототипов к требуемому типу фильтра с заданными частотами среза;
4) выполняется преобразование описания фильтра к заданному при вызове виду.

♦ Функции расчёта порядка фильтра

Рассмотренные выше функции расчёта фильтров требуют задания в качестве входных параметров порядка фильтра n и его частоты среза w0. При этом понятие частоты среза для фильтров разных типов определяется по-разному •. Однако исходными данными при разработке фильтров, как правило, являются другие параметры ••: граничные частоты полос пропускания (ω_p) и задерживания (ω_s), а также допустимая неравномерность АЧХ в полосе пропускания (R_p) и минимально необходимое затухание в полосе задерживания (R_s).

Рассчитать минимально необходимый порядок фильтра позволяют следующие однотипные функции пакета **Signal Processing**:

• См. сноску на с.521.

•• В гл.13 эти параметры имеют другое обозначение: $\omega_п$, $f_п$ или $W_п$ для граничных частот полос пропускания; $\omega_з$, $f_з$ или $W_з$ для граничных частот полос задерживания; $a_п$ для допустимой неравномерности амплитудно-частотной характеристики в полосе пропускания; $a_з$ для минимально необходимого затухания в полосе задерживания (см. рис.13.13, серые области на рисунке демонстрируют допуски, в которые должна укладываться амплитудно-частотная характеристика фильтра).

- [n, Wn] = buttord (Wp, Ws, Rp, Rs, ‘s’) ;
- [n, Wn] = cheb1ord (Wp, Ws, Rp, Rs, ‘s’) ;
- [n, Wn] = cheb2ord (Wp, Ws, Rp, Rs, ‘s’) ;
- [n, Wn] = ellipord (Wp, Ws, Rp, Rs, ‘s’) .

Данные функции позволяют выбирать порядок как для аналоговых, так и для дискретных фильтров. Наличие параметра ‘s’ является признаком расчёта аналогового фильтра, а отсутствие — признаком расчёта дискретного фильтра.

Параметры Wp и Ws задают границы полос пропускания и задерживания, способ задания этих параметров зависит от типа проектируемого фильтра:

- **ФНЧ:** Wp и Ws — числа, при этом должно выполняться неравенство Wp < < Ws;
- **ФВЧ:** Wp и Ws — числа, при этом должно выполняться неравенство Wp > > Ws;
- **полосовой фильтр:** Wp и Ws — двухэлементные векторы, при этом должны выполняться неравенства Ws(1) < Wp(1) < Wp(2) < Ws(2);
- **режекторный фильтр:** Wp и Ws — двухэлементные векторы, при этом должны выполняться неравенства Wp(1) < Ws(1) < Ws(2) < Wp(2).

Параметры Rp и Rs задают в децибелах допустимую неравномерность АЧХ в полосе пропускания и минимально необходимое затухание в полосе задерживания соответственно.

Выходными параметрами являются минимально необходимый для выполнения заданных требований порядок фильтра n и частота среза фильтра Wn. Эти параметры должны затем использоваться при вызове функции расчёта фильтра.

Поскольку порядок фильтра — величина целочисленная, то обычно оказывается, что фильтр минимально необходимого порядка обеспечивает некоторый запас по исходным параметрам. Этот запас можно использовать по-разному — либо сделать неравномерность АЧХ в полосе пропускания точно равной заданной, но увеличить затухание в полосе задерживания, либо точно выдержать заданное затухание в полосе задерживания, уменьшив при этом неравномерность АЧХ в полосе пропускания. Для эллиптических фильтров возможен ещё один вариант — сужение переходной полосы за счёт расширения полосы задерживания [52].

Если для функций расчёта аналогового фильтра используются те же параметры пульсаций АЧХ Rp и Rs, что и для функций выбора порядка фильтра, то для фильтров Баттерворта и Чебышева типа 1 будет увеличиваться затухание в полосе задерживания, для фильтров Чебышева типа 2 — уменьшаться неравномерность АЧХ в полосе пропускания, а для эллиптических фильтров — расширяться полоса задерживания•.

Приведём примеры расчёта аналоговых фильтров с использованием рассмотренных выше функций.

• См. также примеры 13.1 — 13.4 и 13.6 — 13.11.

Пример 14.3. Спроектировать аналоговый фильтр со следующими параметрами (см. примеры 13.1 и 13.6):

— тип избирательного фильтра — ФНЧ;

— вид АЧХ фильтра — Баттерворта;

— граничная частота полосы пропускания $f_{\text{п}} = 1{,}0$ кГц;

— граничная частота полосы задерживания $f_{\text{з}} = 1{,}5$ кГц;

— максимальное затухание в полосах пропускания $a_{\text{п}} = 3$ дБ;

— минимальное затухание в полосе задерживания $a_{\text{з}} = 40$ дБ.

Для синтеза фильтра при нуль-полюсном представлении передаточной функции и расчёта его амплитудно-частотной характеристики в командном окне MATLAB нужно набрать следующие команды:

```
>> fp=1000;
>> fs=1500;
>> Rp=3;
>> Rs=40;
>> [n,Wn]=buttord(2*pi*fp,2*pi*fs,Rp,Rs,'s');
>> [a,b]=butter(n,Wn,'s');
>> [z,p,k]=tf2zp(a,b)
>> w=0:2*pi*10:2*pi*3000;
>> h=freqs(a,b,w);
>> plot(w/(2*pi),20*log10(abs(h)))
>> grid on
```

Рассчитанные параметры синтезированного фильтра следующие:

- $N = 12$; $K = 4{,}9122 \cdot 10^{45}$; конечные нули передаточной функции p_0 отсутствуют (нуль в бесконечности);
- полюсы передаточной функции p_{pk} $\left(k = \overline{1,12}\right)$:

$-838{,}1 + j\,6366{,}1$; $-838{,}1 - j\,6366{,}1$; $-2457{,}2 + j\,5932{,}3$; $-2457{,}2 - j\,5932{,}3$;
$-3908{,}9 + j\,5094{,}2$; $-3908{,}9 - j\,5094{,}2$; $-5094{,}2 + j\,3908{,}9$; $-5094{,}2 - j\,3908{,}9$;
$-6366{,}1 + j\,838{,}1$; $-6366{,}1 - j\,838{,}1$; $-5932{,}3 + j\,2457{,}2$; $-5932{,}3 - j\,2457{,}2$.

На рис.14.5 приведена АЧХ спроектированного аналогового ФНЧ. Она совпадает с АЧХ, изображённой на рис.13.14,*б* (см. пример 13.6).

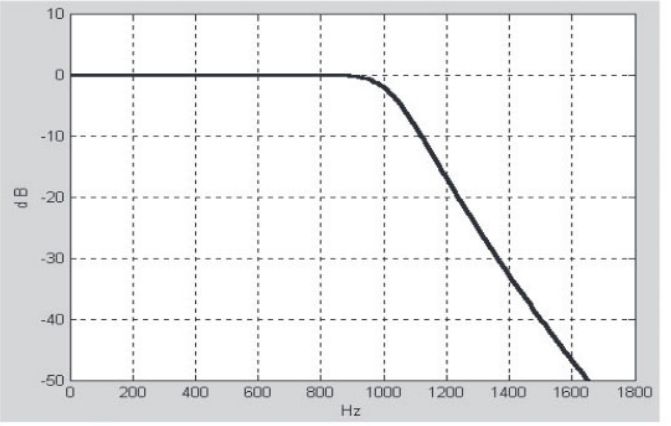


Рис.14.5. АЧХ аналогового ФНЧ 12-го порядка, спроектированного в примере 14.3

Практическая реализация аналогового ФНЧ с таким большим коэффициентом усиления $K = 4{,}9122 \cdot 10^{45}$ возможна при представлении передаточной функции в форме (13.167). В этом случае $E_{0k} = \sqrt[6]{K} = 4{,}123 \cdot 10^{7}$ $\left(k = \overline{0,6}\right)$.

Пример 14.4. Спроектировать аналоговый фильтр со следующими параметрами (см. примеры 13.2 и 13.7):

— тип избирательного фильтра — ФВЧ;

— вид АЧХ фильтра — Чебышева типа 1;

— граничная частота полосы пропускания $f_{\text{п}} = 1{,}0$ кГц;

— граничная частота полосы задерживания $f_{\text{з}} = 0{,}667$ кГц;

— максимальное затухание в полосе пропускания $a_{\text{п}} = 1{,}5$ дБ;

— минимальное затухание в полосе задерживания $a_{\text{з}} = 40$ дБ.

Для синтеза фильтра при нуль-полюсном представлении передаточной функции и расчёта его амплитудно-частотной характеристики в командном окне MATLAB нужно набрать следующие команды:

```
>> fp=1000;
>> fs=667;
>> Rp=1.5;
>> Rs=40;
>> [n,Wn]=cheb1ord(2*pi*fp,2*pi*fs,Rp,Rs,'s');
>> [a,b]=cheby1(n,Rp,Wn,'high','s');
>> [z,p,k]=tf2zp(a,b)
>> w=2*pi*100: 2*pi*10:2*pi*3000;
>> h=freqs(a,b,w);
>> plot(w/(2*pi),20*log10(abs(h)))
>> grid on
```

Рассчитанные параметры синтезированного фильтра следующие:

- $N = 6$; $K = 0{,}8414$;
- шестикратный нуль передаточной функции: $p_{0k} = 0$ $\left(k = \overline{1,6}\right)$;
- полюсы передаточной функции p_{pk} $\left(k = \overline{1,6}\right)$:

$$-11422 + j\,15187; \quad -11422 - j\,15187; \quad -1686 + j\,8364;$$
$$-1686 - j\,8364; \quad -343 + j\,6353; \quad -343 - j\,6353.$$

На рис.14.6 приведена АЧХ спроектированного аналогового ФВЧ. Она совпадает с АЧХ, изображённой на рис.13.15,*б* (см. пример 13.7).

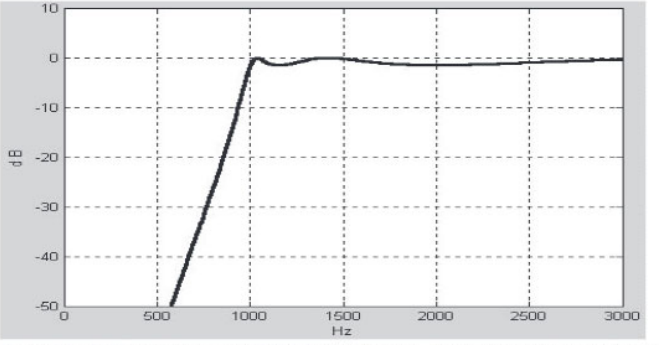


Рис.14.6. АЧХ аналогового ФВЧ 6-го порядка, спроектированного в примере 14.4

Практическая реализация аналогового ФВЧ возможна при представлении передаточной функции в форме (13.167).

Пример 14.5. Спроектировать аналоговый фильтр со следующими параметрами (см. примеры 13.3, 13.8 и 13.10):
— тип избирательного фильтра — полосовой;
— вид АЧХ фильтра — Чебышева типа 2;
— граничные частоты полосы пропускания $f_{п1} = 20$ кГц и $f_{п2} = 22$ кГц;
— граничные частоты полос задерживания $f_{з1} = 19{,}3$ кГц и $f_{з2} = 22{,}7$ кГц;
— максимальное затухание в полосе пропускания $a_п = 1{,}5$ дБ;
— минимальное затухание в полосах задерживания $a_з = 40$ дБ.

Для синтеза фильтра при нуль-полюсном представлении передаточной функции и расчёта его амплитудно-частотной характеристики в командном окне MATLAB нужно набрать следующие команды:

```
>> fp1=20000;
>> fp2=22000;
>> fs1=19300;
>> fs2=22700;
>> Rp=1.5;
>> Rs=40;
>> Wp=[2*pi*fp1 2*pi*fp2];
>> Ws=[2*pi*fs1 2*pi*fs2];
>> [n,Wn]=cheb2ord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s');
>> [a,b]=cheby2(n,Rs,Wn,'s');
>> [z,p,k]=tf2zp(a,b)
>> w=2*pi*17000:2*pi*10:2*pi*25000;
>> h=freqs(a,b,w);
>> plot(w/(2*pi),20*log10(abs(h)))
>> grid on
```

Рассчитанные параметры синтезированного фильтра следующие:

- $N = 12$;
- $K = 0{,}01$;
- нули передаточной функции p_{0k} $\left(k = \overline{1,12}\right)$:

$$+j\,172960; \quad -j\,172960; \quad +j\,145740; \quad -j\,145740;$$
$$+j\,141870; \quad -j\,141870; \quad +j\,122440; \quad -j\,122440;$$
$$+j\,119190; \quad -j\,119190; \quad +j\,100430; \quad -j\,100430;$$

- полюсы передаточной функции p_{pk} $\left(k = \overline{1,12}\right)$:

$$-1320 + j\,138580; \quad -1320 - j\,138580; \quad -4630 + j\,138120;$$
$$-4630 - j\,138120; \quad -8690 + j\,134770; \quad -8690 - j\,134770;$$
$$-8270 + j\,128350; \quad -8270 - j\,128350; \quad -1190 + j\,125330;$$
$$-1190 - j\,125330; \quad -4210 + j\,125630; \quad -4210 - j\,125630.$$

На рис.14.7 приведена АЧХ спроектированного фильтра. Она совпадает с АЧХ, изображённой на рис.13.16,*б* (см. пример 13.8). Практическая реализация аналогового полосового фильтра возможна при представлении передаточной функции в форме (13.171) либо в форме (13.188). Коэффициенты передаточных функций можно получить соответствующей комбинацией найденных комплексно-сопряжённых полюсов и нулей.

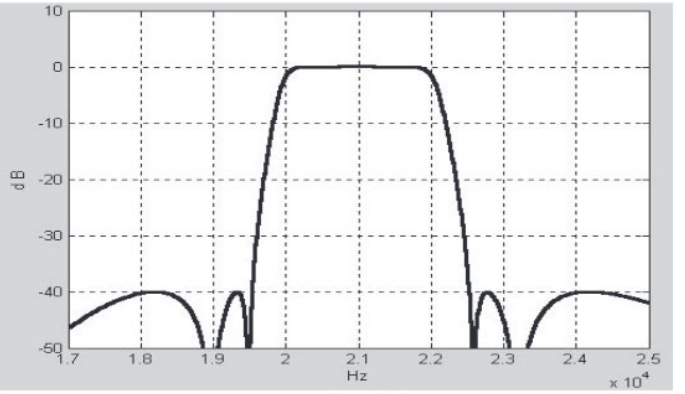


Рис.14.7. АЧХ аналогового полосового фильтра 12-го порядка, спроектированного в примере 14.5

Пример 14.6. Спроектировать аналоговый фильтр со следующими параметрами (см. примеры 13.4, 13.9 и 13.11):

— тип избирательного фильтра — режекторный;

— вид АЧХ фильтра — эллиптический;

— граничные частоты полос пропускания $f_{п1} = 20$ кГц и $f_{п2} = 22$ кГц;

— граничные частоты полосы задерживания $f_{з1} = 20{,}25$ кГц и $f_{з2} = 21{,}75$ кГц;

— максимальное затухание в полосах пропускания $a_п = 1{,}5$ дБ;

— минимальное затухание в полосе задерживания $a_з = 40$ дБ.

Для синтеза фильтра при нуль-полюсном представлении передаточной функции и расчёта его амплитудно-частотной характеристики в командном окне MATLAB нужно набрать следующие команды:

```
>> fp1=20000;
>> fp2=22000;
>> fs1=20250;
>> fs2=21750;
>> Rp=1.5;
>> Rs=40;
>> Wp=[2*pi*fp1 2*pi*fp2];
>> Ws=[2*pi*fs1 2*pi*fs2];
>> [n,Wn]=ellipord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s');
>> [a,b]=ellip(n,Rp,Rs,Wn,'stop','s');
>> [z,p,k]=tf2zp(a,b)
>> w=2*pi*17000:2*pi*10:2*pi*25000;
>> h=freqs(a,b,w);
>> plot(w/(2*pi),20*log10(abs(h)))
>> grid on
```

Рассчитанные параметры синтезированного фильтра следующие:

- $N = 10$; $K = 1$;
- нули передаточной функции p_{0k} $\left(k = \overline{1,10}\right)$:

  $+j\,137060$; $-j\,137060$; $+j\,135580$; $-j\,135580$; $+j\,131860$;

$-j\,131860;\quad +j\,128250;\quad -j\,128250;\quad +j\,126870;\quad -j\,126870;$

- полюсы передаточной функции $p_{pk}\ \left(k=\overline{1,10}\right)$:

$-18520+j\,130560;\quad -18520-j\,130560;\quad -2120+j\,140000;\quad -2120-j\,140000;$
$-270+j\,138270;\quad -270-j\,138270;\quad -250+j\,125750;\quad -250-j\,125750;$
$-1880+j\,124170;\quad -1880-j\,124170.$

На рис.14.8 приведена АЧХ спроектированного фильтра. Она несколько отличается от АЧХ, изображённой на рис.13.17,*б* (см. пример 13.9), из-за другого порядка фильтра.

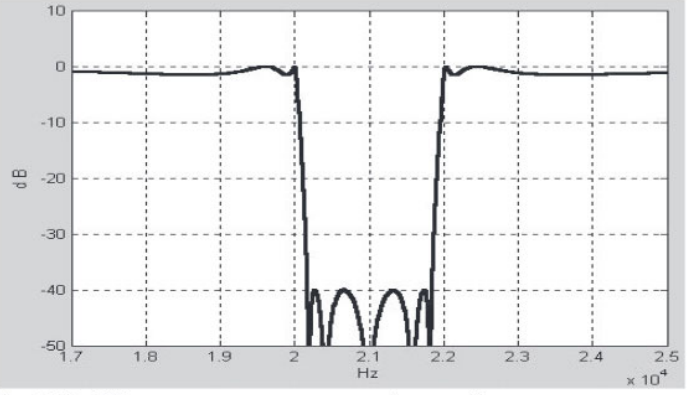


Рис.14.8. АЧХ аналогового режекторного фильтра 10-го порядка, спроектированного в примере 14.6

14.3. Проектирование рекурсивных цифровых фильтров с использованием системы MATLAB

Одномерные скалярные вещественные стационарные линейные ЦФ в системе компьютерной математики MATLAB принято описывать импульсной характеристикой $h[n]$, передаточной функцией $H(z)$ и в пространстве состояний.

Передаточную функцию обычно представляют либо в дробно-рациональной (3.7), либо в нуль-полюсной (3.38) форме.

Реже применяется передаточная функция $H(z)$ в форме разложения на простые дроби:

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M-N}C_k z^{-k}+\sum_{k=1}^{S}\sum_{i=1}^{m_k}\frac{R_{ki}}{\left(1-z_{pk}z^{-1}\right)^i}, \qquad (14.14)$$

где первая сумма — целая часть передаточной функции, отличная от нуля только при $M\ge N$; S — число различных полюсов z_{pk} передаточной функции $H(z)$; m_k — кратность полюса z_{pk} $\left(\sum_{k=1}^{S}m_k=N\right)$; $R_{ki}\left(k=\overline{1,\ S},\ i=\overline{1,\ m_k}\right)$ —

числа, называемые *вычетами* передаточной функции $H(z)$, которые определяются следующими выражениями [39]:

$$R_{ki}=\frac{1}{(i-1)!}\lim_{z\to z_{pk}}\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}\left[H(z)\left(1-z_{pk}z^{-1}\right)^{m_k}\right],\quad k=\overline{1,\ S},\ i=\overline{1,\ m_k}. \qquad (14.15)$$

Если все полюсы передаточной функции простые (не кратные), то разложение (14.14) принимает вид

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M-N}C_kz^{-k}+\sum_{k=1}^{N}\frac{R_k}{1-z_{pk}z^{-1}}, \qquad (14.16)$$

где вычеты определяются более простой формулой:

$$R_k=\lim_{z\to z_{pk}}\left[H(z)\left(1-z_{pk}z^{-1}\right)\right],\quad k=\overline{1,\ N}. \qquad (14.17)$$

Представление передаточной функции в форме простых дробей (14.14) позволяет довольно просто вычислить импульсную характеристику ЦФ, поскольку каждому слагаемому вида $R_k\Big/\left(1-z_{pk}z^{-1}\right)$ соответствует экспоненциальное слагаемое импульсной характеристики $R_kz_{pk}^n$ при $n\ge 0$.

Пара комплексно-сопряжённых полюсов передаточной функции (14.16) даёт пару слагаемых импульсной характеристики в виде комплексно-сопряжённых экспонент:

$$\begin{aligned}R_k\left(z_{pk}\right)^n+R_k^*\left(z_{pk}^*\right)^n&=2\,\mathrm{Re}\left[R_k\left(z_{pk}\right)^n\right]=\\=2\,\mathrm{Re}\left\{|R_k|\cdot\left|z_{pk}\right|^n\exp\left[j\left(\arg R_k+n\arg z_{pk}\right)\right]\right\}&=\\=|R_k|\cdot\left|z_{pk}\right|^n\cos\left(n\arg z_{pk}+\arg R_k\right).&\end{aligned} \qquad (14.18)$$

Что касается кратных полюсов, то m-кратный полюс z_{pk} даёт в выражении для импульсной характеристики m слагаемых:

$$A_0z_{pk}^n+A_1nz_{pk}^n+A_2n^2z_{pk}^n+\ldots+A_mn^{m-1}z_{pk}^n,\quad n\ge 0, \qquad (14.19)$$

где коэффициенты $A_i\left(i=\overline{0,\ m-1}\right)$ представляют собой константы, и для каждой конкретной кратности m они могут быть рассчитаны индивидуально. Вот несколько примеров:

$$A\Big/\left(1-z_{pk}\right)^2\ \leftrightarrow\ A(1+n)\,z_{pk}^n,\quad n\ge 0;$$

$$A\Big/\left(1-z_{pk}\right)^3\ \leftrightarrow\ A\left(1+\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}n^2\right)z_{pk}^n,\quad n\ge 0;$$

$$A\Big/\left(1-z_{pk}\right)^4\ \leftrightarrow\ A\left(1+\frac{11}{6}n+n^2+\frac{1}{6}n^3\right)z_{pk}^n,\quad n\ge 0;$$

$$A\Big/\left(1-z_{pk}\right)^5 \leftrightarrow A\left(1+\frac{25}{12}n+\frac{35}{24}n^2+\frac{5}{12}n^3+\frac{1}{24}n^4\right)z_{pk}^n, \quad n\geq 0\ .$$

Описание скалярных линейных ЦФ в пространстве состояний рассмотрено в § 4.4.

♦ **Функция расчёта частотных характеристик цифрового фильтра (freqz)**

Комплексная частотная характеристика $H\left(e^{j\omega T}\right)$ цифрового (дискретного) линейного фильтра (КЧХ) определяется из передаточной функции [•] $H(z)$ при $z=e^{j\omega T}$.

Функция **freqz** реализует расчёт комплексной частотной характеристики. В простейшем виде эта функция используется следующим образом:

```
freqz (a, b).
```

Входные параметры a и b — векторы коэффициентов передаточной функции фильтра $H(z)$ в дробно-рациональной форме (3.7).

При расчёте используются нормированные значения частоты [••] $w=\omega T$, при этом нормированная частота дискретизации $w_д=2\pi$. По умолчанию выбирается 512 отсчётов нормированной частоты w, равномерно распределённых в интервале от 0 до π.

При отсутствии выходных параметров функция **freqz** строит графики частотных характеристик ЦФ: АЧХ в децибелах и ФЧХ в градусах.

Если при вызове функции **freqz** указаны выходные параметры:

```
[h, w] = freqz (a, b),
```

то построение графиков не производится. В векторе h возвращаются рассчитанные значения КЧХ, а в векторе w — использованные при расчёте значения нормированных частот $w=\omega T$.

Для того чтобы задать количество частотных точек для расчёта, используется третий входной параметр n (нормированные частоты по-прежнему равномерно распределены в интервале от 0 до π):

```
[h, w] = freqz (a, b, n).
```

Можно заставить функцию **freqz** использовать значения нормированных частот $w=\omega T$, равномерно распределённых в интервале от 0 до 2π, т.е. до частоты дискретизации $w_д=2\pi$. Это необходимо при анализе комплексных ЦФ, частотные характеристики которых не являются симметричными [1]. Такое указание даётся функции **freqz** с помощью четвёртого входного параметра — строки 'whole':

```
[h, w] = freqz (a, b, n, 'whole').
```

Наконец, можно задать вектор нормированных частот w для расчёта КЧХ:

```
h = freqz (a, b, w).
```

[•] См. § 3.3.
[••] См. § 3.4.

Использование второго выходного параметра w в этом случае не имеет смысла, поскольку вектор частот задан на входе.

При вызове графиков ФЧХ дискретных фильтров с помощью функции **freqz** для устранения «фиктивных» разрывов (скачков) характеристики, о которых речь шла в § 14.2, следует применять функцию построения графиков фазочастотных характеристик **unwrap**:

```
phi = unwrap (phi).
```

♦ **Функции преобразования способов описания дискретных систем**

Для преобразования описаний дискретных линейных систем в трёх формах — дробно-рациональной, нуль-полюсной и в пространстве состояний — в пакете **Signal Processing** используются те же шесть функций, что и для преобразования описаний аналоговых систем (см. § 14.2):

- функция **tf2zp** преобразует дробно-рациональную форму представления передаточной функции (3.7) в нуль-полюсную форму (3.38): [z, p, k] = tf2zp (a, b);
- функция **zp2tf** преобразует нуль-полюсную форму представления передаточной функции (3.38) в дробно-рациональную форму (3.7): [a, b] = zp2tf (z, p, k);
- функция **tf2ss** преобразует дробно-рациональную форму описания передаточной функции (3.7) в параметры представления системы в пространстве состояний (4.11): [A, B, C, D] = tf2ss (a, b);
- функция **ss2tf** преобразует параметры представления системы в пространстве состояний (4.11) в дробно-рациональную форму передаточной функции (3.7): [a, b] = ss2tf (A, B, C, D);
- функция **zp2ss** преобразует нуль-полюсную форму передаточной функции (3.38) в параметры представления дискретной линейной системы в пространстве состояний (4.11): [A, B, C, D] = zp2ss (z, p, k);
- функция **ss2zp** преобразует параметры представления дискретной системы в пространстве состояний (4.11) в нуль-полюсную форму описания передаточной функции (3.38): [z, p, k] = ss2zp (A, B, C, D).

Единственная особенность использования этих функций в дискретном случае состоит в том, что векторы a и b, составленные из коэффициентов полиномов числителя и знаменателя дробно-рациональной передаточной функции (3.7), должны иметь одинаковый размер, т.е. порядки числителя и знаменателя функции (3.7) должны быть одинаковыми. В пакете **Signal Processing** имеется функция **eqtflength**, дополняющая нулями в конце более короткий из переданных ей векторов: [a1, b1] = eqtflength (a, b).

Функция **resiquez** обеспечивает преобразование передаточной функции из дробно-рациональной формы (3.7) в форму в виде простых дробей (14.16) и обратно: из формы (14.16) в дробно-рациональную форму (3.7). Её отличие от функции **resique**, рассмотренной в § 14.2 для аналоговых систем, состоит в форме представления простых дробей. Функция **resique** использует формулу разложения (14.12), а функция **resiquez** — формулу (14.16). Функция **resiquez**

может выполнять преобразования в обе стороны. Направление преобразования зависит от числа входных параметров: [r, p, k] = residuez (a, b) или [a, b] = residuez (r, p, k). Здесь a и b — векторы коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции (3.7); p — вектор-столбец полюсов; r — вектор-столбец соответствующих им вычетов; k — вектор-строка коэффициентов целой части передаточной функции (14.16). Представление передаточной функции в виде суммы простых дробей (14.16) соответствует параллельной форме реализации дискретного фильтра.

Согласно (3.38) каскадная реализация ЦФ возможна в виде последовательного соединения блоков первого порядка. Однако часть этих блоков (или все) может оказаться с комплексными коэффициентами. По этой причине при каскадной реализации вещественных ЦФ их делят на секции второго порядка (second order sections). При этом пары комплексно-сопряжённых полюсов и нулей (если они имеются) объединяются и образуют каскады второго порядка. В этом случае передаточные функции $H(z)$ цифровых ФНЧ и ФВЧ будут иметь вид (13.213), а полосового и режекторного фильтров — вид (13.221).

В пакете **Signal Processing** имеется шесть функций, осуществляющих преобразование описания дискретной системы между набором секций второго порядка и другими формами описания: **tf2sos**, **zp2sos**, **ss2sos**, **sos2tf**, **sos2zp**, **sos2ss** [52]. Имена этих функций построены так же, как и имена других функций преобразования описаний систем; аббревиатура последовательной (каскадной) формы — **sos** (second order sections):

- функция **tf2sos** преобразует коэффициенты полиномов числителя и знаменателя дробно-рациональной формы представления передаточной функции (3.7) в секции второго порядка: [sos, g] = tf2sos (a, b, 'order', 'scale');
- функция **zp2sos** преобразует нуль-полюсную форму передаточной функции (3.38) в секции второго порядка: [sos, g] = zp2sos (z, p, k, 'order', 'scale');
- функция **ss2sos** преобразует параметры представления дискретной линейной системы в пространстве состояний (4.11) в каскадное соединение секций второго порядка: [sos, g] = ss2sos (A, B, C, D, 'order', 'scale');
- функция **sos2tf** преобразует секции второго порядка в дробно-рациональную форму представления передаточной функции (3.7): [a, b] = sos2tf (sos, g);
- функция **sos2zp** преобразует секции второго порядка в нуль-полюсную форму описания передаточной функции (3.38): [z, p, k] = sos2zp (sos, g);
- функция **sos2ss** преобразует секции второго порядка в параметры представления системы в пространстве состояний (4.11): [A, B, C, D] = sos2ss (sos, g).

Набор секций (блоков) второго порядка представляется с помощью шестистолбцовой матрицы sos, каждая строка которой соответствует одной секции и устроена следующим образом [52]:

$$[\,a_0 \;\; a_1 \;\; a_2 \;\; 1 \;\; b_1 \;\; b_2\,]. \qquad (14.20)$$

Такой строке соответствует передаточная функция секции второго порядка [см. (13.213) и (13.221)]

$$H(z)=\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}. \qquad (14.21)$$

Параметр g — дополнительный множитель (gain), добавляемый к передаточной функции, составленной из секций (блоков) второго порядка. Этот параметр при вызове может опускаться, для входного параметра g это означает использование значения по умолчанию g = 1, а для выходного — учёт этого коэффициента в первой секции фильтра.

Преобразование описания из набора секций второго порядка в какую-либо другую форму **sos2xx** является однозначным, а обратное преобразование — **xx2sos** — нет. Дело в том, что группировать полюсы и нули для формирования секций второго порядка можно разными способами, можно менять порядок включения секций и по-разному распределять коэффициент усиления между ними (например, если у одной секции все коэффициенты $a_i\ \left(i=\overline{0,\ 2}\right)$ в одинаковое число раз увеличить, а у другой — во столько же раз уменьшить, результирующая передаточная функция ЦФ останется неизменной).

Группировка полюсов и нулей функциями **xx2sos** выполняется следующим образом. Прежде всего выделяются комплексно-сопряжённые пары нулей и полюсов передаточной функции. Эти пары образуют соответственно числители и знаменатели передаточных функций (14.21) блоков второго порядка, причём для каждой секции выбирается пара нулей, расположенных ближе всего к паре полюсов секции. Для вещественных полюсов и нулей применяется аналогичный подход: в пары группируются максимально близкие полюсы и нули.

Последовательностью включения секций второго порядка можно управлять с помощью входного параметра 'order', имеющегося у функций **xx2sos**. Этот параметр определяет режим сортировки строк матрицы sos и может принимать одно из двух значений [52]:

- 'up' — строки матрицы sos расположены в порядке приближения полюсов передаточных функций секций (14.21) к единичной окружности (этот вариант принят по умолчанию);
- 'down' — строки матрицы sos расположены в порядке удаления полюсов передаточных функций секций (14.21) от единичной окружности.

Входной параметр 'scale', имеющегося у функций **xx2sos**, управляет распределением коэффициента усиления между секциями второго порядка и множителем g. Этот параметр может принимать одно из трёх значений:

- 'none' — никакого дополнительного масштабирования не производится, во всех секциях $a_0=1$, а необходимый коэффициент усиления формируется с помощью множителя g (этот вариант принят по умолчанию);
- 'inf' — масштабирование коэффициентов $a_i\ \left(i=\overline{0,\ 2}\right)$ производится исходя из L_∞-нормы АЧХ секций второго порядка (L_∞-норма равна максимальному значению функции);

• ‘two’ — масштабирование коэффициентов $a_i \left(i = \overline{0,\ 2}\right)$ производится исходя из L_2-нормы АЧХ секций второго порядка (L_2-норма равна корню квадратному из интеграла от квадрата модуля функции).

Масштабирование и порядок включения секций (блоков) не влияет на передаточную функцию дискретного фильтра, у которого отсутствует квантование сигналов. Однако при практической реализации ЦФ на вычислителе, работающем в формате с фиксированной точкой, эффекты квантования обязательно следует принимать во внимание [1]. Приведём два соображения, упоминаемых в документации MATLAB:

• при ‘order’ = ‘up’ и ‘scale’ = ‘inf’ минимизируется вероятность переполнения регистров операционных устройств в процессе промежуточных вычислений;

• при ‘order’ = ‘down’ и ‘scale’ = ‘two’ минимизируется пиковое значение шума округления.

В системе MATLAB можно моделировать цифровую обработку сигнала фильтром, представляемым каскадным соединением блоков второго порядка, не преобразуя описание фильтра к стандартной форме. Для этого служит функция **sosfilt**, вызываемая следующим образом: y = sosfilt (sos, x). Здесь sos — описание фильтра в рассмотренном выше формате, x и y — соответственно входной и выходной сигналы.

♦ Функция билинейного преобразования (bilinear)

В пакете **Signal Processing** имеется функция **bilinear**, позволяющая синтезировать ЦФ по произвольному аналоговому прототипу методом билинейного преобразования (см. § 13.8). Она преобразует заданные различными способами аналоговые описания систем в дискретные и поэтому имеет три варианта синтаксиса:

- [az, bz] = bilinear (a, b, Fd, Fq) ;
- [zz, pz, kz] = bilinear (z, p, k, Fd, Fq) ;
- [Az, Bz, Cz, Dz] = bilinear (A, B, C, D, Fd, Fq) .

Здесь a и b — коэффициенты полиномов числителя и знаменателя передаточной функции аналогового фильтра при дробно-рациональном представлении (14.1); z, p и k — нули, полюсы и коэффициент усиления передаточной функции аналогового фильтра при нуль-полюсном представлении (14.2); A, B, C, D — параметры представления аналогового фильтра в пространстве состояний (14.5). Аналогичные идентификаторы с буквой z в конце обозначают соответствующие параметры ЦФ: az и bz — коэффициенты полиномов числителя и знаменателя дробно-рациональной формы представления передаточной функции (3.7); zz, pz и kz — нули, полюсы и коэффициент усиления передаточной функции при нуль-полюсном представлении (3.38); Az, Bz, Cz, Dz — параметры представления системы в пространстве состояний (4.11).

Функция **bilinear** различает способы задания описания аналогового фильтра по размеру переданных параметров. Если два первых входных параметра —

векторы-строки, то они считаются коэффициентами числителя и знаменателя передаточной функции в форме (14.1). Если два первых входных параметра — векторы-столбцы, то они считаются нулями и полюсами передаточной функции в форме (14.2). Если первый входной параметр — матрица, то аналоговый фильтр задан в пространстве состояний уравнениями (14.5).

При использовании функции **bilinear** аналоговый фильтр должен быть физически реализуемым, т.е. степень полинома числителя передаточной функции (14.1) должна быть меньше степени знаменателя ($M < N$).

Параметр Fd задаёт частоту дискретизации $f_д$ в герцах. Последний входной параметр — Fq — является необязательным. При его отсутствии билинейное преобразование осуществляется по формуле (13.206), а деформация частотной шкалы описывается выражением (13.212).

Если при вызове функции **bilinear** используется параметр Fq, то он задаёт фиксированную частоту f_q (в герцах), на которой комплексные коэффициенты передачи аналогового и цифрового фильтров будут совпадать. Для этого производится предварительное масштабирование частотной оси аналоговой системы, в результате чего используемая при билинейном преобразовании подстановка принимает вид [52]

$$p = \frac{2\pi f_q}{\mathrm{tg}(\pi f_q / f_д)} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \qquad (14.22)$$

Деформация частотной шкалы при этом описывается следующей формулой:

$$f_a = f_q \frac{\mathrm{tg}(\pi f_ц / f_д)}{\mathrm{tg}(\pi f_q / f_д)} \text{ или } f_ц = \frac{f_д}{\pi} \mathrm{arctg}\left[\frac{f_a}{f_q} \mathrm{tg}\left(\pi \frac{f_q}{f_д} \right) \right]. \qquad (14.23)$$

Комплексный коэффициент передачи аналогового фильтра на частоте f_a будет совпадать с комплексным коэффициентом передачи ЦФ на частоте $f_ц$: если $f_a = f_q$, то и $f_ц = f_q$.

♦ **Функции синтеза стандартных цифровых фильтров на основе билинейного преобразования**

Функции **butter**, **cheby1**, **cheby2**, **ellip** пакета **Signal Processing**, которые были рассмотрены в § 14.2, выполняют синтез цифровых ФНЧ, ФВЧ, полосовых и режекторных ЦФ по аналоговым прототипам (Баттерворта, Чебышева первого и второго типа и эллиптических) методом билинейного преобразования. Требуемая при этом последовательность действий оформлена в виде следующих функций MATLAB [52]:

- butter (n, w0, type) — синтез фильтров Баттерворта;
- cheby1 (n, Rp, w0, type) — синтез фильтров Чебышева типа 1;
- cheby2 (n, Rs, w0, type) — синтез фильтров Чебышева типа 2;
- ellip (n, Rp, Rs, w0, type) — синтез эллиптических фильтров.

Перечисленные функции позволяют синтезировать как дискретные (цифровые), так и аналоговые фильтры. Признаком синтеза дискретных фильтров является отсутствие строки 's' в конце списка входных параметров. Использование этих функций для синтеза аналоговых фильтров было рассмотрено в § 14.2.

Параметры n, Rp, Ps (их состав зависит от типа фильтра) — это параметры ФНЧ-прототипов: n — порядок фильтра, Rp — максимальное затухание в полосе пропускания, Ps — минимальное затухание в полосе задерживания (в децибелах).

Параметры w0 и type используются совместно для задания типа синтезируемого фильтра и значений частот среза его АЧХ, нормированных к *частоте Найквиста* $F_N = f_д / 2 = 1/(2T)$:

- **ФНЧ:** w0 — скаляр, параметр type отсутствует;
- **ФВЧ:** w0 — скаляр, параметр type = 'high';
- **полосовой фильтр:** w0 — двухэлементный вектор частот среза [w1, w2], параметр type отсутствует;
- **режекторный фильтр:** w0 — двухэлементный вектор частот среза фильтра [w1, w2], параметр type = 'stop'.

В зависимости от того, сколько выходных параметров указывается при вызове, функции синтеза фильтров могут возвращать результаты синтеза в виде коэффициентов полиномов числителя и знаменателя при дробно-рациональном представлении (3.7) передаточной функции (два выходных параметра); нулей, полюсов и коэффициента усиления при нуль-полюсном представлении (3.38) передаточной функции (три выходных параметра); параметров пространства состояний (4.11) — четыре выходных параметра:

- [a, b] = … ;
- [z, p, k] = … ;
- [A, B, C, D] = … ,

где многоточиями обозначены функции синтеза фильтров в системе MATLAB.

Действия, выполняемые функциями синтеза цифровых фильтров на основе билинейного преобразования, следующие [52]:

1) производится синтез аналогового нормированного ФНЧ-прототипа с заданными параметрами АЧХ;
2) полученные нули и полюсы преобразуются в параметры пространства состояний;
3) производится преобразование аналогового нормированного ФНЧ-прототипа в требуемый тип аналогового фильтра с заданными частотами среза [частоты среза при этом корректируются по формуле (13.212)];
4) с помощью функции **bilinear** аналоговый фильтр преобразуется в дискретный (цифровой);
5) выполняется преобразование описания фильтра к виду, заданному при вызове функции синтеза ЦФ.

♦ **Функции расчёта порядка фильтра**

Рассмотренные выше функции синтеза ЦФ требуют задания в качестве входных параметров порядка фильтра n и его частоты среза w0. При этом понятие частоты среза для фильтров разных типов определяется по-разному. Однако исходными данными при разработке фильтров, как правило, являются другие параметры: граничные частоты полос пропускания и задерживания, а также допустимая неравномерность АЧХ в полосе пропускания (R_p) и минимально необходимое затухание в полосе задерживания • (R_s).

Рассчитать минимально необходимый порядок дискретного фильтра позволяют следующие однотипные функции пакета **Signal Processing**:

- [n, Wn] = buttord (Wp, Ws, Rp, Rs) ;
- [n, Wn] = cheb1ord (Wp, Ws, Rp, Rs) ;
- [n, Wn] = cheb2ord (Wp, Ws, Rp, Rs) ;
- [n, Wn] = ellipord (Wp, Ws, Rp, Rs) .

Данные функции позволяют выбирать порядок как для аналоговых, так и для дискретных фильтров. Отсутствие строки 's' в конце списка параметров является признаком расчёта дискретного фильтра, а наличие — признаком расчёта аналогового фильтра.

Параметры Rp и Rs задают в децибелах допустимую неравномерность АЧХ в полосе пропускания и минимально необходимое затухание в полосе задерживания соответственно.

Параметры Wp и Ws задают граничные частоты полос пропускания и задерживания, нормированные к частоте Найквиста $F_N = f_д / 2 = 1/(2T)$; способ задания этих параметров зависит от типа проектируемого фильтра:

- **ФНЧ:** Wp и Ws — числа, при этом должно выполняться неравенство Wp < < Ws;
- **ФВЧ:** Wp и Ws — числа, при этом должно выполняться неравенство Wp > > Ws;
- **полосовой фильтр:** Wp и Ws — двухэлементные векторы, при этом должны выполняться неравенства Ws(1) < Wp(1) < Wp(2) < Ws(2);
- **режекторный фильтр:** Wp и Ws — двухэлементные векторы, при этом должны выполняться неравенства Wp(1) < Ws(1) < Ws(2) < Wp(2).

Выходными параметрами являются минимально необходимый для выполнения заданных требований порядок фильтра n и частота среза фильтра Wn, нормированная к частоте дискретизации. Эти параметры должны затем использоваться при вызове функции расчёта фильтра.

Поскольку порядок фильтра — величина целочисленная, то обычно оказывается, что фильтр минимально необходимого порядка обеспечивает некоторый запас по исходным параметрам. Этот запас можно использовать по-разному — либо сделать неравномерность АЧХ в полосе пропускания точно равной за-

• См. сноски на с.524.

данной, но увеличить затухание в полосе задерживания, либо точно выдержать заданное затухание в полосе задерживания, уменьшив при этом неравномерность АЧХ в полосе пропускания. Для эллиптических фильтров возможен ещё один вариант — сужение переходной полосы за счёт расширения полосы задерживания [52].

♦ **Функция инвариантного преобразования импульсной характеристики (impinvar)**

Функция **impinvar** предназначена для синтеза ЦФ по произвольному аналоговому прототипу методом инвариантного преобразования импульсной характеристики (см. § 13.8). Синтаксис вызова функции следующий:

```
[az, bz] = impinvar (a, b, Fd, tol).
```

Входные параметры a и b — коэффициенты полиномов числителя и знаменателя передаточной функции аналогового фильтра при дробно-рациональном представлении (14.1); Fd — частота дискретизации.

Параметр tol задаёт относительный порог обнаружения кратных полюсов (два близко расположенных полюса считаются совпадающими, если расстояние между ними, делённое на больший из их модулей, меньше tol).

Выходные параметры az и bz — коэффициенты полиномов числителя и знаменателя дробно-рациональной формы представления передаточной функции (3.7) синтезированного ЦФ.

Действия, выполняемые функцией **impinvar** при синтезе цифровых фильтров, следующие [52]:

1) передаточная функция аналогового прототипа преобразуется из дробно-рациональной формы (14.1) в сумму простых дробей (14.10);
2) найденный вектор полюсов p трансформируются в вектор exp (p/Fd);
3) передаточная функция ЦФ из суммы простых дробей (14.14) преобразуется в дробно-рациональную форму (3.7).

Рассмотрим примеры синтеза цифровых фильтров с использованием рассмотренных выше функций.

Пример 14.7. Спроектировать цифровой ФНЧ с частотной характеристикой Баттерворта при следующих исходных данных (см. пример 13.18):

— граничная частота полосы пропускания $f_{\text{п}} = 1{,}0$ кГц;

— максимальное затухание в полосе пропускания $a_{\text{п}_{\text{дБ}}} = 3$ дБ;

— граничная частота полосы задерживания $f_{\text{з}} = 1{,}5$ кГц;

— минимальное затухание в полосе задерживания $a_{\text{з}_{\text{дБ}}} = 40$ дБ;

— частота дискретизации $f_{\text{д}} = 5{,}0$ кГц.

Для синтеза фильтра при представлении передаточной функции в виде каскадного соединения секций второго порядка (13.213) и расчёта его АЧХ в командном окне MATLAB нужно набрать следующие команды:

```
>> Fd=5000;
>> fp=1000;
>> fs=1500;
```

```
>> Rp=3;
>> Rs=40;
>> [n,Wn]=buttord(2*fp/Fd,2*fs/Fd,Rp,Rs)
>> [a,b]=butter(n,Wn);
>> [sos,g]=tf2sos(a,b,'up','none')
>> [h,w]=freqz(a,b);
>> plot(w/(2*pi),20*log10(abs(h)))
>> grid on
```

Рассчитанные параметры синтезированного фильтра следующие [см. (14.20) и (14.21)]: $N = 8$; $g = 0{,}0031$;

1-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = 2{,}0008$; $a_2 = 1{,}0005$; $b_0 = 1$; $b_1 = -0{,}2572$; $b_2 = 0{,}0259$;

2-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = 2{,}0235$; $a_2 = 1{,}0238$; $b_0 = 1$; $b_1 = -0{,}2778$; $b_2 = 0{,}1081$;

3-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = 1{,}9992$; $a_2 = 0{,}9995$; $b_0 = 1$; $b_1 = -0{,}3261$; $b_2 = 0{,}3005$;

4-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = 1{,}9765$; $a_2 = 0{,}9767$; $b_0 = 1$; $b_1 = -0{,}4218$; $b_2 = 0{,}6823$.

На рис.14.9 приведена амплитудно-частотная характеристика спроектированного цифрового ФНЧ Баттерворта. Она совпадает с АЧХ, изображённой на рис.13.25,*б* (см. пример 13.18).

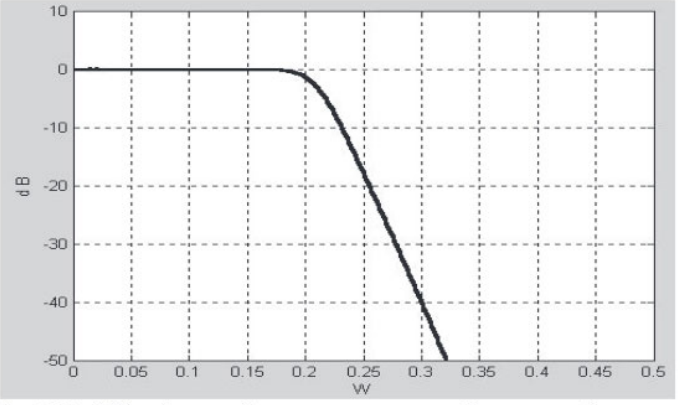


Рис.14.9. АЧХ цифрового фильтра нижних частот Баттерворта 8-порядка, спроектированного в примере 14.7

Пример 14.8. Спроектировать цифровой ФВЧ с частотной характеристикой Чебышева типа 1 при следующих исходных данных (см. пример 13.19):

— граничная частота полосы пропускания $f_{\text{п}} = 1{,}0$ кГц;

— максимальное затухание в полосе пропускания $a_{\text{п}_{\text{дБ}}} = 1{,}5$ дБ;

— граничная частота полосы задерживания $f_{\text{з}} = 667$ Гц;

— минимальное затухание в полосе задерживания $a_{\text{з}_{\text{дБ}}} = 40$ дБ;

— частота дискретизации $f_{\text{д}} = 5{,}0$ кГц.

Для синтеза фильтра при представлении передаточной функции в виде каскадного соединения секций второго порядка (13.213) и расчёта его АЧХ в командном окне MATLAB нужно набрать следующие команды:

```
>> Fd=5000;
>> fp=1000;
```

```
>> fs=667;
>> Rp=1.5;
>> Rs=40;
>> [n,Wn]=cheb1ord(2*fp/Fd,2*fs/Fd,Rp,Rs)
>> [a,b]=cheby1(n,Rp,Wn,'high');
>> [sos,g]=tf2sos(a,b,'up','none')
>> [h,w]=freqz(a,b);
>> plot(w/(2*pi),20*log10(abs(h)))
>> grid on
```

Рассчитанные параметры синтезированного фильтра следующие [см. (14.20) и (14.21)]: $N = 6$; $g = 0{,}0259$;

1-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = -2$; $a_2 = 1$; $b_0 = 1$; $b_1 = 0{,}904$; $b_2 = 0{,}3763$;

2-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = -2{,}0043$; $a_2 = 1{,}0043$; $b_0 = 1$; $b_1 = -0{,}0226$; $b_2 = 0{,}6701$;

3-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = -1{,}9957$; $a_2 = 0{,}9957$; $b_0 = 1$; $b_1 = -0{,}5662$; $b_2 = 0{,}9021$.

На рис.14.10 приведена амплитудно-частотная характеристика спроектированного цифрового ФВЧ Чебышева первого типа. Она совпадает с АЧХ, изображённой на рис.13.26,*б* (см. пример 13.19).

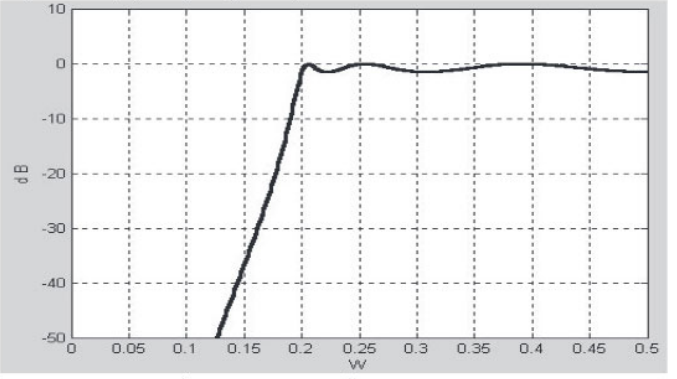


Рис.14.10. АЧХ цифрового ФВЧ Чебышева первого типа 6-го порядка, спроектированного в примере 14.8

Пример 14.9. Спроектировать цифровой полосовой фильтр с частотной характеристикой Чебышева типа 2 при следующих исходных данных (см. примеры 13.20 и 13.22):

— граничные частоты полосы пропускания: $f_{п1} = 20$ кГц, $f_{п2} = 22$ кГц;

— максимальное затухание в полосе пропускания $a_{п_{дБ}} = 1{,}5$ дБ;

— граничные частоты полос задерживания: $f_{з1} = 19{,}3$ кГц, $f_{з2} = 22{,}7$ кГц;

— минимальное затухание в полосах задерживания $a_{з_{дБ}} = 40$ дБ;

— частота дискретизации $f_д = 70$ кГц;

— передаточную функцию представить в виде каскадного соединения блоков (секций) второго порядка.

Для синтеза фильтра при представлении передаточной функции в виде каскадного соединения секций второго порядка (13.221) и расчёта его АЧХ в командном окне MATLAB нужно набрать следующие команды:

```
>> Fd=70000;
>> fp1=20000;
```

```
>> fp2=22000;
>> fs1=19300;
>> fs2=22700;
>> Rp=1.5;
>> Rs=40;
>> Wp=[2*fp1/Fd 2*fp2/Fd];
>> Ws=[2*fs1/Fd 2*fs2/Fd];
>> [n,Wn]=cheb2ord(Wp,Ws,Rp,Rs)
>> [a,b]=cheby2(n,Rs,Wn);
>> [sos,g]=tf2sos(a,b,'up','none')
>> [h,w]=freqz(a,b);
>> plot(w/(2*pi),20*log10(abs(h)))
>> grid on
```

Рассчитанные параметры синтезированного рекурсивного цифрового фильтра следующие [см. (14.20) и (14.21)]: $N = 12$; $g = 0{,}0091$;

1-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = -0{,}5219$; $a_2 = 1$; $b_0 = 1$; $b_1 = 0{,}4581$; $b_2 = 0{,}7529$;

2-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = 1{,}4462$; $a_2 = 1$; $b_0 = 1$; $b_1 = 0{,}6376$; $b_2 = 0{,}7604$;

3-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = 0{,}1923$; $a_2 = 1$; $b_0 = 1$; $b_1 = 0{,}3954$; $b_2 = 0{,}862$;

4-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = 1{,}0018$; $a_2 = 1$; $b_0 = 1$; $b_1 = 0{,}7602$; $b_2 = 0{,}8704$;

5-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = 0{,}3107$; $a_2 = 1$; $b_0 = 1$; $b_1 = 0{,}4043$; $b_2 = 0{,}9587$;

6-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = 0{,}9089$; $a_2 = 1$; $b_0 = 1$; $b_1 = 0{,}8073$; $b_2 = 0{,}9615$.

На рис.14.11 приведена амплитудно-частотная характеристика спроектированного полосового ЦФ Чебышева второго типа. Она совпадает с АЧХ, изображённой на рис.13.27,*б* (см. примеры 13.20 и 13.22).

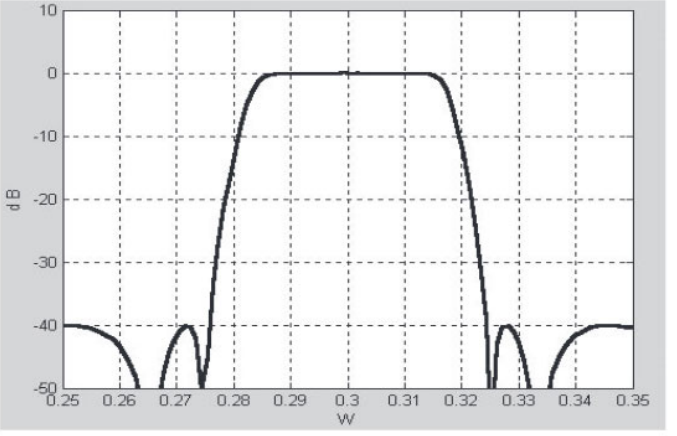


Рис.14.11. АЧХ полосового ЦФ Чебышева второго типа 12-го порядка, спроектированного в примере 14.9

Пример 14.10. Спроектировать цифровой режекторный фильтр эллиптического типа при следующих исходных данных (см. примеры 13.21 и 13.23):

— граничные частоты полос пропускания $f_{п1} = 20$ кГц, $f_{п2} = 22$ кГц;

— максимальное затухание в полосах пропускания $a_{п_{дБ}} = 1{,}5$ дБ;

— граничные частоты полосы задерживания $f_{s1} = 20{,}3$ кГц и $f_{s2} = 21{,}7$ кГц;

— минимальное затухание в полосе задерживания $a_{з_{дБ}} = 40$ дБ;

— частота дискретизации $f_д = 70$ кГц.

— передаточную функцию представить в виде каскадного соединения блоков (секций) второго порядка.

Для синтеза фильтра при представлении передаточной функции в виде каскадного соединения секций второго порядка (13.221) и расчёта его амплитудно-частотной характеристики в командном окне MATLAB нужно набрать следующие команды:

```
>> Fd=70000;
>> fp1=20000;
>> fp2=22000;
>> fs1=20300;
>> fs2=21700;
>> Rp=1.5;
>> Rs=40;
>> Wp=[2*fp1/Fd 2*fp2/Fd];
>> Ws=[2*fs1/Fd 2*fs2/Fd];
>> [n,Wn]=ellipord(Wp,Ws,Rp,Rs)
>> [a,b]=ellip(n,Rp,Rs,Wn,'stop');
>> [sos,g]=tf2sos(a,b,'up','none')
>> [h,w]=freqz(a,b);
>> plot(w/(2*pi),20*log10(abs(h)))
>> grid on
```

Рассчитанные параметры синтезированного фильтра следующие [см. (3.32) и (3.33)]: $N = 10$; $g = 0{,}7305$;

1-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = 0{,}6205$; $a_2 = 1$; $b_0 = 1$; $b_1 = 0{,}4894$; $b_2 = 0{,}5774$;

2-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = 0{,}5181$; $a_2 = 1$; $b_0 = 1$; $b_1 = 0{,}3845$; $b_2 = 0{,}9425$;

3-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = 0{,}7195$; $a_2 = 1$; $b_0 = 1$; $b_1 = 0{,}8069$; $b_2 = 0{,}9465$;

4-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = 0{,}4774$; $a_2 = 1$; $b_0 = 1$; $b_1 = 0{,}4422$; $b_2 = 0{,}9924$;

5-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = 0{,}757$; $a_2 = 1$; $b_0 = 1$; $b_1 = 0{,}7842$; $b_2 = 0{,}9928$.

На рис.14.12 приведена амплитудно-частотная характеристика спроектированного режекторного ЦФ эллиптического типа. Она в полосе задерживания несколько отличается от АЧХ, изображённой на рис.13.28,*б* (см. примеры 13.21 и 13.23).

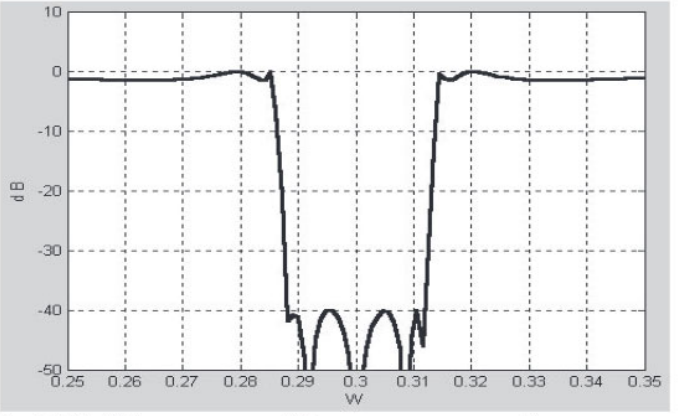


Рис.14.12. АЧХ режекторного ЦФ эллиптического типа 10-го порядка, спроектированного в примере 14.10

Полученные в примерах 14.7 — 14.10 амплитудно-частотные характеристики синтезированных ЦФ отвечают заданным техническим требованиям (как и в примерах 13.18 — 13.23). Однако их параметры отличаются от параметров фильтров, синтезированных в примерах 13.18 — 13.23. Это объясняется тем, что каскадная форма реализации ЦФ из блоков второго порядка не является однозначной. Цифровой фильтр с передаточной функцией $H(z)$ можно представить каскадным соединением различных секций (блоков) второго порядка. Передаточные функции блоков (секций) второго порядка $H_k^{(2)}(z)$ $\left(k=\overline{1,\ r}\right)$, включаемых последовательно, зависят от того, по какому правилу объединяются пары комплексно-сопряжённых полюсов и нулей передаточной функции $H(z)$ для формирования блоков, поэтому использованная в примерах 14.7 — 14.10 функция **tf2sos** пакета **Signal Processing** системы MATLAB, преобразующая форму описания цифрового фильтра, работает неоднозначно.

14.4. Проектирование нерекурсивных цифровых фильтров с использованием системы MATLAB

В системе MATLAB имеются функции проектирования нерекурсивных ЦФ, которые используют следующие методы [52]:

- **Equiripple** — синтез фильтров с равномерными пульсациями АЧХ методом Ремеза;
- **Least-Sqares** — минимизация среднеквадратического отклонения АЧХ от заданной;
- **Window** — синтез с использованием весовых функций (окон).

Необходимые теоретические сведения, касающиеся сущности этих методов, приведены в гл.12.

♦ **Метод Ремеза** предназначен для синтеза нерекурсивных ЦФ путём минимаксной аппроксимации (12.17) заданной АЧХ (см. § 12.8).

В системе MATLAB имеется три функции, реализующие данный метод и несколько различающиеся по своим возможностям. Две из них, **remez** и **cremez**, находятся в пакете **Signal Processing** , а третья, **gremez** (она является наиболее обобщённым вариантом), — в пакете **Filter Design** . Кроме того, в пакете **Signal Processing** имеется функция **remezord**, предназначенная для оценки порядка фильтра, который при синтезе методом Ремеза будет удовлетворять заданным требованиям.

Синтаксис функции **remez** следующий:

[a, delta, opt] = remez (n, f, h, q, 'ftype', {lgrid}).

Здесь n — порядок синтезируемого фильтра (его импульсная характеристика будет содержать $n+1$ ненулевых отсчётов). Параметры f и h должны быть векторами одинаковой *чётной* длины, они совместно определяют желаемую АЧХ (аппроксимируемую функцию) проектируемого ЦФ. Вектор f содержит значения частот, нормированных к частоте Найквиста $F_N = f_д/2 = 1/(2T)$, а

вектор h — соответствующие этим частотам значения АЧХ. В промежутках между заданными точками АЧХ интерполируется по линейному закону. Частоты в векторе f должны образовывать строго возрастающую последовательность (повторяющиеся элементы не допускаются).

Синтезируемая АЧХ (аппроксимируемая функция) определяется с помощью векторов f и h следующим образом•:

- в полосах частот от $f(2k-1)$ до $f(2k)$ АЧХ фильтра линейно меняется от $h(2k-1)$ до $h(2k)$;
- в полосах частот от $f(2k)$ до $f(2k+1)$ АЧХ фильтра считается не заданной и в процессе синтеза может оказаться произвольной.

Вывести график аппроксимируемой АЧХ можно следующей командой:

>> plot (reshape (f, 2, length(f) /2), reshape (h, 2, length(h) /2), 'b') .

Если не задать синий цвет линий принудительно с помощью строки 'b', то отдельные линейные фрагменты будут выводиться разными цветами.

Для фильтров, коэффициент передачи которых на частоте Найквиста не равен нулю, возможен только чётный порядок. Если задать нечётное n, то будет рассчитан фильтр, порядок которого на единицу больше заданного.

Остальные параметры функции **remez** являются необязательными. Параметр q задаёт весовые коэффициенты для оптимизируемых частотных полос. Этот параметр должен быть вектором, длина которого вдвое меньше, чем длина векторов f и h, и содержать неотрицательные вещественные числа. В тех частотных полосах, которым приписаны большие весовые коэффициенты, будет обеспечена меньшая ошибка аппроксимации АЧХ. По умолчанию все весовые коэффициенты q считаются одинаковыми.

При отсутствии в списке входных параметров строки 'ftype' производится расчёт ЦФ с симметричной относительно центра импульсной характеристикой, для которой $a(k)=a(n+2-k)$, а при её использовании становится возможным синтезировать ЦФ с антисимметричной относительно центра импульсной характеристикой, для которой $a(k)=-a(n+2-k)$. Данный параметр может принимать одно из двух строковых значений:

- **'hilbert'** — синтезируется фильтр с антисимметричной импульсной характеристикой. Название данного режима объясняется тем, что такую характеристику, в частности, должен иметь фильтр, реализующий преобразование Гильберта;
- **'differentiator'** — синтезируется фильтр с антисимметричной импульсной характеристикой и, кроме того, при расчёте взвешенной ошибки аппроксимации дополнительно используется весовой множитель $1/f$. В результате взвешенная ошибка аппроксимации на нижних частотах будет намного меньше, чем на верхних. При синтезе дифференцирующих ЦФ это означает минимизацию *относительной ошибки* аппроксимации.

• Здесь k — целые числа от единицы до половины длины векторов f и h.

Параметр **{lgrid},** хотя и является целым положительным числом, должен быть задан в виде одноэлементного массива ячеек, т.е. в фигурных скобках. Этот параметр регулирует плотность сетки частот, используемой при расчёте АЧХ фильтра с целью измерения величины пульсаций. Число точек сетки приблизительно равно **lgrid*n/(2*bw)**, где bw — суммарная ширина полосы пропускания фильтра, нормированная к частоте Найквиста. Увеличение параметра lgrid может сделать пульсации АЧХ более равномерными, но приведёт к увеличению времени расчёта. По умолчанию значение параметра lgrid равно 16.

Главным результатом работы функции **remez** является вектор a коэффициентов передаточной функции нерекурсивного фильтра (3.43). Синтезированный фильтр имеет линейную ФЧХ и вносит групповую задержку, равную $n/2$ отсчётов. Дополнительную информацию о результатах синтеза можно получить с помощью выходных параметров delta и opt.

Выходной параметр delta отображает величину пульсаций АЧХ полученного фильтра.

Выходной параметр opt представляет собой структуру со следующими полями [52]:

- opt.fgrid — вектор сетки частот, использованной при синтезе;
- opt.des — значения заданной АЧХ для частот из opt.fgrid;
- opt.wt — весовые коэффициенты для частот из opt.fgrid;
- opt.H — получившиеся значения *комплексной частотной характеристики* фильтра для частот из opt.fgrid;
- opt.error — ошибка воспроизведения заданной АЧХ для частот из opt.fgrid;
- opt.iextr — номера элементов вектора opt.fgrid, соответствующих экстремальным частотам, т.е. частотам, на которых отклонение АЧХ от заданной максимально (точки альтернанса, см. § 12.8);
- opt.fextr — вектор значений экстремальных частот.

В процессе расчёта может быть выдано сообщение о том, что алгоритм не сходится (возможно, из-за ошибок округления):

– – Failure to Converge – –
Probable cause is machine rounding error.

В этом случае следует проверить результаты синтеза, рассчитав АЧХ полученного фильтра с помощью функции **freqz**.

Если аппроксимируемая АЧХ не является кусочно-линейной, то можно воспользоваться другим вариантом синтаксиса функции **remez** [52]:

[a, delta, opt] = remez (n, f, 'fresp', q, 'ftype', {lgrid}).

Здесь 'fresp' — имя функции, рассчитывающей желаемую (аппроксимируемую) АЧХ. Остальные параметры имеют то же назначение, что и ранее.

Функция **fresp** должна вызываться следующим образом:

[dh, dq] = fresp (n, f, df, q).

Входные параметры n, f и q здесь те же, что используются при вызове функции **remez**, а вектор df — сетка частот, сформированная функцией **remez**, исходя из значений параметров n, f и lgrid.

Функция **fresp** вычисляет значения АЧХ dh и весовых коэффициентов dq для частот из вектора df.

Пример 14.11. Используя минимаксный критерий, синтезировать нерекурсивный цифровой ФНЧ 16-го порядка с помощью функции **remez** при следующих исходных данных:

— граничная частота полосы пропускания $f_{\text{п}} = 1{,}0$ кГц;

— граничная частота полосы задерживания $f_{\text{з}} = 1{,}5$ кГц;

— частота дискретизации $f_{\text{д}} = 5{,}0$ кГц.

Для синтеза фильтра и расчёта его АЧХ в командном окне MATLAB нужно набрать следующие команды:

```
>> Fd=5000;
>> fp=1000;
>> fs=1500;
>> f=[0 2*fp/Fd 2*fs/Fd 1];
>> h=[1 1 0 0];
>> a=remez(16,f,h)
>> [hh,w]=freqz(a);
>> plot(w/(2*pi),abs(hh))
>> grid on
```

Коэффициенты передаточной функции (3.47) или, что то же самое, отсчёты импульсной характеристики спроектированного цифрового ФНЧ, следующие:

$$a_0 = 0\,;\quad a_1 = -0{,}0265\,;\quad a_2 = 0\,;\quad a_3 = 0{,}0441\,;\quad a_4 = 0\,;$$

$$a_5 = -0{,}0934\,;\quad a_6 = 0\,;\quad a_7 = 0{,}3139\,;\quad a_8 = 0{,}5\,.$$

Остальные коэффициенты определяются из условия симметрии: $a_k = a_{16-k}\ \left(k = \overline{9,16}\right)$.

АЧХ синтезированного цифрового ФНЧ изображена на рис.14.13.

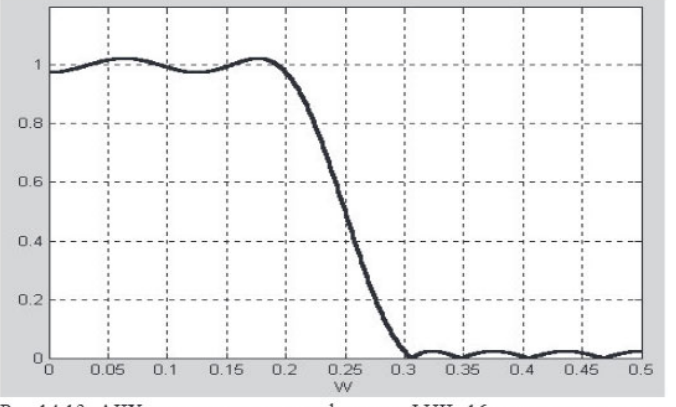


Рис.14.13. АЧХ нерекурсивного цифрового ФНЧ 16-го порядка, спроектированного в примере 14.11 с помощью функции **remez**

Функция **cremez** является расширенным вариантом рассмотренной функции **remez**, имеющим следующие отличия [52]:

- ФЧХ необязательно должна быть линейной;
- можно синтезировать фильтры с комплексными коэффициентами;
- тип симметрии импульсной характеристики задаётся в явном виде, а не косвенно;
- в алгоритм расчёта добавлена вторая стадия, уточняющая решение, найденное методом Ремеза;
- имеется некоторое количество предопределённых функций расчёта АЧХ.

Синтаксис вызова функции **cremez** следующий:

```
[a, delta, opt] = cremez (n, f, h, q, 'ftype', {lgrid}, 'sym', 'skip_stage2', 'debug')
```

или

```
[a, delta, opt] = cremez (n, f, h, {'fresp', p1, p2 ...}, q, {lgrid}, 'sym', 'skip_stage2', 'debug').
```

Выходные и почти все входные параметры совпадают с параметрами функции **remez**, рассмотренной выше, поэтому остановимся только на имеющихся различиях.

Частоты, нормированные к частоте Найквиста $F_N = f_д / 2 = 1/(2T)$, в векторе f должны лежать в диапазоне от –1 до +1. Возможность задавать поведение АЧХ в области отрицательных частот позволяет рассчитывать ЦФ с комплексными коэффициентами.

Число точек частотной сетки, регулируемое параметром {lgrid}, ориентировочно равно 2^nextpow2 (lgrid*n). По умолчанию значение lgrid равно 25.

Строковый параметр 'sym' позволяет управлять симметрией импульсной характеристики. Возможны следующие четыре значения этого параметра •:

- 'none' — ограничений на симметрию не накладывается;
- 'even' — чётная симметрия: $a(k) = a(n+2-k)$;
- 'odd' — нечётная симметрия: $a(k) = -a(n+2-k)$;
- 'real' — комплексно-сопряжённая симметрия: $a(k) = a^*(n+2-k)$. Этот вариант позволяет получить ЦФ с линейной ФЧХ и несимметричной относительно нулевой частоты АЧХ.

Использование отрицательных частот в векторе f возможно только при двух значениях строкового параметра 'sym': 'sym'='none' и 'sym'='real'.

При указании в списке параметров строки 'skip_stage2' отключается вторая стадия алгоритма (она выполняется, если оптимальное решение не найдено стандартным методом Ремеза). Это может повысить скорость расчётов за счёт уменьшения точности.

Последний входной параметр 'debug' управляет выдачей сообщений о ходе оптимизации. Возможны следующие строковые значения данного параметра:

• См. сноску на с.546.

- ‘off’ — сообщения не выводятся (этот вариант используется по умолчанию);
- ‘trace’ — выводятся текстовые сообщения;
- ‘plots’ — выводятся графики;
- ‘both’ — выводятся текстовые сообщения и графики.

♦ **Синтез нерекурсивных ЦФ** при среднеквадратической аппроксимации заданной АЧХ (см. § 12.6 и 12.7) в системе MATLAB осуществляется функциями **firls**, **fircls, fircls1**, находяшимися в пакете **Signal Processing**. Функция **firls** аппроксимирует произвольную кусочно-линейную АЧХ с незаданными переходными полосами. Остальные две функции выполняют оптимизацию с ограничением максимального абсолютного отклонения АЧХ от заданной (аппроксимируемой). Функция **fircls** реализует произвольную кусочно-постоянную АЧХ, а функция **fircls1** предназначена для синтеза ФНЧ и ФВЧ.

Функция **firls** предназначена для синтеза нерекурсивных ЦФ с линейной ФЧХ при среднеквадратическом критерии аппроксимации (12.16) в заданном наборе частотных полос. При этом ошибка аппроксимации в разных частотных полосах может учитываться с разными весовыми коэффициентами. Синтаксис вызова функции **firls** следующий:

a = firls (n, f, h, q, ‘ftype’).

Здесь n — порядок синтезируемого фильтра (его импульсная характеристика будет содержать $n+1$ ненулевых отсчётов). Параметры f и h должны быть векторами одинаковой *чётной* длины, они совместно определяют желаемую АЧХ (аппроксимируемую функцию) проектируемого ЦФ. Вектор f содержит значения частот, нормированных к частоте Найквиста $F_N = f_д/2$, а вектор h — соответствующие этим частотам значения АЧХ. В промежутках между заданными точками АЧХ интерполируется по линейному закону. Частоты в векторе f должны образовывать неубывающую последовательность. Ограничений на первый и последний элементы вектора f не накладывается.

Синтезируемая АЧХ (аппроксимируемая функция) определяется с помощью векторов f и h следующим образом•:

- в полосах частот от $f(2k-1)$ до $f(2k)$ АЧХ фильтра линейно меняется от $h(2k-1)$ до $h(2k)$;
- в полосах частот от $f(2k)$ до $f(2k+1)$ АЧХ фильтра считается незаданной и в процессе синтеза может оказаться произвольной.

Вывести график аппроксимируемой АЧХ можно следующей командой:

>> plot (reshape (f, 2, length(f) /2), reshape (h, 2, length(h) /2), ‘b’).

Если не задать синий цвет линий принудительно с помощью строки ‘b’, то отдельные линейные фрагменты будут выводиться разными цветами.

• См. сноску на с. 546.

Для фильтров, коэффициент передачи которых на частоте Найквиста не равен нулю, возможен только чётный порядок. Если задать нечётное n, то будет рассчитан фильтр, порядок которого на единицу больше заданного.

Остальные параметры функции **firls** являются необязательными. Параметр q задаёт весовые коэффициенты для оптимизируемых частотных полос. Этот параметр должен быть вектором, длина которого вдвое меньше, чем длина векторов f и h, и содержать неотрицательные вещественные числа. В тех частотных полосах, которым приписаны большие весовые коэффициенты, будет обеспечена меньшая ошибка аппроксимации АЧХ. По умолчанию все весовые коэффициенты q считаются одинаковыми.

При отсутствии в списке входных параметров строки 'ftype' производится расчёт ЦФ с симметричной импульсной характеристикой $a(k) = a(n+2-k)$, а при её использовании становится возможным синтезировать ЦФ с антисимметричной импульсной характеристикой $a(k) = -a(n+2-k)$. Данный параметр может принимать одно из двух строковых значений:

- 'hilbert' — синтезируется фильтр с антисимметричной импульсной характеристикой. Название данного режима объясняется тем, что такую характеристику, в частности, должен иметь фильтр, реализующий преобразование Гильберта;
- 'differentiator' — синтезируется фильтр с антисимметричной импульсной характеристикой и, кроме того, при расчёте взвешенной ошибки аппроксимации дополнительно используется весовой множитель $1/f^2$. В результате взвешенная ошибка аппроксимации на нижних частотах будет намного меньше, чем на верхних. При синтезе дифференцирующих ЦФ это означает минимизацию *относительной ошибки* аппроксимации.

Главным результатом работы функции **firls** является вектор a коэффициентов передаточной функции нерекурсивного фильтра (3.43). Синтезированный фильтр имеет линейную ФЧХ и вносит групповую задержку, независимо от частоты равную $n/2$ отсчётов.

Расчёт ЦФ производится следующим образом. Минимизация взвешенной среднеквадратической ошибки аппроксимации заданной АЧХ приводит к системе линейных алгебраических уравнений типа (1.78) относительно коэффициентов фильтра. В процессе решения возможна выдача предупреждения «Matrix is close to singular or badly scaled» (матрица близка к сингулярной или плохо масштабирована). Это, как правило, означает неудачное сочетание порядка фильтра и заданной АЧХ [52].

Пример 14.12. Используя среднеквадратический критерий, синтезировать нерекурсивный цифровой ФНЧ 16-го порядка с помощью функции **firls** при следующих исходных данных (см. пример 14.11):

— граничная частота полосы пропускания $f_{\text{п}} = 1{,}0$ кГц;

— граничная частота полосы задерживания $f_{\text{з}} = 1{,}5$ кГц;

— частота дискретизации $f_{\text{д}} = 5{,}0$ кГц.

Для синтеза фильтра и расчёта его АЧХ в командном окне MATLAB нужно набрать следующие команды:

```
>> Fd=5000;
>> fp=1000;
>> fs=1500;
>> f=[0 2*fp/Fd 2*fs/Fd 1];
>> h=[1 1 0 0];
>> a=firls(16,f,h)
>> [hh,w]=freqz(a);
>> plot(w/(2*pi),abs(hh))
>> grid on
```

Коэффициенты передаточной функции (3.43) или, что то же самое, отсчёты импульсной характеристики спроектированного цифрового ФНЧ, следующие:

$$a_0 = 0\,;\quad a_1 = -0{,}0168\,;\quad a_2 = 0\,;\quad a_3 = 0{,}0402\,;\quad a_4 = 0\,;$$

$$a_5 = -0{,}0907\,;\quad a_6 = 0\,;\quad a_7 = 0{,}313\,;\quad a_8 = 0{,}5\,.$$

Остальные коэффициенты передаточной функции определяются из условия симметрии: $a_k = a_{16-k}\ \left(k = \overline{9,16}\right)$.

Амплитудно-частотная характеристика синтезированного нерекурсивного цифрового ФНЧ изображена на рис.13.14 (ср. с рис.14.13).

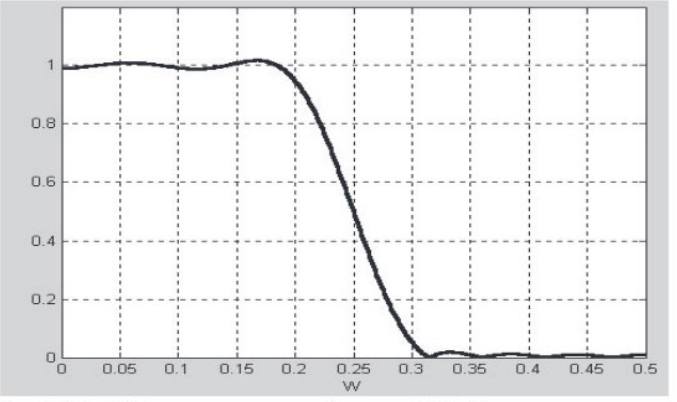


Рис.14.14. АЧХ нерекурсивного цифрового ФНЧ 16-го порядка, спроектированного в примере 14.12 с помощью функции **firls**

Функция **fircls** предназначена для синтеза нерекурсивных ЦФ с линейной ФЧХ путём минимизации среднеквадратической ошибки аппроксимации заданной кусочно-постоянной АЧХ с ограничением предельно допустимых отклонений от неё. Синтаксис вызова функции **fircls** следующий:

```
a = fircls (n, f, h, up, lo, 'design_flag').
```

Здесь n — порядок синтезируемого фильтра (его импульсная характеристика будет содержать $n+1$ ненулевых отсчётов). Векторы f и h совместно определяют желаемую АЧХ (аппроксимируемую функцию) проектируемого ЦФ. Вектор f содержит значения частот, нормированных к частоте Найквиста

$F_N = f_д/2$. Эти частоты должны образовывать возрастающую последовательность, кроме того, должны выполняться условия: f(1) = 0 и f(end) = 1. Функция **fircls** осуществляет аппроксимацию кусочно-постоянной АЧХ, не позволяя задавать переходные полосы, поэтому при формировании вектора f следует указывать значения частот, соответствующие серединам переходных полос. Длина вектора h должна быть на единицу меньше, чем длина вектора f. Элементы вектора h задают кусочно-постоянную АЧХ [в диапазоне частот от f(k) до f(k+1) постоянное значение АЧХ равно h(k)]. Вывести график аппроксимируемой АЧХ можно следующей командой:

```
>> stairs (f, [h(:), h(end)]).
```

Для фильтров, коэффициент передачи которых на частоте Найквиста не равен нулю, возможен только чётный порядок. Если задать нечётное n, то будет рассчитан ЦФ, порядок которого на единицу больше заданного.

Векторы up и lo определяют верхнюю и нижнюю допустимые границы амплитудно-частотной характеристики синтезируемого фильтра. Используемый в функции **fircls** критерий оптимизации является условным. Его можно сформулировать следующим образом: ищутся *коэффициенты* передаточной функции ЦФ заданного порядка n, которые обеспечивают АЧХ, имеющую минимальное среднеквадратическое отклонение от h и лежащую между граничными значениями lo и up.

Строковый параметр 'design_flag' является необязательным, он позволяет управлять выводом информации о ходе поиска решения (по умолчанию эта информация не выводится). Возможны три значения данного параметра:

- 'trace' — для каждой итерации производится текстовый вывод величины ошибки;
- 'plots' — на каждой итерации выводится набор графиков: общий вид АЧХ и крупным планом все отдельные полосы частот;
- 'both' — одновременно выводятся текстовые сообщения и графики.

Результатом работы функции **fircls** является вектор a коэффициентов передаточной функции нерекурсивного цифрового фильтра (3.43). Синтезированный фильтр имеет линейную ФЧХ и вносит групповую задержку, независимо от частоты равную $n/2$ отсчётов.

Синтез фильтра осуществляется численным итерационным методом оптимизации с ограничениями (см. § 12.7).

Пример 14.13. Используя среднеквадратический критерий, синтезировать нерекурсивный цифровой ФНЧ 16-го порядка с помощью функции **fircls** при следующих исходных данных (см. примеры 14.11 и 14.12):

— граничная частота полосы пропускания $f_п = 1{,}0$ кГц;

— граничная частота полосы задерживания $f_з = 1{,}5$ кГц;

— частота дискретизации $f_д = 5{,}0$ кГц.

Для синтеза фильтра и расчёта его АЧХ в командном окне MATLAB нужно набрать следующие команды:

```
>> Fd=5000;
>> fp=1000;
>>fs=1500;
>> f=[0 (fp+fs)/Fd 1];
>> h=[1 0];
>> lo=[0.98 –0.02];
>> up=[1.02 0.02];
>> a=fircls(16,f,h,up,lo)
>> [hh,w]=freqz(a);
>> plot(w/(2*pi),abs(hh))
>> grid on
```

Коэффициенты передаточной функции (3.43) или, что то же самое, отсчёты импульсной характеристики спроектированного цифрового ФНЧ, следующие:

$$a_0 = 0;\quad a_1 = -0{,}016;\quad a_2 = 0;\quad a_3 = 0{,}0372;\quad a_4 = 0;$$

$$a_5 = -0{,}0883;\quad a_6 = 0;\quad a_7 = 0{,}312;\quad a_8 = 0{,}5.$$

Остальные коэффициенты передаточной функции определяются из условия симметрии: $a_k = a_{16-k}\ \left(k = \overline{9,16}\right)$.

АЧХ синтезированного цифрового ФНЧ изображена на рис.14.15.

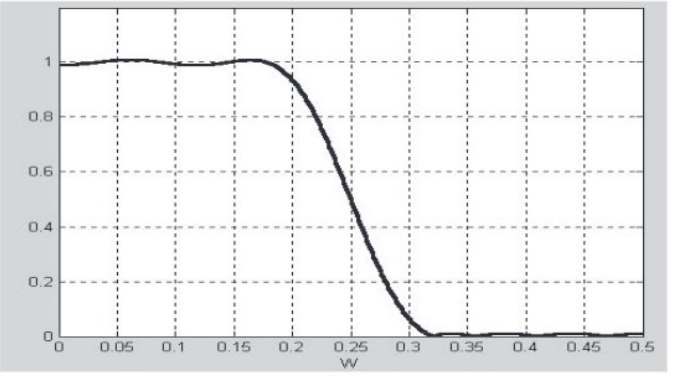


Рис.14.15. АЧХ нерекурсивного цифрового ФНЧ 16-го порядка, спроектированного в примере 14.13 с помощью функции **fircls**

Сравнивая рис.14.15 и 14.14, можно заключить, что синтез нерекурсивного ЦФ с помощью функции **fircls** приводит к меньшему проявлению эффекта Гиббса, чем синтез с помощью функции **firls**, однако при этом несколько расширяется переходная полоса, ширина которой функцией **fircls** выбирается автоматически.

Функция **fircls1** — это специализированная версия функции **fircls**, предназначенная для синтеза ФНЧ и ФВЧ с линейной ФЧХ путём минимизации среднеквадратической ошибки воспроизведения идеальной частотной характеристики с ограничением предельных отклонений от неё. Функция **fircls1** даёт возможность более гибкого задания допустимых отклонений АЧХ в полосах пропускания и задерживания, а также учёта ошибки в этих полосах с разным весом. Синтаксис вызова функции **fircls1** следующий:

```
a = fircls1 (n, w0, dp, ds, 'ftype').
```

Здесь n — порядок синтезируемого фильтра (его импульсная характеристика будет содержать $n+1$ ненулевых отсчётов).

Параметр w0 задаёт частоту среза, нормированную к частоте Найквиста $F_N = f_д / 2$. Параметры dp и ds задают допустимые абсолютные уровни пульсаций АЧХ в полосах пропускания (passband) и задерживания (stopband) соответственно. В полосе пропускания фильтр должен иметь коэффициент передачи, лежащий в пределах $1 \pm dp$, а в полосе задерживания — в пределах $\pm ds$. Здесь рассматривается не АЧХ, а псевдоАЧХ (см. гл.5), поэтому возможны и отрицательные значения.

При отсутствии параметра 'ftype' синтезируется ФНЧ, а при 'ftype' = 'high' — ФВЧ. Поскольку на частоте Найквиста коэффициент передачи ФВЧ не равен нулю, то возможен только чётный порядок фильтра. Если задать нечётное значение n, то будет рассчитан фильтр, порядок которого на единицу больше заданного.

Между входными параметрами ds и 'ftype' могут находиться дополнительные параметры, причём их назначение меняется в зависимости от их количества. Рассмотрим некоторые варианты синтаксиса функции **fircls1** [52].

Первый такой вариант синтаксиса функции **fircls1** выглядит следующим образом:

```
a = fircls1 (n, w0, dp, ds, wt, 'ftype').
```

Появившийся здесь параметр wt указывает нормированную частоту, за которой должно удовлетворяться ограничение dp или ds. Это облегчает работу функции **fircls1**, позволяя образовать переходную зону между полосами пропускания и задерживания. Как именно образуется переходная зона, зависит от соотношения между значениями wt и w0 и от типа синтезируемого фильтра:

— для ФНЧ:

- при wt < w0 коэффициент передачи лежит в пределах $1 \pm dp$ в частотном диапазоне $0 \le w \le wt$;
- при wt > w0 коэффициент передачи лежит в пределах $\pm ds$ в частотном диапазоне $wt \le w \le 1$;

— для ФВЧ:

- при wt < w0 коэффициент передачи лежит в пределах $\pm ds$ в частотном диапазоне $0 \le w \le wt$;
- при wt > w0 коэффициент передачи лежит в пределах $1 \pm dp$ в частотном диапазоне $wt \le w \le 1$.

Следующий вариант синтаксиса функции **fircls1** содержит дополнительные параметры:

```
a = fircls1 (n, w0, dp, ds, wp, ws, k, 'ftype').
```

В этом случае можно задать соотношение между ошибками аппроксимации АЧХ в полосах пропускания и задерживания. Это соотношение задаётся па-

раметром k, а параметры wp и ws указывают границы полос пропускания и задерживания для расчёта соотношения ошибок:

- при синтезе ФНЧ должны выполняться условия wp < w0 < ws, а коэффициент k рассчитывается по формуле

$$k = \int_{0}^{wp} |A(w)-1|^2 \, dw \Big/ \int_{ws}^{1} |A(w)|^2 \, dw;$$

- при синтезе ФВЧ должны выполняться условия ws < w0 < wp, а коэффициент k рассчитывается по формуле

$$k = \int_{wp}^{1} |A(w)-1|^2 \, dw \Big/ \int_{0}^{ws} |A(w)|^2 \, dw.$$

Здесь $A(w)$ — АЧХ синтезированного фильтра; w — частота, нормированная к частоте Найквиста $F_N = f_д/2$.

Наконец, в любом варианте синтаксиса функции **fircls1** в конец списка входных параметров можно добавить строковый параметр 'design_flag':

a = fircls1 (n, …, 'design_flag').

Этот параметр позволяет управлять выводом информации о ходе поиска решения (по умолчанию эта информация не выводится). Возможны три значения данного параметра:

- 'trace' — для каждой итерации производится текстовый вывод величины ошибки;
- 'plots' — на каждой итерации выводится набор графиков: общий вид АЧХ и крупным планом все отдельные полосы частот;
- 'both' — одновременно выводятся текстовые сообщения и графики.

Результатом работы функции **fircls1** является вектор a коэффициентов нерекурсивного ЦФ. Синтезированный фильтр имеет линейную ФЧХ и вносит групповую задержку, независимо от частоты равную $n/2$ отсчётов.

Синтез фильтра осуществляется численным итерационным методом оптимизации с ограничениями.

♦ **Синтез нерекурсивных ЦФ** оконным методом (см. § 12.4) в системе MATLAB осуществляется функциями **fir1**, **fir2**, находящимися в пакете **Signal Processing**. Различия между ними состоит в типе аппроксимируемой АЧХ: функция **fir1** предназначена для синтеза многополосных фильтров, аппроксимируемая АЧХ которых скачкообразно изменяется в заданных частотных точках, принимая значения 0 или 1, а функция **fir2** допускает задание произвольной кусочно-линейной аппроксимируемой АЧХ. Кроме того, в пакете **Signal Processing** имеется функция **kaiserord**, предназначенная для выбора порядка ЦФ, который при синтезе с применением окна Кайзера будет удовлетворять заданным требованиям [52].

Функция **fir1** позволяет синтезировать нерекурсивные цифровые фильтры с линейной ФЧХ, в том числе и многополосные (multiband), методом обратного преобразования Фурье с использованием окон. Синтаксис вызова функции **fir1** следующий:

a = fir1 (n, Wn, 'ftype', window, 'normalization').

Здесь n — порядок синтезируемого фильтра (его импульсная характеристика будет содержать $n+1$ ненулевых отсчётов).

Параметры Wn и 'ftype' (который может отсутствовать) совместно определяют тип синтезируемого фильтра и его частоту (частоты) среза. Частоты среза нормируются к частоте Найквиста $F_N = f_д / 2$. Значения этих параметров зависят от типа фильтра:

- ФНЧ: скаляр Wn — частота среза, параметр 'ftype' отсутствует;
- ФВЧ: скаляр Wn — частота среза, параметр 'ftype' = 'high';
- полосовой фильтр: двухэлементный вектор Wn = [w1 w2], где w1 и w2 — границы полосы пропускания, параметр 'ftype' отсутствует;
- режекторный фильтр: двухэлементный вектор Wn = [w1 w2], где w1 и w2 — границы полосы задерживания, параметр 'ftype' = 'stop';
- многополосный фильтр, *пропускающий* нижние частоты: многоэлементный вектор Wn = [w1 w2 … wn], где wi — границы полос пропускания, упорядоченные по возрастанию, параметр 'ftype' = 'DC-1'. Такой фильтр будет иметь полосы пропускания (0, w1), (w2, w3), (w4, w5) и т.д.;
- многополосный фильтр, *задерживающий* нижние частоты: многоэлементный вектор Wn = [w1 w2 … wn], где wi — границы полос пропускания, упорядоченные по возрастанию, параметр 'ftype' = 'DC-0'. Такой фильтр будет иметь полосы пропускания (w1, w2), (w3, w4), (w5, w6) и т.д.

Для ФВЧ и режекторных фильтров, а также многополосных фильтров с ненулевым коэффициентом передачи на частоте Найквиста возможен только чётный порядок. Если задать нечётное n, то будет рассчитан ЦФ, порядок которого на единицу больше заданного.

Параметр window задаёт используемое при синтезе окно. Это должен быть вектор-столбец, содержащий $n+1$ элементов. По умолчанию используется окно Хэмминга, рассчитываемое путём вызова функции hamming (n+1).

Другие виды окон, задаваемых параметром window:

- boxcar — прямоугольное окно,
- triang — треугольное окно,
- barlett — окно Барлетта,
- hann — окно Ханна,
- blackman — окно Блэкмана,
- kaiser — окно Кайзера,
- chebwin — окно Чебышева.

Строковый параметр ‘normalization’ управляет нормировкой (масштабированием) рассчитанной импульсной характеристики ЦФ. По умолчанию используется значение ‘scale’, при котором импульсная характеристика нормируется так, чтобы обеспечить единичное значение (0 дБ) коэффициента передачи в центре полосы пропускания (для многополосных фильтров — в центре самой низкочастотной полосы пропускания). Второе возможное значение этого параметра — ‘noscale’, в этом случае нормировка не производится.

Результатом работы функции **fir1** является вектор a коэффициентов передаточной функции нерекурсивного фильтра (3.43). Синтезированный фильтр имеет линейную ФЧХ и вносит групповую задержку, независимо от частоты равную $n/2$ отсчётов.

Синтез фильтра выполняется следующим образом (см. § 12.4): обратное преобразование Фурье от заданной идеальной АЧХ даёт бесконечный набор отсчётов импульсной характеристики, который симметрично усекается до $n+1$ отсчётов и для ослабления эффектов усечения умножается на используемую оконную функцию.

Пример 14.14. Используя окно Блэкмана, синтезировать нерекурсивный трёхполосный ЦФ 200-го порядка с помощью функции **fir1** при следующих исходных данных:

— частота дискретизации $f_д = 6$ кГц;

— граничные частоты полос пропускания: $f_{п1} = 0{,}5$ кГц, $f_{п2} = 0{,}7$ кГц, $f_{п3} = 1{,}3$ кГц, $f_{п4} = 1{,}5$ кГц, $f_{п5} = 2{,}1$ кГц, $f_{п6} = 2{,}3$ кГц.

Для синтеза фильтра и расчёта его АЧХ в командном окне MATLAB нужно набрать следующие команды:

```
>> Fd=6000;
>> fp1=500;
>> fp2=700;
>> fp3=1300;
>> fp4=1500;
>> fp5=2100;
>> fp6=2300;
>> Wn=[2*fp1/Fd 2*fp2/Fd 2*fp3/Fd 2*fp4/Fd 2*fp5/Fd 2*fp6/Fd];
>> a=fir1(200,Wn,'DC-0',blackman(201))
>> [hh,w]=freqz(a);
>> plot(w/(2*pi),abs(hh))
>> grid on
```

Коэффициенты передаточной функции (3.43) или, что то же самое, отсчёты импульсной характеристики спроектированного трёхполосного ЦФ, следующие:

$$a_0 = 0;\ \ a_1 = 0;\ \ a_2 = 0;\ \ a_3 = 0;\ \ a_4 = 0;\ \ a_5 = 0;\ \ a_6 = 0;\ \ a_7 = 0;$$
$$a_8 = 0;\ \ a_9 = 0;\ \ a_{10} = 0;\ \ a_{11} = 0;\ \ a_{12} = 0;\ \ a_{13} = 0;\ \ a_{14} = 0;\ \ a_{15} = 0;$$
$$a_{16} = -0{,}0001;\ \ a_{17} = -0{,}0003;\ \ a_{18} = 0{,}0003;\ \ a_{19} = 0{,}0003;\ \ a_{20} = 0;$$
$$a_{21} = 0{,}0003;\ \ a_{22} = -0{,}0001;\ \ a_{23} = 0{,}0003;\ \ a_{24} = -0{,}0001;\ \ a_{25} = -0{,}0017;$$
$$a_{26} = -0{,}0002;\ \ a_{27} = 0{,}0005;\ \ a_{28} = -0{,}0001;\ \ a_{29} = 0{,}0007;\ \ a_{30} = 0;$$
$$a_{31} = 0{,}0011;\ \ a_{32} = 0{,}0016;\ \ a_{33} = -0{,}0015;\ \ a_{34} = -0{,}001;\ \ a_{35} = 0;$$
$$a_{36} = -0{,}0006;\ \ a_{37} = 0{,}0001;\ \ a_{38} = -0{,}0003;\ \ a_{39} = 0{,}0001;\ \ a_{40} = 0;$$

$$a_{41}=-0{,}0001;\quad a_{42}=0{,}0004;\quad a_{43}=-0{,}0002;\quad a_{44}=-0{,}001;\quad a_{45}=0;$$
$$a_{46}=0{,}0025;\quad a_{47}=0{,}0045;\quad a_{48}=-0{,}0053;\quad a_{49}=-0{,}0043;\quad a_{50}=0;$$
$$a_{51}=-0{,}0037;\quad a_{52}=0{,}0009;\quad a_{53}=-0{,}004;\quad a_{54}=0{,}0014;\quad a_{55}=0{,}0179;$$
$$a_{56}=0{,}0015;\quad a_{57}=-0{,}0051;\quad a_{58}=0{,}0013;\quad a_{59}=-0{,}0061;\quad a_{60}=0;$$
$$a_{61}=-0{,}0091;\quad a_{62}=-0{,}0129;\quad a_{63}=0{,}0123;\quad a_{64}=0{,}0079;\quad a_{65}=0;$$
$$a_{66}=0{,}0041;\quad a_{67}=-0{,}0007;\quad a_{68}=0{,}0021;\quad a_{69}=-0{,}0004;\quad a_{70}=0;$$
$$a_{71}=0{,}0004;\quad a_{72}=-0{,}0026;\quad a_{73}=0{,}001;\quad a_{74}=-0{,}0066;\quad a_{75}=0;$$
$$a_{76}=-0{,}0161;\quad a_{77}=-0{,}0282;\quad a_{78}=0{,}0334;\quad a_{79}=0{,}0268;\quad a_{80}=0;$$
$$a_{81}=0{,}0231;\quad a_{82}=-0{,}0056;\quad a_{83}=0{,}0252;\quad a_{84}=-0{,}0087;$$
$$a_{85}=-0{,}1162;\quad a_{86}=-0{,}0102;\quad a_{87}=0{,}0346;\quad a_{88}=-0{,}0091;$$
$$a_{89}=0{,}044;\quad a_{90}=0;\quad a_{91}=0{,}0725;\quad a_{92}=0{,}109;\quad a_{93}=-0{,}1129;$$
$$a_{94}=-0{,}0805;\quad a_{95}=0;\quad a_{96}=-0{,}0562;\quad a_{97}=0{,}0125;\quad a_{98}=-0{,}0511;$$
$$a_{99}=0{,}0163;\quad a_{100}=0{,}2.$$

Остальные коэффициенты передаточной функции определяются из условия симметрии: $a_k=a_{200-k}\ \left(k=\overline{101,\,200}\right)$.

АЧХ синтезированного трёхполосного ЦФ изображена на рис.14.16.

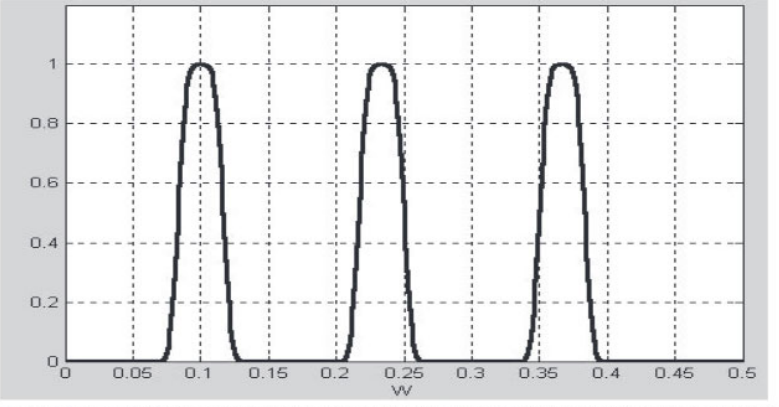


Рис.14.16. АЧХ нерекурсивного трёхполосного ЦФ 200-го порядка, спроектированного в примере 14.14 с помощью функции **fir1**

Функция **fir2**, так же как и **fir1**, предназначена для синтеза нерекурсивных ЦФ с линейной ФЧХ методом обратного преобразования Фурье с использованием окон. Отличие заключается в том, что при синтезе можно задать пропорциональную кусочно-линейную АЧХ (аппроксимируемую функцию, см. гл.12). Синтаксис вызова функции **fir2** следующий:

```
a = fir2 (n, f, h, Npt, lap, window).
```

Здесь n — порядок синтезируемого фильтра (его импульсная характеристика будет содержать $n+1$ ненулевых отсчётов).

Параметры f и h совместно определяют желаемую АЧХ (аппроксимируемую функцию) проектируемого ЦФ. Вектор f содержит значения частот, нормированных к частоте Найквиста $F_N = f_д/2$, а вектор h — соответствующие этим частотам значения АЧХ. В промежутках между заданными точками АЧХ интерполируется по линейному закону. Частоты в векторе f должны образовывать неубывающую последовательность, кроме того, должны выполняться равенства f(1)=0 и f(end)=1. Частоты могут дублироваться, что даёт возможность задавать скачкообразное изменение АЧХ. Вывести график синтезируемой АЧХ (аппроксимируемой функции) можно командой plot (f, h)=1.

Для фильтров, коэффициент передачи которых на частоте Найквиста не равен нулю, возможен только чётный порядок. Если задать нечётное n, то будет рассчитан ЦФ, порядок которого на единицу больше заданного.

Остальные входные параметры функции **fir2** являются необязательными. Параметр Npt задаёт число точек, используемое при интерполяции заданной АЧХ (по умолчанию его значение равно 512). Параметр lap задаёт ширину переходных полос вокруг скачков аппрокимируемой АЧХ. При интерполяции в этих полосах вместо скачка будет сформирован линейный переход. Ширина переходов измеряется в точках интерполяции и по умолчанию равна 25.

Параметр window задаёт используемое при синтезе окно. Это должен быть вектор-столбец, содержащий $n+1$ элементов. По умолчанию используется окно Хэмминга, рассчитываемое путём вызова функции hamming (n+1).

Результатом работы функции **fir2** является вектор a коэффициентов передаточной функции нерекурсивного фильтра (3.43). Синтезированный фильтр имеет линейную ФЧХ и вносит групповую задержку, независимо от частоты равную $n/2$ отсчётов.

Синтез фильтра выполняется следующим образом: заданная АЧХ (аппроксимируемая функция) интерполируется кусочно-линейно на равномерную сетку из Npt точек, обратное дискретное преобразование Фурье даёт импульсную характеристику, она симметрично усекается до $n+1$ отсчётов и для ослабления эффектов усечения умножается на используемую оконную функцию.

Функция **kaiserord** предназначена для определения порядка нерекурсивного ЦФ, удовлетворяющего заданным требованиям, при синтезе функцией **fir1** с использованием окна Кайзера. Функция имеет два варианта синтаксиса [52]:

```
[n, Wn, beta, ftype] = kaiserord (f, h, dev, Fd),
c = kaiserord (f, h, dev, Fd, 'cell').
```

Во втором варианте синтаксиса возвращаемый массив ячеек c содержит полный набор параметров для вызова функции **fir1**.

Параметры f и h совместно задают кусочно-постоянную АЧХ (аппроксимируемую функцию). В векторе f должна содержаться возрастающая последовательность значений частот. Вектор h задаёт постоянные значения АЧХ для полос, ограниченных парами частот из вектора f, при этом первая полоса начина-

ется от нулевой частоты, а последняя заканчивается на частоте Найквиста $F_N = f_д / 2$:

- в полосе от нуля до f(1) АЧХ равна h(1);
- в полосе от f(1) до f(2) АЧХ не определена;
- в полосе от f(2) до f(3) АЧХ равна h(2);
- в полосе от f(3) до f(4) АЧХ не определена;
- так продолжается до конца векторов f и h;
- в полосе от f(end-1) до f(end) АЧХ не определена;
- в полосе от f(end) до Fd/2 АЧХ равна h(end).

Таким образом, длина вектора f должна быть равна length(h)*2–2.

Поскольку функция **kaiserord** формирует исходные данные для функции **fir1**, в векторе h могут содержаться только значения 0 и 1.

Параметр dev должен быть вектором той же длины, что и вектор h, содержащий вещественные положительные числа. Он задаёт максимально допустимую ошибку аппроксимации кусочно-постоянной АЧХ для отдельных частотных полос. Ошибка задаётся как *абсолютная* погрешность АЧХ.

Параметр Fd задаёт частоту дискретизации $f_д$ и является необязательным. При его использовании следует указывать в векторе f не нормированные, а исходные значения частот в тех же единицах, что и Fd. По умолчанию частота дискретизации считается равной 2, так что частота Найквиста равна 1. При этом частоты в векторе f нормированы к частоте Найквиста.

Результатами работы функции **kaiserord** являются порядок фильтра n, вектор нормированных частот среза Wn, параметр окна Кайзера beta и указатель типа фильтра ftype. Эти параметры затем должны использоваться при вызове функции **fir1** следующим образом:

```
a = fir1 (n, Wn, Kaiser(n+1, beta), ftype, 'noscale').
```

Если используется второй вариант вызова функции **kaiserord**, то вызывать функцию **fir1** следует так:

```
a = fir1 (c{1}, c{2}, c{3}, c{4}, c{5}).
```

После синтеза ЦФ функцией **fir1** следует проверить его АЧХ с помощью функции **freqz** и при необходимости попытаться подобрать порядок фильтра вручную.

14.5. Моделирование цифровой фильтрации с помощью GUI SPTool

Визуальное проектирование фильтров — самый простой способ получения их характеристик. Одни и те же средства визуального проектирования позволяют совместно использовать пакеты **Filter Design Toolbox** и **Signal Processing Toolbox**. Программы GUI (Graphic User Interface — графический интерфейс

пользователя) — это интерактивные системы, предназначенные для моделирования сигналов, устройств и процессов с графическим выводом результатов.

GUI SPTool (Signal Processing Toolbox**)** представляет собой типичную GUI-программу, предназначенную для моделирования цифровой фильтрации, которая включает в себя следующие операции:

- импортирование входного сигнала и анализ его спектра;
- синтез ЦФ и анализ его характеристик;
- моделирование процесса фильтрации;
- анализ выходного сигнала и его спектра;
- экспортирование результатов моделирования в MATLAB.

Обращение к GUI-программе осуществляется после записи её имени в командном окне MATLAB:

```
>> sptool
```

Рассмотрим последовательность действий при решении типичной задачи ЦОС — фильтрации сигнала с помощью программы **SPTool**•.

♦ Синтез цифрового фильтра

После обращения к программе SPTool в командном окне MATLAB открывается *первое* окно (**SPTool: startup.spt** — рис.14.17), состоящее из трех полей: **Signals**, **Filters**, **Spectra**.

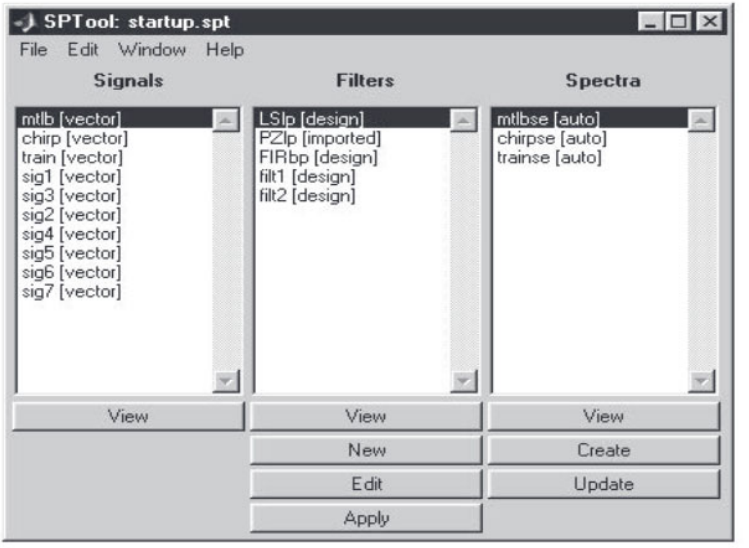


Рис.14.17. Первое окно GUI-программы **SPTool** (**SPTool: startup.spt**)

• Материал заимствован из [65].

Поле **Filters** содержит 4 кнопки:

- **View** — просмотр характеристик фильтра;
- **New Design** — синтез нового фильтра;
- **Edit Design** — изменение требований к фильтру и его синтез без изменения имени фильтра;
- **Apply** — моделирование процедуры фильтрации сигнала, имя которого выделено в поле **Signals**, фильтром, имя которого выделено в поле **Filters**.

В поле **Filters** содержатся имена синтезированных ранее и сохранённых ЦФ; если они отсутствуют, активизирована только кнопка **New Design**.

После нажатия копки **New Design** открывается *второе* окно (**Filter Designer** — рис.14.18), в котором могут выполняться следующие действия:

❖ Ввод исходных данных для синтезируемого ЦФ (на левом поле **Specifications**):

- частота дискретизации в Гц (**Sampling frequency**);
- тип избирательности фильтра (**Type**):
  lowpass — ФНЧ;
  highpass — ФВЧ;
  bandpass — полосовой фильтр (ПФ);
  bandstop — режекторныйй фильтр (РФ).

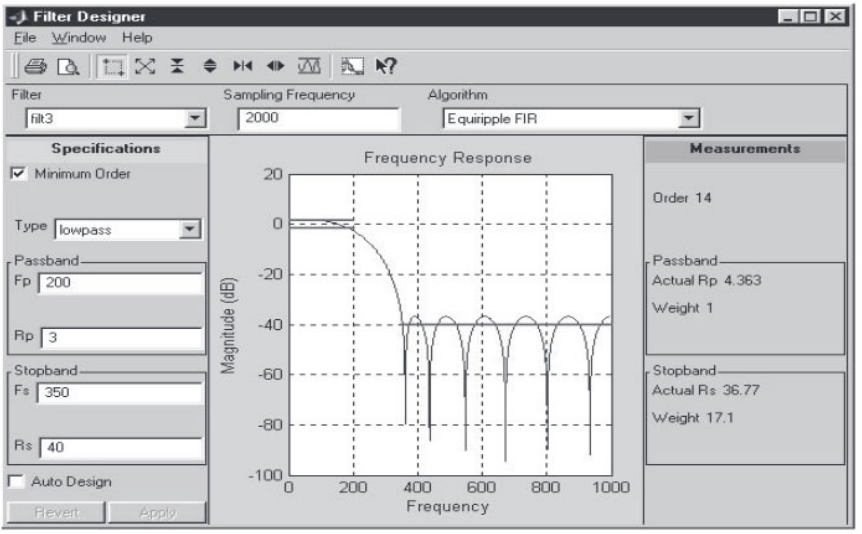


Рис.14.18. Второе окно GUI-программы **SPTool** (**Filter Designer**)

- вид фильтра и метод аппроксимации (**Algorithm**).
  Для синтеза нерекурсивных ЦФ может быть выбран один из следующих методов:

Equiripple FIR — оптимальной фильтрации Чебышева;
Least Square FIR — наименьших квадратов;
Kaiser Window FIR — окон Кайзера.

При синтезе рекурсивных ЦФ используется метод билинейного преобразования со следующими типами аппроксимации:

Butterwhorth IIR — Баттерворта;
Chebyshev Type 1 IIR — Чебышева 1-го типа;
Chebyshev Type 2 IIR — Чебышева 2-го типа;
Elliptic IIR — эллиптический (Золотарёва-Кауэра).

- Требования к характеристике ослабления (затухания):
  в полосе (или полосах) пропускания (**Passband**):
  граничная частота (или частоты) в Гц;
  максимально допустимое ослабление (затухание) в дБ;
  в полосе (или полосах) задерживания (**Stopband**):
  граничная частота (или частоты) в Гц;
  минимально допустимое ослабление (затухание) в дБ.

❖ Синтез ЦФ по введённым требованиям производится после нажатия кнопки **Auto Design** (внизу на левом поле **Specifications**).

❖ Для вывода данных о синтезированном ЦФ используются следующие элементы:

- график АЧХ (в центре — **Frequency Responce**);
- порядок ЦФ (**Order** — на правом поле **Measurements**);
- действительное отклонение в полосах пропускания (**Passband**) и задерживания (**Stopband**) — на правом поле **Measurements**;
- веса (**Weight**) в полосах пропускания (**Passband**) и задерживания (**Stopband**) — на правом поле **Measurements**;
- имя синтезированного ЦФ (на левом поле **Specifications** в окне **Filter Designer**). Имена задаются автоматически — filt1, filt2 и т.д.

Меню *второго* окна (**Filter Designer**):

File:

Close — закрыть окно;

Window:

0. MATLAB — выход в окно MATLAB;
1. Filter Design — окно **Filter Design**;
2. SPTool: startup.spt — выход в окно **SPTool: startup.spt**.

После синтеза ЦФ окно **Filter Designer** закрывается, и пользователь вновь оказывается в *первом* окне (**SPTool: startup.spt**). Если никаких других действий не предполагается, данное окно следует закрыть; при этом автоматически запрашивается необходимость сохранения результатов сессии (в общем случае синтезированных фильтров, импортированных входных и вычисленных выходных сигналов, вычисленных спектров) и пользователь нажимает соответствующую кнопку. Информация о синтезированном ЦФ в виде массива записей хранится в файле filtN. Если после выхода из окна **Filter Designer** необходимо изме-

нить требования к сохранённому фильтру (по существу заново синтезировать ЦФ) и сохранить новый фильтр под старым именем, то следует в *первом* окне (**SPTool: startup.spt)** в поле **Filters** выделить имя фильтра, нажать кнопку **Edit Design** и внести требуемые изменения.

♦ **Анализ характеристик синтезированного ЦФ**

Для анализа характеристик синтезированного ЦФ нужно выполнить следующие действия:

❖ В поле **Filters** *первого* окна (**SPTool: startup.spt)** выделить имя ЦФ.

❖ Нажать кнопку **View**.

В результате откроется *третье* окно (**Ffilter Viewer** — рис.14.19), содержащее следующие элементы:

- имя фильтра (сверху слева — **Ffilter**);
- частоту дискретизации (сверху слева — **Fs**);
- графики (в центре окна), отмеченные галочкой на левом поле **Plots**:
  Magnitude — АЧХ;
  Phase — ФЧХ;
  Group Delay — групповое время запаздывания (ГВЗ);
  Zeros and Poles — карта нулей и полюсов;
  Impulse Responte — импульсная характеристика;
  Step Responte — переходная характеристика.

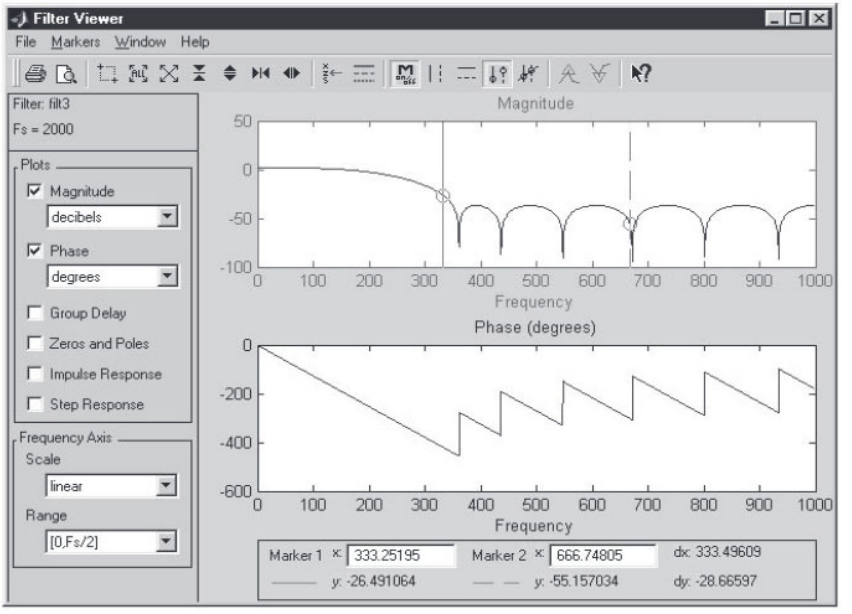


Рис.14.19. Третье окно GUI-программы **SPTool** (**Ffilter Viewer**)

❖ В окне **Ffilter Viewer** предусмотрены следующие возможности масштабирования графиков:

- изменить единицы измерения или масштаб по оси *y* — на левом поле **Plots**:
  для АЧХ — **Magnitude**;
  для ФЧХ — **Phase**;
- изменить масштаб по оси абсцисс (одновременно для всех графиков) — на левом поле **Frequency Axis**:
  Scale;
- изменить диапазон частот, на котором строятся графики (одновременно для всех графиков) — на левом поле **Frequency Axis**:
  Range.

❖ В окне **Ffilter Viewer** имеется возможность работы со следующими инструментами **Selection**:

- **Color** — изменение цвета графиков (всех одновременно);
- **Rulers** — выбрать один из 6 графиков, для которого с целью проведения точных измерений используются перемещаемые маркерные линии:
  - **Vertical markers** — сплошная и пунктирная прямые вертикальные линии; при этом автоматически фиксируются значения соответствующих аргументов x1, x2 и разности dx между ними;
  - **Horizontal markers** — сплошная и пунктирная прямые горизонтальные линии; при этом автоматически фиксируются значения соответствующих функций y1, y2 и разности dy между ними;
  - **Vertical markers with Tracking** — сплошная и пунктирная прямые вертикальные линии и отметка на графике точек пересечения с маркерными линиями; при этом автоматически фиксируются значения соответствующих аргументов x1, x2, функций y1, y2 и разностей dx, dy между ними;
  - **Vertical markers with Tracking and Slope** — по сравнению с **Vertical markers with Tracking** появляется дополнительная линия, соединяющая отмеченные на графике точки, и автоматически фиксируется значение тангенса угла наклона этой линии к оси абсцисс;
- **Reaks** — отметка максимумов на графике;
- **Valley** — отметка минимумов на графике.

♦ **Создание входного сигнала**

Источником сигнала для **SPTool** может быть либо рабочее пространство **Workspace**, если сигнал создаётся непосредственно в командном окне MATLAB, либо диск (**Disk**), если сигнал создаётся как m-файл.

Например, для создания дискретного входного сигнала, состоящего из двух синусоид с частотами 500 Гц и 750 Гц в смеси с шумом, в командном окне MATLAB нужно набрать следующие команды:

```
>> Fd=2000;
>> f1=500;
>> f2=750;
>> w1=2*pi*f1/Fd;
>> w2=2*pi*f2/Fd;
>> n=1:1000;
>> x=1*sin(w1*n)+1.5*sin(w2*n);
>> y=rand(1,length(x));
>> sum=x+y;
```

♦ **Импортирование входного сигнала в SPTool**

Для импортирования входного сигнала нужно в *первом* окне (**SPTool: startup.spt)** войти в меню (сверху) **File – Import**. После этого открывается *четвёртое* окно (**Import to SPTool** — рис.14.20**)**, в котором следует в поле **Source** (слева) отметить точкой, откуда импортируется сигнал — **From Workspace** или **From Disk**.

❖ Для импортирования сигнала из **From Workspace** необходимо выполнить следующие действия:

- в поле **Workspace Contents** выделить имя сигнала (например sum);
- выделить имя импортируемого сигнала и нажать кнопку со стрелкой (→), что является указанием рассматривать сигнал (например sum) как данные (**Data**);
- в поле *четвёртого* окна справа ввести следующее:
  Import As — Signal;
  Sampling Frequency — частоту дискретизации $f_д$;
  Name — имя сигнала в **SPTool** (например sig3);
- нажать кнопку **OK**.

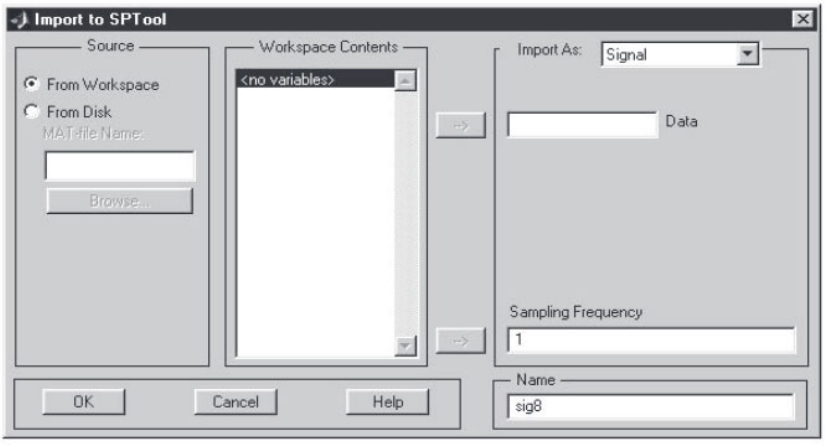


Рис.14.20. Четвёртое окно GUI-программы **SPTool** (**Import to SPTool**)

❖ Для импортирования сигнала из **From Disk** необходимо выполнить следующие действия:

- в поле **Source** нажать активированную кнопку **Browse**, в результате чего откроется *пятое* окно (**Select File to Open** — рис.14.21);

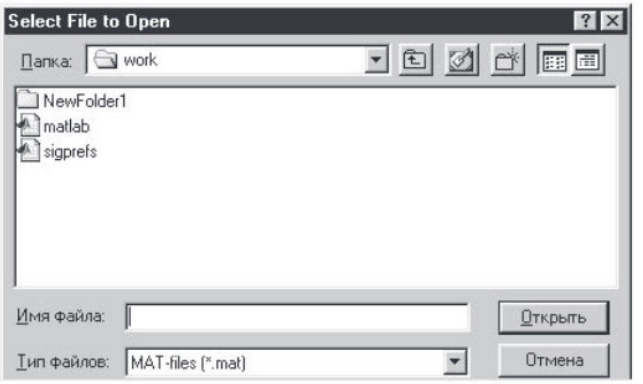


Рис.14.21. Пятое окно GUI-программы **SPTool** (**Select File to Open**)

- в этом окне требуется отметить курсором имя m-файла и нажать кнопку **Открыть**, после чего автоматически открывается *четвёртое* окно (**Import to SPTool**), в котором (справа) следует в поле **Contents** выделить имя сигнала (имя переменной, соответствующее сигналу в m-файле), и нажать кнопку со стрелкой $(\rightarrow)$, что является указанием рассматривать сигнал (например sum) как данные (**Data**);
- в поле окна справа ввести следующее:

  Import As — **Signal**;

  Sampling Frequency — частоту дискретизации $f_д$;

  Name — имя сигнала в **SPTool** (например sig3, в принципе, можно ввести другое имя, не совпадающее с именем файла);
- нажать кнопку **OK**.

♦ **Визуализация входного и выходного сигналов**

Для просмотра сигнала необходимо выполнить следующие действия:

- в поле **Signals** *первого* окна (**SPTool: startup.spt**) выделить имя сигнала (например sig3);
- нажать кнопку **View**, в результате чего откроется *шестое* окно (**Signal Browser** — рис.14.22), содержащее имя сигнала (например sig3), частоту дискретизации, график *дискретного* сигнала, представленный *непрерывной* кривой на интервале времени $[0, NT]=[0, N/f_д]$, где N — количество интервалов дискретизации на времени наблюдения.

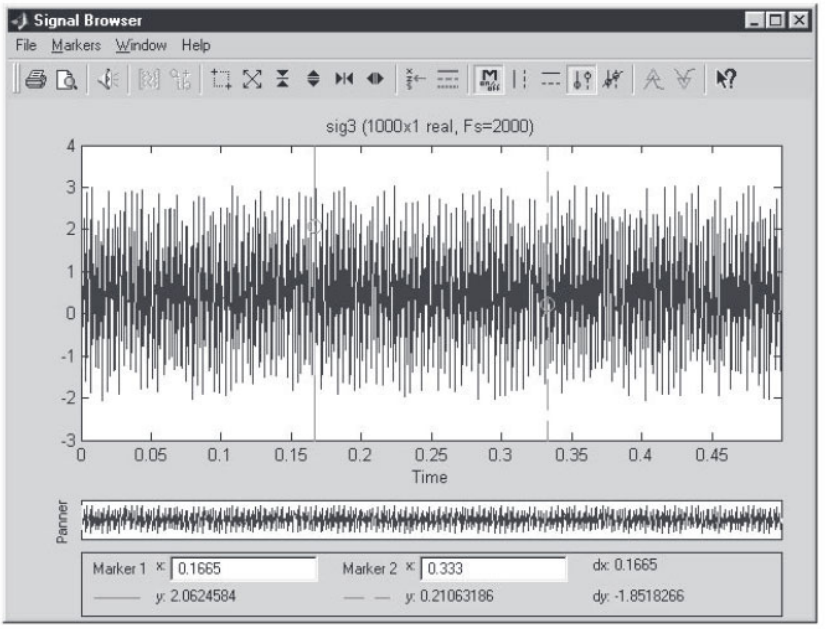


Рис.14.22. Шестое окно GUI-программы **SPTool** (**Signal Browser**)

В *шестом* окне (**Signal Browser)** имеется возможность работы с инструментами **Selection** и **Rulers** (правое поле окна), а также средства управления масштабом (сверху). Пользование ими описано выше в п. «Анализ характеристик синтезированного ЦФ».

♦ **Моделирование процесса фильтрации**

После синтеза ЦФ и импортирования входного сигнала можно моделировать процесс фильтрации. Для этого необходимо выполнить следующие действия:

- в поле **Signals** *первого* окна (**SPTool: startup.spt)** выделить имя сигнала (например sig3);
- в поле **Filters** *первого* окна (**SPTool: startup.spt)** выделить имя фильтра (например filt1);
- в поле **Filters** нажать кнопку **Apply**, после чего появится *седьмое* окно (**Apply Filters** — рис.14.23) с именами входного сигнала (например sig3), фильтра (например filt1) и выходного сигнала (например sig2). Если имя выходного сигнала устраивает (иначе его можно изменить), то следует нажать кнопку **OK**, после чего произойдёт возврат в *первое* окно (**SPTool: startup.spt)**.

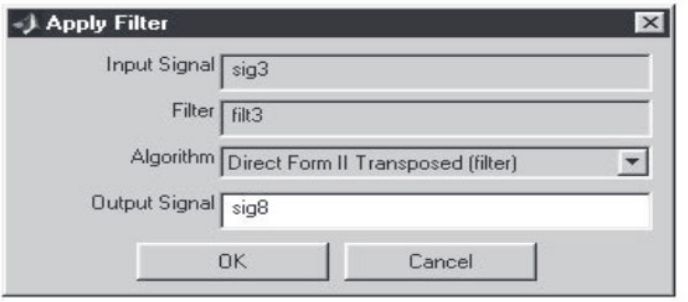


Рис.14.23. Седьмое окно GUI-программы **SPTool** (**Apply Filters**)

Можно в поле **Signals** окна **SPTool: startup.spt** выделить одновременно входной и выходной сигналы, удерживая клавишу **Ctrl**, и, нажав кнопку **View**, в окне **Signal Browser** по очереди просмотреть сигналы, указывая в **Selection** их имена.

♦ **Расчёт и визуализация спектров входного и выходного сигналов**

Для расчёта и просмотра спектра сигнала в *первом* окне (**SPTool: startup.spt**) необходимо выполнить следующие действия:

- в поле **Signals** выделить имя сигнала (например sig2);
- в поле **Spectra** нажать кнопку **Create** (создать) после чего появляется *восьмое* окно (**Spectrum Viewer** — рис.14.24) с именем спектра сигнала (например spect2), имена спектров задаются автоматически (подобно именам фильтров) последовательно: spect1, spect2 и т.д.;

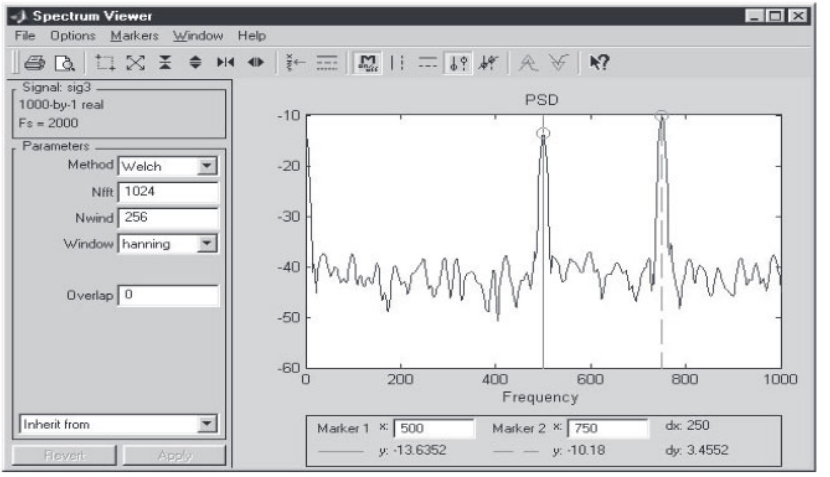


Рис.14.24. Восьмое окно GUI-программы **SPTool** (**Spectrum Viewer**)

- в окне **Spectrum Viewer** следует указать метод расчёта спектра (например **FFT**); задать количество точек, по которым рассчитывается спектр(для **FFT** равное ближайшему 2^n; нажать кнопку **Apply**.

В окне **Spectrum Viewer** появляется график амплитудного спектра (при расчёте по методу **FFT** — модуль ДПФ).

Спектр выходного сигнала рассчитывается аналогично.

В *восьмом* окне (**Spectrum Viewer)** имеется возможность работы с инструментами **Selection** и **Rulers** (правое поле окна), а также средства управления масштабом (сверху). Пользование ими описано выше в п. «Анализ характеристик синтезированного ЦФ».

♦ **Выход из программы SPTool**

При выходе из программы **SPTool** автоматически запрашивается, надо ли сохранить данные (сигналы, фильтры, спектры). В случае положительного ответа данные сохраняются в файлах со своими именами с расширением .spt на диске в папке work\startup.spt.

Проверить содержание папки work можно через программу **Проводник**. Сохранённые файлы могут использоваться для последующей работы в **SPTool**. Для использования в MATLAB данных, сохранённых при выходе из **SPTool**, необходимо осуществить их экспорт в MATLAB.

♦ **Экспорт данных SPTool в** MATLAB

Для экспорта данных **SPTool** в MATLAB следует в окне **SPTool: startup.spt** войти в меню **File** — **Export**, после чего откроется *девятое* окно (**Export from SPTool** — рис.14.25), в котором нужно указать имя экспортируемых данных (если экспортируется несколько данных, то их имена следует выделить, удерживая клавишу **Ctrl**) и место, куда данные экспортируются (**Workspace** или **Disk**). В обоих случаях данные сохраняются с тем же именем, как в **SPTool**.

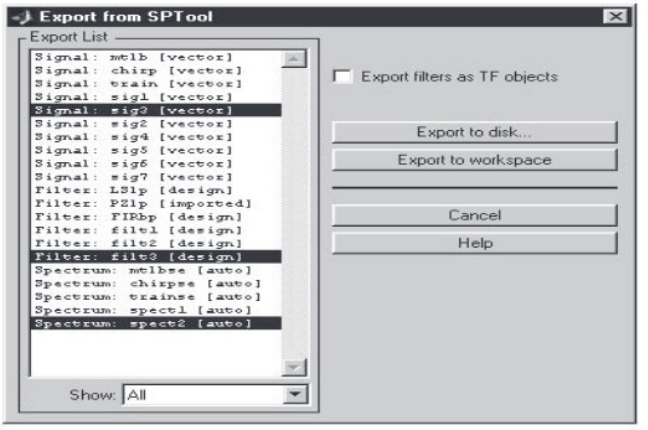


Рис.14.25. Девятое окно GUI-программы **SPTool** (**Export from SPTool**)

Если данные экспортируются на диск, то они представляют собой m-файлы и размещаются в папке work, проверить содержимое которой можно через программу **Проводник**. Экспортированные данные представляют собой массивы записей (структуры).

Краткие итоги

1. Система компьютерной математики MATLAB представляет пользователям мощные средства для самых серьёзных вычислений и моделирования динамических объектов и систем. Версия программного комплекса MATLAB содержит базовую систему MATLAB — МАТричную ЛАБораторию — и десятки пакетов расширения в самых разных областях компьютерной математики. Система основана на использовании современных и высокоэффективных алгоритмов матричных операций, базирующихся на известных и хорошо апробированных пакетах матричных вычислений.

2. Важнейшие пакеты расширения системы MATLAB 6 ориентированы на обработку и фильтрацию сигналов и изображений. Это пакеты расширения **Signal Processing Toolbox**, **Filter Design Toolbox**, **Wavelet Toolbox** и **Image Processing Toolbox**. Они предоставляют пользователю методы генерации и обработки сигналов и изображений, а также самую современную инструментальную технику машинного проектирования аналоговых и дискретных (цифровых) фильтров различного назначения. Ныне эти средства составляют основу проектирования многих новейших систем и устройств в области радиоэлектроники, связи, телекоммуникаций, контроля и управления.

3. Система MATLAB состоит из многих тысяч файлов, находящихся в множестве папок. Файл — это некоторая совокупность данных в широком понимании, хранящаяся в памяти компьютера (обычно на дисковых накопителях) и объединённых под некоторым именем *файла*, после которого через точку указывается *расширение файла*. Файлы могут содержать машинные коды (исполняемые файлы), тексты (текстовые файлы), исходные данные для математических расчётов и результаты их выполнения. В системе MATLAB особое значение имеют файлы двух типов — с расширением .mat и .m. Вторые — это текстовые файлы, содержащие внешние определения команд и функций системы. Именно к ним относится большая часть команд и функций, в том числе задаваемых пользователем для решения своих специфических задач. Нередко встречаются и файлы с расширением .c (на языке C), файлы с откомпилированными кодами с расширением .mex и другие. Исполняемые файлы имеют расширение .exe.

4. Система MATLAB создана таким образом, что любые (подчас весьма сложные) вычисления можно выполнять в режиме *прямых вычислений*, т.е. без подготовки программы. Это превращает MATLAB в необычайно мощный калькулятор, который способен производить не только обычные для калькуляторов вычисления, но и операции с векторами и матрицами, комплексными числами, рядами, полиномами. MATLAB позволяет почти мгновенно задать и вывести графики различных функций — от простой синусоиды до сложной трёхмерной функции. Работа с системой в режиме прямых вычислений носит диалоговый характер и происходит по правилу «задал вопрос — получил ответ». Пользователь набирает на клавиатуре вычисляемое выражение, редактирует его (если нужно) в командной строке и завершает ввод нажатием клавиши Enter.

5. Система компьютерной математики MATLAB и её пакеты расширения ориентированы прежде всего на цифровую обработку сигналов, поэтому функции, связанные с расчётом аналоговых фильтров, являются вспомогательными. В основном они используются для

синтеза нормированных аналоговых ФНЧ-прототипов при проектировании рекурсивных ЦФ. Большая часть этих функций относится к пакету **Signal Processing**.

Аналоговые линейные фильтры в системе MATLAB представляются в следующих формах:

- передаточной функцией $H(p)$ дробно-рационального вида (14.1) — **tf**;
- передаточной функцией $H(p)$ нуль-полюсного вида (14.2) — **zp**;
- передаточной функцией $H(p)$ в виде суммы простых дробей (14.10) или (14.12);
- в пространстве состояний (14.6) — **ss**.

Переход из одной формы описания в другую осуществляется с помощью функций **tf2zp**, **zp2tf**, **tf2ss**, **ss2tf**, **zp2ss**, **ss2zp**.

6. Аналоговые нормированные ФНЧ-прототипы в системе MATLAB синтезируют с помощью следующих функций: **buttap** — фильтр Баттерворта; **cheb1ap** — фильтр Чебышева типа 1; **cheb2ap** — фильтр Чебышева типа 2; **ellipap** — эллиптический фильтр; **besselap** — фильтр Бесселя.

7. Аналоговые селективные фильтры — ФНЧ (low-pass filter), ФВЧ (high-pass filter), полосовой фильтр (band-pass filter) и режекторный фильтр (band-stop filter) — можно получить путём денормирования частоты аналогового нормированного ФНЧ-прототипа.

В системе MATLAB для денормирования частоты ФНЧ-прототипа используются следующие четыре функции [52, 54]:

- **lp2lp** — изменение частоты среза ФНЧ (low-pass);
- **lp2hp** — преобразование ФНЧ в ФВЧ (high-pass);
- **lp2bp** — преобразование ФНЧ в полосовой фильтр (pass-pass);
- **lp2bs** — преобразование ФНЧ в режекторный фильтр (pass-stop).

8. Для синтеза аналогового фильтра (см. рис.13.1) необходимо выполнить две операции: синтезировать нормированный аналоговый ФНЧ-прототип и преобразовать его к нужному типу фильтра с заданными частотами среза (осуществить денормирование частоты). Эта последовательность действий оформлена в виде следующих функций MATLAB:

- butter (n, w0, type, ‘s’) — синтез фильтра Баттерворта;
- cheby1 (n, Rp, w0, type, ‘s’) — синтез фильтра Чебышева типа 1;
- cheby2 (n, Rs, w0, type, ‘s’) — синтез фильтра Чебышева типа 2;
- ellyp (n, Rp, Rs, w0, type, ‘s’) — синтез эллиптического фильтра;
- besself (n, w0, type) — синтез фильтра Бесселя.

Рассчитать минимально необходимый порядок фильтра позволяют следующие однотипные функции пакета **Signal Processing**:

- [n, Wn] = buttord (Wp, Ws, Rp, Rs, ‘s’) ;
- [n, Wn] = cheb1ord (Wp, Ws, Rp, Rs, ‘s’) ;
- [n, Wn] = cheb2ord (Wp, Ws, Rp, Rs, ‘s’) ;
- [n, Wn] = ellipord (Wp, Ws, Rp, Rs, ‘s’) .

Расчёт комплексных частотных характеристик аналоговых фильтров и построение графиков АЧХ и ФЧХ осуществляется с помощью функции **freqs**.

9. Линейные рекурсивные дискретные (цифровые) фильтры в системе MATLAB представляются в следующих формах:

- передаточной функцией $H(z)$ дробно-рационального вида (3.7) — **tf**;
- передаточной функцией $H(z)$ нуль-полюсного вида (3.38) — **zp**;
- передаточной функцией $H(z)$ в виде суммы простых дробей (14.10) или (14.12);
- в пространстве состояний (4.11) — **ss**.

Переход из одной формы описания в другую осуществляется с помощью функций **tf2zp**, **zp2tf**, **tf2ss**, **ss2tf**, **zp2ss**, **ss2zp**.

Согласно (3.14) каскадная реализация ЦФ возможна в виде последовательного соединения блоков первого порядка. Однако часть этих блоков (или все) может оказаться с комплексными коэффициентами. По этой причине при каскадной реализации вещественных ЦФ их делят на секции второго порядка (second order sections). При этом пары комплексно-сопряжённых полюсов и нулей (если они имеются) объединяются и образуют каскады второго порядка. В этом случае передаточные функции $H(z)$ цифровых ФНЧ и ФВЧ будут иметь вид (13.213), а полосового и режекторного фильтров — вид (13.221).

10. В пакете **Signal Processing** имеется шесть функций, осуществляющих преобразование описания дискретной системы между набором секций второго порядка и другими формами описания: **tf2sos**, **zp2sos**, **ss2sos**, **sos2tf**, **sos2zp**, **sos2ss**. Имена этих функций построены так же, как и имена других функций преобразования описаний систем; аббревиатура последовательной (каскадной) формы — **sos** (second order sections).

11. В пакете **Signal Processing** имеется функция **bilinear**,позволяющая синтезировать рекурсивные ЦФ по произвольному аналоговому прототипу методом билинейного преобразования (см. § 13.8). Она преобразует заданные различными способами аналоговые описания систем в дискретные и поэтому имеет три варианта синтаксиса:

- [az, bz] = bilinear (a, b, Fd, Fq) ;
- [zz, pz, kz] = bilinear (z, p, k, Fd, Fq) ;
- [Az, Bz, Cz, Dz] = bilinear (A, B, C, D, Fd, Fq) .

12. Функции **butter**, **cheby1**, **cheby2**, **ellip** пакета **Signal Processing**, которые рассмотрены в § 14.2 и 14.3, выполняют синтез цифровых ФНЧ, ФВЧ, полосовых и режекторных ЦФ по аналоговым прототипам (Баттерворта, Чебышева первого и второго типа и эллиптических) методом билинейного преобразования. Требуемая при этом последовательность действий оформлена в виде следующих функций MATLAB:

- butter (n. w0. type) — синтез фильтров Баттерворта;
- cheby1 (n, Rp, w0, type) — синтез фильтров Чебышева типа 1;
- cheby2 (n, Rs, w0, type) — синтез фильтров Чебышева типа 2;
- ellip (n, Rp, Rs, w0, type) — синтез эллиптических фильтров.

Перечисленные функции позволяют синтезировать как дискретные (цифровые), так и аналоговые фильтры. Признаком синтеза дискретных фильтров является отсутствие строки 's' в конце списка входных параметров.

Рассчитать минимально необходимый порядок дискретного фильтра позволяют следующие однотипные функции пакета **Signal Processing**:

- [n, Wn] = buttord (Wp, Ws, Rp, Rs) ;
- [n, Wn] = cheb1ord (Wp, Ws, Rp, Rs) ;
- [n, Wn] = cheb2ord (Wp, Ws, Rp, Rs) ;
- [n, Wn] = ellipord (Wp, Ws, Rp, Rs) .

Данные функции позволяют выбирать порядок как для аналоговых, так и для дискретных фильтров. Отсутствие строки 's' в конце списка параметров является признаком расчёта дискретного фильтра, а наличие — признаком расчёта аналогового фильтра.

Функция **impinvar** предназначена для синтеза ЦФ по произвольному аналоговому прототипу методом инвариантного преобразования импульсной характеристики (см. § 13.8).

Расчёт комплексных частотных характеристик аналоговых фильтров и построение графиков АЧХ и ФЧХ осуществляется с помощью функции **freqz**.

13. В системе MATLAB имеются функции проектирования нерекурсивных ЦФ, которые используют следующие методы:

- Equiripple — синтез фильтров с равномерными пульсациями АЧХ методом Ремеза;
- Least-Sqares — минимизация среднеквадратического отклонения АЧХ от заданной;

- Window — синтез с использованием весовых функций (окон).

14. **Метод Ремеза** предназначен для синтеза нерекурсивных ЦФ путём минимаксной аппроксимации (12.17) заданной АЧХ (см. § 12.8).

В системе MATLAB имеется три функции, реализующие данный метод и несколько различающиеся по своим возможностям. Две из них, **remez** и **cremez**, находятся в пакете **Signal Processing** , а третья, **gremez** (она является наиболее обобщённым вариантом), — в пакете **Filter Design** . Кроме того, в пакете **Signal Processing** имеется функция **remezord**, предназначенная для оценки порядка фильтра, который при синтезе методом Ремеза будет удовлетворять заданным требованиям.

15. **Синтез нерекурсивных ЦФ** при среднеквадратической аппроксимации (12.16) заданной АЧХ (см. § 12.6 и 12.7) в системе MATLAB осуществляется функциями **firls**, **fircls, fircls1**, находящимися в пакете **Signal Processing**. Функция **firls** аппроксимирует произвольную кусочно-линейную АЧХ с незаданными переходными полосами. Остальные две функции выполняют оптимизацию с ограничением максимального абсолютного отклонения АЧХ от заданной (аппроксимируемой). Функция **fircls** реализует произвольную кусочно-постоянную АЧХ, а функция **fircls1** предназначена для синтеза ФНЧ и ФВЧ.

16. **Синтез нерекурсивных ЦФ** оконным методом (см. § 12.4) в системе MATLAB осуществляется функциями **fir1**, **fir2**, находящимися в пакете **Signal Processing**. Различия между ними состоит в типе аппроксимируемой АЧХ: функция **fir1** предназначена для синтеза многополосных фильтров, аппроксимируемая АЧХ которых скачкообразно изменяется в заданных частотных точках, принимая значения 0 или 1, а функция **fir2** допускает задание произвольной кусочно-линейной аппроксимируемая АЧХ. Кроме того, в пакете **Signal Processing** имеется функция **kaiserord**, предназначенная для выбора порядка ЦФ, который при синтезе с применением окна Кайзера будет удовлетворять заданным требованиям.

17. Визуальное проектирование фильтров — самый простой способ получения их характеристик. Одни и те же средства визуального проектирования позволяют совместно использовать пакеты **Filter Design Toolbox** и **Signal Proces-sing Toolbox**. Программы GUI (Graphic User Interface — графический интерфейс пользователя) — это интерактивные системы, предназначенные для моделирования сигналов, устройств и процессов с графическим выводом результатов.

GUI SPTool (Signal Processing Toolbox) представляет собой типичную GUI-программу, предназначенную для моделирования цифровой фильтрации, которая включает в себя следующие операции:

- импортирование входного сигнала и анализ его спектра;
- синтез ЦФ и анализ его характеристик;
- моделирование процесса фильтрации;
- анализ выходного сигнала и его спектра;
- экспортирование результатов моделирования в MATLAB.

Обращение к GUI-программе осуществляется после записи её имени в командном окне MATLAB:

```
>> sptool
```

В программе **GUI SPTool** последовательно могут быть открыты 9 окон, в которых выполняются перечисленные выше операции.

Глава 15

РЕШЕНИЕ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ОДНОМЕРНЫХ СКАЛЯРНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ НЕРЕКУРСИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

15.1. Общие сведения о скалярных комплексных стационарных линейных цифровых фильтрах

При цифровой обработке полосовых сигналов по методу комплексных огибающих *комплексный цифровой фильтр* является *низкочастотным эквивалентом* вещественного полосового фильтра [1, 2]. Именно с этих позиций будем проводить дальнейшее рассмотрение комплексных ЦФ, хотя возможны и другие варианты их использования [24].

В § 4.6 рассматривались скалярные комплексные стационарные линейные ЦФ. При этом были получены алгоритмы фильтрации [см. (2.2) и (3.42) с учётом (4.33), а также (4.34) — (4.38)], структурные схемы (см. рис.4.6 — 4.8), передаточные функции [см. (4.39), (4.40)], комплексные частотные характеристики [см. (4.41), (4.42)], АЧХ [см. (4.43), (4.45)] и ФЧХ [см. (4.44), (4.46)].

Из выражений для АЧХ и ФЧХ комплексных ЦФ следует, что в отличие от вещественных фильтров АЧХ комплексного цифрового фильтра в общем случае не является чётной, а ФЧХ — нечётной функцией частоты ω [см. (3.37)]. Это обстоятельство позволяет реализовать с помощью комплексного ЦФ низкочастотный эквивалент вещественного полосового фильтра с несимметричной относительно несущей частоты амплитудно-частотной характеристикой, требуемой для приёма радиосигналов с несимметричной модуляцией (например в телевидении используется модуляция с частичным подавлением нижней боковой полосы).

Укрупнённая структурная схема одномерного скалярного комплексного стационарного нерекурсивного линейного ЦФ изображена на рис.4.8, а рекурсивного — на рис.4.6 и 4.7. Характерной особенностью комплексных ЦФ являются двухканальность и перекрёстные связи между каналами. Косинусный и синусный квадратурные каналы одинаковые и описываются передаточными функциями $A_c(z^{-1})$ в случае нерекурсивного и $\dfrac{A_c(z^{-1})}{1+B_c(z^{-1})}$ в случае рекурсивного ЦФ, т.е. квадратурные каналы реализуются косинусными блоками [см. (4.36)]. Перекрёстные связи между каналами осуществляются через блоки с передаточными функциями $A_s(z^{-1})$ и $B_s(z^{-1})$, т.е. через синусные блоки (4.36).

15.2. Синтез одномерных скалярных комплексных стационарных нерекурсивных линейных цифровых фильтров по заданной амплитудно-частотной характеристике

Представляя комплексную частотную характеристику нерекурсивного комплексного ЦФ через АЧХ и ФЧХ, перепишем выражение (4.42) в несколько иной форме•:

$$H\left(e^{j\omega T}\right)=A(\omega T)e^{j\varphi(\omega T)}=A_{\mathrm{c}}(\omega T)e^{j\varphi_{\mathrm{c}}(\omega T)}+jA_{\mathrm{s}}(\omega T)e^{j\varphi_{\mathrm{s}}(\omega T)}=$$
$$=\{A_{\mathrm{c}}(\omega T)\cos[\varphi_{\mathrm{c}}(\omega T)]-A_{\mathrm{s}}(\omega T)\sin[\varphi_{\mathrm{s}}(\omega T)]\}+$$
$$+j\{A_{\mathrm{c}}(\omega T)\sin[\varphi_{\mathrm{c}}(\omega T)]+A_{\mathrm{s}}(\omega T)\cos[\varphi_{\mathrm{s}}(\omega T)]\}. \qquad (15.1)$$

Отсюда нетрудно получить формулы для АЧХ и ФЧХ нерекурсивного комплексного ЦФ через АЧХ и ФЧХ вещественных косинусного и синусного блоков [ср. с (4.45) и (4.46)]:

$$A(\omega T)=\Big\langle\{A_{\mathrm{c}}(\omega T)\cos[\varphi_{\mathrm{c}}(\omega T)]-A_{\mathrm{s}}(\omega T)\sin[\varphi_{\mathrm{s}}(\omega T)]\}^2+$$
$$+\{A_{\mathrm{c}}(\omega T)\sin[\varphi_{\mathrm{c}}(\omega T)]+A_{\mathrm{s}}(\omega T)\cos[\varphi_{\mathrm{s}}(\omega T)]\}^2\Big\rangle^{1/2}=$$
$$=\sqrt{A_{\mathrm{c}}^2(\omega T)+A_{\mathrm{s}}^2(\omega T)+2A_{\mathrm{c}}(\omega T)A_{\mathrm{s}}(\omega T)\sin[\varphi_{\mathrm{c}}(\omega T)-\varphi_{\mathrm{s}}(\omega T)]}\,; \qquad (15.2)$$

$$\varphi(\omega T)=\mathrm{Arctg}\frac{A_{\mathrm{c}}(\omega T)\sin[\varphi_{\mathrm{c}}(\omega T)]+A_{\mathrm{s}}(\omega T)\cos[\varphi_{\mathrm{s}}(\omega T)]}{A_{\mathrm{c}}(\omega T)\cos[\varphi_{\mathrm{c}}(\omega T)]-A_{\mathrm{s}}(\omega T)\sin[\varphi_{\mathrm{s}}(\omega T)]}. \qquad (15.3)$$

Согласно (15.2) запишем выражение для квадрата АЧХ

$$A^2(\omega T)=A_{\mathrm{c}}^2(\omega T)+A_{\mathrm{s}}^2(\omega T)+2A_{\mathrm{c}}(\omega T)A_{\mathrm{s}}(\omega T)\sin[\varphi_{\mathrm{c}}(\omega T)-\varphi_{\mathrm{s}}(\omega T)]. \qquad (15.4)$$

В формуле (15.4) явно просматриваются две составляющие: чётная••

$$A_{\text{чт}}^2(\omega T)=\frac{A^2(\omega T)+A^2(-\omega T)}{2}=A_{\mathrm{c}}^2(\omega T)+A_{\mathrm{s}}^2(\omega T) \qquad (15.5)$$

и нечётная

$$A_{\text{нчт}}^2(\omega T)=\frac{A^2(\omega T)-A^2(-\omega T)}{2}=2A_{\mathrm{c}}(\omega T)A_{\mathrm{s}}(\omega T)\sin[\varphi_{\mathrm{c}}(\omega T)-\varphi_{\mathrm{s}}(\omega T)], \qquad (15.6)$$

которые выражаются через амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики косинусного и синусного блоков.

• Здесь и далее используются полные, а не главные, значения фазы. При этом скачки фазы должны быть устранены (см. пример 13.2 и рис.14.4).

•• Относительно нулевой частоты $\omega=0$.

Синтез нерекурсивного комплексного ЦФ по заданному квадрату АЧХ $A^2(\omega T)$ можно осуществить в виде следующей процедуры:

1. Квадрат идеализированной АЧХ $A^2(\omega T)$ комплексного ЦФ с помощью соотношений (15.5) и (15.6) разделяется на две составляющие: чётную $A^2_{\text{чт}}(\omega T)$ и нечётную $A^2_{\text{нчт}}(\omega T)$.

2. По найденным характеристикам $A^2_{\text{чт}}(\omega T)$ и $A^2_{\text{нчт}}(\omega T)$ с учётом выражений (15.5) и (15.6) формируются АЧХ косинусного $A_{\text{c}}(\omega T)$ и синусного $A_{\text{s}}(\omega T)$ блоков, которые рассматриваются в качестве аппроксимируемых функций в задаче синтеза нерекурсивных вещественных ЦФ (см. § 12.3).

3. По методикам, описанным в гл.12, осуществляется синтез двух *нерекурсивных вещественных* ЦФ, в результате которого определяются коэффициенты $a_{\text{c}k}$ и $a_{\text{s}k}$ $\left(k=\overline{0,\,M}\right)$ косинусного и синусного блоков.

4. Формируются коэффициенты передаточной функции нерекурсивного комплексного ЦФ: $a_k = a_{\text{c}k} + ja_{\text{s}k}$ $\left(k=\overline{0,\,M}\right)$ [см. (4.40)].

5. Для проверки полученного решения по формуле (4.45) рассчитывается АЧХ синтезированного комплексного ЦФ.

Наиболее сложным является второй этап, который в общем случае не поддаётся формализации. Успех выполнения этого этапа во многом зависит от существа задачи и опыта проектировщика.

Довольно просто решается задача синтеза нерекурсивного комплексного ЦФ по данной методике в том случае, если принять косинусный и синусный блоки нерекурсивными вещественными фильтрами одинакового порядка M с линейными ФЧХ. Причём, импульсная характеристика косинусного блока должна быть симметричной $h_{\text{c}}[n]=h_{\text{c}}[M-n]$ относительно центра •, а синусного — антисимметричной •• $h_{\text{s}}[n]=-h_{\text{s}}[M-n]$ $\left(n=\overline{0,\,M}\right)$. Как следует из выражений (5.5), (5.6) и (5.14), (5.17), при одинаковых порядках M косинусного и синусного блоков в выражении (15.6) разность фаз $\varphi_{\text{c}}(\omega T)-\varphi_{\text{s}}(\omega T)=\pm\pi/2$ для диапазона частот $\omega\in[-\pi/T,\,\pi/T]$. Это обстоятельство позволяет конструировать АЧХ косинусного $A_{\text{c}}(\omega T)$ и синусного $A_{\text{s}}(\omega T)$ блоков независимо, используя арсенал методов синтеза скалярных вещественных ЦФ с линейными ФЧХ, описанных в гл.12.

Из полученных в результате синтеза коэффициентов косинусного $a_{\text{c}k}$ и синусного $a_{\text{s}k}$ $\left(k=\overline{0,\,M}\right)$ вещественных блоков можно образовать коэффициенты a_k $\left(k=\overline{0,\,M}\right)$ передаточной функции $H(z)$ нерекурсивного комплексного ЦФ двумя способами: $a_k = a_{\text{c}k} + ja_{\text{s}k}$ и $a^*_k = a_{\text{c}k} - ja_{\text{s}k}$ $\left(k=\overline{0,\,M}\right)$. Эти коэф-

---

• Фильтр вида 1 или 2 [см. § 5.2 и 5.3].

•• Фильтр вида 3 или 4 [см. § 5.4 и 5.5].

фициенты являются комплексно-сопряжёнными. Рассмотрим влияние комплексного сопряжения коэффициентов нерекурсивного ЦФ на его АЧХ [2].

Согласно (4.45) запишем выражение для АЧХ нерекурсивного комплексноого ЦФ, коэффициенты которого являются комплексно-сопряжёнными:

$$A^{(*)}(\omega T)=\left\{\left[a_{c0}+\sum_{k=1}^{M}[a_{ck}\cos(\omega Tk)-a_{sk}\sin(\omega Tk)]\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[-a_{s0}+\sum_{k=1}^{M}[-a_{sk}\cos(\omega Tk)-a_{ck}\sin(\omega Tk)]\right]^2\right\}^{1/2}. \qquad (15.7)$$

Подставляя в (4.45) фиксированное значение частоты ω_1, а в (15.7) — зеркальное относительно $\omega=0$ значение $-\omega_1$, получим

$$A(\omega_1 T)=A^{(*)}(-\omega_1 T). \qquad (15.8)$$

Таким образом, комплексное сопряжение коэффициентов нерекурсивного ЦФ приводит к тому, что его АЧХ зеркально отображается относительно нулевой частоты $\omega=0$. Отсюда следует, что при синтезе комплексного нерекурсивного ЦФ фактически получаются два ЦФ, АЧХ которых зеркально-симметричны относительно $\omega=0$.

Отметим, что ФЧХ нерекурсивного комплексного ЦФ, синтезированного по рассмотренной методике, является линейной. Процедура синтеза комплексных ЦФ с линейными ФЧХ является наиболее простой, кроме того, в таких фильтрах не деформируется фазовая структура спектра обрабатываемого сигнала. Синтез же комплексных ЦФ с нелинейными ФЧХ является более сложной задачей. При этом для синтеза косинусного и синусного блоков требуется задавать их АЧХ и ФЧХ [см. (15.5) и (15.6)].

Комплексный нерекурсивный ЦФ может иметь и симметричную относительно нулевой частоты (т.е. чётную) АЧХ: $A(-\omega T)=A(\omega T)$. При этом, как следует из (15.4) — (15.6), нечётная составляющая квадрата АЧХ должна быть нулевой, т.е.

$$A^2_{\text{нчт}}(\omega T)=2A_c(\omega T)A_s(\omega T)\sin[\varphi_c(\omega T)-\varphi_s(\omega T)]=0. \qquad (15.9)$$

Условие (15.9) может быть выполнено в двух случаях: либо $A_s(\omega T)=0$, либо $\varphi_c(\omega T)=\varphi_s(\omega T)$ в диапазоне частот $\omega\in[-\pi/T,\ \pi/T]$.

В первом случае структурная схема комплексного нерекурсивного ЦФ (см. рис.4.8) не содержит перекрёстных связей и состоит из двух одинаковых каналов (косинусного и синусного) с передаточными функциями $A_c(\omega T)$ — вырожденный случай комплексного ЦФ.

Второй случай — равенство фазовых сдвигов косинусного и синусного блоков во всём диапазоне частот — может быть реализован при использовании в качестве косинусного и синусного блоков нерекурсивных ЦФ с линейными

ФЧХ одного и того же вида и одинакового порядка M [см. формулы (5.14) и (5.17)]. При этом АЧХ косинусного $A_c(\omega T)$ и синусного $A_s(\omega T)$ блоков должны быть выбраны так, чтобы выполнялось условие (15.5).

С точки зрения минимума собственных шумов квантования предпочтительнее первый случай.

Комплексные ЦФ представляют собой низкочастотные эквиваленты вещественных фильтров полосового типа, предназначенных для обработки радиосигналов на промежуточных частотах (в ПЧ-трактах).

В радиолокации типичной является задача подавления мощной узкополосной помехи, средняя частота которой находится в полосе частот полезного сигнала. Применение в ПЧ-тракте приёмного устройства каскадно включённых комплексных ЦФ полосового и режекторного типов с линейными ФЧХ позволяет решить задачу подавления помехи, не разрушая фазовую структуру полезного сигнала. При этом режекторный ЦФ должен быть адаптивным (центральная частота режекции должна изменяться в зависимости от частоты узкополосной помехи).

В системах многоканальной связи с частотным разделением каналов комплексные ЦФ могут использоваться для выделения канальных сигналов из группового. Для этого в ПЧ-тракте приёмника после комплексного ЦФ полосового типа, выделяющего групповой сигнал, следует гребёнка параллельно включённых комплексных ЦФ полосового типа, выделяющих канальные сигналы, поступающие далее на соответствующие цифровые детекторы (см. § 8.5).

15.3. Примеры синтеза одномерных скалярных комплексных стационарных нерекурсивных линейных цифровых фильтров

Рассмотрим примеры, в которых, несмотря на частный вид синтезируемых фильтров, можно усмотреть довольно общий рецепт решения задачи на втором этапе синтеза нерекурсивного комплексного ЦФ.

Пример 15.1. Спроектировать нерекурсивный комплексный цифровой фильтр для ПЧ-тракта изображения телевизионного приёмника, построенного по квазипараллельной схеме (см. пример 12.8).

АЧХ низкочастотного эквивалента получается путём сдвига АЧХ полосового фильтра (см. рис.12.10) влево на 38 МГц. Идеализированная форма требуемой АЧХ комплексного ЦФ (аппроксимируемая функция) изображена на рис.15.1. Она имеет следующие граничные частоты полос пропускания и задерживания: $f_{п1} = -5{,}75$ МГц, $f_{п2} = -1{,}25$ МГц, $f_{з1} = -6{,}25$ МГц, $f_{з2} = 1{,}25$ МГц.

Выберем частоту дискретизации $f_д = 15$ МГц и определим нормированные значения граничных частот полос пропускания и задерживания:

$$W_{п1} = f_{п1} \big/ f_д = -0{,}383; \qquad W_{п2} = f_{п2} \big/ f_д = -0{,}083;$$
$$W_{з1} = f_{з1} \big/ f_д = -0{,}417; \qquad W_{з2} = f_{з2} \big/ f_д = 0{,}083.$$

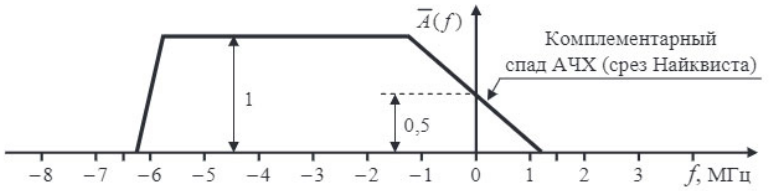


Рис.15.1. Идеализированная форма АЧХ комплексного ЦФ для ПЧ-тракта изображения телевизионного приёмника, построенного по квазипараллельной схеме

Идеализированная форма АЧХ комплексного ЦФ в нормированных частотах описывается выражением [ср. с (12.8)]

$$B(W)=\overline{A}(W)=\begin{cases}0, & -0{,}5\le W\le W_{з1};\\ (W-W_{з1})/(W_{п1}-W_{з1}), & W_{з1}<W<W_{п1};\\ 1, & W_{п1}\le W\le W_{п2};\\ (W-W_{з2})/(W_{п2}-W_{з2}), & W_{п2}<W<W_{з2};\\ 0, & W_{з2}\le W\le 0{,}5.\end{cases}$$

На рис.15.2,*а* показан квадрат идеализированной АЧХ, а на рис.15.2,*б* — его чётная (15.5) и нечётная (15.6) составляющие.

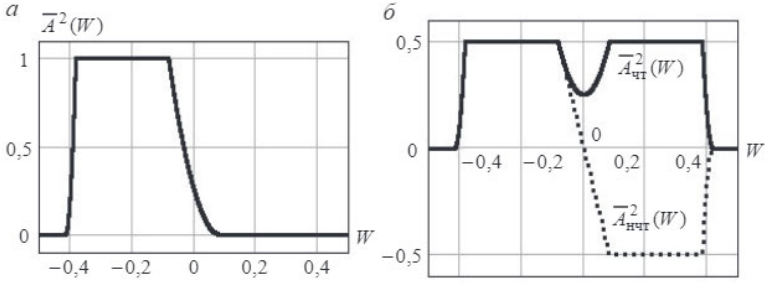


Рис.15.2. Квадрат идеализированной АЧХ комплексного ЦФ (*а*) и его чётная и нечётная составляющие (*б*)

Аппроксимируемые функции косинусного $\overline{A}_{с}(W)$ и синусного $\overline{A}_{s}(W)$ блоков представим кусочно-линейными выражениями (см. § 12.3 и рис.15.3):

$$B(W)=\overline{A}_{с}(W)=\begin{cases}0{,}5, & 0\le W\le -W_{п1};\\ 0{,}5\,(W+W_{з1})/(W_{з1}-W_{п1}), & -W_{п1}<W<-W_{з1};\\ 0, & -W_{з1}\le W\le 0{,}5;\end{cases}$$

$$B(W)=\overline{A}_{s}(W)=\begin{cases}0{,}5\ W/W_{з2}, & 0<W<W_{з2};\\ 0{,}5, & W_{з2}\le W\le -W_{п1};\\ 0{,}5\,(W+W_{з1})/(W_{з1}-W_{п1}), & -W_{п1}<W<-W_{з1};\\ 0, & -W_{з1}\le W\le 0{,}5.\end{cases}$$

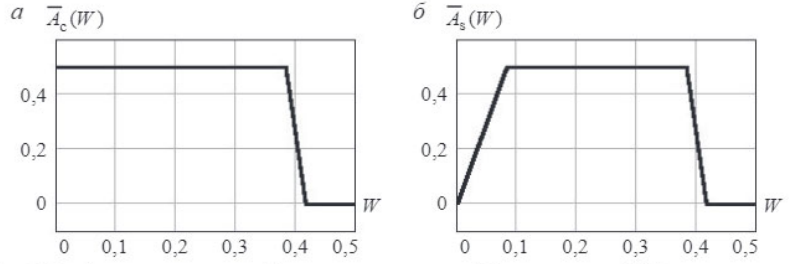


Рис.15.3. Аппроксимируемые функции косинусного (*а*) и синусного (*б*) блоков

Подстановка этих формул в (15.5) и (15.6) при $\varphi_{\text{c}}(W)-\varphi_{\text{s}}(W)=-\pi/2$ для $W>0$ и $\varphi_{\text{c}}(W)-\varphi_{\text{s}}(W)=\pi/2$ для $W<0$ даёт функции $A^2_{\text{чт}}(\omega T)$ и $A^2_{\text{нчт}}(\omega T)$, изображённые на рис. 15.2,*б*. Такая ситуация имеет место, если косинусный и синусный блоки комплексного ЦФ являются нерекурсивными вещественными ЦФ с линейными фазочастотными характеристиками: косинусный — фильтром вида 1, а синусный — фильтром вида 3 (см. § 5.2 и 5.4).

Синтез косинусного и синусного блоков нерекурсивного комплексного ЦФ проведём при среднеквадратическом критерии (12.16) методом наименьших квадратов (см. § 12.6). Порядки этих блоков принимаем одинаковыми: $M_{\text{c}}=M_{\text{s}}=M=100$.

Весовые функции для синтеза косинусного и синусного блоков выберем следующие:

$$q_{\text{c}}(W)=\begin{cases}80, & 0\le W\le -W_{\text{п1}};\\ 50, & -W_{\text{п1}}<W<-W_{\text{з1}};\\ 10, & -W_{\text{з1}}\le W\le 0{,}5;\end{cases}\qquad q_{\text{s}}(W)=\begin{cases}50, & 0<W<W_{\text{з2}};\\ 80, & W_{\text{з2}}\le W\le -W_{\text{п1}};\\ 50, & -W_{\text{п1}}<W<-W_{\text{з1}};\\ 10, & -W_{\text{з1}}\le W\le 0{,}5.\end{cases}$$

Аппроксимирующие функции $\Phi(W,\mathbf{C})$ примем линейными, т.е. вида (12.15), где базисные функции для косинусного блока $\Phi_{cn}(W)=\cos(2\pi Wn)$, а для синусного — $\Phi_{sn}(W)=\sin[2\pi W(n+1)]$ $\left(n=\overline{0,\ M/2}\right)$ [см. (5.23) и (5.39)].

Процедуры синтеза косинусного и синусного блоков одинаковые и заключаются в решении системы линейных алгебраических уравнений (12.51) [или, что то же самое, (12.54)], коэффициенты которой η_{ij}, θ_i $\left(i,\ j=\overline{0,\ M/2}\right)$ вычисляются по формулам (12.52) и (12.53) при $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=0{,}5$. Полученные при этом векторы параметров $\mathbf{C}_{\text{c}}$ и $\mathbf{C}_{\text{s}}$ [см. (12.55)], компоненты которых c_{ci} и c_{si} $\left(i=\overline{0,\ M/2}\right)$, используются для нахождения коэффициентов a_{ck} и a_{sk} $\left(k=\overline{0,\ M/2}\right)$ вещественных ЦФ [см. (5.24) с учётом (5.14) и (5.40) с учётом (5.17)]:

$$h_{\text{c}k}=\begin{cases}c_{\text{c}0}, & k=M/2;\\ c_{\text{c}(M/2-k)}/2, & k=\overline{0,\ M/2-1};\end{cases}$$

$$h_{\text{s}k}=c_{\text{s}(M/2-1-k)}/2,\quad k=\overline{0,\ M/2-1};$$

$$a_{ck} = \begin{cases} h_{ck}, & k = \overline{0,\ M/2}; \\ h_{c(M-k)}, & k = \overline{M/2+1,\ M}; \end{cases} \qquad a_{sk} = \begin{cases} h_{sk}, & k = \overline{0,\ M/2-1}; \\ 0, & k = M/2; \\ -h_{s(M-k)}, & k = \overline{M/2+1,\ M}. \end{cases}$$

Рассчитанные коэффициенты передаточных функций вещественных косинусного a_{ck} и синусного a_{sk} $k = \overline{0,\ M}$ блоков нерекурсивного комплексного ЦФ следующие:

$$a_{c0} = -2{,}401 \cdot 10^{-4};\quad a_{c1} = 4{,}739 \cdot 10^{-4};\quad a_{c2} = -6{,}933 \cdot 10^{-4};\quad a_{c3} = 6{,}507 \cdot 10^{-4};$$
$$a_{c4} = -3{,}549 \cdot 10^{-4};\quad a_{c5} = -1{,}024 \cdot 10^{-4};\quad a_{c6} = 5{,}634 \cdot 10^{-4};\quad a_{c7} = -8{,}457 \cdot 10^{-4};$$
$$a_{c8} = 8{,}204 \cdot 10^{-4};\quad a_{c9} = -4{,}78 \cdot 10^{-4};\quad a_{c10} = -3{,}744 \cdot 10^{-5};\quad a_{c11} = 5{,}307 \cdot 10^{-4};$$
$$a_{c12} = -8{,}046 \cdot 10^{-4};\quad a_{c13} = 7{,}564 \cdot 10^{-4};\quad a_{c14} = -4{,}329 \cdot 10^{-4};\quad a_{c15} = 7{,}267 \cdot 10^{-6};$$
$$a_{c16} = 3{,}372 \cdot 10^{-4};\quad a_{c17} = -4{,}481 \cdot 10^{-4};\quad a_{c18} = 3{,}548 \cdot 10^{-4};\quad a_{c19} = -1{,}544 \cdot 10^{-4};$$
$$a_{c20} = 4{,}567 \cdot 10^{-5};\quad a_{c21} = -1{,}402 \cdot 10^{-4};\quad a_{c22} = 3{,}864 \cdot 10^{-4};\quad a_{c23} = -5{,}867 \cdot 10^{-4};$$
$$a_{c24} = 4{,}92 \cdot 10^{-4};\quad a_{c25} = 5{,}529 \cdot 10^{-5};\quad a_{c26} = -9{,}653 \cdot 10^{-4};\quad a_{c27} = 1{,}869 \cdot 10^{-3};$$
$$a_{c28} = -2{,}233 \cdot 10^{-3};\quad a_{c29} = 1{,}621 \cdot 10^{-3};\quad a_{c30} = 3{,}022 \cdot 10^{-5};\quad a_{c31} = -2{,}307 \cdot 10^{-3};$$
$$a_{c32} = 4{,}28 \cdot 10^{-3};\quad a_{c33} = -4{,}909 \cdot 10^{-3};\quad a_{c34} = 3{,}466 \cdot 10^{-3};\quad a_{c35} = 3{,}175 \cdot 10^{-5};$$
$$a_{c36} = -4{,}588 \cdot 10^{-3};\quad a_{c37} = 8{,}426 \cdot 10^{-3};\quad a_{c38} = -9{,}596 \cdot 10^{-3};\quad a_{c39} = 6{,}786 \cdot 10^{-3};$$
$$a_{c40} = -4{,}488 \cdot 10^{-6};\quad a_{c41} = -8{,}932 \cdot 10^{-3};\quad a_{c42} = 0{,}017;\quad a_{c43} = -0{,}02;$$
$$a_{c44} = 0{,}015;\quad a_{c45} = -1{,}878 \cdot 10^{-5};\quad a_{c46} = -0{,}023;\quad a_{c47} = 0{,}05;\quad a_{c48} = -0{,}075;$$
$$a_{c49} = 0{,}093;\quad a_{c50} = 0{,}4;\quad a_{ck} = a_{c(100-k)}\ \left(k = \overline{51,\ 100}\right);$$

$$a_{s0} = 4{,}598 \cdot 10^{-4};\quad a_{s1} = -2{,}311 \cdot 10^{-4};\quad a_{s2} = -4{,}495 \cdot 10^{-6};\quad a_{s3} = 2{,}125 \cdot 10^{-4};$$
$$a_{s4} = -7{,}876 \cdot 10^{-4};\quad a_{s5} = 5{,}997 \cdot 10^{-4};\quad a_{s6} = -6{,}936 \cdot 10^{-4};\quad a_{s7} = 6{,}335 \cdot 10^{-5};$$
$$a_{s8} = 4{,}094 \cdot 10^{-4};\quad a_{s9} = -6{,}612 \cdot 10^{-4};\quad a_{s10} = 1{,}078 \cdot 10^{-3};\quad a_{s11} = -4{,}81 \cdot 10^{-4};$$
$$a_{s12} = 4{,}108 \cdot 10^{-4};\quad a_{s13} = 3{,}959 \cdot 10^{-4};\quad a_{s14} = -6{,}499 \cdot 10^{-4};\quad a_{s15} = 5{,}898 \cdot 10^{-4};$$
$$a_{s16} = -7{,}715 \cdot 10^{-4};\quad a_{s17} = -6{,}344 \cdot 10^{-5};\quad a_{s18} = -2{,}704 \cdot 10^{-4};$$
$$a_{s19} = -2{,}615 \cdot 10^{-4};\quad a_{s20} = 1{,}087 \cdot 10^{-6};\quad a_{s21} = 3{,}126 \cdot 10^{-4};\quad a_{s22} = 2{,}526 \cdot 10^{-4};$$
$$a_{s23} = 1{,}848 \cdot 10^{-4};\quad a_{s24} = 1{,}155 \cdot 10^{-3};\quad a_{s25} = -9{,}711 \cdot 10^{-4};\quad a_{s26} = 1{,}222 \cdot 10^{-3};$$
$$a_{s27} = -8{,}31 \cdot 10^{-4};\quad a_{s28} = -1{,}321 \cdot 10^{-3};\quad a_{s29} = 1{,}599 \cdot 10^{-3};\quad a_{s30} = -3{,}998 \cdot 10^{-3};$$
$$a_{s31} = 2{,}682 \cdot 10^{-3};\quad a_{s32} = -1{,}359 \cdot 10^{-3};\quad a_{s33} = -1{,}117 \cdot 10^{-3};\quad a_{s34} = 5{,}866 \cdot 10^{-3};$$
$$a_{s35} = -5{,}489 \cdot 10^{-3};\quad a_{s36} = 7{,}623 \cdot 10^{-3};\quad a_{s37} = -1{,}84 \cdot 10^{-3};\quad a_{s38} = -3{,}111 \cdot 10^{-3};$$
$$a_{s39} = 8{,}047 \cdot 10^{-3};\quad a_{s40} = -0{,}016;\quad a_{s41} = 8{,}556 \cdot 10^{-3};\quad a_{s42} = -9{,}583 \cdot 10^{-3};$$
$$a_{s43} = -9{,}521 \cdot 10^{-3};\quad a_{s44} = 0{,}02;\quad a_{s45} = -0{,}024;\quad a_{s46} = 0{,}048;\quad a_{s47} = 0{,}018;$$
$$a_{s48} = 0{,}041;\quad a_{s49} = 0{,}28;\quad a_{s50} = 0;\quad a_{sk} = -a_{s(100-k)}\ \left(k = \overline{51,\ 100}\right).$$

На рис.15.4 изображены рассчитанные по формуле (3.50) АЧХ косинусного и синусного блоков проектируемого нерекурсивного комплексного ЦФ (ср. с рис.15.3).

Косинусный и синусный блоки имеют линейные фазочастотные характеристики [см. (5.23) и (5.39)]. В каждом из блоков групповая задержка сигнала $\tau = (M/2)T = M/(2f_д) = 3{,}3 \cdot 10^{-6}$ с.

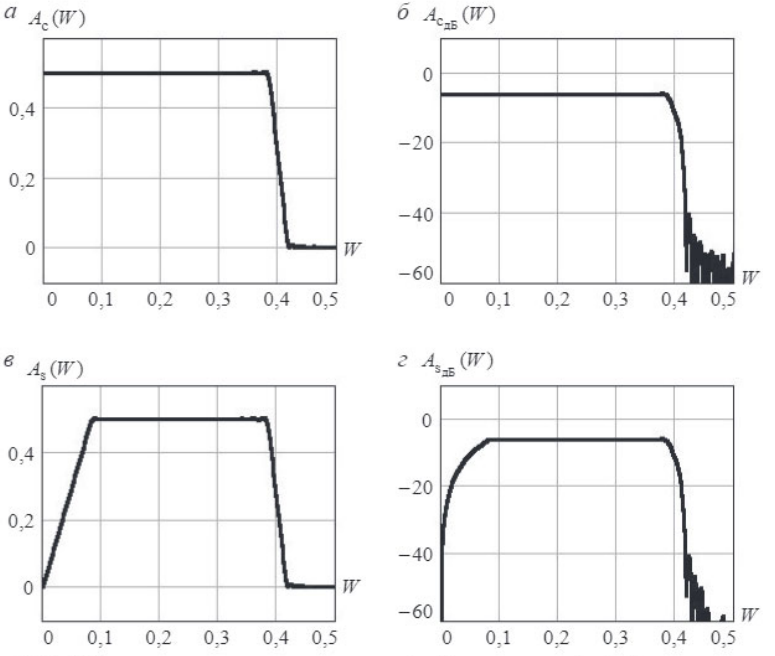


Рис.15.4. АЧХ синтезированных косинусного (*а*, *б*) и синусного (*в*, *г*) блоков нерекурсивного комплексного ЦФ в линейном (*а*, *в*) и логарифмическом (*б*, *г*) масштабах

Коэффициенты передаточной функции (4.40) нерекурсивного комплексного ЦФ формируются из найденных коэффициентов: $a_k = a_{ck} + ja_{sk}$ $\left(k = \overline{0,100}\right)$.

Амплитудно-частотная характеристика спроектированного комплексного нерекурсивного ЦФ для ПЧ-тракта изображения телевизионного приёмника, построенная по формуле (4.45), приведена на рис.15.5 (ср. с рис.15.1).

Минимальное затухание в левой полосе задерживания превышает 32,7 дБ, а в правой — 45,4 дБ. Максимальное затухание в полосе пропускания составляет 0,25 дБ. Правый скат частотной характеристики (срез Найквиста) обеспечивает подавление сигнала на промежуточной частоте изображения 6 дБ, его протяжённость по оси частот порядка 2,5 МГц, а левый скат является крутым (протяжённость по оси частот порядка 0,5 МГц). Таким образом, все требования технического задания на проектируемый ЦФ выполнены.

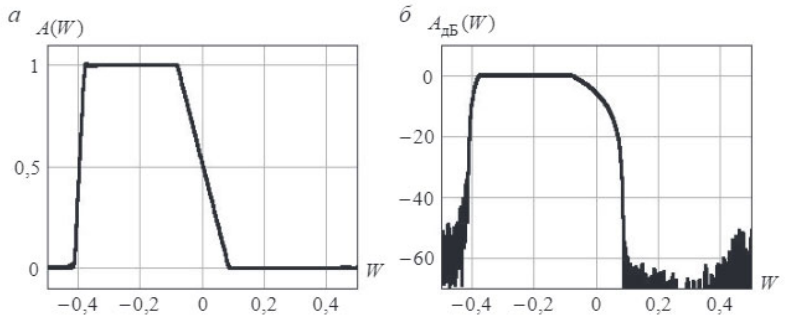


Рис.15.5. АЧХ спроектированного комплексного нерекурсивного ЦФ для ПЧ-тракта изображения телевизионного приёмника: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Пример 15.2. Спроектировать нерекурсивный комплексный цифровой фильтр, идеализированная амплитудно-частотная характеристика которого изображена на рис.15.6, где $f_{п1} = -5{,}5$ МГц, $f_{п2} = 1{,}25$ МГц, $f_{з1} = -6{,}25$ МГц, $f_{з2} = 2{,}25$ МГц.

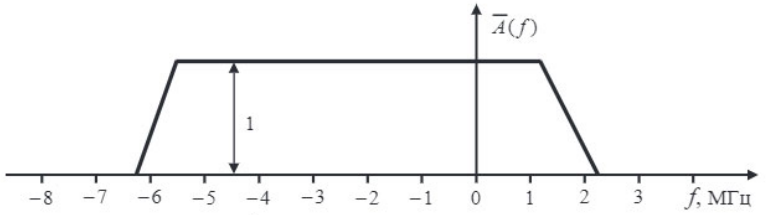


Рис.15.6. Идеализированная форма АЧХ комплексного ЦФ в примере 15.2

Для расчётов воспользуемся системой компьютерной математики Mathcad.

Выберем частоту дискретизации $f_д = 15$ МГц и определим нормированные значения граничных частот полос пропускания и задерживания:

$$W_{п1} = f_{п1} \big/ f_д = -0{,}367; \qquad W_{п2} = f_{п2} \big/ f_д = 0{,}083;$$

$$W_{з1} = f_{з1} \big/ f_д = -0{,}417; \qquad W_{з2} = f_{з2} \big/ f_д = 0{,}15.$$

Идеализированная форма АЧХ комплексного ЦФ в нормированных частотах описывается выражением [ср. с (12.8)]

$$B(W) = \overline{A}(W) = \begin{cases} 0, & -0{,}5 \le W \le W_{з1}; \\ (W - W_{з1}) \big/ (W_{п1} - W_{з1}), & W_{з1} < W < W_{п1}; \\ 1, & W_{п1} \le W \le W_{п2}; \\ (W - W_{з2}) \big/ (W_{п2} - W_{з2}), & W_{п2} < W < W_{з2}; \\ 0, & W_{з2} \le W \le 0{,}5. \end{cases}$$

На рис.15.7,*а* показан квадрат идеализированной АЧХ, а на рис.15.7,*б* — его чётная (15.5) и нечётная (15.6) составляющие.

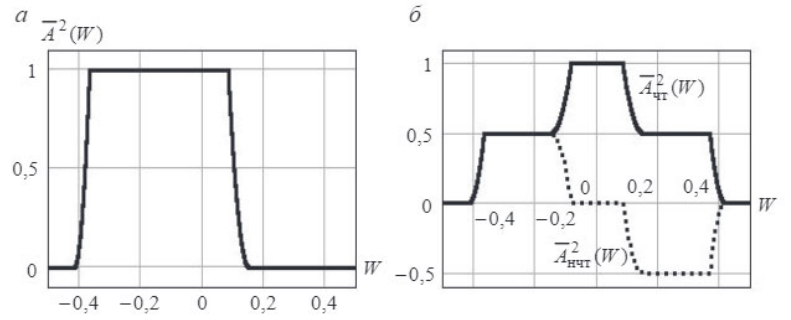


Рис.15.7. Квадрат идеализированной АЧХ комплексного ЦФ (*а*) и его чётная и нечётная составляющие (*б*)

Учитывая вид чётной $\overline{A}^2_{чт}(W)$ и нечётной $\overline{A}^2_{нчт}(W)$ составляющих квадрата амплитудно-частотной характеристики $\overline{A}^2(W)$ синтезируемого ЦФ, аппроксимируемые функции косинусного $\overline{A}_c(W)$ и синусного $\overline{A}_s(W)$ блоков представим кусочно-линейными выражениями (см. § 12.3 и рис.15.8):

$$B(W)=\overline{A}_c(W)=\begin{cases}1, & 0\le W\le W_{п2};\\ 1-0{,}5\,(W-W_{п2})/(W_{з2}-W_{п2}), & W_{п2}<W<W_{з2};\\ 0{,}5, & W_{з2}\le W\le -W_{п1};\\ 0{,}5\,(W+W_{з1})/(W_{з1}-W_{п1}), & -W_{п1}<W<-W_{з1};\\ 0, & -W_{з1}\le W\le 0{,}5;\end{cases}$$

$$B(W)=\overline{A}_s(W)=\begin{cases}0, & 0\le W\le W_{п2};\\ 0{,}5\,(W-W_{п2})/(W_{з2}-W_{п2}), & W_{п2}<W<W_{з2};\\ 0{,}5, & W_{з2}\le W\le -W_{п1};\\ 0{,}5\,(W+W_{з1})/(W_{з1}-W_{п1}), & -W_{п1}<W<-W_{з1};\\ 0, & -W_{з1}\le W\le 0{,}5.\end{cases}$$

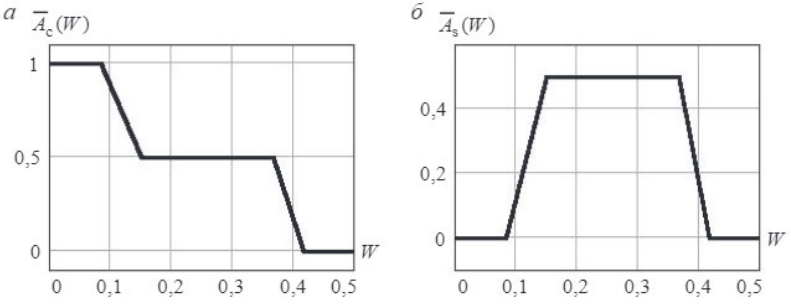


Рис.15.8. Аппроксимируемые функции косинусного (*а*) и синусного (*б*) блоков

Подстановка этих формул в (15.5) и (15.6) при $\varphi_{\text{с}}(W)-\varphi_{\text{s}}(W)=-\pi/2$ для $W>0$ и $\varphi_{\text{с}}(W)-\varphi_{\text{s}}(W)=\pi/2$ для $W<0$ даёт функции $A^2_{\text{чт}}(\omega T)$ и $A^2_{\text{нчт}}(\omega T)$, изображённые на рис. 15.7,*б*. Такая ситуация имеет место, если косинусный и синусный блоки комплексного ЦФ являются нерекурсивными вещественными ЦФ с линейными фазочастотными характеристиками: косинусный — фильтром вида 1, а синусный — фильтром вида 3 (см. § 5.2 и 5.4).

Синтез косинусного и синусного блоков нерекурсивного комплексного ЦФ проведём при среднеквадратическом критерии (12.16) методом наименьших квадратов (см. § 12.6). Порядки этих блоков принимаем одинаковыми: $M_{\text{с}}=M_{\text{s}}=M=100$.

Весовые функции для синтеза косинусного и синусного блоков выберем следующие:

$$q_{\text{с}}(W)=\begin{cases}80, & 0\le W\le -W_{\text{п1}};\\ 50, & -W_{\text{п1}}<W<-W_{\text{з1}};\\ 10, & -W_{\text{з1}}\le W\le 0{,}5;\end{cases}\qquad q_{\text{s}}(W)=\begin{cases}30, & 0\le W\le W_{\text{п2}};\\ 50, & W_{\text{п2}}<W<W_{\text{з2}};\\ 80, & W_{\text{з2}}\le W\le -W_{\text{п1}};\\ 50, & -W_{\text{п1}}<W<-W_{\text{з1}};\\ 10, & -W_{\text{з1}}\le W\le 0{,}5.\end{cases}$$

Аппроксимирующие функции $\Phi(W,\mathbf{C})$ примем линейными, т.е. вида (12.15), где базисные функции для косинусного блока $\Phi_{\text{с}n}(W)=\cos(2\pi Wn)$, а для синусного — $\Phi_{\text{s}n}(W)=\sin[2\pi W(n+1)]$ $\left(n=\overline{0,\ M/2}\right)$ [см. (5.23) и (5.39)].

Процедуры синтеза косинусного и синусного блоков одинаковые и заключаются в решении системы линейных алгебраических уравнений (12.51) [или, что то же самое, (12.54)], коэффициенты которой η_{ij}, θ_i $\left(i,\ j=\overline{0,\ M/2}\right)$ вычисляются по формулам (12.52) и (12.53) при $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=0{,}5$. Полученные при этом векторы параметров $\mathbf{C}_{\text{с}}$ и $\mathbf{C}_{\text{s}}$ [см. (12.55)], компоненты которых $c_{\text{с}i}$ и $c_{\text{s}i}$ $\left(i=\overline{0,\ M/2}\right)$, используются для нахождения коэффициентов $a_{\text{с}k}$ и $a_{\text{s}k}$ $\left(k=\overline{0,\ M/2}\right)$ вещественных ЦФ [см. (5.24) с учётом (5.14) и (5.40) с учётом (5.17)]:

$$h_{\text{с}k}=\begin{cases}c_{\text{с}0}, & k=M/2;\\ c_{\text{с}(M/2-k)}/2, & k=\overline{0,\ M/2-1};\end{cases}$$

$$h_{\text{s}k}=c_{\text{s}(M/2-1-k)}/2,\quad k=\overline{0,\ M/2-1};$$

$$a_{\text{с}k}=\begin{cases}h_{\text{с}k}, & k=\overline{0,\ M/2};\\ h_{\text{с}(M-k)}, & k=\overline{M/2+1,\ M};\end{cases}\qquad a_{\text{s}k}=\begin{cases}h_{\text{s}k}, & k=\overline{0,\ M/2-1};\\ 0, & k=M/2;\\ -h_{\text{s}(M-k)}, & k=\overline{M/2+1,\ M}.\end{cases}$$

Рассчитанные коэффициенты передаточных функций вещественных косинусного $a_{\text{с}k}$ и синусного $a_{\text{s}k}$ $k=\overline{0,\ M}$ блоков нерекурсивного комплексного ЦФ следующие:

$$a_{\text{с}0}=-1{,}008\cdot10^{-4};\quad a_{\text{с}1}=6{,}604\cdot10^{-4};\quad a_{\text{с}2}=-2{,}718\cdot10^{-4};\quad a_{\text{с}3}=1{,}594\cdot10^{-4};$$
$$a_{\text{с}4}=5{,}253\cdot10^{-5};\quad a_{\text{с}5}=-3{,}228\cdot10^{-4};\quad a_{\text{с}6}=4{,}166\cdot10^{-4};\quad a_{\text{с}7}=-2{,}372\cdot10^{-4};$$

$$a_{c8}=-5{,}527\cdot10^{-5};\quad a_{c9}=-3{,}108\cdot10^{-4};\quad a_{c10}=-3{,}682\cdot10^{-4};\quad a_{c11}=-2{,}172\cdot10^{-4};$$
$$a_{c12}=3{,}116\cdot10^{-4};\quad a_{c13}=5{,}408\cdot10^{-4};\quad a_{c14}=2{,}238\cdot10^{-4};\quad a_{c15}=8{,}422\cdot10^{-4};$$
$$a_{c16}=-7{,}247\cdot10^{-4};\quad a_{c17}=-1{,}609\cdot10^{-6};\quad a_{c18}=-1{,}19\cdot10^{-5};\quad a_{c19}=-9{,}992\cdot10^{-4};$$
$$a_{c20}=1{,}186\cdot10^{-3};\quad a_{c21}=-1{,}084\cdot10^{-3};\quad a_{c22}=-1{,}007\cdot10^{-4};\quad a_{c23}=5{,}721\cdot10^{-5};$$
$$a_{c24}=-1{,}282\cdot10^{-3};\quad a_{c25}=1{,}637\cdot10^{-3};\quad a_{c26}=5{,}891\cdot10^{-4};\quad a_{c27}=1{,}249\cdot10^{-3};$$
$$a_{c28}=1{,}104\cdot10^{-3};\quad a_{c29}=-8{,}964\cdot10^{-4};\quad a_{c30}=-1{,}39\cdot10^{-3};\quad a_{c31}=-1{,}414\cdot10^{-3};$$
$$a_{c32}=-4{,}787\cdot10^{-4};\quad a_{c33}=-1{,}231\cdot10^{-3};\quad a_{c34}=2{,}769\cdot10^{-3};\quad a_{c35}=-2{,}228\cdot10^{-3};$$
$$a_{c36}=-2{,}052\cdot10^{-4};\quad a_{c37}=2{,}777\cdot10^{-3};\quad a_{c38}=-4{,}581\cdot10^{-3};\quad a_{c39}=0{,}012;$$
$$a_{c40}=6{,}225\cdot10^{-4};\quad a_{c41}=8{,}274\cdot10^{-4};\quad a_{c42}=6{,}392\cdot10^{-3};\quad a_{c43}=-0{,}033;$$
$$a_{c44}=-6{,}487\cdot10^{-4};\quad a_{c45}=-0{,}021;\quad a_{c46}=-7{,}816\cdot10^{-3};\quad a_{c47}=0{,}086;$$
$$a_{c48}=2{,}69\cdot10^{-4};\quad a_{c49}=0{,}206;\quad a_{c50}=0{,}508;\quad a_{ck}=a_{c(100-k)}\ \left(k=\overline{51,\ 100}\right);$$

$$a_{s0}=8{,}147\cdot10^{-5};\quad a_{s1}=2{,}753\cdot10^{-4};\quad a_{s2}=-1{,}774\cdot10^{-4};\quad a_{s3}=6{,}884\cdot10^{-4};$$
$$a_{s4}=-4{,}496\cdot10^{-4};\quad a_{s5}=2{,}967\cdot10^{-4};\quad a_{s6}=3{,}1\cdot10^{-5};\quad a_{s7}=-7{,}636\cdot10^{-7};$$
$$a_{s8}=3{,}968\cdot10^{-4};\quad a_{s9}=-8{,}964\cdot10^{-5};\quad a_{s10}=-2{,}091\cdot10^{-4};\quad a_{s11}=-5{,}015\cdot10^{-4};$$
$$a_{s12}=-3{,}867\cdot10^{-4};\quad a_{s13}=-5{,}082\cdot10^{-4};\quad a_{s14}=4{,}868\cdot10^{-4};\quad a_{s15}=3{,}809\cdot10^{-4};$$
$$a_{s16}=1{,}319\cdot10^{-4};\quad a_{s17}=9{,}742\cdot10^{-4};\quad a_{s18}=-9{,}167\cdot10^{-4};\quad a_{s19}=3{,}834\cdot10^{-4};$$
$$a_{s20}=1{,}529\cdot10^{-4};\quad a_{s21}=-7{,}602\cdot10^{-4};\quad a_{s22}=1{,}369\cdot10^{-3};\quad a_{s23}=-1{,}578\cdot10^{-3};$$
$$a_{s24}=-2{,}789\cdot10^{-4};\quad a_{s25}=-6{,}235\cdot10^{-4};\quad a_{s26}=-1{,}25\cdot10^{-3};\quad a_{s27}=1{,}52\cdot10^{-3};$$
$$a_{s28}=8{,}711\cdot10^{-4};\quad a_{s29}=1{,}694\cdot10^{-3};\quad a_{s30}=7{,}217\cdot10^{-4};\quad a_{s31}=1{,}245\cdot10^{-4};$$
$$a_{s32}=-2{,}062\cdot10^{-3};\quad a_{s33}=-2{,}09\cdot10^{-4};\quad a_{s34}=-1{,}532\cdot10^{-4};\quad a_{s35}=-2{,}268\cdot10^{-3};$$
$$a_{s36}=3{,}642\cdot10^{-3};\quad a_{s37}=-6{,}312\cdot10^{-3};\quad a_{s38}=-4{,}561\cdot10^{-4};\quad a_{s39}=2{,}027\cdot10^{-3};$$
$$a_{s40}=-5{,}526\cdot10^{-3};\quad a_{s41}=0{,}021;\quad a_{s42}=6{,}634\cdot10^{-4};\quad a_{s43}=7{,}259\cdot10^{-3};$$
$$a_{s44}=7{,}173\cdot10^{-3};\quad a_{s45}=-0{,}05;\quad a_{s46}=-4{,}932\cdot10^{-4};\quad a_{s47}=-0{,}052;$$
$$a_{s48}=-8{,}166\cdot10^{-3};\quad a_{s49}=0{,}241;\quad a_{s50}=0;\quad a_{sk}=-a_{s(100-k)}\ \left(k=\overline{51,\ 100}\right).$$

На рис.15.9 изображены рассчитанные по формуле (3.50) АЧХ косинусного и синусного блоков проектируемого нерекурсивного комплексного ЦФ (ср. с рис.15.8).

Косинусный и синусный блоки имеют линейные фазочастотные характеристики [см. (5.23) и (5.39)]. В каждом из блоков групповая задержка сигнала $\tau=(M/2)T=$ $=M/\left(2f_{д}\right)=3{,}3\cdot10^{-6}$ с.

Коэффициенты передаточной функции (4.40) нерекурсивного комплексного ЦФ формируются из найденных коэффициентов: $a_k=a_{ck}+ja_{sk}\ \left(k=\overline{0,100}\right)$.

Амплитудно-частотная характеристика спроектированного комплексного нерекурсивного цифрового фильтра полосового типа, построенная по формуле (4.45), приведена на рис.15.10 (ср. с рис.15.6).

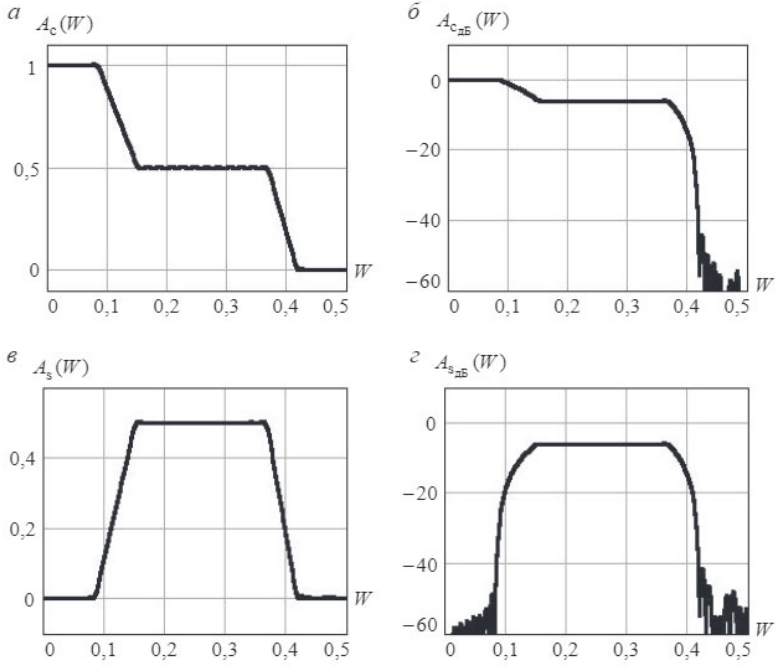


Рис.15.9. АЧХ синтезированных косинусного (*а*, *б*) и синусного (*в*, *г*) блоков нерекурсивного комплексного ЦФ в линейном (*а*, *в*) и логарифмическом (*б*, *г*) масштабах

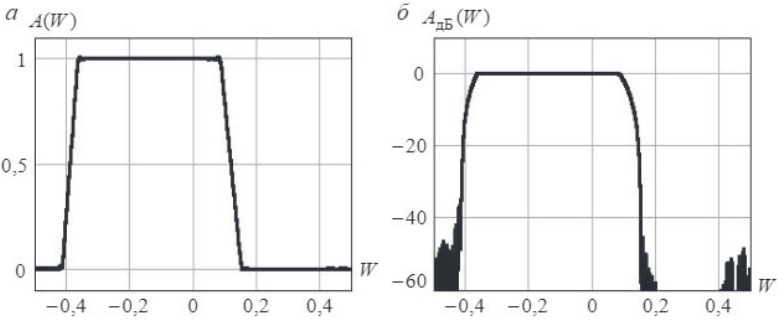


Рис.15.10. АЧХ спроектированного комплексного нерекурсивного ЦФ: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Минимальное затухание (на граничной частоте) в левой полосе задерживания превышает 35,3 дБ, а в правой — 36,2 дБ. Максимальное затухание в полосе пропускания составляет 0,17 дБ.

Пример 15.3. Спроектировать нерекурсивный комплексный цифровой фильтр полосового типа, идеализированная амплитудно-частотная характеристика которого изображена на рис.15.11, где $f_{п1} = -3{,}5$ МГц, $f_{п2} = -2{,}5$ МГц, $f_{з1} = -4$ МГц, $f_{з2} = -2$ МГц.

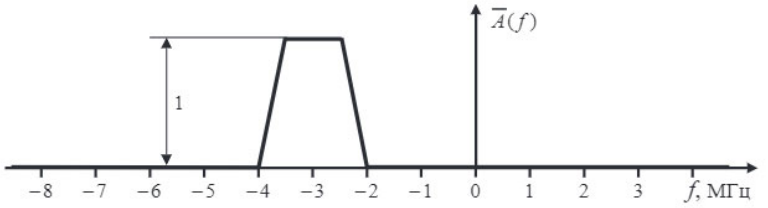


Рис.15.11. Идеализированная форма АЧХ комплексного ЦФ в примере 15.3

Выберем частоту дискретизации $f_д = 15$ МГц и определим нормированные значения граничных частот полос пропускания и задерживания:

$$W_{п1} = f_{п1} \big/ f_д = -0{,}233; \qquad W_{п2} = f_{п2} \big/ f_д = -0{,}167;$$

$$W_{з1} = f_{з1} \big/ f_д = -0{,}267; \qquad W_{з2} = f_{з2} \big/ f_д = -0{,}133.$$

Идеализированная форма АЧХ комплексного ЦФ в нормированных частотах описывается выражением [ср. с (12.8)]

$$B(W) = \overline{A}(W) = \begin{cases} 0, & -0{,}5 \le W \le W_{з1}; \\ (W - W_{з1}) \big/ (W_{п1} - W_{з1}), & W_{з1} < W < W_{п1}; \\ 1, & W_{п1} \le W \le W_{п2}; \\ (W - W_{з2}) \big/ (W_{п2} - W_{з2}), & W_{п2} < W < W_{з2}; \\ 0, & W_{з2} \le W \le 0{,}5. \end{cases}$$

На рис.15.12,*а* показан квадрат идеализированной АЧХ (аппроксимируемой функции), а на рис.15.12,*б* — его чётная (15.5) и нечётная (15.6) составляющие.

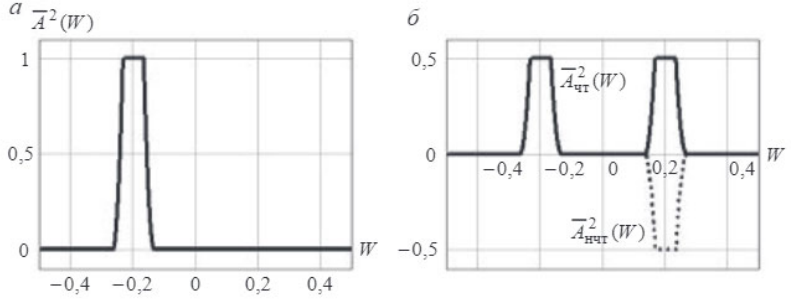


Рис.15.12. Квадрат идеализированной АЧХ комплексного ЦФ (*а*) и его чётная и нечётная составляющие (*б*)

Учитывая вид чётной $\overline{A}^2_{чт}(W)$ и нечётной $\overline{A}^2_{нчт}(W)$ составляющих квадрата амплитудно-частотной характеристики $\overline{A}^2(W)$ синтезируемого ЦФ, аппроксимируемые

функции косинусного $\overline{A}_{\text{с}}(W)$ и синусного $\overline{A}_{\text{s}}(W)$ блоков представим кусочно-линейными выражениями (см. § 12.3):

$$B(W)=\overline{A}_{\text{с}}(W)=\overline{A}_{\text{s}}(W)=\begin{cases}0, & 0\le W\le -W_{\text{з}2};\\ 0{,}5\,(W+W_{\text{з}2})/(W_{\text{з}2}-W_{\text{п}2}), & -W_{\text{з}2}<W<-W_{\text{п}2};\\ 0{,}5, & -W_{\text{п}2}\le W\le -W_{\text{п}1};\\ 0{,}5\,(W+W_{\text{з}1})/(W_{\text{з}1}-W_{\text{п}1}), & -W_{\text{п}1}<W<-W_{\text{з}1};\\ 0, & -W_{\text{з}1}\le W\le 0{,}5.\end{cases}$$

Графики аппроксимируемых функций косинусного и синусного блоков комплексного ЦФ приведены на рис.15.13 (в данном примере они одинаковые).

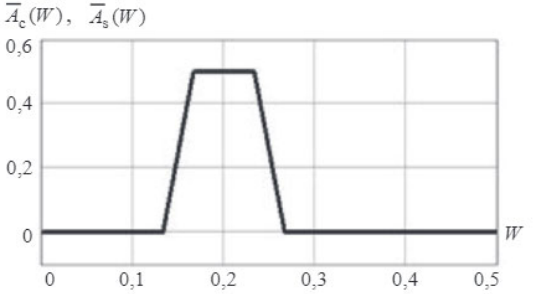


Рис.15.13. Аппроксимируемые функции косинусного и синусного блоков ЦФ

Подстановка этих формул в (15.5) и (15.6) при $\varphi_{\text{с}}(W)-\varphi_{\text{s}}(W)=-\pi/2$ для $W>0$ и $\varphi_{\text{с}}(W)-\varphi_{\text{s}}(W)=\pi/2$ для $W<0$ даёт функции $A^2_{\text{чт}}(\omega T)$ и $A^2_{\text{нчт}}(\omega T)$, изображённые на рис. 15.12,*б*. Такая ситуация имеет место, если косинусный и синусный блоки комплексного ЦФ являются нерекурсивными вещественными ЦФ с линейными фазочастотными характеристиками: косинусный — фильтром вида 1, а синусный — фильтром вида 3 (см. § 5.2 и 5.4).

Синтез косинусного и синусного блоков нерекурсивного комплексного ЦФ проведём при среднеквадратическом критерии (12.16) методом наименьших квадратов (см. § 12.6). Порядки этих блоков принимаем одинаковыми: $M_{\text{с}}=M_{\text{s}}=M=100$.

Весовые функции для синтеза косинусного и синусного блоков комплексного ЦФ выберем одинаковыми:

$$q_{\text{с}}(W)=q_{\text{s}}(W)=\begin{cases}30, & 0\le W\le -W_{\text{з}2};\\ 50, & -W_{\text{з}2}<W<-W_{\text{п}2};\\ 100, & -W_{\text{п}2}\le W\le -W_{\text{п}1};\\ 50, & -W_{\text{п}1}<W<-W_{\text{з}1};\\ 30, & -W_{\text{з}1}\le W\le 0{,}5.\end{cases}$$

Аппроксимирующие функции $\Phi(W,\mathbf{C})$ примем линейными, т.е. вида (12.15), где базисные функции для косинусного блока $\Phi_{\text{с}n}(W)=\cos(2\pi Wn)$, а для синусного — $\Phi_{\text{s}n}(W)=\sin[2\pi W(n+1)]$ $\left(n=\overline{0,\ M/2}\right)$ [см. (5.23) и (5.39)].

Процедуры синтеза косинусного и синусного блоков одинаковые и заключаются в решении системы линейных алгебраических уравнений (12.51) [или, что то же самое, (12.54)], коэффициенты которой η_{ij}, θ_i $\left(i,\ j=\overline{0,\ M/2}\right)$ вычисляются по формулам (12.52) и (12.53) при $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=0{,}5$. Полученные при этом векторы параметров $\mathbf{C}_\mathrm{c}$ и $\mathbf{C}_\mathrm{s}$ [см. (12.55)], компоненты которых $c_{\mathrm{c}\,i}$ и $c_{\mathrm{s}\,i}$ $\left(i=\overline{0,\ M/2}\right)$, используются для нахождения коэффициентов $a_{\mathrm{c}k}$ и $a_{\mathrm{s}k}$ $\left(k=\overline{0,\ M/2}\right)$ вещественных ЦФ [см. (5.24) с учётом (5.14) и (5.40) с учётом (5.17)]:

$$h_{\mathrm{c}k}=\begin{cases} c_{\mathrm{c}0}, & k=M/2; \\ c_{\mathrm{c}(M/2-k)}/2, & k=\overline{0,\ M/2-1}; \end{cases}$$

$$h_{\mathrm{s}k}=c_{\mathrm{s}(M/2-1-k)}/2,\quad k=\overline{0,\ M/2-1};$$

$$a_{\mathrm{c}k}=\begin{cases} h_{\mathrm{c}k}, & k=\overline{0,\ M/2}; \\ h_{\mathrm{c}(M-k)}, & k=\overline{M/2+1,\ M}; \end{cases}\qquad a_{\mathrm{s}k}=\begin{cases} h_{\mathrm{s}k}, & k=\overline{0,\ M/2-1}; \\ 0, & k=M/2; \\ -h_{\mathrm{s}(M-k)}, & k=\overline{M/2+1,\ M}. \end{cases}$$

Рассчитанные коэффициенты передаточных функций вещественных косинусного $a_{\mathrm{c}k}$ и синусного $a_{\mathrm{s}k}$ $k=\overline{0,\ M}$ блоков нерекурсивного комплексного ЦФ следующие:

$$a_{\mathrm{c}0}=3{,}744\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}1}=-3{,}782\cdot10^{-5};\quad a_{\mathrm{c}2}=-4{,}406\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}3}=8{,}096\cdot10^{-4};$$
$$a_{\mathrm{c}4}=-4{,}192\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}5}=-1{,}513\cdot10^{-3};\quad a_{\mathrm{c}6}=-4{,}836\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}7}=1{,}085\cdot10^{-3};$$
$$a_{\mathrm{c}8}=8{,}629\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}9}=-1{,}735\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}10}=8{,}058\cdot10^{-5};\quad a_{\mathrm{c}11}=1{,}323\cdot10^{-4};$$
$$a_{\mathrm{c}12}=-6{,}985\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}13}=-9{,}471\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}14}=3{,}932\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}15}=1{,}241\cdot10^{-3};$$
$$a_{\mathrm{c}16}=2{,}9\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}17}=-5{,}391\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}18}=-3{,}029\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}19}=3{,}724\cdot10^{-6};$$
$$a_{\mathrm{c}20}=5{,}369\cdot10^{-6};\quad a_{\mathrm{c}21}=7{,}258\cdot10^{-5};\quad a_{\mathrm{c}22}=-3{,}655\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}23}=-7{,}978\cdot10^{-4};$$
$$a_{\mathrm{c}24}=5{,}436\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}25}=2{,}429\cdot10^{-3};\quad a_{\mathrm{c}26}=9{,}1\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}27}=-2{,}537\cdot10^{-3};$$
$$a_{\mathrm{c}28}=-2{,}255\cdot10^{-3};\quad a_{\mathrm{c}29}=5{,}677\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}30}=2{,}384\cdot10^{-5};\quad a_{\mathrm{c}31}=-7{,}225\cdot10^{-4};$$
$$a_{\mathrm{c}32}=4{,}098\cdot10^{-3};\quad a_{\mathrm{c}33}=6{,}739\cdot10^{-3};\quad a_{\mathrm{c}34}=-3{,}641\cdot10^{-3};\quad a_{\mathrm{c}35}=-0{,}014;$$
$$a_{\mathrm{c}36}=-4{,}601\cdot10^{-3};\quad a_{\mathrm{c}37}=0{,}012;\quad a_{\mathrm{c}38}=9{,}651\cdot10^{-3};\quad a_{\mathrm{c}39}=-2{,}139\cdot10^{-3};$$
$$a_{\mathrm{c}40}=-1{,}443\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{c}41}=2{,}776\cdot10^{-3};\quad a_{\mathrm{c}42}=-0{,}017;\quad a_{\mathrm{c}43}=-0{,}028;$$
$$a_{\mathrm{c}44}=0{,}015;\quad a_{\mathrm{c}45}=0{,}061;\quad a_{\mathrm{c}46}=0{,}023;\quad a_{\mathrm{c}47}=-0{,}068;\quad a_{\mathrm{c}48}=-0{,}075;$$
$$a_{\mathrm{c}49}=0{,}03;\quad a_{\mathrm{c}50}=0{,}1;\quad a_{\mathrm{c}k}=a_{\mathrm{c}(100-k)}\ \left(k=\overline{51,\ 100}\right);$$

$$a_{\mathrm{s}0}=-3{,}864\cdot10^{-5};\quad a_{\mathrm{s}1}=-4{,}26\cdot10^{-5};\quad a_{\mathrm{s}2}=2{,}914\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{s}3}=-5{,}989\cdot10^{-4};$$
$$a_{\mathrm{s}4}=-1{,}224\cdot10^{-3};\quad a_{\mathrm{s}5}=2{,}414\cdot10^{-6};\quad a_{\mathrm{s}6}=1{,}478\cdot10^{-3};\quad a_{\mathrm{s}7}=6{,}971\cdot10^{-4};$$
$$a_{\mathrm{s}8}=-6{,}349\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{s}9}=-4{,}464\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{s}10}=-3{,}543\cdot10^{-6};\quad a_{\mathrm{s}11}=-5{,}312\cdot10^{-4};$$
$$a_{\mathrm{s}12}=-4{,}959\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{s}13}=6{,}504\cdot10^{-4};\quad a_{\mathrm{s}14}=1{,}184\cdot10^{-3};\quad a_{\mathrm{s}15}=3{,}088\cdot10^{-5};$$

$$a_{s16} = -9{,}05 \cdot 10^{-4};\quad a_{s17} = -4{,}032 \cdot 10^{-4};\quad a_{s18} = 5{,}524 \cdot 10^{-4};\quad a_{s19} = 6{,}513 \cdot 10^{-5};$$
$$a_{s20} = 6{,}456 \cdot 10^{-5};\quad a_{s21} = -4{,}93 \cdot 10^{-5};\quad a_{s22} = -2{,}815 \cdot 10^{-4};\quad a_{s23} = 5{,}788 \cdot 10^{-4};$$
$$a_{s24} = 1{,}643 \cdot 10^{-3};\quad a_{s25} = -3{,}352 \cdot 10^{-5};\quad a_{s26} = -2{,}867 \cdot 10^{-3};\quad a_{s27} = -1{,}818 \cdot 10^{-3};$$
$$a_{s28} = 1{,}781 \cdot 10^{-3};\quad a_{s29} = 1{,}745 \cdot 10^{-3};\quad a_{s30} = -1{,}659 \cdot 10^{-4};\quad a_{s31} = 2{,}006 \cdot 10^{-3};$$
$$a_{s32} = 3{,}139 \cdot 10^{-3};\quad a_{s33} = -6{,}544 \cdot 10^{-3};\quad a_{s34} = -0{,}011;\quad a_{s35} = -1{,}863 \cdot 10^{-4};$$
$$a_{s36} = 0{,}014;\quad a_{s37} = 8{,}439 \cdot 10^{-3};\quad a_{s38} = -6{,}809 \cdot 10^{-3};\quad a_{s39} = -6{,}717 \cdot 10^{-3};$$
$$a_{s40} = -5{,}07 \cdot 10^{-5};\quad a_{s41} = -8{,}947 \cdot 10^{-3};\quad a_{s42} = -0{,}012;\quad a_{s43} = 0{,}02;\quad a_{s44} = 0{,}045;$$
$$a_{s45} = 2{,}713 \cdot 10^{-5};\quad a_{s46} = -0{,}07;\quad a_{s47} = -0{,}05;\quad a_{s48} = 0{,}055;\quad a_{s49} = 0{,}093;$$
$$a_{s50} = 0;\quad a_{sk} = -a_{s(100-k)}\ \left(k = \overline{51,\ 100}\right).$$

На рис.15.14 изображены рассчитанные по формуле (3.50) АЧХ косинусного и синусного блоков нерекурсивного комплексного ЦФ (ср. с рис.15.13). Эти блоки имеют линейные фазочастотные характеристики [см. (5.23) и (5.39)]. В каждом из блоков групповая задержка сигнала $\tau = (M/2)T = M/\left(2f_д\right) = 3{,}3 \cdot 10^{-6}$ с.

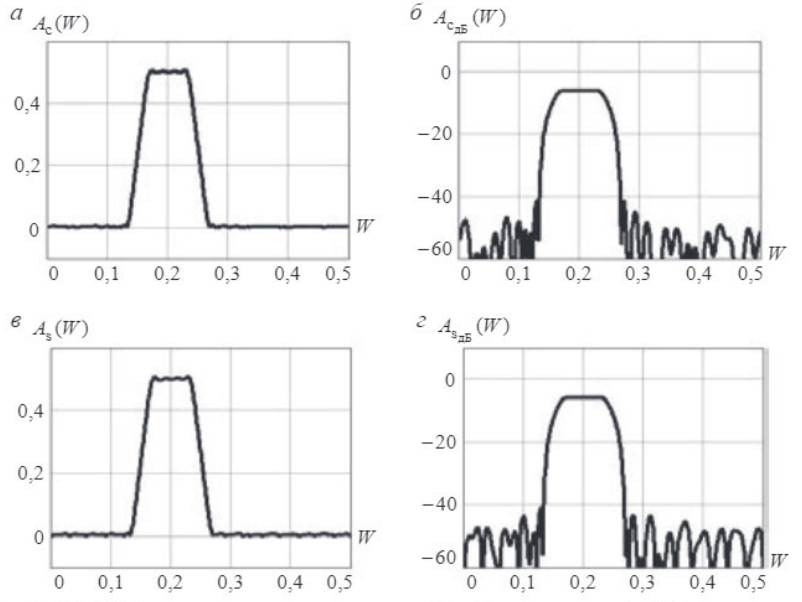


Рис.15.14. АЧХ синтезированных косинусного (*а*, *б*) и синусного (*в*, *г*) блоков нерекурсивного комплексного ЦФ в линейном (*а*, *в*) и логарифмическом (*б*, *г*) масштабах

Коэффициенты передаточной функции (4.40) нерекурсивного комплексного ЦФ формируются из найденных коэффициентов: $a_k = a_{ck} + ja_{sk}\ \left(k = \overline{0, 100}\right)$.

Амплитудно-частотная характеристика спроектированного комплексного нерекурсивного цифрового фильтра полосового типа, построенная по формуле (4.45), приведена на рис.15.15 (ср. с рис.15.11).

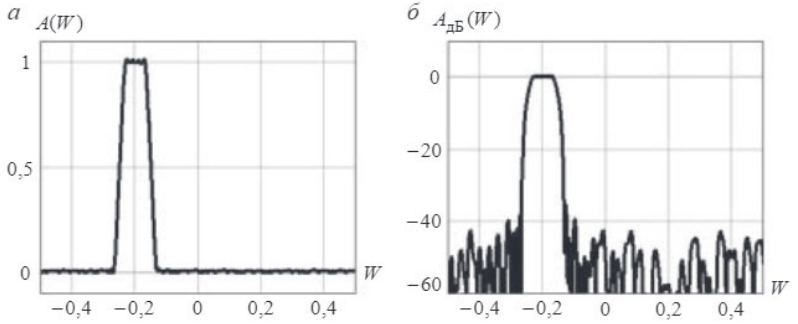


Рис.15.15. АЧХ спроектированного комплексного нерекурсивного ЦФ: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Минимальное затухание ЦФ (на граничной частоте) в левой полосе задерживания превышает 31,3 дБ, а в правой — 32,1 дБ. Максимальное затухание в полосе пропускания составляет 0,24 дБ.

Пример 15.4. Спроектировать нерекурсивный комплексный цифровой фильтр режекторного типа, предназначенный для подавления узкополосной помехи. Идеализированная АЧХ проектируемого фильтра изображена на рис.15.16, где $f_{п1} = -4$ МГц, $f_{п2} = -2$ МГц, $f_{з1} = -3{,}5$ МГц, $f_{з2} = -2{,}5$ МГц.

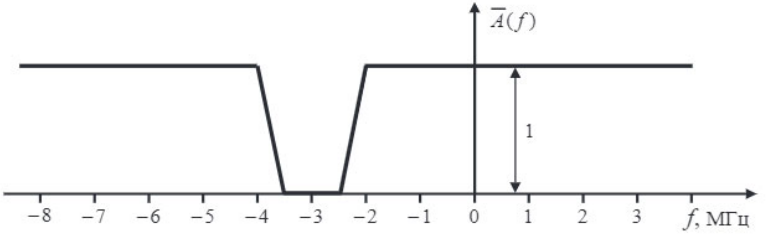


Рис.15.16. Идеализированная форма АЧХ комплексного ЦФ в примере 15.4

Выберем частоту дискретизации $f_д = 15$ МГц и определим нормированные значения граничных частот полос пропускания и задерживания:

$$W_{п1} = f_{п1} / f_д = -0{,}267; \qquad W_{п2} = f_{п2} / f_д = -0{,}133;$$

$$W_{з1} = f_{з1} / f_д = -0{,}233; \qquad W_{з2} = f_{з2} / f_д = -0{,}167.$$

Идеализированная форма (кусочно-линейная аппроксимация) АЧХ комплексного ЦФ в нормированных частотах описывается выражением [ср. с (12.9)]

$$B(W)=\overline{A}(W)=\begin{cases}1, & -0{,}5\le W\le W_{п1};\\ (W-W_{з1})/(W_{п1}-W_{з1}), & W_{п1}<W<W_{з1};\\ 0, & W_{з1}\le W\le W_{з2};\\ (W-W_{з2})/(W_{п2}-W_{з2}), & W_{з2}<W<W_{п2};\\ 1, & W_{п2}\le W\le 0{,}5.\end{cases}$$

На рис.15.17,*а* показан квадрат идеализированной АЧХ проектируемого нерекурсивного цифрового фильтра, а на рис. 15.17,*б* — его чётная (15.5) и нечётная (15.6) составляющие •.

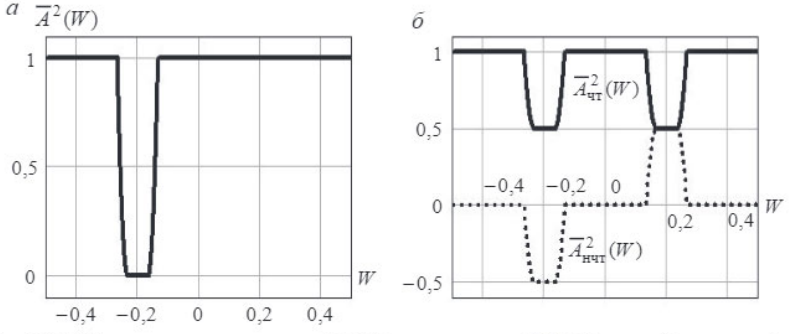


Рис.15.17. Квадрат идеализированной АЧХ комплексного ЦФ (*а*) и его чётная и нечётная составляющие (*б*)

Учитывая вид чётной $\overline{A}^2_{чт}(W)$ и нечётной $\overline{A}^2_{нчт}(W)$ составляющих квадрата амплитудно-частотной характеристики $\overline{A}^2(W)$ синтезируемого ЦФ, аппроксимируемые функции косинусного $\overline{A}_c(W)$ и синусного $\overline{A}_s(W)$ блоков представим кусочно-линейными выражениями (см. § 12.3 и рис.15.18):

$$B(W)=\overline{A}_c(W)=\begin{cases}1, & 0\le W\le -W_{п2};\\ 1-0{,}5\,(W+W_{п2})/(W_{п2}-W_{з2}), & -W_{п2}<W<-W_{з2};\\ 0{,}5, & -W_{з2}\le W\le -W_{з1};\\ 1-0{,}5\,(W+W_{п1})/(W_{п1}-W_{з1}), & -W_{з1}<W<-W_{п1};\\ 1, & -W_{п1}\le W\le 0{,}5;\end{cases}$$

$$B(W)=\overline{A}_s(W)=\begin{cases}0, & 0\le W\le -W_{п2};\\ 0{,}5\,(W+W_{п2})/(W_{п2}-W_{з2}), & -W_{п2}<W<-W_{з2};\\ 0{,}5, & -W_{з2}\le W\le -W_{з1};\\ 0{,}5\,(W+W_{п1})/(W_{п1}-W_{з1}), & -W_{з1}<W<-W_{п1};\\ 0, & -W_{п1}\le W\le 0{,}5.\end{cases}$$

• Следует обратить внимание на необычный вид чётной составляющей $\overline{A}^2_{чт}(W)$: в полосах задерживания квадрат коэффициента передачи равен 0,5.

Графики аппроксимируемых функций косинусного $\overline{A}_{\text{c}}(W)$ и синусного $\overline{A}_{\text{s}}(W)$ блоков комплексного ЦФ приведены на рис.15.18.

Подстановка этих формул в (15.5) и (15.6) при $\varphi_{\text{c}}(W)-\varphi_{\text{s}}(W)=\pi/2$ для $W>0$ и $\varphi_{\text{c}}(W)-\varphi_{\text{s}}(W)=-\pi/2$ для $W<0$ даёт функции $A^2_{\text{чт}}(\omega T)$ и $A^2_{\text{нчт}}(\omega T)$, изображённые на рис.15.17,*б*. Такая ситуация имеет место, если косинусный и синусный блоки комплексного ЦФ являются нерекурсивными вещественными ЦФ с линейными фазочастотными характеристиками: косинусный — фильтром вида 1, а синусный — фильтром вида 3 (см. § 5.2 и 5.4).

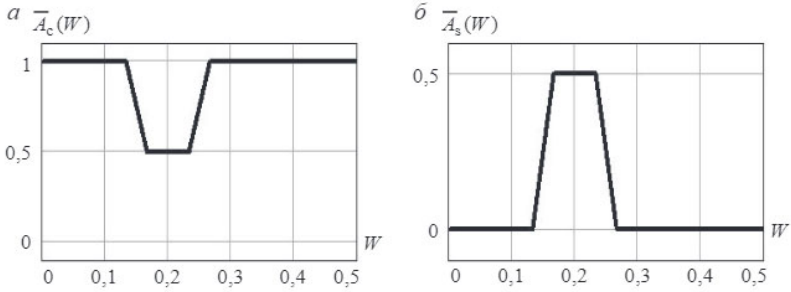


Рис.15.18. Аппроксимируемые функции косинусного (*а*) и синусного (*б*) блоков

Синтез косинусного и синусного блоков нерекурсивного комплексного ЦФ проведём при среднеквадратическом критерии (12.16) методом наименьших квадратов (см. § 12.6). Порядки этих блоков принимаем одинаковыми: $M_{\text{c}}=M_{\text{s}}=M=100$.

Весовые функции для синтеза косинусного и синусного блоков выберем следующие:

$$q_{\text{c}}(W)=\begin{cases}100, & 0\le W\le -W_{\text{п2}};\\ 50, & -W_{\text{п2}}<W<-W_{\text{з2}};\\ 80, & -W_{\text{з2}}\le W\le -W_{\text{з1}};\\ 50, & -W_{\text{з1}}<W<-W_{\text{п1}};\\ 100, & -W_{\text{п1}}\le W\le 0{,}5;\end{cases}\qquad q_{\text{s}}(W)=\begin{cases}30, & 0\le W\le -W_{\text{п2}};\\ 50, & -W_{\text{п2}}<W<-W_{\text{з2}};\\ 100, & -W_{\text{з2}}\le W\le -W_{\text{з1}};\\ 50, & -W_{\text{з1}}<W<-W_{\text{п1}};\\ 30, & -W_{\text{п1}}\le W\le 0{,}5.\end{cases}$$

Аппроксимирующие функции $\Phi(W,\mathbf{C})$ примем линейными, т.е. вида (12.15), где базисные функции для косинусного блока $\Phi_{\text{c}n}(W)=\cos(2\pi Wn)$, а для синусного — $\Phi_{\text{s}n}(W)=\sin[2\pi W(n+1)]$ $\left(n=\overline{0,\ M/2}\right)$ [см. (5.23) и (5.39)].

Процедуры синтеза косинусного и синусного блоков одинаковые и заключаются в решении системы линейных алгебраических уравнений (12.51) [или, что то же самое, (12.54)], коэффициенты которой η_{ij}, θ_i $\left(i,\ j=\overline{0,\ M/2}\right)$ вычисляются по формулам (12.52) и (12.53) при $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=0{,}5$. Полученные при этом векторы параметров $\mathbf{C}_{\text{c}}$ и $\mathbf{C}_{\text{s}}$ [см. (12.55)], компоненты которых $c_{\text{c}i}$ и $c_{\text{s}i}$ $\left(i=\overline{0,\ M/2}\right)$, используются для нахождения коэффициентов $a_{\text{c}k}$ и $a_{\text{s}k}$ $\left(k=\overline{0,\ M/2}\right)$ вещественных ЦФ [см. (5.24) с учётом (5.14) и (5.40) с учётом (5.17)]:

$$h_{ck} = \begin{cases} c_{c0}, & k = M/2; \\ c_{c(M/2-k)}/2, & k = \overline{0,\ M/2-1}; \end{cases}$$

$$h_{sk} = c_{s(M/2-1-k)}/2, \quad k = \overline{0,\ M/2-1};$$

$$a_{ck} = \begin{cases} h_{ck}, & k = \overline{0,\ M/2}; \\ h_{c(M-k)}, & k = \overline{M/2+1,\ M}; \end{cases} \qquad a_{sk} = \begin{cases} h_{sk}, & k = \overline{0,\ M/2-1}; \\ 0, & k = M/2; \\ -h_{s(M-k)}, & k = \overline{M/2+1,\ M}. \end{cases}$$

Рассчитанные коэффициенты передаточных функций вещественных косинусного a_{ck} и синусного a_{sk} $k = \overline{0,\ M}$ блоков нерекурсивного комплексного ЦФ следующие:

$a_{c0} = 8{,}121 \cdot 10^{-5}$; $a_{c1} = 1{,}196 \cdot 10^{-4}$; $a_{c2} = -6{,}389 \cdot 10^{-4}$; $a_{c3} = -8{,}77 \cdot 10^{-4}$;
$a_{c4} = 4{,}141 \cdot 10^{-4}$; $a_{c5} = 1{,}452 \cdot 10^{-3}$; $a_{c6} = 4{,}691 \cdot 10^{-4}$; $a_{c7} = -9{,}676 \cdot 10^{-4}$;
$a_{c8} = -7{,}384 \cdot 10^{-4}$; $a_{c9} = 1{,}103 \cdot 10^{-4}$; $a_{c10} = -5{,}926 \cdot 10^{-5}$; $a_{c11} = -1{,}383 \cdot 10^{-4}$;
$a_{c12} = 7{,}598 \cdot 10^{-4}$; $a_{c13} = 9{,}368 \cdot 10^{-4}$; $a_{c14} = -4{,}196 \cdot 10^{-4}$; $a_{c15} = -1{,}171 \cdot 10^{-3}$;
$a_{c16} = -3{,}144 \cdot 10^{-4}$; $a_{c17} = 4{,}736 \cdot 10^{-4}$; $a_{c18} = 2{,}454 \cdot 10^{-4}$; $a_{c19} = 3{,}489 \cdot 10^{-4}$;
$a_{c20} = 1{,}434 \cdot 10^{-4}$; $a_{c21} = -6{,}43 \cdot 10^{-5}$; $a_{c22} = 3{,}39 \cdot 10^{-4}$; $a_{c23} = 8{,}552 \cdot 10^{-4}$;
$a_{c24} = -5{,}436 \cdot 10^{-4}$; $a_{c25} = -2{,}461 \cdot 10^{-3}$; $a_{c26} = -8{,}987 \cdot 10^{-4}$; $a_{c27} = 2{,}54 \cdot 10^{-3}$;
$a_{c28} = 2{,}226 \cdot 10^{-3}$; $a_{c29} = -5{,}47 \cdot 10^{-4}$; $a_{c30} = -2{,}43 \cdot 10^{-5}$; $a_{c31} = 7{,}533 \cdot 10^{-4}$;
$a_{c32} = -4{,}218 \cdot 10^{-3}$; $a_{c33} = -6{,}726 \cdot 10^{-3}$; $a_{c34} = 3{,}476 \cdot 10^{-3}$; $a_{c35} = 0{,}013$;
$a_{c36} = 4{,}507 \cdot 10^{-3}$; $a_{c37} = -0{,}012$; $a_{c38} = -9{,}52 \cdot 10^{-3}$; $a_{c39} = 2{,}226 \cdot 10^{-3}$;
$a_{c40} = 2{,}347 \cdot 10^{-5}$; $a_{c41} = -2{,}905 \cdot 10^{-3}$; $a_{c42} = 0{,}017$; $a_{c43} = 0{,}027$;
$a_{c44} = -0{,}015$; $a_{c45} = -0{,}061$; $a_{c46} = -0{,}023$; $a_{c47} = 0{,}068$; $a_{c48} = 0{,}075$;
$a_{c49} = -0{,}03$; $a_{c50} = 0{,}9$; $a_{ck} = a_{c(100-k)}$ $\left(k = \overline{51,\ 100}\right)$;

$a_{s0} = 3{,}864 \cdot 10^{-5}$; $a_{s1} = 4{,}26 \cdot 10^{-5}$; $a_{s2} = -2{,}914 \cdot 10^{-4}$; $a_{s3} = 5{,}989 \cdot 10^{-4}$;
$a_{s4} = 1{,}224 \cdot 10^{-3}$; $a_{s5} = -2{,}414 \cdot 10^{-6}$; $a_{s6} = -1{,}478 \cdot 10^{-3}$; $a_{s7} = -6{,}971 \cdot 10^{-4}$;
$a_{s8} = 6{,}349 \cdot 10^{-4}$; $a_{s9} = 4{,}464 \cdot 10^{-4}$; $a_{s10} = 3{,}543 \cdot 10^{-6}$; $a_{s11} = 5{,}312 \cdot 10^{-4}$;
$a_{s12} = 4{,}959 \cdot 10^{-4}$; $a_{s13} = -6{,}504 \cdot 10^{-4}$; $a_{s14} = -1{,}184 \cdot 10^{-3}$; $a_{s15} = -3{,}088 \cdot 10^{-5}$;
$a_{s16} = 9{,}05 \cdot 10^{-4}$; $a_{s17} = 4{,}032 \cdot 10^{-4}$; $a_{s18} = -5{,}524 \cdot 10^{-4}$; $a_{s19} = -6{,}513 \cdot 10^{-5}$;
$a_{s20} = -6{,}456 \cdot 10^{-5}$; $a_{s21} = 4{,}93 \cdot 10^{-5}$; $a_{s22} = 2{,}815 \cdot 10^{-4}$; $a_{s23} = -5{,}788 \cdot 10^{-4}$;
$a_{s24} = -1{,}643 \cdot 10^{-3}$; $a_{s25} = 3{,}352 \cdot 10^{-5}$; $a_{s26} = 2{,}867 \cdot 10^{-3}$; $a_{s27} = 1{,}818 \cdot 10^{-3}$;
$a_{s28} = -1{,}781 \cdot 10^{-3}$; $a_{s29} = -1{,}745 \cdot 10^{-3}$; $a_{s30} = 1{,}659 \cdot 10^{-4}$; $a_{s31} = -2{,}006 \cdot 10^{-3}$;
$a_{s32} = -3{,}139 \cdot 10^{-3}$; $a_{s33} = 6{,}544 \cdot 10^{-3}$; $a_{s34} = 0{,}011$; $a_{s35} = 1{,}863 \cdot 10^{-4}$;
$a_{s36} = -0{,}014$; $a_{s37} = -8{,}439 \cdot 10^{-3}$; $a_{s38} = 6{,}809 \cdot 10^{-3}$; $a_{s39} = 6{,}717 \cdot 10^{-3}$;

$$a_{s40} = 5{,}07 \cdot 10^{-5};\quad a_{s41} = 8{,}947 \cdot 10^{-3};\quad a_{s42} = 0{,}012;\quad a_{s43} = -0{,}02;$$
$$a_{s44} = -0{,}045;\quad a_{s45} = -2{,}713 \cdot 10^{-5};\quad a_{s46} = 0{,}07;\quad a_{s47} = 0{,}05;\quad a_{s48} = -0{,}055;$$
$$a_{s49} = -0{,}093;\quad a_{s50} = 0;\quad a_{sk} = -a_{s(100-k)}\ \left(k = \overline{51,\ 100}\right).$$

На рис.15.19 изображены рассчитанные по формуле (3.50) АЧХ косинусного и синусного блоков нерекурсивного комплексного ЦФ (ср. с рис.15.18).

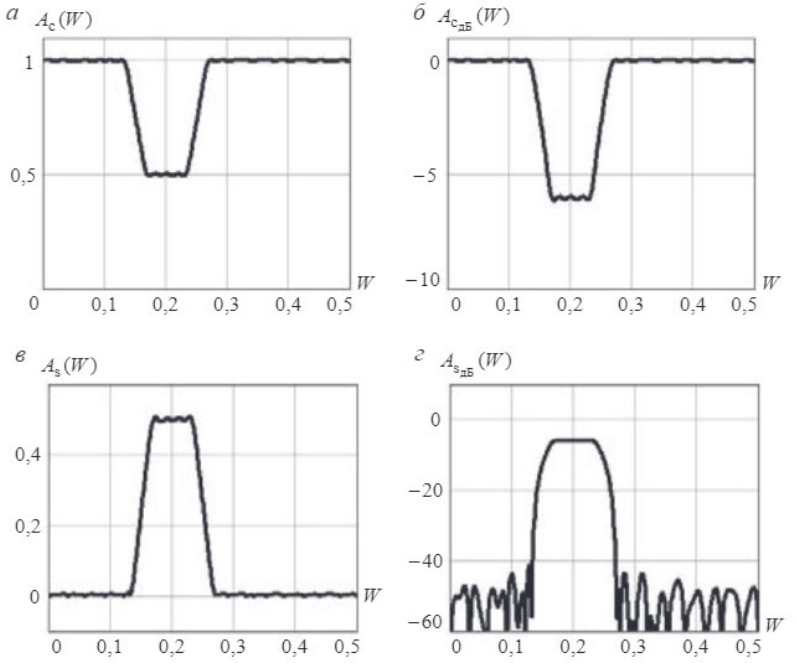


Рис.15.19. АЧХ синтезированных косинусного (*а*, *б*) и синусного (*в*, *г*) блоков нерекурсивного комплексного ЦФ в линейном (*а*, *в*) и логарифмическом (*б*, *г*) масштабах

Косинусный и синусный блоки имеют линейные фазочастотные характеристики [см. (5.23) и (5.39)]. В каждом из блоков групповая задержка сигнала $\tau = (M/2)T = M/(2f_д) = 3{,}3 \cdot 10^{-6}$ с.

Коэффициенты передаточной функции (4.40) нерекурсивного комплексного ЦФ формируются из найденных коэффициентов: $a_k = a_{ck} + ja_{sk}\ \left(k = \overline{0, 100}\right)$.

Амплитудно-частотная характеристика спроектированного комплексного нерекурсивного цифрового фильтра режекторного типа, построенная по формуле (4.45), приведена на рис.15.20 (ср. с рис.15.16).

Глубина режекции на частоте $(f_{s1} + f_{s2})/2$ составляет 43,8 дБ, а неравномерность АЧХ в полосах пропускания не превышает 2,6 дБ.

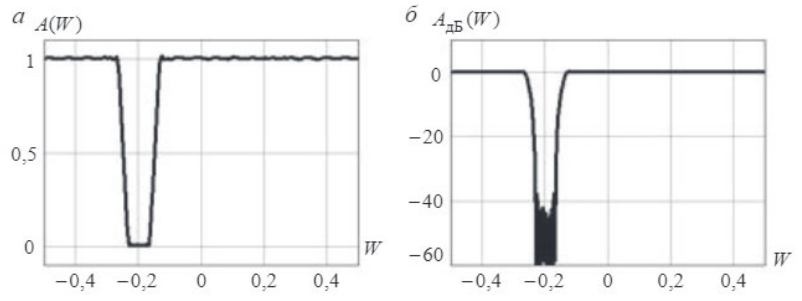


Рис.15.20. АЧХ спроектированного комплексного нерекурсивного ЦФ: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

В [2] приведены примеры синтеза нерекурсивных комплексных ЦФ, амплитудно-частотные характеристики которых являются зеркальным отображением (относительно нулевой частоты) АЧХ фильтров, рассмотренных в примерах 15.1 — 15.4. Полученные при этом косинусные и синусные блоки совпадают с блоками соответствующих комплексных ЦФ в примерах 15.1 — 15.4, а коэффициенты передаточных функций комплексных ЦФ являются комплексно-сопряжёнными •: $a_k^* = a_{ck} - ja_{sk}\ \left(k = \overline{0,\ M}\right)$. Соответствующие АЧХ рассчитываются по формуле (15.7) [вместо формулы (4.45)].

Результаты синтеза подтвердили справедливость полученного в § 15.2 соотношения (15.8).

15.4. Сдвиг частоты в комплексных цифровых фильтрах

При сдвиге (смещении) по частоте частотных характеристик на величину $\omega_{сдв}$ вправо частоту ω в соответствующих выражениях следует заменить на $\omega - \omega_{сдв}$, а влево — на $\omega + \omega_{сдв}$. Этот приём можно применить для перестройки по частоте комплексных ЦФ.

В дискретной области смещению по частоте вправо на величину $\omega_{сдв}$ соответствует умножение комплексного аргумента z на комплексную экспоненту $\exp\left(-j\omega_{сдв}T\right)$ [78, 79]:

$$z \to z\, e^{-j\omega_{сдв}T}. \qquad (15.10)$$

Рассмотрим нерекурсивный комплексный ЦФ с передаточной функцией (4.40). Его комплексная частотная характеристика описывается выражением (4.42), а амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики — формулами (4.45) и (4.46) соответственно.

• Такие комплексные ЦФ целесообразно назвать комплексно-сопряжёнными по отношению к исходным ЦФ.

Осуществляя замену аргумента в соответствии с (15.10), получим передаточную функцию «смещённого» комплексного нерекурсивного ЦФ:

$$\overline{H}(z) = H(z\,e^{-j\omega_{\text{сдв}}T}) = A_{\text{c}}(z^{-1}\,e^{j\omega_{\text{сдв}}T}) + jA_{\text{s}}(z^{-1}\,e^{j\omega_{\text{сдв}}T}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{M} \left(a_{\text{c}k} + ja_{\text{s}k}\right) e^{j\omega_{\text{сдв}}Tk}\, z^{-k}. \qquad (15.11)$$

Представляя комплексную экспоненту формулой Эйлера •, найдём выражения для коэффициентов передаточной функции $\overline{H}(z)$:

$$\overline{H}(z) = \sum_{k=0}^{M} \left(a_{\text{c}k} + ja_{\text{s}k}\right)\left[\cos\left(\omega_{\text{сдв}}Tk\right) + j\sin\left(\omega_{\text{сдв}}Tk\right)\right] z^{-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{M} \left(\overline{a}_{\text{c}k} + j\overline{a}_{\text{s}k}\right) z^{-k}, \qquad (15.12)$$

где

$$\begin{cases} \overline{a}_{\text{c}k} = a_{\text{c}k}\cos\left(\omega_{\text{сдв}}Tk\right) - a_{\text{s}k}\sin\left(\omega_{\text{сдв}}Tk\right); \\ \overline{a}_{\text{s}k} = a_{\text{c}k}\sin\left(\omega_{\text{сдв}}Tk\right) + a_{\text{s}k}\cos\left(\omega_{\text{сдв}}Tk\right), \end{cases} \quad k = \overline{0,\ M} \qquad (15.13)$$

— коэффициенты передаточной функции $\overline{H}(z)$ «смещённого» комплексного цифрового фильтра.

Подставляя в формулы (4.42), (4.45) и (4.46) коэффициенты $\overline{a}_{\text{c}k}$ и $\overline{a}_{\text{s}k}$ вместо коэффициентов $a_{\text{c}k}$ и $a_{\text{s}k}$, получим выражения для комплексной частотной характеристики $\overline{H}\left(e^{j\omega T}\right)$, АЧХ $\overline{A}(\omega T)$ и ФЧХ $\overline{\varphi}(\omega T)$ «смещённого» комплексного нерекурсивного ЦФ:

$$\overline{H}\left(e^{j\omega T}\right) = \overline{A}_{\text{c}}\left(e^{j\omega T}\right) + j\overline{A}_{\text{s}}\left(e^{j\omega T}\right) = \sum_{k=0}^{M} \left(\overline{a}_{\text{c}k} + j\overline{a}_{\text{s}k}\right) e^{-j\omega Tk}; \qquad (15.14)$$

$$\overline{A}(\omega T) = \left\{ \left[\overline{a}_{\text{c}0} + \sum_{k=1}^{M} \left[\overline{a}_{\text{c}k}\cos(\omega Tk) + \overline{a}_{\text{s}k}\sin(\omega Tk)\right] \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\overline{a}_{\text{s}0} + \sum_{k=1}^{M} \left[\overline{a}_{\text{s}k}\cos(\omega Tk) - \overline{a}_{\text{c}k}\sin(\omega Tk)\right] \right]^2 \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \left[a_{\text{c}0} + \sum_{k=1}^{M} \left[a_{\text{c}k}\cos\left(\omega - \omega_{\text{сдв}}\right)Tk + a_{\text{s}k}\sin\left(\omega - \omega_{\text{сдв}}\right)Tk\right] \right]^2 + \right.$$

• $e^{jx} = \cos x + j\sin x$.

$$+\left[a_{s0}+\sum_{k=1}^{M}\left[a_{sk}\cos(\omega-\omega_{сдв})Tk-a_{ck}\sin(\omega-\omega_{сдв})Tk\right]\right]^2\Bigg\}^{1/2}; \qquad (15.15)$$

$$\overline{\varphi}(\omega T)=\operatorname{Arctg}\frac{\overline{a}_{s0}+\sum_{k=1}^{M}\left[\overline{a}_{sk}\cos(\omega Tk)-\overline{a}_{ck}\sin(\omega Tk)\right]}{\overline{a}_{c0}+\sum_{k=1}^{M}\left[\overline{a}_{ck}\cos(\omega Tk)+\overline{a}_{sk}\sin(\omega Tk)\right]}=$$

$$=\operatorname{Arctg}\frac{a_{s0}+\sum_{k=1}^{M}\left[a_{sk}\cos(\omega-\omega_{сдв})Tk-a_{ck}\sin(\omega-\omega_{сдв})Tk\right]}{a_{c0}+\sum_{k=1}^{M}\left[a_{ck}\cos(\omega-\omega_{сдв})Tk+a_{sk}\sin(\omega-\omega_{сдв})Tk\right]}. \qquad (15.16)$$

Используя выражения (15.11) — (15.16), можно осуществлять перестройку центральной частоты комплексных ЦФ полосового и режекторного типов, амплитудно-частотные характеристики которых имеют арифметическую симметрию (см. примеры 15.3 и 15.4). Кроме того, на их основе могут быть синтезированы нерекурсивные комплексные ЦФ полосового и режекторного типов путём соответствующего сдвига частоты $\omega_{сдв}$ в передаточных функциях $H(z)$ нерекурсивных вещественных ЦФ-прототипов, частотные характеристики которых на симметричном интервале нормированных частот $W\in[-1/2,\ 1/2]$ обладают арифметической симметрией (см. рис.3.2).

Пример 15.5. Методом сдвига частоты вещественного цифрового ФНЧ-прототипа спроектировать нерекурсивный комплексный цифровой фильтр полосового типа, синтезированный в примере 15.3.

С учётом арифметической симметрии по исходным параметрам определяем граничные частоты полос пропускания и задерживания вещественного цифрового ФНЧ-прототипа: $f_п=0{,}5$ Мгц, $f_з=1$ МГц, а также требуемый сдвиг частоты для перехода к комплексному ЦФ $f_{сдв}=-3$ МГц (см. пример 15.3).

Выберем частоту дискретизации $f_д=15$ МГц и определим нормированные значения граничных частот вещественного ФНЧ-прототипа и сдвига частоты:

$$W_п=f_п/f_д=0{,}033; \qquad W_з=f_з/f_д=0{,}067;$$

$$W_{сдв}=f_{сдв}/f_д=-0{,}2.$$

Идеализированная форма амплитудно-частотной характеристики нерекурсивного вещественного цифрового ФНЧ-прототипа в нормированных частотах (аппроксимируемая функция, см. рис.15.21) описывается выражением [ср. с (12.6)]:

$$B(W)=\begin{cases}1, & 0\le W\le -W_п;\\ 0{,}5\,(W+W_з)/(W_з-W_п), & -W_п<W<-W_з;\\ 0, & -W_з\le W\le 0{,}5.\end{cases}$$

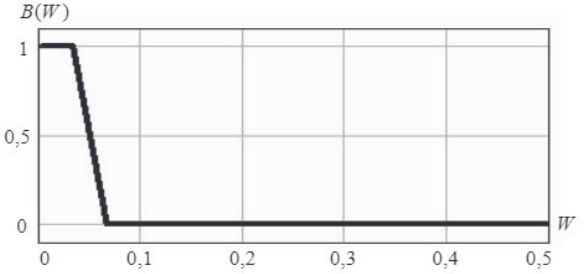


Рис.15.21. Аппроксимируемая функция вещественного цифрового ФНЧ-прототипа в примере 15.5

Синтез вещественного цифрового ФНЧ-прототипа проведём при среднеквадратическом критерии (12.16) методом наименьших квадратов (см. § 12.6). Порядок ЦФ примем таким же, как и в примере 15.3: $M = 100$.

Весовую функцию для синтеза вещественного цифрового ФНЧ-прототипа выбираем следующей:

$$q(W) = \begin{cases} 100, & 0 \le W \le -W_{\text{п}}; \\ 50, & -W_{\text{п}} < W < -W_{\text{з}}; \\ 30, & -W_{\text{з}} \le W \le 0{,}5. \end{cases}$$

Аппроксимирующую функцию $\Phi(W, \mathbf{C})$ примем линейной, т.е. вида (12.15), где базисные функции $\Phi_{cn}(W) = \cos(2\pi W n)$ $\left(n = \overline{0,\ M/2}\right)$ [см. (5.23)].

Процедура синтеза заключаются в решении системы линейных алгебраических уравнений (12.51) [или, что то же самое, (12.54)], коэффициенты которой η_{ij}, θ_i $\left(i,\ j = \overline{0,\ M/2}\right)$ вычисляются по формулам (12.52) и (12.53) при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0{,}5$. Полученные при этом векторы параметров $\mathbf{C}_{\text{c}}$ и $\mathbf{C}_{\text{s}}$ [см. (12.55)], компоненты которых c_i $\left(i = \overline{0,\ M/2}\right)$, используются для нахождения коэффициентов a_k $\left(k = \overline{0,\ M/2}\right)$ вещественного ЦФ [см. (5.24) с учётом (5.14)]:

$$h_k = \begin{cases} c_0, & k = M/2; \\ c_{(M/2-k)}/2, & k = \overline{0,\ M/2-1}; \end{cases}$$

$$a_k = \begin{cases} h_k, & k = \overline{0,\ M/2}; \\ h_{(M-k)}, & k = \overline{M/2+1,\ M}. \end{cases}$$

Рассчитанные коэффициенты передаточной функции нерекурсивного вещественного цифрового ФНЧ-прототипа следующие:

$$a_0 = 3{,}413 \cdot 10^{-4};\quad a_1 = -6{,}704 \cdot 10^{-5};\quad a_2 = -5{,}214 \cdot 10^{-4};\quad a_3 = -9{,}228 \cdot 10^{-4};$$

$$a_4 = -1{,}283 \cdot 10^{-3};\quad a_5 = -1{,}492 \cdot 10^{-3};\quad a_6 = -1{,}552 \cdot 10^{-3};\quad a_7 = -1{,}373 \cdot 10^{-3};$$

$$a_8 = -1{,}003 \cdot 10^{-3};\quad a_9 = -5{,}856 \cdot 10^{-4};\quad a_{10} = -5{,}238 \cdot 10^{-5};\quad a_{11} = 4{,}498 \cdot 10^{-4};$$

$$a_{12} = 8{,}968 \cdot 10^{-4};\quad a_{13} = 1{,}122 \cdot 10^{-3};\quad a_{14} = 1{,}308 \cdot 10^{-3};\quad a_{15} = 1{,}276 \cdot 10^{-3};$$

$$a_{16}=1{,}011\cdot10^{-3};\quad a_{17}=6{,}996\cdot10^{-4};\quad a_{18}=3{,}592\cdot10^{-4};\quad a_{19}=8{,}698\cdot10^{-5};$$
$$a_{20}=8{,}502\cdot10^{-6};\quad a_{21}=1{,}057\cdot10^{-4};\quad a_{22}=4{,}353\cdot10^{-4};\quad a_{23}=1{,}011\cdot10^{-3};$$
$$a_{24}=1{,}738\cdot10^{-3};\quad a_{25}=2{,}442\cdot10^{-3};\quad a_{26}=2{,}972\cdot10^{-3};\quad a_{27}=3{,}15\cdot10^{-3};$$
$$a_{28}=2{,}786\cdot10^{-3};\quad a_{29}=1{,}759\cdot10^{-3};\quad a_{30}=2{,}603\cdot10^{-5};\quad a_{31}=-2{,}351\cdot10^{-3};$$
$$a_{32}=-5{,}233\cdot10^{-3};\quad a_{33}=-8{,}314\cdot10^{-3};\quad a_{34}=-0{,}011;\quad a_{35}=-0{,}014;$$
$$a_{36}=-0{,}015;\quad a_{37}=-0{,}014;\quad a_{38}=-0{,}012;\quad a_{39}=-7{,}103\cdot10^{-3};$$
$$a_{40}=-1{,}626\cdot10^{-5};\quad a_{41}=9{,}372\cdot10^{-3};\quad a_{42}=0{,}021;\quad a_{43}=0{,}034;$$
$$a_{44}=0{,}047;\quad a_{45}=0{,}061;\quad a_{46}=0{,}073;\quad a_{47}=0{,}084;$$
$$a_{48}=0{,}093;\quad a_{49}=0{,}098;\quad a_{50}=0{,}1;\quad a_k=a_{100-k}\ \left(k=\overline{51,\ 100}\right).$$

На рис.15.22 изображена рассчитанная по формуле (3.50) АЧХ нерекурсивного вещественного цифрового ФНЧ-прототипа (ср. с рис.15.21). Цифровой ФНЧ-прототип имеет линейную фазочастотную характеристику [см. (5.23)]; групповая задержка сигнала $\tau=(M/2)T=M/\left(2f_д\right)=3{,}3\cdot10^{-6}$ с.

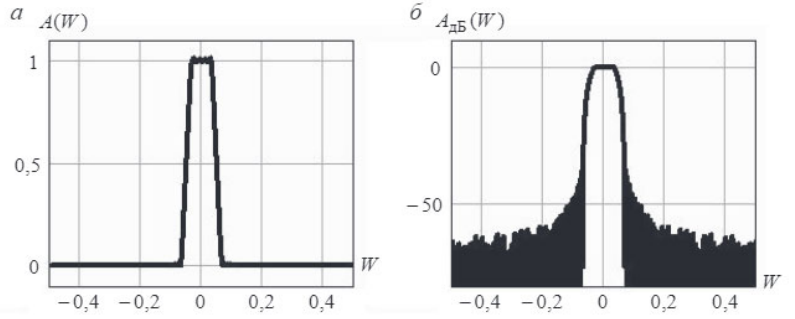


Рис.15.22. АЧХ синтезированного нерекурсивного вещественного цифрового ФНЧ-прототипа: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

По формулам (15.13) с учётом смещения по частоте $W_{сдв}=-0{,}2$ вычислим коэффициенты $\overline{a}_{ck}$ и $\overline{a}_{sk}$ $\left(k=\overline{0,\ 100}\right)$ косинусного и синусного блоков проектируемого нерекурсивного комплексного ЦФ •:

$$\overline{a}_{c0}=3{,}413\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{c1}=-2{,}072\cdot10^{-5};\quad \overline{a}_{c2}=4{,}218\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{c3}=7{,}466\cdot10^{-4};$$
$$\overline{a}_{c4}=-3{,}966\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{c5}=-1{,}492\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{c6}=-4{,}796\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{c7}=1{,}111\cdot10^{-3};$$
$$\overline{a}_{c8}=8{,}115\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{c9}=-1{,}809\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{c10}=-5{,}238\cdot10^{-5};\quad \overline{a}_{c11}=1{,}39\cdot10^{-4};$$
$$\overline{a}_{c12}=-7{,}255\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{c13}=-9{,}081\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{c14}=4{,}041\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{c15}=1{,}276\cdot10^{-3};$$

• В выражениях (15.13) коэффициенты a_{ck} $\left(k=\overline{0,\ 100}\right)$ принимаем равными рассчитанным коэффициентам передаточной функции нерекурсивного вещественного цифрового ФНЧ-прототипа, а $a_{sk}=0$ $\left(k=\overline{0,\ 100}\right)$.

$$\overline{a}_{c16}=3{,}124\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{c17}=-5{,}66\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{c18}=-2{,}906\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{c19}=2{,}688\cdot10^{-5};$$
$$\overline{a}_{c20}=8{,}502\cdot10^{-6};\quad \overline{a}_{c21}=3{,}265\cdot10^{-5};\quad \overline{a}_{c22}=-3{,}521\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{c23}=-8{,}179\cdot10^{-4};$$
$$\overline{a}_{c24}=5{,}371\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{c25}=2{,}442\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{c26}=9{,}185\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{c27}=-2{,}549\cdot10^{-3};$$
$$\overline{a}_{c28}=-2{,}254\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{c29}=5{,}434\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{c30}=5{,}603\cdot10^{-5};\quad \overline{a}_{c31}=-7{,}266\cdot10^{-4};$$
$$\overline{a}_{c32}=4{,}234\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{c33}=6{,}726\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{c34}=-3{,}471\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{c35}=-0{,}014;$$
$$\overline{a}_{c36}=-4{,}538\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{c37}=0{,}012;\quad \overline{a}_{c38}=9{,}566\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{c39}=-2{,}195\cdot10^{-3};$$
$$\overline{a}_{c40}=-1{,}626\cdot10^{-5};\quad \overline{a}_{c41}=2{,}896\cdot10^{-5};\quad \overline{a}_{c42}=-0{,}017;\quad \overline{a}_{c43}=-0{,}027;$$
$$\overline{a}_{c44}=0{,}015;\quad \overline{a}_{c45}=0{,}061;\quad \overline{a}_{c46}=0{,}023;\quad \overline{a}_{c47}=-0{,}068;$$
$$\overline{a}_{c48}=-0{,}075;\quad \overline{a}_{c49}=0{,}03;\quad \overline{a}_{c50}=0{,}1;\quad \overline{a}_{ck}=\overline{a}_{c100-k}\ \left(k=\overline{51,\ 100}\right);$$

$$\overline{a}_{s0}=0;\quad \overline{a}_{s1}=6{,}376\cdot10^{-5};\quad \overline{a}_{s2}=3{,}065\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{s3}=-5{,}424\cdot10^{-4};$$
$$\overline{a}_{s4}=-1{,}221\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{s5}=0;\quad \overline{a}_{s6}=1{,}476\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{s7}=8{,}07\cdot10^{-4};$$
$$\overline{a}_{s8}=-5{,}896\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{s9}=-5{,}569\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{s10}=0;\quad \overline{a}_{s11}=-4{,}278\cdot10^{-4};$$
$$\overline{a}_{s12}=-5{,}271\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{s13}=6{,}598\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{s14}=1{,}244\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{s15}=0;$$
$$\overline{a}_{s16}=-9{,}616\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{s17}=-4{,}112\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{s18}=2{,}111\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{s19}=8{,}273\cdot10^{-5};$$
$$\overline{a}_{s20}=0;\quad \overline{a}_{s21}=-1{,}005\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{s22}=-2{,}558\cdot10^{-4};\quad \overline{a}_{s23}=5{,}942\cdot10^{-4};$$
$$\overline{a}_{s24}=1{,}653\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{s25}=0;\quad \overline{a}_{s26}=-2{,}827\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{s27}=-1{,}852\cdot10^{-3};$$
$$\overline{a}_{s28}=1{,}638\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{s29}=1{,}673\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{s30}=0;\quad \overline{a}_{s31}=2{,}236\cdot10^{-3};$$
$$\overline{a}_{s32}=3{,}076\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{s33}=-4{,}887\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{s34}=-0{,}011;\quad \overline{a}_{s35}=0;$$
$$\overline{a}_{s36}=0{,}014;\quad \overline{a}_{s37}=8{,}374\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{s38}=-6{,}95\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{s39}=-6{,}755\cdot10^{-3};$$
$$\overline{a}_{s40}=0;\quad \overline{a}_{s41}=-8{,}913\cdot10^{-3};\quad \overline{a}_{s42}=-0{,}012;\quad \overline{a}_{s43}=0{,}02;$$
$$\overline{a}_{s44}=0{,}045;\quad \overline{a}_{s45}=0;\quad \overline{a}_{s46}=-0{,}07;\quad \overline{a}_{s47}=-0{,}05;$$
$$\overline{a}_{s48}=0{,}055;\quad \overline{a}_{s49}=0{,}93;\quad \overline{a}_{s50}=0;\quad \overline{a}_{sk}=\overline{a}_{s100-k}\ \left(k=\overline{51,\ 100}\right).$$

Коэффициенты передаточной функции (15.12) нерекурсивного комплексного ЦФ формируются из найденных коэффициентов косинусного и синусного блоков: $\overline{a}_k=\overline{a}_{ck}+j\overline{a}_{sk}\ \left(k=\overline{0,100}\right)$.

Амплитудно-частотная характеристика спроектированного комплексного нерекурсивного цифрового фильтра полосового типа, построенная по формуле (15.15), приведена на рис.15.23 (ср. с рис.15.11 и 15.15). Минимальное затухание (на граничных частотах) в полосе задерживания превышает 30,87 дБ. Максимальное затухание (на граничных частотах) в полосе пропускания составляет 0,245 дБ.

Сравнение амплитудно-частотных характеристик нерекурсивных комплексных ЦФ полосового типа, синтезированных в примерах 15.3 и 15.5 по одному техническому заданию, показывает, что при различных подходах к синтезу форма АЧХ в полосах задерживания получается различной. В полосе пропускания подобных различий не обнаружено. Коэффициенты передаточных функций косинусных и синусных блоков комплексных ЦФ, синтезированных разными методами, также различны (ср. примеры 15.3 и 15.5).

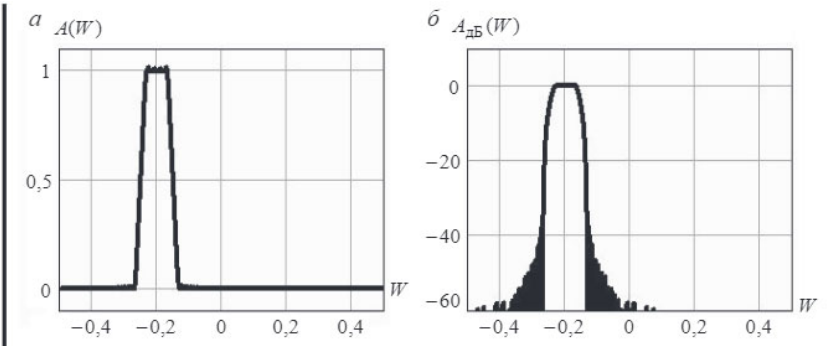


Рис.15.23. АЧХ спроектированного комплексного нерекурсивного ЦФ: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

Подчеркнём ещё раз, что синтез нерекурсивных комплексных ЦФ методом разбиения квадрата АЧХ на чётную и нечётную составляющие и раздельном синтезе косинусного и синусного блоков (см. § 15.2 и 15.3) не имеет ограничений на форму амплитудно-частотной характеристики, в то время как синтез комплексных ЦФ методом сдвига частоты вещественного цифрового ФНЧ-прототипа (см. § 15.4) возможен только для фильтров полосового и режекторнго типов, АЧХ которых обладают арифметической симметрией.

Краткие итоги

1. При цифровой обработке полосовых сигналов по методу комплексных огибающих *комплексный цифровой фильтр* является *низкочастотным эквивалентом* вещественного полосового фильтра. При этом появляется возможность цифровой обработки сигналов на промежуточной частоте, поскольку верхняя граничная частота спектра комплексной огибающей определяется шириной спектра радиосигнала, а не его несущей частотой. Частота дискретизации $f_д > 2F_в$ для комплексной огибающей полосового сигнала (радиосигнала) такова, что цифровые квадратурные преобразователи легко могут быть реализованы на современной элементной базе [1, 18, 19].

2. Одномерные скалярные комплексные стационарные линейные ЦФ могут быть двух типов: нерекурсивные и рекурсивные. Характерной особенностью комплексных ЦФ являются двухканальность (два квадратурных канала) и перекрёстные связи между каналами. Рекурсивные комплексные ЦФ имеют обратные связи (см. рис.4.6 и 4.7), а нерекурсивные обратных связей не имеют (см. рис.4.8). Косинусный и синусный квадратурные каналы комплексного ЦФ одинаковые и описываются передаточными функциями $A_c(z^{-1})$ в случае нерекурсивного и $\dfrac{A_c(z^{-1})}{1+B_c(z^{-1})}$ в случае рекурсивного ЦФ, т.е. квадратурные каналы реализуются ко-

синусными блоками [см. (4.36)]. Перекрёстные связи между каналами осуществляются через блоки с передаточными функциями $A_{\text{s}}(z^{-1})$ и $B_{\text{s}}(z^{-1})$, т.е. через синусные блоки (4.36).

3. Комплексная частотная характеристика нерекурсивного комплексного ЦФ может быть представлена либо в виде (4.42), либо в виде (15.1). Полученные из (15.1) АЧХ [см. (15.2)] и ФЧХ [см. (15.3)] позволяют построить методику синтеза нерекурсивных комплексных ЦФ с линейными ФЧХ. В основу метода положено представление квадрата АЧХ (15.4) в виде суммы чётной (15.5) и нечётной (15.6) составляющих.

4. Предлагаемый метод синтеза нерекурсивных комплексных ЦФ с линейными ФЧХ сводится к следующему:

- В интервале нормированных частот $W = f/f_{\text{д}} \in [-1/2,\ 1/2]$ амплитудно-частотная характеристика проектируемого комплексного нерекурсивного ЦФ $A(W)$ аппроксимируется кусочно-линейным выражением.
- Квадрат аппроксимируемой АЧХ фильтра $\overline{A}^2(W)$ разделяется на чётную $\overline{A}^2_{\text{чт}}(W)$ и нечётную $\overline{A}^2_{\text{нчт}}(W)$ составляющие [см. (15.5) и (15.6)].
- По виду $\overline{A}^2_{\text{чт}}(W)$ и $\overline{A}^2_{\text{нчт}}(W)$ в соответствии с (15.5) и (15.6) подбираются кусочно-линейные выражения для аппроксимации АЧХ вещественных косинусного $\overline{A}_{\text{c}}(W)$ и синусного $\overline{A}_{\text{s}}(W)$ блоков нерекурсивного комплексного ЦФ (см. рис.4.8). Этот этап не поддаётся формализации и требуется определённый опыт проектировщика.
- Вещественные косинусный $A_{\text{c}}(z^{-1})$ и синусный $A_{\text{s}}(z^{-1})$ блоки комплексного ЦФ целесообразно выполнять в виде ЦФ с линейными ФЧХ: косинусный на основе фильтра вида 1, а синусный — вида 3 (см. § 5.2 и 5.4). При этом фазочастотные характеристики ЦФ с линейными ФЧХ видов 1 и 3 за счёт сдвига фаз, равного $\pi/2$ во всём диапазоне нормированных частот $W \in [-1/2,\ 1/2]$, позволяют обеспечить нечётность псевдоАЧХ синусного блока [1]. Другие варианты построения косинусного и синусного блоков комплексного ЦФ, в принципе, возможны, однако их конструирование в соответствии с (15.5) и (15.6) является очень сложной задачей.
- Для синтеза передаточных функций косинусного $A_{\text{c}}(z^{-1})$ и синусного $A_{\text{s}}(z^{-1})$ блоков комплексного ЦФ целесообразно воспользоваться оптимизационными методами, описанными в § 12.6 — 12.8. Наиболее просто эта задача решается методом наименьших квадратов, описанным в § 12.6.
- Из полученных в результате синтеза коэффициентов вещественных блоков $a_{\text{c}k}$ и $a_{\text{s}k}$ $\left(k = \overline{0,\ M}\right)$ конструируются коэффициенты передаточной функции (4.40) нерекурсивного комплексного ЦФ: $a_k = a_{\text{c}k} + ja_{\text{s}k}$ или $a_k^* = a_{\text{c}k} - ja_{\text{s}k}$ $\left(k = \overline{0,\ M}\right)$. Для построения АЧХ и ФЧХ синтезированного ЦФ следует использовать формулы (4.45) и (4.46) соответственно.

5. АЧХ комплексных ЦФ на интервале нормированных частот $W = f/f_{\text{д}} \in [-1/2,\ 1/2]$ в общем случае не являются симметричными относительно нулевой частоты $A(-W) \neq A(W)$. Однако возможно построение комплексных ЦФ с симметричными АЧХ (вырожденный случай, при котором отсутствуют перекрёстные связи между квадратурными каналами).

6. Рассмотренные в § 15.3 примеры синтеза нерекурсивных комплексных ЦФ показали работоспособность и эффективность предложенного метода синтеза. Синтезированы фильтры с АЧХ полосового и режекторного типов для всех практически важных применений в радиолокации и технике связи.

7. Амплитудно-частотные характеристики нерекурсивных комплексных ЦФ с коэффициентами $a_k = a_{c\,k} + j a_{s\,k}$ и $a_k^* = a_{c\,k} - j a_{s\,k}$ $\left(k = \overline{0,\ M}\right)$ являются зеркальными относительно нулевой частоты: $A(W) = A^*(-W)$.

8. В дискретной области смещению частотной характеристики по частоте вправо на величину $\omega_{\text{сдв}}$ соответствует умножение комплексного аргумента z на комплексную экспоненту $\exp\left(-j\omega_{\text{сдв}}T\right)$: $z \to z\, e^{-j\omega_{\text{сдв}}T}$. При этом соответствующие преобразования передаточной функции, комплексной частотной характеристики, АЧХ и ФЧХ нерекурсивного комплексного ЦФ описываются формулами (15.12) — (15.16).

Используя выражения (15.11) — (15.16), можно осуществлять перестройку центральной частоты комплексных ЦФ полосового и режекторного типов, амплитудно-частотные характеристики которых имеют арифметическую симметриею. Кроме того, на их основе могут быть синтезированы нерекурсивные комплексные ЦФ полосового и режекторного типов путём соответствующего сдвига частоты $\omega_{\text{сдв}}$ в передаточных функциях $H(z)$ нерекурсивных вещественных ЦФ-прототипов, частотные характеристики которых на симметричном интервале нормированных частот $W \in [-1/2,\ 1/2]$ обладают арифметической симметрией.

9. Применение комплексных ЦФ в качестве фильтров промежуточной частоты и использование цифровых методов детектирования (амплитудного, частотного, фазового [1]) позволит осуществлять цифровую обработку сигналов в приёмнике, начиная с тракта промежуточной частоты, а не с видеотракта, как это делается в настоящее время. Это позволит изменить концепцию построения радиоприёмных устройств, обеспечивая меньшие погрешности обработки сигналов и высокую технологичность в производстве по сравнению с аналоговыми устройствами

Глава 16

РЕШЕНИЕ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ОДНОМЕРНЫХ СКАЛЯРНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

16.1. Синтез одномерных скалярных комплексных стационарных рекурсивных линейных цифровых фильтров по аналоговым прототипам

Тракты промежуточной частоты (ПЧ-тракты) радиоприёмных устройств осуществляют две функции обработки сигналов — усилительную и селективную (избирательную). Усилительная функция может быть реализована только средствами аналоговой техники, а селективная — средствами как аналоговой, так и цифровой техники.

ПЧ-тракты выполняются по двум основным схемам — с сосредоточенной и с распределённой избирательностью. В современных радиоприёмных устройствах селективная функция аналоговых ПЧ-трактов с сосредоточенной избирательностью реализуется фильтрами на поверхностных акустических волнах (ПАВ), а с распределённой избирательностью — на LC-контурах (одиночных или парах связанных), разделённых активными усилительными элементами. В табл.16.1 приведена классификация основных типов ПЧ-трактов с распределённой избирательностью [71 — 75].

Основными структурными единицами ПЧ-трактов с распределённой избирательностью являются одноконтурные и двухконтурные каскады, которые описываются комплексными коэффициентами передачи $\mathrm{H}(j\omega)$ 2-го и 4-го порядков соответственно:

$$\mathrm{H}^{(1)}(j\omega)=\frac{K_1}{1+j\frac{1}{\delta}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \qquad (16.1)$$

где ω — текущее значение частоты; ω_0 — резонансная частота (частота настройки контура); $K_1 = SR_{\text{к}}$ — коэффициент передачи каскада на резонансной частоте; S — крутизна сквозной вольт-амперной характеристики усилительного элемента (транзистора); $R_{\text{к}}$ — шунтирующее (резонансное) сопротивление параллельного контура; $\delta = 1/Q = \Delta\omega_{\text{п}}/\omega_0$ — его полное эквивалентное затухание; Q — добротность; $\Delta\omega_{\text{п}}$ — ширина полосы пропускания контура на уровне $1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$;

$$\mathrm{H}^{(2)}(j\omega) = K_2 \frac{-j\beta}{\left[1 + j\frac{1}{\delta}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]^2 + \beta^2}, \qquad (16.2)$$

где $K_2 = SR_к$; $R_к$ — шунтирующее (резонансное) сопротивление первого контура; $\beta = k_{св}Q$ — фактор связи; $k_{св} = M_в \big/ \sqrt{L_1 L_2}$ — коэффициент связи; $M_в$ — коэффициент взаимоиндукции связанных контуров; остальные обозначения такие же, как в формуле (16.1)•.

Таблица 16.1

Тип ПЧ-тракта	Способ реализации и особенности характеристик
Тип 1	Одиночные контуры, настроенные на одну (центральную) частоту. АЧХ имеет одногорбую форму
Тип 2	Одиночные контуры, симметрично расстроенные относительно центральной частоты. В зависимости от величины расстройки АЧХ может иметь либо одногорбую, либо двугорбую форму
Тип 3	Одиночные контуры, один из которых настроен на центральную частоту, а два других симметрично расстроены относительно неё. В зависимости от величины расстройки АЧХ может иметь либо одногорбую, либо трёхгорбую форму
Тип 4	Два связанных контура, настроенные на одну (центральную) частоту. В зависимости от величины фактора связи АЧХ может иметь либо одногорбую, либо двугорбую форму
Тип 5	Одиночные контуры и пары связанных контуров, настроенные на одну (центральную) частоту. В зависимости от величины фактора связи АЧХ может иметь либо одногорбую, либо трёхгорбую форму

Применяя метод укороченных передаточных функций [1, 4, 5, 31], получим следующие выражения для укороченных комплексных коэффициентов передачи:

$$\dot{\mathbf{H}}^{(1)}(j\Omega) = \frac{K_1}{1 + \dfrac{j\Omega - j\Omega_0}{\Delta\omega_п / 2}} \qquad (16.3)$$

в случае одноконтурного каскада и

• Формула (16.2) получена при настройке связанных контуров на одну резонансную частоту $\omega_0 = 1\big/\sqrt{L_1C_1} = 1\big/\sqrt{L_2C_2}$ и при одинаковой добротности контуров $Q = Q_1 = Q_2 = \omega_0 C_1 R_1 = \omega_0 C_2 R_2$, где $R_1 = R_к$.

$$\dot{\mathbf{H}}^{(2)}(j\Omega) = K_2 \frac{-j\beta}{\beta^2 + \left(1 + \dfrac{j\Omega - j\Omega_0}{\Delta\omega_{\text{п}}/2}\right)^2} \qquad (16.4)$$

в случае двухконтурного каскада со связанными контурами.

В формулах (16.3) и (16.4) использованы следующие обозначения: $\Omega = \omega - \omega_0$ — расстройка текущей частоты ω относительно резонансной ω_0 (для узкополосных систем $\Omega/\omega_0 \sim \delta$); $\Omega_0 = \omega_0 - \omega_{\text{оп}}$ — расстройка резонансной частоты каскада относительно опорной $\omega_{\text{оп}}$, которая используется в методе комплексной огибающей.

Для оценки точности приближения АЧХ одноконтурных и двухконтурных каскадов [см. (16.1) и (16.2)] их укороченными эквивалентами [см. (16.3) и (16.4)] проведены расчёты при следующих параметрах: $f_0 = 40$ МГц; $Q = 20$; $f_{\text{оп}} = f_0$; $\beta = 1$. Результаты расчётов приведены на рис.16.1 в виде зависимостей $\Delta A(F) = A(f_0 + F) - \mathbf{A}(F)$, где $A(\omega) = |\,\mathrm{H}(j\omega)\,|$; $\mathbf{A}(\Omega) = |\,\dot{\mathbf{H}}(j\Omega)\,|$; $f = \omega/(2\pi)$; $F = \Omega/(2\pi)$.

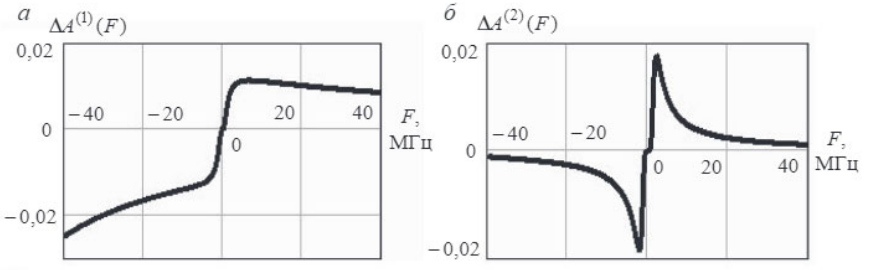


Рис.16.1. Абсолютные значения погрешностей АЧХ одноконтурного (*а*) и двухконтурного (*б*) каскадов при замене комплексных коэффициентов усиления (16.1) и (16.2) их укороченными эквивалентами (16.3) и (16.4) при $f_0 = 40$ МГц; $Q = 20$; $f_{\text{оп}} = f_0$; $\beta = 1$

Из графиков рис.16.1 видно, что максимальная погрешность имеет место на скатах АЧХ (в переходных полосах), которая не превышает 2 %, а на границах полос пропускания эта погрешность составляет 0,43 %. Такие же расчёты при добротности контуров $Q = 100$ показали, что максимальная погрешность уменьшается до 0,4 %, а на границах полос пропускания эта погрешность не превышает 0,1 %. Таким образом, вполне оправдана применяемая на практике замена комплексных коэффициентов передачи одноконтурного (16.1) и двухконтурного (16.2) каскадов ПЧ-трактов их укороченными эквивалентами (16.3) и (16.4) соответственно.

Заменой аргумента $j\Omega = p$ в (16.3) и (16.4) получаем укороченные передаточные функции (низкочастотные эквиваленты):

$$\dot{\mathbf{H}}^{(1)}(p)=\frac{K_1}{1+\dfrac{p-j\Omega_0}{\Delta\omega_{\text{п}}/2}} \tag{16.5}$$

для одноконтурного каскада и

$$\dot{\mathbf{H}}^{(2)}(p)=K_2\frac{-j\beta}{\beta^2+\left(1+\dfrac{p-j\Omega_0}{\Delta\omega_{\text{п}}/2}\right)^2} \tag{16.6}$$

для двухконтурного каскада со связанными контурами.

Укороченные передаточные функции $\dot{\mathbf{H}}(p)$ (низкочастотные эквиваленты каскадов) имеют меньший порядок, чем их полные аналоги $\mathrm{H}(p)$: в случае одноконтурного каскада функция $\dot{\mathbf{H}}^{(1)}(p)$ 1-го порядка, [$\mathrm{H}^{(1)}(p)$ 2-го порядка], а в случае двухконтурного — $\dot{\mathbf{H}}^{(2)}(p)$ 2-го порядка [$\mathrm{H}^{(2)}(p)$ 4-го порядка].

Методом билинейного преобразования (см. § 13.8) осуществим дискретизацию (см. рис.13.1) передаточных функций (16.5) и (16.6), в результате чего получим их дискретные эквиваленты $\dot{\mathbf{H}}(z)$, описывающие рекурсивные комплексные ЦФ (см. рис.4.6):

$$\dot{\mathbf{H}}^{(1)}(z)=\frac{K_1}{1+\dfrac{2f_{\text{д}}\left(1-z^{-1}\right)/\left(1+z^{-1}\right)-j\Omega_0}{\Delta\omega_{\text{п}}/2}}; \tag{16.7}$$

$$\dot{\mathbf{H}}^{(2)}(z)=K_2\frac{-j\beta}{\beta^2+\left[1+\dfrac{2f_{\text{д}}\left(1-z^{-1}\right)/\left(1+z^{-1}\right)-j\Omega_0}{\Delta\omega_{\text{п}}/2}\right]^2}. \tag{16.8}$$

После несложных алгебраических преобразований получим выражения для передаточных функций комплексных рекурсивных ЦФ в следующей форме:

- для одноконтурного каскада

$$\dot{\mathbf{H}}^{(1)}(z)=\frac{a_0+a_1z^{-1}}{1+b_1z^{-1}}, \tag{16.9}$$

где

$$a_0=a_1=K_1\left[\frac{\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})}{2+\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})-j\Omega_0/f_{\text{д}}}\right]; \tag{16.10}$$

$$b_1=\frac{-2+\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})-j\Omega_0/f_{\text{д}}}{2+\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})-j\Omega_0/f_{\text{д}}}; \tag{16.11}$$

- для двухконтурного каскада со связанными контурами

$$\dot{\mathbf{H}}^{(2)}(z)=\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}, \tag{16.12}$$

где

$$a_0=a_2=$$

$$=\frac{K_2\left\{-j\beta\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})\right]^2\right\}}{4+\beta^2\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})\right]^2+4\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})-j\Omega_0/f_{\text{д}}\right]+\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})-j\Omega_0/f_{\text{д}}\right]^2}; \tag{16.13}$$

$$a_1=\frac{2K_2\left\{-j\beta\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})\right]^2\right\}}{4+\beta^2\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})\right]^2+4\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})-j\Omega_0/f_{\text{д}}\right]+\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})-j\Omega_0/f_{\text{д}}\right]^2}; \tag{16.14}$$

$$b_1=\frac{-8+2\beta^2\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})\right]^2+2\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})-j\Omega_0/f_{\text{д}}\right]^2}{4+\beta^2\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})\right]^2+4\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})-j\Omega_0/f_{\text{д}}\right]+\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})-j\Omega_0/f_{\text{д}}\right]^2}; \tag{16.15}$$

$$b_2=\frac{4+\beta^2\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})\right]^2-4\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})-j\Omega_0/f_{\text{д}}\right]+\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})-j\Omega_0/f_{\text{д}}\right]^2}{4+\beta^2\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})\right]^2+4\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})-j\Omega_0/f_{\text{д}}\right]+\left[\Delta\omega_{\text{п}}/(2f_{\text{д}})-j\Omega_0/f_{\text{д}}\right]^2}. \tag{16.16}$$

Комплексные частотные характеристики цифровых эквивалентов одноконтурного и двухконтурного каскадов получим подстановкой в (16.9) и (16.12) $z=e^{j2\pi W}$, где $W=F/f_{\text{д}}$:

$$\dot{\mathbf{H}}^{(1)}\left(e^{j2\pi W}\right)=\frac{a_0+a_1e^{-j2\pi W}}{1+b_1e^{-j2\pi W}} \tag{16.17}$$

для одноконтурного каскада и

$$\dot{\mathbf{H}}^{(2)}\left(e^{j2\pi W}\right)=\frac{a_0+a_1e^{-j2\pi W}+a_2e^{-j4\pi W}}{1+b_1e^{-j2\pi W}+b_2e^{-j4\pi W}} \tag{16.18}$$

для двухконтурного каскада со связанными контурами.

Вычисляя модули и аргументы функций (16.17) и (16.18), получим АЧХ и ФЧХ этих цифровых эквивалентов:

$$A^{(1)}(W)=\left|\dot{\mathbf{H}}^{(1)}\left(e^{j2\pi W}\right)\right|;\qquad \varphi^{(1)}(W)=\operatorname{Arg}\dot{\mathbf{H}}^{(1)}\left(e^{j2\pi W}\right); \tag{16.19}$$

$$A^{(2)}(W)=\left|\dot{\mathbf{H}}^{(2)}\left(e^{j2\pi W}\right)\right|;\qquad \varphi^{(2)}(W)=\operatorname{Arg}\dot{\mathbf{H}}^{(2)}\left(e^{j2\pi W}\right). \tag{16.20}$$

Для оценки точности приближения АЧХ одноконтурных и двухконтурных каскадов, описываемых укороченными передаточными функциями (16.5) и

(16.6), их цифровыми эквивалентами (16.9) и (16.12) проведены расчёты при следующих параметрах: $f_д = 10$ МГц; $f_0 = 40$ МГц; $Q = 20$; $f_{оп} = f_0$; $\beta = 1$. Результаты расчётов приведены на рис.16.2, где представлены АЧХ укороченных комплексных коэффициентов передачи одноконтурного (16.5) и двухконтурного (16.6) каскадов (сплошные линии) и их цифровых эквивалентов [соответственно (16.9) и (16.12)] (пунктирные линии).

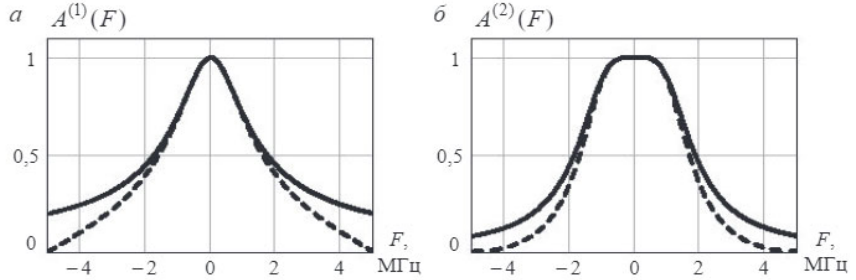


Рис.16.2. АЧХ укороченных комплексных коэффициентов усиления одноконтурного (*а*) и двухконтурного (*б*) каскадов (сплошные линии) и их цифровых эквивалентов (пунктирные линии) при $f_д = 10$ МГц; $f_0 = 40$ МГц; $Q = 20$; $f_{оп} = f_0$; $\beta = 1$

Из рис.16.2 видно, что в полосах пропускания АЧХ цифровых эквивалентов укороченных комплексных коэффициентов передачи одноконтурного (16.9) и двухконтурного (16.12) каскадов хорошо совпадают с АЧХ их аналоговых прототипов [(16.5) и (16.6) соответственно]. Погрешность на границах полос пропускания не превышает 1,3 %. Амплитудно-частотные характеристики цифровых эквивалентов имеют более высокую крутизну скатов, что обеспечивает большую избирательность по сравнению с аналоговыми прототипами. Увеличение крутизны скатов АЧХ цифровых эквивалентов обусловлено деформацией частотной шкалы при билинейном преобразовании (см. § 13.8).

Проведённые исследования позволяют сделать вывод, что замена аналоговых фильтров в ПЧ-тракте комплексными цифровыми фильтрами обеспечивает более высокую избирательность.

В дальнейшем нас будут интересовать лишь селективные свойства цифровых фильтров ПЧ-трактов, поэтому коэффициенты передачи одноконтурного K_1 и двухконтурного K_2 каскадов на опорной частоте $\omega_{оп}$ будем считать равными единице. Коэффициент передачи сигнала промежуточной частоты K_0, необходимый для нормальной работы АЦП, обеспечивается аналоговой частью ПЧ-тракта.

Реализация цифровых фильтров для ПЧ-тракта, целесообразна в виде каскадной структуры из последовательно соединённых блоков с передаточными функциями (16.9), (16.12), коэффициенты которых определяются параметрами (ω_0, $\Delta\omega_п$, Ω_0, β) соответствующих аналоговых фильтров-прототипов, являю-

щихся нагрузками усилительных элементов каскадов ПЧ-тракта, а также частотой дискретизации $f_д$ [см. выражения (16.10), (16.11), (16.13) — (16.16)]. Эти параметры можно найти, исходя из общих требований к АЧХ многокаскадного УПЧ. Методика расчёта параметров ω_0, $\Delta\omega_п$, Ω_0, β отдельных каскадов ПЧ-тракта достаточно полно изложена в [71 — 75]. Приведём основные результаты этой методики, необходимые для рассмотрения конкретных примеров синтеза комплексных рекурсивных ЦФ, предназначенных для трактов промежуточной частоты радиоприёмных устройств

♦ ПЧ-тракты типа 1

Амплитудно-частотная характеристика одноконтурного каскада (16.3), резонансная частота ω_0 которого совпадает с опорной $\omega_{оп}$ (т.е. при $\Omega_0 = 0$), может быть записана в следующем виде:

$$A^{(1)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\xi/\delta)^2}}, \qquad (16.21)$$

где

$$\xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx \frac{2\Omega}{\omega_0} \qquad (16.22)$$

— *относительная расстройка* текущей частоты.

Для N-каскадного ПЧ-тракта (все каскады одинаковы) уравнение резонансной кривой имеет вид

$$A(\xi) = \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (\xi/\delta)^2}}\right]^N. \qquad (16.23)$$

АЧХ многокаскадного ПЧ-тракта типа 1 одногорбая, полоса пропускания усилителя целиком $\Delta\omega_{ПЧ}$ определяется одним параметром — полным эквивалентным затуханием δ.

Для границ полосы пропускания, соответствующих значению $\xi_{0,707} = \Delta\omega_{ПЧ}/\omega_0$, ордината резонансной кривой $A(\xi) = 1/\sqrt{2}$. Подстановкой этих значений в уравнение (16.23) получим

$$\left\{\sqrt{1 + [\Delta\omega_{ПЧ}/(\omega_0\delta)]^2}\right\}^N = \sqrt{2}. \qquad (16.24)$$

Отсюда находим полное эквивалентное затухание контуров в каскадах ПЧ-тракта типа 1, обеспечивающее требуемую полосу пропускания:

$$\delta = \frac{\Delta\omega_{ПЧ}}{\omega_0}\,\Psi_1(N), \qquad (16.25)$$

где

$$\Psi_1(N)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt[N]{2}-1}} \tag{16.26}$$

— функция, зависящая от числа каскадов N, возрастающая с увеличением N.

Коэффициенты прямоугольности по уровням 0,1 и 0,01 $K_{\Pi_{0,1}}$ и $K_{\Pi_{0,01}}$, характеризующие избирательность ПЧ-тракта, определяются формулами [73]:

$$K_{\Pi_{0,1}}(N)=\frac{\Delta\omega_{0,1}}{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}}=\sqrt{\frac{\sqrt[N]{10^2}-1}{\sqrt[N]{2}-1}}; \tag{16.27}$$

$$K_{\Pi_{0,01}}(N)=\frac{\Delta\omega_{0,01}}{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}}=\sqrt{\frac{\sqrt[N]{10^4}-1}{\sqrt[N]{2}-1}}. \tag{16.28}$$

Из выражений (16.25) — (16.28) видно, что при заданных ширине полосы пропускания $\Delta\omega_{\text{ПЧ}}$ и резонансной частоте ω_0 ПЧ-тракта типа 1 требуемое эквивалентное затухание контуров δ, а также коэффициенты прямоугольности $K_{\Pi_{0,1}}$ и $K_{\Pi_{0,01}}$ зависят только от числа каскадов N. В связи с этим для расчёта аналогового фильтра-прототипа количество каскадов N следует определять по заданному коэффициенту прямоугольности, а эквивалентное затухание контуров δ — по формулам (16.25) и (16.26).

Зависимости $\Psi_1(N)$, $K_{\Pi_{0,1}}(N)$ и $K_{\Pi_{0,01}}(N)$, рассчитанные по формулам (16.26) — (16.28), приведены в табл.16.2.

Таблица 16.2

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Psi_1(N)$	1	1,55	1,96	2,3	2,59	2,86	3,1	3,32	3,53	3,73
$K_{\Pi_{0,1}}$	9,95	4,66	3,74	3,38	3,19	3,1	2,99	2,93	2,89	2,86
$K_{\Pi_{0,01}}$	100	15,5	8,89	6,9	5,98	5,45	5,12	4,89	4,72	4,59

Пример 16.1. По аналоговому прототипу (ПЧ-тракт типа 1) спроектировать рекурсивный комплексный ЦФ, имеющий следующие параметры: опорная (резонансная, центральная) частота $f_0=30$ МГц, ширина полосы пропускания $\Delta f_{\text{ПЧ}}=1$ МГц, коэффициент прямоугольности $K_{\Pi_{0,1}}=3$.

Согласно табл.16.2 по $K_{\Pi_{0,1}}$ определяем требуемое число каскадов $N=7$, затем подстановкой в формулу (16.25) значения $\Psi_1(7)=3{,}1$ и параметров ПЧ-тракта находим $\delta=0{,}103$ и ширину полосы пропускания одного каскада $\Delta f_{\text{п}}=\delta f_0=3{,}1$ МГц. Выберем частоту дискретизации $f_{\text{д}}=6$ МГц. По формулам (16.10) и (16.11) находим значения коэффициентов передаточной функции ЦФ 1-го порядка (16.9):

$$a_0 = a_1 = 0{,}448\,; \qquad b_1 = -0{,}104\,.$$

АЧХ одного блока (каскада) рекурсивного комплексного ЦФ описывается формулами (16.17) и (16.19), а 7-каскадный ЦФ имеет амплитудно-частотную характеристику $A(F) = \left[A^{(1)}(F)\right]^7$. На рис.16.3 изображены АЧХ одного каскада комплексного ЦФ (пунктирная линия) и 7-каскадного фильтра (сплошная линия).

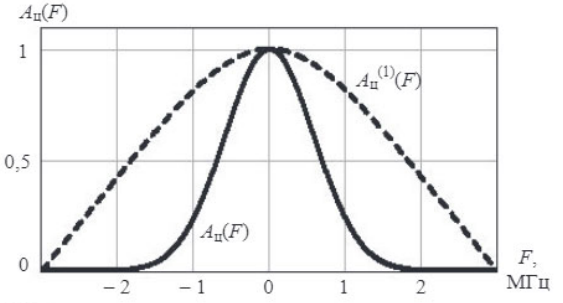


Рис.16.3. Амплитудно-частотные характеристики рекурсивных комплексных ЦФ: однокаскадного (пунктирная линия) и 7-каскадного (сплошная линия)

Ширина полосы пропускания синтезированного комплексного рекурсивного ЦФ $\Delta f_{\text{ПЧ}} = 0{,}978$ МГц, что на 2,2 % меньше заданного значения (1 МГц), а коэффициент прямоугольности $K_{\text{П}_{0,1}} = 2{,}597$, что обеспечивает несколько большую избирательность, чем задано. Это объясняется деформацией частотной шкалы при билинейном преобразовании (см. § 13.8). Расширить полосу пропускания 7-каскадного комплексного ЦФ до 1 МГц можно путём увеличения эквивалентного затухания δ до значения 0,106.

Коэффициенты ЦФ в данном примере получились вещественными, что соответствует вырожденному случаю комплексного фильтра: его структурная схема (см. рис.4.6) не содержит перекрёстных связей между каналами [передаточные функции синусных блоков $A_{\text{s}}(z^{-1}) = B_{\text{s}}(z^{-1}) = 0$], она состоит из двух одинаковых каналов (косинусного и синусного) с передаточными функциями $A_{\text{c}}(z^{-1}) \big/ \left[1 + B_{\text{c}}(z^{-1})\right]$. Такая ситуация имеет место при симметричной относительно опорной частоты $\omega_{\text{оп}}$ АЧХ цифрового фильтра.

♦ ПЧ-тракты типа 2

Часто ПЧ-тракты выполняются на одноконтурных каскадах, в которых контуры соседних каскадов симметрично расстроены относительно опорной частоты $\omega_{\text{оп}}$: $\omega_0^{(а)} = \omega_{\text{оп}} + \Omega_0$, $\omega_0^{(б)} = \omega_{\text{оп}} - \Omega_0$. Такой ПЧ-тракт с попарно расстроенными контурами (с расстроенными двойками) должен иметь чётное число каскадов.

Укороченные комплексные коэффициенты передачи таких каскадов согласно (16.3) имеют следующий вид:

$$\dot{\mathbf{H}}^{(1a)}(j\Omega)=\frac{K_1^{(a)}}{1+\dfrac{j\Omega-j\Omega_0}{\Delta\omega_{\text{п}}/2}};\quad \dot{\mathbf{H}}^{(1б)}(j\Omega)=\frac{K_1^{(б)}}{1+\dfrac{j\Omega+j\Omega_0}{\Delta\omega_{\text{п}}/2}}. \tag{16.29}$$

При равенстве затуханий контуров $\delta_а=\delta_б=\delta$ АЧХ пары симметрично расстроенных каскадов описывается выражением

$$A^{(1а)}(\xi)A^{(1б)}(\xi)=\frac{K_1^{(а)}K_1^{(б)}}{\sqrt{\left\{1+[(\xi-\xi_0)/\delta]^2\right\}\left\{1+[(\xi+\xi_0)/\delta]^2\right\}}}, \tag{16.30}$$

где

$$\xi=2\Omega/\omega_{\text{оп}} \tag{16.31}$$

— *относительная расстройка* текущей частоты;

$$\xi_0=2\Omega_0/\omega_{\text{оп}} \tag{16.32}$$

— *относительная расстройка* резонансной частоты контура.

После элементарных преобразований выражение (16.30) может быть представлено в виде

$$A^{(1а)}(\xi)A^{(1б)}(\xi)=\frac{K_1^{(а)}K_1^{(б)}}{\sqrt{(\xi/\delta)^4+2(\xi/\delta)^2\left(1-\eta^2\right)+\left(1+\eta^2\right)^2}}, \tag{16.33}$$

где

$$\eta=\xi_0/\delta \tag{16.34}$$

— *обобщённая расстройка* резонансных частот контуров, определяющая форму АЧХ пары симметрично расстроенных каскадов.

Исследуя на экстремум функцию (16.33), находим, что она имеет три экстремальные точки:

$$\begin{cases}\xi_1=0;\\ \xi_{2,3}=\pm\delta\sqrt{\eta^2-1}.\end{cases} \tag{16.35}$$

Из (16.35) следует, что при $\eta<1$ (малая расстройка между контурами) расстройки $\xi_{2,3}$ получаются мнимыми, т.е. АЧХ имеет единственный максимум на опорной частоте ($\xi=0$).

С увеличением обобщённой расстройки η АЧХ пары симметрично расстроенных каскадов приобретает всё более и более плоскую вершину вплоть до расстройки, соответствующей $\eta=1$, называемой критической. При $\eta>1$ из формулы (16.35) получаются вещественные значения относительных расстроек ξ_2 и ξ_3. Это значит, что АЧХ имеет два максимума, соответствующих расстройкам ξ_2 и ξ_3, между которыми находится минимум.

Согласно (16.33) максимальные значения коэффициента передачи пары симметрично расстроенных одноконтурных каскадов

$$\left[A^{(1а)}(\xi)A^{(1б)}(\xi)\right]_{\max}=\begin{cases}\dfrac{K_1^{(а)}K_1^{(б)}}{1+\eta^2}, & \eta\le 1;\\ \dfrac{K_1^{(а)}K_1^{(б)}}{2\eta}, & \eta>1,\end{cases} \tag{16.36}$$

а нормированная АЧХ

$$A^{(аб)}(\xi)=\frac{A^{(1а)}(\xi)A^{(1б)}(\xi)}{\left[A^{(1а)}(\xi)A^{(1б)}(\xi)\right]_{\max}}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1+\eta^2}{\sqrt{(\xi/\delta)^4+2(\xi/\delta)^2\left(1-\eta^2\right)+\left(1+\eta^2\right)^2}}, & \eta\le 1;\\ \dfrac{2\eta}{\sqrt{(\xi/\delta)^4+2(\xi/\delta)^2\left(1-\eta^2\right)+\left(1+\eta^2\right)^2}}, & \eta>1.\end{cases} \tag{16.37}$$

АЧХ ПЧ-тракта, состоящего из $N/2$ пар взаимно расстроенных каскадов, имеет вид [2]

$$A(\xi)=\left[A^{(аб)}(\xi)\right]^{N/2}=$$

$$=\begin{cases}\left[\dfrac{1+\eta^2}{\sqrt{(\xi/\delta)^4+2(\xi/\delta)^2\left(1-\eta^2\right)+\left(1+\eta^2\right)^2}}\right]^{N/2}, & \eta\le 1;\\ \left[\dfrac{2\eta}{\sqrt{(\xi/\delta)^4+2(\xi/\delta)^2\left(1-\eta^2\right)+\left(1+\eta^2\right)^2}}\right]^{N/2}, & \eta>1.\end{cases} \tag{16.38}$$

Форма АЧХ и ширина полосы пропускания ПЧ-тракта типа 2 определяются двумя параметрами: обобщённой расстройкой η и затуханием контуров δ.

При $\eta=0$ выражение (16.38) переходит в (16.23), описывающее АЧХ ПЧ-тракта типа 1. Наибольший интерес представляет критическая расстройка контуров двойки ($\eta=1$), при которой АЧХ остаётся одногорбой.

При $\eta>1$ АЧХ становится двугорбой, из-за чего применение такой расстройки является нежелательным. В тех случаях, когда достижение необходимых параметров ПЧ-тракта другими методами оказывается невозможным, используют вариант $\eta>1$. При этом целесообразно выбирать значение η максимально большим.

Это предельно допустимое значение $\eta_{\max}$ определяется величиной провала АЧХ между двумя горбами. В пределе провал может быть равен $1/\sqrt{2}$. Из выражения (16.38) при $\xi = 0$ ($\eta > 1$) получим

$$[A(\xi)]_{\xi=0} = \left(\frac{2\eta}{1+\eta^2}\right)^{N/2}. \qquad (16.39)$$

Максимально допустимое значение обобщённой расстройки $\eta_{\max}$ имеет место при

$$[A(\xi)]_{\xi=0} = \left(\frac{2\eta}{1+\eta^2}\right)^{N/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (16.40)$$

Решая это уравнение, получим

$$\eta_{\max} = \sqrt[N]{2} + \sqrt{\sqrt[N]{4} - 1}. \qquad (16.41)$$

Передаточные функции $\dot{\mathbf{H}}^{(1a)}(z)$ и $\dot{\mathbf{H}}^{(1б)}(z)$ блоков цифрового эквивалента ПЧ-тракта типа 2 описываются выражением (16.9), где коэффициенты рассчитываются по формулам (16.10) и (16.11) при расстройках $\pm\Omega_0$. Для нормировки максимума АЧХ в выражении (16.10) следует положить $K_1 = \sqrt{1+\eta^2}$ при $\eta \le 1$ и $K_1 = \sqrt{2\eta}$ при $\eta > 1$ [см. (16.36) и (16.37)].

Рассмотрим три варианта ПЧ-тракта типа 2: при малой ($\eta = 0{,}5$), критической ($\eta = 1$) и максимальной ($\eta = \eta_{\max}$) обобщённых расстройках. Как и в случае ПЧ-тракта типа 1, будем интересоваться только избирательными свойствами, поскольку усилительные свойства в моделях ЦФ нас не интересуют.

Малая расстройка $\eta = 0{,}5$

Поставляя значения $\eta = 0{,}5$ и $\xi_{0,707} = \Delta\omega_{\text{ПЧ}}/\omega_{\text{оп}}$ в выражение (16.38) и приравнивая $A(\xi) = 1/\sqrt{2}$, запишем уравнение

$$\left\{\frac{1{,}25}{\sqrt{[\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/(\omega_{\text{оп}}\delta)]^4 + 1{,}5[\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/(\omega_{\text{оп}}\delta)]^2 + 1{,}5625}}\right\}^{N/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad (16.42)$$

решая которое относительно δ, получим [2]

$$\delta = \frac{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}}{\omega_{\text{оп}}}\Psi_2(N), \qquad (16.43)$$

где

$$\Psi_2(N) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{0{,}5625 + 1{,}5625\left(\sqrt[N]{4} - 1\right)} - 0{,}75}} \qquad (16.44)$$

— функция, зависящая от числа каскадов N, возрастающая с увеличением N.

Коэффициенты прямоугольности по уровням 0,1 и 0,01 $K_{П_{0,1}}$ и $K_{П_{0,01}}$, характеризующие избирательность ПЧ-тракта, определяются формулами [73]:

$$K_{П_{0,1}}(N)=\frac{\Delta\omega_{0,1}}{\Delta\omega_{ПЧ}}=\sqrt{\frac{\sqrt{0,5625+1,5625\left(\sqrt[N]{10^4}-1\right)}-0,75}{\sqrt{0,5625+1,5625\left(\sqrt[N]{4}-1\right)}-0,75}}; \qquad (16.45)$$

$$K_{П_{0,01}}(N)=\frac{\Delta\omega_{0,01}}{\Delta\omega_{ПЧ}}=\sqrt{\frac{\sqrt{0,5625+1,5625\left(\sqrt[N]{10^8}-1\right)}-0,75}{\sqrt{0,5625+1,5625\left(\sqrt[N]{4}-1\right)}-0,75}}. \qquad (16.46)$$

Из выражений (16.43) — (16.46) видно, что при заданных ширине полосы пропускания $\Delta\omega_{ПЧ}$ и опорной частоте $\omega_{оп}$ в ПЧ-тракте типа 2 требуемое эквивалентное затухание контуров δ, а также коэффициенты прямоугольности $K_{П_{0,1}}$ и $K_{П_{0,01}}$ зависят только от числа каскадов N.

Зависимости $\Psi_2(N)$, $K_{П_{0,1}}(N)$ и $K_{П_{0,01}}(N)$, рассчитанные по формулам (16.44) — (16.46), приведены в табл.16.3.

Таблица 16.3

N	2	4	6	8	10
$\Psi_2(N)$	1,189	1,691	2,066	2,381	2,658
$K_{П_{0,1}}$	4,068	2,964	2,734	2,647	2,605
$K_{П_{0,01}}$	13,25	5,785	4,605	4,175	3,966

Для расчёта аналогового фильтра-прототипа количество каскадов N следует определять по заданному коэффициенту прямоугольности, а эквивалентное затухание контуров δ — по формулам (16.43) и (16.44).

Пример 16.2. По аналоговому прототипу (ПЧ-тракт типа 2 при обобщённой расстройке $\eta=0,5$) спроектировать рекурсивный комплексный ЦФ, имеющий следующие параметры: опорная (центральная) частота $f_{оп}=30$ МГц, ширина полосы пропускания $\Delta f_{ПЧ}=1$ МГц, коэффициент прямоугольности $K_{П_{0,1}}=3$.

Согласно табл.16.3 по $K_{П_{0,1}}$ определяем требуемое число каскадов $N=4$, затем подстановкой в формулу (16.43) значения $\Psi_2(4)=1,691$ и параметров ПЧ-тракта найдём эквивалентное затухание $\delta=0,056$ и ширину полосы пропускания одного каскада $\Delta f_п=\delta f_{оп}=1,691$ МГц. По формулам (16.32) и (16.34) при $\eta=0,5$ вычисляем величину расстройки F_0:

$$F_0=f_{оп}\delta\eta/2=0,423 \text{ МГц}.$$

Выберем частоту дискретизации $f_д = 6$ МГц. Согласно (16.9) запишем выражения для передаточных функций цифровых эквивалентов каскадов на симметрично расстроенных контурах:

$$\dot{\mathbf{H}}^{(1а)}(z) = \frac{a_0^{(а)} + a_1^{(а)} z^{-1}}{1 + b_1^{(а)} z^{-1}}; \qquad \dot{\mathbf{H}}^{(1б)}(z) = \frac{a_0^{(б)} + a_1^{(б)} z^{-1}}{1 + b_1^{(б)} z^{-1}},$$

где коэффициенты определяются по формулам (16.10) и (16.11) при расстройках $\pm F_0$ с учётом множителя $\sqrt{1+\eta^2} = \sqrt{1{,}25}$ для нормировки максимума АЧХ [см. (16.37)]. Эти коэффициенты являются комплексными:

$$a_0^{(а)} = a_1^{(а)} = 0{,}335 + j\,0{,}051; \qquad b_1^{(а)} = -0{,}354 - j\,0{,}208;$$

$$a_0^{(б)} = a_1^{(б)} = 0{,}335 - j\,0{,}051; \qquad b_1^{(б)} = -0{,}354 + j\,0{,}208.$$

Для расчёта АЧХ каскадов ЦФ воспользуемся выражениями (16.17) и (16.19). На рис.16.4 изображены АЧХ цифровых эквивалентов расстроенных одноконтурных каскадов (пунктирная и штрих-пунктирная линии), а также АЧХ 4-каскадного комплексного ЦФ (сплошная линия).

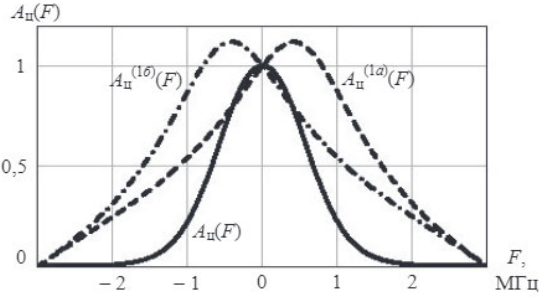


Рис.16.4. Амплитудно-частотные характеристики рекурсивных комплексных ЦФ: однокаскадных, расстроенных на $\pm F_0$ при $\eta = 0{,}5$ (пунктирная и штрих-пунктирная линии), а также 4-каскадного фильтра (сплошная линия)

Ширина полосы пропускания синтезированного комплексного рекурсивного ЦФ $\Delta f_{ПЧ} = 0{,}978$ МГц, что на 2,2 % меньше заданного значения (1 МГц), а коэффициент прямоугольности $K_{П_{0,1}} = 2{,}577$, что обеспечивает несколько большую избирательность, чем задано. Данное обстоятельство является следствием деформации частотной шкалы при билинейном преобразовании (см. § 13.8). Расширить полосу пропускания 4-каскадного комплексного ЦФ до 1 МГц можно путём увеличения эквивалентного затухания δ до значения 0,0577. Это приводит также к небольшому улучшению коэффициента прямоугольности АЧХ: $K_{П_{0,1}} = 2{,}562$.

Критическая расстройка $\eta = 1$

Поставляя значения $\eta = 1$ и $\xi_{0,707} = \Delta\omega_{ПЧ} / \omega_{оп}$ в выражение (16.38) и приравнивая $A(\xi) = 1/\sqrt{2}$, запишем уравнение

$$\left\{\frac{2}{\sqrt{[\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/(\omega_{\text{оп}}\delta)]^4+4}}\right\}^{N/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{16.47}$$

решая которое относительно δ, получим [2]

$$\delta=\frac{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}}{\omega_{\text{оп}}}\Psi_3(N), \tag{16.48}$$

где

$$\Psi_3(N)=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt[4]{\sqrt[N]{4}-1}}} \tag{16.49}$$

— функция, зависящая от числа каскадов N, возрастающая с увеличением N.

Коэффициенты прямоугольности по уровням 0,1 и 0,01 $K_{\text{П}_{0,1}}$ и $K_{\text{П}_{0,01}}$, характеризующие избирательность ПЧ-тракта, определяются формулами [73]:

$$K_{\text{П}_{0,1}}(N)=\frac{\Delta\omega_{0,1}}{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}}=\sqrt[4]{\frac{\sqrt[N]{10^4}-1}{\sqrt[N]{4}-1}}; \tag{16.50}$$

$$K_{\text{П}_{0,01}}(N)=\frac{\Delta\omega_{0,01}}{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}}=\sqrt[4]{\frac{\sqrt[N]{10^8}-1}{\sqrt[N]{4}-1}}. \tag{16.51}$$

Из выражений (6.48) — (16.51) видно, что при заданных ширине полосы пропускания $\Delta\omega_{\text{ПЧ}}$ и опорной частоте $\omega_{\text{оп}}$ в ПЧ-трактах типа 2 требуемое эквивалентное затухание контуров δ, а также коэффициенты прямоугольности $K_{\text{П}_{0,1}}$ и $K_{\text{П}_{0,01}}$ зависят только от числа каскадов N.

Зависимости $\Psi_3(N)$, $K_{\text{П}_{0,1}}(N)$ и $K_{\text{П}_{0,01}}(N)$, рассчитанные по формулам (16.49) — (16.51), приведены в табл.16.4.

Таблица 16.4

N	2	4	6	8	10
$\Psi_3(N)$	0,707	0,881	0,99	1,072	1,139
$K_{\text{П}_{0,1}}$	3,154	2,159	1,935	1,839	1,786
$K_{\text{П}_{0,01}}$	10	3,932	2,982	2,626	2,444

Для расчёта аналогового фильтра-прототипа количество каскадов N следует определять по заданному коэффициенту прямоугольности, а эквивалентное затухание контуров δ — по формулам (16.48) и (16.49).

Пример 16.3. По аналоговому прототипу (ПЧ-тракт типа 2 при обобщённой расстройке $\eta = 1$) спроектировать рекурсивный комплексный цифровой фильтр для ПЧ-тракта радиоприёмного устройства, имеющего следующие параметры: опорная (центральная) частота $f_{\text{оп}} = 30$ МГц, ширина полосы пропускания $\Delta f_{\text{УПЧ}} = 1$ МГц, коэффициент прямоугольности $K_{\text{П}_{0,1}} = 3$.

Согласно табл.16.4 по $K_{\text{П}_{0,1}}$ определяем требуемое число каскадов $N = 4$, затем подстановкой в формулу (16.48) значения $\Psi_3(4) = 0{,}881$ и параметров ПЧ-тракта находим эквивалентное затухание $\delta = 0{,}029$ и ширину полосы пропускания одного каскада $\Delta f_{\text{п}} = \delta f_{\text{оп}} = 0{,}881$ МГц. По формулам (16.32) и (16.34) при $\eta = 1$ вычисляем величину расстройки F_0:

$$F_0 = f_{\text{оп}}\,\delta\eta / 2 = 0{,}441 \text{ МГц}.$$

Выберем частоту дискретизации $f_{\text{д}} = 6$ МГц. Согласно (16.9) запишем выражения для передаточных функций цифровых эквивалентов каскадов на симметрично расстроенных контурах:

$$\dot{\mathbf{H}}^{(1a)}(z) = \frac{a_0^{(a)} + a_1^{(a)} z^{-1}}{1 + b_1^{(a)} z^{-1}}; \qquad \dot{\mathbf{H}}^{(1б)}(z) = \frac{a_0^{(б)} + a_1^{(б)} z^{-1}}{1 + b_1^{(б)} z^{-1}},$$

где коэффициенты определяются по формулам (16.10) и (16.11) при расстройках $\pm F_0$ с учётом множителя $\sqrt{1+\eta^2} = \sqrt{2}$ для нормировки максимума АЧХ [см. (16.37)]:

$$a_0^{(a)} = a_1^{(a)} = 0{,}256 + j\,0{,}048; \qquad b_1^{(a)} = -0{,}57 - j\,0{,}294;$$

$$a_0^{(б)} = a_1^{(б)} = 0{,}256 - j\,0{,}048; \qquad b_1^{(б)} = -0{,}57 + j\,0{,}294.$$

Для расчёта АЧХ каскадов ЦФ воспользуемся выражениями (16.17) и (16.19). На рис.16.5 изображены амплитудно-частотные характеристики цифровых эквивалентов расстроенных одноконтурных каскадов (пунктирная и штрих-пунктирная линии), а также АЧХ 4-каскадного комплексного ЦФ (сплошная линия).

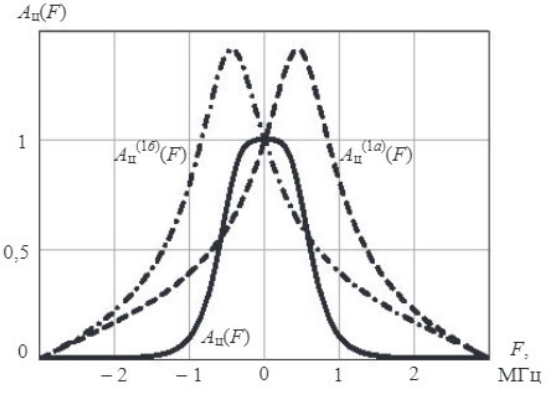


Рис.16.5. Амплитудно-частотные характеристики рекурсивных комплексных ЦФ: однокаскадных, расстроенных на $\pm F_0$ при $\eta = 1$ (пунктирная и штрих-пунктирная линии), а также 4-каскадного фильтра (сплошная линия)

Ширина полосы пропускания синтезированного комплексного рекурсивного ЦФ $\Delta f_{\text{ПЧ}} = 0{,}978$ МГц, что на 2,2 % меньше заданного значения (1 МГц), а коэффициент прямоугольности $K_{\text{П}_{0,1}} = 2{,}01$, что обеспечивает несколько большую избирательность, чем задано. Данное обстоятельство является следствием деформации частотной шкалы при билинейном преобразовании (см. § 13.8). Расширить полосу пропускания 4-каскадного комплексного ЦФ до 1 МГц можно путём увеличения эквивалентного затухания δ до значения 0,03005. Это приводит также к небольшому улучшению коэффициента прямоугольности АЧХ: $K_{\text{П}_{0,1}} = 2$.

Максимально допустимая расстройка $\eta_{\max} = \sqrt[N]{2} + \sqrt{\sqrt[N]{4} - 1}$

Поставляя значения $\eta_{\max}$ [см. (16.41)] и $\xi_{0,707} = \Delta\omega_{\text{ПЧ}} / \omega_{\text{оп}}$ в выражение (16.38) и приравнивая $A(\xi) = 1/\sqrt{2}$, запишем уравнение

$$\left\{ \frac{2\eta_{\max}}{\sqrt{[\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/(\omega_{\text{оп}}\delta)]^4 + 2[\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/(\omega_{\text{оп}}\delta)]^2 \left(1 - \eta_{\max}^2\right) + \left(1 + \eta_{\max}^2\right)^2}} \right\}^{N/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{16.52}$$

решая которое относительно δ, получим

$$\delta = \frac{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}}{\omega_{\text{оп}}} \Psi_4(N), \tag{16.53}$$

где

$$\Psi_4(N) = \frac{1}{\sqrt{\eta_{\max}^2 - 1 + 2\eta_{\max}\sqrt{\sqrt[N]{4} - 1}}} \tag{16.54}$$

— функция, зависящая от числа каскадов N, возрастающая с увеличением N.

Величина максимально допустимой обобщённой расстройки $\eta_{\max}$, входящая в формулу (16.54), определяется выражением (16.41).

Коэффициенты прямоугольности по уровням 0,1 и 0,01 $K_{\text{П}_{0,1}}$ и $K_{\text{П}_{0,01}}$, характеризующие избирательность ПЧ-тракта, определяются формулами [73]:

$$K_{\text{П}_{0,1}}(N) = \frac{\Delta\omega_{0,1}}{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}} = \sqrt{\frac{\eta_{\max}^2 - 1 + 2\eta_{\max}\sqrt{\sqrt[N]{10^4} - 1}}{\eta_{\max}^2 - 1 + 2\eta_{\max}\sqrt{\sqrt[N]{4} - 1}}}; \tag{16.55}$$

$$K_{\text{П}_{0,01}}(N) = \frac{\Delta\omega_{0,01}}{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}} = \sqrt{\frac{\eta_{\max}^2 - 1 + 2\eta_{\max}\sqrt{\sqrt[N]{10^8} - 1}}{\eta_{\max}^2 - 1 + 2\eta_{\max}\sqrt{\sqrt[N]{4} - 1}}}. \tag{16.56}$$

Из выражений (16.53) — (16.56) видно, что при заданных ширине полосы пропускания $\Delta\omega_{\text{УПЧ}}$ и опорной частоте $\omega_{\text{оп}}$ в ПЧ-трактах типа 2 требуемое эк-

вивалентное затухание контуров δ, а также коэффициенты прямоугольности $K_{\Pi_{0,1}}$ и $K_{\Pi_{0,01}}$ зависят только от числа каскадов N.

Зависимости $\Psi_4(N)$, $K_{\Pi_{0,1}}(N)$ и $K_{\Pi_{0,01}}(N)$, рассчитанные по формулам (16.54) — (16.56), приведены в табл.16.5.

Таблица 16.5

N	2	4	6	8	10
$\Psi_4(N)$	0,322	0,46	0,548	0,614	0,667
$K_{\Pi_{0,1}}$	2,34	1,682	1,54	1,48	1,447
$K_{\Pi_{0,01}}$	7,106	2,869	2,224	1,987	1,868

Для расчёта аналогового фильтра-прототипа количество каскадов N следует определять по заданному коэффициенту прямоугольности, а эквивалентное затухание контуров δ — по формулам (16.53) и (16.54).

Пример 16.4. По аналоговому прототипу (ПЧ-тракт типа 2 при обобщённой расстройке $\eta_{\max}$) спроектировать рекурсивный комплексный цифровой фильтр для ПЧ-тракта радиоприёмного устройства, имеющего следующие параметры: опорная (центральная) частота $f_{\text{оп}} = 30$ МГц, ширина полосы пропускания $\Delta f_{\text{ПЧ}} = 1$ МГц, коэффициент прямоугольности $K_{\Pi_{0,1}} = 3$.

Согласно табл.16.5 по заданному значению $K_{\Pi_{0,1}}$ определяем требуемое число каскадов $N = 2$, затем подстановкой в формулу (16.53) значения $\Psi_4(4) = 0{,}322$ и параметров ПЧ-тракта находим $\delta = 0{,}011$ и ширину полосы пропускания одного каскада $\Delta f_{\text{п}} = \delta f_{\text{оп}} = 0{,}322$ МГц. По формулам (16.32) и (16.34) при $\eta_{\max}(2) = 2{,}214$ вычисляем величину расстройки F_0:

$$F_0 = f_{\text{оп}}\,\delta\,\eta_{\max} / 2 = 0{,}389 \text{ МГц}.$$

Выберем частоту дискретизации $f_{\text{д}} = 6$ МГц. Согласно (16.9) запишем выражения для передаточных функций цифровых эквивалентов каскадов на симметрично расстроенных контурах:

$$\dot{\mathbf{H}}^{(1a)}(z) = \frac{a_0^{(a)} + a_1^{(a)} z^{-1}}{1 + b_1^{(a)} z^{-1}}; \qquad \dot{\mathbf{H}}^{(1б)}(z) = \frac{a_0^{(б)} + a_1^{(б)} z^{-1}}{1 + b_1^{(б)} z^{-1}},$$

где коэффициенты определяются по формулам (16.10) и (16.11) при расстройках $\pm F_0$ с учётом множителя $\sqrt{2\eta_{\max}} = 2{,}197$ для нормировки максимумов АЧХ [см. (16.37)]:

$$a_0^{(a)} = a_1^{(a)} = 0{,}165 + j\,0{,}031; \qquad b_1^{(a)} = -0{,}782 - j\,0{,}334;$$

$$a_0^{(б)} = a_1^{(б)} = 0{,}165 - j\,0{,}031; \qquad b_1^{(б)} = -0{,}782 + j\,0{,}334.$$

Для расчёта АЧХ каскадов ЦФ воспользуемся выражениями (16.17) и (16.19). На рис.16.6 изображены амплитудно-частотные характеристики цифровых эквивален-

тов расстроенных одноконтурных каскадов (пунктирная и штрих-пунктирная линии), а также АЧХ 2-каскадного комплексного ЦФ (сплошная линия). АЧХ фильтра имеет провал на опорной частоте (т.е. при расстройке $F = 0$), величина которого составляет -3 дБ от максимальных уровней.

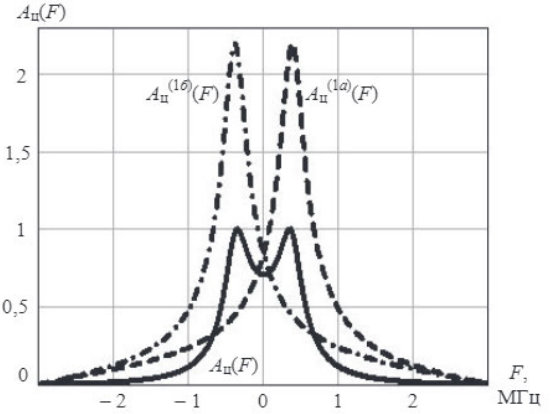


Рис.16.6. Амплитудно-частотные характеристики рекурсивных комплексных ЦФ: однокаскадных, расстроенных на $\pm F_0$ при η_{max} (пунктирная и штрих-пунктирная линии), а также 2-каскадного фильтра (сплошная линия)

Ширина полосы пропускания синтезированного комплексного рекурсивного ЦФ $\Delta f_{ПЧ} = 0{,}9784$ МГц, что на 2,16 % меньше заданного значения (1 МГц), а коэффициент прямоугольности $K_{П_{0,1}} = 2{,}146$, что обеспечивает несколько большую избирательность, чем задано. Данное обстоятельство является следствием деформации частотной шкалы при билинейном преобразовании (см. § 13.8). Расширить полосу пропускания 2-каскадного комплексного ЦФ до 1 МГц можно путём увеличения эквивалентного затухания δ до значения 0,011001. Это приводит также к небольшому улучшению коэффициента прямоугольности АЧХ: $K_{П_{0,1}} = 2{,}14$.

♦ ПЧ-тракты типа 3

Иногда применяются ПЧ-тракты на одноконтурных каскадах, в которых контуры настроены на три частоты. Один из каскадов настраивается на среднюю (опорную) частоту $\omega_0^{(в)} = \omega_{оп}$, а два других симметрично расстраиваются на величину Ω_0: $\omega_0^{(а)} = \omega_{оп} + \Omega_0$, $\omega_0^{(б)} = \omega_{оп} - \Omega_0$. Число каскадов такой системы, называемой ПЧ-трактом с расстроенными тройками одиночных контуров, должно быть кратно трём. При этом удаётся получить более широкую полосу пропускания, чем в ПЧ-трактах типа 1 и типа 2.

Укороченные комплексные коэффициенты передачи каскадов ПЧ-тракта типа 3 согласно (16.3) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{H}}^{(1а)}(j\Omega) = \dfrac{K_1^{(а)}}{1 + \dfrac{j\Omega - j\Omega_0}{\Delta\omega_{\text{п}}/2}}; \\ \dot{\mathbf{H}}^{(1б)}(j\Omega) = \dfrac{K_1^{(б)}}{1 + \dfrac{j\Omega + j\Omega_0}{\Delta\omega_{\text{п}}/2}}; \\ \dot{\mathbf{H}}^{(1в)}(j\Omega) = \dfrac{K_1^{(в)}}{1 + \dfrac{j\Omega}{\Delta\omega_{\text{п}}^{(в)}/2}}, \end{cases} \qquad (16.57)$$

где $\Delta\omega_{\text{п}}$ — ширина полос пропускания расстроенных (или так называемых боковых) каскадов; $\Delta\omega_{\text{п}}^{(в)}$ — ширина полосы пропускания настроенного каскада.

В зависимости от величины расстройки Ω_0 АЧХ расстроенной тройки каскадов может иметь либо один, либо три максимума. При трёх максимумах средний совпадает с частотой $\omega_0^{(в)} = \omega_{\text{оп}}$, а два боковых получаются вблизи частот $\omega_0^{(а)} = \omega_{\text{оп}} + \Omega_0$ и $\omega_0^{(б)} = \omega_{\text{оп}} - \Omega_0$. Все три максимума АЧХ будут одинаковыми, если выполняется условие [74]

$$\delta^{(в)} = \delta\sqrt{\left(1 + 4\eta^2\right)/\left(\eta^2 - 2\right)}, \qquad (16.58)$$

где $\eta = 2\Omega_0/(\omega_{\text{оп}}\delta)$ — обобщённая расстройка боковых контуров; δ — их полное эквивалентное затухание; $\delta^{(в)}$ — полное эквивалентное затухание каскада, настроенного на опорную частоту $\omega_{\text{оп}}$.

Рассматриваемый тип ПЧ-тракта целесообразно применять при больших расстройках боковых контуров, т.е. при $\eta >> 1$. Тогда [74]

$$\delta^{(в)} \approx 2\delta, \qquad (16.59)$$

т.е. затухание контуров, настроенных на среднюю частоту, должно быть в два раза больше, чем затухание контуров, расстроенных относительно этой частоты.

С учётом соотношения (16.69) запишем выражение для АЧХ расстроенной тройки одноконтурных каскадов:

$$A^{(1а)}(\xi)A^{(1б)}(\xi)A^{(1в)}(\xi) =$$

$$= \frac{K_1^{(а)}K_1^{(б)}K_1^{(в)}}{\sqrt{\left\{1 + [(\xi - \xi_0)/\delta]^2\right\}\left\{1 + [(\xi + \xi_0)/\delta]^2\right\}\left\{1 + [\xi/(2\delta)]^2\right\}}}, \qquad (16.60)$$

где величины ξ и ξ_0 определяются формулами (16.31) и (16.32) соответственно.

Уравнение (16.60) имеет максимум при $\xi = 0$:

$$\left[A^{(1а)}(\xi)A^{(1б)}(\xi)A^{(1в)}(\xi)\right]_{\max} = \frac{K_1^{(а)}K_1^{(б)}K_1^{(в)}}{1+\eta^2}, \qquad (16.61)$$

где обобщённая расстройка боковых контуров η выражается формулой (16.34).

Нормированную АЧХ расстроенной тройки одноконтурных каскадов получим, разделив (16.60) на (16.61). В результате будем иметь

$$A^{(абв)}(\xi) = \frac{A^{(1а)}(\xi)A^{(1б)}(\xi)A^{(1в)}(\xi)}{\left[A^{(1а)}(\xi)A^{(1б)}(\xi)A^{(1в)}(\xi)\right]_{\max}} =$$

$$= \frac{2\left(1+\eta^2\right)}{\sqrt{(\xi/\delta)^6 - 2\left[\eta^2-3\right](\xi/\delta)^4 + \left[\eta^2-3\right]^2(\xi/\delta)^2 + 4\left[1+\eta^2\right]^2}}. \qquad (16.62)$$

Анализируя выражение (16.62) на экстремум, получим значения абсцисс максимумов (горбов) и минимумов (впадин) трёхгорбой АЧХ расстроенной тройки:

$$\gamma_{(\max)} = \pm\sqrt{\eta^2-3} \;\text{ и }\; 0; \qquad (16.63)$$

$$\gamma_{(\min)} = \pm\sqrt{\frac{\eta^2-3}{3}}, \qquad (16.64)$$

где $\gamma = \xi/\delta = 2\Omega/(\omega_{оп}\delta)$ — *обобщённая расстройка* текущей частоты ω относительно $\omega_{оп}$.

Величина обобщённой расстройки боковых контуров η, зависящая от разноса их резонансных частот $\omega_0^{(а)}$ и $\omega_0^{(б)}$, определяет форму АЧХ расстроенной тройки $A^{(абв)}(\xi)$. Уменьшение разноса Ω_0 резонансных частот (т.е. уменьшение η) приводит к постепенному сближению абсцисс максимумов и минимумов АЧХ. Они сливаются в одну точку при критическом значении обобщённой расстройки боковых контуров $\eta_{кр} = \sqrt{3}$. В случае малых расстроек (при $\eta \le \eta_{кр}$) АЧХ тройки расстроенных каскадов будет одногорбой.

АЧХ многокаскадного усилителя, состоящего из $N/3$ расстроенных троек одноконтурных каскадов, имеет вид

$$A(\xi) = \left[A^{(абв)}(\xi)\right]^{N/3} =$$

$$= \left\{\frac{2\left(1+\eta^2\right)}{\sqrt{(\xi/\delta)^6 - 2\left[\eta^2-3\right](\xi/\delta)^4 + \left[\eta^2-3\right]^2(\xi/\delta)^2 + 4\left[1+\eta^2\right]^2}}\right\}^{N/3}. \qquad (16.65)$$

Поставляя абсциссы впадин (16.64) в выражение (16.65), получим, что впадинам соответствуют значения АЧХ $A(\xi_{\text{вп}})$, зависящие от η и N.

Имеет смысл рассматривать не любые АЧХ ПЧ-трактов типа 3, а только ту из них, у которой провал во впадинах равен $1/\sqrt{2}$. Это соответствует максимально допустимой расстройке боковых контуров и, следовательно, максимально допустимому значению $\eta_{\max}$, определяемому из уравнения

$$\left\langle \frac{2\left(1+\eta_{\max}^2\right)}{\left\{\left[\left(\eta_{\max}^2-3\right)/3\right]^3-2\left[\eta_{\max}^2-3\right]\left[\left(\eta_{\max}^2-3\right)/3\right]^2+\right.}\rightarrow \right.$$

$$\left.\rightarrow\frac{}{\left.+\left[\eta_{\max}^2-3\right]^2\left[\left(\eta_{\max}^2-3\right)/3\right]+4\left[1+\eta_{\max}^2\right]^2\right\}^{1/2}}\right\rangle^{N/3}=1/\sqrt{2}, \qquad (16.66)$$

которое после элементарных преобразований приводится к бикубическому уравнению

$$\eta_{\max}^6-9\left(3\sqrt[N]{8}-2\right)\eta_{\max}^4-27\left(2\sqrt[N]{8}-3\right)\eta_{\max}^2-27\sqrt[N]{8}=0. \qquad (16.67)$$

Решая это уравнение, можно определить величину $\eta_{\max}$ для любого числа каскадов N, кратного трём. Аналитическое решение уравнения (16.67) по формуле Кардано [39] представляется довольно громоздким, поэтому воспользуемся численным решением, которое может быть получено для конкретных значений N, например, в системе компьютерной математики Mathcad. Рассчитанные значения $\eta_{\max}(N)$ сведены в табл.16.6.

Таблица 16.6

N	3	6	9	12
$\eta_{\max}$	6,064	4,477	3,914	3,607

Определим затухание δ, необходимое для обеспечения заданной ширины полосы пропускания ПЧ-тракта $\Delta\omega_{\text{ПЧ}}$. С этой целью приравняем выражение (16.65) при расстройке, соответствующей половине ширины полосы пропускания ПЧ-тракта, значению $1/\sqrt{2}$:

$$\left\langle \frac{2\left(1+\eta_{\max}^2\right)}{\left\{\left[\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/(\omega_{\text{оп}}\delta)\right]^6-2\left[\eta_{\max}^2-3\right]\left[\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/(\omega_{\text{оп}}\delta)\right]^4+\right.}\rightarrow \right.$$

$$\left.\rightarrow\frac{}{\left.+\left[\eta_{\max}^2-3\right]^2\left[\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/(\omega_{\text{оп}}\delta)\right]^2+4\left[1+\eta_{\max}^2\right]^2\right\}^{1/2}}\right\rangle^{N/3}=1/\sqrt{2}. \qquad (16.68)$$

Отсюда после несложных преобразований получаем бикубическое уравнение

$$(\gamma_{0,7})^6 - 2\left[\eta_{\max}^2 - 3\right](\gamma_{0,7})^4 + \left[\eta_{\max}^2 - 3\right]^2(\gamma_{0,7})^2 - 4\left[1+\eta_{\max}^2\right]^2\left(\sqrt[N]{8}-1\right) = 0, \tag{16.69}$$

где

$$\gamma_{0,7} = \frac{\xi_{0,7}}{\delta} = \frac{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}}{\omega_{\text{оп}}\delta}. \tag{16.70}$$

Решая уравнение (16.69) для конкретных значений N, получим функцию

$$\Psi_5(N) = \frac{1}{\gamma_{0,7}}. \tag{16.71}$$

Отсюда находим эквивалентное затухание контуров боковых каскадов

$$\delta = \frac{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}}{\omega_{\text{оп}}}\Psi_5(N). \tag{16.72}$$

Для расчёта коэффициентов прямоугольности многокаскадного ПЧ-тракта приходится решать бикубические уравнения, аналогичные уравнению (16.69), отличающиеся от него заменой $\gamma_{0,7}$ и $\sqrt[N]{8}$ на $\gamma_{0,1}$ и $\sqrt[N]{10^6}$ для $K_{\text{П}_{0,1}}$ или на $\gamma_{0,01}$ и $\sqrt[N]{10^{12}}$ для $K_{\text{П}_{0,01}}$. Полученные в результате величины $\gamma_{0,1}$ и $\gamma_{0,01}$ позволяют определить коэффициенты прямоугольности:

$$K_{\text{П}_{0,1}}(N) = \frac{\Delta\omega_{0,1}}{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}} = \frac{\gamma_{0,1}(N)}{\gamma_{0,7}(N)}; \tag{16.73}$$

$$K_{\text{П}_{0,01}}(N) = \frac{\Delta\omega_{0,01}}{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}} = \frac{\gamma_{0,01}(N)}{\gamma_{0,7}(N)}. \tag{16.74}$$

Зависимости $\Psi_5(N)$, $K_{\text{П}_{0,1}}(N)$ и $K_{\text{П}_{0,01}}(N)$, рассчитанные по формулам (16.71), (16.73) и (16.74), приведены в табл.16.7.

Для расчёта аналогового фильтра-прототипа количество каскадов N следует определять по заданному коэффициенту прямоугольности, а эквивалентное затухание контуров δ — по формулам (16.72) и (16.59).

Таблица 16.7

N	3	6	9	12
$\Psi_5(N)$	0,149	0,21	0,247	0,274
$K_{\text{П}_{0,1}}$	1,539	1,287	1,229	1,205
$K_{\text{П}_{0,01}}$	3,01	1,728	1,495	1,406

Пример 16.5. По аналоговому прототипу (ПЧ-тракт типа 3 при максимально допустимой обобщённой расстройке $\eta_{\max}$) спроектировать рекурсивный комплексный цифровой фильтр для ПЧ-тракта радиоприёмного устройства, имеющего следующие параметры: опорная (центральная) частота $f_{\text{оп}} = 30$ МГц, ширина полосы пропускания $\Delta f_{\text{ПЧ}} = 4$ МГц, коэффициент прямоугольности $K_{\Pi_{0,1}} = 1{,}25$.

Согласно табл.16.7 по заданному значению $K_{\Pi_{0,1}}$ определяем необходимое число каскадов $N = 9$, затем подстановкой в формулу (16.72) значения $\Psi_5(9) = 0{,}247$ и параметров ПЧ-тракта находим $\delta = 0{,}033$ и ширину полос пропускания каждого из боковых каскадов $\Delta f_{\text{п}} = \delta f_{\text{оп}} = 0{,}987$ МГц, а с учётом (16.59) также каскада, настроенного на опорную частоту, $\Delta f_{\text{оп}}^{(\text{в})} = 2\delta f_{\text{оп}} = 1{,}974$ МГц. По формулам (16.32) и (16.34) при $\eta_{\max}(9) = 3{,}914$ (см. табл.16.6) вычисляем величину расстройки боковых каскадов F_0:

$$F_0 = f_{\text{оп}}\,\delta\,\eta_{\max} \,/\, 2 = 1{,}932 \text{ МГц}.$$

Выберем частоту дискретизации $f_{\text{д}} = 10$ МГц. Согласно (16.9) запишем выражения для передаточных функций цифровых эквивалентов расстроенной тройки одноконтурных каскадов:

$$\dot{\mathbf{H}}^{(1а)}(z) = \frac{a_0^{(а)} + a_1^{(а)} z^{-1}}{1 + b_1^{(а)} z^{-1}}; \qquad \dot{\mathbf{H}}^{(1б)}(z) = \frac{a_0^{(б)} + a_1^{(б)} z^{-1}}{1 + b_1^{(б)} z^{-1}};$$

$$\dot{\mathbf{H}}^{(1в)}(z) = \frac{a_0^{(в)} + a_1^{(в)} z^{-1}}{1 + b_1^{(в)} z^{-1}},$$

где коэффициенты определяются по формулам (16.10) и (16.11) при расстройках $\pm F_0$ для боковых каскадов и при нулевой расстройке для каскада, настроенного на опорную частоту $\omega_{\text{оп}}$. С учётом множителя $\sqrt[3]{\left(1+\eta_{\max}^2\right)} = 2{,}536$ для нормировки максимумов АЧХ [см. (16.61)] найдём эти коэффициенты:

$$a_0^{(а)} = a_1^{(а)} = 0{,}267 + j\,0{,}14; \qquad b_1^{(а)} = -0{,}357 - j\,0{,}713;$$

$$a_0^{(б)} = a_1^{(б)} = 0{,}267 - j\,0{,}14; \qquad b_1^{(б)} = -0{,}357 + j\,0{,}713;$$

$$a_0^{(в)} = a_1^{(в)} = 0{,}6; \qquad b_1^{(в)} = -0{,}527.$$

Для расчёта АЧХ каскадов воспользуемся выражениями (16.17) и (16.19). На рис.16.7 изображены амплитудно-частотные характеристики цифровых эквивалентов одноконтурных каскадов расстроенной тройки (пунктирная, штрих-пунктирная и точечная линии), а также АЧХ 9-каскадного комплексного ЦФ (сплошная линия).

АЧХ фильтра трёхгорбая с симметричными провалами, величина которых составляет -3 дБ от максимальных уровней. Ширина полосы пропускания синтезированного комплексного рекурсивного ЦФ $\Delta f_{\text{ПЧ}} = 3{,}572$ МГц, что на 10,7 % меньше заданного значения (4 МГц), а коэффициент прямоугольности $K_{\Pi_{0,1}} = 1{,}172$, что меньше (не хуже) заданного. Расширить полосу пропускания 9-каскадного комплексного ЦФ до требуемого значения 4 МГц можно увеличением эквивалентного затухания боковых каскадов δ до 0,03804 (затухание настроенных каскадов $\delta^{(\text{в})} = 0{,}076$). Это приводит также к небольшому улучшению прямоугольности АЧХ: $K_{\Pi_{0,1}} = 1{,}16$.

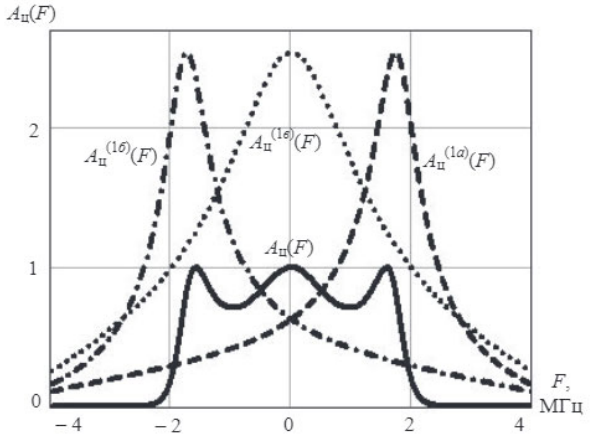


Рис.16.7. Амплитудно-частотные характеристики рекурсивных комплексных ЦФ: однокаскадных, расстроенных на $\pm F_0$ при η_{max}, и настроенного на опорную частоту $f_{оп}$ (пунктирная, штрих-пунктирная и точечная линии соответственно), а также 9-каскадного фильтра (сплошная линия)

♦ ПЧ-тракты типа 4

Амплитудно-частотная характеристика двухконтурного каскада (16.4), резонансная частота ω_0 которого совпадает с опорной $\omega_{оп}$ (т.е. при $\Omega_0 = 0$), может быть записана в следующем виде:

$$A^{(2a)}(\xi) = \frac{K_2\,\beta}{\sqrt{\left[\beta^2 + 1 - (\xi/\delta)^2\right]^2 + 4(\xi/\delta)^2}}, \qquad (16.75)$$

где ξ — *относительная расстройка* текущей частоты, определяемая выражением (16.22); β — *фактор связи* между контурами [см. формулу (16.2)].

Выражение (16.75) после элементарных преобразований примет вид, аналогичный (16.33):

$$A^{(2a)}(\xi) = \frac{K_2\,\beta}{\sqrt{(\xi/\delta)^4 + 2(\xi/\delta)^2\left(1-\beta^2\right) + \left(1+\beta^2\right)^2}}, \qquad (16.76)$$

где вместо обобщённой расстройки η [см. (16.34)] фигурирует фактор связи β.

Отсюда следует, что характеристики двухконтурного каскада ПЧ-тракта эквивалентны характеристикам симметрично расстроенной двойки одноконтурных каскадов.

Исследуя на экстремум функцию (16.76), находим, что она имеет три экстремальные точки:

$$\begin{cases} \xi_1 = 0; \\ \xi_{2,3} = \pm\delta\sqrt{\beta^2 - 1}. \end{cases} \qquad (16.77)$$

Из (16.77) следует, что при слабой связи между контурами ($\beta<1$) расстройки $\xi_{2,3}$ получаются мнимыми, т.е. АЧХ имеет единственный максимум на опорной частоте ($\xi=0$). С увеличением фактора связи β двухконтурной системы АЧХ приобретает всё более и более плоскую вершину вплоть до критической связи ($\beta=1$). При сильной связи ($\beta>1$) из формулы (16.77) получаются вещественные значения относительных расстроек $\xi_{2,3}$. Это значит, что АЧХ имеет два максимума, соответствующих относительным расстройкам ξ_2 и ξ_3, между которыми находится минимум.

Согласно (16.76) максимальные значения коэффициента передачи двухконтурного каскада

$$\left[A^{(2a)}(\xi)\right]_{\max} = \begin{cases} \dfrac{K_2\beta}{1+\beta^2}, & \beta \le 1; \\ \dfrac{K_2}{2}, & \beta > 1, \end{cases} \qquad (16.78)$$

а нормированная АЧХ

$$A^{(2)}(\xi) = \frac{A^{(2a)}(\xi)}{\left[A^{(2a)}(\xi)\right]_{\max}} = \begin{cases} \dfrac{1+\beta^2}{\sqrt{(\xi/\delta)^4 + 2(\xi/\delta)^2\left(1-\beta^2\right) + \left(1+\beta^2\right)^2}}, & \beta \le 1; \\ \dfrac{2\beta}{\sqrt{(\xi/\delta)^4 + 2(\xi/\delta)^2\left(1-\beta^2\right) + \left(1+\beta^2\right)^2}}, & \beta > 1. \end{cases} \qquad (16.79)$$

Отметим, что выражение (16.79) идентично выражению (16.37) при замене обобщённой расстройки η фактором связи β.

АЧХ многокаскадного ПЧ-тракта, состоящего из N двухконтурных каскадов, имеет следующий вид:

$$A(\xi) = \left[A^{(2)}(\xi)\right]^N = \begin{cases} \left[\dfrac{1+\beta^2}{\sqrt{(\xi/\delta)^4 + 2(\xi/\delta)^2\left(1-\beta^2\right) + \left(1+\beta^2\right)^2}}\right]^N, & \beta \le 1; \\ \left[\dfrac{2\beta}{\sqrt{(\xi/\delta)^4 + 2(\xi/\delta)^2\left(1-\beta^2\right) + \left(1+\beta^2\right)^2}}\right]^N, & \beta > 1. \end{cases} \qquad (16.80)$$

Форма АЧХ и ширина полосы пропускания ПЧ-тракта с двухконтурными каскадами определяются двумя параметрами: фактором связи β и затуханием контуров δ.

Наибольший интерес представляет критическая связь контуров ($\beta=1$), при которой максимальным образом проявляются свойства усилителя с двухконтурными каскадами, а АЧХ остаётся одногорбой.

При сильной связи $\beta>1$ АЧХ становится двугорбой, из-за чего применение такой связи является нежелательным. В тех случаях, когда достижение необходимых параметров ПЧ-тракта другими методами оказывается невозможным, используют вариант $\beta>1$. При этом целесообразно выбирать значение β максимально большим.

Это предельно допустимое значение $\beta_{\max}$ определяется величиной провала АЧХ между двумя горбами. В пределе провал может быть равен $1/\sqrt{2}$. Из выражения (16.80) при $\xi=0$ и $\beta>1$ получим

$$[A(\xi)]_{\xi=0}=\left(\frac{2\beta}{1+\beta^2}\right)^N. \qquad (16.81)$$

Максимально допустимое значение фактора связи $\beta_{\max}$ имеет место при

$$[A(\xi)]_{\xi=0}=\left(\frac{2\beta_{\max}}{1+\beta_{\max}^2}\right)^N=\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (16.82)$$

Решая это уравнение, получим [ср. с (16.41)]

$$\beta_{\max}={}^{2N}\sqrt{2}+\sqrt{{}^{N}\sqrt{2}-1}. \qquad (16.83)$$

Рассмотрим три варианта ПЧ-тракта с двухконтурными каскадами: при слабой ($\beta=0{,}5$), критической ($\beta=1$) и сильной ($\beta=\beta_{\max}$) связи между контурами. Как и в случае ПЧ-трактов с одноконтурными каскадами, будем интересоваться только избирательными свойствами.

Слабая связь $\beta=0{,}5$

Поставляя значения $\beta=0{,}5$ и $\xi_{0,707}=\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/\omega_{\text{оп}}$ в выражение (16.80) и приравнивая $A(\xi)=1/\sqrt{2}$, запишем уравнение

$$\left\{\frac{1{,}25}{\sqrt{[\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/(\omega_{\text{оп}}\delta)]^4+1{,}5[\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/(\omega_{\text{оп}}\delta)]^2+1{,}5625}}\right\}^N=\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad (16.84)$$

решая которое относительно δ, получим

$$\delta=\frac{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}}{\omega_{\text{оп}}}\Psi_6(N), \qquad (16.85)$$

где

$$\Psi_6(N)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{0{,}5625+1{,}5625\left(\sqrt[N]{2}-1\right)}-0{,}75}} \qquad (16.86)$$

— функция, зависящая от числа каскадов N, возрастающая с увеличением N.

Коэффициенты прямоугольности по уровням 0,1 и 0,01 $K_{П_{0,1}}$ и $K_{П_{0,01}}$, характеризующие избирательность ПЧ-тракта, определяются формулами [73]:

$$K_{П_{0,1}}(N)=\frac{\Delta\omega_{0,1}}{\Delta\omega_{ПЧ}}=\sqrt{\frac{\sqrt{0{,}5625+1{,}5625\left(\sqrt[N]{10^2}-1\right)}-0{,}75}{\sqrt{0{,}5625+1{,}5625\left(\sqrt[N]{2}-1\right)}-0{,}75}}; \qquad (16.87)$$

$$K_{П_{0,01}}(N)=\frac{\Delta\omega_{0,01}}{\Delta\omega_{ПЧ}}=\sqrt{\frac{\sqrt{0{,}5625+1{,}5625\left(\sqrt[N]{10^4}-1\right)}-0{,}75}{\sqrt{0{,}5625+1{,}5625\left(\sqrt[N]{2}-1\right)}-0{,}75}}. \qquad (16.88)$$

Из выражений (16.43) — (16.46) видно, что при заданных ширине полосы пропускания $\Delta\omega_{уПЧ}$ и опорной частоте $\omega_{оп}$ в ПЧ-трактах на двухконтурных каскадах при $\beta<1$ требуемое эквивалентное затухание контуров δ, а также коэффициенты прямоугольности $K_{П_{0,1}}$ и $K_{П_{0,01}}$ зависят только от числа каскадов N.

Зависимости $\Psi_6(N)$, $K_{П_{0,1}}(N)$ и $K_{П_{0,01}}(N)$, рассчитанные по формулам (16.85) — (16.88), приведены в табл.16.8.

Таблица 16.8

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Psi_6(N)$	1,19	1,69	2,07	2,38	2,66	2,91	3,14	3,35	3,55	3,74
$K_{П_{0,1}}$	4,07	2,96	2,73	2,65	2,61	2,58	2,57	2,56	2,56	2,55
$K_{П_{0,01}}$	13,3	5,79	4,61	4,18	3,97	3,85	3,77	3,73	3,69	3,67

Для расчёта аналогового фильтра-прототипа количество каскадов N следует определять по заданному коэффициенту прямоугольности, а эквивалентное затухание контуров δ — по формулам (16.85) и (16.86).

Пример 16.6. По аналоговому прототипу (ПЧ-тракт типа 4 при слабой связи $\beta=0{,}5$) спроектировать рекурсивный комплексный цифровой фильтр для ПЧ-тракта радиоприёмного устройства, имеющего следующие параметры: опорная (центральная) частота $f_{оп}=30$ МГц, ширина полосы пропускания $\Delta f_{ПЧ}=2$ МГц, коэффициент прямоугольности $K_{П_{0,1}}=2{,}6$.

Согласно табл.16.8 по $K_{П_{0,1}}$ определяем необходимое число каскадов $N = 6$, затем подстановкой в (16.85) значения $\Psi_6(6) = 2{,}91$ и параметров ПЧ-тракта находим $\delta = 0{,}194$ и ширину полосы пропускания одного каскада $\Delta f_п = \delta f_{оп} = 5{,}82$ МГц.

Выберем частоту дискретизации $f_д = 10$ МГц. Согласно (16.12) запишем выражение для передаточной функции цифрового эквивалента двухконтурного каскада:

$$\dot{\mathbf{H}}^{(2)}(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}},$$

где коэффициенты определяются по формулам (16.13) — (16.16) с учётом множителя $\left(1+\beta^2\right)\big/\beta = 2{,}5$ для нормировки максимума АЧХ [см. (16.79)]:

$$a_0 = -j\,0{,}27; \qquad a_1 = -j\,0{,}539; \qquad a_2 = -j\,0{,}27;$$

$$b_1 = 0{,}023; \qquad b_2 = 0{,}056.$$

Для расчёта АЧХ каскадов ЦФ воспользуемся формулами (16.18) и (16.20). На рис.16.8 изображены амплитудно-частотныая характеристика цифрового эквивалента двухконтурного каскада при слабой связи $\beta = 0{,}5$ (пунктирная линия), а также АЧХ 6-каскадного комплексного ЦФ $A(F) = \left[A^{(2)}(F)\right]^6$ (сплошная линия).

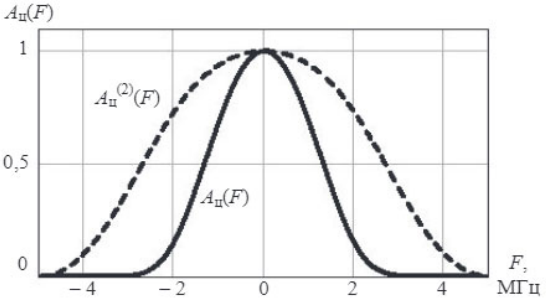


Рис.16.8. Амплитудно-частотные характеристики рекурсивных комплексных цифровых фильтров: двухконтурного каскада при слабой связи $\beta = 0{,}5$ (пунктирная линия), а также АЧХ 6-каскадного комплексного ЦФ (сплошная линия)

Ширина полосы пропускания синтезированного комплексного рекурсивного ЦФ $\Delta f_{ПЧ} = 1{,}94$ МГц, что на 3 % меньше заданного значения (2 МГц), а коэффициент прямоугольности $K_{П_{0,1}} = 2{,}237$, что меньше (не хуже) заданного. Расширить полосу пропускания 6-каскадного комплексного ЦФ до 2 МГц можно путём увеличения эквивалентного затухания δ до значения 0,2005. Это приводит также к небольшому улучшению коэффициента прямоугольности АЧХ: $K_{П_{0,1}} = 2{,}223$.

Критическая связь $\beta = 1$

Поставляя значения $\beta = 1$ и $\xi_{0,707} = \Delta\omega_{ПЧ} \big/ \omega_{оп}$ в выражение (16.80) и приравнивая $A(\xi) = 1\big/\sqrt{2}$, запишем уравнение

$$\left\{\frac{2}{\sqrt{\left[\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/(\omega_{\text{оп}}\delta)\right]^4+4}}\right\}^N=\frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{16.89}$$

решая которое относительно δ, получим

$$\delta=\frac{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}}{\omega_{\text{оп}}}\Psi_7(N), \tag{16.90}$$

где

$$\Psi_7(N)=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\sqrt[N]{2}-1}} \tag{16.91}$$

— функция, зависящая от числа каскадов N, возрастающая с увеличением N.

Коэффициенты прямоугольности по уровням 0,1 и 0,01 $K_{\text{П}_{0,1}}$ и $K_{\text{П}_{0,01}}$, характеризующие избирательность ПЧ-тракта, определяются формулами [73]:

$$K_{\text{П}_{0,1}}(N)=\frac{\Delta\omega_{0,1}}{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}}=\sqrt[4]{\frac{\sqrt[N]{10^2}-1}{\sqrt[N]{2}-1}}; \tag{16.92}$$

$$K_{\text{П}_{0,01}}(N)=\frac{\Delta\omega_{0,01}}{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}}=\sqrt[4]{\frac{\sqrt[N]{10^4}-1}{\sqrt[N]{2}-1}}. \tag{16.93}$$

Из выражений (16.90) — (16.93) видно, что при заданных ширине полосы пропускания $\Delta\omega_{\text{ПЧ}}$ и опорной частоте $\omega_{\text{оп}}$ в ПЧ-трактах типа 4 при $\beta=1$ требуемое эквивалентное затухание контуров δ, а также коэффициенты прямоугольности $K_{\text{П}_{0,1}}$ и $K_{\text{П}_{0,01}}$ зависят только от числа каскадов N.

Зависимости $\Psi_7(N)$, $K_{\text{П}_{0,1}}(N)$ и $K_{\text{П}_{0,01}}(N)$, рассчитанные по формулам (16.91) — (16.93), приведены в табл.16.9.

Таблица 16.9

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Psi_7(N)$	0,71	0,88	0,99	1,07	1,14	1,2	1,25	1,29	1,33	1,37
$K_{\text{П}_{0,1}}$	3,15	2,16	1,94	1,84	1,79	1,75	1,73	1,71	1,7	1,69
$K_{\text{П}_{0,01}}$	10	3,93	2,98	2,63	2,44	2,34	2,26	2,21	2,17	2,14

Для расчёта аналогового фильтра-прототипа количество каскадов N следует определять по заданному коэффициенту прямоугольности, а эквивалентное затухание контуров δ — по формулам (16.90) и (16.91).

Пример 16.7. По аналоговому прототипу (ПЧ-тракт типа 4 при критической связи $\beta = 1$) спроектировать рекурсивный комплексный цифровой фильтр для ПЧ-тракта радиоприёмного устройства, имеющего следующие параметры: опорная (центральная) частота $f_{оп} = 30$ МГц, ширина полосы пропускания $\Delta f_{ПЧ} = 2$ МГц, коэффициент прямоугольности $K_{П_{0,1}} = 1{,}8$.

Согласно табл.16.9 по $K_{П_{0,1}}$ определяем необходимое число каскадов $N = 5$, затем подстановкой в (16.90) значения $\Psi_7(5) = 1{,}14$ и параметров ПЧ-тракта находим $\delta = 0{,}076$ и ширину полосы пропускания одного каскада $\Delta f_п = \delta f_{оп} = 2{,}28$ МГц.

Выберем частоту дискретизации $f_д = 10$ МГц. Согласно (16.12) запишем выражение для передаточной функции цифрового эквивалента двухконтурного каскада:

$$\dot{\mathbf{H}}^{(2)}(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}},$$

где коэффициенты определяются по формулам (16.13) — (16.16) с учётом множителя $\left(1 + \beta^2\right) \big/ \beta = 2$ для нормировки максимума АЧХ [см. (16.79)]:

$$a_0 = -j\,0{,}13; \qquad a_1 = -j\,0{,}26; \qquad a_2 = -j\,0{,}13;$$

$$b_1 = -0{,}754; \qquad b_2 = 0{,}274.$$

На рис.16.9 изображены амплитудно-частотная характеристика цифрового эквивалента двухконтурного каскада при критической связи $\beta = 1$ (пунктирная линия), а также АЧХ 5-каскадного комплексного ЦФ $A(F) = \left[A^{(2)}(F)\right]^5$ (сплошная линия).

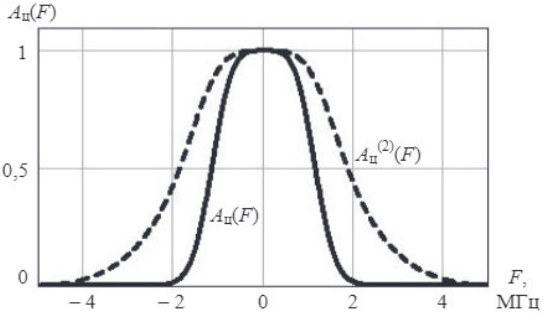


Рис.16.9. Амплитудно-частотные характеристики рекурсивных комплексных цифровых фильтров: двухконтурного каскада при $\beta = 1$ (пунктирная линия), а также АЧХ 5-каскадного комплексного ЦФ (сплошная линия)

АЧХ цифровых фильтров, изображённые на рис.16.9, рассчитаны по формулам (16.18) и (16.20). Ширина полосы пропускания синтезированного комплексного рекурсивного ЦФ $\Delta f_{ПЧ} = 1{,}94$ МГц, что на 3 % меньше заданного значения (2 МГц), а коэффициент прямоугольности $K_{П_{0,1}} = 1{,}68$, что меньше (не хуже) заданного. Расширить полосу пропускания 5-каскадного комплексного ЦФ до 2 МГц можно путём увеличения эквивалентного затухания δ до значения 0,0785. Это приводит также к небольшому улучшению коэффициента прямоугольности АЧХ: $K_{П_{0,1}} = 1{,}674$.

Максимально допустимая связь $\beta_{\max} = \sqrt[2N]{2} + \sqrt{\sqrt[N]{2} - 1}$

Поставляя значения $\beta_{\max}$ [см. (16.83)] и $\xi_{0,707} = \Delta\omega_{\text{ПЧ}} / \omega_{\text{оп}}$ в выражение (16.80) и приравнивая $A(\xi) = 1/\sqrt{2}$, запишем уравнение

$$\left\{ \frac{2\beta_{\max}}{\sqrt{[\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/(\omega_{\text{оп}}\delta)]^4 + 2[\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/(\omega_{\text{оп}}\delta)]^2 \left(1 - \beta_{\max}^2\right) + \left(1 + \beta_{\max}^2\right)^2}} \right\}^N = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{16.94}$$

решая которое относительно δ, получим

$$\delta = \frac{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}}{\omega_{\text{оп}}} \Psi_8(N), \tag{16.95}$$

где

$$\Psi_8(N) = \frac{1}{\sqrt{\beta_{\max}^2 - 1 + 2\beta_{\max}\sqrt{\sqrt[N]{2} - 1}}} \tag{16.96}$$

— функция, зависящая от числа каскадов N, возрастающая с увеличением N.

Величина максимально допустимого фактора связи $\beta_{\max}$, входящая в формулу (16.96), определяется выражением (16.83).

Коэффициенты прямоугольности по уровням 0,1 и 0,01 $K_{\text{П}_{0,1}}$ и $K_{\text{П}_{0,01}}$, характеризующие избирательность ПЧ-тракта, определяются формулами [73]:

$$K_{\text{П}_{0,1}}(N) = \frac{\Delta\omega_{0,1}}{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}} = \sqrt{\frac{\beta_{\max}^2 - 1 + 2\beta_{\max}\sqrt{\sqrt[N]{10^2} - 1}}{\beta_{\max}^2 - 1 + 2\beta_{\max}\sqrt{\sqrt[N]{2} - 1}}}; \tag{16.97}$$

$$K_{\text{П}_{0,01}}(N) = \frac{\Delta\omega_{0,01}}{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}} = \sqrt{\frac{\beta_{\max}^2 - 1 + 2\beta_{\max}\sqrt{\sqrt[N]{10^4} - 1}}{\beta_{\max}^2 - 1 + 2\beta_{\max}\sqrt{\sqrt[N]{2} - 1}}}. \tag{16.98}$$

Из выражений (16.95) — (16.98) видно, что при заданных ширине полосы пропускания $\Delta\omega_{\text{ПЧ}}$ и опорной частоте $\omega_{\text{оп}}$ в ПЧ-трактах типа 4 при $\beta = \beta_{\max}$ требуемое эквивалентное затухание контуров δ, а также коэффициенты прямоугольности $K_{\text{П}_{0,1}}$ и $K_{\text{П}_{0,01}}$ зависят только от числа каскадов N.

Зависимости $\Psi_8(N)$, $K_{\text{П}_{0,1}}(N)$ и $K_{\text{П}_{0,01}}(N)$, рассчитанные по формулам (16.96) — (16.98), приведены в табл.16.10.

Для расчёта аналогового фильтра-прототипа количество каскадов N следует определять по заданному коэффициенту прямоугольности, а эквивалентное затухание контуров δ — по формулам (16.95) и (16.96).

Таблица 16.10

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Psi_8(N)$	0,32	0,46	0,55	0,61	0,67	0,71	0,75	0,79	0,82	0,85
$K_{П_{0,1}}$	2,34	1,68	1,54	1,48	1,45	1,43	1,41	1,4	1,39	1,39
$K_{П_{0,01}}$	7,11	2,87	2,22	1,99	1,87	1,8	1,75	1,72	1,69	1,67

Пример 16.8. По аналоговому прототипу (ПЧ-тракт типа 4 при максимально допустимом факторе связи $\beta_{\max}$) спроектировать рекурсивный комплексный ЦФ для ПЧ-тракта радиоприёмного устройства, имеющего следующие параметры: опорная (центральная) частота $f_{оп} = 30$ МГц, ширина полосы пропускания $\Delta f_{ПЧ} = 4$ МГц, коэффициент прямоугольности $K_{П_{0,1}} = 1,45$.

Согласно табл.16.10 по $K_{П_{0,1}}$ определяем необходимое число каскадов $N = 5$, затем подстановкой в (16.95) значения $\Psi_8(5) = 0,67$ и параметров ПЧ-тракта находим эквивалентное затухание $\delta = 0,089$, ширину полосы пропускания одного каскада $\Delta f_п = \delta f_{оп} = 2,668$ МГц и максимально допустимый фактор связи $\beta_{\max} = 1,457$ [см. (16.83].

Выберем частоту дискретизации $f_д = 10$ МГц.

Согласно (16.12) запишем выражение для передаточной функции цифрового эквивалента двухконтурного каскада:

$$\dot{\mathbf{H}}^{(2)}(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}},$$

коэффициенты которой определяются по формулам (16.13) — (16.16) с учётом множителя $K_2 = 2\beta / \beta = 2$ для нормировки максимума АЧХ [см. (16.78) и (16.79)]:

$$a_0 = -j\,0,214; \qquad a_1 = -j\,0,429; \qquad a_2 = -j\,0,214;$$

$$b_1 = -0,378; \qquad b_2 = 0,298.$$

Расчёт АЧХ комплексного рекурсивного ЦФ 2-го порядка проведём с помощью выражений (16.18) и (16.20).

На рис.16.10 изображены амплитудно-частотная характеристика цифрового эквивалента двухконтурного каскада при максимально допустимом факторе связи $\beta_{\max}$ (пунктирная линия), а также АЧХ 2-каскадного комплексного ЦФ $A(F) = \left[A^{(2)}(F)\right]^2$ (сплошная линия). Неравномерность результирующей АЧХ в полосе пропускания составляет 3 дБ.

Ширина полосы пропускания синтезированного комплексного рекурсивного 5-каскадного ЦФ $\Delta f_{ПЧ} = 3,57$ МГц, что на 10,8 % меньше заданного значения (4 МГц), а коэффициент прямоугольности $K_{П_{0,1}} = 1,315$, что меньше (не хуже) заданного. Расширить полосу пропускания 2-каскадного комплексного ЦФ до 4 МГц удаётся путём увеличения эквивалентного затухания δ до значения 0,10286 (на 15.6 %). Это приводит также к небольшому улучшению коэффициента прямоугольности АЧХ: $K_{П_{0,1}} = 1,29$.

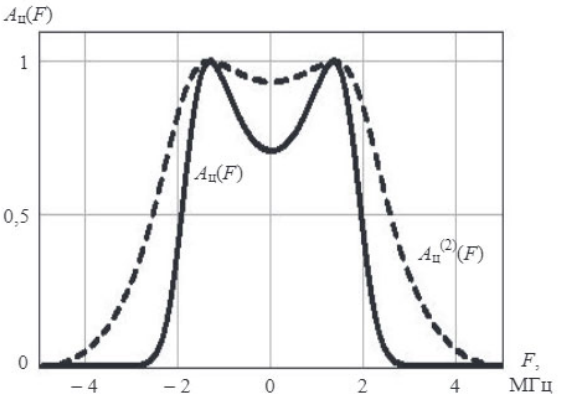


Рис.16.10. АЧХ рекурсивных комплексных ЦФ: двухконтурного каскада при максимально допустимой связи $\beta_{\max}$ (пунктирная линия), а также АЧХ 2-каскадного комплексного ЦФ (сплошная линия)

Особенностью блоков 2-го порядка комплексных ЦФ, синтезированных в примерах 16.6 — 16.8, является то, что коэффициенты передаточной функции (16.12) a_0, a_1 и a_2 являются мнимыми, а коэффициенты b_1 и b_2 — вещественными. В структурных схемах этих блоков (см. рис.4.6) отсутствуют звенья с передаточными функциями $A_c(z^{-1})$ и $B_s(z^{-1})$.

♦ ПЧ-тракты типа 5

В многокаскадных ПЧ-трактах одни каскады могут быть одноконтурными, а другие — двухконтурными. Представляет интерес случай настройки всех контуров на опорную частоту $\omega_{оп}$. При этом в двухконтурных каскадах используется сильная связь $\beta > 1$, а провал в АЧХ компенсируется одноконтурными каскадами таким образом, чтобы результирующая амплитудно-частотная характеристика оказалась трёхгорбой, как в случае расстроенных троек одноконтурных каскадов.

Укороченные комплексные коэффициенты передачи каскадов ПЧ-тракта, построенного по смешанной схеме, согласно (16.3) и (16.4) имеют следующий вид:

$$\dot{\mathbf{H}}^{(1)}(j\Omega) = \frac{K_1}{1 + \dfrac{j\Omega}{\Delta\omega_{п}^{(1)}/2}}; \qquad \dot{\mathbf{H}}^{(2)}(j\Omega) = K_2 \frac{-j\beta}{\beta^2 + \left(1 + \dfrac{j\Omega}{\Delta\omega_{п}/2}\right)^2}. \tag{16.99}$$

Здесь учтено, что $\Delta\omega_{п}^{(1)} = 2\Delta\omega_{п}$, т.е. затухание в одноконтурном каскаде в два раза больше, чем в двухконтурном [см. (16.59)].

Запишем выражение для АЧХ пары каскадов (одноконтурного и двухконтурного):

$$A^{(1)}(\xi)A^{(2)}(\xi)=K_1K_2\frac{\beta}{\sqrt{\left\{1+[\xi/(2\delta)]^2\right\}\left\{(\xi/\delta)^4+2(\xi/\delta)^2\left(1-\beta^2\right)+\left(1+\beta^2\right)^2\right\}}}, \tag{16.100}$$

где переменная ξ определяется формулой (16.31).

Уравнение (16.100) имеет максимум при $\xi=0$:

$$\left[A^{(1)}(\xi)A^{(2)}(\xi)\right]_{\max}=K_1K_2\frac{\beta}{1+\beta^2}. \tag{16.101}$$

Нормированную АЧХ пары каскадов ПЧ-тракта типа 5 получим, разделив (16.100) на (16.101). В результате будем иметь

$$A^{(1\&2)}(\xi)=\frac{A^{(1)}(\xi)A^{(2)}(\xi)}{\left[A^{(1)}(\xi)A^{(2)}(\xi)\right]_{\max}}=$$

$$=\frac{2\left(1+\beta^2\right)}{\sqrt{(\xi/\delta)^6-2\left[\beta^2-3\right](\xi/\delta)^4+\left[\beta^2-3\right]^2(\xi/\delta)^2+4\left[1+\beta^2\right]^2}}. \tag{16.102}$$

Анализируя выражение (16.102) на экстремум, получим значения абсцисс максимумов (горбов) и минимумов (впадин) трёхгорбой АЧХ пары каскадов ПЧ-тракта типа 5 (по смешанной схеме):

$$\gamma_{(\max)}=\pm\sqrt{\beta^2-3}\ \text{ и }\ 0; \tag{16.103}$$

$$\gamma_{(\min)}=\pm\sqrt{\frac{\beta^2-3}{3}}, \tag{16.104}$$

где $\gamma=\xi/\delta=2\Omega/(\omega_{\text{оп}}\delta)$ — *обобщённая расстройка* текущей частоты ω относительно $\omega_{\text{оп}}$.

Величина фактора связи β определяет форму АЧХ пары каскадов по смешанной схеме $A^{(1\&2)}(\xi)$. Уменьшение β приводит к постепенному сближению абсцисс максимумов и минимумов АЧХ. Они сливаются в одну точку при критическом значении $\beta_{\text{кр}}=\sqrt{3}$. В случае слабой связи (при $\beta\le\beta_{\text{кр}}$) АЧХ $A^{(1\&2)}(\xi)$ будет одногорбой.

АЧХ многокаскадного ПЧ-тракта типа 5, состоящего из $N/2$ пар каскадов по смешанной схеме, имеет вид

$$A(\xi)=\left[A^{(1\&2)}(\xi)\right]^{N/2}=$$

$$= \left\{ \frac{2\left(1+\beta^2\right)}{\sqrt{(\xi/\delta)^6 - 2\left[\beta^2-3\right](\xi/\delta)^4 + \left[\beta^2-3\right]^2(\xi/\delta)^2 + 4\left[1+\beta^2\right]^2}} \right\}^{N/2}. \tag{16.105}$$

Поставляя абсциссы впадин (16.104) в выражение (16.105), получим, что впадинам соответствуют значения АЧХ $A(\xi_{\text{вп}})$, зависящие от β и N.

Имеет смысл рассматривать не любые АЧХ ПЧ-тракта типа 5, а только ту из них, у которой провал во впадинах равен $1/\sqrt{2}$. Это соответствует максимально допустимому фактору связи в двухконтурном каскаде $\beta_{\max}$, определяемому из уравнения

$$\left\langle \frac{2\left(1+\beta_{\max}^2\right)}{\left\{\left[\left(\beta_{\max}^2-3\right)/3\right]^3 - 2\left[\beta_{\max}^2-3\right]\left[\left(\beta_{\max}^2-3\right)/3\right]^2 + \right.} \right.$$

$$\left. \left. \rightarrow \frac{}{+\left[\beta_{\max}^2-3\right]^2\left[\left(\beta_{\max}^2-3\right)/3\right] + 4\left[1+\beta_{\max}^2\right]^2\right\}^{1/2}} \right\rangle^{N/2} = 1/\sqrt{2}, \tag{16.106}$$

которое после элементарных преобразований приводится к бикубическому уравнению

$$\beta_{\max}^6 - 9\left(3\sqrt[N]{4}-2\right)\beta_{\max}^4 - 27\left(2\sqrt[N]{4}-3\right)\beta_{\max}^2 - 27\sqrt[N]{4} = 0. \tag{16.107}$$

Решая это уравнение, можно определить величину $\beta_{\max}$ для любого числа каскадов N, кратного двум. Аналитическое решение уравнения (16.107) по формуле Кардано [39] представляется довольно громоздким, поэтому предпочтительнее воспользоваться численным решением, которое может быть получено для конкретных значений N. Рассчитанные значения $\beta_{\max}(N)$ сведены в табл.16.11.

Определим затухание δ, необходимое для обеспечения заданной ширины полосы пропускания ПЧ-тракта $\Delta\omega_{\text{ПЧ}}$. С этой целью приравняем выражение (16.105) при расстройке, соответствующей половине ширины полосы пропускания ПЧ-тракта, значению $1/\sqrt{2}$:

$$\left\langle \frac{2\left(1+\beta_{\max}^2\right)}{\left\{\left[\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/(\omega_{\text{оп}}\delta)\right]^6 - 2\left[\beta_{\max}^2-3\right]\left[\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/(\omega_{\text{оп}}\delta)\right]^4 + \right.} \right.$$

$$\left. \left. \rightarrow \frac{}{+\left[\beta_{\max}^2-3\right]^2\left[\Delta\omega_{\text{ПЧ}}/(\omega_{\text{оп}}\delta)\right]^2 + 4\left[1+\beta_{\max}^2\right]^2\right\}^{1/2}} \right\rangle^{N/2} = 1/\sqrt{2}. \tag{16.108}$$

Таблица 16.11

N	2	4	6	8	10
$\beta_{\max}$	6,064	4,477	3,914	3,607	3,408

Отсюда после несложных преобразований получаем бикубическое уравнение

$$(\gamma_{0,7})^6 - 2\left[\beta_{\max}^2 - 3\right](\gamma_{0,7})^4 + \left[\beta_{\max}^2 - 3\right]^2(\gamma_{0,7})^2 - 4\left[1+\beta_{\max}^2\right]^2\left(\sqrt[N]{4}-1\right) = 0, \tag{16.109}$$

где

$$\gamma_{0,7} = \frac{\xi_{0,7}}{\delta} = \frac{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}}{\omega_{\text{оп}}\delta}. \tag{16.110}$$

Решая уравнение (16.109) для конкретных значений N, получим функцию

$$\Psi_9(N) = 1 \Big/ \gamma_{0,7}. \tag{16.111}$$

Отсюда находим эквивалентное затухание контуров двухконтурных каскадов

$$\delta = \frac{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}}{\omega_{\text{оп}}}\Psi_9(N). \tag{16.112}$$

Для расчёта коэффициентов прямоугольности многокаскадного ПЧ-тракта приходится решать бикубические уравнения, аналогичные уравнению (16.109), отличающиеся от него заменой $\gamma_{0,7}$ и $\sqrt[N]{4}$ на $\gamma_{0,1}$ и $\sqrt[N]{10^4}$ для $K_{\text{П}_{0,1}}$ или на $\gamma_{0,01}$ и $\sqrt[N]{10^8}$ для $K_{\text{П}_{0,01}}$. Полученные в результате величины $\gamma_{0,1}$ и $\gamma_{0,01}$ позволяют определить коэффициенты прямоугольности:

$$K_{\text{П}_{0,1}}(N) = \frac{\Delta\omega_{0,1}}{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}} = \frac{\gamma_{0,1}(N)}{\gamma_{0,7}(N)}; \tag{16.113}$$

$$K_{\text{П}_{0,01}}(N) = \frac{\Delta\omega_{0,01}}{\Delta\omega_{\text{ПЧ}}} = \frac{\gamma_{0,01}(N)}{\gamma_{0,7}(N)}. \tag{16.114}$$

Зависимости $\Psi_5(N)$, $K_{\text{П}_{0,1}}(N)$ и $K_{\text{П}_{0,01}}(N)$, рассчитанные по формулам (16.111) — (16.114), приведены в табл.16.12.

Таблица 16.12

N	2	4	6	8	10
$\Psi_9(N)$	0,149	0,21	0,247	0,274	0,295
$K_{\text{П}_{0,1}}$	1,539	1,287	1,229	1,205	1,299
$K_{\text{П}_{0,01}}$	3,01	1,728	1,495	1,406	1,516

Для расчёта аналогового фильтра-прототипа количество каскадов N следует определять по заданному коэффициенту прямоугольности, а эквивалентное затухание контуров δ — по формулам (16.109) — (16.112).

Пример 16.9. По аналоговому прототипу (ПЧ-тракт типа 5 при максимально допустимой связи в двухконтурных каскадах $\beta_{\max}$) спроектировать рекурсивный комплексный цифровой фильтр для ПЧ-тракта радиоприёмного устройства, имеющего следующие параметры: опорная (центральная) частота $f_{\text{оп}} = 30$ МГц, ширина полосы пропускания $\Delta f_{\text{ПЧ}} = 4$ МГц, коэффициент прямоугольности $K_{\text{П}_{0,1}} = 1{,}23$.

Согласно табл.16.12 по заданному значению $K_{\text{П}_{0,1}}$ определяем необходимое число каскадов $N = 6$, затем подстановкой в (16.112) значения $\Psi_9(6) = 0{,}247$ и параметров ПЧ-тракта находим $\delta = 0{,}033$ и ширину полос пропускания двухконтурных каскадов $\Delta f_{\text{п}} = \delta f_{\text{оп}} = 0{,}987$ МГц, а с учётом (16.59) также одноконтурных каскадов $\Delta f_{\text{п}}^{(1)} = 2\delta f_{\text{оп}} = 1{,}974$ МГц. По табл.16.11 находим фактор связи $\beta_{\max}(6) = 3{,}914$.

Выберем частоту дискретизации $f_{\text{д}} = 10$ МГц. Согласно (16.9) и (16.12) запишем выражения для передаточных функций цифровых эквивалентов одноконтурного и двухконтурного каскадов:

$$\dot{\mathbf{H}}^{(1)}(z) = \frac{a_0^{(1)} + a_1^{(1)} z^{-1}}{1 + b_1^{(1)} z^{-1}};$$

$$\dot{\mathbf{H}}^{(2)}(z) = \frac{a_0^{(2)} + a_1^{(2)} z^{-1} + a_2^{(2)} z^{-2}}{1 + b_1^{(2)} z^{-1} + b_2^{(2)} z^{-2}},$$

где коэффициенты определяются по формулам (16.10) и (16.11) и (16.13) — (16.16) при $\beta_{\max}(6) = 3{,}914$. С учётом множителя $\sqrt{\left(1 + \beta_{\max}^2\right) / \beta_{\max}} = 2{,}042$ для нормировки максимумов АЧХ [см. (16.101)] найдём эти коэффициенты:

$$a_0^{(1)} = a_1^{(1)} = 0{,}483; \qquad b_1^{(1)} = -0{,}527;$$

$$a_0^{(2)} = -j\,0{,}113; \qquad a_1^{(2)} = -j\,0{,}226; \qquad a_2^{(2)} = -j\,0{,}113;$$

$$b_1^{(2)} = -0{,}714; \qquad b_2^{(2)} = 0{,}636.$$

Для расчёта АЧХ каскадов воспользуемся выражениями (16.17) — (16.20). На рис.16.11 изображены амплитудно-частотные характеристики цифровых эквивалентов одноконтурного и двухконтурного каскадов (штрих-пунктирная и пунктирная линии), а также АЧХ 6-каскадного комплексного ЦФ (сплошная линия).

АЧХ фильтра трёхгорбая с симметричными провалами, величина которых составляет -3 дБ от максимальных уровней. Ширина полосы пропускания синтезированного комплексного рекурсивного ЦФ $\Delta f_{\text{ПЧ}} = 3{,}572$ МГц, что на 10,7 % меньше заданного значения (4 МГц), а коэффициент прямоугольности $K_{\text{П}_{0,1}} = 1{,}173$, что меньше (не хуже) заданного. Расширить полосу пропускания 6-каскадного комплексного ЦФ до 4 МГц можно увеличением эквивалентного затухания двухконтурных каскадов δ до значения 0,03804 (затухание одноконтурных каскадов $\delta^{(1)} = 0{,}076$). Это приводит также к небольшому улучшению прямоугольности АЧХ: $K_{\text{П}_{0,1}} = 1{,}16$.

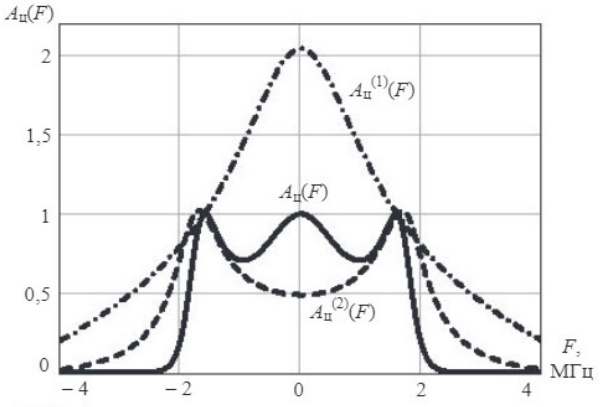


Рис.16.11. Амплитудно-частотные характеристики рекурсивных комплексных ЦФ: одноконтурного и двухконтурного каскадов (штрих-пунктирная и пунктирная линии), а также АЧХ 6-каскадного комплексного ЦФ (сплошная линия)

Синтез рекурсивных комплексных ЦФ по аналоговым прототипам базируется на билинейном преобразовании (см. § 13.8), при котором происходит деформация частотной шкалы. Эта деформация приводит к небольшому сужению полосы пропускания ЦФ, которое можно компенсировать небольшим увеличением эквивалентного затухания контуров δ аналоговых фильтров-прототипов, величину которого приходится подбирать экспериментально.

Структура синтезированных рекурсивных комплексных ЦФ получается каскадной, которая характеризуется наименьшим уровнем собственных шумов квантования на выходе фильтра. В некоторых случаях может потребоваться реализация ЦФ в прямой или канонической формах. Переход от каскадной формы реализации к прямой или канонической форме требует перемножения передаточных функций всех каскадов.

Поскольку передаточные функции ЦФ имеют дробно-рациональную форму, задача сводится к вычислению произведения полиномов. Пусть заданы два полинома степеней n и m соответственно:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{и} \quad g(x)=\sum_{l=0}^{m} b_l x^l . \tag{16.115}$$

Их произведение также является полиномом степени $n+m$ [39]:

$$h(x)=f(x)g(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \sum_{l=0}^{m} b_l x^l=\sum_{k=0}^{n+m} d_k x^k , \tag{16.116}$$

где

$$d_k=\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} , \quad k=\overline{0,\ n+m} . \tag{16.117}$$

16.2. Влияние расположения полюсов и нулей передаточной функции одномерного скалярного комплексного стационарного рекурсивного линейного цифрового фильтра на амплитудно-частотную характеристику

Передаточная функция цифрового фильтра $H(z)$ может быть представлена в различных формах:

- дробно-рациональной (3.7);
- нуль-полюсной (3.38);
- в виде суммы простых дробей (14.14) или (14.16).

Все перечисленные формы равноценны и могут быть преобразованы из одной в другую. Они соответствуют различным формам реализации (структурам) ЦФ: соответственно прямой либо канонической, каскадной и параллельной. Отметим, что представление передаточной функции для реализации ЦФ в каскадной форме является неоднозначным. Это обстоятельство связано с возможностью сгруппировать нули и полюсы фильтра для отдельных блоков различными способами (см. § 11.8 и 14.3).

Одним из возможных способов конструирования передаточных функций $H(z)$ комплексных рекурсивных ЦФ по заданным АЧХ (в том числе и несимметричным, см. гл.15) является *экспериментальный подбор* положения полюсов и нулей на комплексной *Z*-плоскости. Хотя такой подход не может быть полностью формализован, он заслуживает внимания, поскольку позволяет решить задачу даже в тех случаях, когда формализованные методы • не работают. Успех решения задачи при этом зависит от опыта и интуиции проектировщика.

Напомним, что все полюсы устойчивого ЦФ лежат внутри круга единичного радиуса $\left(|z_{pk}|<1,\ k=\overline{1,\ N}\right)$, а нули могут находиться в любой точке комплексной *Z*-плоскости. При этом если все нули ЦФ лежат внутри круга либо на окружности единичного радиуса $\left(|z_{0k}|\le 1,\ k=\overline{1,\ M}\right)$, то фильтр является минимально-фазовым, у которого АЧХ и ФЧХ связаны между собой парой дискретных преобразований Гильберта. Если же хотя бы один из нулей попадает во внешнюю часть круга единичного радиуса $(|z_{0l}|>1)$, то фильтр становится неминимально-фазовым, у которого АЧХ и ФЧХ независимы и могут конструироваться раздельно [1, 3, 8].

Определив таким образом диапазоны положений полюсов и нулей передаточной функции $H(z)$ на *Z*-плоскости, исследуем их влияние на амплитудно-частотную характеристику ЦФ. Исследование проведём методом компьютерного моделирования с использованием системы компьютерной математики Mathcad. Рассмотрим несколько конкретных случаев.

• Например, метод синтеза по аналоговым прототипам.

♦ **Передаточная функция имеет один полюс, нули отсутствуют**

Передаточная функция и амплитудно-частотная характеристика ЦФ этого типа (цифрового резонатора) описываются выражениями:

$$H(z)=\frac{K_0}{1-z_p\,z^{-1}}; \tag{16.118}$$

$$A(W)=\frac{K_0}{\left|1-z_p\,e^{-j\,2\pi W}\right|}, \tag{16.119}$$

где $z_p=\rho_p e^{j\varphi_p}$ — комплексный полюс • передаточной функции (16.118); ρ_p [$\rho_p\in(0,1)$] и φ_p {$\varphi_p\in[-\pi,\ \pi]$} — его модуль и аргумент соответственно, характеризующие положение полюса на Z-плоскости; $W=f\big/f_д$ — нормированная частота.

Используя формулу Эйлера, перепишем выражение (16.119) в виде

$$A(W)=\frac{K_0}{\sqrt{\left[1-\rho_p\cos\left(\varphi_p-2\pi W\right)\right]^2+\left[\rho_p\sin\left(\varphi_p-2\pi W\right)\right]^2}}=$$

$$=\frac{K_0}{\sqrt{1-2\rho_p\cos\left(\varphi_p-2\pi W\right)+\rho_p^2}}. \tag{16.120}$$

Максимальное значение этой функции соответствует резонансной частоте

$$W_p=\varphi_p\big/(2\pi). \tag{16.121}$$

Это значение равно

$$[A(W)]_{\max}=\frac{K_0}{1-\rho_p}. \tag{16.122}$$

Для нахождения ширины полосы пропускания $\Delta W_п$ цифрового резонатора приравняем выражение (16.120) при $\varphi_p=0$ значению $[A(W)]_{\max}\big/\sqrt{2}$ и решим уравнение относительно расстройки $W_{0,7}=\Delta W_п\big/2$. В результате получим

$$\Delta W_п=\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{4\rho_p-1-\rho_p^2}{2\rho_p}\right). \tag{16.123}$$

Полагая $0<\Delta W_п<0{,}5$, из (16.123) определим соответствующий диапазон изменения ρ_p:

$$0{,}268<\rho_p<1. \tag{16.124}$$

• Положение нулей и полюсов на Z-плоскости будем задавать полярными, а не декартовыми координатами, т.к. именно от полярных координат зависят параметры АЧХ фильтра.

Таким образом, модуль ρ_p комплексного полюса определяет форму АЧХ цифрового резонатора, а аргумент φ_p — только её резонансную частоту.

На рис.16.12 приведена зависимость (16.122), построенная при $K_0 = 1$, а на рис.16.13 — зависимость (16.123).

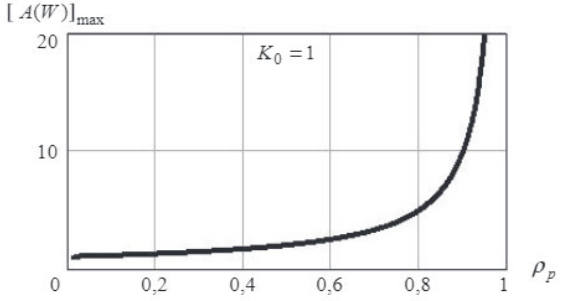


Рис.16.12. Зависимость максимального значения АЧХ $[A(W)]_{max}$ цифрового фильтра с передаточной функцией (16.118) от модуля комплексного полюса ρ_p при $K_0 = 1$ [формула (16.122)]

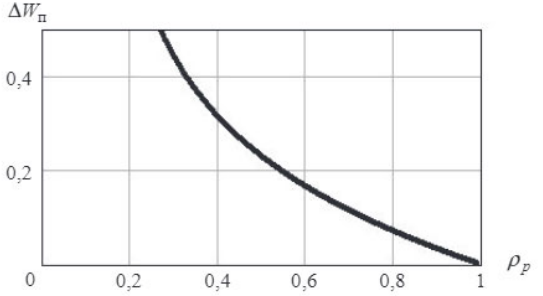


Рис.16.13. Зависимость ширины полосы пропускания $\Delta W_п$ цифрового фильтра с передаточной функцией (16.118) от модуля комплексного полюса ρ_p [формула (16.123)]

Как видно из рис.16.12 и 16.13, резонансные свойства АЧХ цифрового фильтра с передаточной функцией (16.118) наиболее выражены при значениях модуля комплексного полюса ρ_p в диапазоне $0{,}8 < \rho_p < 1$.

На рис.16.14,*а* изображены АЧХ цифрового резонатора, построенные по формуле (16.119) при $K_0 = 1$ и $\varphi_p = 0$ для значений $\rho_p = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$, а на рис.16.14,*б* для $\rho_p = 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8$. Рис.16.15 иллюстрирует влияние аргумента φ_p комплексного полюса при $K_0 = 1$ и $\rho_p = 0{,}9$ на резонансную частоту АЧХ (16.119); графики построены для значений $\varphi_p = 0,\ \pm\pi/4,\ \pm\pi/2,\ \pm 3\pi/4$.

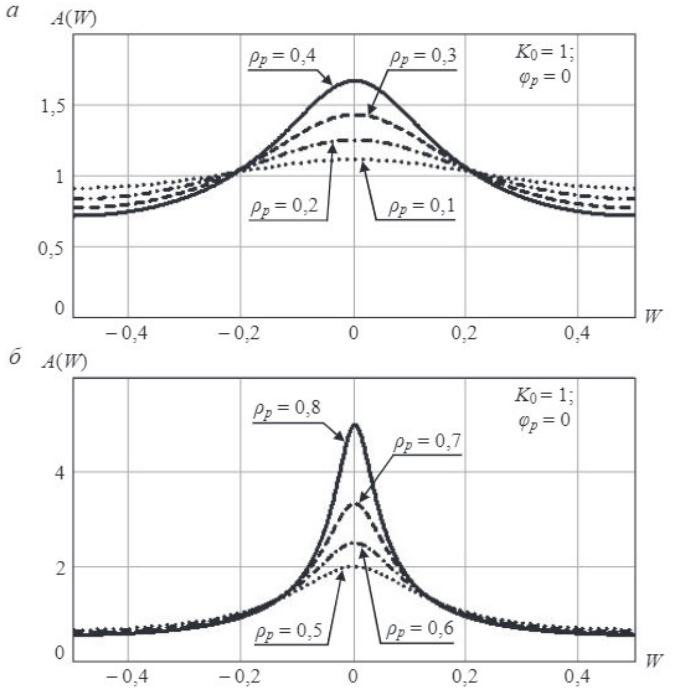


Рис.16.14. АЧХ цифровых фильтров с передаточными функциями вида (16.118) при $K_0 = 1$ и $\varphi_p = 0$ для значений $\rho_p = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$ (*а*) и $\rho_p = 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8$ (*б*)

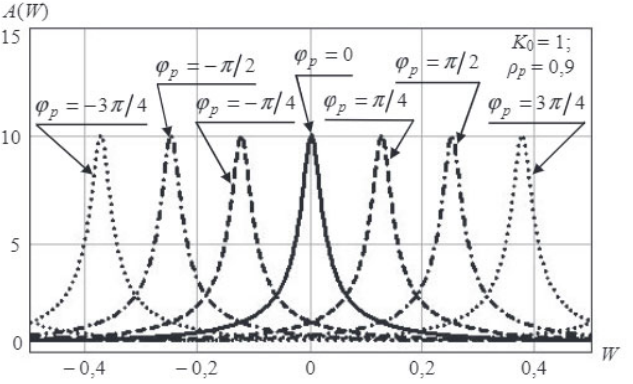


Рис.16.15. АЧХ цифровых фильтров с передаточными функциями вида (16.118) при $K_0 = 1$ и $\rho_p = 0{,}9$ для значений $\varphi_p = 0,\ \pm\pi/4,\ \pm\pi/2,\ \pm 3\pi/4$

♦ **Передаточная функция имеет один нуль, полюсы отсутствуют**

Передаточная функция и амплитудно-частотная характеристика ЦФ этого типа описываются выражениями:

$$H(z) = K_0\left(1 - z_0\, z^{-1}\right); \tag{16.125}$$

$$A(W) = K_0\left|\, 1 - z_0\, e^{-j\,2\pi W}\right|, \tag{16.126}$$

где $z_0 = \rho_0\, e^{j\varphi_0}$ — комплексный нуль • передаточной функции (16.125); ρ_0 ($\rho_0 > 0$) и φ_0 $\{\varphi_p \in [-\pi,\ \pi]\}$ — его модуль и аргумент соответственно, характеризующие положение нуля на Z-плоскости.

Используя формулу Эйлера, перепишем выражение (16.126) в виде

$$A(W) = K_0\sqrt{[1 - \rho_0\cos(\varphi_0 - 2\pi W)]^2 + [\rho_0\sin(\varphi_0 - 2\pi W)]^2} =$$

$$= K_0\sqrt{1 - 2\rho_0\cos(\varphi_0 - 2\pi W) + \rho_0^2}\,. \tag{16.127}$$

Минимальное значение этой функции соответствует частоте последовательного резонанса

$$W_0 = \varphi_0 / (2\pi). \tag{16.128}$$

Это значение равно

$$[A(W)]_{\min} = K_0\,|\,1 - \rho_0\,|. \tag{16.129}$$

Максимум АЧХ (16.127) имеет место на частотах $W = \varphi_0/(2\pi) \pm 1/2$:

$$[A(W)]_{\max} = K_0\,(1 + \rho_0). \tag{16.130}$$

Таким образом, модуль ρ_0 комплексного нуля определяет форму АЧХ, а аргумент φ_0 — только частоту её последовательного резонанса.

На рис.16.16 приведены зависимости минимального (16.129) и максимального (16.130) значений АЧХ от модуля ρ_0 комплексного нуля z_0 при $K_0 = 1$.

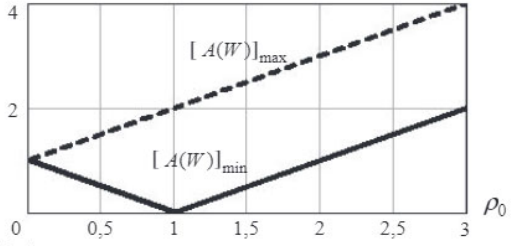


Рис.16.16. Зависимость минимального и максимального значений АЧХ цифрового фильтра с передаточной функцией (16.125) от модуля комплексного нуля ρ_0 при $K_0 = 1$

• См. сноску на с.648.

На рис.16.17,*а* изображены АЧХ цифрового фильтра с передаточной функцией (16.125), построенные по формуле (16.126) при $K_0 = 1$ и $\varphi_0 = 0$ для значений $\rho_0 = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$, а на рис.16.17,*б* для $\rho_0 = 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8$.

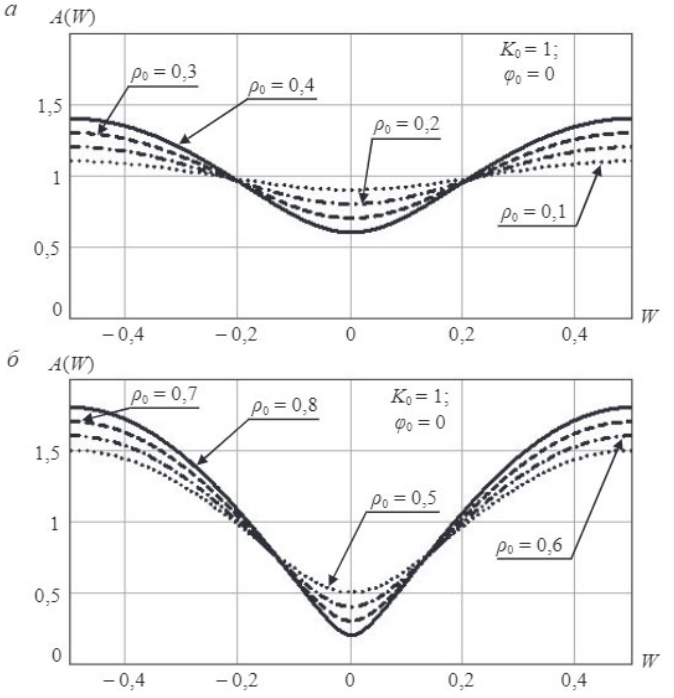


Рис.16.17. АЧХ цифровых фильтров с передаточными функциями вида (16.125) при $K_0 = 1$ и $\varphi_0 = 0$ для значений $\rho_0 = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$ (*а*) и $\rho_0 = 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8$ (*б*)

Сравнение графиков, представленных на рис.16.17 и 16.14, позволяет сделать вывод, что влияние полюса z_p передаточной функции (16.118) на амплитудно-частотную характеристику ЦФ значительно сильнее, чем влияние нуля z_0 передаточной функции (16.125). Другими словами, резонансные свойства полюса проявляются гораздо сильнее режекторных свойств нуля. Особенно это сказывается в диапазоне значений модуля комплексного полюса $0{,}8 < \rho_p < 1$.

Как отмечалось выше, модуль комплексного нуля может быть больше единицы. При значениях $\rho_0 > 1$ цифровой фильтр является неминимально-фазовым, у которого АЧХ и ФЧХ независимы друг от друга. На рис.16.18 приведены АЧХ цифрового фильтра с передаточной функцией (16.125), построенные по формуле (16.126) при $K_0 = 1$ и $\varphi_0 = 0$ для значений $\rho_0 = 1;\ 2;\ 3;\ 4$.

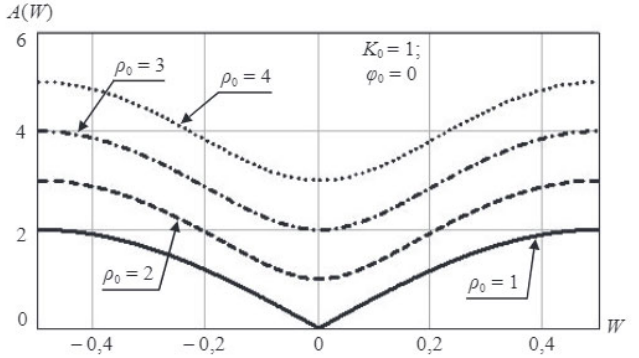


Рис.16.18. АЧХ цифровых фильтров с передаточными функциями вида (16.125) при $K_0 = 1$ и $\varphi_0 = 0$ для значений $\rho_0 = 1;\ 2;\ 3;\ 4$

Рис.16.19 иллюстрирует зависимость частоты последовательного резонанса (16.128) от аргумента φ_0 комплексного нуля при $K_0 = 1$ и $\rho_0 = 0{,}9$; графики построены для значений $\varphi_0 = 0,\ \pm\pi/4,\ \pm\pi/2,\ \pm 3\pi/4$.

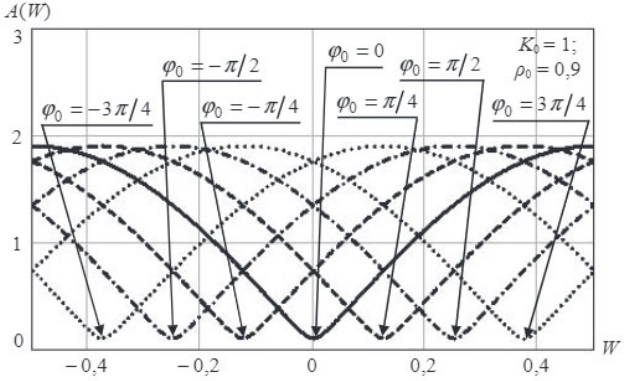


Рис.16.19. АЧХ цифровых фильтров с передаточными функциями вида (16.125) при $K_0 = 1$ и $\rho_0 = 0{,}9$ для значений $\varphi_0 = 0,\ \pm\pi/4,\ \pm\pi/2,\ \pm 3\pi/4$

Обратим внимание на различный характер влияния модуля ρ_0 комплексного нуля z_0 передаточной функции (16.125) на амплитудно-частотную характеристику. При $\rho_0 \le 1$ (минимально-фазовый ЦФ) с увеличением ρ_0 происходит увеличение глубины режекции на частоте $W_0 = \varphi_0 / (2\pi)$, а при $\rho_0 > 1$ (неминимально-фазовый ЦФ) с увеличением ρ_0 имеет место смещение АЧХ вверх по оси ординат (см. рис.16.16 — 16.18).

♦ Передаточная функция имеет один полюс и один нуль

Передаточная функция и амплитудно-частотная характеристика ЦФ этого типа описываются выражениями:

$$H(z) = K_0 \frac{1 - z_0 z^{-1}}{1 - z_p z^{-1}}; \qquad (16.131)$$

$$A(W) = K_0 \left| \frac{1 - z_0 e^{-j2\pi W}}{1 - z_p e^{-j2\pi W}} \right|. \qquad (16.132)$$

Используя формулу Эйлера, перепишем выражение (16.132) в виде

$$A(W) = K_0 \sqrt{\frac{[1 - \rho_0 \cos(\varphi_0 - 2\pi W)]^2 + [\rho_0 \sin(\varphi_0 - 2\pi W)]^2}{[1 - \rho_p \cos(\varphi_p - 2\pi W)]^2 + [\rho_p \sin(\varphi_p - 2\pi W)]^2}} =$$

$$= K_0 \sqrt{\frac{1 - 2\rho_0 \cos(\varphi_0 - 2\pi W) + \rho_0^2}{1 - 2\rho_p \cos(\varphi_p - 2\pi W) + \rho_p^2}}. \qquad (16.133)$$

ЦФ с передаточной функцией (16.131) можно рассматривать как каскадное соединение блоков с передаточными функциями (16.118) и (16.125), поэтому его амплитудно-частотная характеристика представляет собой произведение АЧХ составляющих блоков [см. (16.119) и (16.126), а также (16.120) и (16.127)].

Характер влияния нуля и полюса на АЧХ цифрового фильтра с передаточной функцией (16.131) иллюстрируют рис.16.20 — 16.25, где сплошными линиями показаны результирующие АЧХ (16.132), пунктирными — АЧХ (16.119) блока, имеющего только полюс, а штрих-пунктирными — АЧХ (16.126) блока, имеющего только нуль. Параметры, при которых построены графики, приведены на полях рисунков.

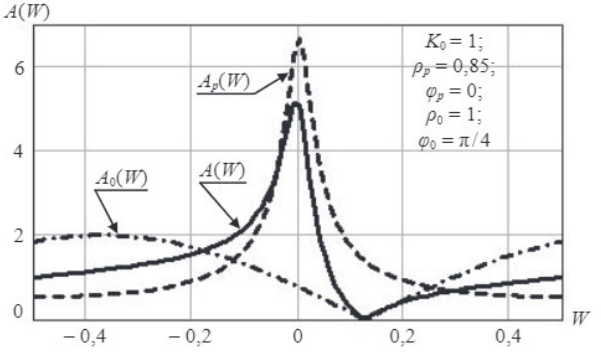


Рис.16.20. АЧХ цифрового фильтра с передаточной функцией (16.131) при $K_0 = 1$, $\rho_p = 0{,}85$, $\varphi_p = 0$, $\rho_0 = 1$, $\varphi_0 = \pi/4$

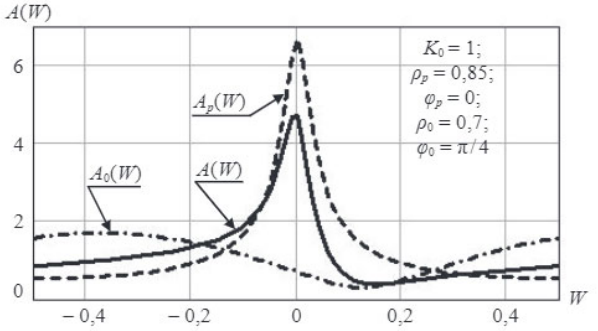


Рис.16.21. АЧХ цифрового фильтра с передаточной функцией (16.131) при $K_0 = 1$, $\rho_p = 0{,}85$, $\varphi_p = 0$, $\rho_0 = 0{,}7$, $\varphi_0 = \pi/4$

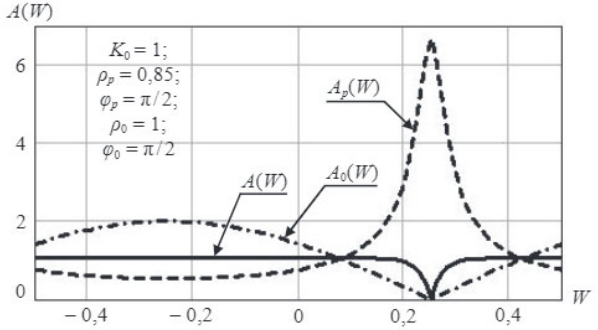


Рис.16.22. АЧХ цифрового фильтра с передаточной функцией (16.131) при $K_0 = 1$, $\rho_p = 0{,}85$, $\varphi_p = \pi/2$, $\rho_0 = 1$, $\varphi_0 = \pi/2$

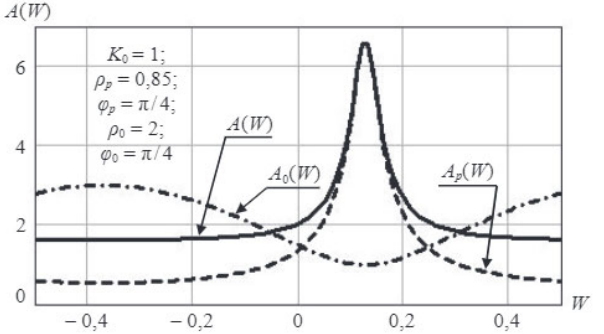


Рис.16.23. АЧХ цифрового фильтра с передаточной функцией (16.131) при $K_0 = 1$, $\rho_p = 0{,}85$, $\varphi_p = \pi/4$, $\rho_0 = 2$, $\varphi_0 = \pi/4$

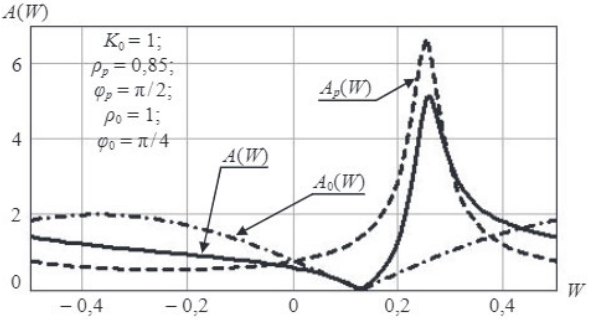


Рис.16.24. АЧХ цифрового фильтра с передаточной функцией (16.131) при $K_0 = 1$, $\rho_p = 0{,}85$, $\varphi_p = \pi/2$, $\rho_0 = 1$, $\varphi_0 = \pi/4$

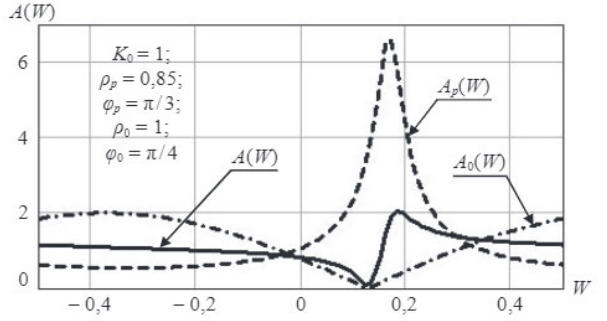


Рис.16.25. АЧХ цифрового фильтра с передаточной функцией (16.131) при $K_0 = 1$, $\rho_p = 0{,}85$, $\varphi_p = \pi/3$, $\rho_0 = 1$, $\varphi_0 = \pi/4$

Отметим, что при совпадении нуля и полюса ($z_0 = z_p$) они взаимно компенсируют друг друга, поэтому ЦФ с передаточной функцией (16.131) не обладает избирательными свойствами, так как при этом $A(W) = K_0$.

Из рис. 16.20 — 16.25 видно, что взаимное расположение полюса и нуля на Z-плоскости существенным образом влияет на форму АЧХ фильтра. При $\rho_0 = 1$ АЧХ имеет точку режекции на частоте $W_0 = \varphi_0 / (2\pi)$ (см. рис.16.20, 16.22, 16.24 и 16.25). Если $\varphi_0 = \varphi_p$, то при $\rho_0 = 1$ получается симметричная АЧХ режекторного типа (см. рис.16.22), а при $\rho_0 \neq 1$ — резонансного типа (см. рис.16.23). В общем случае, когда $\varphi_0 \neq \varphi_p$, амплитудно-частотная характеристика ЦФ с передаточной функцией (16.131) имеет вид резонансной кривой с несимметричными скатами (см. рис.16.20, 16.21, 16.24 и 16.25). Степень искажения резонансной кривой зависит от близости аргументов полюса φ_p и нуля φ_0 (см. рис.16.24 и 16.25).

Передаточные функции (16.118) и (16.125) являются частными случаями передаточной функции (16.131) и получаются из неё при $z_0 = 0$ и $z_p = 0$ соответственно. Комплексные рекурсивные цифровые фильтры с передаточными функциями (16.131) целесообразно рассматривать в качестве универсальных блоков, используя различные способы соединения которых •, можно конструировать ЦФ с заданными АЧХ, в том числе и несимметричными.

Этот подход представляет собой *эвристический синтез* структуры и параметров ЦФ. Он базируется на накопленном опыте проектирования, поэтому не может быть полностью формализован.

В качестве примера синтеза комплексного рекурсивного ЦФ рассмотрим проектирование фильтра для ПЧ-тракта телевизионного приёмника, построенного по квазипараллельной схеме (см. примеры 12.8 и 15.1).

Пример 16.10. Спроектировать рекурсивный комплексный ЦФ для ПЧ-тракта канала изображения телевизионного приёмника, построенного по квазипараллельной схеме.

АЧХ низкочастотного эквивалента получается путём сдвига АЧХ полосового фильтра (см. рис.12.10) влево на 38 МГц. Идеализированная форма требуемой АЧХ комплексного ЦФ (аппроксимируемая функция) изображена на рис.15.1. Она имеет следующие граничные частоты полос пропускания и задерживания: $f_{п1} = -5{,}75$ МГц, $f_{п2} = -1{,}25$ МГц, $f_{з1} = -6{,}25$ МГц, $f_{з2} = 1{,}25$ МГц. Особенностью АЧХ являются её несимметричность относительно нулевой частоты и наличие комплементарного правого среза (среза Найквиста), обеспечивающего подавление сигнала на нулевой частоте, равное 6 дБ.

Выберем частоту дискретизации $f_д = 15$ МГц. Нормированные значения граничных частот полос пропускания и задерживания получены в примере 4.1:

$$W_{п1} = -0{,}383; \qquad W_{п2} = -0{,}083; \qquad W_{з1} = -0{,}417; \qquad W_{з2} = 0{,}083.$$

Проектирование проведём эвристическим методом с использованием системы компьютерной математики Mathcad.

В качестве элементарных используем блоки ЦФ с передаточными функциями вида (5.146), амплитудно-частотные характеристики которых описываются выражением (5.147). Элементарные блоки соединяются последовательно, образуя каскадную структуру ЦФ, которая имеет меньший уровень собственных шумов квантования ••. Для всех элементарных блоков примем $K_0 = 1$.

Процедура синтеза ЦФ заключается в подборе положения на *Z*-плоскости комплексных полюсов $z_{pi} = \rho_{pi} e^{j\varphi_{pi}}$ и нулей $z_{0i} = \rho_{0i} e^{j\varphi_{0i}}$ $\left(i = \overline{1,\ N}\right)$ элементарных блоков, а также порядка фильтра N (т.е. числа блоков). Подбор осуществлялся методом «проб и ошибок». При этом рассчитывалась результирующая АЧХ комплексного ЦФ, равная произведению АЧХ элементарных блоков. Форма результирующей АЧХ корректировалась вариацией положения комплексных полюсов и нулей, а также добавлением новых элементарных блоков. Данная процедура продолжалась до тех пор, пока АЧХ синтезированного ЦФ не стала удовлетворять следующим условиям •••:

• Каскадное, параллельное и с обратной связью.

•• По сравнению с другими структурами.

••• Требования к АЧХ ПЧ-тракта канала изображения телевизионного приёмника.

- неравномерность АЧХ в полосе пропускания не превышает 3 дБ;
- затухание АЧХ на нулевой частоте • равно 6 дБ;
- затухание АЧХ в полосе задерживания ≥ 40 дБ.

В результате синтеза получены следующие параметры комплексного ЦФ:

- порядок фильтра $N = 14$;
- передаточная функция в нуль-полюсном представлении

$$H(z) = K \frac{\prod_{i=1}^{14} \left(1 - z_{0i} z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{14} \left(1 - z_{pi} z^{-1}\right)} = K \frac{\prod_{i=1}^{14} \left(1 - \rho_{0i} e^{j\varphi_{0i}} z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{14} \left(1 - \rho_{pi} e^{j\varphi_{pi}} z^{-1}\right)};$$

- полюсы и нули передаточной функции:

$$z_{p1} = \rho_{p1} e^{j\varphi_{p1}} = 0{,}9\ e^{j(-3{,}142)}; \qquad z_{01} = \rho_{01} e^{j\varphi_{01}} = 1\ e^{j(-3{,}142)};$$

$$z_{p2} = \rho_{p2} e^{j\varphi_{p2}} = 0{,}9695\ e^{j(-2{,}409)}; \qquad z_{02} = \rho_{02} e^{j\varphi_{02}} = 1\ e^{j(-2{,}618)};$$

$$z_{p3} = \rho_{p3} e^{j\varphi_{p3}} = 0{,}6062\ e^{j(-0{,}283)}; \qquad z_{03} = \rho_{03} e^{j\varphi_{03}} = 1\ e^{j(0{,}522)};$$

$$z_{p4} = \rho_{p4} e^{j\varphi_{p4}} = 0{,}88\ e^{j(-2{,}513)}; \qquad z_{04} = \rho_{04} e^{j\varphi_{04}} = 1\ e^{j(-2{,}827)};$$

$$z_{p5} = \rho_{p5} e^{j\varphi_{p5}} = 0{,}6\ e^{j(-2{,}482)}; \qquad z_{05} = \rho_{05} e^{j\varphi_{05}} = 1\ e^{j(-2{,}827)};$$

$$z_{p6} = \rho_{p6} e^{j\varphi_{p6}} = 0{,}808\ e^{j(-0{,}063)}; \qquad z_{06} = \rho_{06} e^{j\varphi_{06}} = 1\ e^{j(0{,}628)};$$

$$z_{p7} = \rho_{p7} e^{j\varphi_{p7}} = 0{,}6\ e^{j(-1{,}885)}; \qquad z_{07} = \rho_{07} e^{j\varphi_{07}} = 0{,}3\ e^{j(2{,}199)};$$

$$z_{p8} = \rho_{p8} e^{j\varphi_{p8}} = 0{,}53\ e^{j(0{,}616)}; \qquad z_{08} = \rho_{08} e^{j\varphi_{08}} = 1\ e^{j(2{,}199)};$$

$$z_{p9} = \rho_{p9} e^{j\varphi_{p9}} = 0{,}86\ e^{j(1{,}257)}; \qquad z_{09} = \rho_{09} e^{j\varphi_{09}} = 1\ e^{j(1{,}257)};$$

$$z_{p10} = \rho_{p10} e^{j\varphi_{p10}} = 0{,}86\ e^{j(-2{,}513)}; \qquad z_{0\,10} = \rho_{0\,10} e^{j\varphi_{0\,10}} = 1\ e^{j(-2{,}513)};$$

$$z_{p11} = \rho_{p11} e^{j\varphi_{p11}} = 0{,}8\ e^{j(2{,}042)}; \qquad z_{0\,11} = \rho_{0\,11} e^{j\varphi_{0\,11}} = 1\ e^{j(2{,}042)};$$

$$z_{p12} = \rho_{p12} e^{j\varphi_{p12}} = 0{,}9\ e^{j(2{,}67)}; \qquad z_{0\,12} = \rho_{0\,12} e^{j\varphi_{0\,12}} = 1\ e^{j(2{,}67)};$$

$$z_{p13} = \rho_{p13} e^{j\varphi_{p13}} = 0{,}8\ e^{j(-2{,}89)}; \qquad z_{0\,13} = \rho_{0\,13} e^{j\varphi_{0\,13}} = 1\ e^{j(-2{,}89)};$$

$$z_{p14} = \rho_{p14} e^{j\varphi_{p14}} = 0{,}6\ e^{j(-2{,}513)}; \qquad z_{0\,14} = \rho_{0\,14} e^{j\varphi_{0\,14}} = 1\ e^{j(-2{,}827)};$$

- нормирующий коэффициент $K = 0{,}01836$.

АЧХ синтезированного ЦФ, рассчитанная по формуле

$$A(W) = K \frac{\prod_{i=1}^{14} \left|1 - \rho_{0i} e^{j\varphi_{0i}} e^{-j2\pi W}\right|}{\prod_{i=1}^{14} \left|1 - \rho_{pi} e^{j\varphi_{pi}} e^{-j2\pi W}\right|},$$

изображена на рис.16.26 в линейном и логарифмическом масштабах.

• Напомним, что в методе комплексной огибающей нулевая частота соответствует промежуточной частоте сигнала изображения.

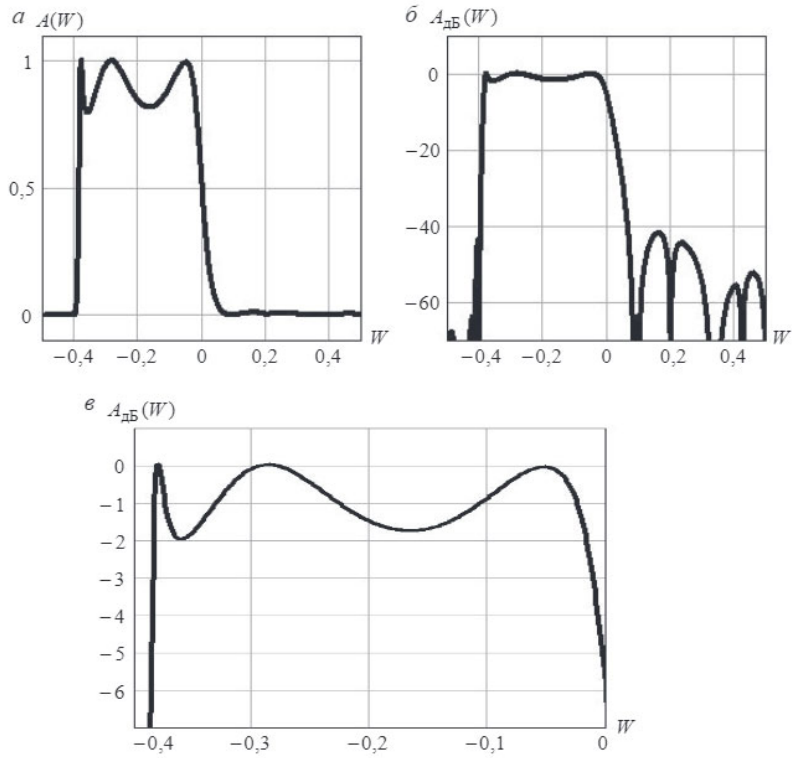


Рис.16.26. АЧХ спроектированного комплексного рекурсивного ЦФ для ПЧ-тракта канала изображения телевизионного приёмника, построенного по квазипараллельной схеме: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб; *в* — фрагмент, соответствующий полосе пропускания (логарифмический масштаб)

Спроектированный комплексный рекурсивный ЦФ имеет неравномерность АЧХ в полосе пропускания 2,026 дБ, минимальное затухание в полосах задерживания 41,884 дБ, затухание на нулевой частоте 6 дБ. Эти параметры отвечают требованиям к АЧХ ПЧ-тракта канала изображения телевизионного приёмника.

Пример 16.10 следует рассматривать как иллюстрацию возможностей эвристического метода синтеза комплексных рекурсивных ЦФ, основанного на экспериментальном подборе положения полюсов и нулей передаточной функции на комплексной Z-плоскости•.

• В частности, возможности синтеза комплексных рекурсивных ЦФ, имеющих сложную форму амплитудно-частотной характеристики.

В примере 16.10 синтезирован минимально-фазовый комплексный рекурсивный ЦФ (нули передаточной функции находятся на Z-плоскости либо внутри круга, либо на окружности единичного радиуса), поэтому его фазочастотная характеристика не является строго линейной. При техническом проектировании комплексного рекурсивного ЦФ для ПЧ-тракта канала изображения телевизионного приёмника можно получить АЧХ с меньшей неравномерностью в полосе пропускания и большим минимальным затуханием в полосах задерживания.

Процедура проектирования ЦФ экспериментальным подбором положения полюсов и нулей передаточной функции $H(z)$ на комплексной Z-плоскости является довольно трудоёмкой и требует соответствующей квалификации и опыта проектировщика. Достоинство этого метода состоит в том, что он позволяет синтезировать ЦФ, имеющие любую АЧХ сложной формы.

Эвристический метод синтеза комплексных ЦФ, основанный на подборе положения полюсов и нулей передаточной функции на Z-плоскости, в принципе, пригоден также для синтеза нерекурсивных ЦФ •, передаточные функции которых не имеют полюсов, а содержат только нули. Неминимально-фазовые нерекурсивные ЦФ могут иметь строго линейные ФЧХ (см. гл.5). В этом случае справедливо соотношение (5.53), т.е. с точностью до множителя $\pm z^{M}$ функции $H(z^{-1})$ и $H(z)$ идентичны. Последнее означает, что для каждого комплексного нуля •• $z_{0i} = \rho_{0i} e^{j\varphi_{0i}}$ передаточная функция $H(z)$ должна иметь также нуль, сопряжённый относительно единичной окружности: $z_{0i}^{-1} = \left(1/\rho_{0i}\right) e^{-j\varphi_{0i}}$.

Таким образом, рассмотренный эвристический метод синтеза комплексных ЦФ является универсальным.

16.3. Синтез рекурсивных комплексных цифровых фильтров методом сдвига частоты в вещественных рекурсивных цифровых фильтрах-прототипах

В § 15.4 рассмотрен синтез нерекурсивных комплексных ЦФ методом сдвига частоты в передаточных функциях $H(z)$ нерекурсивных вещественных ЦФ, частотные характеристики которых на симметричном интервале нормированных частот $W \in [-1/2,\ 1/2]$ обладают арифметической симметрией. Такой же приём можно использовать для синтеза рекурсивных комплексных цифровых фильтров полосового и режекторного типов. Для синтеза вещественных рекурсивных ЦФ-прототипов ••• пригодны все методы, описанные в гл.13. Частотные характеристики вещественных рекурсивных ЦФ-прототипов на симметрич-

---

• Для синтеза нерекурсивных ЦФ эвристический метод имеет низкую эффективность.

•• При $\rho_{0i} \neq 1$.

••• Вещественным ЦФ-прототипом для синтеза комплексного ЦФ полосового типа является цифровой ФНЧ, а для синтеза комплексного ЦФ режекторного типа — цифровой ФВЧ.

ном интервале нормированных частот $W \in [-1/2,\ 1/2]$ обладают арифметической симметрией.

Рассмотрим рекурсивный комплексный ЦФ с передаточной функцией (4.39). Его комплексная частотная характеристика описывается выражением (4.41), а амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики — формулами (4.43) и (4.44) соответственно.

Осуществляя в (4.39) замену аргумента в соответствии с (15.10), получим передаточную функцию «смещённого» комплексного рекурсивного ЦФ:

$$\overline{H}(z) = H(z\,e^{-j\omega_{\text{сдв}}T}) = \frac{A_{\text{c}}(z^{-1}e^{j\omega_{\text{сдв}}T}) + jA_{\text{s}}(z^{-1}e^{j\omega_{\text{сдв}}T})}{1 + B_{\text{c}}(z^{-1}e^{j\omega_{\text{сдв}}T}) + jB_{\text{s}}(z^{-1}e^{j\omega_{\text{сдв}}T})} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=0}^{M}(a_{\text{c}k} + ja_{\text{s}k})\,e^{j\omega_{\text{сдв}}Tk}\,z^{-k}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{N}(b_{\text{c}k} + jb_{\text{s}k})\,e^{j\omega_{\text{сдв}}Tk}\,z^{-k}} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M}(\overline{a}_{\text{c}k} + j\overline{a}_{\text{s}k})\,z^{-k}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{N}(\overline{b}_{\text{c}k} + j\overline{b}_{\text{s}k})\,z^{-k}}, \qquad (16.134)$$

где $\overline{a}_{\text{c}k}$, $\overline{a}_{\text{s}k}$ $\left(k = \overline{0,\ M}\right)$ и $\overline{b}_{\text{c}k}$, $\overline{b}_{\text{s}k}$ $\left(k = \overline{1,\ N}\right)$ — коэффициенты передаточной функции $\overline{H}(z)$ «смещённого» комплексного цифрового фильтра, выражаемые соответственно формулами (15.13) и

$$\begin{cases} \overline{b}_{\text{c}k} = b_{\text{c}k}\cos(\omega_{\text{сдв}}Tk) - b_{\text{s}k}\sin(\omega_{\text{сдв}}Tk); \\ \overline{b}_{\text{s}k} = b_{\text{c}k}\sin(\omega_{\text{сдв}}Tk) + b_{\text{s}k}\cos(\omega_{\text{сдв}}Tk), \end{cases} \quad k = \overline{1,\ N}. \qquad (16.135)$$

Подставляя в формулы (4.41), (4.43) и (4.44) коэффициенты $\overline{a}_{\text{c}k}$, $\overline{a}_{\text{s}k}$ $\left(k = \overline{0,\ M}\right)$ и $\overline{b}_{\text{c}k}$, $\overline{b}_{\text{s}k}$ $\left(k = \overline{1,\ N}\right)$ вместо коэффициентов $a_{\text{c}k}$, $a_{\text{s}k}$ $\left(k = \overline{0,\ M}\right)$ и $b_{\text{c}k}$, $b_{\text{s}k}$ $\left(k = \overline{1,\ N}\right)$, получим выражения для комплексной частотной характеристики $\overline{H}\left(e^{j\omega T}\right)$, АЧХ $\overline{A}(\omega T)$ и ФЧХ $\overline{\varphi}(\omega T)$ «смещённого» комплексного рекурсивного ЦФ:

$$\overline{H}\left(e^{j\omega T}\right) = \frac{\overline{A}_{\text{c}}\left(e^{j\omega T}\right) + j\overline{A}_{\text{s}}\left(e^{j\omega T}\right)}{1 + \overline{A}_{\text{c}}\left(e^{j\omega T}\right) + j\overline{A}_{\text{s}}\left(e^{j\omega T}\right)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M}(\overline{a}_{\text{c}k} + j\overline{a}_{\text{s}k})\,e^{-j\omega Tk}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{N}(\overline{b}_{\text{c}k} + j\overline{b}_{\text{s}k})\,e^{-j\omega Tk}}; \qquad (16.136)$$

$$\overline{A}(\omega T) = \left\{ \frac{\left[\overline{a}_{\text{c}0} + \sum\limits_{k=1}^{M}\left[\overline{a}_{\text{c}k}\cos(\omega Tk) + \overline{a}_{\text{s}k}\sin(\omega Tk)\right]\right]^2 +}{\left[1 + \sum\limits_{k=1}^{N}\left[\overline{b}_{\text{c}k}\cos(\omega Tk) + \overline{b}_{\text{s}k}\sin(\omega Tk)\right]\right]^2 +} \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \frac{+\left[\overline{a}_{s0} + \sum_{k=1}^{M} \left[\overline{a}_{sk}\cos(\omega T k) - \overline{a}_{ck}\sin(\omega T k)\right]\right]^2}{+\left[\sum_{k=1}^{N} \left[\overline{b}_{sk}\cos(\omega T k) - \overline{b}_{ck}\sin(\omega T k)\right]\right]^2} \right\}^{1/2}; \qquad (16.137)$$

$$\overline{\varphi}(\omega T) = \mathrm{Arctg}\frac{\overline{a}_{s0} + \sum_{k=1}^{M} \left[\overline{a}_{sk}\cos(\omega T k) - \overline{a}_{ck}\sin(\omega T k)\right]}{\overline{a}_{c0} + \sum_{k=1}^{M} \left[\overline{a}_{ck}\cos(\omega T k) + \overline{a}_{sk}\sin(\omega T k)\right]} -$$

$$- \mathrm{Arctg}\frac{\sum_{k=1}^{N} \left[\overline{b}_{sk}\cos(\omega T k) - \overline{b}_{ck}\sin(\omega T k)\right]}{1 + \sum_{k=1}^{N} \left[\overline{b}_{ck}\cos(\omega T k) + \overline{b}_{sk}\sin(\omega T k)\right]} \qquad (16.138)$$

Используя выражения (16.134) — (16.138), можно осуществлять перестройку центральной частоты комплексных ЦФ полосового и режекторного типов, АЧХ которых обладают арифметической симметрией. Это обстоятельство позволяет осуществлять адаптацию комплексных фильтров при изменении центральной частоты обрабатываемых сигналов.

Кроме того, на основе этих формул могут быть синтезированы рекурсивные комплексные ЦФ полосового и режекторного типов путём соответствующего сдвига частоты $\omega_{\text{сдв}}$ в передаточных функциях $H(z)$ рекурсивных вещественных ЦФ-прототипов, частотные характеристики которых на симметричном интервале нормированных частот $W \in [-1/2,\ 1/2]$ обладают арифметической симметрией (см. рис.3.2).

Пример 16.11. Используя спроектированный в примере 13.12 вещественный цифровой фильтр • в качестве рекурсивного вещественного ЦФ-прототипа, методом сдвига частоты на $f_{\text{сдв}} = -500$ Гц, получить рекурсивный комплексный цифровой фильтр полосового типа.

Для выбранной в примере 13.12 частоты дискретизации $f_{\text{д}} = 5$ кГц определим нормированное значение сдвига частоты: $W_{\text{сдв}} = f_{\text{сдв}} / f_{\text{д}} = -0{,}1$. Амплитудно-частотная характеристика рекурсивного вещественного ЦФ-прототипа каскадной структуры 12-го порядка в линейном и логарифмическом масштабах изображена на рис.13.20. Эта же АЧХ на симметричном интервале нормированных частот $W \in [-1/2,\ 1/2]$ приведена на рис.16.27, из которого видно, что амплитудно-частотная характеристика рекурсивного вещественного ЦФ-прототипа имеет арифметическую симметрию.

• ФНЧ каскадной структуры с характеристикой Баттерворта 12-го порядка.

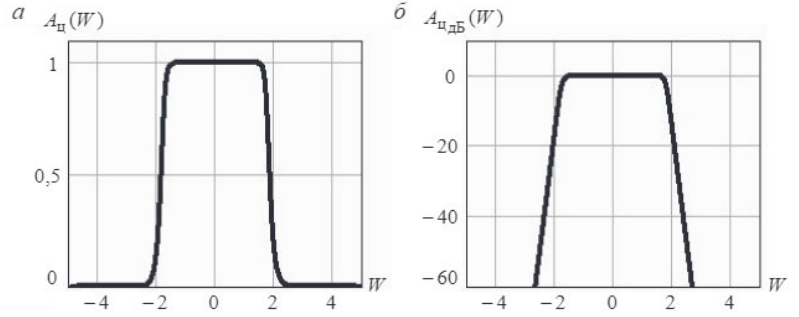


Рис.16.27. АЧХ рекурсивного вещественного ЦФ-прототипа в примере 16.11: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

По формулам (15.13) и (16.135) с учётом заданного смещения по частоте $W_{сдв} = -0{,}1$ вычислим коэффициенты $\overline{a}_{c0_r}$, $\overline{a}_{c1_r}$, $\overline{a}_{c2_r}$, $\overline{a}_{s0_r}$, $\overline{a}_{s1_r}$, $\overline{a}_{s2_r}$, $\overline{b}_{c1_r}$, $\overline{b}_{c2_r}$, $\overline{b}_{s1_r}$, $\overline{b}_{s2_r}$ $\left(r = \overline{1,\ 6}\right)$ косинусных и синусных блоков проектируемого рекурсивного комплексного цифрового фильтра•:

1-й каскад: $\overline{a}_{c0_1} = 0{,}253$; $\overline{a}_{c1_1} = 0{,}41$; $\overline{a}_{c2_1} = 0{,}078$; $\overline{b}_{c1_1} = -0{,}628$; $\overline{b}_{c2_1} = 0{,}244$;
$\overline{a}_{s0_1} = 0$; $\overline{a}_{s1_1} = -0{,}298$; $\overline{a}_{s2_1} = -0{,}241$; $\overline{b}_{s1_1} = 0{,}456$; $\overline{b}_{s2_1} = -0{,}751$;

2-й каскад: $\overline{a}_{c0_2} = 0{,}21$; $\overline{a}_{c1_2} = 0{,}341$; $\overline{a}_{c2_2} = 0{,}065$; $\overline{b}_{c1_2} = -0{,}522$; $\overline{b}_{c2_2} = 0{,}151$;
$\overline{a}_{s0_2} = 0$; $\overline{a}_{s1_2} = -0{,}247$; $\overline{a}_{s2_2} = -0{,}2$; $\overline{b}_{s1_2} = 0{,}379$; $\overline{b}_{s2_2} = -0{,}463$;

3-й каскад: $\overline{a}_{c0_3} = 0{,}183$; $\overline{a}_{c1_3} = 0{,}296$; $\overline{a}_{c2_3} = 0{,}056$; $\overline{b}_{c1_3} = -0{,}453$; $\overline{b}_{c2_3} = 0{,}09$;
$\overline{a}_{s0_3} = 0$; $\overline{a}_{s1_3} = -0{,}215$; $\overline{a}_{s2_3} = -0{,}174$; $\overline{b}_{s1_3} = 0{,}329$; $\overline{b}_{s2_3} = -0{,}277$;

4-й каскад: $\overline{a}_{c0_4} = 0{,}165$; $\overline{a}_{c1_4} = 0{,}267$; $\overline{a}_{c2_4} = 0{,}051$; $\overline{b}_{c1_4} = -0{,}409$; $\overline{b}_{c2_4} = 0{,}051$;
$\overline{a}_{s0_4} = 0$; $\overline{a}_{s1_4} = -0{,}194$; $\overline{a}_{s2_4} = -0{,}157$; $\overline{b}_{s1_4} = 0{,}297$; $\overline{b}_{s2_4} = -0{,}158$;

5-й каскад: $\overline{a}_{c0_5} = 0{,}154$; $\overline{a}_{c1_5} = 0{,}25$; $\overline{a}_{c2_5} = 0{,}048$; $\overline{b}_{c1_5} = -0{,}383$; $\overline{b}_{c2_5} = 0{,}028$;
$\overline{a}_{s0_5} = 0$; $\overline{a}_{s1_5} = -0{,}182$; $\overline{a}_{s2_5} = -0{,}147$; $\overline{b}_{s1_5} = 0{,}278$; $\overline{b}_{s2_5} = -0{,}087$;

6-й каскад: $\overline{a}_{c0_6} = 0{,}15$; $\overline{a}_{c1_6} = 0{,}242$; $\overline{a}_{c2_6} = 0{,}046$; $\overline{b}_{c1_6} = -0{,}371$; $\overline{b}_{c2_6} = 0{,}017$;
$\overline{a}_{s0_6} = 0$; $\overline{a}_{s1_6} = -0{,}176$; $\overline{a}_{s2_6} = -0{,}142$; $\overline{b}_{s1_6} = 0{,}269$; $\overline{b}_{s2_6} = -0{,}054$.

Из найденных коэффициентов косинусного и синусного блоков каждого каскада сформируем коэффициенты передаточной функции $\overline{H}(z)$ 6-каскадного рекурсивного комплексного ЦФ:

• В выражениях (15.13) и (16.135) коэффициенты a_{c0_r}, a_{c1_r}, a_{c2_r}, b_{c1_r}, b_{c2_r}, $\left(r = \overline{1,\ 6}\right)$ принимаем равными коэффициентам передаточной функции рекурсивного вещественного цифрового ФНЧ, рассчитанным в примере 13.12, а $a_{s0_r} = a_{s1_r} = a_{s2_r} = b_{s1_r} = b_{s2_r} = 0$, $\left(r = \overline{1,\ 6}\right)$; r — номер каскада.

$$\overline{a}_{0,r} = \overline{a}_{c0,r} + j\overline{a}_{s0,r}; \quad \overline{a}_{1,r} = \overline{a}_{c1,r} + j\overline{a}_{s1,r}; \quad \overline{a}_{2,r} = \overline{a}_{c2,r} + j\overline{a}_{s2,r};$$
$$\overline{b}_{1,r} = \overline{b}_{c1,r} + j\overline{b}_{s1,r}; \quad \overline{b}_{2,r} = \overline{b}_{c2,r} + j\overline{b}_{s2,r}, \quad r = \overline{1,6}.$$

На рис.16.28 представлена рассчитанная в соответствии с (16.137) амплитудно-частотная характеристика спроектированного методом сдвига частоты вещественного ЦФ-прототипа 6-каскадного рекурсивного комплексного ЦФ в линейном и логарифмическом масштабах.

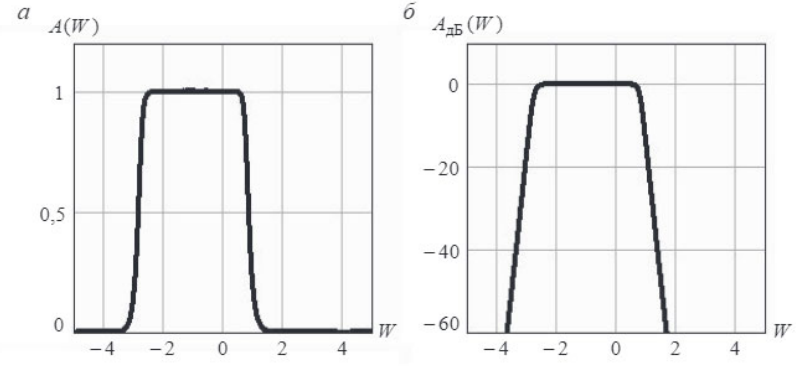


Рис.16.28. АЧХ рекурсивного комплексного ЦФ, спроектированного в примере 16.11: *а* — линейный масштаб; *б* — логарифмический масштаб

АЧХ спроектированного комплексного ЦФ (см. рис.16.28) соответствует сдвигу влево АЧХ вещественного ЦФ-прототипа (см. рис.16.27)

Краткие итоги

1. Синтез комплексных рекурсивных линейных ЦФ, являющихся низкочастотными эквивалентами вещественных полосовых фильтров, может осуществляться различными методами:

- по аналоговым прототипам;
- экспериментальным подбором положения полюсов и нулей передаточной функции на *Z*-плоскости;
- сдвигом частоты в передаточной функции вещественного ЦФ-прототипа.

2. Наиболее простым и формализуемым является метод синтеза комплексных рекурсивных ЦФ по аналоговым прототипам. Это объясняется тем, что имеются разработанные методы проектирования аналоговых низкочастотных эквивалентов ПЧ-трактов с распределённой избирательностью [71 — 75]:

- ПЧ-тракты типа 1 с одноконтурными каскадами, настроенными на центральную частоту полосы пропускания;

- ПЧ-тракты типа 2 с двойками одноконтурных каскадов, взаимно расстроенных относительно центральной частоты полосы пропускания;
- ПЧ-тракты типа 3 с тройками одноконтурных каскадов, один из которых настроен на центральную частоту полосы пропускания, а два других симметрично расстроены относительно неё;
- ПЧ-тракты типа 4 с двухконтурными каскадами, настроенными на центральную частоту полосы пропускания;
- ПЧ-тракты типа 5 с одноконтурными и двухконтурными каскадами (смешанного типа) типа, настроенными на центральную частоту полосы пропускания.

Основными структурными единицами таких ПЧ-трактов являются одноконтурные и двухконтурные каскады, которые описываются комплексными коэффициентами передачи $\mathrm{H}(j\omega)$ 2-го и 4-го порядков соответственно. Порядки их низкочастотных эквивалентов $\dot{\mathbf{H}}(j\Omega)$ в два раза меньше (1-й порядок для одноконтурного и 2-й порядок для двухконтурного каскада).

Переход от передаточных функций $\dot{\mathbf{H}}(p)$ аналоговых каскадов к их цифровым эквивалентам $\dot{\mathbf{H}}(z)$ может осуществляться различными методами дискретизации, которые описаны в § 13.8. Наиболее удобным является билинейное преобразование.

Данный метод можно использовать во всех случаях, когда удаётся получить низкочастотный эквивалент аналогового полосового или режекторного фильтра. Он удобен также для построения цифровых моделей частотных детекторов на расстроенных, а также на связанных контурах и дробного детектора [1, 5].

3. Эвристический метод синтеза рекурсивных комплексных ЦФ экспериментальным подбором положения полюсов и нулей передаточной функции $H(z)$ на Z-плоскости является универсальным, но не формализуемым. Он позволяет получить ЦФ с амплитудно-частотной характеристикой любой формы (в том числе и несимметричной). Данный метод пригоден также для синтеза нерекурсивных ЦФ, в том числе и со строго линейными ФЧХ, хотя в этом случае его эффективность довольно низкая.

Метод базируется на коррекции положения полюсов и нулей передаточной функции при контроле формы АЧХ фильтра с целью подгонки её под заданную с определённой степенью точности.

Процедура синтеза ЦФ эвристическим методом является довольно трудоёмкой и требует соответствующей квалификации и опыта проектировщика.

4. Синтез рекурсивных комплексных ЦФ на основе сдвига частоты вещественных рекурсивных ЦФ-прототипов является наиболее простым в использовании, однако имеет ограничение на вид АЧХ синтезируемого фильтра (арифметическая симметрия).

Глава 17

РАСЧЁТ РАЗРЯДНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

17.1. Подходы к расчёту разрядности коэффициентов цифровых фильтров

Влияние конечной разрядности представления коэффициентов ЦФ (квантования коэффициентов) на деформацию его частотных характеристик на качественном уровне рассмотрено в § 10.3.

После выполнения первого этапа проектирования ЦФ — решения аппроксимационной задачи (см. рис.12.1) — получают передаточную функцию дискретного фильтра $H(z)$, коэффициенты которой для точного представления в двоичных кодах требуют очень большого числа разрядов. Так, например, если аппроксимационная задача решается на универсальной ЭВМ, то значения коэффициентов передаточной функции получают с числом двоичных разрядов порядка 32 — 64 и более.

Используя нормировку частоты $W = f \big/ f_{\text{д}}$, перепишем формулы (3.32), (3.33), (3.50), (3.51), (4.43) — (4.46) для амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик вещественных и комплексных дискретных фильтров:

♦ АЧХ и ФЧХ одномерных скалярных вещественных стационарных линейных дискретных фильтров описываются выражениями

$$A(W) = \sqrt{\frac{\left[a_0 + \sum\limits_{k=1}^{M} a_k \cos(2\pi W k)\right]^2 + \left[\sum\limits_{k=1}^{M} a_k \sin(2\pi W k)\right]^2}{\left[1 + \sum\limits_{k=1}^{N} b_k \cos(2\pi W k)\right]^2 + \left[\sum\limits_{k=1}^{N} b_k \sin(2\pi W k)\right]^2}}; \qquad (17.1)$$

$$\varphi(W) = -\operatorname{Arctg} \frac{\sum\limits_{k=1}^{M} a_k \sin(2\pi W k)}{a_0 + \sum\limits_{k=1}^{M} a_k \cos(2\pi W k)} + \operatorname{Arctg} \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} b_k \sin(2\pi W k)}{1 + \sum\limits_{k=1}^{N} b_k \cos(2\pi W k)} \qquad (17.2)$$

в случае рекурсивных и

$$A(W) = \sqrt{\left[a_0 + \sum\limits_{k=1}^{M} a_k \cos(2\pi W k)\right]^2 + \left[\sum\limits_{k=1}^{M} a_k \sin(2\pi W k)\right]^2}; \qquad (17.3)$$

$$\varphi(W) = -\mathrm{Arctg}\frac{\sum_{k=1}^{M} a_k \sin(2\pi W k)}{a_0 + \sum_{k=1}^{M} a_k \cos(2\pi W k)} \qquad (17.4)$$

в случае нерекурсивных фильтров;

♦ АЧХ и ФЧХ одномерных скалярных комплексных стационарных линейных дискретных фильтров описываются выражениями

$$A(W) = \left\{ \frac{\left[a_{c0} + \sum_{k=1}^{M} [a_{ck} \cos(2\pi W k) + a_{sk} \sin(2\pi W k)) \right]^2 +}{\left[1 + \sum_{k=1}^{N} [b_{ck} \cos(2\pi W k) + b_{sk} \sin(2\pi W k)] \right]^2 +} \right.$$

$$\left. \frac{+ \left[a_{s0} + \sum_{k=1}^{M} [a_{sk} \cos(2\pi W k) - a_{ck} \sin(2\pi W k)] \right]^2}{+ \left[\sum_{k=1}^{N} [b_{sk} \cos(2\pi W k) - b_{ck} \sin(2\pi W k)] \right]^2} \right\}^{1/2}; \qquad (17.5)$$

$$\varphi(W) = \mathrm{Arctg}\frac{a_{s0} + \sum_{k=1}^{M} [a_{sk} \cos(2\pi W k) - a_{ck} \sin(2\pi W k)]}{a_{c0} + \sum_{k=1}^{M} [a_{ck} \cos(2\pi W k) + a_{sk} \sin(2\pi W k)]} -$$

$$- \mathrm{Arctg}\frac{\sum_{k=1}^{N} [b_{sk} \cos(2\pi W k) - b_{ck} \sin(2\pi W k)]}{1 + \sum_{k=1}^{N} [b_{ck} \cos(2\pi W k) + b_{sk} \sin(2\pi W k)]} \qquad (17.6)$$

в случае рекурсивных и

$$A(W) = \left\{ \left[a_{c0} + \sum_{k=1}^{M} [a_{ck} \cos(2\pi W k) + a_{sk} \sin(2\pi W k)] \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[a_{s0} + \sum_{k=1}^{M} [a_{sk} \cos(2\pi W k) - a_{ck} \sin(2\pi W k)] \right]^2 \right\}^{1/2}; \qquad (17.7)$$

$$\varphi(W) = \operatorname{Arctg} \frac{a_{s0} + \sum\limits_{k=1}^{M} [\, a_{sk} \cos(2\pi W k) - a_{ck} \sin(2\pi W k)]}{a_{c0} + \sum\limits_{k=1}^{M} [\, a_{ck} \cos(2\pi W k) + a_{sk} \sin(2\pi W k)]} \qquad (17.8)$$

в случае нерекурсивных фильтров•, где

$$\begin{cases} a_k = a_{ck} + j a_{sk}, & k = \overline{0,\ M}; \\ b_k = b_{ck} + j b_{sk}, & k = \overline{1,\ N}. \end{cases} \qquad (17.9)$$

Цифровой фильтр реализуют на специализированном вычислителе (сигнальном процессоре), арифметические операции в котором, как правило, выполняются в формате с фиксированной точкой•• при меньшей по сравнению с универсальной ЭВМ разрядной сетке. Значения коэффициентов фильтра квантуются, так как они должны быть представлены с помощью ограниченного количества двоичных разрядов $S_{\text{К}}$, определяемого разрядной сеткой вычислителя. Другими словами, при расчётах АЧХ и ФЧХ цифровых фильтров в формулах (17.1) — (17.8) точные значения коэффициентов a_k, a_{ck}, a_{sk} $\left(k = \overline{0,\ M}\right)$ и b_k, b_{ck}, b_{sk} $\left(k = \overline{1,\ N}\right)$ заменяются приближёнными (квантованными) значениями

$$\begin{cases} \widetilde{a}_k = a_k + \delta a_k, & k = \overline{0,\ M}; \\ \widetilde{b}_k = b_k + \delta b_k, & k = \overline{1,\ N} \end{cases} \qquad (17.10)$$

для вещественных и

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{ck} = a_{ck} + \delta a_{ck}, & k = \overline{0,\ M}; \\ \widetilde{a}_{sk} = a_{sk} + \delta a_{sk}, & k = \overline{0,\ M}; \\ \widetilde{b}_{ck} = b_{ck} + \delta b_{ck}, & k = \overline{1,\ N}; \\ \widetilde{b}_{sk} = b_{sk} + \delta b_{sk}, & k = \overline{1,\ N} \end{cases} \qquad (17.11)$$

для комплексных ЦФ.

Здесь δa_k, δa_{ck}, δa_{sk} $\left(k = \overline{0,\ M}\right)$ и δb_k, δb_{ck}, δb_{sk} $\left(k = \overline{1,\ N}\right)$ — погрешности представления коэффициентов фильтра, обусловленные квантованием. Символ $\widetilde{x}$ (тильда над числом x) означает, что помеченная им величина является квантованной.

• Для фильтров сложной структуры следует использовать правила получения передаточных функций при различных способах соединения блоков (каскадном, параллельном и с обратной связью (см. § 4.5 и 4.7).

•• Возможна также реализация ЦФ на сигнальном процессоре (DSP) в формате с плавающей точкой, что встречается крайне редко. В этом случае погрешностями выходного сигнала, обусловленными квантованием коэффициентов ЦФ, а также квантованием результатов арифметических операций в вычислителе, можно пренебречь.

Число разрядов $S_{\text{К}}$ для представления квантованных коэффициентов ЦФ должно быть выбрано таким образом, чтобы частотные характеристики фильтра (АЧХ и ФЧХ) как в полосах пропускания, так и в полосах задерживания не выходили за пределы допусков, заданных в ТЗ на проектирование (см. рис.12.1).

При реализации ЦФ на специализированном вычислителе (сигнальном процессоре) обычно используется представление чисел в формате с фиксированной точкой. В этом случае для записи кодов целой части чисел, отображающих коэффициенты ЦФ, выделяют $S_{\text{К}_\text{ц}}$ двоичных разрядов, а дробной — $S_{\text{К}_\text{д}}$ разрядов:

$$S_{\text{К}} = 1 + S_{\text{К}_\text{ц}} + S_{\text{К}_\text{д}}, \tag{17.12}$$

где один разряд (знаковый) служит для представления знака коэффициента.

Разрядность $S_{\text{К}_\text{ц}}$ кодов целой части чисел определяется величиной модуля максимального коэффициента передаточной функции ЦФ•:

$$S_{\text{К}_\text{ц}} = \text{int}\left\{ \log_2 \left[\max_{i,k} \left(|a_i|, |b_k| \right) \right] \right\} \tag{17.13}$$

для вещественных и

$$S_{\text{К}_\text{ц}} = \text{int}\left\{ \log_2 \left[\max_{i,k} \left(|a_{\text{c}i}|, |a_{\text{s}i}|, |b_{\text{c}k}|, |b_{\text{s}k}| \right) \right] \right\} \tag{17.14}$$

для комплексных ЦФ, где $i = \overline{0,\ M}$, $k = \overline{1,\ N}$.

Влияние величин $S_{\text{К}_\text{ц}}$ и $S_{\text{К}_\text{д}}$ в составе $S_{\text{К}}$ [см. (17.12)] на представление коэффициентов ЦФ различное: уменьшение $S_{\text{К}_\text{ц}}$ приведёт к аномальному искажению, а уменьшение $S_{\text{К}_\text{д}}$ — лишь к снижению точности задания коэффициентов [см. (17.10) и (17.11)]. Ясно, что уменьшать разрядность представления коэффициентов $S_{\text{К}}$ цифрового фильтра можно только за счёт уменьшения величины $S_{\text{К}_\text{д}}$:

$$S_{\text{К}_\text{д}} = S_{\text{К}} - 1 - S_{\text{К}_\text{ц}}. \tag{17.15}$$

Существуют два подхода к расчёту разрядности $S_{\text{К}}$ коэффициентов ЦФ [8]. При первом подходе расчёт минимально возможного значения $S_{\text{К}}$ осуществляется на стадии решения аппроксимационной задачи. В этом случае несколько изменяется и постановка задачи: теперь должна быть определена аппроксимирующая функция $\Phi_K(W, \mathbf{C})$ заданного порядка K, удовлетворяющая выбранному критерию [например, условию (12.16) или (12.17)] при минимальной двоичной разрядности $S_{\text{К}}$ коэффициентов вектора $\mathbf{C}$: $c_i \left(i = \overline{0,\ K} \right)$. Подобные задачи решаются методом целочисленного программирования. При втором

• См. сноску на с.410.

подходе расчёт требуемой разрядности $S_{\text{К}}$ коэффициентов ЦФ осуществляется путём квантования коэффициентов передаточной функции $H(z)$, полученных в результате решения аппроксимационной задачи в обычной постановке.

Второй подход к решению задачи расчёта разрядности коэффициентов ЦФ по трудоёмкости значительно проще первого. При значениях $S_{\text{К}}$, удовлетворяющих условию $S_{\text{К}} \geq 10$, оба подхода дают практически одинаковый результат [8].

В [11] описан статистический подход к решению задачи расчёта разрядности коэффициентов $S_{\text{К}}$ цифрового фильтра, основанный на использовании функций чувствительности АЧХ фильтра по отношению к коэффициентам.

На практике часто используют следующий *критерий* для оценки $S_{\text{К}}$ [8].

Пусть требования к АЧХ цифрового фильтра $A(W) = \left| H\left(e^{j2\pi W}\right)\right|$ имеют вид

$$\left| B(W) - A(W) \right| \leq \varepsilon_i^*, \tag{17.16}$$

где $B(W)$ — аппроксимируемая функция; ε_i^* — допустимая погрешность аппроксимации АЧХ на i-м частотном интервале ($i = 1$ для полос пропускания и $i = 2$ для полос задерживания). Тогда разрядность коэффициентов $S_{\text{К}}$ считается выбранной правильно, если АЧХ фильтра с передаточной функцией $\widetilde{H}(z)$, коэффициенты которой представлены $S_{\text{К}}$ двоичными разрядами, удовлетворяет условию (17.16).

17.2. Алгоритм расчёта цифрового фильтра при заданной разрядности коэффициентов

Если ЦФ реализуется на сигнальном процессоре (DSP), то его коэффициенты представляются двоичным кодом с заранее определённым числом разрядов • $S_{\text{К}}$. В этом случае необходимо определить, можно ли реализовать ЦФ, удовлетворяющий условиям задачи, и, если можно, то рассчитать коэффициенты этого фильтра с двоичной разрядностью, равной $S_{\text{К}}$.

На рис.17.1 изображена схема алгоритма расчёта ЦФ при представлении коэффициентов $S_{\text{К}}$-разрядными двоичными числами [8].

В блоке 1 решается аппроксимационная задача, в результате чего определяется передаточная функция $H(z)$ дискретного фильтра минимального порядка $N = N_{\min}$, удовлетворяющего требованиям технического задания (ТЗ).

В блоке 2 коэффициенты (17.10) или (17.11) передаточной функции подвергаются квантованию для представления их $S_{\text{К}}$-разрядными двоичными ко-

---

• При программировании сигнального процессора (DSP) коэффициенты ЦФ записываются в регистры постоянной памяти.

дами, затем в блоке 3 производится расчёт максимальных погрешностей аппроксимации АЧХ в полосах пропускания ε_1 и задерживания ε_2:

$$\varepsilon_i = \max_{W \in [\alpha_{1i},\ \alpha_{2i}]} \left| B(W) - \widetilde{A}(W) \right|, \quad i = \overline{1,\ 2}\,. \tag{17.17}$$

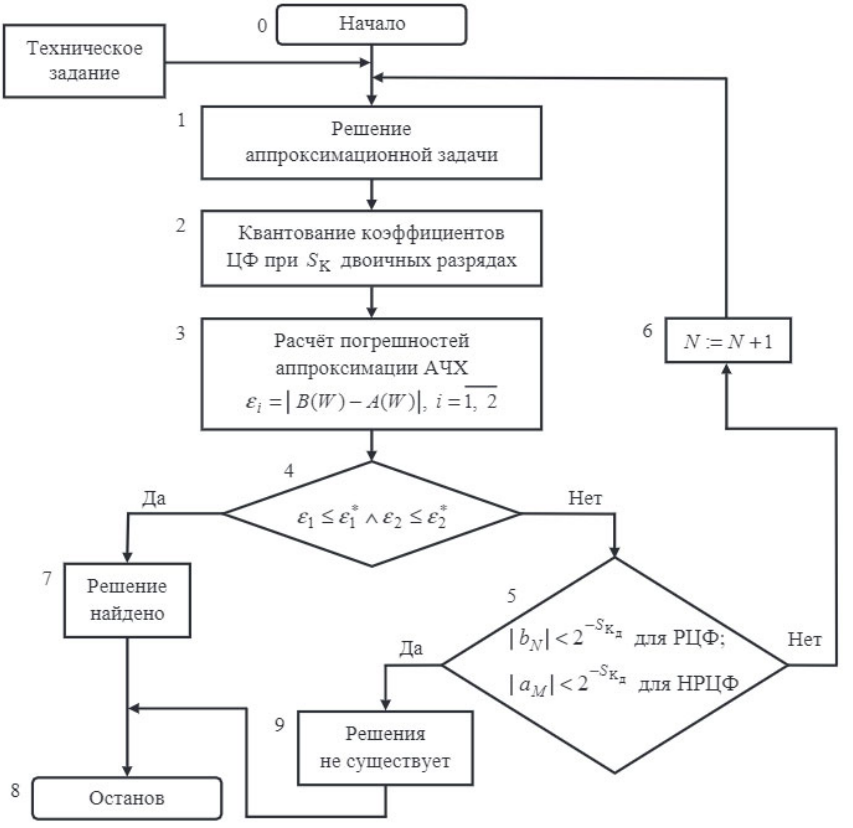


Рис.17.1. Схема алгоритма расчёта ЦФ при заданной разрядности коэффициентов $S_К$

Фильтры нижних и верхних частот имеют по одной полосе пропускания ($i = 1$) и задерживания ($i = 2$), полосовой фильтр — одну полосу пропускания и две полосы задерживания, а режекторный — две полосы пропускания и одну полосу задерживания (см. рис.12.2 и 13.13).

В случаях двух полос пропускания или задерживания, что характерно для полосового и режекторного фильтров, промежутки $[\alpha_{1i},\ \alpha_{2i}]$ не являются одно-

связными и представляют собой объединение соответствующих частотных интервалов:

$$[\alpha_{1i},\ \alpha_{2i}] = [\alpha'_{1i},\ \alpha'_{2i}] \cup [\alpha''_{1i},\ \alpha''_{2i}]. \qquad (17.18)$$

АЧХ разного типа ЦФ с квантованными коэффициентами рассчитывают по формулам (17.1), (17.3), (17.5), (17.7) соответственно.

В блоке 4 проверяется условие получения решения. Если рассчитанные погрешности аппроксимации ε_1 и ε_2 не превосходят заданных допустимых значений ε_1^* и ε_2^* соответственно, т.е. если логическое выражение

$$\varepsilon_1 \le \varepsilon_1^* \wedge \varepsilon_2 \le \varepsilon_2^* \qquad (17.19)$$

является истинным, то решение определено (блок 7) и значения коэффициентов передаточной функции, полученные в блоке 2, можно использовать при реализации ЦФ. При этом вычисления заканчиваются (переход в блок 8).

Если логическое выражение (17.19) является ложным, то осуществляется переход в блок 5, где проверяется выполнение условия

$$\begin{cases} |b_N| < 2^{-S_{\text{Кд}}} & \text{для рекурсивного ЦФ;} \\ |a_M| < 2^{-S_{\text{Кд}}} & \text{для нерекурсивного ЦФ,} \end{cases} \qquad (17.20)$$

означающего, что старший коэффициент передаточной функции при представлении его $S_{\text{К}}$-разрядным двоичным кодом будет «машинным нулём» •. В этом случае решение задачи не существует, т.е. по заданным в ТЗ требованиям невозможно построить ЦФ с разрядностью коэффициентов, равной $S_{\text{К}}$ (блок 9). При этом вычисления прекращаются (переход в блок 8).

Если же условие (17.20) не выполняется, то можно попытаться увеличить порядок фильтра N и тем самым уменьшить погрешности аппроксимации АЧХ ε_1 и ε_2. Для этого осуществляется переход в блок 6, где порядку ЦФ присваивается увеличенное на единицу значение, а затем — в блок 1 для нового решения аппроксимационной задачи, но уже при увеличенном порядке фильтра N.

После многократного повторения описанной процедуры увеличения порядка фильтра N в конечном итоге происходит переход либо в блок 7, либо в блок 9, т.е. получается либо ЦФ с разрядностью коэффициентов, равной $S_{\text{К}}$, удовлетворяющий требованиям ТЗ, либо ответ, что реализовать такой фильтр невозможно. На этом вычисления заканчиваются (переход в блок 8).

В последнем случае целесообразно перейти на другую элементную базу, т.е. выбрать сигнальный процессор (DSP), регистры постоянной памяти которо-

---

• При проектировании комплексного ЦФ условие (17.20) уточняется следующим образом:

$$\begin{cases} |b_{\text{c}N}| < 2^{-S_{\text{Кд}}} \wedge |b_{\text{s}N}| < 2^{-S_{\text{Кд}}} & \text{для рекурсивного ЦФ;} \\ |a_{\text{c}M}| < 2^{-S_{\text{Кд}}} \wedge |a_{\text{s}M}| < 2^{-S_{\text{Кд}}} & \text{для нерекурсивного ЦФ.} \end{cases}$$

го имеют большее число двоичных разрядов •. Если по каким-либо причинам использование DSP другого типа невозможно, то иногда могут быть пересмотрены требования ТЗ в сторону их ослабления.

17.3. Алгоритм минимизации разрядности коэффициентов цифрового фильтра при ограничении сверху

При реализации ЦФ на БИС общего применения или на универсальных микропроцессорах число двоичных разрядов S_{K} для представления коэффициентов фильтра целесообразно минимизировать. Возможны два типа задач минимизации S_{K} [8].

В задачах минимизации первого типа требуется определить ЦФ минимального порядка $N_{\min}$, амплитудно-частотная характеристика которого удовлетворяет требованиям ТЗ при наименьшем значении $S_{\text{K}} = S_{\text{K}\min}$ с учётом ограничения сверху $S_{\text{K}\min} \le S_{\text{K}m}$, где $S_{\text{K}m}$ — заданное значение.

На рис.17.2 изображена схема алгоритма расчёта минимальной разрядности коэффициентов цифрового фильтра $S_{\text{K}\min}$ при наличии ограничения сверху $S_{\text{K}\min} \le S_{\text{K}m}$ [8]. Здесь использованы те же обозначения, что и на рис.17.1.

В блоке 1 осуществляется начальное присваивание $S_{\text{K}} := S_{\text{K}m}$, так как большие значения S_{K} недопустимы по условию задачи.

В блоке 2 решается аппроксимационная задача, в результате чего определяется передаточная функция $H(z)$ дискретного фильтра минимального порядка $N = N_{\min}$, удовлетворяющего требованиям технического задания (ТЗ).

В блоке 3 коэффициенты (17.10) или (17.11) передаточной функции подвергаются квантованию для представления их S_{K}-разрядными двоичными кодами, затем в блоке 4 производится расчёт максимальных погрешностей (17.17) аппроксимации АЧХ в полосах пропускания ε_1 и задерживания ε_2 при квантованных коэффициентах.

Далее в блоке 5 проверяется условие получения решения [истинность или ложность логического выражения (17.19)].

Если выражение (17.19) истинно, то осуществляется переход в блок 13, где выясняется, будет ли старший коэффициент передаточной функции ЦФ при представлении его $(S_{\text{K}} - 1)$-разрядным двоичным кодом «машинным нулём» [см. (17.20)].

Если в блоке 13 получен отрицательный ответ, то следует перейти в блок 14, где величине S_{K} присваивается новое, уменьшенное на единицу значение, а затем в блок 3. После этого операции блоков 3, 4 и 5 повторяются, но уже при новом значении S_{K}.

• См. сноску на с.670.

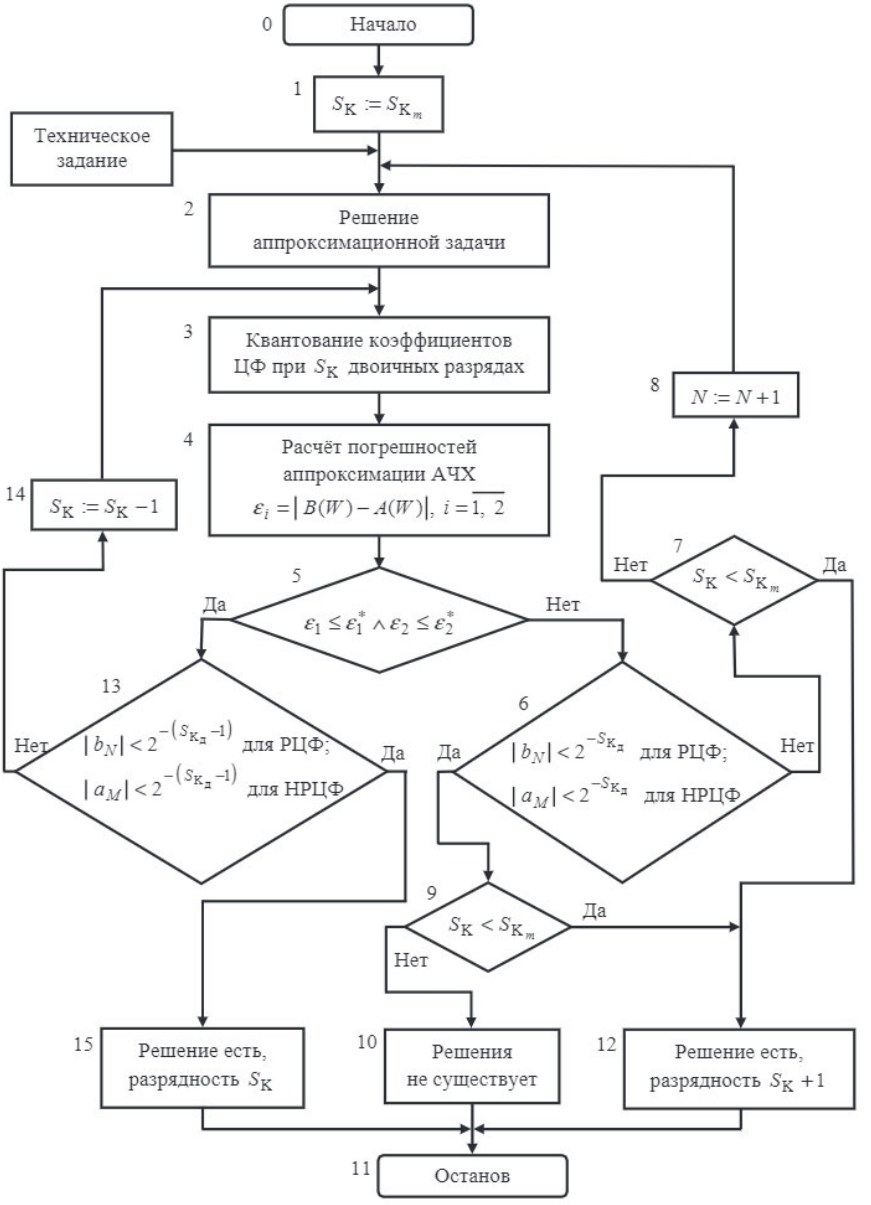


Рис.17.2. Схема алгоритма минимизации разрядности коэффициентов ЦФ при ограничении сверху

Если же в блоке 13 получен положительный ответ, то нужно перейти в блок 15 и принять в качестве решения задачи значение разрядности коэффициентов $S_{\text{К}}$, имевшее место в данном цикле вычислений. На этом расчёты прекращаются (переход в блок 11).

В случае, когда проверка в блоке 5 выявляет ложность логического выражения (17.19), осуществляется переход в блок 6, где выясняется, будет ли старший коэффициент передаточной функции цифрового фильтра при представлении его $S_{\text{К}}$-разрядным двоичным кодом «машинным нулём» [см. (17.20)].

Если в блоке 6 получен положительный ответ, то происходит переход в блок 9, где проверяется выполнение условия $S_{\text{К}} < S_{\text{К}_m}$. При выполнении этого условия следует перейти в блок 12 и за решение задачи принять разрядность коэффициентов ЦФ, равную $S_{\text{К}} + 1$. На этом вычисления заканчиваются (переход в блок 11). Если в блоке 9 получается отрицательный ответ (невыполнение условия $S_{\text{К}} < S_{\text{К}_m}$), то нужно перейти в блок 10. В этом случае решения задачи не существует, т.е. по заданным в ТЗ требованиям невозможно построить ЦФ с разрядностью коэффициентов $S_{\text{К}} < S_{\text{К}_m}$ (блок 9). При этом вычисления прекращаются (переход в блок 11).

Если в блоке 6 получен отрицательный ответ, то осуществляется переход в блок 7, где проверяется выполнение условия $S_{\text{К}} < S_{\text{К}_m}$. При положительном исходе проверки в блоке 7 следует перейти в блок 12 и за решение задачи принять разрядность коэффициентов ЦФ, равную $S_{\text{К}} + 1$. На этом вычисления заканчиваются (переход в блок 11). При отрицательном исходе проверки в блоке 7 можно попытаться найти решение задачи, увеличив порядок ЦФ, что часто приводит к уменьшению погрешности аппроксимации АЧХ. Для этого осуществляется переход в блок 8, где порядок фильтра N увеличивается на единицу, а затем — в блок 2 для нового решения аппроксимационной задачи.

Из рассмотренного алгоритма видно, что решение задачи минимизации $S_{\text{К}}$ первого типа (с ограничением сверху) не существует (блок 10) лишь в том случае, если при $S_{\text{К}} = S_{\text{К}_m}$ невозможно обеспечить заданную точность аппроксимации АЧХ даже при увеличении порядка N цифрового фильтра [8].

17.4. Алгоритм минимизации разрядности коэффициентов цифрового фильтра при отсутствии ограничений

В задачах минимизации второго типа требуется определить ЦФ минимального порядка $N_{\min}$, амплитудно-частотная характеристика которого удовлетворяет требованиям ТЗ при наименьшем значении $S_{\text{К}} = S_{\text{К}_{\min}}$, однако при этом значение $S_{\text{К}_m}$ не ограничивается сверху. На рис.17.3 изображена схема алгоритма решения задачи минимизации второго типа [8]. Здесь использованы те же обозначения, что и на рис.17.1 и 17.2.

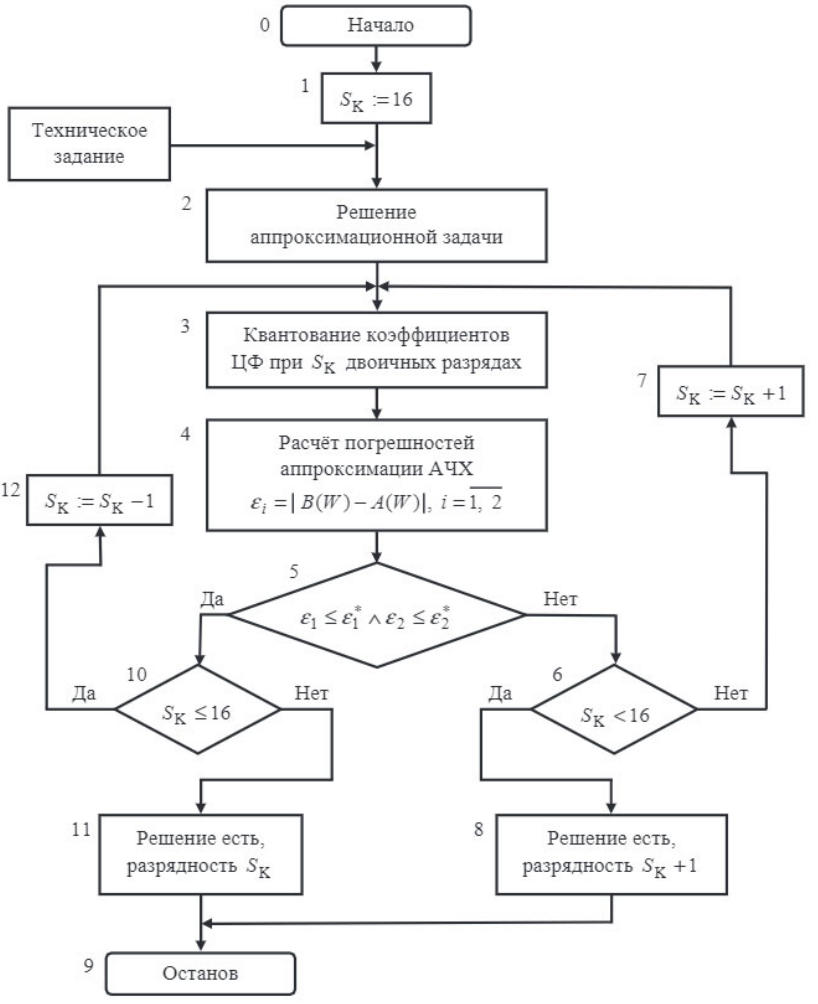


Рис.17.3. Схема алгоритма минимизации разрядности коэффициентов ЦФ $S_К$ при отсутствии ограничений

В блоке 1 осуществляется начальное присваивание $S_К := 16$ (значение 16 выбрано «средним» — по принципу «не слишком большое и не слишком малое»).

В блоке 2 решается аппроксимационная задача, в результате чего определяется передаточная функция $H(z)$ дискретного фильтра минимального поряд-

ка $N = N_{\min}$, удовлетворяющего требованиям технического задания (ТЗ). В дальнейшем порядок фильтра N не меняется.

В блоке 3 коэффициенты (17.10) или (17.11) передаточной функции подвергаются квантованию для представления их $S_{\text{К}}$-разрядными двоичными кодами, затем в блоке 4 производится расчёт максимальных погрешностей (17.17) аппроксимации АЧХ в полосах пропускания ε_1 и задерживания ε_2 при квантованных коэффициентах.

Далее в блоке 5 проверяется условие получения решения [истинность или ложность логического выражения (17.19)].

Если выражение (17.19) истинно, то далее следует переход в блок 10, где число $S_{\text{К}}$ сравнивается с числом 16. При $S_{\text{К}} \le 16$ происходит переход в блок 12, где разрядность $S_{\text{К}}$ уменьшается на единицу, и далее в блок 3. Цикл расчётов повторяется для нового значения $S_{\text{К}}$. При $S_{\text{К}} > 16$ осуществляется переход в блок 11. В этом случае в качестве решения задачи принимается значение $S_{\text{К}}$, имевшее место в данном цикле вычислений, и расчёт прекращается (переход в блок 9).

Если выражение (17.19) ложно, то следует переход в блок 6, где число $S_{\text{К}}$ сравнивается с его начальным значением (числом 16). При $S_{\text{К}} < 16$ происходит переход в блок 8 и в качестве решения задачи принимается значение $S_{\text{К}}$, на единицу большее, чем в данном цикле вычислений (т.е. $S_{\text{К}} + 1$). На этом расчёт заканчивается (переход в блок 9). При $S_{\text{К}} \ge 16$ осуществляется переход в блок 7, где значение $S_{\text{К}}$ увеличивается на единицу, и далее в блок 3. Цикл вычислений повторяется при увеличенной разрядности коэффициентов цифрового фильтра.

Как видно из рис.17.3, задача минимизации второго типа всегда имеет решение, поскольку на величину разрядности коэффициентов $S_{\text{К}}$ не наложено ограничений.

На последующих этапах проектирования ЦФ (см. рис.12.1) целесообразно использовать квантованные значения коэффициентов (17.10) или (17.11) передаточной функции $\widetilde{H}(z)$.

17.5. Примеры квантования коэффициентов цифровых фильтров

Квантование коэффициентов ЦФ при удовлетворении заданных в ТЗ требований к частотным характеристикам возможно только в том случае, когда при решении аппроксимационной задачи величины максимального затухания в полосах пропускания $a_{\text{п}}$ и минимального затухания в полосах задерживания $a_{\text{з}}$ получены с некоторым запасом [8]. Тогда деформация частотных характеристик ЦФ, вызванная квантованием коэффициентов, при правильно рассчитанной разрядности $S_{\text{К}}$ не приведёт к выходу этих характеристик за допустимые пределы.

Для иллюстрации изложенных методов рассмотрим несколько примеров квантования коэффициентов ЦФ. При этом ограничимся лишь операциями, вы-

полняемыми в блоках 2 и 3 рис.17.1 (в блоках 3 и 4 рис.17.2 и 17.3), — представлением коэффициентов S_K-разрядными двоичными кодами, расчётом АЧХ цифрового фильтра с квантованными коэффициентами и сравнением её с АЧХ соответствующего дискретного фильтра.

Квантование коэффициентов $a_k\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$ передаточной функции $H(z)$ по методу усечения для нерекурсивного вещественного ЦФ M-го порядка в системе компьютерной математики Mathcad выполняется по следующей подпрограмме•:

$SK := 16$

$k := 0..M$

$ac_k := \mathrm{trunc}(a_k)$

$ad_k := a_k - ac_k$

$AC_k := |ac_k|$

$AA := \max(AC)$

$SKc := \mathrm{ceil}(\log(1 + AA,\ 2))$

$SKd := SK - 1 - SKc$

$adk_k := \mathrm{trunc}\left(ad_k \cdot 2^{SKd}\right) / 2^{SKd}$ ••

$ak_k := ac_k + adk_k$

На языках программирования высокого уровня данная подпрограмма может быть оформлена в виде процедуры-функции.

Пример 17.1. Рассчитать АЧХ вещественного нерекурсивного цифрового ФНЧ 100-го порядка, спроектированного в примере 12.6, при квантовании коэффициентов по методу усечения с представлением их 15-разрядным двоичным кодом.

Применив приведённую выше процедуру квантования по методу усечения к коэффициентам дискретного фильтра, синтезированного в примере 12.6, получим следующие значения коэффициентов ЦФ (в десятичной системе счисления):

$$a_0 = 1{,}221\cdot10^{-4};\quad a_1 = 4{,}272\cdot10^{-4};\quad a_2 = -2{,}441\cdot10^{-4};\quad a_3 = -4{,}272\cdot10^{-4};$$
$$a_4 = 6{,}104\cdot10^{-5};\quad a_5 = 3{,}052\cdot10^{-4};\quad a_6 = 6{,}104\cdot10^{-5};\quad a_7 = -1{,}221\cdot10^{-4};$$
$$a_8 = -1{,}221\cdot10^{-4};\quad a_9 = -1{,}831\cdot10^{-4};\quad a_{10} = 6{,}104\cdot10^{-5};\quad a_{11} = 6{,}104\cdot10^{-4};$$

• Для рекурсивного ЦФ следует использовать аналогичную подпрограмму квантования коэффициентов $b_k\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ знаменателя передаточной функции $H(z)$. При этом разрядность S_K представления коэффициентов числителя $a_k\ \left(k=\overline{0,\ M}\right)$ и знаменателя $b_k\ \left(k=\overline{1,\ N}\right)$ должна быть одинаковой. Для комплексных ЦФ приведённую подпрограмму необходимо применять для косинусных a_{ci}, b_{ck} и синусных a_{si}, b_{sk} $\left(i=\overline{0,\ M},\ k=\overline{1,\ N}\right)$ компонент коэффициентов передаточной функции $H(z)$.

•• При квантовании коэффициентов по методу округления данную команду необходимо заменить командой $adk_k := \mathrm{round}\left(ad_k \cdot 2^{SKd}, 0\right) / 2^{SKd}$.

$$a_{12}=1{,}831\cdot10^{-4};\quad a_{13}=-9{,}155\cdot10^{-4};\quad a_{14}=-7{,}324\cdot10^{-4};\quad a_{15}=9{,}766\cdot10^{-4};$$
$$a_{16}=1{,}404\cdot10^{-3};\quad a_{17}=-7{,}324\cdot10^{-4};\quad a_{18}=-2{,}014\cdot10^{-3};\quad a_{19}=1{,}831\cdot10^{-4};$$
$$a_{20}=2{,}38\cdot10^{-3};\quad a_{21}=5{,}493\cdot10^{-4};\quad a_{22}=-2{,}38\cdot10^{-3};\quad a_{23}=-1{,}282\cdot10^{-3};$$
$$a_{24}=1{,}831\cdot10^{-3};\quad a_{25}=1{,}709\cdot10^{-3};\quad a_{26}=-9{,}766\cdot10^{-4};\quad a_{27}=-1{,}587\cdot10^{-3};$$
$$a_{28}=1{,}831\cdot10^{-4};\quad a_{29}=6{,}104\cdot10^{-4};\quad a_{30}=1{,}221\cdot10^{-4};\quad a_{31}=1{,}038\cdot10^{-3};$$
$$a_{32}=4{,}883\cdot10^{-4};\quad a_{33}=-3{,}052\cdot10^{-3};\quad a_{34}=-2{,}747\cdot10^{-3};\quad a_{35}=4{,}7\cdot10^{-3};$$
$$a_{36}=6{,}897\cdot10^{-3};\quad a_{37}=-4{,}944\cdot10^{-3};\quad a_{38}=-0{,}013;\quad a_{39}=2{,}563\cdot10^{-3};$$
$$a_{40}=0{,}02;\quad a_{41}=3{,}967\cdot10^{-3};\quad a_{42}=-0{,}029;\quad a_{43}=-0{,}017;\quad a_{44}=0{,}037;$$
$$a_{45}=0{,}041;\quad a_{46}=-0{,}044;\quad a_{47}=-0{,}091;\quad a_{48}=0{,}048\quad a_{49}=0{,}313;$$
$$a_{50}=0{,}45.$$

Остальные отсчёты определяются в соответствии с выражением

$$a_k=a_{100-k}\ \left(k=\overline{51,100}\right).$$

В двоичной системе счисления эти коэффициенты имеют следующую разрядность: $S_{\text{К}_\text{д}}=0$; $S_{\text{К}_\text{д}}=14$; $S_{\text{К}}=15$.

АЧХ цифрового фильтра рассчитаем по формуле (17.3). В линейном масштабе различия амплитудно-частотных характеристик дискретного и цифрового фильтров при выбранной разрядности представления коэффициентов практически не заметны, поэтому на рис.17.4 АЧХ фильтров изображены в логарифмическом масштабе.

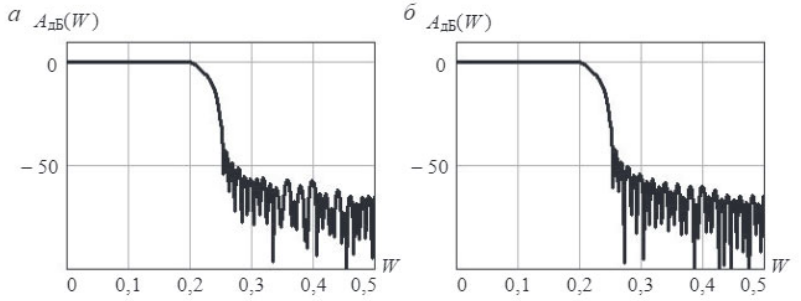


Рис.17.4. АЧХ цифрового (*а*) при $S_{\text{К}}=15$ и дискретного (*б*) нерекурсивных фильтров нижних частот в логарифмическом масштабе

Из рис.17.4 видно, что небольшие различия в АЧХ цифрового и дискретного фильтров наблюдаются лишь в полосе задерживания. Расчёты, проведённые для других значений $S_{\text{К}}$, показали, что при $S_{\text{К}}\geq16$ АЧХ цифрового и дискретного фильтров практически совпадают. При разрядности коэффициентов $S_{\text{К}}\leq14$ различия в АЧХ становятся заметно большими, а при $S_{\text{К}}\leq10$ существенно увеличивается неравномерность АЧХ цифрового фильтра в полосе пропускания и уменьшается затухание в полосе задерживания. Если допустимая величина затухания ЦФ в полосе задерживания $a_з$ порядка 30 дБ, то можно осуществить квантование коэффициентов ЦФ по методу усечения при $S_{\text{К}}=8$.

Пример 17.2. Рассчитать АЧХ вещественного рекурсивного полосового ЦФ 12-го порядка, спроектированного в примере 13.22, при квантовании коэффициентов по методу округления с представлением их 12-разрядным двоичным кодом.

Применив приведённую выше процедуру квантования по методу округления • к коэффициентам дискретного фильтра, синтезированного в примере 13.22, получим следующие значения коэффициентов ЦФ (в десятичной системе счисления):

$$a_0 = 9{,}766 \cdot 10^{-3};\quad a_1 = 0;\quad a_2 = 0;\quad b_1 = 0;\quad b_2 = 0;$$
$$a_{01} = 0{,}986;\quad a_{11} = 0{,}307;\quad a_{21} = 0{,}986;\quad b_{11} = 0{,}403;\quad b_{21} = 0{,}959;$$
$$\overline{a}_{01} = 0{,}986;\quad \overline{a}_{11} = 0{,}889;\quad \overline{a}_{21} = 0{,}986;\quad \overline{b}_{11} = 0{,}8;\quad \overline{b}_{21} = 0{,}962;$$
$$a_{02} = 0{,}95;\quad a_{12} = 0{,}185;\quad a_{22} = 0{,}95;\quad b_{12} = 0{,}395;\quad b_{22} = 0{,}864;$$
$$\overline{a}_{02} = 0{,}95;\quad \overline{a}_{12} = 0{,}943;\quad \overline{a}_{22} = 0{,}95;\quad \overline{b}_{12} = 0{,}754;\quad \overline{b}_{22} = 0{,}872;$$
$$a_{03} = 1{,}018;\quad a_{13} = -0{,}52;\quad a_{23} = 1{,}018;\quad b_{13} = 0{,}456;\quad b_{23} = 0{,}757;$$
$$\overline{a}_{03} = 1{,}018;\quad \overline{a}_{13} = 1{,}461;\quad \overline{a}_{23} = 1{,}018;\quad \overline{b}_{12} = 0{,}633;\quad \overline{b}_{22} = 0{,}764.$$

В двоичной системе счисления эти коэффициенты имеют следующую разрядность: $S_{K_ц} = 1$; $S_{K_д} = 10$; $S_K = 12$.

АЧХ цифрового фильтра рассчитаем по формуле (13.223). В логарифмическом масштабе различия амплитудно-частотных характеристик дискретного и цифрового фильтров при выбранной разрядности представления коэффициентов практически не заметны, поэтому на рис.17.5 АЧХ фильтров изображены в линейном масштабе.

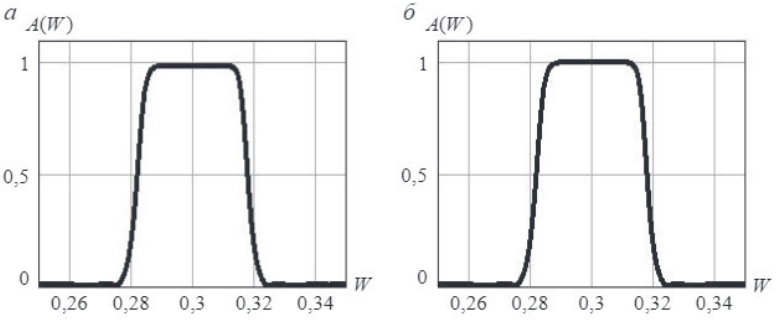


Рис.17.5. АЧХ цифрового (*а*) при $S_K = 12$ и дискретного (*б*) рекурсивных полосовых фильтров 12-го порядка в линейном масштабе

Из рис.17.5 видно, что незначительные различия в АЧХ цифрового и дискретного фильтров наблюдаются лишь в полосе пропускания. Расчёты, проведённые для других значений S_K, показали, что при $S_K \geq 12$ АЧХ цифрового и дискретного фильтров практически совпадают. При разрядности коэффициентов $S_K \leq 10$ различия в АЧХ становятся заметно большими (существенно увеличивается неравномерность АЧХ цифрового фильтра в полосе пропускания). Квантование коэффициентов рекурсивного ЦФ по методу усечения приводит к несколько большим искажениям АЧХ, чем квантование по методу округления.

• См. сноски на с.678.

Пример 17.3. Рассчитать АЧХ комплексного нерекурсивного ЦФ 100-го порядка, спроектированного в примере 15.1 для ПЧ-тракта канала изображения телевизионного приёмника, при квантовании коэффициентов по методу усечения с представлением их 12-разрядным двоичным кодом.

Применив приведённую выше процедуру квантования по методу усечения к коэффициентам дискретного фильтра, синтезированного в примере 15.1, получим следующие значения коэффициентов передаточных функций вещественных косинусного a_{ck} и синусного a_{sk} $\left(k=\overline{0,\ M}\right)$ блоков нерекурсивного комплексного ЦФ (в десятичной системе счисления):

$$a_{c0}=0;\quad a_{c1}=0;\quad a_{c2}=-4{,}883\cdot10^{-4};\quad a_{c3}=4{,}883\cdot10^{-4};\quad a_{c4}=0;$$
$$a_{c5}=0;\quad a_{c6}=4{,}883\cdot10^{-4};\quad a_{c7}=-4{,}883\cdot10^{-4};\quad a_{c8}=4{,}883\cdot10^{-4};$$
$$a_{c9}=0;\quad a_{c10}=0;\quad a_{c11}=4{,}883\cdot10^{-4};\quad a_{c12}=-4{,}883\cdot10^{-4};$$
$$a_{c13}=4{,}883\cdot10^{-4};\quad a_{c14}=0;\quad a_{c15}=0;\quad a_{c16}=0;\quad a_{c17}=0;\quad a_{c18}=0;$$
$$a_{c19}=0;\quad a_{c20}=0;\quad a_{c21}=0;\quad a_{c22}=0;\quad a_{c23}=-4{,}883\cdot10^{-4};$$
$$a_{c24}=4{,}883\cdot10^{-4};\quad a_{c25}=0;\quad a_{c26}=-4{,}883\cdot10^{-4};\quad a_{c27}=1{,}465\cdot10^{-3};$$
$$a_{c28}=-1{,}953\cdot10^{-3};\quad a_{c29}=1{,}465\cdot10^{-3};\quad a_{c30}=0;\quad a_{c31}=-1{,}953\cdot10^{-3};$$
$$a_{c32}=3{,}906\cdot10^{-3};\quad a_{c33}=-4{,}883\cdot10^{-3};\quad a_{c34}=3{,}418\cdot10^{-3};\quad a_{c35}=0;$$
$$a_{c36}=-4{,}395\cdot10^{-3};\quad a_{c37}=8{,}301\cdot10^{-3};\quad a_{c38}=-9{,}277\cdot10^{-3};$$
$$a_{c39}=6{,}348\cdot10^{-3};\quad a_{c40}=0;\quad a_{c41}=-8{,}789\cdot10^{-3};\quad a_{c42}=0{,}017;$$
$$a_{c43}=-0{,}02;\quad a_{c44}=0{,}014;\quad a_{c45}=0;\quad a_{c46}=-0{,}022;\quad a_{c47}=0{,}049;$$
$$a_{c48}=-0{,}075;\quad a_{c49}=0{,}093;\quad a_{c50}=0{,}4;$$
$$a_{ck}=a_{c(100-k)}\ \left(k=\overline{51,\ 100}\right);$$

$$a_{s0}=0;\quad a_{s1}=0;\quad a_{s2}=0;\quad a_{s3}=0;\quad a_{s4}=-4{,}883\cdot10^{-4};\quad a_{s5}=4{,}883\cdot10^{-4};$$
$$a_{s6}=-4{,}883\cdot10^{-4};\quad a_{s7}=0;\quad a_{s8}=0;\quad a_{s9}=-4{,}883\cdot10^{-4};\quad a_{s10}=9{,}766\cdot10^{-4};$$
$$a_{s11}=0;\quad a_{s12}=0;\quad a_{s13}=0;\quad a_{s14}=-4{,}883\cdot10^{-4};\quad a_{s15}=4{,}883\cdot10^{-4};$$
$$a_{s16}=-4{,}883\cdot10^{-4};\quad a_{s17}=0;\quad a_{s18}=0;\quad a_{s19}=0;\quad a_{s20}=0;\quad a_{s21}=0;$$
$$a_{s22}=0;\quad a_{s23}=0;\quad a_{s24}=9{,}766\cdot10^{-4};\quad a_{s25}=-4{,}883\cdot10^{-4};$$
$$a_{s26}=9{,}766\cdot10^{-4};\quad a_{s27}=-4{,}883\cdot10^{-4};\quad a_{s28}=-9{,}766\cdot10^{-4};$$
$$a_{s29}=1{,}465\cdot10^{-3};\quad a_{s30}=-3{,}906\cdot10^{-3};\quad a_{s31}=2{,}441\cdot10^{-3};$$
$$a_{s32}=-9{,}766\cdot10^{-4};\quad a_{s33}=-9{,}766\cdot10^{-4};\quad a_{s34}=5{,}859\cdot10^{-3};$$
$$a_{s35}=-5{,}371\cdot10^{-3};\quad a_{s36}=7{,}324\cdot10^{-3};\quad a_{s37}=-1{,}465\cdot10^{-3};$$
$$a_{s38}=-2{,}93\cdot10^{-3};\quad a_{s39}=7{,}813\cdot10^{-3};\quad a_{s40}=-0{,}016;\quad a_{s41}=8{,}301\cdot10^{-3};$$
$$a_{s42}=-9{,}277\cdot10^{-3};\quad a_{s43}=-9{,}277\cdot10^{-3};\quad a_{s44}=0{,}02;\quad a_{s45}=-0{,}024;$$
$$a_{s46}=0{,}047;\quad a_{s47}=0{,}018;\quad a_{s48}=0{,}041;\quad a_{s49}=0{,}28;\quad a_{s50}=0;$$
$$a_{sk}=-a_{s(100-k)}\ \left(k=\overline{51,\ 100}\right).$$

В двоичной системе счисления эти коэффициенты имеют следующую разрядность: $S_{K_{\text{д}}}=0$; $S_{K_{\text{д}}}=11$; $S_{K}=12$.

АЧХ цифрового фильтра рассчитаем по формуле (17.7). В линейном масштабе различия амплитудно-частотных характеристик дискретного и цифрового фильтров при выбранной разрядности представления коэффициентов слабо заметны, поэтому на рис.17.6 АЧХ фильтров изображены в логарифмическом масштабе.

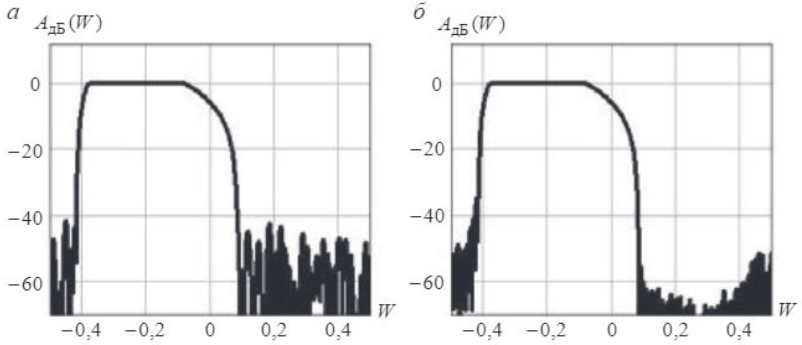


Рис.17.6. АЧХ цифрового (*а*) при $S_К = 12$ и дискретного (*б*) комплексных нерекурсивных фильтров 100-го порядка для ПЧ-тракта канала изображения телевизионного приёмника в логарифмическом масштабе

Из рис.17.6 видно, что наибольшие различия в АЧХ цифрового и дискретного фильтров наблюдаются в полосе задерживания. Затухание на частоте $W = 0$, соответствующей промежуточной частоте сигнала, составляет 6,021 дБ для дискретного и 5,995 дБ для цифрового фильтра.

Пример 17.4. Рассчитать АЧХ комплексного рекурсивного ЦФ 14-го порядка, спроектированного в примере 16.10 для ПЧ-тракта канала изображения телевизионного приёмника, при квантовании коэффициентов по методу округления с представлением их 11-разрядным двоичным кодом.

Комплексные полюсы z_{pi} и нули z_{0i} $\left(i = \overline{1,\ 14}\right)$ передаточной функции

$$H(z) = K \frac{\prod_{i=1}^{14} \left(1 - z_{0i} z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{14} \left(1 - z_{pi} z^{-1}\right)}$$

комплексного рекурсивного дискретного фильтра, синтезированного в примере 16.10, представим в декартовой форме: $z_{pi} = z_{pci} + j\, z_{psi}$; $z_{0i} = z_{0ci} + j\, z_{0si}$ $\left(i = \overline{1,\ 14}\right)$.

Применив приведённую выше процедуру квантования по методу округления • к вещественным и мнимым частям комплексных полюсов $z_{pi} = z_{pci} + j\, z_{psi}$ и нулей $z_{0i} = z_{0ci} + j\, z_{0si}$ $\left(i = \overline{1,\ 14}\right)$, а также к нормирующему коэффициенту K дискретного фильтра, синтезированного в примере 16.10, получим следующие значения нормиру-

• См. сноски на с.678.

ющего коэффициента, полюсов и нулей передаточной функции ЦФ (в десятичной системе счисления):

$$K = 0{,}018;$$

$$z_{p1} = -0{,}9; \qquad z_{01} = -1;$$

$$z_{p2} = -0{,}721 - j\,0{,}648; \qquad z_{02} = -0{,}865 - j\,0{,}5;$$

$$z_{p3} = 0{,}582 - j\,0{,}17; \qquad z_{03} = 0{,}867 + j\,0{,}498;$$

$$z_{p4} = -0{,}713 - j\,0{,}518; \qquad z_{04} = -0{,}951 - j\,0{,}309;$$

$$z_{p5} = -0{,}475 - j\,0{,}367; \qquad z_{05} = -0{,}951 - j\,0{,}309;$$

$$z_{p6} = 0{,}807 - j\,0{,}051; \qquad z_{06} = 0{,}809 + j\,0{,}588;$$

$$z_{p7} = -0{,}186 - j\,0{,}57; \qquad z_{07} = -0{,}176 + j\,0{,}242;$$

$$z_{p8} = 0{,}434 + j\,0{,}307; \qquad z_{08} = -0{,}588 + j\,0{,}809;$$

$$z_{p9} = 0{,}266 + j\,0{,}818; \qquad z_{09} = 0{,}309 + j\,0{,}951;$$

$$z_{p10} = -0{,}695 - j\,0{,}506; \qquad z_{010} = -0{,}809 - j\,0{,}588;$$

$$z_{p11} = -0{,}363 + j\,0{,}713; \qquad z_{011} = -0{,}453 + j\,0{,}891;$$

$$z_{p12} = -0{,}803 + j\,0{,}408; \qquad z_{012} = -0{,}891 + j\,0{,}453;$$

$$z_{p13} = -0{,}775 - j\,0{,}199; \qquad z_{013} = -0{,}969 - j\,0{,}248;$$

$$z_{p14} = -0{,}486 - j\,0{,}354; \qquad z_{014} = -0{,}951 - j\,0{,}309.$$

В двоичной системе счисления нормирующий коэффициент, а также вещественные и мнимые части полюсов и нулей имеют следующую разрядность: $S_{\mathrm{K_ц}} = 1$; $S_{\mathrm{K_д}} = 9$; $S_{\mathrm{K}} = 11$.

АЧХ цифрового фильтра рассчитаем по формуле

$$A(W) = K\frac{\prod_{i=1}^{14}\left|1 - z_{0i}e^{-j2\pi W}\right|}{\prod_{i=1}^{14}\left|1 - z_{pi}e^{-j2\pi W}\right|}.$$

На рис.17.7 в логарифмическом масштабе изображены амплитудно-частотные характеристики дискретного и цифрового фильтров при выбранной разрядности представления вещественных и мнимых частей полюсов и нулей. Затухание на частоте $W = 0$, соответствующей промежуточной частоте сигнала, составляет 6 дБ для дискретного и 6,028 дБ для цифрового фильтра.

На граничных частотах полосы пропускания ($W_{\mathrm{п1}} = -0{,}383$; $W_{\mathrm{п2}} = -0{,}083$) затухание составляет $a_{\mathrm{п_{дБ}}}(W_{\mathrm{п1}}) = 1{,}024$ дБ, $a_{\mathrm{п_{дБ}}}(W_{\mathrm{п2}}) = 0{,}47$ дБ для дискретного фильтра и $a_{\mathrm{п_{дБ}}}(W_{\mathrm{п1}}) = 0{,}989$ дБ, $a_{\mathrm{п_{дБ}}}(W_{\mathrm{п2}}) = 0{,}496$ дБ для ЦФ. Неравномерность АЧХ в полосе пропускания ЦФ при заданной разрядности представления коэффициентов практически совпадает с неравномерностью АЧХ дискретного фильтра.

Таким образом, АЧХ цифрового при $S_{\mathrm{K}} = 11$ и дискретного комплексных рекурсивных фильтров практически совпадают. Расчёты показали, что недопустимые искажения АЧХ цифрового фильтра получаются при $S_{\mathrm{K}} \le 8$.

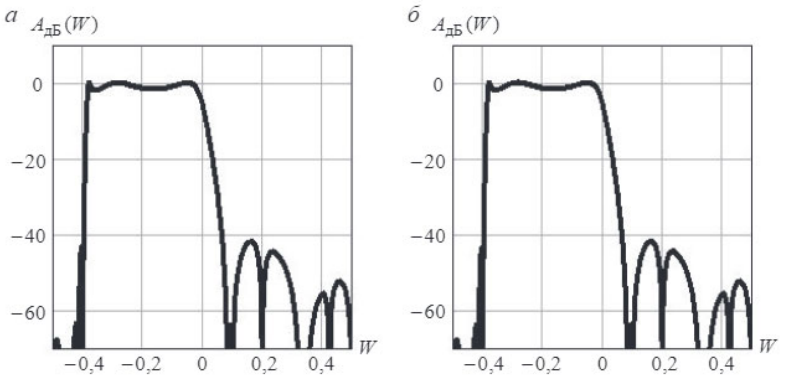


Рис.17.7. АЧХ цифрового (*а*) при $S_К = 11$ и дискретного (*б*) комплексных рекурсивных фильтров 14-го порядка для ПЧ-тракта канала изображения телевизионного приёмника в логарифмическом масштабе

В нерекурсивном ЦФ коэффициенты a_k $\left(k = \overline{0,\ M}\right)$ передаточной функции $H(z)$ равны отсчётам его импульсной характеристики. Комплексная частотная характеристика $H\left(e^{j2\pi W}\right)$ *линейно* связана с этими коэффициентами:

$$H\left(e^{j2\pi W}\right) = \sum_{k=0}^{M} a_k\, e^{-j2\pi W k} = \sum_{n=0}^{M} h[n]\, e^{-j2\pi W n}, \qquad (17.21)$$

поэтому малые искажения коэффициентов за счёт квантования приводят к малым искажениям частотной характеристики и проблемы, связанные с квантованием коэффициентов, проявляются сравнительно редко. Если же ЦФ должен иметь крутой спад АЧХ между полосами пропускания и задерживания, квантование коэффициентов может привести к заметным искажениям частотной характеристики. Значительно серьёзнее сказывается квантование коэффициентов рекурсивных ЦФ на частотные характеристики, поскольку коэффициенты знаменателя b_k $\left(k = \overline{1,\ N}\right)$ передаточной функции $H(z)$ связаны с отсчётами импульсной характеристики $h[n]$ и с комплексной частотной характеристикой $H\left(e^{j2\pi W}\right)$ *нелинейно*. Как правило, наибольшие искажения АЧХ происходят в случаях крутых спадов между полосами пропускания и задерживания [52].

Пример 17.5. Спроектировать вещественный рекурсивный дискретный ФНЧ эллиптического типа при следующих требованиях •: максимальное затухание в полосе пропускания $a_п = 1$ дБ; минимальное затухание в полосе задерживания $a_з = 40$ дБ; нормированная граничная частота полосы пропускания $W_п = 0{,}1$; нормированная гранич-

• Параметры дискретного фильтра заимствованы из примера, рассмотренного в [52].

ная частота полосы задерживания $W_з = 0{,}12$. Исследовать влияние квантования коэффициентов ЦФ по методу округления с представлением их 13-разрядным двоичным кодом при прямой и каскадной формах реализации.

Для расчётов воспользуемся системой компьютерной математики MATLAB.

♦ Синтез дискретного фильтра. Программа синтеза состоит из следующих команд:

```
>> Rp=1;
>> Rs=40;
>> Wp=0.1*2;
>> Ws=0.12*2;
>> [n,Wn]=ellipord(Wp,Ws,Rp,Rs)
>> [a,b]=ellip(n,Rp,Rs,Wn)
>> [h,w]=freqz(a,b);
>>plot(w/(2*pi),abs(h))
>> grid on
```

Рассчитанные параметры синтезированного дискретного фильтра следующие:

- порядок фильтра $N = 6$;
- коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции дробно-рационального вида:

$$a_0 = 0{,}0160; \quad a_1 = -0{,}0482; \quad a_2 = 0{,}0859; \quad a_3 = -0{,}0989;$$
$$a_4 = 0{,}0859; \quad a_5 = -0{,}0482; \quad a_6 = 0{,}0160;$$
$$b_0 = 1{,}0000; \quad b_1 = -4{,}7549; \quad b_2 = 10{,}0434; \quad b_3 = -11{,}9260;$$
$$b_4 = 8{,}3648; \quad b_5 = -3{,}2804; \quad b_6 = 0{,}5629.$$

На рис.17.8 приведена АЧХ синтезированного дискретного фильтра.

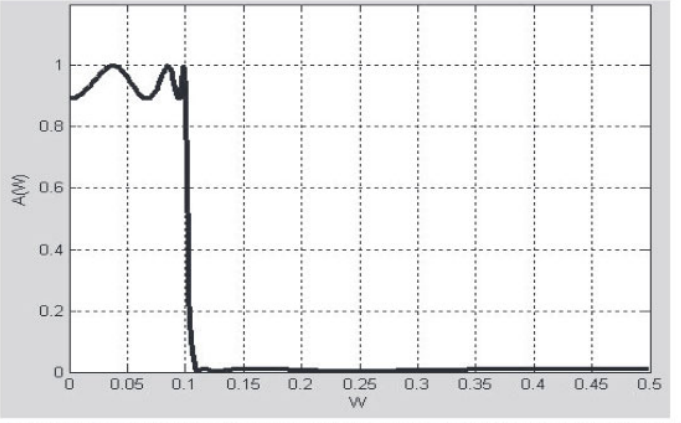


Рис.17.8. АЧХ синтезированного дискретного ФНЧ эллиптического типа 6-го порядка

♦ Квантование коэффициентов цифрового фильтра по методу округления с представлением их 13-разрядным двоичным кодом при прямой форме реализации. Программа квантования коэффициентов и построения АЧХ состоит из следующих команд:

```
>> Rp=1;
>> Rs=40;
>> Wp=0.1*2;
>> Ws=0.12*2;
>> [n,Wn]=ellipord(Wp,Ws,Rp,Rs)
```

```
>> [a,b]=ellip(n,Rp,Rs,Wn)
>> SK=13;
>> [ac]=floor(abs(a)).*sign(a);
>> [bc]=floor(abs(b)).*sign(b);
>> M=max(abs(ac),abs(bc))
>> SKc=ceil(log2(M))
>> SKd=SK-SKc-1
>> [ad]=a-ac;
>> [bd]=b-bc
>> [adk]=round(ad*2^SKd)/(2^SKd);
>> [bdk]=round(bd*2^SKd)/(2^SKd);
>> [ak]=ac+adk
>> [bk]=bc+bdk
>> [h,w]=freqz(ak,bk);
>> plot(w/(2*pi),abs(h))
>> grid on
```

Рассчитанные параметры синтезированного ЦФ следующие:

- порядок фильтра $N = 6$;
- коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции дробно-рационального вида:

$$a_0 = 0{,}0156; \quad a_1 = -0{,}0469; \quad a_2 = 0{,}0859; \quad a_3 = -0{,}0977;$$
$$a_4 = 0{,}0859; \quad a_5 = -0{,}0469; \quad a_6 = 0{,}0156;$$
$$b_0 = 1{,}0000; \quad b_1 = -4{,}7539; \quad b_2 = 10{,}0430; \quad b_3 = -11{,}9258;$$
$$b_4 = 8{,}3633; \quad b_5 = -3{,}2813; \quad b_6 = 0{,}5625.$$

На рис.17.9 приведена АЧХ синтезированного цифрового фильтра при $S_K = 13$ в прямой форме реализации.

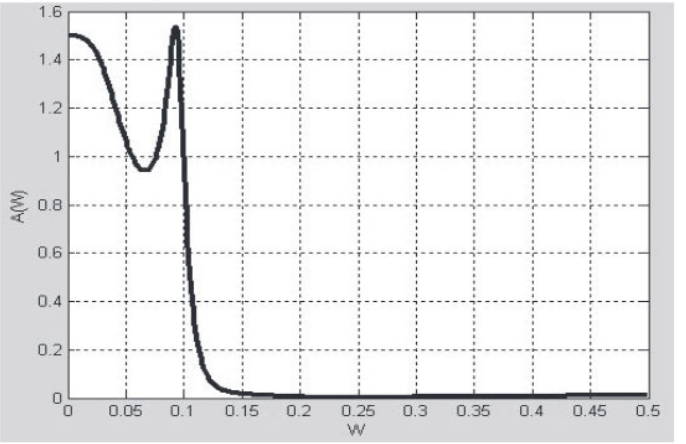


Рис.17.9. АЧХ цифрового ФНЧ эллиптического типа 6-го порядка при 13-разрядном квантовании коэффициентов в прямой форме реализации

Как видно из рис.17.8 и 17.9, при квантовании коэффициентов АЧХ цифрового фильтра изменилась значительно: в несколько раз увеличилась неравномерность в полосе пропускания, скат АЧХ стал более пологим, а в полосе задерживания исчезли две точки с нулевым коэффициентом передачи.

♦ Квантование коэффициентов цифрового фильтра по методу округления с представлением их 13-разрядным двоичным кодом при каскадной форме реализации. Программа квантования коэффициентов и построения АЧХ состоит из следующих команд:

```
>> Rp=1;
>> Rs=40;
>> Wp=0.1*2;
>> Ws=0.12*2;
>> [n,Wn]=ellipord(Wp,Ws,Rp,Rs);
>> [a,b]=ellip(n,Rp,Rs,Wn);
>> [sos,q]=tf2sos(a,b,'up','none')
>> SK=13;
>> [sosc]=floor(abs(sos)).*sign(sos)
>> [qc]=floor(abs(q)).*sign(q)
>> M=max(abs(sosc),abs(qc))
>> SKc=ceil(log2(M))
>> SKd=SK-SKc-1
>> [sosd]=sos-sosc;
>> qd=q-qc;
>> [sosdk]=round(sosd*2^SKd)/(2^SKd);
>> qdk=round(qd*2^SKd)/(2^SKd);
>> [sosk]=sosc+sosdk
>> qk=qc+qdk
>> [ak,bk]=sos2tf(sosk,qk);
>> [h,w]=freqz(ak,bk);
>> [h1,w]=freqz(a,b);
>> plot(w/(2*pi),abs(h1)-abs(h))
>> plot(w/(2*pi),abs(h))
>> grid on
```

Рассчитанные параметры синтезированного ЦФ каскадной структуры (три секции 2-го порядка) следующие [см. (14.20) и (14.21)]: $N = 6$; $g = 0{,}0161$;

1-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = -0{,}0759$; $a_2 = 1$; $b_0 = 1$; $b_1 = -1{,}5759$; $b_2 = 0{,}6675$;

2-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = -1{,}3889$; $a_2 = 1$; $b_0 = 1$; $b_1 = -1{,}5833$; $b_2 = 0{,}8672$;

3-я секция: $a_0 = 1$; $a_1 = -1{,}5369$; $a_2 = 1$; $b_0 = 1$; $b_1 = -1{,}5959$; $b_2 = 0{,}9724$.

Рассчитанная АЧХ цифрового фильтра каскадной структуры при квантовании коэффициентов по методу округления с представлением их 13-разрядным двоичным кодом практически не отличается от АЧХ дискретного фильтра, изображённой на рис.17.8. При этом максимальное отклонение АЧХ цифрового фильтра от АЧХ дискретного фильтра в полосе пропускания составляет $5{,}5 \cdot 10^{-3}$, а в полосе задерживания — менее 10^{-4}. Таким образом, квантование коэффициентов ЦФ каскадной структуры, составленного из секций 2-го порядка (биквадратных блоков), влияет на АЧХ значительно слабее, чем квантование коэффициентов ЦФ при прямой форме реализации.

Пример 17.5 демонстрирует общую закономерность, впервые выявленную Д. Кайзером [6]: параметры ЦФ с крутыми спадами АЧХ при прямой форме реализации крайне чувствительны к значениям коэффициентов передаточной функции; погрешности задания коэффициентов ЦФ, обусловленные квантованием, в наименьшей степени сказываются на АЧХ фильтра при каскадной форме реализации.

Следует отметить, что ЦФ каскадной структуры при прочих равных условиях имеет также меньшую мощность собственных шумов на выходе фильтра.

Краткие итоги

1. Влияние конечной разрядности представления коэффициентов ЦФ (квантования коэффициентов) на деформацию его частотных характеристик на качественном уровне рассмотрено в § 10.3. После выполнения первого этапа проектирования цифрового фильтра — решения аппроксимационной задачи (см. рис.12.1) — получают передаточную функцию дискретного фильтра $H(z)$, коэффициенты которой для точного представления в двоичных кодах требуют большого (возможно, даже бесконечного) числа разрядов.

2. Цифровой фильтр реализуют на специализированном вычислителе (сигнальном процессоре), арифметические операции в котором, как правило, выполняются в формате с фиксированной точкой при меньшей по сравнению с универсальной ЭВМ разрядной сетке. Значения коэффициентов фильтра квантуются, так как они должны быть представлены с помощью ограниченного количества двоичных разрядов $S_{\text{К}}$, определяемого разрядной сеткой вычислителя. Число разрядов $S_{\text{К}}$ для представления квантованных коэффициентов ЦФ должно быть выбрано таким образом, чтобы его частотные характеристики как в полосах пропускания, так и в полосах задерживания не выходили за пределы допусков, заданных в ТЗ на проектирование.

3. При реализации ЦФ на специализированном вычислителе (сигнальном процессоре) обычно используется представление чисел в формате с фиксированной точкой. В этом случае для записи кодов целой части чисел, отображающих коэффициенты ЦФ, выделяют $S_{\text{К}_\text{ц}}$ двоичных разрядов, а дробной — $S_{\text{К}_\text{д}}$ разрядов. Разрядность $S_{\text{К}_\text{ц}}$ кодов целой части чисел определяется величиной модуля максимального коэффициента передаточной функции ЦФ. Влияние величин $S_{\text{К}_\text{ц}}$ и $S_{\text{К}_\text{д}}$ в составе $S_{\text{К}}$ на представление коэффициентов ЦФ различное: уменьшение $S_{\text{К}_\text{ц}}$ приведёт к аномальному искажению, а уменьшение $S_{\text{К}_\text{д}}$ — лишь к снижению точности задания коэффициентов. Ясно, что уменьшать разрядность представления коэффициентов $S_{\text{К}}$ цифрового фильтра можно только за счёт уменьшения величины $S_{\text{К}_\text{д}}$.

4. Если ЦФ реализуется на сигнальном процессоре (DSP), то его коэффициенты представляются двоичным кодом с заранее определённым числом разрядов $S_{\text{К}}$. В этом случае необходимо определить, можно ли реализовать ЦФ, удовлетворяющий условиям задачи, и, если можно, то рассчитать коэффициенты этого фильтра с двоичной разрядностью, равной $S_{\text{К}}$. Схема алгоритма расчёта ЦФ при представлении коэффициентов $S_{\text{К}}$-разрядными двоичными числами изображена на рис.17.1.

5. При реализации ЦФ на БИС общего применения или на универсальных микропроцессорах число двоичных разрядов $S_{\text{К}}$ для представления коэффициентов фильтра целесообразно минимизировать. Возможны два типа задач минимизации $S_{\text{К}}$.

В задачах минимизации первого типа (рис.17.2) требуется определить ЦФ минимального порядка, амплитудно-частотная характеристика которого удовлетворяет требованиям ТЗ при наименьшем значении $S_{\text{К}} = S_{\text{К}_{\min}}$ с учётом ограничения сверху $S_{\text{К}_{\min}} \le S_{\text{К}_m}$, где $S_{\text{К}_m}$ — заданное значение.

В задачах минимизации второго типа (рис.17.3) требуется определить ЦФ минимального порядка $N_{\min}$, амплитудно-частотная характеристика которого удовлетворяет требованиям ТЗ при наименьшем значении $S_{\text{К}} = S_{\text{К}_{\min}}$, однако при этом значение $S_{\text{К}_m}$ не ограничивается сверху.

6. Рассмотренные примеры показывают, что квантование коэффициентов ЦФ при выборе числа разрядов $S_{\text{К}}$ порядка 12 — 16 не приводит к существенным изменениям АЧХ.

Глава 18

РАСЧЁТ РАЗРЯДНОСТИ ОПЕРАЦИОННЫХ УСТРОЙСТВ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

18.1. Математический аппарат для расчёта максимальных по модулю оценок сигналов и характеристик шумов квантования на выходах цифровых фильтров

В гл.11 приведены методики расчёта максимальных модульных оценок сигналов, а также характеристик шумов квантования на выходах одномерных стационарных ЦФ, основанные на использовании обобщённых линейных шумовых моделей цифровых фильтров сложной структуры (см. гл.10, § 10.8 и 10.11). При этом рассмотрены вещественные скалярные и векторные • цифровые фильтры как простой (см. рис.10.10, 10.12, 10.20 и 10.21), так и сложной структуры (см. рис.10.13 и 10.22).

Методика определения максимальных модульных оценок сигналов в любых точках структурной схемы вещественного скалярного ЦФ сложной структуры (см. рис.10.13) разработана в § 11.2 [см. формулы (11.46) — 11.53)].

Методика определения максимальных модульных оценок сигналов в любых точках структурной схемы вещественного векторного цифрового фильтра простой структуры (см. рис.10.21) разработана в § 11.9 [см. формулы (11.106) и 11.107)], а векторного ЦФ сложной структуры (см. рис.10.22) — в § 11.10 [см. формулы (11.128) — 11.130)].

Получаемые по этим методикам максимальные модульные оценки сигналов в структуре ЦФ могут быть использованы для решения различных задач, в том числе для расчёта необходимого числа разрядов $S_{\text{ц}}$, представляющих двоичные коды целых частей чисел в операционных устройствах DSP. Такой подход гарантирует нормальную работу вычислителя (отсутствие эффектов переполнения в регистрах DSP).

Методика расчёта детерминированных (максимальных модульных) оценок шумов квантования (внешних и собственных) на выходе вещественного скалярного ЦФ сложной структуры (см. рис.10.13) разработана в § 11.3 [см. формулы (11.54) — 11.61)].

• При выполнении определённых условий вещественный двухкоординатный векторный ЦФ эквивалентен скалярному комплексному ЦФ. Эти условия определяются соотношениями (4.53) или, что то же самое, (4.59). При расчёте разрядности операционных устройств скалярных комплексных ЦФ их удобно заменять эквивалентными вещественными двухкоординатными векторными ЦФ (см. § 4.7).

Методика расчёта детерминированных (максимальных модульных) оценок шумов квантования (внешних и собственных) на выходе вещественного векторного цифрового фильтра простой структуры (см. рис.10.21) разработана в § 11.9 [см. формулы (11.109) — 11.111)], а векторного ЦФ сложной структуры (см. рис.10.22) — в § 11.10 [см. формулы (11.131) — 11.133)].

Получаемые по этим методикам максимальные модульные оценки шумов квантования на выходе ЦФ могут быть использованы для решения различных задач, в том числе для расчёта необходимого числа разрядов $S_д$, представляющих двоичные коды дробных частей чисел в операционных устройствах DSP при детерминированном подходе.

Методика получения вероятностных оценок (математического ожидания и дисперсии) шумов квантования (внешних и собственных) на выходе вещественного скалярного ЦФ сложной структуры (см. рис.10.13) разработана в § 11.4 [см. формулы (11.62) — 11.70)].

Методика получения вероятностных оценок (математического ожидания и дисперсии) шумов квантования (внешних и собственных) на выходе вещественного векторного ЦФ простой структуры (см. рис.10.21) разработана в § 11.9 [см. формулы (11.114) — 11.119)], а векторного ЦФ сложной структуры (см. рис.10.22) — в § 11.10 [см. формулы (11.134) — 11.139)].

Получаемые по этим методикам вероятностные оценки (математического ожидания и дисперсии) шумов квантования на выходе ЦФ могут быть использованы для решения различных задач, в том числе для расчёта необходимого числа разрядов $S_д$, представляющих двоичные коды дробных частей чисел в операционных устройствах DSP при вероятностном подходе.

18.2. Расчёт числа разрядов регистров $S_ц$ для представления кодов целых частей отсчётов сигналов в цифровых фильтрах

В сигнальных процессорах (DSP) входные сигналы $x[n]$, результаты умножения отсчётов сигналов на весовые коэффициенты и сложения, а также выходные сигналы $y[n]$ представляются с различной разрядностью, поэтому шаг квантования Q для входного сигнала, для результатов умножения отсчётов сигналов на весовые коэффициенты и для выходного сигнала будет различным. Разрядности основных узлов некоторых типов DSP приведены в табл.10.1, заимствованной из [7].

В гл.11 решалась задача анализа ЦФ (*прямая задача*). При этом получены выражения, позволяющие по известным характеристикам шумов квантования входного сигнала и шумов квантования результатов арифметических операций при заданных структуре и параметрах ЦФ определить характеристики его выходного шума. На основе результатов решения прямой задачи могут быть построены математические модели ЦФ для цифровых систем более высокого

иерархического уровня, в которые ЦФ входят в качестве элементов. Исследование таких систем входит в круг задач, возникающих при разработке новой техники.

При проектировании цифровых фильтров должна быть решена *обратная задача* (задача синтеза): по допустимому уровню выходного шума ЦФ, определяемому требованиями ТЗ, необходимо найти минимальные разрядности операционных устройств ЦФ, обеспечивающие уровень выходного шума не выше допустимого.

Возможны два подхода к решению этой задачи: детерминированный и вероятностный. На практике чаще используется вероятностный подход, дающий более надёжные результаты в среднем. Результаты, получаемые при детерминированном подходе, гарантируют непревышение шумами квантования на выходе ЦФ заранее установленных пределов. Однако это достигается ценой существенного (иногда неоправданного) увеличения разрядности операционных устройств ЦФ [2, 3, 8].

При реализации ЦФ на специализированном вычислителе (сигнальном процессоре DSP) обычно используется представление чисел в формате с фиксированной точкой•. При этом в S-разрядных регистрах операционных устройств для записи кодов целой части чисел (отсчётов сигналов) выделяют $S_{\text{ц}}$ двоичных разрядов, а дробной — $S_{\text{д}}$ разрядов:

$$S = 1 + S_{\text{ц}} + S_{\text{д}}, \tag{18.1}$$

где один разряд (знаковый) служит для представления знака числа.

Аналогично разрядность входного регистра запишем в виде

$$S_{\text{вх}} = 1 + S_{\text{вх}_{\text{ц}}} + S_{\text{вх}_{\text{д}}}. \tag{18.2}$$

Используя приведённые в § 11.2, 11.9, и 11.10 максимальные модульные оценки уровней сигналов в структурных схемах цифровых фильтров, получим формулы для расчёта необходимого числа $S_{\text{ц}}$ разрядов регистров операционных устройств вычислителя, представляющих двоичные коды целых частей отсчётов сигналов в ЦФ••:

$$S_{\text{ц}} = \operatorname{int}(\log_2 V); \tag{18.3}$$

$$S_{\text{вх}_{\text{ц}}} = \operatorname{int}(\log_2 X), \tag{18.4}$$

где оценка V в выражении (18.3) рассчитывается с помощью формул (11.53), (11.107), (11.130), соответственно для скалярных и векторных ЦФ простой или сложной структуры; оценка X в выражении (18.4) для скалярных ЦФ осуществляется по формуле (11.46), а для векторных — по формуле

$$X = \max_i X_i = \max_i \left(\max_n \left| x_i[n] \right| \right) \quad \left(i = \overline{1,\ R} \right). \tag{18.5}$$

• В некоторых типах DSP возможно также применение формата с плавающей точкой.

•• См. сноску на с.410.

18.3. Расчёт числа разрядов регистров $S_д$ для представления кодов дробных частей отсчётов сигналов в цифровых фильтрах при детерминированном подходе

При детерминированном подходе к расчёту разрядности операционных устройств ЦФ в техническом задании на проектирование обычно задаётся модуль допустимой величины ошибки квантования на выходе фильтра $E_{y_{доп}} = \max_n \left| e_y[n] \right|$, где $e_y[n]$ — значение погрешности отсчёта выходного сигнала ЦФ, обусловленной эффектами квантования сигналов • [8].

Эта величина распределяется между двумя составляющими, обусловленными внешними и собственными шумами ЦФ:

$$E_{y_{доп}} = E_{y_{внеш}} + E_{y_{соб}}. \tag{18.6}$$

Обычно это распределение производится с помощью коэффициента β, определяющего долю $E_{y_{внеш}}$ в $E_{y_{доп}}$:

$$\begin{cases} E_{y_{внеш}} = \beta E_{y_{доп}}; \\ E_{y_{соб}} = (1-\beta) E_{y_{доп}}, \end{cases} \tag{18.7}$$

где $\beta = 0{,}8$ — $0{,}9$.

Оценку сверху величины $E_{y_{доп}}$ в зависимости от типа ЦФ (скалярный или векторный, простой или сложной структуры) дают формулы (11.61), (11.111), (11.133), где максимальные по модулю оценки шумов квантования результата умножения квантованного сигнала на квантованный весовой коэффициент в одном умножителе и шумов квантования АЦП (внешних шумов) описываются следующими соотношениями [2]:

$$E = \max_n \left| e[n] \right| = Q / \chi_1 = 2^{-S_д} / \chi_1; \tag{18.8}$$

$$E_0 = \max_n \left| e_0[n] \right| = Q_0 / \chi_1 = 2^{-S_{вх\,д}} / \chi_1; \tag{18.9}$$

$$\chi_1 = \begin{cases} 2 & \text{при квантовании по методу округления;} \\ 1 & \text{при квантовании по методу усечения.} \end{cases} \tag{18.10}$$

♦ **Скалярные цифровые фильтры (рис.10.10,*б* и 10.13)**

Для скалярных ЦФ как простой, так и сложной структуры величина E_0 определяется формулой (18.9), поэтому на основании (11.58) и (11.61) запишем максимальную модульную оценку составляющей внешних шумов квантования на выходе ЦФ:

• См. выражение (10.16).

$$E_{y_{\text{внеш}}} = \beta E_{y_{\text{доп}}} \le \frac{2^{-S_{\text{вх}_\text{д}}}}{\chi_1} \left\| H\left(e^{j2\pi W} \right) \right\|_\infty = \frac{2^{-S_{\text{вх}_\text{д}}}}{\chi_1} \max_W \left| H\left(e^{j2\pi W} \right) \right| \le$$

$$\le \frac{2^{-S_{\text{вх}_\text{д}}}}{\chi_1} \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]|. \qquad (18.11)$$

Рассматривая соотношение (18.11) как уравнение и решая его относительно $S_{\text{вх}_\text{д}}$, получим расчётную формулу для определения разрядности представления дробной части чисел во входном регистре ЦФ

$$S_{\text{вх}_\text{д}} = \text{int}\left\{ \log_2 \left[\frac{1}{\chi_1 \beta E_{y_{\text{доп}}}} \left\| H\left(e^{j2\pi W} \right) \right\|_\infty \right] \right\}. \qquad (18.12)$$

Используя (18.8), запишем выражения для максимальных по модулю оценок собственных шумов квантования, приведённых к входам соответствующих многовходовых сумматоров:

$$\Gamma = \max_n \left| \gamma[n] \right| \le (M + N + 1) E = (M + N + 1)\, 2^{-S_\text{д}} \big/ \chi_1 \qquad (18.13)$$

для простой и

$$\Gamma_r = \max_n \left| \gamma_r[n] \right| \le (M_r + N_r + 1) E = (M_r + N_r + 1)\, 2^{-S_\text{д}} \big/ \chi_1, \quad r = \overline{1, L} \qquad (18.14)$$

для сложной структуры скалярных ЦФ.

Подставляя (18.13) и (18.14) в (11.60), получим максимальные модульные оценки собственных шумов квантования на выходах фильтров:

$$E_{y_{\text{соб}}} = (1 - \beta) E_{y_{\text{доп}}} \le \frac{2^{-S_\text{д}} (M + N + 1)}{\chi_1} \left\| G\left(e^{j2\pi W} \right) \right\|_\infty =$$

$$= \frac{2^{-S_\text{д}} (M + N + 1)}{\chi_1} \max_W \left| G\left(e^{j2\pi W} \right) \right| \le \frac{2^{-S_\text{д}} (M + N + 1)}{\chi_1} \sum_{n=0}^{\infty} |g[n]| \qquad (18.15)$$

для простой и

$$E_{y_{\text{соб}}} = (1 - \beta) E_{y_{\text{доп}}} \le \sum_{r=1}^{L} (M_r + N_r + 1) \frac{2^{-S_\text{д}}}{\chi_1} \left\| G_r\left(e^{j2\pi W} \right) \right\|_\infty =$$

$$= \sum_{r=1}^{L} (M_r + N_r + 1) \frac{2^{-S_\text{д}}}{\chi_1} \max_W \left| G_r\left(e^{j2\pi W} \right) \right| \le$$

$$\le \sum_{r=1}^{L} (M_r + N_r + 1) \frac{2^{-S_\text{д}}}{\chi_1} \sum_{n=0}^{\infty} |g_r[n]| \qquad (18.16)$$

для сложной структуры скалярных ЦФ.

Рассматривая соотношения (18.15) и (18.16) как уравнения и решая их относительно $S_д$, получим расчётные формулы для определения разрядности представления дробной части чисел в операционных устройствах ЦФ•:

$$S_д = \text{int}\left\{ \log_2 \left[\frac{(M+N+1)}{\chi_1 (1-\beta) E_{y_{доп}}} \left\| G\left(e^{j2\pi W} \right) \right\|_\infty \right] \right\} \qquad (18.17)$$

для простой и

$$S_д = \text{int}\left\{ \log_2 \left[\frac{1}{\chi_1 (1-\beta) E_{y_{доп}}} \sum_{r=1}^{R} (M_r + N_r + 1) \left\| G_r\left(e^{j2\pi W} \right) \right\|_\infty \right] \right\} \qquad (18.18)$$

для сложной структуры скалярных ЦФ.

Формулы (18.3), (18,4), (18.12), (18.17) и (18.18) полностью решают задачу расчёта разрядности операционных устройств скалярных цифровых фильтров простой и сложной структуры при детерминированном подходе.

♦ Векторные цифровые фильтры (рис.10.21 и 10.22)

Приведённая выше методика расчёта $S_{вх\,д}$ и $S_д$ скалярных ЦФ естественным образом обобщается на векторные ЦФ. Примем некоторые допущения, справедливые при реализации ЦФ на сигнальных процессорах DSP.

- Число разрядов $S_{вх\,д}$ при квантовании всех компонент входного векторного сигнала $\mathbf{x}[n]$ одинаково. При этом величина E_0 определяется формулой (18.9), а координаты вектора $\mathbf{E}_0$ — выражениями

$$E_{0_i} = \max_n \left| e_{0_i}[n] \right| \le \frac{Q_0}{\chi_1} = \frac{2^{-S_{вх\,д}}}{\chi_1}, \quad i = \overline{1,\ R}. \qquad (18.19)$$

- Число разрядов $S_д$ при квантовании результатов умножения сигналов на квантованные весовые коэффициенты во всех блоках и во всех каналах ЦФ одинаково. При этом величина E определяется выражением (18.8), а максимальные по модулю оценки векторов $\boldsymbol{\gamma}[n]$ и $\boldsymbol{\gamma}_r[n]$ $\left(r = \overline{1,\ L}\right)$ — формулами

$$\Gamma_i = \max_n \left| \gamma_i[n] \right| \le R(M+N+1)E = R(M+N+1)\ 2^{-S_{вх\,д}} \Big/ \chi_1, \quad i = \overline{1,\ R} \qquad (18.20)$$

для простой и

$$\Gamma_{r_i} = \max_n \left| \gamma_{r_i}[n] \right| \le R(M_r + N_r + 1)E = R(M_r + N_r + 1)\ 2^{-S_{вх\,д}} \Big/ \chi_1\ ,$$
$$i = \overline{1,\ R}, \quad r = \overline{1,\ L} \qquad (18.21)$$

для сложной структуры ЦФ.

• См. сноску на с.410.

Согласно (11.109) и (11.133) с учётом (18.19) запишем максимальную по модулю оценку вектора внешних шумов квантования на выходах векторных ЦФ как простой, так и сложной структуры:

$$\mathbf{E}_{y_{\text{внеш}}} \le \mathbf{H}_\infty \mathbf{E}_0 = \frac{2^{-S_{\text{вх д}}}}{\chi_1} \mathbf{H}_\infty \mathbf{1}, \tag{18.22}$$

где $\mathbf{1}$ — R-координатный вектор, все координаты которого равны единице.

Рассматривая соотношение (18.22) как равенство, после вычисления оценки вектора $\mathbf{E}_{y_{\text{внеш}}}$ следует выбрать его наибольшую координату:

$$\left(E_{y_{\text{внеш}}}\right)_{\max} = \max_i \left(E_{y_{\text{внеш}}}\right)_i = \frac{2^{-S_{\text{вх д}}}}{\chi_1} \max_i \left[\sum_{l=1}^{R} \left\| H_{il}\left(e^{j2\pi W}\right) \right\|_\infty \right], \quad i = \overline{1,\ R}, \tag{18.23}$$

а по ней с учётом (18.7) определить разрядность представления дробной части чисел во входных регистрах ЦФ [ср. с формулой (18.12)]:

$$S_{\text{вх д}} = \text{int}\left\langle \log_2 \left\{ \frac{1}{\chi_1 \beta E_{y_{\text{доп}}}} \max_i \left[\sum_{l=1}^{R} \left\| H_{il}\left(e^{j2\pi W}\right) \right\|_\infty \right] \right\} \right\rangle, \quad i = \overline{1,\ R}. \tag{18.24}$$

Согласно (11.131) и (7.132) с учётом (18.20) и (18.21) запишем максимальные по модулю оценки векторов собственных шумов квантования на выходах векторных ЦФ простой и сложной структуры соответственно:

$$\mathbf{E}_{y_{\text{соб}}} \le \mathbf{G}_\infty \mathbf{\Gamma} = \frac{2^{-S_{\text{д}}} R(M+N+1)}{\chi_1} \mathbf{G}_\infty \mathbf{1}; \tag{18.25}$$

$$\mathbf{E}_{y_{\text{соб}}} \le \sum_{r=1}^{L} \mathbf{G}_{r_\infty} \mathbf{\Gamma}_r = \frac{2^{-S_{\text{д}}}}{\chi_1} \sum_{r=1}^{L} R(M_r + N_r + 1) \mathbf{G}_{r_\infty} \mathbf{1}, \tag{18.26}$$

где $\mathbf{1}$ — R-координатный вектор, все координаты которого равны единице.

Рассматривая соотношения (18.25) и (18.26) как равенства, после вычисления оценок векторов $\mathbf{E}_{y_{\text{соб}}}$ следует выбрать их наибольшие координаты:

$$\left(E_{y_{\text{соб}}}\right)_{\max} = \max_i \left(E_{y_{\text{соб}}}\right)_i = \frac{2^{-S_{\text{д}}} R(M+N+1)}{\chi_1} \max_i \left[\sum_{l=1}^{R} \left\| G_{il}\left(e^{j2\pi W}\right) \right\|_\infty \right], \quad i = \overline{1,\ R} \tag{18.27}$$

для простой и

$$\left(E_{y_{\text{соб}}}\right)_{\max} = \max_i \left(E_{y_{\text{соб}}}\right)_i = \frac{2^{-S_{\text{д}}}}{\chi_1} \max_i \left[\sum_{r=1}^{L} R(M_r + N_r + 1) \sum_{l=1}^{R} \left\| G_{r_{il}}\left(e^{j2\pi W}\right) \right\|_\infty \right], \quad i = \overline{1,\ R} \tag{18.28}$$

для сложной структуры векторных ЦФ.

Используя (18.27) и (18.28), с учётом (18.7) получим расчётные формулы для определения разрядности представления дробной части чисел в операционных устройствах ЦФ•:

$$S_{\text{д}} = \text{int}\left\langle \log_2 \left\{ \frac{R(M+N+1)}{\chi_1(1-\beta)E_{y_{\text{доп}}}} \max_i \left[\sum_{l=1}^{R} \left\| G_{il}\left(e^{j2\pi W}\right) \right\|_{\infty} \right] \right\} \right\rangle, \quad i = \overline{1,\ R} \tag{18.29}$$

для простой и

$$S_{\text{д}} = \text{int}\left\langle \log_2 \left\{ \frac{R}{\chi_1(1-\beta)E_{y_{\text{доп}}}} \max_i \left[\sum_{r=1}^{L} (M_r + N_r + 1) \sum_{l=1}^{R} \left\| G_{r_{il}}\left(e^{j2\pi W}\right) \right\|_{\infty} \right] \right\} \right\rangle, \quad i = \overline{1,\ R} \tag{18.30}$$

для сложной структуры векторных ЦФ.

Формулы (18.3), (18,4), (18.24), (18.29) и (18.30) полностью решают задачу расчёта разрядности операционных устройств векторных цифровых фильтров простой и сложной структуры при детерминированном подходе.

18.4. Расчёт числа разрядов регистров $S_{\text{д}}$ для представления кодов дробных частей отсчётов сигналов в цифровых фильтрах при вероятностном подходе

При вероятностном подходе к расчёту разрядности операционных устройств ЦФ в техническом задании (ТЗ) на проектирование обычно задаются [8]:

- значение динамического диапазона входных сигналов (в децибелах)

$$Д = 20\ \lg\left(\frac{X_{m_{\max}}}{X_{m_{\min}}} \right), \tag{18.31}$$

где X_m — амплитуда синусоидального входного сигнала;

- отношение сигнал/шум (в децибелах) на выходе ЦФ при входном сигнале, соответствующем нижней границе динамического диапазона:

$$Ш = 10\ \lg\left(\frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}} \right)\Bigg|_{P_{\text{с}} = P_{\text{с}\min}}. \tag{18.32}$$

В выражении (18.32) $P_{\text{с}} = X^2_{m_{\min}} \Big/ 2$ — мощность сигнала на выходе ЦФ при подаче на его вход синусоидального сигнала минимальной амплитуды; $P_{\text{ш}} = D_y$ — средняя мощность (дисперсия) шумов квантования на выходе цифрового фильтра.

• См. сноску на с.410.

Пусть коэффициент передачи ЦФ в полосе пропускания приблизительно постоянен и равен $A(W) \approx A_0$ ($W \in [W_{п1}, W_{п2}]$), тогда $Y_{m_{\min}} = A_0 X_{m_{\min}}$. Полагая $X_{m_{\max}} = \max\limits_{n} |x[n]| = X$, из выражения (18.31) получим

$$Y_{m_{\min}} = X A_0 10^{-Д/20}. \tag{18.33}$$

Используя (18.33), из формулы (18.32) после несложных преобразований находим выражение для допустимой мощности шумов квантования на выходе ЦФ

$$P_{ш\,доп} = D_{y\,доп} = \frac{X^2 A_0^2}{2} 10^{-(Д+Ш)/10}. \tag{18.34}$$

Допустимую мощность шумов квантования следует разделить на две составляющие, обусловленные внешними и собственными шумами ЦФ [2, 8]:

$$P_{ш\,доп} = P_{ш\,внеш} + P_{ш\,соб}. \tag{18.35}$$

Обычно это распределение производится с помощью коэффициента β, определяющего долю $P_{ш\,внеш}$ в $P_{ш\,доп}$:

$$\begin{cases} P_{ш\,внеш} = D_{y\,внеш} = \beta P_{ш\,доп}; \\ P_{ш\,соб} = D_{y\,соб} = (1-\beta) P_{ш\,доп}, \end{cases} \tag{18.36}$$

где $\beta = 0{,}8 \text{ — } 0{,}9$.

Величина коэффициента β выбирается исходя из того, что мощность собственных шумов ЦФ должна быть мала по сравнению мощностью внешнего по отношению к фильтру шума квантования входного сигнала [8].

В зависимости от типа ЦФ (скалярный или векторный, простой или сложной структуры) оценки математического ожидания и дисперсии шумов квантования на выходе ЦФ дают формулы (11.69), (11.70), (11.118), (11.119), (11.138) и (11.139), где оценки математического ожидания и дисперсии шумов квантования результата умножения квантованного сигнала на квантованный весовой коэффициент в одном умножителе и шумов квантования АЦП (внешних шумов) описываются следующими соотношениями [1, 2]:

$$m_e = \begin{cases} 0 & \text{при округлении и усечении} \\ & \text{(прямой и обратнй коды);} \\ -Q/2 = -2^{S_д}/2 & \text{при усечении (дополнительный код);} \end{cases} \tag{18.37}$$

$$D_e = Q^2/\chi_2 = 2^{-2S_д}/\chi_2; \tag{18.38}$$

$$m_0 = \begin{cases} 0 & \text{при округлении и усечении} \\ & \text{(прямой и обратнй коды);} \\ -Q_0/2 = -2^{S_{вх\,д}}/2 & \text{при усечении (дополнительный код);} \end{cases} \tag{18.39}$$

$$D_0 = Q_0^2 \big/ \chi_2 = 2^{-2S_{\text{вх д}}} \big/ \chi_2 ; \tag{18.40}$$

$$\chi_2 = \begin{cases} 12 & \text{при округлении и усечении (дополнительный код);} \\ 3 & \text{при усечении (прямой и обратнй коды).} \end{cases} \tag{18.41}$$

♦ **Скалярные цифровые фильтры (рис.10.10,*б* и 10.13)**

Для скалярных ЦФ как простой, так и сложной структуры величина D_0 определяется формулой (18.40), поэтому на основании (11.69) и (11.70) запишем

$$D_{y\text{внеш}} = \beta P_{\text{ш доп}} = \frac{2^{-2S_{\text{вх д}}}}{\chi_2} \left\| H\left(e^{j2\pi W} \right) \right\|_2^2 = \frac{2^{-2S_{\text{вх д}}}}{\chi_2} \sum_{n=0}^{\infty} h^2[n]. \tag{18.42}$$

Решая уравнение (18.42) относительно $S_{\text{вх д}}$, получим расчётную формулу для определения разрядности представления дробной части чисел во входном регистре ЦФ •

$$S_{\text{вх д}} = \text{int}\left\{ \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{1}{\chi_2 \beta P_{\text{ш доп}}} \left\| H\left(e^{j2\pi W} \right) \right\|_2^2 \right] \right\}. \tag{18.43}$$

Используя (18.38), запишем выражения для оценок дисперсий собственных шумов квантования, приведённых к входам соответствующих многовходовых сумматоров:

$$D_\gamma = (M + N + 1) D_e = (M + N + 1) \frac{2^{-2S_{\text{д}}}}{\chi_2} \tag{18.44}$$

для простой и

$$D_{\gamma_r} = (M_r + N_r + 1) D_e = (M_r + N_r + 1) \frac{2^{-2S_{\text{д}}}}{\chi_2}, \quad r = \overline{1, L} \tag{18.45}$$

для сложной структуры скалярных ЦФ.

Подставляя (18.44) и (18.45) в (11.68), получим оценки дисперсий собственных шумов квантования на выходах фильтров:

$$D_{y\text{соб}} = (1 - \beta) P_{\text{ш доп}} = \frac{2^{-2S_{\text{д}}} (M + N + 1)}{\chi_2} \left\| G\left(e^{j2\pi W} \right) \right\|_2^2 =$$

$$= \frac{2^{-2S_{\text{д}}} (M + N + 1)}{\chi_2} \sum_{n=0}^{\infty} g^2[n] \tag{18.46}$$

для простой и

• См. сноску на с.410.

$$D_{y_{\text{соб}}} = (1-\beta)P_{\text{ш доп}} = \frac{2^{-2S_{\text{д}}}}{\chi_2}\sum_{r=0}^{L}(M_r + N_r + 1)\left\| G_r\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 =$$

$$= \frac{2^{-2S_{\text{д}}}}{\chi_2}\sum_{r=1}^{L}(M_r + N_r + 1)\sum_{n=0}^{\infty} g_r^2[n] \qquad (18.47)$$

для сложной структуры скалярных ЦФ.

Решая уравнения (18.46) и (18.47) относительно $S_{\text{д}}$, получим расчётные формулы для определения разрядности представления дробной части чисел в операционных устройствах ЦФ●:

$$S_{\text{д}} = \text{int}\left\{\frac{1}{2}\log_2\left[\frac{(M+N+1)}{\chi_2(1-\beta)P_{\text{ш доп}}}\left\| G\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2\right]\right\} \qquad (18.48)$$

для простой и

$$S_{\text{д}} = \text{int}\left\{\frac{1}{2}\log_2\left[\frac{1}{\chi_2(1-\beta)P_{\text{ш доп}}}\sum_{r=1}^{L}(M_r + N_r + 1)\left\| G_r\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2\right]\right\} \qquad (18.49)$$

для сложной структуры скалярных ЦФ.

Формулы (18.3), (18,4), (18.43), (18.48) и (18.49) полностью решают задачу расчёта разрядности операционных устройств скалярных ЦФ простой и сложной структуры при вероятностном подходе.

♦ Векторные цифровые фильтры (рис.10.21 и 10.22)

Приведённая выше методика расчёта $S_{\text{вх}_{\text{д}}}$ и $S_{\text{д}}$ скалярных ЦФ естественным образом обобщается на векторные ЦФ. Примем некоторые допущения, справедливые при реализации ЦФ на сигнальных процессорах DSP.

- Число разрядов $S_{\text{вх}_{\text{д}}}$ при квантовании всех компонент входного векторного сигнала $\mathbf{x}[n]$ одинаково. При этом величина D_0 определяется формулой (18.40), а координаты вектора $\mathbf{D}_0$ — выражениями

$$D_{0_i} = Q_0^2 \big/ \chi_2 = 2^{-2S_{\text{вх}_{\text{д}}}} \big/ \chi_2, \quad i = \overline{1,\ R}. \qquad (18.50)$$

- Число разрядов $S_{\text{д}}$ при квантовании результатов умножения сигналов на квантованные весовые коэффициенты во всех блоках и во всех каналах ЦФ одинаково. При этом величина дисперсии D_e шума квантования умножения сигнала на весовой коэффициент в одном умножителе определяется выражением (18.38), а дисперсии векторов $\boldsymbol{\gamma}[n]$ и $\boldsymbol{\gamma}_r[n]\left(r = \overline{1,\ L}\right)$ оцениваются формулами

● См. сноску на с.410.

$$D_i = R(M+N+1)D_e = R(M+N+1)\,2^{-2S_д}\big/\chi_2, \quad i=\overline{1,\,R} \tag{18.51}$$

для простой и

$$D_{r_i} = R(M_r+N_r+1)D_e = R(M_r+N_r+1)\,2^{-2S_д}\big/\chi_2, \quad i=\overline{1,\,R}, \quad r=\overline{1,\,L} \tag{18.52}$$

для сложной структуры векторных ЦФ.

Согласно (11.119) и (11.139) с учётом (18.50) запишем выражение для оценки вектора дисперсий внешних шумов квантования на выходах ЦФ как простой, так и сложной структуры:

$$\mathbf{D}_{y_{внеш}} = \mathbf{H}_D\mathbf{D}_{e_0} = \frac{2^{-2S_{вх\,д}}}{\chi_2}\mathbf{H}_D\mathbf{1}, \tag{18.53}$$

где $\mathbf{1}$ — R-координатный вектор, все координаты которого равны единице.

После вычисления оценки вектора $\mathbf{D}_{y_{внеш}}$ следует выбрать его наибольшую координату:

$$\left(D_{y_{внеш}}\right)_{max} = \max_i\left(D_{y_{внеш}}\right)_i = \frac{2^{-2S_{вх\,д}}}{\chi_2}\max_i\left[\sum_{l=1}^{R}\left\|H_{il}\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2\right], \quad i=\overline{1,\,R}, \tag{18.54}$$

а по ней с учётом (18.36) определить разрядность представления дробной части чисел во входных регистрах ЦФ [ср. с формулой (18.43)]:

$$S_{вх\,д} = \mathrm{int}\left\langle\frac{1}{2}\log_2\left\{\frac{1}{\chi_1\beta P_{ш\,доп}}\max_i\left[\sum_{l=1}^{R}\left\|H_{il}\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2\right]\right\}\right\rangle, \quad i=\overline{1,\,R}. \tag{18.55}$$

Согласно (11.119) и (11.139) с учётом (18.51) и (18.52) определим оценки векторов дисперсий собственных шумов квантования на выходах векторных ЦФ простой и сложной структуры соответственно:

$$\mathbf{D}_{y_{соб}} = \mathbf{G}_D\mathbf{D}_\gamma = \frac{2^{-2S_д}R(M+N+1)}{\chi_2}\mathbf{G}_D\mathbf{1}; \tag{18.56}$$

$$\mathbf{D}_{y_{соб}} = \sum_{r=1}^{R}\mathbf{G}_{D_r}\mathbf{D}_{\gamma_r} = \frac{2^{-2S_д}}{\chi_2}\sum_{r=1}^{L}R(M_r+N_r+1)\mathbf{G}_{D_r}\mathbf{1}. \tag{18.57}$$

После вычисления оценок векторов $\mathbf{D}_{y_{соб}}$ следует выбрать их наибольшие координаты:

$$\left(D_{y_{соб}}\right)_{max} = \max_i\left(D_{y_{соб}}\right)_i = \frac{2^{-2S_д}R(M+N+1)}{\chi_2}\max_i\left[\sum_{l=1}^{R}\left\|G_{il}\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2\right], \quad i=\overline{1,\,R} \tag{18.58}$$

для простой и

$$\left(D_{y_{\text{соб}}}\right)_{\max} = \max_i \left(D_{y_{\text{соб}}}\right)_i =$$

$$= \frac{2^{-2S_{\text{д}}}}{\chi_2} \max_i \left[\sum_{r=1}^{L} R(M_r + N_r + 1) \sum_{l=1}^{R} \left\| G_{r_{il}}\left(e^{j2\pi W}\right) \right\|_2^2 \right], \quad i = \overline{1,\ R} \qquad (18.59)$$

для сложной структуры векторных ЦФ.

Используя (18.58) и (18.59), с учётом (18.36) получим расчётные формулы для определения разрядности представления дробной части чисел в операционных устройствах ЦФ•:

$$S_{\text{д}} = \text{int}\left\langle \frac{1}{2}\log_2 \left\{ \frac{R(M+N+1)}{\chi_2(1-\beta)P_{\text{ш доп}}} \max_i \left[\sum_{l=1}^{R} \left\| G_{il}\left(e^{j2\pi W}\right) \right\|_2^2 \right] \right\} \right\rangle, \quad i = \overline{1,\ R} \qquad (18.60)$$

для простой и

$$S_{\text{д}} = \text{int}\left\langle \frac{1}{2}\log_2 \left\{ \frac{R}{\chi_2(1-\beta)P_{\text{ш доп}}} \max_i \left[\sum_{r=1}^{L} (M_r + N_r + 1) \sum_{l=1}^{R} \left\| G_{r_{il}}\left(e^{j2\pi W}\right) \right\|_2^2 \right] \right\} \right\rangle, \quad i = \overline{1,\ R} \qquad (18.61)$$

для сложной структуры векторных ЦФ.

Формулы (18.3), (18,4), (18.55), (18.60) и (18.61) полностью решают задачу расчёта разрядности операционных устройств векторных ЦФ простой и сложной структуры при вероятностном подходе.

При выполнении арифметических операций в дополнительном коде шумы квантования имеют ненулевое математическое ожидание [см. (18.37) и (18.39), а также рис.10.5]. Математические ожидания шумов квантования на выходах ЦФ (скалярных и векторных, простой и сложной структуры) могут быть вычислены заранее по формулам (11.69), (11.118) и (11.138) соответственно, следовательно, в выходных сигналах ЦФ их можно компенсировать. При этом структурные схемы ЦФ будут иметь вид, изображённый на рис.18.1.

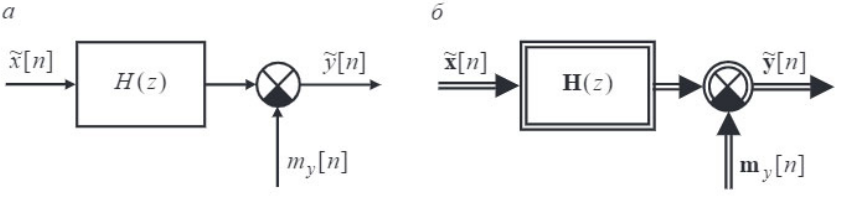


Рис.18.1. Компенсация математических ожиданий шумов квантования на выходах ЦФ: *а* — скалярного; *б* — векторного

• См. сноску на с.410.

Вероятностный (статистический) подход к расчёту разрядности операционных устройств ЦФ в большинстве случаев даёт приемлемые для практики результаты. В тех редких случаях, когда по условиям работы устройства даже однократный выход ошибки квантования за заранее установленные пределы является недопустимым, для расчёта разрядности операционных устройств ЦФ применяют детерминированный подход.

При проектировании скалярных комплексных ЦФ следует использовать методику расчёта разрядности операционных устройств двухкоординатных векторных ЦФ•, т.е. при $R = 2$.

18.5. Оценка необходимого быстродействия DSP для реализации цифровых фильтров

Для выбора сигнального процессора (DSP) кроме разрядностей представления коэффициентов и сигналов в ЦФ необходима оценка требуемого быстродействия вычислителя. Такая оценка должна производиться исходя из необходимого количества арифметических операций для вычисления отсчёта выходного сигнала ($y[n]$ для скалярных и $\mathbf{y}[n]$ для векторных ЦФ), которое определяется по алгоритмам фильтрации. Кроме того, следует учесть особенности архитектуры DSP и обеспечить необходимый резерв по быстродействию.

Мы ограничимся лишь рассмотрением первого аспекта — оценкой количества арифметических операций, оставляя за рамками монографии остальные аспекты данного вопроса, требующие специальных исследований. При этом используем следующие обозначения:

$T_т = 1/f_т$ — период тактовой частоты $f_т$ DSP;

$k_{умн}$, $k_{слож}$ и $k_{пзп}$ — число тактов DSP, необходимых соответственно для перемножения и сложения двух вещественных чисел, а также для перезаписи (пересылки) числа из одного регистра в другой.

Проведём оценку времени вычисления выходного отсчёта в скалярном вещественном ЦФ простой структуры, алгоритм работы которого описывается разностным уравнением

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} a_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} b_k y[n-k]. \qquad (18.62)$$

Согласно (18.62) для получения одного отсчёта выходного сигнала $y[n]$ требуется осуществить $M+N+1$ умножений отсчётов сигналов на весовые коэффициенты, $M+N$ сложений•• пары вещественных чисел и $M+N$ операций сдвига (перезаписи числа из одного регистра в другой). Их выполнение может быть осуществлено за $(M+N+1)k_{умн} + (M+N)(k_{слож} + k_{пзп})$ тактов DSP.

• См. сноску на с.689.

•• Операции сложения и вычитания рассматриваются как единая операция сложения / вычитания.

Таким образом, время вычисления одного отсчёта выходного сигнала $y[n]$ оценивается формулой

$$T_{\text{отсч}} = \left[(M+N+1)k_{\text{умн}} + (M+N)(k_{\text{слож}} + k_{\text{пзп}})\right]T_{\text{т}}. \qquad (18.63)$$

Это время должно быть меньше периода частоты дискретизации ЦФ: $T_{\text{отсч}} < T = 1/f_{\text{д}}$. Отсюда получаем оценку тактовой частоты DSP:

$$f_{\text{т}} = \frac{1}{T_{\text{т}}} > f_{\text{д}}\left[(M+N+1)k_{\text{умн}} + (M+N)(k_{\text{слож}} + k_{\text{пзп}})\right]. \qquad (18.64)$$

Алгоритм работы R-координатного векторного вещественного стационарного рекурсивного линейного ЦФ простой структуры описывается векторно-матричным разностным уравнением [1, 2]

$$\mathbf{y}[n] = \sum_{k=0}^{M} \mathbf{a}_k \mathbf{x}[n-k] - \sum_{k=1}^{N} \mathbf{b}_k \mathbf{y}[n-k] \qquad (18.65)$$

или в координатной форме

$$y_i[n] = \sum_{k=0}^{M} \sum_{l=1}^{R} a_{k_{il}} x_l[n-k] - \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{R} b_{k_{il}} y_l[n-k], \quad i = \overline{1,\, R}. \qquad (18.66)$$

Проведём оценку времени, необходимого для вычисления одного отсчёта выходного вектора $\mathbf{y}[n]$. Согласно (18.66) для получения отсчёта одной координаты $y_i[n]\ \left(i = \overline{1,\, R}\right)$ выходного вектора требуется выполнить $(M+N+1)R$ умножений отсчётов сигналов на весовые коэффициенты, $(M+N)R$ сложений пары вещественных чисел и $(M+N)R$ операций сдвига (перезаписи числа из одного регистра в другой). Для вычисления всех координат $y_i[n]\ \left(i = \overline{1,\, R}\right)$ выходного вектора $\mathbf{y}[n]$ необходимо $(M+N+1)R^2$ умножений, $(M+N)R^2$ сложений и $(M+N)R$ операций сдвига • (перезаписи). Их выполнение может быть осуществлено за $(M+N+1)R^2 k_{\text{умн}} + (M+N)(R^2 k_{\text{слож}} + R k_{\text{пзп}})$ тактов сигнального процессора (DSP).

Таким образом, время вычисления одного отсчёта R-координатного выходного вектора $\mathbf{y}[n]$ оценивается формулой

$$T_{\text{отсч}} = \left[(M+N+1)R^2 k_{\text{умн}} + (M+N)(R^2 k_{\text{слож}} + R k_{\text{пзп}})\right]T_{\text{т}}. \qquad (18.67)$$

Это время должно быть меньше периода частоты дискретизации ЦФ: $T_{\text{отсч}} < T = 1/f_{\text{д}}$. Отсюда получаем оценку тактовой частоты DSP:

• Для всех координат вектора $\mathbf{y}[n]$ используются одни и те же операции сдвига (перезаписи), поэтому их число $(M+N)R$ такое же, как и при вычислении только одной координаты $y_i[n]\ \left(i = \overline{1,\, R}\right)$.

$$f_{\text{т}} = \frac{1}{T_{\text{т}}} > f_{\text{д}}\left[(M+N+1)R^2 k_{\text{умн}} + (M+N)(R^2 k_{\text{слож}} + R k_{\text{пзп}})\right]. \qquad (18.68)$$

Значения $k_{\text{умн}}$, $k_{\text{слож}}$ и $k_{\text{пзп}}$ зависят от архитектуры сигнального процессора (DSP) и способа организации вычислений.

Используя (18.64) и (18.68), можно получить оценки тактовой частоты DSP, требуемой для реализации цифровых фильтров сложной структуры, состоящих из L блоков:

$$f_{\text{т}} = \frac{1}{T_{\text{т}}} > f_{\text{д}} \sum_{r=1}^{L} \left[(M_r + N_r + 1)k_{\text{умн}} + (M_r + N_r)(k_{\text{слож}} + k_{\text{пзп}})\right] \qquad (18.69)$$

в случае скалярных и

$$f_{\text{т}} = \frac{1}{T_{\text{т}}} > f_{\text{д}} \sum_{r=1}^{L} \left[(M_r + N_r + 1)R^2 k_{\text{умн}} + (M_r + N_r)(R^2 k_{\text{слож}} + R k_{\text{пзп}})\right] \qquad (18.70)$$

в случае R-координатных векторных ЦФ сложной структуры.

Из (18.68) и (18.70) как частные случаи при $R = 2$ получаются оценки тактовой частоты DSP, требуемой для реализации комплексных ЦФ •:

$$f_{\text{т}} = \frac{1}{T_{\text{т}}} > f_{\text{д}}\left[4(M+N+1)k_{\text{умн}} + (M+N)(4k_{\text{слож}} + 2k_{\text{пзп}})\right] \qquad (18.71)$$

для простой и

$$f_{\text{т}} = \frac{1}{T_{\text{т}}} > f_{\text{д}} \sum_{r=1}^{L} \left[4(M_r + N_r + 1)k_{\text{умн}} + (M_r + N_r)(4k_{\text{слож}} + 2k_{\text{пзп}})\right] \qquad (18.72)$$

для сложной структуры скалярных комплексных ЦФ.

Отметим, что формулы (18.64) и (18.68) — (18.72) следует рассматривать как грубые оценки требуемого быстродействия DSP, поскольку они не учитывают особенности архитектуры DSP, в частности возможности выполнения нескольких операций за один такт (распараллеливание вычислений). Практическая полезность этих формул состоит в том, что они оценивают величину тактовой частоты $f_{\text{т}} = 1/T_{\text{т}}$ «сверху», так как возможное распараллеливание вычислений в DSP снижает требования к тактовой частоте $f_{\text{т}}$.

18.6. Примеры расчёта разрядностей операционных устройств цифровых фильтров

Для иллюстрации разработанных методов рассмотрим несколько примеров расчёта разрядностей операционных устройств ЦФ и оценки требуемого быстродействия DSP.

• См. сноску на с.689.

Пример 18.1. Используя вероятностный подход, рассчитать разрядность операционных устройств скалярного вещественного нерекурсивного цифрового ФНЧ простой структуры 100-го порядка, спроектированного в примере 12.6, при следующих исходных данных:

— максимальный по модулю уровень входного сигнала $X = \max_n |x[n]| = 1$;

— динамический диапазон входного сигнала $Д = 40$ дБ;

— отношение сигнал/шум на выходе ЦФ при входном сигнале, соответствующем нижней границе динамического диапазона, $Ш = 40$ дБ;

— для представления чисел в DSP используется дополнительный код ($\chi_2 = 12$).

Квантование коэффициентов цифрового ФНЧ по методу усечения с представлением их 15-разрядным двоичным кодом проведено в примере 17.1. В дальнейших расчётах используются квантованные значения коэффициентов. Шумовая модель ЦФ соответствует рис.10.10,*б* при $B(z^{-1}) = 0$.

С учётом обозначений (11.46) по формуле (11.48) найдём максимальную модульную оценку выходного сигнала •: $Y = \max_n |y[n]| \le 1{,}863$. Далее, используя соотношения (11.52) и (11.53), определяем максимальную модульную оценку сигнала в ЦФ: $V = 1{,}863$. Затем согласно (18.3) и (18.4) находим число разрядов для представления кодов целой части чисел: $S_{ц} = 1$, $S_{вх_ц} = 0$.

По заданным значениям X, $Д$ и $Ш$ при и $A_0 = 1$ (см. примеры 12.6 и 17.1) по формуле (18.34) оценим величину максимально допустимой мощности шумов квантования на выходе ЦФ: $P_{ш_{доп}} = 4{,}999 \cdot 10^{-10}$.

Рассчитаем квадрат нормы комплексных частотных характеристик ЦФ в пространстве L_2:

$$\left\| H\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = \int_{-0,5}^{0,5} \left| H\left(e^{j2\pi W}\right)\right|^2 dW = 0{,}434; \quad \left\| G\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = 1.$$

Выберем $\beta = 0{,}85$ и по формулам (18.43) и (18.48) определим число разрядов для представления кодов дробной части чисел: $S_{вх_д} = 12$, $S_{д} = 17$. Тогда в соответствии с (18.1) и (18.2) получаем: $S = 19$, $S_{вх} = 13$.

Для оценки требуемого быстродействия DSP воспользуемся формулой (18.64):

$$f_т = 1/T_т > f_д[(M+1)k_{умн} + M(k_{слож} + k_{пзп})] =$$

$$= 10 \cdot 10^3 \ [101k_{умн} + 100(k_{слож} + k_{пзп})] \text{ Гц}.$$

Это выражение следует «примерять» к различным типам DSP, разрядность которых $S \ge 19$. При этом с учётом архитектуры процессора определяется число тактов для выполнения операций умножения $k_{умн}$, сложения $k_{слож}$ и перезаписи $k_{пзп}$, что позволяет вычислить необходимую тактовую частоту DSP.

• В данном примере $\sum_{k=0}^{M} |a_k| = \sum_{n=0}^{M} |h[n]| = 1{,}863 > \max_W \left| H\left(e^{j2\pi W}\right)\right| = \left\| H\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_\infty = 1$. Используя большее значение, мы получим некоторый рабочий запас на случай превышения входным сигналом максимально допустимой величины, что может произойти в процессе эксплуатации ЦФ.

Пример 18.2. Используя вероятностный подход, рассчитать разрядность операционных устройств скалярного вещественного полосового рекурсивного ЦФ сложной структуры 12-го порядка, спроектированного в примере 13.22, при следующих исходных данных:

— максимальный по модулю уровень входного сигнала $X = \max\limits_{n} |x[n]| = 1$;

— динамический диапазон входного сигнала $Д = 40$ дБ;

— отношение сигнал/шум на выходе ЦФ при входном сигнале, соответствующем нижней границе динамического диапазона, $Ш = 40$ дБ;

— для представления чисел в DSP используется дополнительный код ($\chi_2 = 12$).

Квантование коэффициентов ЦФ по методу округления с представлением их 12-разрядным двоичным кодом проведено в примере 17.2. В дальнейших расчётах используются квантованные значения коэффициентов. Шумовая модель ЦФ (схема Л. Джексона) соответствует рис.10.13 при каскадной форме реализации [безынерционный каскад H_0 с коэффициентом передачи $a_0 = 9{,}766 \cdot 10^{-3}$ и 6 каскадов 2-го порядка с передаточными функциями $H_1(z)$ — $H_6(z)$]. Расчётная схема шумовой модели ЦФ изображена на рис.18.2.

По формуле $\left\| F_k\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_{\infty} = \max\limits_{W} \left| F_k\left(e^{j2\pi W}\right)\right|$ рассчитаем нормы в пространстве L_{∞} комплексных частотных характеристик $F_k\left(e^{j2\pi W}\right)$ $\left(k = \overline{0,\ 6}\right)$ и $H\left(e^{j2\pi W}\right)$:

$$\left\| F_0\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_{\infty} = 9{,}766 \cdot 10^{-3}; \qquad \left\| F_1\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_{\infty} = 0{,}026;$$

$$\left\| F_2\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_{\infty} = 0{,}032; \qquad \left\| F_3\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_{\infty} = 0{,}055;$$

$$\left\| F_4\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_{\infty} = 0{,}079; \qquad \left\| F_5\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_{\infty} = 0{,}318;$$

$$\left\| F_6\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_{\infty} = 0{,}986; \qquad \left\| H\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_{\infty} = 0{,}986.$$

С учётом (11.46) и (11.47) по формулам (11.48) вычислим максимальные по модулю значения сигналов на выходах блоков: $Y = 0{,}986$; $V_0 = 9{,}766 \cdot 10^{-3}$; $V_1 = 0{,}026$; $V_2 = 0{,}032$; $V_3 = 0{,}055$; $V_4 = 0{,}079$; $V_5 = 0{,}318$; $V_6 = 0{,}986$.

Далее по формулам (11.51) и (11.52) получим максимальные модульные оценки сигналов на выходах умножителей сигналов на весовые коэффициенты, затем согласно (11.53) найдём максимальный по модулю сигнал в структуре ЦФ: $V = 0{,}986$.

Согласно (18.3) и (18.4) определим число разрядов для представления кодов целой части чисел: $S_{\text{ц}} = 0$, $S_{\text{вх}_{\text{ц}}} = 0$.

По формуле $\left\| G_k\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = \int\limits_{-0,5}^{0,5} \left| G_k\left(e^{j2\pi W}\right)\right|^2 dW$ рассчитаем квадраты норм в пространстве L_2 комплексных частотных характеристик $G_k\left(e^{j2\pi W}\right)$ $\left(k = \overline{0,\ 6}\right)$ и $H\left(e^{j2\pi W}\right)$:

$$\left\| G_0\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = 689{,}452; \qquad \left\| G_1\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = 1{,}474 \cdot 10^4;$$

$$\left\| G_2\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = 1{,}051 \cdot 10^4; \qquad \left\| G_3\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = 1{,}019 \cdot 10^3;$$

$$\left\| G_4\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = 507{,}281; \qquad \left\| G_5\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = 16{,}395;$$

$$\left\| G_6\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = 2{,}754; \qquad \left\| H\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = 0{,}066.$$

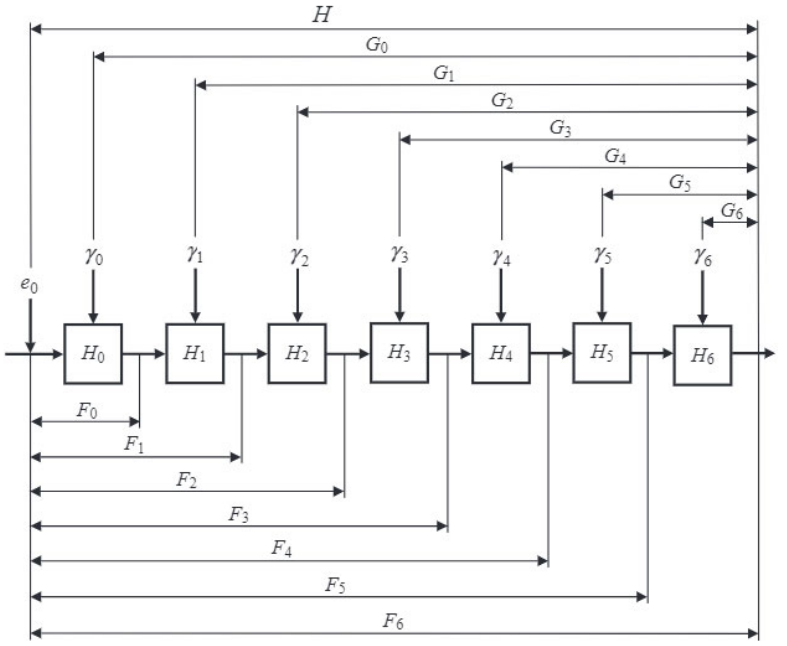


Рис.18.2. Расчётная схема шумовой модели скалярного вещественного рекурсивного ЦФ сложной структуры 12-го порядка (блоки $H_1(z)$ — $H_6(z)$ 2-го порядка, блок H_0 нулевого порядка)

Выберем $\beta = 0{,}85$ и по формулам (18.43) и (18.49) определим число разрядов для представления кодов дробной части чисел: $S_{\text{вх}_\text{д}} = 11$, $S_\text{д} = 22$. Тогда в соответствии с (18.1) и (18.2) получаем: $S = 23$, $S_\text{вх} = 12$.

Для оценки требуемого быстродействия DSP воспользуемся формулой (18.69):

$$f_\text{т} = \frac{1}{T_\text{т}} > f_\text{д}\left\{k_\text{умн} + 6\left[5k_\text{умн} + 4(k_\text{слож} + k_\text{пзп})\right]\right\} =$$

$$= 70 \cdot 10^3\left[31k_\text{умн} + 24(k_\text{слож} + k_\text{пзп})\right] \text{Гц}.$$

Это выражение следует «примерять» к различным типам DSP, разрядность которых $S \geq 23$. После определения числа тактов, требуемых для операций умножения $k_\text{умн}$, сложения $k_\text{слож}$ и перезаписи $k_\text{пзп}$, по приведённой формуле получим требуемую тактовую частоту DSP.

Пример 18.3. Используя вероятностный подход, рассчитать разрядность операционных устройств скалярного комплексного нерекурсивного ЦФ простой структуры 100-го порядка, спроектированного в примере 15.1, при следующих исходных данных:

— максимальный по модулю уровень входного сигнала $X = \max\limits_{n} |x[n]| = 1$;

— динамический диапазон входного сигнала $Д = 40$ дБ;

— отношение сигнал/шум на выходе ЦФ при входном сигнале, соответствующем нижней границе динамического диапазона, $Ш = 40$ дБ;

— для представления чисел в DSP используется дополнительный код ($\chi_2 = 12$).

Квантование коэффициентов комплексного ЦФ по методу усечения с представлением их 12-разрядным двоичным кодом проведено в примере 17.3. В дальнейших расчётах используются квантованные значения коэффициентов.

Скалярный комплексный нерекурсивный ЦФ простой структуры представим эквивалентным двухкоординатным векторным вещественным нерекурсивным ЦФ, матрица передаточных функций которого имеет вид •

$$\mathbf{H}(z) = \begin{pmatrix} A_{\mathrm{c}}(z^{-1}) & -A_{\mathrm{s}}(z^{-1}) \\ A_{\mathrm{s}}(z^{-1}) & A_{\mathrm{c}}(z^{-1}) \end{pmatrix},$$

где

$$A_{\mathrm{c}}(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{M} a_{\mathrm{c}k}\, z^{-k}; \qquad A_{\mathrm{s}}(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{M} a_{\mathrm{s}k}\, z^{-k}.$$

Матрицу комплексных частотных характеристик получим из матрицы передаточных функций зменой аргумента z на $e^{j2\pi W}$:

$$\mathbf{H}\left(e^{j2\pi W}\right) = \begin{pmatrix} A_{\mathrm{c}}\left(e^{-j2\pi W}\right) & -A_{\mathrm{s}}\left(e^{-j2\pi W}\right) \\ A_{\mathrm{s}}\left(e^{-j2\pi W}\right) & A_{\mathrm{c}}\left(e^{-j2\pi W}\right) \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу норм комплексных частотных характеристик векторного ЦФ в пространстве L_∞ [см. (11.14)]:

$$\mathbf{H}_\infty = \begin{pmatrix} \left\| A_{\mathrm{c}}\left(e^{-j2\pi W}\right)\right\|_\infty & \left\| A_{\mathrm{s}}\left(e^{-j2\pi W}\right)\right\|_\infty \\ \left\| A_{\mathrm{s}}\left(e^{-j2\pi W}\right)\right\|_\infty & \left\| A_{\mathrm{c}}\left(e^{-j2\pi W}\right)\right\|_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}501 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}501 \end{pmatrix}.$$

В данном примере (см. 11.17)

$$\sum_{k=0}^{M} |a_{\mathrm{c}k}| = \sum_{n=0}^{M} |h_{\mathrm{c}}[n]| = 1{,}103 > \max_{W} \left| A_{\mathrm{c}}\left(e^{-j2\pi W}\right)\right| = \left\| A_{\mathrm{c}}\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_\infty = 0{,}501;$$

$$\sum_{k=0}^{M} |a_{\mathrm{s}k}| = \sum_{n=0}^{M} |h_{\mathrm{s}}[n]| = 1{,}043 > \max_{W} \left| A_{\mathrm{s}}\left(e^{-j2\pi W}\right)\right| = \left\| A_{\mathrm{s}}\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_\infty = 0{,}5.$$

Используя большие значения, мы получим некоторый рабочий запас на случай превышения входным сигналом максимально допустимой величины, что может произойти в процессе эксплуатации ЦФ. В связи с этим сформируем матрицу $\mathbf{H}^{\bullet}_{\infty}$, составленную не из норм комплексных частотных характеристик векторного ЦФ в

• См. сноску на с.689.

пространстве L_∞ $\left(\left\| A_{\text{с}}\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_\infty$ и $\left\| A_{\text{s}}\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_\infty\right)$, а из сумм модулей отсчётов косинусных и синусных составляющих импульсных характеристик комплексного ЦФ $\left(\sum\limits_{n=0}^{M}|h_{\text{с}}[n]|\right.$ и $\left.\sum\limits_{n=0}^{M}|h_{\text{s}}[n]|\right)$:

$$\mathbf{H}_\infty^{\bullet}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{n=0}^{M}|h_{\text{с}}[n]| & \sum\limits_{n=0}^{M}|h_{\text{s}}[n]|\\ \sum\limits_{n=0}^{M}|h_{\text{s}}[n]| & \sum\limits_{n=0}^{M}|h_{\text{с}}[n]|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}103 & 1{,}046\\ 1{,}046 & 1{,}103\end{pmatrix}.$$

Полагая $X_{\text{с}}=\max\limits_n|x_{\text{с}}[n]|=X=1$ и $X_{\text{s}}=\max\limits_n|x_{\text{s}}[n]|=X=1$, сформируем вектор $\mathbf{X}_{\max}$:

$$\mathbf{X}_{\max}=\begin{pmatrix}X_{\text{с}}\\ X_{\text{s}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

По формуле (11.79) найдём вектор максимальных по модулю оценок выходного вектора:

$$\mathbf{Y}_{\max}\le\begin{pmatrix}2{,}146\\ 2{,}146\end{pmatrix}.$$

Используя выражения (11.106) и (11.107), находим $V=2$, затем по формулам (18.3) и (18.4) получаем число разрядов для представления кодов целой части чисел: $S_{\text{ц}}=2$, $S_{\text{вх}_{\text{ц}}}=0$.

Вычислим матрицы квадратов норм комплексных частотных характеристик векторного ЦФ в пространстве L_2 [см. (11.19)]:

$$\mathbf{H}_D=\begin{pmatrix}\left\| A_{\text{с}}\left(e^{-j2\pi W}\right)\right\|_2^2 & \left\| A_{\text{s}}\left(e^{-j2\pi W}\right)\right\|_2^2\\ \left\| A_{\text{s}}\left(e^{-j2\pi W}\right)\right\|_2^2 & \left\| A_{\text{с}}\left(e^{-j2\pi W}\right)\right\|_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}197 & 0{,}169\\ 0{,}169 & 0{,}197\end{pmatrix};\qquad \mathbf{G}_D=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Выберем $\beta=0{,}85$ и по формулам (18.55) и (18.60) при $R=2$ определим число разрядов для представления кодов дробной части чисел: $S_{\text{вх}_{\text{д}}}=15$, $S_{\text{д}}=18$. Тогда в соответствии с (18.1) и (18.2) получаем $S=21$, $S_{\text{вх}}=16$.

Для оценки требуемого быстродействия DSP воспользуемся формулой (18.68):

$$f_{\text{т}}=1/T_{\text{т}}>f_{\text{д}}\left[(M+1)R^2k_{\text{умн}}+M(R^2k_{\text{слож}}+Rk_{\text{пзп}})\right]=$$

$$=15\cdot10^6\left[404k_{\text{умн}}+100(4k_{\text{слож}}+2k_{\text{пзп}})\right]\text{ Гц}.$$

Это выражение следует «примерять» к различным типам DSP, разрядность которых $S\ge21$. При этом с учётом архитектуры процессора определяется число тактов для выполнения операций умножения $k_{\text{умн}}$, сложения $k_{\text{слож}}$ и перезаписи $k_{\text{пзп}}$, что позволяет вычислить необходимую тактовую частоту DSP.

Пример 18.4. Используя вероятностный подход, рассчитать разрядность операционных устройств скалярного комплексного рекурсивного ЦФ сложной структуры 14-го порядка, спроектированного в примере 16.10, при следующих исходных данных:

— максимальный по модулю уровень входного сигнала $X = \max\limits_{n} |x[n]| = 1$;

— динамический диапазон входного сигнала $Д = 40$ дБ;

— отношение сигнал/шум на выходе ЦФ при входном сигнале, соответствующем нижней границе динамического диапазона, $Ш = 40$ дБ;

— для представления чисел в DSP используется дополнительный код ($\chi_2 = 12$).

Квантование коэффициентов ЦФ по методу округления с представлением их 11-разрядным двоичным кодом проведено в примере 17.4. В дальнейших расчётах используются квантованные значения коэффициентов.

Скалярный комплексный рекурсивный ЦФ каскадной структуры представим эквивалентным двухкоординатным векторным вещественным рекурсивным ЦФ • каскадной структуры, состоящим из блока нулевого порядка с матрицей передаточных функций $\mathbf{H}_0(z) = K\mathbf{I}$ и 14 блоков первого порядка, матрицы передаточных функций которых $\mathbf{H}_r^{(1)}(z) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{B}_r(z^{-1})\right)^{-1}\mathbf{A}_r(z^{-1})$ $\left(r = \overline{1,\ 14}\right)$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица размера 2×2.

Передаточная функция скалярного комплексного рекурсивного блока 1-го порядка (см. примеры 16.10 и 17.4) и матрицы передаточных функций эквивалентного двухкоординатного векторного вещественного рекурсивного блока 1-го порядка описываются следующими выражениями ••:

$$H_r^{(1)}(z) = \frac{1 - z_{0r}z^{-1}}{1 - z_{pr}z^{-1}} = \frac{1 - (z_{0c_r} + j\,z_{0s_r})\,z^{-1}}{1 - (z_{pc_r} + jz_{ps_r})\,z^{-1}} = \frac{1 + (a_{c1_r} + j\,a_{s1_r})\,z^{-1}}{1 + (b_{c1_r} + j\,b_{s1_r})\,z^{-1}}, \quad r = \overline{1,\ 14};$$

$$\mathbf{H}_r^{(1)}(z) = \begin{pmatrix} 1 + b_{c1_r}z^{-1} & -b_{s1_r}z^{-1} \\ b_{s1_r}z^{-1} & 1 + b_{c1_r}z^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 + a_{c1_r}z^{-1} & -a_{s1_r}z^{-1} \\ a_{s1_r}z^{-1} & 1 + a_{c1_r}z^{-1} \end{pmatrix}, \quad r = \overline{1,\ 14}.$$

Структурная схема векторного блока ЦФ 1-го порядка изображена на рис.18.3.

Векторные процессы в схеме, изображённой на рис.18.3, запишем через квадратурные компоненты соответствующих комплексных процессов:

$$\mathbf{x}_r[n] = \begin{pmatrix} x_{c_r}[n] \\ x_{s_r}[n] \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y}_r[n] = \begin{pmatrix} y_{c_r}[n] \\ y_{s_r}[n] \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\gamma}_r[n] = \begin{pmatrix} \gamma_{c_r}[n] \\ \gamma_{s_r}[n] \end{pmatrix}, \quad r = \overline{1,\ 14}.$$

Шумовая модель векторного ЦФ (схема Л. Джексона) соответствует рис.10.22 при каскадной форме реализации (безынерционный каскад и 14 каскадов 1-го порядка). Расчётная схема шумовой модели ЦФ изображена на рис.18.4. При вычислении матрицы передаточных функций векторного ЦФ сложной структуры следует учитывать некоммутативность операции перемножения матриц, поэтому при вычислении результирующих матриц передаточных функций векторных ЦФ каскадной структуры необходимо правильно расставлять последовательность матриц передаточных функций отдельных каскадов (блоков).

• См. сноску на с.689.

•• В общем случае матрица передаточных функций эквивалентного двухкоординатного векторного рекурсивного ЦФ 1-го порядка имеет вид

$$\mathbf{H}_r^{(1)}(z) = \begin{pmatrix} 1 + b_{c1_r}z^{-1} & -b_{s1_r}z^{-1} \\ b_{s1_r}z^{-1} & 1 + b_{c1_r}z^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{c0_r} + a_{c1_r}z^{-1} & -a_{s0_r} - a_{s1_r}z^{-1} \\ a_{s0_r} + a_{s1_r}z^{-1} & a_{c0_r} + a_{c1_r}z^{-1} \end{pmatrix}, \quad r = \overline{1,\ L}.$$

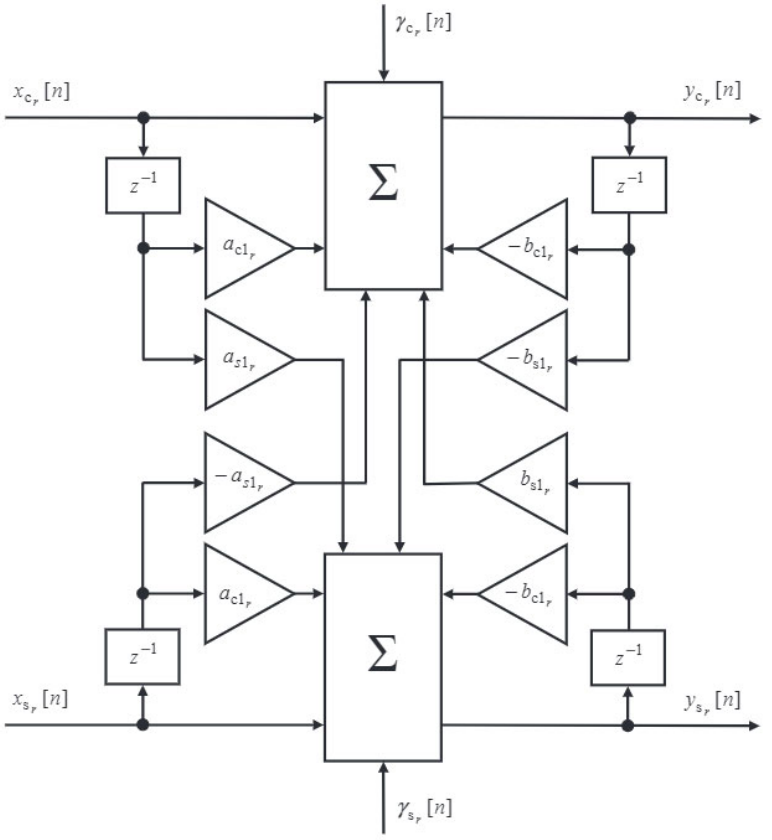


Рис.18.3. Структурная схема вещественного векторного фильтра 1-го порядка, эквивалентного комплексному скалярному фильтру 1-го порядка

Запишем выражения для матриц передаточных функций шумовой модели, изображённой на рис.18.4:

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{H}_{14}\,\mathbf{H}_{13}\,\mathbf{H}_{12}\,\mathbf{H}_{11}\,\mathbf{H}_{10}\,\mathbf{H}_9\,\mathbf{H}_8\,\mathbf{H}_7\,\mathbf{H}_6\,\mathbf{H}_5\,\mathbf{H}_4\,\mathbf{H}_3\,\mathbf{H}_2\,\mathbf{H}_1\,\mathbf{H}_0 =$$

$$= \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{14}(z^{-1})\left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{13}(z^{-1})\left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{12}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{11}(z^{-1})\left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{10}(z^{-1})\left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{9}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{9}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{8}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{8}(z^{-1})\left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{7}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{7}(z^{-1})\left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{6}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{6}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{5}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{5}(z^{-1})\left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{4}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{4}(z^{-1})\left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{3}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{3}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{2}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{2}(z^{-1})\left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{1}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{1}(z^{-1})\,\mathbf{I}K;$$

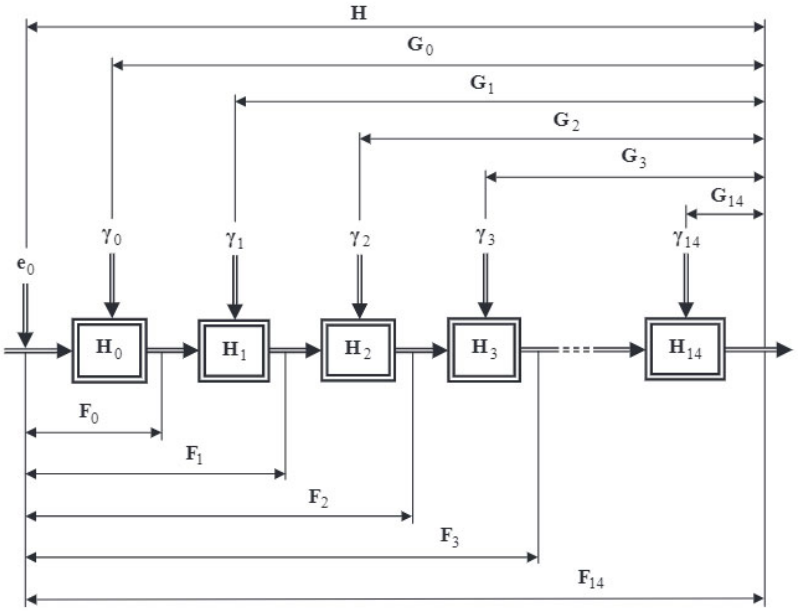


Рис.18.4. Расчётная схема шумовой модели векторного вещественного рекурсивного ЦФ сложной структуры 14-го порядка [блоки $\mathbf{H}_1(z)$ — $\mathbf{H}_{14}(z)$ 1-го порядка, блок $\mathbf{H}_0$ нулевого порядка]

$$\mathbf{G}_0(z) =$$

$$= \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{14}(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{13}(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{12}(z^{-1}) \times$$

$$\times \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{11}(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{10}(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{9}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{9}(z^{-1}) \times$$

$$\times \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{8}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{8}(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{7}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{7}(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{6}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{6}(z^{-1}) \times$$

$$\times \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{5}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{5}(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{4}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{4}(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{3}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{3}(z^{-1}) \times$$

$$\times \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{2}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{2}(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{1}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{1}(z^{-1});$$

$$\mathbf{G}_1(z) =$$

$$= \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{14}(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{13}(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{12}(z^{-1}) \times$$

$$\times \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{11}(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{10}(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{9}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{9}(z^{-1}) \times$$

$$\times \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{8}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{8}(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{7}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{7}(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{6}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{6}(z^{-1}) \times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_5(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_5(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_4(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_4(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_3(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_3(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_2(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1});$$

$$\mathbf{G}_2(z)=$$

$$=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{14}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{13}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{12}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{11}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{10}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_9(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_9(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_8(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_8(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_7(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_7(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_6(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_6(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_5(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_5(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_4(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_4(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_3(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_3(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1});$$

$$\mathbf{G}_3(z)=$$

$$=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{14}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{13}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{12}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{11}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{10}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_9(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_9(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_8(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_8(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_7(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_7(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_6(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_6(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_5(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_5(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_4(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_4(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_3(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_3(z^{-1});$$

$$\mathbf{G}_4(z)=$$

$$=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{14}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{13}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{12}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{11}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{10}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_9(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_9(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_8(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_8(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_7(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_7(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_6(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_6(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_5(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_5(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_4(z^{-1})\right]^{-1});$$

$$\mathbf{G}_5(z)=$$

$$=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{14}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{13}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{12}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{11}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{10}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_9(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_9(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_8(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_8(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_7(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_7(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_6(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_6(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_5(z^{-1})\right]^{-1};$$

$$\mathbf{G}_6(z)=$$

$$=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{14}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{13}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{12}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{11}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{10}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{9}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{9}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{8}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{8}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{7}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{7}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{6}(z^{-1})\right]^{-1};$$

$$\mathbf{G}_{7}(z)=$$

$$=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{14}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{13}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{12}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{11}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{10}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{9}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{9}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{8}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{8}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{7}(z^{-1})\right]^{-1};$$

$$\mathbf{G}_{8}(z)=$$

$$=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{14}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{13}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{12}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{11}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{10}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{9}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{9}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{8}(z^{-1})\right]^{-1};$$

$$\mathbf{G}_{9}(z)=$$

$$=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{14}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{13}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{12}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{11}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{10}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{9}(z^{-1})\right]^{-1};$$

$$\mathbf{G}_{10}(z)=$$

$$=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{14}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{13}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{12}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{11}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1};$$

$$\mathbf{G}_{11}(z)=$$

$$=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{14}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{13}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{12}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1};$$

$$\mathbf{G}_{12}(z)=$$

$$=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{14}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{13}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1};$$

$$\mathbf{G}_{13}(z)=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{14}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1};$$

$$\mathbf{G}_{14}(z)=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1};$$

$$\mathbf{F}_{0}=K\mathbf{I};$$

$$\mathbf{F}_{1}(z)=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{1}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{1}(z^{-1})\ \mathbf{I}K;$$

$$\mathbf{F}_{2}(z)=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{2}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{2}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{1}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{1}(z^{-1})\ \mathbf{I}K;$$

$$\mathbf{F}_3(z) =$$

$$= \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_3(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_3(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_2(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_1(z^{-1})\ \mathbf{I}K;$$

$$\mathbf{F}_4(z) =$$

$$= \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_4(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_4(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_3(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_3(z^{-1}) \times$$

$$\times \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_2(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_1(z^{-1})\ \mathbf{I}K;$$

$$\mathbf{F}_5(z) =$$

$$= \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_5(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_5(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_4(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_4(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_3(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_3(z^{-1}) \times$$

$$\times \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_2(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_1(z^{-1})\ \mathbf{I}K;$$

$$\mathbf{F}_6(z) =$$

$$= \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_6(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_6(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_5(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_5(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_4(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_4(z^{-1}) \times$$

$$\times \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_3(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_3(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_2(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_1(z^{-1})\ \mathbf{I}K;$$

$$\mathbf{F}_7(z) =$$

$$= \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_7(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_7(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_6(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_6(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_5(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_5(z^{-1}) \times$$

$$\times \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_4(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_4(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_3(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_3(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_2(z^{-1}) \times$$

$$\times \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_1(z^{-1})\ \mathbf{I}K;$$

$$\mathbf{F}_8(z) =$$

$$= \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_8(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_8(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_7(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_7(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_6(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_6(z^{-1}) \times$$

$$\times \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_5(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_5(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_4(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_4(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_3(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_3(z^{-1}) \times$$

$$\times \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_2(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_1(z^{-1})\ \mathbf{I}K;$$

$$\mathbf{F}_9(z) =$$

$$= \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_9(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_9(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_8(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_8(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_7(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_7(z^{-1}) \times$$

$$\times \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_6(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_6(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_5(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_5(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_4(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_4(z^{-1}) \times$$

$$\times \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_3(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_3(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_2(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_1(z^{-1})\ \mathbf{I}K;$$

$$\mathbf{F}_{10}(z) =$$

$$= \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_{10}(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_9(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_9(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_8(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_8(z^{-1}) \times$$

$$\times \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_7(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_7(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_6(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_6(z^{-1}) \left[\mathbf{I} + \mathbf{B}_5(z^{-1})\right]^{-1} \mathbf{A}_5(z^{-1}) \times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_4(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_4(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_3(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_3(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_2(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_1(z^{-1})\,\mathbf{I}K;$$

$$\mathbf{F}_{11}(z)=$$

$$=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{11}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{10}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_9(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_9(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_8(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_8(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_7(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_7(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_6(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_6(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_5(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_5(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_4(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_4(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_3(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_3(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_2(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_1(z^{-1})\,\mathbf{I}K;$$

$$\mathbf{F}_{12}(z)=$$

$$=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{12}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{11}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{10}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_9(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_9(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_8(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_8(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_7(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_7(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_6(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_6(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_5(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_5(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_4(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_4(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_3(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_3(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_2(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_1(z^{-1})\,\mathbf{I}K;$$

$$\mathbf{F}_{13}(z)=$$

$$=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{13}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{12}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{11}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{10}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_9(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_9(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_8(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_8(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_7(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_7(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_6(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_6(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_5(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_5(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_4(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_4(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_3(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_3(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_2(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_1(z^{-1})\,\mathbf{I}K;$$

$$\mathbf{F}_{14}(z)=$$

$$=\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{14}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{14}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{13}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{13}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{12}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{12}(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{11}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{11}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_{10}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_{10}(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_9(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_9(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_8(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_8(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_7(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_7(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_6(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_6(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_5(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_5(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_4(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_4(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_3(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_3(z^{-1})\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_2(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_2(z^{-1})\left[\mathbf{I}+\mathbf{B}_1(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{A}_1(z^{-1})\,\mathbf{I}K.$$

Матрицы $\mathbf{H}\left(e^{j2\pi W}\right)$, $\mathbf{F}_r\left(e^{j2\pi W}\right)$, $\mathbf{G}_r\left(e^{j2\pi W}\right)$ $\left(r=\overline{0,\,14}\right)$ элементы которых являются комплексными частотными характеристиками, получим из соответствующих

матриц передаточных функций $\mathbf{G}_r(z)$ **и** $\mathbf{F}_r(z)$ $\left(r=\overline{0,\,14}\right)$ заменой аргумента z на $e^{j2\pi W}$.

Далее необходимо вычислить квадраты норм комплексных частотных характеристик в пространстве L_2 и нормы в пространстве L_∞:

$$\left\| H_{il}\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = \int_{-0,5}^{0,5} \left| H_{il}\left(e^{j2\pi W}\right)\right|^2 dW, \quad i,\ l=\overline{1,\,2};$$

$$\left\| G_{r_{il}}\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = \int_{-0,5}^{0,5} \left| G_{r_{il}}\left(e^{j2\pi W}\right)\right|^2 dW, \quad r=\overline{0,\,14},\ i,\ l=\overline{1,\,2};$$

$$\left\| H_{il}\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_\infty = \max_W \left| H_{il}\left(e^{j2\pi W}\right)\right|, \quad i,\ l=\overline{1,\,2};$$

$$\left\| F_{r_{il}}\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_\infty = \max_W \left| F_{r_{il}}\left(e^{j2\pi W}\right)\right|, \quad r=\overline{0,\,14},\ i,\ l=\overline{1,\,2},$$

из которых формируются матрицы $\mathbf{H}_D$, $\mathbf{G}_{D_r}$, $\mathbf{H}_\infty$ и $\mathbf{F}_{r_\infty}$ $\left(r=\overline{0,\,14}\right)$.

Используя систему компьютерной математики Mathcad, получим эти матрицы:

$$\mathbf{H}_D = \begin{pmatrix} 0{,}151 & 0{,}16 \\ 0{,}16 & 0{,}151 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{G}_{D_0} = \begin{pmatrix} 447{,}131 & 475{,}966 \\ 475{,}966 & 447{,}131 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{G}_{D_1} = \begin{pmatrix} 250{,}924 & 257{,}707 \\ 257{,}707 & 250{,}924 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{G}_{D_2} = \begin{pmatrix} 874{,}986 & 885{,}139 \\ 885{,}139 & 874{,}986 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{G}_{D_3} = \begin{pmatrix} 314{,}445 & 182{,}313 \\ 182{,}313 & 314{,}445 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{G}_{D_4} = \begin{pmatrix} 60{,}392 & 55{,}412 \\ 55{,}412 & 60{,}3925 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{G}_{D_5} = \begin{pmatrix} 29{,}658 & 27{,}143 \\ 27{,}143 & 29{,}658 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{G}_{D_6} = \begin{pmatrix} 19{,}218 & 46{,}863 \\ 46{,}863 & 19{,}218 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{G}_{D_7} = \begin{pmatrix} 5{,}514 & 5{,}912 \\ 5{,}912 & 5{,}514 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{G}_{D_8} = \begin{pmatrix} 3{,}281 & 0{,}418 \\ 0{,}418 & 3{,}281 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{G}_{D_9} = \begin{pmatrix} 5{,}313 & 3{,}642 \\ 3{,}642 & 5{,}313 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{G}_{D_{10}} = \begin{pmatrix} 2{,}475 & 1{,}983 \\ 1{,}983 & 2{,}475 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{G}_{D_{11}} = \begin{pmatrix} 2{,}691 & 1{,}152 \\ 1{,}152 & 2{,}691 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{G}_{D_{12}} = \begin{pmatrix} 2{,}75 & 1{,}765 \\ 1{,}765 & 2{,}75 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{G}_{D_{13}} = \begin{pmatrix} 1{,}18 & 0{,}189 \\ 0{,}189 & 1{,}18 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{G}_{D_{14}} = \begin{pmatrix} 1{,}273 & 0{,}294 \\ 0{,}294 & 1{,}273 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{H}_\infty = \begin{pmatrix} 0{,}501 & 0{,}505 \\ 0{,}505 & 0{,}501 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{F}_{0_\infty} = \begin{pmatrix} 0{,}018 & 0 \\ 0 & 0{,}018 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F}_{1_\infty} = \begin{pmatrix} 0{,}019 & 0 \\ 0 & 0{,}019 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{F}_{2_\infty} = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}64 \\ 0{,}64 & 0{,}07 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F}_{3_\infty}=\begin{pmatrix}0{,}091 & 0{,}096\\ 0{,}096 & 0{,}091\end{pmatrix};\qquad \mathbf{F}_{4_\infty}=\begin{pmatrix}0{,}243 & 0{,}254\\ 0{,}254 & 0{,}243\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F}_{5_\infty}=\begin{pmatrix}0{,}241 & 0{,}264\\ 0{,}264 & 0{,}241\end{pmatrix};\qquad \mathbf{F}_{6_\infty}=\begin{pmatrix}0{,}303 & 0{,}313\\ 0{,}313 & 0{,}303\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F}_{7_\infty}=\begin{pmatrix}0{,}59 & 0{,}588\\ 0{,}588 & 0{,}59\end{pmatrix};\qquad \mathbf{F}_{8_\infty}=\begin{pmatrix}0{,}575 & 0{,}574\\ 0{,}574 & 0{,}575\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F}_{9_\infty}=\begin{pmatrix}0{,}618 & 0{,}617\\ 0{,}617 & 0{,}618\end{pmatrix};\qquad \mathbf{F}_{10_\infty}=\begin{pmatrix}0{,}403 & 0{,}402\\ 0{,}402 & 0{,}403\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F}_{11_\infty}=\begin{pmatrix}0{,}446 & 0{,}446\\ 0{,}446 & 0{,}446\end{pmatrix};\qquad \mathbf{F}_{12_\infty}=\begin{pmatrix}0{,}468 & 0{,}468\\ 0{,}468 & 0{,}468\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F}_{13_\infty}=\begin{pmatrix}0{,}477 & 0{,}477\\ 0{,}477 & 0{,}477\end{pmatrix};\qquad \mathbf{F}_{14_\infty}=\begin{pmatrix}0{,}501 & 0{,}505\\ 0{,}505 & 0{,}501\end{pmatrix}.$$

Полагая $X_{\text{с}}=\max\limits_{n}\left|x_{\text{с}}[n]\right|=X=1$ и $X_{\text{s}}=\max\limits_{n}\left|x_{\text{s}}[n]\right|=X=1$, сформируем вектор максимальных по модулю оценок входных сигналов $\mathbf{X}_{\max}$:

$$\mathbf{X}_{\max}=\begin{pmatrix}X_{\text{с}}\\ X_{\text{s}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

По формулам (11.128) найдём векторы максимальных модульных оценок выходных сигналов ЦФ и каждого из его каскадов $\left(r=\overline{0,\ 14}\right)$:

$$\mathbf{Y}_{\max}\le\begin{pmatrix}1{,}006\\ 1{,}006\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_0\le\begin{pmatrix}0{,}018\\ 0{,}018\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_1\le\begin{pmatrix}0{,}019\\ 0{,}019\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_2\le\begin{pmatrix}0{,}71\\ 0{,}71\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{V}_3\le\begin{pmatrix}0{,}187\\ 0{,}187\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_4\le\begin{pmatrix}0{,}497\\ 0{,}497\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_5\le\begin{pmatrix}0{,}505\\ 0{,}505\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_6\le\begin{pmatrix}0{,}616\\ 0{,}616\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{V}_7\le\begin{pmatrix}0{,}178\\ 0{,}178\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_8\le\begin{pmatrix}1{,}149\\ 1{,}149\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_9\le\begin{pmatrix}1{,}235\\ 1{,}235\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{10}\le\begin{pmatrix}0{,}805\\ 0{,}805\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{V}_{11}\le\begin{pmatrix}0{,}892\\ 0{,}892\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{12}\le\begin{pmatrix}0{,}936\\ 0{,}936\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{13}\le\begin{pmatrix}0{,}954\\ 0{,}954\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{14}\le\begin{pmatrix}1{,}006\\ 1{,}006\end{pmatrix}.$$

Согласно (11.129) определим максимальные по модулю оценки сигналов на выходах умножителей на весовые коэффициенты в каждом каскаде ЦФ $\left(r=\overline{0,\ 14}\right)$:

$$\mathbf{V}_{A_1}=\begin{pmatrix}0{,}018\\ 0\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{B_1}=\begin{pmatrix}0{,}017\\ 0\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{A_2}=\begin{pmatrix}0{,}016\\ 9{,}5\cdot10^{-3}\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{B_2}=\begin{pmatrix}0{,}512\\ 0{,}46\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{V}_{A_3}=\begin{pmatrix}0{,}616\\ 0{,}354\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{B_3}=\begin{pmatrix}0{,}109\\ 0{,}032\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{A_4}=\begin{pmatrix}0{,}178\\ 0{,}058\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{B_4}=\begin{pmatrix}0{,}354\\ 0{,}257\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{V}_{A_5}=\begin{pmatrix}0{,}473\\ 0{,}153\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{B_5}=\begin{pmatrix}0{,}24\\ 0{,}185\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{A_6}=\begin{pmatrix}0{,}408\\ 0{,}297\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{B_6}=\begin{pmatrix}0{,}497\\ 0{,}031\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{V}_{A_7}=\begin{pmatrix}0{,}108\\0{,}149\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{B_7}=\begin{pmatrix}0{,}219\\0{,}672\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{A_8}=\begin{pmatrix}0{,}693\\0{,}953\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{B_8}=\begin{pmatrix}0{,}498\\0{,}352\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{V}_{A_9}=\begin{pmatrix}0{,}355\\1{,}093\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{B_9}=\begin{pmatrix}0{,}328\\1{,}011\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{A_{10}}=\begin{pmatrix}0{,}999\\0{,}726\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{B_{10}}=\begin{pmatrix}0{,}56\\0{,}407\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{V}_{A_{11}}=\begin{pmatrix}0{,}365\\0{,}717\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{B_{11}}=\begin{pmatrix}0{,}324\\0{,}636\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{A_{12}}=\begin{pmatrix}0{,}794\\0{,}404\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{B_{12}}=\begin{pmatrix}0{,}751\\0{,}382\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{V}_{A_{13}}=\begin{pmatrix}0{,}907\\0{,}232\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{B_{13}}=\begin{pmatrix}0{,}74\\0{,}19\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{A_{14}}=\begin{pmatrix}0{,}907\\0{,}294\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{B_{14}}=\begin{pmatrix}0{,}489\\0{,}356\end{pmatrix}.$$

Из всех полученных векторов $\mathbf{X}_{\max}$, $\mathbf{Y}_{\max}$, $\mathbf{V}_r$, $\mathbf{V}_{A_r}$ и $\mathbf{V}_{B_r}$ $\left(r=\overline{0,\,14}\right)$ в соответствии с выражением (11.130) выбираем наибольшую координату $V=1{,}235$, которая соответствует максимальной модульной оценке сигналов в ЦФ, затем по формулам (18.3) и (18.4) получаем число разрядов, требуемое для представления кодов целой части чисел: $S_{\text{ц}}=1$, $S_{\text{вх}_{\text{ц}}}=0$.

Выберем $\beta=0{,}85$ и при $A_0=1$ согласно (18.34) найдём допустимую мощность шумов квантования на выходе ЦФ: $P_{\text{ш}_{\text{доп}}}=5\cdot10^{-9}$. Далее по формулам (18.55) и (18.61) при $R=2$, $M_r=1$, $N_r=1$ $\left(r=\overline{0,\,14}\right)$ определяем число разрядов•, требуемое для представления кодов дробной части чисел: $S_{\text{вх}_{\text{д}}}=12$, $S_{\text{д}}=21$. Тогда в соответствии с (18.1) и (18.2) получаем $S=23$, $S_{\text{вх}}=13$.

Для оценки требуемого быстродействия DSP воспользуемся формулой (18.72):

$$f_{\text{т}}=\frac{1}{T_{\text{т}}}>f_{\text{д}}\left\{2k_{\text{умн}}+\sum_{r=1}^{L}\left[4(M_r+N_r)k_{\text{умн}}+(M_r+N_r)(4k_{\text{слож}}+2k_{\text{пзп}})\right]\right\}=$$

$$=15\cdot10^{6}\left(114k_{\text{умн}}+112k_{\text{слож}}+56k_{\text{пзп}}\right)\ \text{Гц}.$$

Это выражение следует «примерять» к различным типам DSP, разрядность которых $S\geq23$. После определения числа тактов, требуемых для операций умножения $k_{\text{умн}}$, сложения $k_{\text{слож}}$ и перезаписи $k_{\text{пзп}}$, по приведённой формуле получим требуемую тактовую частоту DSP.

Следующий пример служит иллюстрацией того, как мощность шумов квантования на выходе зависит от формы реализации ЦФ.

• В данном примере (см. рис.18.3 и 18.4) каскад с матрицей передаточных функций $\mathbf{H}_0$ имеет нулевой, а остальные каскады — первый порядок ($M_r=N_r=1$) при $a_{\text{с}0_r}=1$ $\left(r=\overline{1,\,14}\right)$, поэтому формула (18.61) принимает следующий вид:

$$S_{\text{д}}=\text{int}\left\langle\frac{1}{2}\log_2\left\{\frac{1}{\chi_2(1-\beta)P_{\text{ш}_{\text{доп}}}}\max_i\left[\sum_{l=1}^{2}\left\|G_{0_{il}}\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2+4\sum_{r=1}^{14}\sum_{l=1}^{2}\left\|G_{r_{il}}\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2\right]\right\}\right\rangle,$$

$$i=\overline{1,\,2}.$$

Пример 18.5. Для вещественного рекурсивного цифрового ФНЧ эллиптического типа, спроектированного в примере 17.5 (максимальное затухание в полосе пропускания $a_{\text{п}} = 1$ дБ, минимальное затухание в полосе задерживания $a_{\text{з}} = 40$ дБ, нормированная граничная частота полосы пропускания $W_{\text{п}} = 0{,}1$, нормированная граничная частота полосы задерживания $W_{\text{з}} = 0{,}12$) рассчитать дисперсию шумов квантования на выходе фильтра при прямой и каскадной формах реализации, полагая, что квантование осуществляется по методу округления при $S_{\text{вх}_{\text{д}}} = S_{\text{д}} = 10$.

Для расчётов воспользуемся системами компьютерной математики MATLAB (синтез фильтра) и Mathcad (расчёт дисперсии шумов квантования).

♦ Синтез ЦФ•. Программа синтеза состоит из следующих команд MATLAB:

```
>> Rp=1;
>> Rs=40;
>> Wp=0.1*2;
>> Ws=0.12*2;
>> [n,Wn]=ellipord(Wp,Ws,Rp,Rs)
>> [a,b]=ellip(n,Rp,Rs,Wn)
>> [sos,q]=tf2sos(a,b,'up','none')
```

Рассчитанные параметры синтезированных ЦФ следующие:

- порядок фильтра $N = 6$;
- коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции дробно-рационального вида:

$$a_0 = 0{,}0160;\quad a_1 = -0{,}0482;\quad a_2 = 0{,}0859;\quad a_3 = -0{,}0989;$$
$$a_4 = 0{,}0859;\quad a_5 = -0{,}0482;\quad a_6 = 0{,}0160;$$
$$b_0 = 1{,}0000;\quad b_1 = -4{,}7549;\quad b_2 = 10{,}0434;\quad b_3 = -11{,}9260;$$
$$b_4 = 8{,}3648;\quad b_5 = -3{,}2804;\quad b_6 = 0{,}5629;$$

- параметры синтезированного ЦФ каскадной структуры (три секции 2-го порядка) следующие [см. (14.20) и (14.21)]: $g = 0{,}0160$;

1-я секция: $a_0 = 1;\quad a_1 = -0{,}0760;\quad a_2 = 1;\quad b_0 = 1;\quad b_1 = -1{,}5758;\quad b_2 = 0{,}6675;$

2-я секция: $a_0 = 1;\quad a_1 = -1{,}3889;\quad a_2 = 1;\quad b_0 = 1;\quad b_1 = -1{,}5831;\quad b_2 = 0{,}8672;$

3-я секция: $a_0 = 1;\quad a_1 = -1{,}5368;\quad a_2 = 1;\quad b_0 = 1;\quad b_1 = -1{,}5959;\quad b_2 = 0{,}9724.$

♦ Расчёт дисперсии шумов квантования при прямой форме реализации фильтра.

Воспользуемся линейной шумовой моделью, изображённой на рис.10.10,*б*. Дисперсия шумов квантования входного сигнала и в одном умножителе на весовой коэффициент $D = 2^{-2S_{\text{д}}}/12 = 7{,}947 \cdot 10^{-8}$. Дисперсия собственных шумов квантования, приведённых к входу сумматора $D_\gamma = D(M + N + 1) = 13D = 1{,}033 \cdot 10^{-6}$. Вычислим квадраты норм в пространстве L_2 комплексных частотных характеристик $H\left(e^{j2\pi W}\right)$ и $G\left(e^{j2\pi W}\right)$: $\left\| H\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = 0{,}19$; $\left\| G\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = 84{,}662$.

По формуле (11.69) находим оценки дисперсий составляющих внешних и собственных шумов квантования на выходе ЦФ [см. также выражения (11.66) и (11.68)]:

• В данном примере рассматривается фильтр с неквантованными коэффициентами, хотя результаты арифметических операций квантуются.

$D_{y_{\text{внеш}}} = 1{,}511 \cdot 10^{-8}$; $D_{y_{\text{соб}}} = 8{,}747 \cdot 10^{-5}$, а затем оценку дисперсии суммарных выходных шумов квантования: $D_y = 8{,}748 \cdot 10^{-5}$.

♦ Расчёт дисперсии шумов квантования при каскадной реализации фильтра.

Воспользуемся линейной шумовой моделью, изображённой на рис.10.13 [см. также рис.18.2, где H_0 — передаточная функция безынерционного блока с коэффициентом передачи $g = 0{,}016$, а $H_r(z)$ $\left(r = \overline{1,\,3}\right)$ — передаточные функции 1-й, 2-й и 3-й секций (блоков) 2-го порядка].

Дисперсии собственных шумов блоков, приведённых к входам сумматоров: $D_{\gamma_0} = D = 7{,}947 \cdot 10^{-8}$; $D_{\gamma_r} = 5D = 3{,}974 \cdot 10^{-7}$.

По формуле $\left\| G_k\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = \int\limits_{-0,5}^{0,5} \left| G_k\left(e^{j2\pi W}\right)\right|^2 dW$ рассчитаем квадраты норм в пространстве L_2 комплексных частотных характеристик $G_k\left(e^{j2\pi W}\right)$ $\left(k = \overline{0,\,3}\right)$ и $H\left(e^{j2\pi W}\right)$:

$$\left\| G_0\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = 12{,}357; \qquad \left\| G_1\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = 7{,}087;$$

$$\left\| G_2\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = 3{,}21; \qquad \left\| G_3\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = 2{,}815;$$

$$\left\| H\left(e^{j2\pi W}\right)\right\|_2^2 = 0{,}198.$$

В соответствии с (11.70) находим оценки дисперсий составляющих внешних и собственных шумов квантования на выходе ЦФ [см. также выражения (18.42) и (18.47)]: $D_{y_{\text{внеш}}} = 1{,}571 \cdot 10^{-8}$; $D_{y_{\text{соб}}} = 6{,}192 \cdot 10^{-6}$, а затем оценку дисперсии суммарных выходных шумов квантования: $D_y = 6{,}208 \cdot 10^{-6}$.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что при каскадной реализации дисперсия (мощность) шумов квантования на выходе ЦФ меньше, чем при прямой форме реализации.

Результат, полученный в примере 18.5, имеет общий характер, впервые выявленный Д. Кайзером [6]. Таким образом, каскадная форма реализации ЦФ является предпочтительной как с точки зрения простоты реализации, так и с точки зрения минимума мощности шумов квантования на выходе фильтра, а также чувствительности к погрешностям задания коэффициентов передаточной функции $H(z)$ в случае скалярного и матрицы передаточных функций $\mathbf{H}(z)$ в случае векторного ЦФ.

В гл.17 и 18 рассмотрены второй и третий этапы проектирования ЦФ (см. рис.12.1), в результате выполнения которых осуществляется переход от дискретного фильтра, получаемого при решении аппроксимационной задачи, к цифровому, который можно реализовать на DSP. Выбор типа DSP производится с учётом требуемой разрядности и быстродействия ЦФ.

Краткие итоги

1. Универсальные линейные шумовые модели ЦФ (скалярных и векторных •, простой и сложной структуры) изображены на рис.10.13 и 10.22. Эти модели позволили разработать методики максимальных модульных оценок сигналов в различных точках структурной схемы фильтра, а также либо детерминированных, либо вероятностных оценок шумов квантования на выходе ЦФ. Подобные оценки имеют самостоятельное значение и в то же время являются промежуточным этапом при расчёте необходимой разрядности $S_{\text{ц}}$ и $S_{\text{д}}$ операционных устройств вычислителя (DSP), на котором предполагается реализовать ЦФ.

2. В случае простой структуры фильтров (см. рис.10.10,*б* и 10.21) максимальные модульные оценки сигналов на выходах определяются формулами (11.48) для скалярных и (11.99) для векторных ЦФ, а максимальные модульные оценки сигналов на выходах умножителей на весовые коэффициенты при прямой форме реализации — выражениями (11.51) и (11.52) для скалярных и (11.106) для векторных ЦФ. Из этих оценок по формулам (11.53) для скалярных и (11.107) для векторных ЦФ выбираются наибольшие значения, которые используются при определении числа разрядов регистров операционных устройств ЦФ для представления кодов целых частей отсчётов сигналов [см. выражения (18.3) и (18.4)].

3. В случае сложной структуры фильтров (см. рис.10.13 и 10.22) максимальные модульные оценки сигналов на выходах ЦФ определяются формулами (11.48) для скалярных и (11.128) для векторных ЦФ, а максимальные модульные оценки сигналов на выходах умножителей на весовые коэффициенты при прямой форме реализации — выражениями (11.51), (11.52) для скалярных и (11.129) для векторных ЦФ. Из этих оценок по формулам (11.53) для скалярных и (11.130) для векторных ЦФ выбираются наибольшие значения, которые используются при определении числа разрядов регистров операционных устройств ЦФ для представления кодов целых частей отсчётов сигналов [см. выражения (18.3) и (18.4)].

4. Максимальные модульные (детерминированные) оценки шумов квантования на выходах ЦФ простой структуры определяются формулами (11.61) при $L=1$ для скалярных и (11.111) для векторных ЦФ, а на выходах ЦФ сложной структуры — выражениями (11.61) и (11.133) соответственно. Эти оценки используются при определении числа разрядов регистров операционных устройств ЦФ для представления кодов дробных частей отсчётов сигналов [см. выражения (18.12), (18.17), (18.18), (18.24), (18.29) и (18.30)].

5. Вероятностные оценки шумов квантования (математического ожидания и дисперсии) на выходах ЦФ простой структуры определяются формулами (11.69) при $L=1$ для скалярных и (11.118) и (11.119) для векторных ЦФ, а на выходах ЦФ сложной структуры — выражениями (11.69) и (11.138), (11.139) соответственно. Оценки дисперсии используются при определении числа разрядов регистров операционных устройств ЦФ для представления кодов дробных частей отсчётов сигналов [см. выражения (18.43), (18.48), (18.49), (18.55), (18.60) и (18.61)].

6. При выполнении арифметических операций в дополнительном коде шумы квантования имеют ненулевое математическое ожидание [см. (18.37) и (18.39)]. Математические ожидания шумов квантования на выходах ЦФ (скалярных и векторных, простой и сложной структуры) могут быть вычислены заранее по формулам (11.69), (11.118) и (11.138) соответственно, следовательно, в выходных сигналах их можно компенсировать. При этом структурные схемы ЦФ будут иметь вид, изображённый на рис.18.1.

7. Для оценки необходимой тактовой частоты DSP, на котором предполагается реализовать ЦФ, в зависимости от типа фильтра следует воспользоваться формулами (18.64), (18.68) — (18.72), в которых значения $k_{\text{умн}}$, $k_{\text{слож}}$ и $k_{\text{пзп}}$ определяются архитектурой сигнального процессора и способом организации вычислений.

• См. сноску на с.689.

Глава 19

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

19.1. Особенности моделирования процессов цифровой фильтрации

В [1, 4, 5, 29] рассматривались методы цифрового моделирования аналоговых систем. Применительно к линейным стационарным системам основная идея этих методов базируется на представлении реального импульсного элемента (ИЭ) совокупностью идеального импульсного элемента (ИИЭ) и интерполирующего фильтра (ИФ), который в дальнейшем объединяется с моделируемой аналоговой системой, образуя приведённую непрерывную часть (ПНЧ). Дискретизацией ПНЧ получают линейный стационарный дискретный фильтр с передаточной функцией $H(z)$, который служит цифровой моделью линейной аналоговой системы.

Необходимость подобного усложнения цифровой модели • инерционной аналоговой системы объясняется неадекватностью реакции модели на аналоговый сигнал $x(t)$ и на его дискретную выборку $x[n]=x(t)\big|_{t=nT}$, где $T=1/f_д$ — шаг (интервал) дискретизации.

При цифровой обработке сигналов задача несколько упрощается. Поскольку входной сигнал $x[n]$ является дискретным, реакция $y[n]$ линейного стационарного цифрового фильтра с передаточной функцией $H(z)$, описываемая разностным уравнением

$$y[n]=H(z)x[n], \tag{19.1}$$

отображает алгоритм дискретной фильтрации ••.

Отмеченные обстоятельства позволяют осуществить моделирование процессов цифровой фильтрации на основе алгоритма фильтрации (8.1) или его векторного аналога

$$\mathbf{y}[n]=\mathbf{H}(z)\mathbf{x}[n]. \tag{19.2}$$

Уравнения (19.1) и (19.2) описывают ЦФ как простой, так и сложной структуры (скалярного и векторного соответственно). Для ЦФ каскадной структуры, представляющих наибольший практический интерес, вводя в рассмотре-

---

• Усложнение связано с переходом к ПНЧ моделируемой аналоговой линейной системы.

•• Линейное разностное уравнение (19.1) представлено в символической форме, где z рассматривается как оператор сдвига на один шаг дискретизации T.

ние промежуточные сигналы, уравнения (19.1) и (19.2) удобно записать в виде следующих систем символических разностных уравнений:

$$\begin{cases} v_1[n] = H_1(z)x[n]; \\ v_2[n] = H_2(z)v_1[n]; \\ v_3[n] = H_3(z)v_2[n]; \\ \quad \dots \\ v_{L-1}[n] = H_{L-1}(z)v_{L-2}[n]; \\ y[n] = H_L(z)v_{L-1}[n]; \end{cases} \tag{19.3}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1[n] = \mathbf{H}_1(z)\mathbf{x}[n]; \\ \mathbf{v}_2[n] = \mathbf{H}_2(z)\mathbf{v}_1[n]; \\ \mathbf{v}_3[n] = \mathbf{H}_3(z)\mathbf{v}_2[n]; \\ \quad \dots \\ \mathbf{v}_{L-1}[n] = \mathbf{H}_{L-1}(z)\mathbf{v}_{L-2}[n]; \\ \mathbf{y}[n] = \mathbf{H}_L(z)\mathbf{v}_{L-1}[n]. \end{cases} \tag{19.4}$$

Уравнения (19.3) и (19.4) отражают характерную особенность каскадной структуры — выходной сигнал предыдущего блока (каскада) является входным для последующего. С целью упрощения организации циклов при моделировании каскадов целесообразно применить унифицированные обозначения входных и выходных сигналов в каждом каскаде, представив системы уравнений (19.3) и (19.4) в следующем виде:

$$\begin{cases} v_0[n] = x[n]; \\ v_r[n] = H_r(z)v_{r-1}[n], \quad r = \overline{1, L}; \\ y[n] = v_L[n]; \end{cases} \tag{19.5}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0[n] = \mathbf{x}[n]; \\ \mathbf{v}_r[n] = \mathbf{H}_r(z)\mathbf{v}_{r-1}[n], \quad r = \overline{1, L}; \\ \mathbf{y}[n] = \mathbf{v}_L[n]. \end{cases} \tag{19.6}$$

В данной главе нас будут интересовать, в основном, методы и алгоритмы моделирования процессов цифровой фильтрации, поэтому для упрощения мы оставим в стороне аспекты, связанные с эффектами конечной разрядности, т.е. с квантованием коэффициентов ЦФ, сигналов и результатов арифметических операций. По сути дела, мы будем рассматривать модели процессов *дискретной*, а не *цифровой* фильтрации. Однако, получаемые при этом результаты описывают процессы преобразования сигналов *цифровыми* фильтрами с точностью, определяемой шумами квантования. Методы учёта эффектов квантования в ЦФ достаточно полно изложены в гл.17 и 18 (см. также [1, 2]).

19.2. Реакция цифровых фильтров на сигнал с линейной частотной модуляцией

При настройке аналоговых фильтров применяют характериографы — приборы для измерения амплитудно-частотных характеристик (АЧХ). Характериограф вырабатывает сигнал с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-сигнал), который подаётся на вход фильтра. Огибающая выходного сигнала фильтра (вещественная огибающая реакции фильтра на ЛЧМ-сигнал) усиливается и поступает на вертикально-отклоняющие пластины электронно-лучевой трубки (ЭЛТ). Горизонтальное отклонение электронного луча ЭЛТ осуществляется синхронно с законом изменения частоты ЛЧМ-сигнала. При этом на экране ЭЛТ характериографа отображаются АЧХ фильтра и метки частоты.

В данном параграфе рассматриваются примеры цифрового моделирования характериографа.

Частотно-временная характеристика (зависимость частоты от времени) ЛЧМ-сигнала имеет вид

$$f(t) = f_{\text{н}} + S_1 t, \tag{19.7}$$

где $f_{\text{н}}$ — значение частоты в начальный момент времени (при $t = 0$); S_1 — крутизна частотно-временной характеристики.

Запишем ЛЧМ-сигнал в аналоговой и дискретной формах при нулевой начальной фазе (рис.19.1):

$$x(t) = X_m \cos\left[2\pi\left(f_{\text{н}} t + S_1 t^2/2\right)\right], \quad t \in [0,\ T_{\text{м}}]; \tag{19.8}$$

$$x[n] = X_m \cos\left[2\pi\left(f_{\text{н}} T n + S_1 T^2 n^2/2\right)\right], \quad n = \overline{0,\ N_{\text{м}} - 1}, \tag{19.9}$$

где $T_{\text{м}}$ — период модуляции аналогового ЛЧМ-сигнала; $T = 1/f_{\text{д}}$ — шаг (интервал) дискретизации; $N_{\text{м}} = T_{\text{м}}/T$ — число отсчётов ЛЧМ-сигнала в дискретной форме•.

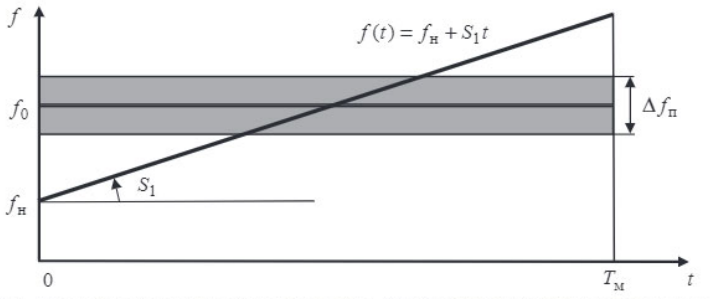


Рис.19.1. Частотно-временная характеристика ЛЧМ-сигнала; заливкой выделена полоса пропускания полосового фильтра

• Здесь следует брать целую часть отношения $T_{\text{м}}/T$.

Крутизна частотно-временной характеристики S_1 должна выбираться такой, чтобы снимаемая АЧХ фильтра была *квазистатической*, а не *динамической*, так как в последнем случае происходит её искажение [68]. Наиболее полно исследование этого вопроса для одиночного параллельного колебательного контура проведено в [69]. Полученные аналитическим методом *динамические* АЧХ контура построены при различных значениях параметра $\Delta f_{\text{п}} \big/ \left(2\sqrt{|S_1|}\right)$, где $\Delta f_{\text{п}}$ — ширина полосы пропускания контура по уровню $1\big/\sqrt{2} \approx 0{,}707$.

При $\Delta f_{\text{п}} \big/ \left(2\sqrt{|S_1|}\right) \to \infty$ $(|S_1| \to 0)$ АЧХ контура совпадает со *статической* характеристикой. При $\Delta f_{\text{п}} \big/ \left(2\sqrt{|S_1|}\right) = 2$ динамическая характеристика контура становится асимметричной, резонансная частота f_0 смещается по оси частот примерно на величину $0{,}42\,\Delta f_{\text{п}}$, коэффициент передачи на резонансной частоте снижается на 7 %, а ширина полосы пропускания увеличивается на 8 %. Дальнейшее уменьшение величины $\Delta f_{\text{п}} \big/ \left(2\sqrt{|S_1|}\right)$ приводит к более значительным искажениям динамической АЧХ колебательного контура.

Методом математического моделирования мы имеем возможность подбирать крутизну частотно-временной характеристики ЛЧМ-сигнала $|S_1|$, таким образом, чтобы *динамическая* АЧХ любого линейного фильтра вне зависимости от его сложности достаточно мало отличалась от *статической* характеристики, т.е. рассчитанной по соответствующим формулам. Для большого числа разнообразных ЦФ (вещественных и комплексных, рекурсивных и нерекурсивных, простой и сложной структуры) в рассмотренных примерах предыдущих глав получены статические АЧХ. Это даёт возможность провести сравнение *статических* АЧХ цифровых фильтров с соответствующими *динамическими*.

Поскольку при построении АЧХ цифровых фильтров обычно используется нормированная частота $W = f \big/ f_{\text{д}}$, целесообразно дискретный ЛЧМ-сигнал (8.9) представить также с использованием нормированной частоты:

$$x[n] = X_m \cos\left[2\pi\left(W_{\text{н}} n + V_1 n^2 \big/ 2\right)\right], \quad n = \overline{0,\ N_{\text{м}} - 1}, \tag{19.10}$$

где

$$V_1 = S_1 \big/ f_{\text{д}}^2 \tag{19.11}$$

— нормированная крутизна частотно-временной характеристики дискретного ЛЧМ-сигнала.

Для цифрового моделирования процесса прохождения ЛЧМ-сигнала через комплексный ЦФ следует перейти от вещественного дискретного ЛЧМ-сигнала (19.10) к квадратурным компонентам комплексной огибающей $\dot{\mathbf{X}}[n] = X_{\text{c}}[n] + {} + jX_{\text{s}}[n]$:

$$\begin{cases} X_{\text{c}}[n] = X_m \cos\left[2\pi\left(\Delta W_{\text{н}} n + V_1 n^2 \big/ 2\right)\right]; \\ X_{\text{s}}[n] = X_m \sin\left[2\pi\left(\Delta W_{\text{н}} n + V_1 n^2 \big/ 2\right)\right], \end{cases} \quad n = \overline{0,\ N_{\text{м}} - 1}, \tag{19.12}$$

где

$$\Delta W_{\text{н}} = (f_{\text{н}} - f_0)/f_{\text{д}} \tag{19.13}$$

— нормированная расстройка частоты ЛЧМ-сигнала в начальный момент времени (при $n=0$) относительно опорной частоты f_0, принятой для метода комплексной огибающей.

Для получения огибающей реакции фильтра на ЛЧМ-сигнал при моделировании скалярного вещественного ЦФ организуется квадратурный канал, на входе которого действует сигнал

$$\hat{x}[n] = X_m \sin\left[2\pi\left(W_{\text{н}} n + V_1 n^2/2\right)\right], \quad n = \overline{0,\ N_{\text{м}} - 1}. \tag{19.14}$$

В прямом канале выходной сигнал определяется формулой (19.1), а в квадратурном — выражением

$$\hat{y}[n] = H(z)\hat{x}[n]. \tag{19.15}$$

Огибающие выходных сигналов ЦФ в модели характериографа вычисляются по формулам

$$Y[n] = \sqrt{y^2[n] + \hat{y}^2[n]} \tag{19.16}$$

для скалярного вещественного и

$$Y[n] = \sqrt{Y_{\text{c}}^2[n] + Y_{\text{s}}^2[n]} \tag{19.17}$$

для скалярного комплексного (вещественного двухкоординатного векторного •) ЦФ, где $Y_{\text{c}}[n]$ и $Y_{\text{s}}[n]$ — квадратурные компоненты комплексной огибающей сигнала на выходе комплексного ЦФ.

Функциональные схемы цифровых моделей характериографа изображены на рис.19.2 (*а* — для скалярного вещественного; *б* — для скалярного комплексного ЦФ).

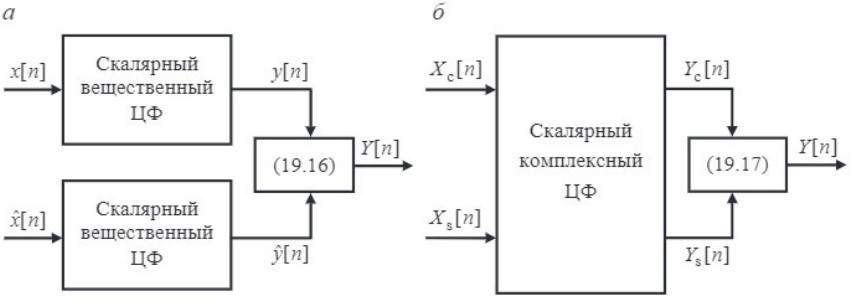


Рис.19.2. Функциональные схемы цифровых моделей характериографа: *а* — для скалярного вещественного; *б* — для скалярного комплексного ЦФ

• См. сноску на с.689.

Номер формулы в описании соответствующего блока на рис.19.2 означает, что в блоке выполняются операции, определяемые данной формулой. Начальные условия в ЦФ моделей характериографа задаются нулевыми.

Пример 19.1. Для скалярного вещественного нерекурсивного цифрового ФНЧ простой структуры 100-го порядка, спроектированного в примере 12.6, методом моделирования найти квазистатическую и динамическую АЧХ •.

Моделирование осуществим с использованием системы компьютерной математики Mathcad по алгоритмам (19.1) и (19.15), где

$$H(z)=\sum_{k=0}^{100} a_k\, z^{-k}\,.$$

Используем коэффициенты ЦФ a_k $\left(k=\overline{0,100}\right)$, рассчитанные в примере 12.6. Входные сигналы основного и квадратурного каналов описываются выражениями (19.9) и (19.14) соответственно при $X_m=1$, $W_{\text{н}}=0$. Для получения квазистатической АЧХ примем $V_1=10^{-5}$, а динамической — $V_1=5\cdot10^{-4}$. Из формулы (19.11) определим значение крутизны частотно-временной характеристики ЛЧМ-сигнала $S_1=V_1 f_{\text{д}}^2$ ($S_1=10^3$ Гц/с для квазистатической и $S_1=5\cdot10^4$ Гц/с для динамической АЧХ).

При моделировании рассчитываются зависимости $Y[n]$ и $W=W_{\text{н}}+V_1 n$, затем подстановкой результата обращения второй из них $[n(W)=(W-W_{\text{н}})/V_1]$ в первую находим АЧХ фильтра $A(W)=Y[n(W)]$.

Результаты моделирования представлены на рис.19.3 в виде квазистатической и динамической АЧХ цифрового ФНЧ.

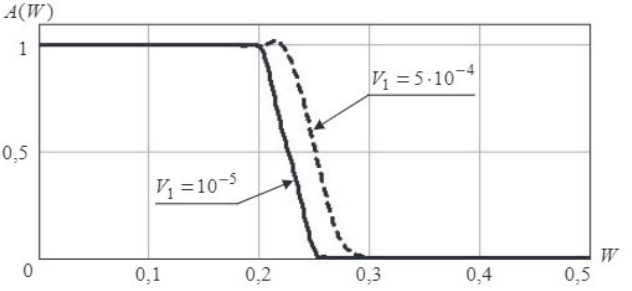


Рис.19.3. Результаты моделирования характериографа в примере 19.1: квазистатическая (при $V_1=10^{-5}$) и динамическая (при $V_1=5\cdot10^{-4}$) АЧХ ЦФ

Рассчитанная по формуле (3.50) статическая АЧХ фильтра (см. рис.12.8,*а*) практически не отличается от квазистатической, полученной с помощью характериографа (непрерывная линия на рис.19.3). Динамическая АЧХ, изображённая на рис.19.3 пунктиром, имеет заметные отличия, зависящие от крутизны частотно-временной характеристики ЛЧМ-сигнала.

• См. также примеры 17.1 и 18.1.

Пример 19.2. Для скалярного вещественного полосового рекурсивного ЦФ сложной (каскадной) структуры 12-го порядка, спроектированного в примере 13.22, методом моделирования найти квазистатическую и динамическую АЧХ •.

Моделирование осуществим с использованием системы компьютерной математики Mathcad по алгоритмам (19.5). Передаточная функция ЦФ имеет вид

$$H(z) = a_0 \prod_{r=1}^{3} \frac{a_{0r} + a_{1r} z^{-1} + a_{2r} z^{-2}}{1 + b_{1r} z^{-1} + b_{2r} z^{-2}} \frac{\overline{a}_{0r} + \overline{a}_{1r} z^{-1} + \overline{a}_{2r} z^{-2}}{1 + \overline{b}_{1r} z^{-1} + \overline{b}_{2r} z^{-2}},$$

коэффициенты которой a_0, a_{0r}, a_{1r}, a_{2r}, b_{1r}, b_{2r}, $\overline{a}_{0r}$, $\overline{a}_{1r}$, $\overline{a}_{2r}$, $\overline{b}_{1r}$, $\overline{b}_{2r}$ $\left(r = \overline{1, 3}\right)$ получены в примере 13.22. Входные сигналы основного и квадратурного каналов описываются выражениями (19.9) и (19.14) соответственно при $X_m = 1$, $W_н = 0{,}24$. Для получения квазистатической АЧХ примем $V_1 = 10^{-6}$, а динамической — $V_1 = 2 \cdot 10^{-5}$. Согласно (19.11) значение крутизны частотно-временной характеристики ЛЧМ-сигнала $S_1 = V_1 f_д^2$ ($S_1 = 4{,}9 \cdot 10^3$ Гц/с для квазистатической и $S_1 = 9{,}8 \cdot 10^4$ Гц/с для динамической АЧХ).

При моделировании рассчитываются зависимости $Y[n]$ и $W = W_н + V_1 n$, затем подстановкой результата обращения второй из них $[n(W) = (W - W_н)/V_1]$ в первую находим АЧХ фильтра $A(W) = Y[n(W)]$.

Результаты моделирования представлены на рис.19.4 в виде квазистатической и динамической АЧХ полосового ЦФ.

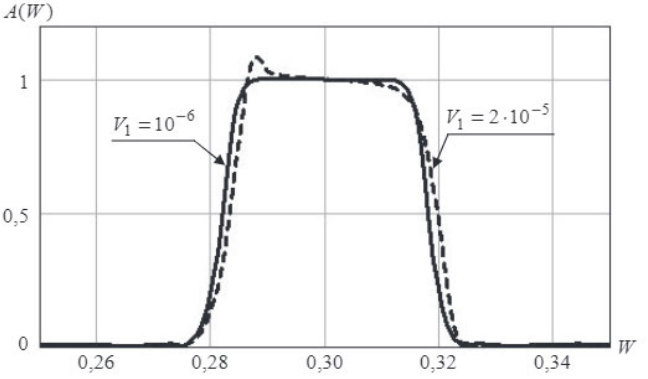


Рис.19.4. Результаты моделирования характериографа в примере 19.2: квазистатическая (при $V_1 = 10^{-6}$) и динамическая (при $V_1 = 2 \cdot 10^{-5}$) АЧХ ЦФ

Рассчитанная по формуле (13.223) статическая АЧХ фильтра (см. рис.13.27,*а*) практически не отличается от квазистатической, полученной с помощью характериографа (непрерывная линия на рис.19.4). Динамическая АЧХ, изображённая на рис.19.4 пунктиром, имеет заметные отличия, зависящие от крутизны частотно-временной характеристики ЛЧМ-сигнала.

• См. также примеры 17.2 и 18.2.

Моделирование скалярных комплексных ЦФ можно осуществить по алгоритмам скалярной фильтрации (19.1) в случае ЦФ простой или (19.5) в случае ЦФ сложной структуры, в которых как сигналы $x[n]$, $y[n]$, $v_r[n]$ $\left(r=\overline{0,\,L}\right)$, так и операторы $H(z)$, $H_r(z)$ $\left(r=\overline{1,\,L}\right)$ являются комплексными. При этом методика моделирования не отличается от рассмотренной в примерах 19.1 и 19.2.

В следующих двух примерах мы применим другой подход, заменяя скалярный комплексный фильтр эквивалентным вещественным двухкоординатным векторным ЦФ •. Цель такой замены — проиллюстрировать методику моделирования процессов векторной цифровой фильтрации. При этом воспользуемся алгоритмами фильтрации (19.2) в случае ЦФ простой или (19.6) в случае ЦФ сложной структуры, в которых как сигналы $\mathbf{x}[n]$, $\mathbf{y}[n]$, $\mathbf{v}_r[n]$ $\left(r=\overline{0,\,L}\right)$, так и операторы $\mathbf{H}(z)$, $\mathbf{H}_r(z)$ $\left(r=\overline{1,\,R}\right)$ являются вещественными.

Пример 19.3. Для скалярного комплексного нерекурсивного ЦФ простой структуры 100-го порядка, спроектированного в примере 15.1, методом моделирования найти квазистатическую и динамическую АЧХ ••.

Моделирование осуществим с использованием системы компьютерной математики Mathcad по алгоритму (19.2), в котором матрица передаточных функций имеет вид

$$\mathbf{H}(z)=\begin{pmatrix} A_{\mathrm{c}}(z^{-1}) & -A_{\mathrm{s}}(z^{-1}) \\ A_{\mathrm{s}}(z^{-1}) & A_{\mathrm{c}}(z^{-1}) \end{pmatrix},$$

где

$$A_{\mathrm{c}}(z^{-1})=\sum_{k=0}^{100} a_{\mathrm{c}k}z^{-k}; \qquad A_{\mathrm{s}}(z^{-1})=\sum_{k=0}^{100} a_{\mathrm{s}k}z^{-k}.$$

Коэффициенты комплексного ЦФ $a_{\mathrm{c}k}$ и $a_{\mathrm{s}k}$ $\left(k=\overline{0,100}\right)$ получены в примере 15.1.

Алгоритм фильтрации (19.2) конкретизируется следующим образом:

$$\begin{cases} Y_{\mathrm{c}}[n]=\sum\limits_{k=0}^{100} a_{\mathrm{c}k}\,X_{\mathrm{c}}[n-k]-\sum\limits_{k=0}^{100} a_{\mathrm{s}k}\,X_{\mathrm{s}}[n-k]; \\ Y_{\mathrm{s}}[n]=\sum\limits_{k=0}^{100} a_{\mathrm{c}k}\,X_{\mathrm{s}}[n-k]+\sum\limits_{k=0}^{100} a_{\mathrm{s}k}\,X_{\mathrm{c}}[n-k], \end{cases}$$

где квадратурные компоненты комплексной огибающей входного ЛЧМ-сигнала определяется выражениями (19.12) при $X_m=1$, $\Delta W_{\mathrm{н}}=-0{,}5$.

Для получения квазистатической АЧХ примем $V_1=10^{-5}$, а динамической — $V_1=2\cdot10^{-4}$. Согласно (19.11) крутизна частотно-временной характеристики ЛЧМ-сигнала $S_1=V_1f_{\mathrm{д}}^2$ ($S_1=2{,}25\cdot10^9$ Гц/с для квазистатической и $S_1=4{,}5\cdot10^{10}$ Гц/с для динамической АЧХ).

• См. сноску на с. 689.

•• См. также примеры 17.3 и 18.3.

При моделировании рассчитываются зависимости $Y[n]$ и $W = \Delta W_{\text{н}} + V_1 n$, затем подстановкой результата обращения второй из них $[n(W) = (W - \Delta W_{\text{н}})/V_1]$ в первую находим АЧХ фильтра $A(W) = Y[n(W)]$.

Результаты моделирования представлены на рис.19.5 в виде квазистатической и динамической АЧХ комплексного нерекурсивного ЦФ.

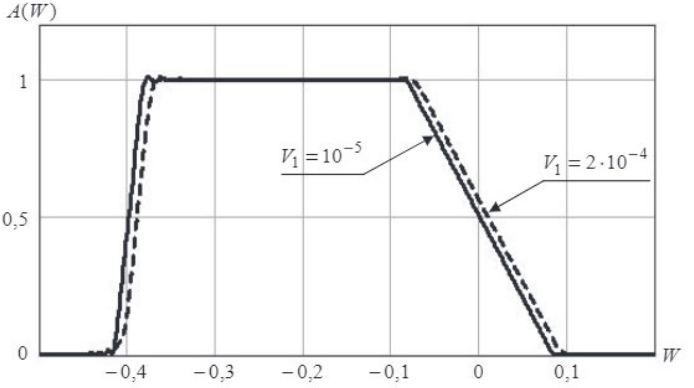


Рис.19.5. Результаты моделирования характериографа в примере 19.3: квазистатическая (при $V_1 = 10^{-5}$) и динамическая (при $V_1 = 2 \cdot 10^{-4}$) АЧХ ЦФ

Рассчитанная по формуле (4.45) статическая АЧХ фильтра (см. рис.15.15,*а*) практически не отличается от квазистатической, полученной с помощью характериографа (непрерывная линия на рис.19.5). Динамическая АЧХ, изображённая на рис.19.5 пунктиром, имеет заметные отличия, зависящие от крутизны частотно-временной характеристики ЛЧМ-сигнала.

Пример 19.4. Для скалярного комплексного рекурсивного ЦФ сложной (каскадной) структуры, спроектированного в примере 16.9, методом моделирования найти квазистатическую и динамическую АЧХ.

Моделирование осуществим с использованием системы компьютерной математики Mathcad по алгоритму (19.6), в котором матрицы передаточных функций второго и первого порядков соответственно имеют вид

$$\mathbf{H}_r^{(2)}(z) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{B}_r^{(2)}(z^{-1})\right)^{-1} \mathbf{A}_r^{(2)}(z^{-1}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + b_{\text{c1}_r}^{(2)} z^{-1} + b_{\text{c2}_r}^{(2)} z^{-2} & -b_{\text{s1}_r}^{(2)} z^{-1} - b_{\text{s2}_r}^{(2)} z^{-2} \\ b_{\text{s1}_r}^{(2)} z^{-1} + b_{\text{s2}_r}^{(2)} z^{-2} & 1 + b_{\text{c1}_r}^{(2)} z^{-1} + b_{\text{c2}_r}^{(2)} z^{-2} \end{pmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} a_{\text{c0}_r}^{(2)} + a_{\text{c1}_r}^{(2)} z^{-1} + a_{\text{c2}_r}^{(2)} z^{-2} & -a_{\text{s0}_r}^{(2)} - a_{\text{s1}_r}^{(2)} z^{-1} - a_{\text{s2}_r}^{(2)} z^{-2} \\ a_{\text{s0}_r}^{(2)} + a_{\text{s1}_r}^{(2)} z^{-1} + a_{\text{s2}_r}^{(2)} z^{-2} & a_{\text{c0}_r}^{(2)} + a_{\text{c1}_r}^{(2)} z^{-1} + a_{\text{c2}_r}^{(2)} z^{-2} \end{pmatrix}, \quad r = 1;\ 3\ ;$$

$$\mathbf{H}_r^{(1)}(z) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{B}_r^{(1)}(z^{-1})\right)^{-1} \mathbf{A}_r^{(1)}(z^{-1}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + b_{\mathrm{c1}_r}^{(1)} z^{-1} & -b_{\mathrm{s1}_r}^{(1)} z^{-1} \\ b_{\mathrm{s1}_r}^{(1)} z^{-1} & 1 + b_{\mathrm{c1}_r}^{(1)} z^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{\mathrm{c0}_r}^{(1)} + a_{\mathrm{c1}_r}^{(1)} z^{-1} & -a_{\mathrm{s0}_r}^{(1)} - a_{\mathrm{s1}_r}^{(1)} z^{-1} \\ a_{\mathrm{s0}_r}^{(1)} + a_{\mathrm{s1}_r}^{(1)} z^{-1} & a_{\mathrm{c0}_r}^{(1)} + a_{\mathrm{c1}_r}^{(1)} z^{-1} \end{pmatrix}, \quad r = 2;\ 4\,.$$

Коэффициенты $a_{\mathrm{c0}_r}^{(2)}$, $a_{\mathrm{s0}_r}^{(2)}$, $a_{\mathrm{c1}_r}^{(2)}$, $a_{\mathrm{s1}_r}^{(2)}$, $a_{\mathrm{c2}_r}^{(2)}$, $a_{\mathrm{s2}_r}^{(2)}$, $b_{\mathrm{c1}_r}^{(2)}$, $b_{\mathrm{s1}_r}^{(2)}$, $b_{\mathrm{c2}_r}^{(2)}$, $b_{\mathrm{s2}_r}^{(2)}$, $a_{\mathrm{c0}_r}^{(1)}$, $a_{\mathrm{s0}_r}^{(1)}$, $a_{\mathrm{c1}_r}^{(1)}$, $a_{\mathrm{s1}_r}^{(1)}$, $b_{\mathrm{c1}_r}^{(1)}$, $b_{\mathrm{s1}_r}^{(1)}$, $r = \overline{1,\ 4}$, входящие в эти матрицы, получены при синтезе ЦФ в примере 16.9:

$$a_{\mathrm{c0}_r}^{(2)} = 0;\quad a_{\mathrm{s0}_r}^{(2)} = -j\,0{,}068;\quad a_{\mathrm{c1}_r}^{(2)} = 0;\quad a_{\mathrm{s1}_r}^{(2)} = -j\,0{,}135;\quad a_{\mathrm{c2}_r}^{(2)} = 0;\quad a_{\mathrm{s2}_r}^{(2)} = -j\,0{,}068;$$

$$b_{\mathrm{c1}_r}^{(2)} = -1{,}131;\quad b_{\mathrm{s1}_r}^{(2)} = 0;\quad b_{\mathrm{c2}_r}^{(2)} = 0{,}718;\quad b_{\mathrm{s2}_r}^{(2)} = 0, \qquad r = 1;\ 3;$$

$$a_{\mathrm{c0}_r}^{(1)} = 0{,}358;\quad a_{\mathrm{s0}_r}^{(1)} = 0;\quad a_{\mathrm{c1}_r}^{(1)} = 0{,}358;\quad a_{\mathrm{s1}_r}^{(1)} = 0;$$

$$b_{\mathrm{c1}_r}^{(1)} = -0{,}67;\quad b_{\mathrm{s1}_r}^{(1)} = 0, \qquad r = 2;\ 4\,.$$

Алгоритм фильтрации (19.6) для многокаскадного вещественного векторного ЦФ ($L = 4$), эквивалентного скалярному комплексному фильтру 6-го порядка, конкретизируется следующим образом:

$$V_{0\mathrm{c}}[n] = X_{\mathrm{c}}[n];\quad V_{0\mathrm{s}}[n] = X_{\mathrm{s}}[n];$$

$$V_{1\mathrm{c}}[n] = a_{\mathrm{c0}_1}^{(2)} V_{0\mathrm{c}}[n] + a_{\mathrm{c1}_1}^{(2)} V_{0\mathrm{c}}[n-1] + a_{\mathrm{c2}_1}^{(2)} V_{0\mathrm{c}}[n-2] -$$

$$- a_{\mathrm{s0}_1}^{(2)} V_{0\mathrm{s}}[n] - a_{\mathrm{s1}_1}^{(2)} V_{0\mathrm{s}}[n-1] - a_{\mathrm{s2}_1}^{(2)} V_{0\mathrm{s}}[n-2] -$$

$$- b_{\mathrm{c1}_1}^{(2)} V_{1\mathrm{c}}[n-1] - b_{\mathrm{c2}_1}^{(2)} V_{1\mathrm{c}}[n-2] + b_{\mathrm{s1}_1}^{(2)} V_{1\mathrm{s}}[n-1] + b_{\mathrm{s2}_1}^{(2)} V_{1\mathrm{s}}[n-2];$$

$$V_{1\mathrm{s}}[n] = a_{\mathrm{c0}_1}^{(2)} V_{0\mathrm{s}}[n] + a_{\mathrm{c1}_1}^{(2)} V_{0\mathrm{s}}[n-1] + a_{\mathrm{c2}_1}^{(2)} V_{0\mathrm{s}}[n-2] +$$

$$+ a_{\mathrm{s0}_1}^{(2)} V_{0\mathrm{c}}[n] + a_{\mathrm{s1}_1}^{(2)} V_{0\mathrm{c}}[n-1] + a_{\mathrm{s2}_1}^{(2)} V_{0\mathrm{c}}[n-2] -$$

$$- b_{\mathrm{c1}_1}^{(2)} V_{1\mathrm{s}}[n-1] - b_{\mathrm{c2}_1}^{(2)} V_{1\mathrm{s}}[n-2] - b_{\mathrm{s1}_1}^{(2)} V_{1\mathrm{c}}[n-1] - b_{\mathrm{s2}_1}^{(2)} V_{1\mathrm{c}}[n-2];$$

$$V_{2\mathrm{c}}[n] = a_{\mathrm{c0}_2}^{(1)} V_{1\mathrm{c}}[n] + a_{\mathrm{c1}_2}^{(1)} V_{1\mathrm{c}}[n-1] - a_{\mathrm{s0}_2}^{(1)} V_{1\mathrm{s}}[n] - a_{\mathrm{s1}_2}^{(1)} V_{1\mathrm{s}}[n-1] -$$

$$- b_{\mathrm{c1}_2}^{(1)} V_{2\mathrm{c}}[n-1] + b_{\mathrm{s1}_2}^{(1)} V_{2\mathrm{s}}[n-1];$$

$$V_{2\mathrm{s}}[n] = a_{\mathrm{c0}_2}^{(1)} V_{1\mathrm{s}}[n] + a_{\mathrm{c1}_2}^{(1)} V_{1\mathrm{s}}[n-1] + a_{\mathrm{s0}_2}^{(1)} V_{1\mathrm{c}}[n] + a_{\mathrm{s1}_2}^{(1)} V_{1\mathrm{c}}[n-1] -$$

$$- b_{\mathrm{c1}_2}^{(1)} V_{2\mathrm{s}}[n-1] - b_{\mathrm{s1}_2}^{(1)} V_{2\mathrm{c}}[n-1];$$

$$V_{3\mathrm{c}}[n] = a_{\mathrm{c0}_3}^{(2)} V_{2\mathrm{c}}[n] + a_{\mathrm{c1}_3}^{(2)} V_{2\mathrm{c}}[n-1] + a_{\mathrm{c2}_3}^{(2)} V_{2\mathrm{c}}[n-2] -$$

$$- a_{\mathrm{s0}_3}^{(2)} V_{2\mathrm{s}}[n] - a_{\mathrm{s1}_3}^{(2)} V_{2\mathrm{s}}[n-1] - a_{\mathrm{s2}_3}^{(2)} V_{2\mathrm{s}}[n-2] -$$

$$- b_{\mathrm{c1}_3}^{(2)} V_{3\mathrm{c}}[n-1] - b_{\mathrm{c2}_3}^{(2)} V_{3\mathrm{c}}[n-2] + b_{\mathrm{s1}_3}^{(2)} V_{3\mathrm{s}}[n-1] + b_{\mathrm{s2}_3}^{(2)} V_{3\mathrm{s}}[n-2];$$

$$V_{3\mathrm{s}}[n] = a_{\mathrm{c0}_3}^{(2)} V_{2\mathrm{s}}[n] + a_{\mathrm{c1}_3}^{(2)} V_{2\mathrm{s}}[n-1] + a_{\mathrm{c2}_3}^{(2)} V_{2\mathrm{s}}[n-2] +$$

$$+a^{(2)}_{s0_3}V_{2c}[n]+a^{(2)}_{s1_3}V_{2c}[n-1]+a^{(2)}_{s2_3}V_{2c}[n-2]-$$

$$-b^{(2)}_{c1_3}V_{3s}[n-1]-b^{(2)}_{c2_3}V_{3s}[n-2]-b^{(2)}_{s1_3}V_{3c}[n-1]-b^{(2)}_{s2_3}V_{3c}[n-2];$$

$$V_{4c}[n]=a^{(1)}_{c0_4}V_{3c}[n]+a^{(1)}_{c1_4}V_{3c}[n-1]-a^{(1)}_{s0_4}V_{3s}[n]-a^{(1)}_{s1_4}V_{3s}[n-1]-$$

$$-b^{(1)}_{c1_4}V_{4c}[n-1]+b^{(1)}_{s1_4}V_{4s}[n-1];$$

$$V_{4s}[n]=a^{(1)}_{c0_4}V_{3s}[n]+a^{(1)}_{c1_4}V_{3s}[n-1]+a^{(1)}_{s0_4}V_{3c}[n]+a^{(1)}_{s1_4}V_{3c}[n-1]-$$

$$-b^{(1)}_{c1_4}V_{4s}[n-1]-b^{(1)}_{s1_4}V_{4c}[n-1];$$

$$Y_c[n]=V_{4c}[n];\quad Y_s[n]=V_{4s}[n];\qquad Y[n]=\sqrt{Y_c^2[n]+Y_s^2[n]},$$

где квадратурные компоненты комплексной огибающей входного ЛЧМ-сигнала определяется выражениями (19.12) при $X_m=1$, $\Delta W_н=-0{,}4$.

Для получения квазистатической АЧХ примем $V_1=10^{-5}$, а динамической — $V_1=5\cdot10^{-4}$. Согласно (19.11) крутизна частотно-временной характеристики ЛЧМ-сигнала $S_1=V_1f_д^2$ ($S_1=10^9$ Гц/с для квазистатической и $S_1=5\cdot10^{10}$ Гц/с для динамической АЧХ).

При моделировании рассчитываются зависимости $Y[n]$ и $W=\Delta W_н+V_1n$, затем подстановкой результата обращения второй из них $[n(W)=(W-\Delta W_н)/V_1]$ в первую находим АЧХ фильтра $A(W)=Y[n(W)]$.

Результаты моделирования представлены на рис.19.6 в виде квазистатической и динамической АЧХ комплексного рекурсивного ЦФ.

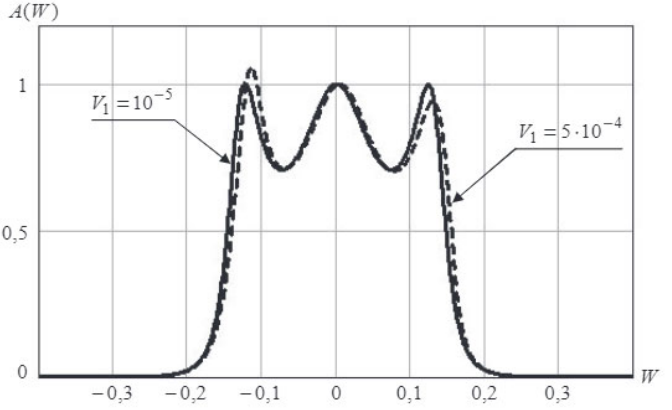


Рис.19.6. Результаты моделирования характериографа в примере 19.4: квазистатическая (при $V_1=10^{-5}$) и динамическая (при $V_1=5\cdot10^{-4}$) АЧХ ЦФ

Рассчитанная по формулам (16.17) — (16.20) статическая АЧХ комплексного ЦФ (см. рис.5.11) практически не отличается от квазистатической, полученной с по-

мощью характериографа (непрерывная линия на рис.19.6). Динамическая АЧХ, изображённая на рис.19.6 пунктиром, имеет заметные отличия, зависящие от крутизны частотно-временной характеристики ЛЧМ-сигнала (видна деформация динамической амплитудно-частотной характеристики, выражающаяся в перекосе горбов).

Пример 19.5. Для скалярного комплексного рекурсивного ЦФ сложной (каскадной) структуры 14-го порядка, спроектированного в примере 16.10, методом моделирования найти квазистатическую и динамическую АЧХ •.

Здесь мы не станем заменять скалярный комплексный рекурсивный ЦФ эквивалентным вещественным двухкоординатным фильтром, как это было сделано в двух предыдущих примерах, а воспользуемся для моделирования алгоритмом (19.5), который в данном случае является скалярным комплексным и конкретизируется следующим образом:

$$\begin{cases} V_0[n] = \{X_{\text{c}}[n] + jX_{\text{s}}[n]\}K; \\ V_r[n] = V_{r-1}[n] + A_r V_{r-1}[n-1] - B_r V_r[n-1], \quad r = \overline{1,\ 14}; \\ Y[n] = |V_{14}[n]|, \end{cases}$$

где коэффициенты алгоритма $A_r = -z_{0r}$, $B_r = -z_{pr}$ $\left(r = \overline{1,\ 14}\right)$, а квадратурные компоненты комплексной огибающей входного ЛЧМ-сигнала определяется выражениями (19.12) при $X_m = 1$, $\Delta W_{\text{н}} = -0{,}5$.

Нули z_{0r} и полюсы z_{pr} $\left(r = \overline{1,\ 14}\right)$ передаточной функции $H(z)$, а также нормирующий множитель K скалярного комплексного рекурсивного ЦФ получены в примере 16.10 при синтезе фильтра.

Для нахождения квазистатической АЧХ примем $V_1 = 10^{-5}$, а динамической — $V_1 = 10^{-4}$. Согласно (19.11) крутизна частотно-временной характеристики ЛЧМ-сигнала $S_1 = V_1 f_{\text{д}}^2$ ($S_1 = 2{,}25 \cdot 10^9$ Гц/с для квазистатической и $S_1 = 2{,}25 \cdot 10^{10}$ Гц/с для динамической АЧХ).

При моделировании рассчитываются зависимости $Y[n]$ и $W = \Delta W_{\text{н}} + V_1 n$, затем подстановкой результата обращения второй из них $[n(W) = (W - \Delta W_{\text{н}})/V_1]$ в первую получаем АЧХ фильтра $A(W) = Y[n(W)]$.

Результаты моделирования представлены на рис.19.7 в виде квазистатической и динамической АЧХ комплексного рекурсивного ЦФ.

АЧХ фильтра, рассчитанная по формуле (см. пример 16.10, рис.16.26,*а*)

$$A(W) = K \frac{\prod_{i=1}^{14} \left|1 - \rho_{0i}\, e^{j\varphi_{0i}} e^{-j2\pi W}\right|}{\prod_{i=1}^{14} \left|1 - \rho_{pi}\, e^{j\varphi_{pi}} e^{-j2\pi W}\right|},$$

практически не отличается от квазистатической, полученной с помощью характериографа (непрерывная линия на рис.19.7). Динамическая АЧХ, изображённая на рис.19.7 пунктиром, имеет заметные отличия, зависящие от крутизны частотно-временной характеристики ЛЧМ-сигнала.

• См. также примеры 17.4 и 18.4.

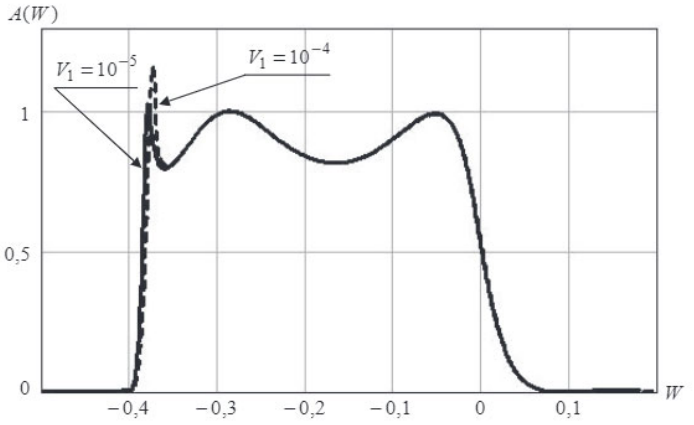


Рис.19.7. Результаты моделирования характериографа в примере 19.5: квазистатическая (при $V_1 = 10^{-5}$) и динамическая (при $V_1 = 10^{-4}$) АЧХ комплексного ЦФ

Динамическая амплитудно-частотная характеристика отличается от квазистатической наиболее существенно на тех участках частотной шкалы, где АЧХ формируется более узкополосными каскадами ЦФ, т.е. каскадами, модули полюсов которых близки к единице (см. пример 16.10).

Из рассмотренных примеров видно, что динамическая амплитудно-частотная характеристика фильтра несколько смещается по оси частот относительно статической. Величина смещения определяется крутизной частотно-временной характеристики ЛЧМ-сигнала, а направление — знаком (при $S_1 > 0$ вправо, а при $S_1 < 0$ влево). Кроме того, происходит некоторое увеличение ширины полосы пропус-кания ЦФ. В примерах 19.1 — 19.5 величина S_1 специально подбиралась такой, чтобы смещение динамической АЧХ и её деформация были сравнительно небольшими.

19.3. Моделирование переходных процессов в цифровых фильтрах

Переход системы из одного установившегося (стационарного) состояния в другое называется переходным (нестационарным) процессом, а время этого перехода — длительностью переходного процесса. Работа всех электронных устройств, предназначенных для обработки сигналов, связана с переходными процессами. Стационарное состояние линейных фильтров бывает двух типов:

- выходной сигнал (в том числе и дискретный) имеет постоянное значение;
- выходной сигнал является синусоидой (в том числе и дискретной) с постоянными амплитудой, частотой и начальной фазой.

Это обстоятельство определяет вид входного сигнала при моделировании переходных процессов в ЦФ. Алгоритмы моделирования переходных процессов в зависимости от типа цифрового фильтра (вещественный или комплексный, скалярный или векторный, простой или сложной структуры) описываются выражениями (19.1), (19.2), (19.5), (19.6) соответственно.

Пример 19.6. Для скалярного вещественного нерекурсивного цифрового ФНЧ простой структуры 100-го порядка, спроектированного в примере 12.6, методом моделирования определить переходные процессы при подаче на вход единичного скачка и синусоидального сигнала •.

Моделирование осуществим с использованием системы компьютерной математики Mathcad по алгоритму (19.1), где

$$H(z)=\sum_{k=0}^{100} a_k\, z^{-k}\,.$$

Используем коэффициенты ЦФ a_k $\left(k=\overline{0,100}\right)$, рассчитанные в примере 12.6.

Входные воздействия формируем по следующим алгоритмам:

$$x[n]=X[n],$$

где

$$X[n]=\begin{cases}0, & n<50;\\ 1, & n\ge 50\end{cases}$$

для единичного скачка и

$$x[n]=X[n]\cos(2\pi W n)$$

для синусоидального сигнала, где $W=f/f_д$ — нормированная частота входной синусоиды (выбрана частота $f=500$ Гц).

Результаты моделирования представлены на рис.19.8 и 19.9 в виде временных диаграмм входного и выходного сигналов ••.

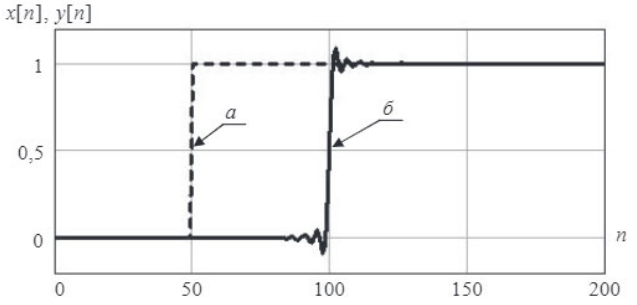


Рис.19.8. Сигналы на входе (*а*) и на выходе (*б*) нерекурсивного цифрового ФНЧ в примере 19.6 при скачкообразном воздействии

• См. также примеры 17.1, 18.1 и 19.1.

•• Реализации получены в виде отсчётов дискретных сигналов $x[n]$ и $y[n]$. Ввиду малости шага дискретизации, на рисунках временные диаграммы представлены их огибающими.

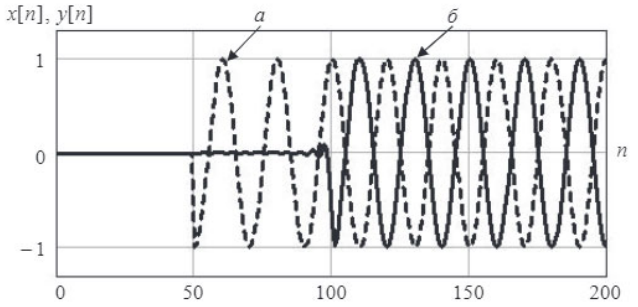


Рис.19.9. Сигналы на входе (*а*) и на выходе (*б*) нерекурсивного цифрового ФНЧ в примере 19.6 при синусоидальном воздействии на частоте 500 Гц

Как видно из рис.19.8 и 19.9, запаздывание реакции ЦФ на входное воздействие составляет 50 тактов (шагов) дискретизации $T = 1/f_д$, что соответствует теоретическому значению группового времени запаздывания $\tau = MT/2$ для нерекурсивного ЦФ 100-го порядка с линейной ФЧХ (см. гл.5). Сам переходный процесс длится примерно 2,5 такта дискретизации (при верхней граничной частоте полосы пропускания ФНЧ $f_п = 2 \cdot 10^3$ Гц время установления составляет $t_{уст} = 0{,}5/f_п = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ с, что соответствует $2{,}5T = 2{,}5/f_д$).

На рис.19.8 видны осцилляции (высокочастотные выбросы) в начале и в конце переходного процесса, величина максимального выброса составляет 8,7 % от амплитуды скачка. Осцилляции $y[n]$ наблюдаются также на рис.19.8 при $n = \overline{90,\ 100}$.

Пример 19.7. Для скалярного вещественного полосового рекурсивного ЦФ сложной (каскадной) структуры 12-го порядка, спроектированного в примере 13.22, методом моделирования определить переходный процесс по огибающей при подаче на вход синусоидального сигнала•.

Моделирование осуществим с использованием системы компьютерной математики Mathcad по алгоритмам (19.5). Передаточная функция ЦФ имеет вид

$$H(z) = a_0 \prod_{r=1}^{3} \frac{a_{0r} + a_{1r} z^{-1} + a_{2r} z^{-2}}{1 + b_{1r} z^{-1} + b_{2r} z^{-2}} \frac{\overline{a}_{0r} + \overline{a}_{1r} z^{-1} + \overline{a}_{2r} z^{-2}}{1 + \overline{b}_{1r} z^{-1} + \overline{b}_{2r} z^{-2}},$$

коэффициенты которой a_0, a_{0r}, a_{1r}, a_{2r}, b_{1r}, b_{2r}, $\overline{a}_{0r}$, $\overline{a}_{1r}$, $\overline{a}_{2r}$, $\overline{b}_{1r}$, $\overline{b}_{2r}$ $\left(r = \overline{1,\ 3}\right)$ получены в примере 13.22.

Входное воздействие формируем по следующему алгоритму:

$$x[n] = X[n] \cos(2\pi W n),$$

где

$$X[n] = \begin{cases} 0, & n < 50; \\ 1, & n \geq 50; \end{cases}$$

• См. также примеры 17.2, 18.2 и 19.2.

$W = f/f_д$ — нормированная частота входной синусоиды.

Для получения огибающей требуется ещё квадратурный канал (см. рис.19.2,*а*), в котором входной сигнал формируется по алгоритму

$$\hat{x}[n] = X[n]\sin(2\pi W n).$$

Огибающая выходного сигнала вычисляется по формуле (19.16).

Результаты моделирования представлены на рис.19.10 и 19.11 в виде временных диаграмм огибающих входного (пунктирная) и выходного (сплошная линия) сигналов ЦФ при $W = 0{,}3$ и $W = 0{,}307$, т.е. для частот $f = 21000$ Гц и $f = 21500$ Гц соответственно.

Из рисунков видно, что переходный процесс по огибающей имеет «классический» характер с небольшими осцилляциями вокруг установившегося значения. Длительность переходного процесса между уровнями 0,1 и 0,9 составляет 30 тактов (шагов) дискретизации, т.е. $t_{уст} = 30/f_д = 4{,}286\cdot10^{-4}$ с, что соответствует теоретической оценке длительности $t_{уст} = a/\Delta f$ при $a = 0{,}857$, где Δf — ширина полосы пропускания фильтра; $a = 0{,}5$ — 0,9 — коэффициент, зависящий от формы АЧХ. Максимальный выброс при осцилляциях составляет 17,3 % от установившегося значения.

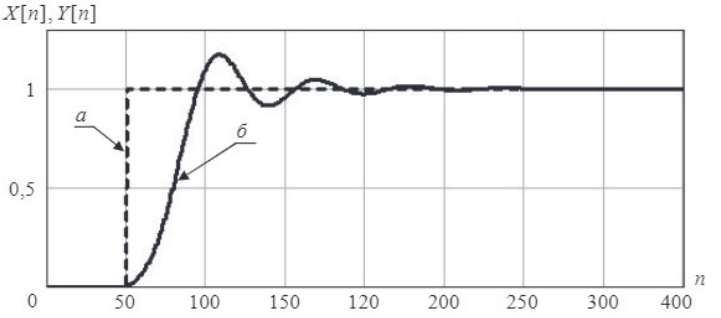


Рис.19.10. Огибающие сигналов на входе (*а*) и на выходе (*б*) рекурсивного полосового ЦФ в примере 19.7 при синусоидальном воздействии на частоте 21000 Гц

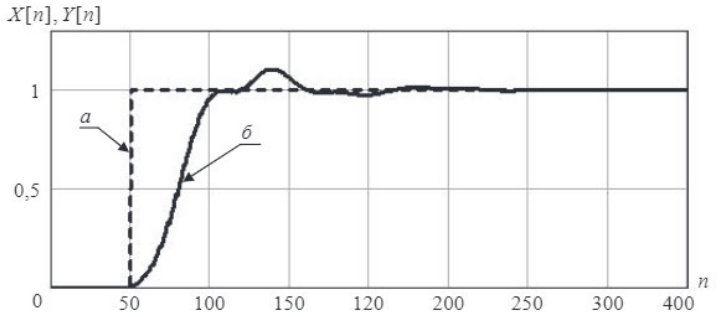


Рис.19.11. Огибающие сигналов на входе (*а*) и на выходе (*б*) рекурсивного полосового ЦФ в примере 19.7 при синусоидальном воздействии на частоте 21500 Гц

Переходный процесс, график которого представлен на рис.19.11, соответствует случаю, когда частота воздействия не совпадает с центральной частотой полосы пропускания ЦФ. Здесь по сравнению с переходным процессом на рис.19.10 характер осцилляций вокруг установившегося значения отличается, что свойственно многокаскадным фильтрам.

Пример 19.8. Для скалярного комплексного нерекурсивного ЦФ простой структуры 100-го порядка, спроектированного в примере 15.1, методом цифрового моделирования определить переходный процесс по огибающей при подаче на вход синусоидального сигнала •.

Заменяя скалярный комплексный нерекурсивный ЦФ эквивалентным двухкоординатным векторным фильтром, моделирование осуществим с использованием системы компьютерной математики Mathcad по алгоритму (19.2), в котором матрица передаточных функций имеет вид

$$\mathbf{H}(z)=\begin{pmatrix} A_{\mathrm{c}}(z^{-1}) & -A_{\mathrm{s}}(z^{-1}) \\ A_{\mathrm{s}}(z^{-1}) & A_{\mathrm{c}}(z^{-1}) \end{pmatrix},$$

где

$$A_{\mathrm{c}}(z^{-1})=\sum_{k=0}^{100} a_{\mathrm{c}k}z^{-k}; \qquad A_{\mathrm{s}}(z^{-1})=\sum_{k=0}^{100} a_{\mathrm{s}k}z^{-k}.$$

Коэффициенты комплексного ЦФ $a_{\mathrm{c}k}$ и $a_{\mathrm{s}k}$ $\left(k=\overline{0,100}\right)$ получены в примере 15.1.

Алгоритм фильтрации (19.2) конкретизируется следующим образом:

$$\begin{cases} Y_{\mathrm{c}}[n]=\sum\limits_{k=0}^{100} a_{\mathrm{c}k}\,X_{\mathrm{c}}[n-k]-\sum\limits_{k=0}^{100} a_{\mathrm{s}k}\,X_{\mathrm{s}}[n-k]; \\ Y_{\mathrm{s}}[n]=\sum\limits_{k=0}^{100} a_{\mathrm{c}k}\,X_{\mathrm{s}}[n-k]+\sum\limits_{k=0}^{100} a_{\mathrm{s}k}\,X_{\mathrm{c}}[n-k], \end{cases}$$

где квадратурные компоненты комплексной огибающей входного сигнала определяются выражениями

$$\begin{cases} X_{\mathrm{c}}[n]=X[n]\cos(2\pi Wn); \\ X_{\mathrm{s}}[n]=X[n]\sin(2\pi Wn); \end{cases}$$

$$X[n]=\begin{cases} 0, & n<50; \\ 1, & n\ge 50; \end{cases}$$

$W=(f-f_0)/f_{\text{д}}$ — нормированная расстройка частоты входного сигнала относительно опорной частоты f_0, принятой для метода комплексной огибающей.

Вещественная огибающая выходного сигнала вычисляется по формуле

$$Y[n]=\sqrt{Y_{\mathrm{c}}^2[n]+Y_{\mathrm{s}}^2[n]}.$$

Результаты моделирования представлены на рис.19.12 и 19.13 в виде временных диаграмм огибающих входного (пунктирная) и выходного (сплошная линия) сигналов ЦФ при $W=0$ и $W=-0{,}133$, т.е. для частот $f=f_0=38$ МГц и $f=36$ МГц соответственно.

• См. также примеры 17.3, 18.3 и 19.3.

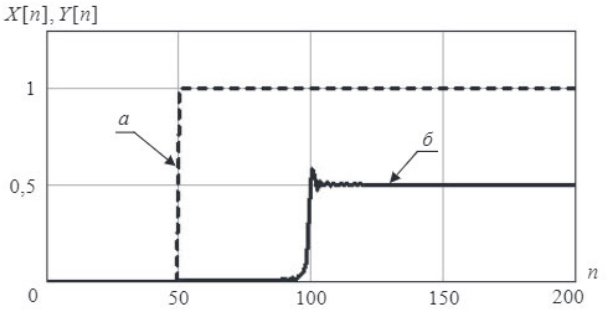


Рис.19.12. Огибающие сигналов на входе (*а*) и на выходе (*б*) нерекурсивного ЦФ в примере 19.8 при синусоидальном воздействии на частоте 38 МГц

Как видно из рис.19.12 и 19.13, запаздывание реакции ЦФ на входное воздействие составляет 50 тактов (шагов) дискретизации $T = 1/f_д$, что соответствует теоретическому значению группового времени запаздывания $\tau = MT/2$ для нерекурсивного ЦФ 100-го порядка с линейной ФЧХ (см. гл.5). Сам переходный процесс длится примерно 3 такта дискретизации, т.е. $t_{уст} = 2 \cdot 10^{-7}$ с.

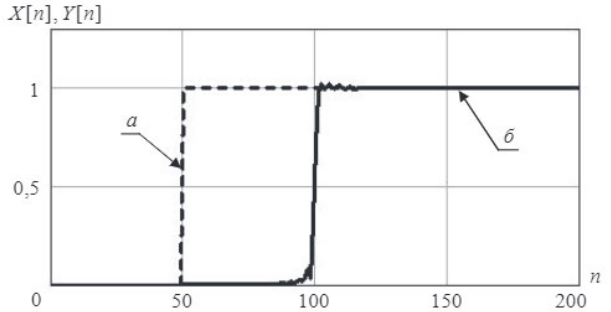


Рис.19.13. Огибающие сигналов на входе (*а*) и на выходе (*б*) нерекурсивного ЦФ в примере 19.8 при синусоидальном воздействии на частоте 36 МГц

На рис.19.12 и 19.13 видны осцилляции (высокочастотные выбросы). Величина максимального выброса составляет 15,9 % от амплитуды скачка при частоте входного сигнала 38 МГц и 2,3 % при частоте 36 МГц.

Пример 19.9. Для скалярного комплексного рекурсивного ЦФ сложной (каскадной) структуры, спроектированного в примере 16.9, методом моделирования определить переходный процесс по огибающей при подаче на вход синусоидального сигнала.

Моделирование осуществим с использованием системы компьютерной математики Mathcad по алгоритму (19.6), в котором матрицы передаточных функций блоков комплексных ЦФ второго и первого порядков описаны при решении примера 19.4.

Квадратурные компоненты комплексной огибающей входного сигнала определяются выражениями

$$\begin{cases} X_c[n] = X[n]\cos(2\pi W n); \\ X_s[n] = X[n]\sin(2\pi W n); \end{cases}$$

$$X[n] = \begin{cases} 0, & n < 50; \\ 1, & n \geq 50, \end{cases}$$

где $W = (f - f_0)/f_д$ — нормированная расстройка частоты входного сигнала относительно опорной частоты f_0, принятой для метода комплексной огибающей.

Вещественная огибающая выходного сигнала вычисляется по формуле

$$Y[n] = \sqrt{Y_c^2[n] + Y_s^2[n]}.$$

Результаты моделирования представлены на рис.19.14 и 19.15 в виде временных диаграмм огибающих входного (пунктирная) и выходного (сплошная линия) сигналов ЦФ при $W = 0$ и $W = 0{,}075$, т.е. для частот $f = f_0 = 30$ МГц и $f = 30{,}75$ МГц соответственно.

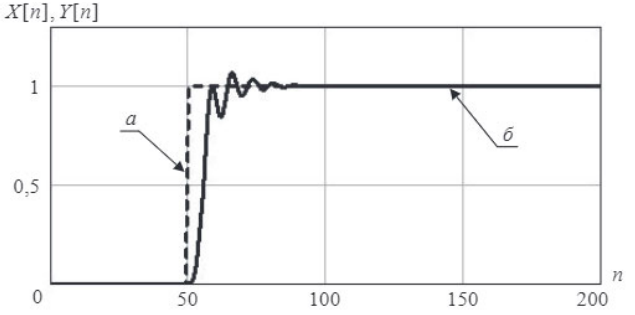


Рис.19.14. Огибающие сигналов на входе (*а*) и на выходе (*б*) рекурсивного ЦФ в примере 19.9 при синусоидальном воздействии на частоте 30 МГц

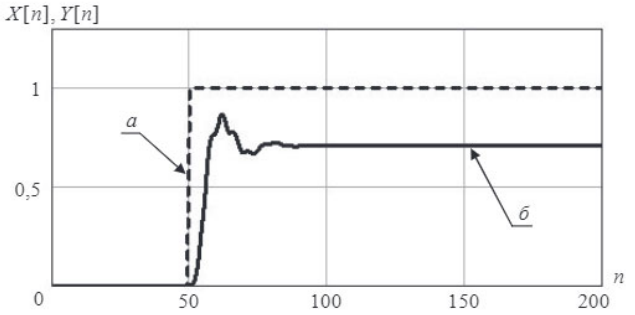


Рис.19.15. Огибающие сигналов на входе (*а*) и на выходе (*б*) рекурсивного ЦФ в примере 19.9 при синусоидальном воздействии на частоте 30,75 МГц

На рис.19.14 и 19.15 видны осцилляции (высокочастотные выбросы). Величина максимального выброса составляет 6,4 % от амплитуды скачка при частоте входного сигнала 30 МГц и 10,1 % при частоте 30,75 МГц. Сам переходный процесс длится примерно 6 тактов дискретизации, т.е. $t_{\text{уст}} = 6 \cdot 10^{-7}$ с.

Пример 19.10. Для скалярного комплексного рекурсивного ЦФ сложной (каскадной) структуры 14-го порядка, спроектированного в примере 16.10, методом моделирования определить переходный процесс по огибающей при подаче на вход синусоидального сигнала •.

Здесь мы не станем заменять скалярный комплексный рекурсивный ЦФ эквивалентным вещественным двухкоординатным фильтром, как это было сделано в примерах 19.8 и 19.9, а воспользуемся для моделирования алгоритмом (19.5), который в данном случае является скалярным комплексным и конкретизируется следующим образом (см. пример 19.5):

$$\begin{cases} V_0[n] = \{X_{\text{c}}[n] + j\,X_{\text{s}}[n]\}K; \\ V_r[n] = V_{r-1}[n] + A_r\,V_{r-1}[n-1] - B_r\,V_r[n-1], \quad r = \overline{1,\,14}; \\ Y[n] = \left|V_{14}[n]\right|, \end{cases}$$

где коэффициенты алгоритма $A_r = -z_{0r}$, $B_r = -z_{pr}$ $\left(r = \overline{1,\,14}\right)$. Нули z_{0r} и полюсы z_{pr} $\left(r = \overline{1,\,14}\right)$ передаточной функции $H(z)$, а также нормирующий множитель K скалярного комплексного рекурсивного ЦФ получены в примере 16.10 при синтезе фильтра.

Квадратурные компоненты комплексной огибающей входного сигнала, как и в примерах 19.8 и 19.9, определяются выражениями

$$\begin{cases} X_{\text{c}}[n] = X[n]\cos(2\pi W n); \\ X_{\text{s}}[n] = X[n]\sin(2\pi W n); \end{cases}$$

$$X[n] = \begin{cases} 0, & n < 50; \\ 1, & n \geq 50, \end{cases}$$

где $W = (f - f_0)/f_{\text{д}}$ — нормированная расстройка частоты входного сигнала относительно опорной частоты f_0, принятой для метода комплексной огибающей.

Вещественная огибающая выходного сигнала вычисляется по формуле

$$Y[n] = \sqrt{Y_{\text{c}}^2[n] + Y_{\text{s}}^2[n]}\,.$$

Результаты моделирования представлены на рис.19.16 и 19.17 в виде временных диаграмм огибающих входного (пунктирная) и выходного (сплошная линия) сигналов ЦФ при $W = 0$ и $W = -0{,}28$, т.е. для частот $f = f_0 = 38$ МГц и $f = 33{,}8$ МГц соответственно.

На рис.19.16 и 19.17 видны осцилляции (высокочастотные выбросы). Величина максимального выброса составляет 7,6 % от амплитуды скачка при частоте входного сигнала 33,8 МГц.

• См. также примеры 17.4, 18.4 и 19.5.

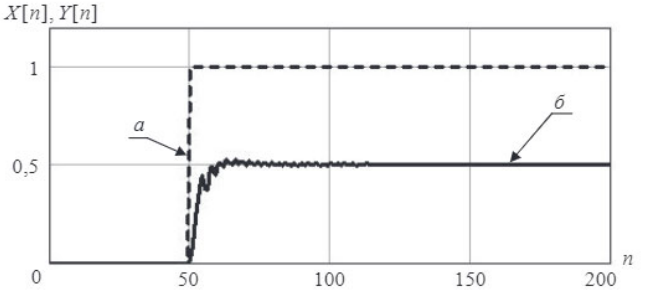


Рис.19.16. Огибающие сигналов на входе (*а*) и на выходе (*б*) рекурсивного ЦФ в примере 19.10 при синусоидальном воздействии на частоте 38 МГц

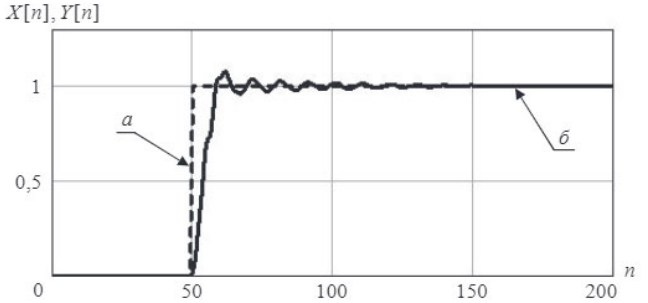


Рис.8.17. Огибающие сигналов на входе (*а*) и на выходе (*б*) рекурсивного ЦФ в примере 19.10 при синусоидальном воздействии на частоте 33,8 МГц

Формы переходных характеристик по огибающим на частотах входного сигнала $f = f_0 = 38$ МГц и $f = 33{,}8$ МГц заметно отличаются. В первом случае осцилляции наблюдаются до приближения к установившемуся значению огибающей, а во втором — после. Переходный процесс по огибающей длится примерно 7 тактов дискретизации, т.е. $t_{уст} = 4{,}667 \cdot 10^{-7}$ с.

В примерах 19.3, 19.5, 19.8 и 19.10 осуществлялось моделирование процессов в комплексных ЦФ, предназначенных для ПЧ-трактов изображения телевизионныхго приёмников, собранных по квазипараллельной схеме. В примерах 19.3 и 19.8 рассматривался нерекурсивный комплексный ЦФ простой структуры 100-го порядка, синтезированный в примере 15.1, а в примерах 19.5 и 19.10 — рекурсивный комплексный ЦФ каскадной структуры 14-го порядка, синтезированный в примере 16.10.

Сравнивая результаты, полученные в примерах 16.8 и 19.10 (см. рис.19.12, 19.13, 19.16 и 19.17), можно отметить, что комплексный ЦФ имеет лучшие характеристики при нерекурсивной схеме построения, чем при рекурсивной. То

же самое можно сказать и об амплитудно-частотных характеристиках этих фильтров, полученных при синтезе (ср. рис.15.5 и 16.26), а также с помощью цифровых моделей характериографа (ср. рис.19.5 и 19.7).

Рассмотренные алгоритмы моделирования процессов цифровой фильтрации [см. выражения (19.1), (19.2), (19.5) и (19.6)] являются универсальными. Они позволяют решать весь спектр задач моделирования ЦФ различных типов: вещественных и комплексных, скалярных и векторных, простой и каскадной (сложной) структуры, имеющих наибольшее практическое значение.

Небольшая модификация этих алгоритмов позволит моделировать также другие типы ЦФ сложной структуры, у которых имеются параллельно включённые блоки, а также соединение блоков с обратной связью. Универсальные алгоритмы для ЦФ подобных структур разработать невозможно •, поэтому их следует составлять по укрупнённым структурным схемам [1] конкретных ЦФ.

Цифровое моделирование позволяет эффективно решать нелинейные задачи, рассмотренные в гл.8. Например, задачи исследования прохождения сигналов в смеси с помехами через ПЧ-тракт приёмного устройства и детектор (демодулятор) при различных расстройках сигнала относительно номинальной частоты. При этом возможно решение статистических задач путём набора ансамбля реализаций выходного процесса и его статистической обработки.

Особенно эффективным является цифровое моделирование различных устройств радиоавтоматики (систем автоматической регулировки усиления, автоматической подстройки частоты и фазы), работающих в нелинейном режиме, в том числе при воздействии шумовых процессов.

Наиболее полно алгоритмы цифрового моделирование радиотехнических устройств и систем рассмотрены в [29].

Краткие итоги

1. Следует различать задачи цифрового моделирования аналоговых систем и цифровой обработки сигналов. Методы цифрового моделирования аналоговых линейных инерционных стационарных систем базируются на представлении реального импульсного элемента (ИЭ) совокупностью идеального импульсного элемента (ИИЭ) и интерполирующего фильтра (ИФ), который в дальнейшем объединяется с моделируемой аналоговой системой, образуя приведённую непрерывную часть (ПНЧ). Дискретизацией ПНЧ получают линейный стационарный дискретный фильтр с передаточной функцией $H(z)$, который служит цифровой моделью линейной аналоговой системы [1, 4, 5, 29].

При цифровой обработке сигналов задача несколько упрощается. Поскольку входной сигнал $x[n]$ является дискретным, реакция $y[n]$ линейного стационарного цифрового фильтра с передаточной функцией $H(z)$, описываемая разностным уравнением (19.1), отображает алгоритм дискретной фильтрации.

• За исключением случая, когда все блоки ЦФ сложной структуры включены параллельно.

2. Универсальные алгоритмы моделирования процессов цифровой фильтрации описываются выражениями (19.1), (19.2), (19.5) и (19.6). Универсальность заключается в том, что они позволяют решать весь спектр задач моделирования ЦФ различных типов: вещественных и комплексных, скалярных и векторных, простой и каскадной (сложной) структуры, имеющих наибольшее практическое значение.

Для ЦФ сложной структуры, содержащих различные типы соединений блоков (каскадной, параллельной и с обратной связью) соответствующие алгоритмы могут быть составлены с учётом передаточных функций блоков и способов их соединения.

3. При настройке аналоговых фильтров применяют характериографы — приборы для измерения амплитудно-частотных характеристик (АЧХ). Цифровые модели характериографа (см. рис.19.2) позволяют определить допустимую крутизну частотно-временной характеристики ЛЧМ-сигнала (см. рис.19.1), вырабатываемого генератором характериографа, а также получить квазистатическую и динамические АЧХ исследуемого ЦФ (см. примеры 19.1 — 19.5).

4. Практическое значение имеет моделирование переходных процессов в ЦФ. При этом на вход цифровой модели подаётся либо скачкообразное изменение входного сигнала, либо скачкообразное изменение огибающей синусоидального сигнала. Цифровые модели позволяют оценить длительность переходного процесса $t_{уст}$, а также его характер — монотонный переход из одного состояния в другое либо наличие затухающих осцилляций вокруг установившегося значения (см. примеры 19.6 — 19.10).

5. В тех случаях, когда аналитические методы не позволяют исследовать систему, цифровое моделирование, несмотря на частный характер получаемых результатов, является универсальным инструментом при решении сложных задач радиоэлектроники и связи, поскольку в значительной мере снимает «проблему сложности» исследуемых систем и устройств (линейных и нелинейных, скалярных и векторных) при сложных входных воздействиях. Наиболее полно алгоритмы цифрового моделирование радиотехнических устройств и систем рассмотрены в [29].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цифровая обработка сигналов является перспективным и быстро развивающимся направлением радиоэлектроники и телекоммуникаций.

Основные проблемы, решение которых необходимо для широкого внедрения ЦОС, следующие:

♦ Разработка эффективных алгоритмов ЦОС, которые позволят существенно сократить требуемый объём вычислительных операций при обработке сигналов. К числу таких алгоритмов, разработанных к настоящему времени, можно отнести алгоритмы БПФ, алгоритмы, основанные на использовании метода комплексных огибающих, а также алгоритмы сжатия данных, применяемые для передачи цифровой информации по спутниковым линиям связи (например, система MPEG-2).

♦ Разработка инженерных методик проектирования устройств ЦОС с заданными техническими характеристиками (например, цифровых фильтров, в том числе комплексных и векторных) и построение на их основе систем автоматизированного проектирования.

♦ Совершенствование элементной базы ЦОС. В настоящее время используются сигнальные процессоры (DSP) и интегральные схемы программируемой логики (ПЛИС), характеристики и параметры которых постоянно совершенствуются. Элементная база ЦОС, как и элементная база всей вычислительной техники, развивается бурными темпами. В ближайшей перспективе можно ожидать появления революционных идей в области построения вычислителей (например, на основе квантовых процессоров).

♦ Расширение областей применения ЦОС. Кроме традиционных областей (связь, радиолокация, радиоуправление, телевидение, автоматика), где обработка сигналов является необходимым условием функционирования системы, ЦОС находит применение во многих новых областях (например, охранные системы, производственно-технологические системы, разведка полезных ископаемых и т.д.).

В данной книге сделана попытка осветить лишь некоторые теоретические вопросы ЦОС и методы проектирования одномерных цифровых фильтров. При этом остались незатронутыми многомерные Z-преобразования, многомерные ДПФ и БПФ, достаточно полное изложение сведений о которых потребовало бы существенного увеличения объёма книги.

Цифровая обработка сигналов, являющаяся перспективным и быстро развивающимся направлением радиоэлектроники и телекоммуникаций, может успешно внедряться в практику при наличии эффективных методов проектирования ЦФ по заданным техническим требованиям, формулируемым в соответствии с особенностями работы тех или иных технических устройств.

Проектирование ЦФ представляет собой решение задачи синтеза, которая по сути своей значительно сложнее задачи анализа. В математическом плане синтез является *обратной задачей*, для которой не всегда имеется разработанный математический аппарат и не всегда имеется решение. В связи с этим синтез осуществляется либо строго математическими методами, либо эвристическими. Последние учитывают результаты решения аналогичных задач, а также опыт, интуицию и «здравый смысл» проектировщика.

В связи с интенсивным развитием компьютерной техники и компьютерных технологий появились пакеты прикладных программ, ориентированных на решение различных задач проектирования технических устройств и систем. Среди них следует отметить системы компьютерной математики Mathcad и MATLAB [53 — 56]. Первая является универсальной, а вторая ориентирована на цифровую обработку сигналов. Однако имеющиеся в ней программные модули разработаны только для *вещественных скалярных* ЦФ. Комплексные и векторные ЦФ в системе MATLAB отсутствуют. В данной монографии сделана попытка восполнить этот пробел. Разработанные методы синтеза комплексных ЦФ целесообразно оформить в виде программных модулей и включить в существующую систему MATLAB.

Одним из перспективных направлений ЦОС может явиться разработка методов синтеза векторных цифровых фильтров, предназначенных для работы в различных многоканальных устройствах.

Важной задачей является также программирование сигнальных процессоров (DSP) для реализации на их основе цифровых фильтров [7]. Построение скалярных как вещественных, так и комплексных ЦФ возможно на современных DSP. Однако целесообразна разработка специализированных DSP, архитектура которых ориентирована на реализацию именно комплексных ЦФ.

Рассмотрим некоторые области применения ЦФ, реализованных на основе временного подхода.

Частотно-избирательные ЦФ используются в устройствах селекции сигналов, где они с успехом заменяют аналоговые фильтры (в диапазоне частот до 10 МГц и более). Это относится, в первую очередь, к приёмным и измерительным системам.

Применение квадратурных преобразователей радиосигналов [18,] позволяет осуществлять частотную селекцию на основе метода комплексной огибающей с использованием комплексных ЦФ, рассмотренных в § 4.6, гл.9, 15, 17 и 18. Такой подход в сочетании с цифровыми методами демодуляции (детектирования) сигналов обеспечивает высокую стабильность характеристик приёмного тракта, малый уровень искажений информационного сигнала, высокую помехоустойчивость. При этом искажения зависят только лишь от разрядности операционных устройств и алгоритма обработки, но не зависят от внешних дестабилизирующих факторов.

Например, в области цифрового массового телевизионного вещания в настоящее время существуют два стандарта передачи сигналов: ATSC (США) и DVB (Европа), особняком стоит стандарт ISDB (Япония). Во всех этих системах

ПЧ-тракт телевизионного приёмника является аналоговым с применением фильтров на поверхностны акустических волнах (ПАВ), а цифровая обработка сигналов начинается после видеодетектора, т.е. на видеочастоте [80]. Замена аналоговых фильтров на ПАВ комплексными ЦФ позволит сделать ПЧ-тракт телевизионного приёмника цифровым, при этом ликвидируются все недостатка, свойственные аналоговым системам, поскольку цифровая обработка сигналов начинается с ПЧ-тракта • (радиотракта).

В радиолокации для оптимальной обработки сигналов широко применяются согласованные линейные фильтры, обеспечивающие максимальное отношение сигнал / шум при приёме сигнала на фоне гауссовских помех. Наибольшее распространение получили согласованные ЦФ нерекурсивного типа, однако находят применение и рекурсивные согласованные ЦФ. При согласованной фильтрации импульсных сигналов с большой базой •• происходит сжатие сигнала во времени, что обеспечивает более высокую точность измерения временных задержек, что важно при измерении дальности.

В задачах спектрального анализа радиосигналов часто используют комплексные согласованные ЦФ для квадратурных компонент, которые дополнены устройствами возведения в квадрат, сумматором и пороговым устройством [15]. По такому принципу строят обнаружители квазигармонического сигнала с известной частотой и неизвестной начальной фазой.

На базе рекурсивных ЦФ реализуют различные шумоподавители, принцип действия которых основан на учёте «тонкой» структуры сигнала. Например, спектр телевизионного видеосигнала имеет дискретную структуру, определяемую частотами развёрток •••, поэтому оптимальным для него является гребенчатый фильтр, подавляющий те участки частотного диапазона, на которых нет спектральных компонент сигнала, обеспечивая тем самым более высокое отношение сигнал / шум. Гребенчатый фильтр довольно просто реализуется на основе рекурсивного ЦФ. Его структура состоит из последовательно включённых блоков с передаточными функциями вида $H(z) = K_0\left(1 + z^{-N}\right)$, где N — число элементов задержки на шаг дискретизации. Реализация аналогового гребенчатого фильтра довольно сложна, к тому же такой фильтр имеет нестабильные характеристики.

Цифровые фильтры используют в составе формирователей сигналов. В многоканальных системах передачи информации с временным и частотным

• Усиление радиосигнала, необходимое для работы аналого-цифрового квадратурного преобразователя (см. § 8.3), при этом осуществляется аналоговым усилителем, поэтому назвать ПЧ-тракт полностью цифровым в этом случае некорректно.

•• Базой импульсного радиосигнала называется произведение ширины спектра на длительность сигнала).

••• Частотный спектр телевизионного видеосигнала содержит постоянную составляющую $(F = 0)$, гармоники строчной $nF_{\text{с}}$ и кадровой (полевой) $mF_{\text{к}}$ частот, а также комбинационные составляющие на частотах $nF_{\text{с}} \pm mF_{\text{к}}$ (n, m – положительные целые числа), группирующиеся вокруг гармоник строчной частоты, образуя дискретные зоны энергии.

разделением каналов решаются две основные задачи: 1) формирование группового сигнала из отдельных канальных сигналов, 2) выделение канальных сигналов из группового. Решение обеих задач связано с частотной селекцией сигналов, успешно решаемой с помощью ЦФ [77]. При этом часто осуществляется также изменение частоты дискретизации, которая для группового сигнала должна быть выше, чем для канальных сигналов [8, 15]. Увеличение частоты дискретизации цифрового сигнала (интерполяция) и уменьшение (децимация) производятся устройствами, называемыми соответственно экспандером и компрессором частоты дискретизации [8, 15]. Обе эти операции требуют формирования спектра дискретного сигнала, что осуществляется с помощью ЦФ.

В системах автоматического регулирования и управления динамические свойства определяются сглаживающими фильтрами, включаемыми в цепи обратной связи. Использование для этой цели цифровых фильтров даёт широкие возможности в плане оптимизации режимов работы систем. В частности, применение адаптивных фильтров позволяет приспосабливать систему к условиям работы при различных динамических воздействиях и помехах. Адаптивные фильтры, реализуемые на микропроцессорах, позволяют оперативно изменять параметры (а в ряде случаев и структуру) ЦФ, настраивая его на оптимальный режим работы системы регулирования (управления).

Линейные фильтры осуществляют разделение аддитивных составляющих сигнала, спектры которых занимают различные частотные диапазоны. В ряде технических приложений возникает задача разделения также мультипликативных составляющих сигнала, спектры которых не перекрываются. Такая задача в принципе не может быть решена методами линейной фильтрации, однако она успешно решается методами нелинейной, так называемой гомоморфной фильтрации [10, 15].

В настоящее время актуальной является задача цифровой обработки изображений и автоматического распознавания объектов. Несмотря на наличие большого числа публикаций, посвящённых этому вопросу, и значительный прогресс в этой области, задача далека от разрешения [12].

Приложение 1

СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ОДНОМЕРНОГО ТРЁХКООРДИНАТНОГО ВЕКТОРНОГО ВЕЩЕСТВЕННОГО СТАЦИОНАРНОГО РЕКУРСИВНОГО ЛИНЕЙНОГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

Структурные схемы одномерных векторных вещественных стационарных рекурсивных линейных ЦФ рассматривались в § 4.7, где в качестве примера детально исследованы двухкоординатные ($R=2$) векторные ЦФ (см. рис.4.9). Следуя приведённой в § 4.7 методике, построим укрупнённую структурную схему трёхкоординатного ($R=3$) векторного ЦФ.

Аналогично уравнениям (4.49), (4.50) и (4.52), полученным при $R=2$, для случая $R=3$ запишем систему операторных разностных уравнений •, которая с учётом обозначений (4.62) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} y_1[n] = A_{11}(z^{-1})\ x_1[n] + A_{12}(z^{-1})\ x_2[n] + A_{13}(z^{-1})\ x_3[n] - \\ \qquad - B_{11}(z^{-1})\ y_1[n] - B_{12}(z^{-1})\ y_2[n] - B_{13}(z^{-1})\ y_3[n]; \\ y_2[n] = A_{21}(z^{-1})\ x_1[n] + A_{22}(z^{-1})\ x_2[n] + A_{23}(z^{-1})\ x_3[n] - \\ \qquad - B_{21}(z^{-1})\ y_1[n] - B_{22}(z^{-1})\ y_2[n] - B_{23}(z^{-1})\ y_3[n]; \\ y_3[n] = A_{31}(z^{-1})\ x_1[n] + A_{32}(z^{-1})\ x_2[n] + A_{33}(z^{-1})\ x_3[n] - \\ \qquad - B_{31}(z^{-1})\ y_1[n] - B_{32}(z^{-1})\ y_2[n] - B_{33}(z^{-1})\ y_3[n]. \end{cases} \tag{П.1}$$

Укрупнённая структурная схема трёхкоординатного вещественного векторного ЦФ, построенная по уравнениям (П.1), изображена на рис.П.1. Она состоит из трёх каналов передачи сигналов, содержащих обратные связи, а также перекрёстные, т.е. межканальные связи (прямые и обратные).

Структурная схема на рис.П.1 соответствует структуре, изображённой в векторно-матричной форме на рис.4.10, которая описывается системой векторно-матричных алгебраических уравнений (4.65) или системой векторно-матричных операторных уравнений

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{A}(z^{-1})\left[\mathbf{I} + \mathbf{B}(z^{-1})\right]^{-1}\mathbf{x}[n]. \tag{П.2}$$

• См. сноску на стр.191.

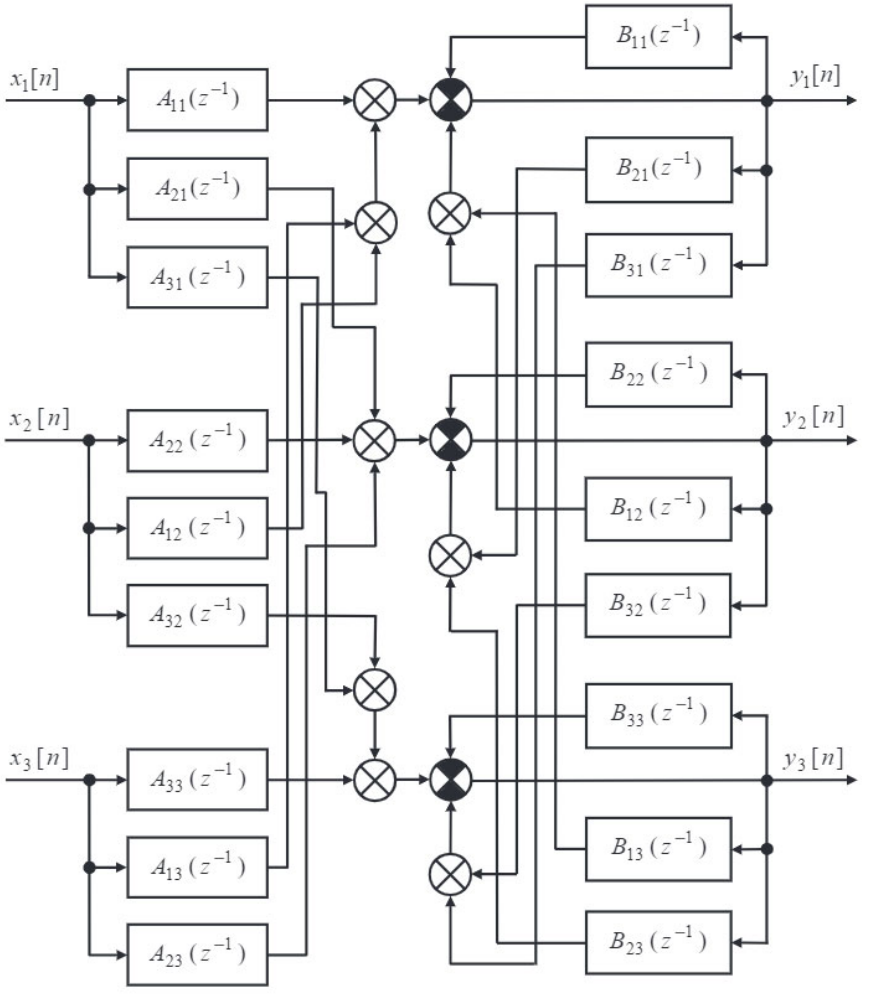


Рис.П.1. Структурная схема одномерного трёхкоординатного векторного вещественного стационарного рекурсивного линейного ЦФ

Из рассмотренных примеров при $R=2$ и $R=3$ видно, что структурная схема векторного вещественного ЦФ существенно усложняется при увеличении числа координат R векторного сигнала $\mathbf{x}[n]$.

Аналогично можно построить укрупнённую структурную схему трёхкоординатного **комплексного** векторного ЦФ. Она будет соответствовать структурной схеме шестикоординатного **вещественного** векторного ЦФ.

Приложение 2

ОСОБЕННОСТИ DSP ФИРМЫ TEXAS INSTRUMENTS (ПЛАТФОРМА C6000)•

Самая мощная в мире платформа C6000 включает в себя две ветви 32-разрядных цифровых сигнальных процессоров (DSP) — с фиксированной точкой и с плавающей точкой. Семейство C62x — процессоры с фиксированной точкой, производительностью от 1200 до 2000 MIPS. Семейство C67x — устройства с плавающей точкой, имеют начальную производительность от 600 MFLOPS. Процессоры C67x — первое семейство DSP, преодолевшее барьер в 1 GFLOPS — один миллиард операций с плавающей точкой в секунду.

Для удовлетворения растущих потребностей технологии в будущем планируется, что платформа C6000 получит развитие с сохранением совместимости по командам до 5000 MIPS для процессоров с фиксированной точкой и до 3 GFLOPS для процессоров с плавающей точкой. Кроме того, планируется существенное удешевление DSP с очень длинным командным словом (ОДКС), новейших аппаратных решений и эффективных средств разработки.

Высокопроизводительную архитектуру имеют как процессоры C62x с фиксированной точкой, так и процессоры C67x с плавающей точкой. DSP C67x имеют совместимость по командам и по выводам с аналогичными процессорами C62x, что позволяет разработчику быстро выполнять прототипы, используя плавающую точку, и легко переходить к процессорам с фиксированной точкой для снижения стоимости изделия при производстве.

Платформа C6000 создаёт новую концепцию разработки цифровых систем, которая предполагает переход от *аппаратно-ориентированной среды* разработки к *программным моделям*, что делает процесс разработки более быстрым, дешёвым и простым. Для поддержки этой новой концепции средства разработки выполнены так, чтобы дать пользователю возможность максимально использовать все преимущества новой ***параллельной архитектуры***. Средства разработки создают удобную для работы среду, которая даёт возможность оптимизировать производительность устройств и минимизирует технические проблемы при разработке аппаратного и программного обеспечения.

Среда разработки включает в себя ультраэффективный C-компилятор, уникальный оптимизатор ассемблерного кода и отладчик.

Применённые Texas Instruments решения позволяют автоматически переводить алгоритмы, написанные пользователем на языке высокого уровня, в программный код, оптимизированный под параллельную структуру процессора. В большинстве случаев автоматический перевод является более правильным решением, так как избавляет разработчика от необходимости задумываться о так-

---

• Процессоры цифровой обработки сигналов фирмы Texas Instruments (платформы C2000, C5000, C6000). // www: scan.ru. E-mail: texas@ scan.ru.

тах конвейера, загрузке модулей и других рутинных вещах. Автоматический компилятор отличается тем, что он не забывает о множестве правил написания кода для высокопараллельных процессоров. В этом заключается новая концепция разработки устройств: дело разработчика — алгоритм, а укладка данного алгоритма в структуру процессора — задача программного обеспечения.

Все DSP платформы C6000 основаны на одном и том же 32-разрядном ядре центрального процессора с архитектурой VelociTI ™ (высокопараллельная и детерминированная архитектура). Архитектура ядра C6000 включает в себя 8 модулей — два умножителя и шесть АЛУ. Все модули максимально независимы, что даёт компилятору и оптимизатору множество комбинаций их использования. На каждом такте процессора выбирается восемь 32-битных RISC-подобных инструкций. Предусмотренная в архитектуре VelociTI ™ упаковка команд позволяет исполнять эти восемь инструкций параллельно, последовательно или параллельно/последовательно. Эта оптимизированная схема существенно снижает размер кода, количество выборок команд и потребление питания.

При добавлении функции плавающей запятой к шести из восьми функциональных модулей из процессора с фиксированной точкой C62x получается процессор с плавающей точкой C67x. При этом система команд процессора C67x — расширение системы команд процессора C62x. Таким образом, код, написанный для процессора C62x, будет выполняться процессором C67x без модификации самого кода.

Процесс реализации алгоритма на платформе C6000 протекает в несколько стадий. Вначале разработчик пишет алгоритм на языке C или на ассемблере, затем компилятор переводит его программу в машинный код с использованием всех возможностей DSP (конвейерная обработка и интеллектуальное нахождение параллелизма в исходной программе). Затем идёт этап оценки производительности программными средствами, что позволяет оценить достигнутые результаты и провести оптимизацию кода без обращения к аппаратному обеспечению. И только следующим шагом является проверка алгоритма на макете устройства или на проверочном модуле.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гадзиковский В.И.** Теоретические основы цифровой обработки сигналов. — М.: Радио и связь, 2004. — 344 с.
2. **Гадзиковский В.И.** Методы проектирования цифровых фильтров. — М.: Горячая линия – Телеком, 2007. — 416 с.
3. **Гадзиковский В.И.** Основы теории и проектирования цифровых фильтров: Учебное пособие для радиотехнических специальностей вузов. — М.: Высшая школа, 1996. — 256 с.
4. **Гадзиковский В.И.** Методы цифрового моделирования радиотехнических систем: Учебное пособие. — Екатеринбург: Изд. Уральского государственного технического университета, 1995. — 182 с.
5. **Гадзиковский В.И.** Цифровое моделирование радиотехнических устройств и систем: Учебное пособие. — Свердловск: Изд. Уральского политехнического института, 1984. — 112 с.
6. **Рабинер Л., Гоулд Б.** Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978. — 848 с.
7. **Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д.** Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. — СПб.: Изд. «Политехника», 1999, — 592 с.
8. **Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н.** Цифровая обработка сигналов: Справочник. — М.: Радио и связь, 1985. — 312 с.
9. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1968. — 720 с.
10. **Оппенгейм А.В., Шафер Р.В.** Цифровая обработка сигналов. — М.: Связь, 1979. — 416 с.
11. **Антонью А.** Цифровые фильтры: Анализ и проектирование. — М.: Радио и связь, 1983. — 320 с.
12. **Доджион Д., Мерсеро Р.** Цифровая обработка многомерных сигналов. — М.: Мир, 1988. — 488 с.
13. **Каппелини В., Константинидис А. Дж., Эмилиани П.** Цифровые фильтры и их применение. — М.: Энергоатомиздат, 1983. —360 с.
14. Цифровые фильтры в электросвязи и радиотехнике/Под ред. **Л.М. Гольденберга.** — М.: Радио и связь, 1982. — 224 с.
15. **Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н.** Цифровая обработка сигналов. — М.: Радио и связь, 1990. — 256 с.

16. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И.** Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981. — 798 с.

17. **Джури Э.** Импульсные системы автоматического регулирования. — М.: Физматгиз, 1963. — 456 с.

18. Цифровые радиоприёмные системы: Справочник / Под ред. **М.И. Жодзишского.** — М.: Радио и связь, 1990. — 208 с.

19. **Побережский В.С.** Цифровые радиоприёмные устройства. — М.: Радио и связь, 1987. — 184 с.

20. Цифровые радионавигационные устройства / Под ред. **В.Б. Смолова.** — М.: Советское радио, 1980. — 288 с.

21. Рекурсивные фильтры на микропроцессорах / Под ред. **А.Г. Остапенко.** — М.: Радио и связь, 1988. — 128 с.

22. **Калабеков Б.А.** Микропроцессоры и их применение в системах передачи и обработки информации. — М.: Радио и связь, 1988. — 368 с.

23. **Тяжев А.И.** Выходные устройства приемников с цифровой обработкой сигналов. — Самара: Изд. «Самарский университет», 1992. — 276 с.

24. **Гоноровский И.С.** Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. — М.: Радио и связь, 1986. — 512 с.

25. **Баскаков С.И.** Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов по спец. «Радиотехника». — М.: Высшая школа, 1988. — 448 с.

26. **Блейхут Р.** Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1989. — 448 с.

27. **Гольденберг Л.М., Левчук Ю.П., Поляк М.Н.** Цифровые фильтры. — М.: Связь, 1974. — 160 с.

28. **Голд Б., Рэйдер Ч.** Цифровая обработка сигналов. — М.: Советское радио, 1973. — 368 с.

29. **Быков В.В.** Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. — М.: Советское радио, 1971. — 326 с.

30. **Евсиков Ю.А., Чапурский В.В.** Преобразование случайных процессов в радиотехнических устройствах. — М.: Высшая школа, 1977. — 264 с.

31. **Евтянов С.И.** Переходные процессы в приёмно-усилительных схемах. — М.: Связьиздат, 1948. — 240 с.

32. **Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.** Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. — М.: Наука, 1980. —976 с.

33. **Бесекерский В.А.** Цифровые автоматические системы. — М.: Наука, 1976. — 576 с.

34. **Левин Б.Р.** Теоретические основы статистической радиотехники, книга первая. — М.: Советское радио, 1966. — 728 с.

35. **Тихонов В.И.** Статистическая радиотехника. — М.: Советское радио, 1966. — 680 с.

36. **Пухальский Г.И., Новосельцева Т.Я.** Цифровые устройства: Учебное пособие для втузов. — СПб.: Политехника, 1996. — 886 с.

37. **Борисов Ю.П.** Математическое моделирование радиосистем: Учебное пособие для вузов. — М.: Советское радио, 1976. — 296 с.

38. **Давенпорт В.Б., Рут В.Л.** Введение в теорию случайных сигналов и шумов. — М.: ИЛ, 1960. — 468 с.

39. **Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф.** Основные математические формулы: Справочник. — Минск: Вышэйшая школа, 1995. — 380 с.

40. **Норенков И.П.** Введение в автоматизированное проектирование технических устройств и систем. — М.: Высшая школа, 1980. — 312 с.

41. Прикладные математические методы анализа в радиотехнике: Учебное пособие для радиотехнических специальностей вузов / Под ред. **Г.В. Обрезкова.** — М.: Высшая школа, 1985. — 343 с.

42. **Каган Б.М.** Электронные вычислительные машины и системы. — М.: Энегоатомиздат, 1985. — 552 с.

43. **Хилбурн Дж., Джулич П.** Микро-ЭВМ и микропроцессоры. — М.: Мир, 1979. — 464 с.

44. **Соучек Б.** Микропроцессоры и микро-ЭВМ. — М.: Советское радио, 1979. — 520 с.

45. Цифровой процессор обработки сигналов с аналоговыми устройствами ввода-вывода / Под ред. **А.А. Ланнэ.** — Л.: Военная академия связи, 1985. — 88 с.

46. **Калиткин Н.Н.** Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.

47. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

48. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 408 с.

49. **Ремез Е.Я.** Основы численных методов чебышевского приближения. — Киев: Наукова думка, 1969. — 712 с.

50. **Ланнэ А.А.** Оптимальный синтез линейных электронных схем. — М.: Связь, 1978. — 336 с.

51. Введение в цифровую фильтрацию / Под ред. **Р. Богнера** и **А. Константинидиса.** — М.: Мир, 1976. — 216 с.

52. **Сергиенко А. Б.** Цифровая обработка сигналов. — СПб.: Питер, 2002. — 608 с.

53. **Дьяконов В.П.** Mathcad 8/2000: Специальный справочник. — СПб.: Питер, 2000. — 592 с.

54. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. MATLAB. Обработка сигналов и изображений: Специальный справочник. — СПб.: Питер, 2002. — 608 с.

55. Дьяконов В.П., Круглов В.В. Математические пакеты расширения MATLAB: Специальный справочник. — СПб.: Питер, 2001. — 480 с.

56. Дьяконов В.П. Simulink 4: Специальный справочник. — СПб.: Питер, 2002. — 528 с.

57. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. — М.: Наука, 1968. — 344 с.

58. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962. — 1100 с.

59. Ту Ю.Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. — М.: Машиностроение, 1964. — 704 с.

60. Мизин И.А., Матвеев А.А. Цифровые фильтры (анализ, синтез, реализация с использованием ЭВМ). — М.: Связь, 1979. — 240 с.

61. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и её применение в связи и управлении. — М.: Связь, 1976. — 496 с.

62. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. — М.: Наука, 1970. — 620 с.

63. Первачёв С.В., Валуев А.А., Чиликин В.М. Статистическая динамика радиотехнических следящих систем. — М.: Советское радио, 1973. — 488 с.

64. Ту Ю. Современная теория управления. — М.: Машиностроение, 1971. — 472 с.

65. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций / **А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов, Е.Б. Соловьёва, И.И. Гук.** — СПб.: БХВ-Петербург, 2003. — 608 с.

66. Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. **В.А. Сойфера.** — М.: Физматлит, 2003. — 784 с.

67. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. — 992 с.

68. Мартынов В.А., Селихов Ю.И. Панорамные приёмники и анализаторы спектра. — М.: Советское радио, 1964. — 408 с.

69. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. — М.: Советское радио, 1971. — 672 с.

70. Френкс Л. Теория сигналов. — М.: Советское радио, 1974. — 344 с.

71. Крохин В.В. Элементы радиоприёмных устройств сверхвысоких частот. — М.: Советское радио, 1964. — 696 с.

72. Смогилёв К.А., Вознесенский И.В., Филиппов Л.А. Радиоприёмники СВЧ. — М.: Воениздат, 1967. — 556 с.

73. Волин М.Л. Усилители промежуточной частоты. — М.: Советское радио, 1950. — 132 с.

74. Куликовский А.А. Линейные каскады радиоприёмников. — М.: Госэнергоиздат, 1958. — 352 с.

75. Гуткин Л.С., Лебедев В.Л., Сифоров В.И. Радиоприёмные устройства, часть 1. — М.: Советское радио, 1961. — 704 с.

76. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.

77. Витязев В.В. Цифровая частотная селекция сигналов. — М.: Радио и связь, 1993. — 240 с.

78. Цифровые процессоры обработки сигналов: Справочник / Под ред. **А.Г. Остапенко.** — М.: Радио и связь, 1994. — 264 с.

79. Гребенко Ю.А. Методы цифровой обработки сигналов в радиоприёмных устройствах: Учебное пособие. — М.: Издательский дом МЭИ, 2006. — 48 с.

80. Шахнович И.В. Современные технологии беспроводной связи. — М.: Техносфера, 2004. — 168 с.

81. Лёзин Ю.С. Введение в теорию и технику радиотехнических систем: учебное пособие для вузов. — М.: Радио и связь, 1986. — 280 с.

82. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. — М.: ООО «Бином-Пресс», 2006. — 656 с.

83. Прокис Дж. Цифровая связь. — М.: Радио и связь, 2000. —800 с.

84. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. — 1104 с.

85. Птачек М. Цифровое телевидение: теория и техника. — М.: Радио и связь, 1990. — 528 с.

86. Мамаев Н.С., Мамаев Ю.Н, Теряев Б.Г. Цифровое телевидение. — М.: Горячая линия – Телеком, 2001. — 180 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ 4
СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ 5
ВВЕДЕНИЕ 8
Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ 15
1.1. Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы 15
1.2. Z-преобразование 17
1.3. Свойства Z-преобразования 23
1.4. Применение Z-преобразования для решения линейных разностных уравнений 31
1.5. Модифицированное Z-преобразование 33
1.6. Преобразование Фурье решётчатой функции 35
1.7. Дискретное преобразование Фурье 40
Краткие итоги 41
Глава 2. АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ 43
2.1. Алгоритмы линейной цифровой фильтрации 43
2.2. Классификация цифровых фильтров 44
Краткие итоги 51
Глава 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ 53
3.1. Импульсная характеристика 53
3.2. Передаточная функция 54
3.3. Комплексная частотная характеристика 58
3.4. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики 60
3.5. Минимально-фазовые и неминимально-фазовые цифровые фильтры 64
3.6. Нерекурсивные цифровые фильтры 66
3.7. Устойчивость цифровых фильтров 68
Краткие итоги 72
Глава 4. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ОДНОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ 75
4.1. Структурная схема нерекурсивного цифрового фильтра 75
4.2. Структурная схема рекурсивного цифрового фильтра при прямой форме реализации 76

4.3. Структурная схема рекурсивного цифрового фильтра при канонической форме реализации 77
4.4. Описание ЦФ в пространстве состояний 79
4.5. Способы соединения блоков цифрового фильтра 81
4.6. Структурные схемы комплексных цифровых фильтров 86
4.7. Структурные схемы векторных цифровых фильтров 92
Краткие итоги 100

Глава 5. НЕРЕКУРСИВНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ С ЛИНЕЙНЫМИ ФАЗОЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ 102
5.1. Условия линейности фазочастотных характеристик нерекурсивных цифровых фильтров 102
5.2. Фильтр вида 1 106
5.3. Фильтр вида 2 108
5.4. Фильтр вида 3 110
5.5. Фильтр вида 4 112
5.6. Расположение нулей передаточной функции цифрового фильтра с линейной фазочастотной характеристикой 113
Краткие итоги 116

Глава 6. ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ 118
6.1. Общий подход к обработке сигналов на основе дискретного преобразования Фурье 118
6.2. Свойства дискретного преобразования Фурье 120
6.3. Свёртки решётчатых функций 127
6.4. Обратное дискретное преобразование Фурье 132
6.5. Быстрое преобразование Фурье с прореживанием по времени 132
6.6. Быстрое преобразование Фурье с прореживанием по частоте 140
6.7. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье для $N \neq 2^{\nu}$ 144
Краткие итоги 151

Глава 7. АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ АНАЛОГОВЫХ СИСТЕМ 155
7.1. Математическое описание цифровых моделей линейных аналоговых систем 155
7.2. Алгоритмы дискретной свёртки 160
7.3. Рекуррентные алгоритмы моделирования аналоговых линейных динамических систем 163
7.4. Дискретная аппроксимация на основе Z-преобразования 165
7.5. Дискретная аппроксимация на основе формул

численного интегрирования (метод В.В. Быкова) 182
7.6. Методы, основанные на преобразовании структурной схемы 185
7.7. Особенности цифрового моделирования нелинейных аналоговых систем 189
Краткие итоги 194

Глава 8. НЕЛИНЕЙНЫЕ АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОМПЛЕКСНЫХ ОГИБАЮЩИХ 197
8.1. Метод комплексных огибающих 197
8.2. Спектры дискретизированных полосовых сигналов 205
8.3. Формирование квадратурных компонент комплексной огибающей 219
8.4. Модель системы связи с квадратурной модуляцией 227
8.5. Цифровые модели нелинейных преобразований полосовых сигналов в радиоприёмных и радиопередающих устройствах 231
Краткие итоги 248

Глава 9. ЛИНЕЙНЫЕ АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ПОЛОСОВЫХ СИГНАЛОВ ПО МЕТОДУ КОМПЛЕКСНЫХ ОГИБАЮЩИХ 251
9.1. Модели линейных полосовых систем на основе свёртки 251
9.2. Метод укороченных передаточных функций 253
9.3. Модели линейных полосовых систем на основе рекуррентных алгоритмов 257
Краткие итоги 259

Глава 10. МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ КВАНТОВАНИЯ СИГНАЛОВ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ 261
10.1. Эффекты квантования в цифровых фильтрах 261
10.2. Кодирование чисел в двоичной системе счисления 262
10.3. Квантование коэффициентов цифрового фильтра 265
10.4. Модели аналого-цифрового преобразования сигналов 268
10.5. Модель квантования результатов арифметических операций 272
10.6. Линейная шумовая модель рекурсивного цифрового фильтра при прямой форме реализации 274
10.7. Линейная шумовая модель рекурсивного цифрового фильтра при канонической форме реализации 277
10.8. Обобщённая линейная шумовая модель цифрового фильтра (схема Л.Б. Джексона) 280
10.9. Передаточные функции схемы Л.Б. Джексона при различных соединениях блоков фильтра 282
10.10. Шумы квантования в векторных цифровых фильтрах

простой структуры 291
10.11. Шумы квантования в векторных цифровых фильтрах сложной структуры 297
Краткие итоги 302

Глава 11. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ШУМОВ КВАНТОВАНИЯ НА ВЫХОДЕ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА 304
11.1. Методы анализа линейных дискретных систем при детерминированных и случайных воздействиях 304
11.2. Оценка максимального уровня сигналов в скалярном вещественном цифровом фильтре 314
11.3. Детерминированные оценки шумов квантования на выходе скалярного вещественного цифрового фильтра 319
11.4. Вероятностные оценки шумов квантования на выходе скалярного вещественного цифрового фильтра 324
11.5. Сравнение шумовых характеристик скалярных вещественных рекурсивных цифровых фильтров при прямой и канонической формах реализации 330
11.6. Устойчивость цифровых фильтров с учётом ограниченной разрядности операционных устройств 332
11.7. Масштабирование сигналов в цифровых фильтрах 336
11.8. Расстановка блоков в цифровых фильтрах каскадной структуры 339
11.9. Оценки шумов квантования в векторных цифровых фильтрах простой структуры 340
11.10. Оценки шумов квантования в векторных цифровых фильтрах сложной структуры 346
Краткие итоги 351

Глава 12. РЕШЕНИЕ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ОДНОМЕРНЫХ СКАЛЯРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ НЕРЕКУРСИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ 355
12.1. Задачи инженерного исследования и проектирования технических систем и устройств 355
12.2. Этапы проектирования цифровых фильтров 356
12.3. Формулировка аппроксимационной задачи проектировании скалярных вещественных нерекурсивных цифровых фильтров 359
12.4. Применение оконных функций для синтеза нерекурсивных цифровых фильтров с линейными фазочастотными характеристиками 364
12.5. Синтез нерекурсивных цифровых фильтров с линейными фазочастотными характеристиками методом разложения

аппроксимируемой функции в ряд Фурье 375
12.6. Решение аппроксимационной задачи для нерекурсивных цифровых фильтров с линейными фазочастотными характеристиками при среднеквадратическом критерии 378
12.7. Решение аппроксимационной задачи для нерекурсивных цифровых фильтров с линейными фазочастотными характеристиками при среднеквадратическом критерии с ограничениями 384
12.8. Решение аппроксимационной задачи для нерекурсивных цифровых фильтров с линейными фазочастотными характеристиками при минимаксном критерии 390
12.9. Решение аппроксимационной задачи для нерекурсивных цифровых фильтров методом частотной выборки 400
Краткие итоги 402

Глава 13. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ СКАЛЯРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ПО НОРМИРОВАННЫМ АНАЛОГОВЫМ ПРОТОТИПАМ 405
13.1. Общая характеристика метода проектирования рекурсивных линейных цифровых фильтров по аналоговым прототипам 405
13.2. Синтез аналогового нормированного ФНЧ Баттерворта 408
13.3. Синтез аналоговых нормированных ФНЧ Чебышева 412
13.4. Синтез аналогового нормированного эллиптического ФНЧ 426
13.5. Аналоговый нормированный ФНЧ Бесселя 437
13.6. Обобщённая форма представления передаточной функции аналогового нормированного ФНЧ-прототипа 439
13.7. Денормирование частоты в аналоговой области 441
13.8. Методы дискретизации аналоговых фильтров 463
13.9. Денормирование частоты в цифровой области 481
13.10. Обобщённое билинейное преобразование 483
Краткие итоги 502

Глава 14. ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MATLAB ДЛЯ СИНТЕЗА ОДНОМЕРНЫХ СКАЛЯРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ 507
14.1. Общие сведения о системе MATLAB 507
14.2. Проектирование аналоговых фильтров с использованием системы MATLAB 513
14.3. Проектирование рекурсивных цифровых фильтров с использованием системы MATLAB 530
14.4. Проектирование нерекурсивных цифровых фильтров с использованием системы MATLAB 545
14.5. Моделирование цифровой фильтрации

с помощью GUI SPTool 561
Краткие итоги 572
Глава 15. РЕШЕНИЕ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ОДНОМЕРНЫХ СКАЛЯРНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ НЕРЕКУРСИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ 576
15.1. Общие сведения о скалярных комплексных стационарных линейных цифровых фильтрах 576
15.2. Синтез одномерных скалярных комплексных стационарных нерекурсивных линейных цифровых фильтров по заданной амплитудно-частотной характеристике 577
15.3. Примеры синтеза одномерных скалярных комплексных стационарных нерекурсивных линейных цифровых фильтров 580
15.4. Сдвиг частоты в комплексных цифровых фильтрах 599
Краткие итоги 605
Глава 16. РЕШЕНИЕ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ОДНОМЕРНЫХ СКАЛЯРНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ 608
16.1. Синтез одномерных скалярных комплексных стационарных рекурсивных линейных цифровых фильтров по аналоговым прототипам 608
16.2. Влияние расположения полюсов и нулей передаточной функции одномерного скалярного комплексного стационарного рекурсивного линейного цифрового фильтра на амплитудно-частотную характеристику 647
16.3. Синтез рекурсивных комплексных цифровых фильтров методом сдвига частоты в вещественных рекурсивных цифровых фильтрах-прототипах 660
Краткие итоги 664
Глава 17. РАСЧЁТ РАЗРЯДНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ 666
17.1. Подходы к расчёту разрядности коэффициентов цифровых фильтров 666
17.2. Алгоритм расчёта цифрового фильтра при заданной разрядности коэффициентов 670
17.3. Алгоритм минимизации разрядности коэффициентов цифрового фильтра при ограничении сверху 673
17.4. Алгоритм минимизации разрядности коэффициентов цифрового фильтра при отсутствии ограничений 675
17.5. Примеры квантования коэффициентов цифровых фильтров 677
Краткие итоги 688

Глава 18. РАСЧЁТ РАЗРЯДНОСТИ ОПЕРАЦИОННЫХ УСТРОЙСТВ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ 689
18.1. Математический аппарат для расчёта максимальных по модулю оценок сигналов и характеристик шумов квантования на выходах цифровых фильтров 689
18.2. Расчёт числа разрядов регистров $S_{ц}$ для представления кодов целых частей отсчётов сигналов в цифровых фильтрах 690
18.3. Расчёт числа разрядов регистров $S_{д}$ для представления кодов дробных частей отсчётов сигналов в цифровых фильтрах при детерминированном подходе 692
18.4. Расчёт числа разрядов регистров $S_{д}$ для представления кодов дробных частей отсчётов сигналов в цифровых фильтрах при вероятностном подходе 696
18.5. Оценка необходимого быстродействия DSP для реализации цифровых фильтров 702
18.6. Примеры расчёта разрядностей операционных устройств цифровых фильтров 704
Краткие итоги 722
Глава 19. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ 723
19.1. Особенности моделирования процессов цифровой фильтрации 723
19.2. Реакция цифровых фильтров на сигнал с линейной частотной модуляцией 725
19.3. Моделирование переходных процессов в цифровых фильтрах 735
Краткие итоги 744
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 746
Приложение 1. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ОДНОМЕРНОГО ТРЁХКООРДИНАТНОГО ВЕКТОРНОГО ВЕЩЕСТВЕННОГО СТАЦИОНАРНОГО РЕКУРСИВНОГО ЛИНЕЙНОГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА 750
Приложение 2. ОСОБЕННОСТИ DSP ФИРМЫ TEXAS INSTRUMENTS (ПЛАТФОРМА C6000) 752
ЛИТЕРАТУРА 754