А. И. ПРИХОДЬКО

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ В MATLAB

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому
и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки:
11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»,
11.03.01 «Радиотехника»

Москва Вологда
«Инфра-Инженерия»
2022

УДК 519.72
ББК 32.811
П75

Р е ц е н з е н т ы :
доктор технических наук, профессор *К. С. Коротков*;
доктор физико-математических наук, профессор *М. Х. Уртенов*

Приходько, А. И.
П75 Теория информации. Лабораторный практикум в MATLAB : учебное пособие / А. И. Приходько. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2022. – 108 с. : ил.
ISBN 978-5-9729-1019-9

Приводятся основные положения теории информации. Содержатся теоретические сведения, расчетные задания с примерами m-файлов, а также методические указания и контрольные вопросы.

Для студентов, обучающихся по направлениям подготовки «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и «Радиотехника». Может быть полезно преподавателям.

УДК 519.72
ББК 32.811

ISBN 978-5-9729-1019-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью лабораторного практикума является изучение основных положений теории информации и приобретение практических навыков работы в системе программирования MATLAB.

Рабочий стол (интерфейс) MATLAB содержит следующие окна:

– **Command Window** (Командное окно) – основное окно с активизированной командной строкой;

– **Current Folder** (Текущая папка) – окно, в котором показано содержимое текущей папки;

– **Workspace** (Рабочая область) – окно, в котором выводится список текущих переменных, сохраняемых в памяти во время вычислений;

– **Command History** (История команд) – в этом окне выводится история выполнения программного кода, сгруппированная по датам.

Работа в MATLAB может проводиться либо в режиме прямых вычислений, либо в режиме выполнения заранее составленных программ.

Режим прямых вычислений (режим диалога пользователя с системой) проводится непосредственно в командной строке окна **Command Window**. В верхнем левом углу окна находятся два знака >>, символизирующие начало строки. В этой строке можно набирать формулы или команды, удовлетворяющие синтаксису языка MATLAB и завершающиеся нажатием клавиши < Enter >.

Режим программирования предполагает предварительное составление программ (m-файлов) пользователем, которые подразделяются на script-файлы и function-файлы.

Script-файл – это создаваемый пользователем m-файл, представляющий собой основную (управляющую) программу, которая содержит построчно записанные операторы языка MATLAB.

Программа создается в окне **Editor** (Редактор m-файлов), которое открывается в результате нажатия на кнопку **New Script** панели инструментов или сочетания клавиш < Ctrl+N >. После открытия окна операторы программы вводятся строка за строкой, причем MATLAB автоматически нумерует новую строку каждый раз, когда нажимается клавиша < Enter >.

Сохранение script-файла осуществляется с помощью кнопки **Save** на панели инструментов после выбора команды **Save As…** из открывающегося меню. При сохранении MATLAB прибавляет расширение .m к имени файла. Выполнение script-файла начинается в результате нажатия кнопки **Run** на панели инструментов или функциональной клавиши < F5 >.

Function-файл – это создаваемый пользователем m-файл, представляющий собой внешнюю функцию. Главная особенность файла функции – это то, что у нее есть ввод и вывод. Это означает, что вычисления в файле функции выполняются с использованием входных данных, а результаты вычислений передаются из файла функции в основную программу как результат. Для создания файла функции необходимо на панели инструментов нажать кнопку **New** и выбрать команду **Function**. Файл функции должен быть сохранен до его использования в основной программе. Это делается так же, как и со script-файлом, однако function-файл необходимо сохранять с именем, совпадающим с именем функ-ции в строке ее определения.

В некоторых случаях оказывается удобным использование анонимной функции (anonymous function), которая определена и записана в пределах основной программы.

Каждая лабораторная работа содержит теоретические сведения, расчетные задания с примерами m-файлов, а также методические указания и контрольные вопросы.

Лабораторная работа № 1
Количество информации и энтропия

Цель работы: Изучить понятия количества информации и энтропии, овладеть программными средствами их расчета в MATLAB.

1.1. Теоретические сведения

Дискретный источник информации – это источник, который вырабатывает дискретные сообщения, состоящие из конечного множества символов. Множество $A=\{a_1,a_2,\ ...,\ a_m\}$ всех возможных символов $a_1,a_2,\ ...,\ a_m$ называется алфавитом (ансамблем) источника, а величина m – объемом алфавита. Каждый символ a_i вырабатывается с вероятностью $p(a_i)$, причем $\sum_{i=1}^{m} p(a_i)=1$, поскольку все символы (состояния) источника составляют полную группу случайных событий.

Количество информации $I(a_i)$, содержащееся в любом из независимых символов a_i, определяется выражением

$$I(a_i)=-\log_{\nu} p(a_i), \qquad (1.1)$$

где ν – основание логарифма.

Логарифмическая мера (1.1) имеет следующие свойства.

1. Количество информации $I(a_i)$ – величина неотрицательная и убывающая с ростом $p(a_i)$.

2. Количество информации, содержащееся в достоверном символе (передаваемом с вероятностью $p(a_i)=1$), равно нулю

$$I(a_i)=-\log_{\nu} 1=0.$$

3. Количество информации, содержащееся в любом числе N независимых символов, равно сумме количеств информации, содержащихся в каждом из них

$$I(a_1, a_2, \ldots, a_N) = -\log_\nu p(a_1, a_2, \ldots, a_N) =$$

$$= -\log_\nu \prod_{i=1}^{N} p(a_i) = -\sum_{i=1}^{N} \log_\nu p(a_i) = \sum_{i=1}^{N} I(a_i),$$

где $p(a_1, a_2, \ldots, a_N) = \prod_{i=1}^{N} p(a_i)$ – совместная вероятность появления независимых символов $a_1, a_2, \ldots, a_N$.

4. Мера количества информации (1.1) не учитывает качественное содержание передаваемого сообщения (важность для получателя, эмоциональную окраску, возможные последствия и т. д.), а отражает лишь степень его неопределенности.

5. Единица измерения количества информации зависит от выбора основания логарифма *ν*:

– при $\nu = 10$ количество информации $I(a_i) = -\lg p(a_i)$ измеряется в десятичных единицах – дитах или Хартли (эта единица сейчас практически не используется);

– при $\nu = e \approx 2,71$ количество информации $I(a_i) = -\ln p(a_i)$ измеряется в натуральных единицах – натах (эта единица обычно используется при теоретических исследованиях);

– при $\nu = 2$ количество информации $I(a_i) = -\log(a_i)$ измеряется в двоичных единицах – битах (от англ. bit – BInary digiT, эта единица широко используется и по умолчанию основание логарифма опускается).

6. Логарифмическая мера (1.1) с основанием логарифма $\nu = 10$ для случая, когда все символы равновероятны и $p(a_i) = \dfrac{1}{m}$, впервые предложена английским ученым Р. Л. Хартли в 1928 г.

Энтропия дискретного источника информации с алфавитом $A = \{a_i\}$ – это среднее количество информации, приходящееся на один (любой) символ a_i, вырабатываемый источником. Энтропия $H(A)$ находится как математическое ожидание дискретной случайной величины $I(a_i)$, определяющей количество информации, содержащееся в одном случайно выбранном символе

$$H(A) = M\{I(a_i)\}, \tag{1.2}$$

где $M\{\cdot\}$ – знак математического ожидания, означающий усреднение стоящей в фигурных скобках случайной величины по всем ее возможным реализациям.

Энтропия источника независимых символов согласно (1.1), (1.2) определяется по формуле

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{m} p(a_i) \log p(a_i). \tag{1.3}$$

Энтропия измеряется в единицах: бит на символ, бит на букву, бит на сообщение.

Свойства энтропии:

1. Энтропия есть величина, ограниченная неравенствами

$$0 \le H(A) \le \log m. \tag{1.4}$$

2. Энтропия обращается в нуль, если состояние источника полностью определено, т. е. один символ имеет вероятность, равную единице, а вероятности всех остальных символов равны нулю.

3. Энтропия максимальна и равна

$$H_0(A) = \log m, \tag{1.5}$$

если все символы источника равновероятны, т. е. для всех значений i = 1, 2, …, m вероятности составляют $p(a_i) = 1/m$.

4. Энтропия двоичного источника с числом символов m = 2 при $p(a_1) = p$ и $p(a_2) = 1 - p$ согласно (1.3) определяется выражением

$$H(A) = -p \log p - (1-p) \log(1-p). \tag{1.6}$$

Из формулы (1.6) следует, что энтропия двоичного источника изменяется от нуля до единицы, достигая максимума при значении аргумента $p = 1 - p = 0{,}5$. Таким образом, 1 бит – это количество информации, содержащееся в одном из двух равновероятных независимых символов.

5. Энтропия объединения (или совместная энтропия) нескольких статистически независимых источников с алфавитами A_1, A_2, ..., A_N равна сумме энтропий этих источников

$$H(A_1, A_2, \ldots, A_N) = \sum_{k=1}^{N} H(A_k). \qquad (1.7)$$

6. Энтропия характеризует среднюю неопределенность выбора одного символа из алфавита источника. При ее определении используют только вероятности символов, полностью игнорируя их содержательную сторону.

7. Энтропия как мера неопределенности согласуется с экспериментальными данными, полученными при изучении психологических реакций человека и, в частности, реакции выбора. Так, установлено, что время безошибочной реакции на последовательность беспорядочно чередующихся равновероятных раздражителей (например, загорающихся лампочек) растет с увеличением их количества так же, как энтропия.

8. Термин «энтропия» в теории информации и выражение (1.3) для ее вычисления впервые были введены в 1948 г. американским ученым К. Е. Шенноном. Им было высказано утверждение, а советским математиком Я. А. Хинчиным строго доказано, что формула (1.3) является единственным функционалом, удовлетворяющим сформулированным свойствам.

1.2. Расчетные задания

Задание 1.1. Построить графики зависимости количества информации от вероятности символа по формуле (1.1) при различных значениях ν.

```
%Script_1_1
%Построение графиков зависимости количества
информации от вероятности символа
clear all; close all; clc
%Значения вероятности
p=0:.001:1;
%Значения количества информации
I1=-log2(p);
I2=-log(p);
I3=-log10(p);
%Построение графиков
plot(p,I1,p,I2,p,I3)
```

```
grid
xlabel('Вероятность символа p(a)')
ylabel('Количество информации I(a), бит')
title('Зависимости количества информации от
вероятности символа')
legend('\nu = 2','\nu = e','\nu = 10')
ylim([0 8])
```

Задание 1.2. Построить график зависимости энтропии двоичного источника от вероятности символа по формуле (1.6).

```
%Script_1_2
%Построение графика энтропии двоичного источника в
зависимости от вероятности символа
clear all; close all; clc
%Значения вероятности
p=0:.001:1;
%Значения энтропии
H=-p.*log2(p)-(1-p).*log2(1-p);
%Построение графика
plot(p,H)
grid
xlabel('Вероятность символа p')
ylabel('Энтропия источника H(A), бит/символ')
title('Энтропия двоичного источника в зависимости от
вероятности символа')
```

Задание 1.3. Дискретный источник имеет объем алфавита $m = 3$. Определить энтропию источника, если:

а) символы алфавита равновероятны;

б) символы вырабатываются с вероятностями $p(a_1) = 0{,}25$; $p(a_2) = 0{,}3$; $p(a_3) = 0{,}45$.

На какую величину уменьшается энтропия во втором случае?

```
%Script_1_3
%Расчет энтропии дискретного источника без памяти
clear all; close all; clc
%Задание анонимной функции
%---------------------------
fun=@(x) -x.*log2(x+(x==0));
```

```
%---------------------------
%Задание вероятностей символов
p=[.25 .3 .45];
disp('Вероятности символов:')
disp(p)
%Сумма вероятностей символов
s=sum(p);
disp('Сумма вероятностей:')
disp(s)
%Определение объема алфавита (длины вектора)
m=length(p);
disp('Объем алфавита:')
disp(m)
%Определение максимальной энтропии
H0=log2(m);
disp('Максимальная энтропия, бит/символ:')
disp(H0)
%Вычисление энтропии источника
H=sum(fun(p));
disp('Энтропия источника, бит/символ:')
disp(H)
%Определение разности энтропий
dH=H0-H;
disp('Разность энтропий, бит/символ:')
disp(dH)
```

Задание 1.4. Дискретный источник имеет объем алфавита $m = 4$. Определить энтропию источника, если:

а) символы вырабатываются с одинаковыми вероятностями;

б) вероятности символов равны $p(a_1) = 0{,}1$; $p(a_2) = 0{,}2$; $p(a_3) = 0{,}3$; $p(a_4) = 0{,}4$.

На какую величину уменьшается энтропия во втором случае?

Указание: использовать `Script_1_3`.

Задание 1.5. Дискретный источник имеет объем алфавита $m = 5$. Определить энтропию источника для следующих случаев:

а) символы вырабатываются с одинаковыми вероятностями;

б) вероятности символов $p(a_1) = 0{,}8$; $p(a_2) = 0{,}15$; $p(a_3) = 0{,}03$; $p(a_4) = 0{,}01$; $p(a_5) = 0{,}01$.

На какую величину уменьшается энтропия во втором случае?

Указание: использовать `Script_1_3`.

Задание 1.6. Построить график функции $f\left[p(a_i)\right] = -p(a_i)\log p(a_i)$ и исследовать влияние вероятности $p(a_i)$ появления отдельного символа a_i на величину энтропии источника в целом. Исследовать функцию $f\left[p(a_i)\right]$ на экстремум.

```
%Script_1_6
%Построение графика одного слагаемого в зависимости
от вероятности символа
clear all; close all; clc
%Задание анонимной функции
%----------------------------
fun=@(x) -x.*log2(x+(x==0));
%----------------------------
%Задание значений вероятности
p=0:.001:1;
%Расчет значений энтропии
y=fun(p);
%Построение графика
plot(p,y)
grid
xlabel('Вероятность символа p')
ylabel('Функция f(p), бит')
title('График функции f(p)')
%Определение максимума функции по графику
[fm,im]=max(y);
disp('Определение максимума функции по графику')
disp('Максимум функции, бит:')
disp(fm)
disp('Значение аргумента:')
disp(p(im))
%Численное определение максимума функции
[pm,fm]=fminbnd(@(x) x.*log2(x+(x==0)),.2,.7);
disp('Численное определение максимума функции')
disp('Максимум функции, бит:')
disp(-fm)
disp('Значение аргумента:')
disp(pm)
```

```
%Точное определение максимума функции
pm=1/exp(1);
fm=-pm*log2(pm);
disp('Точное определение максимума функции')
disp('Максимум функции:')
disp(fm)
disp('Значение аргумента:')
disp(pm)
%Обозначение максимума на графике
line([0 pm],[fm fm],'LineStyle','--')
line([pm pm],[fm 0],'LineStyle','--')
hold on
plot(pm,fm,'r.')
```

1.3. Отчет и контрольные вопросы

Отчет по лабораторной работе оформляется в виде документа MS Word и должен содержать:

1. Название лабораторной работы (шрифт Times New Roman).

2. Результаты выполнения всех расчетных заданий, включая листинги m-файлов, копируемые из окна **Editor**, результаты их выполнения, копируемые из окна **Command Window** (шрифт Courier New), а также полученные графики, копируемые из окна **Figure** по команде **Edit | Copy Figure**.

Защита лабораторной работы проводится на основе представленного отчета и ответов на контрольные вопросы из следующего списка:

1. Что такое дискретный источник информации?

2. Дайте определение логарифмической меры количества информации $I(a_i)$.

3. Перечислите свойства логарифмической меры количества информации.

4. При одинаковом значении вероятности символа какое значение количества информации будет наибольшим, а какое будет наименьшим – выраженное в дитах, в натах или в битах?

5. Дайте определение энтропии дискретного источника с алфавитом $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ как математического ожидания дискретной случайной величины $I(a_i)$.

6. Запишите выражение для энтропии дискретного источника статистически независимых символов.

7. Перечислите свойства энтропии дискретного источника статистически независимых символов.

8. Запишите выражение для энтропии дискретного источника с объемом алфавита m и независимыми равновероятными символами.

9. Запишите выражение для энтропии двоичного источника независимых символов.

10. При каких значениях вероятности появления i-го символа достигаются наиболее существенные значения слагаемых вида $-p(a_i)\log p(a_i)$?

Лабораторная работа № 2
Совместная и условная энтропия

Цель работы: Изучить понятия совместной и условной энтропии, овладеть программными средствами их расчета в MATLAB.

2.1. Теоретические сведения

Совместная и условная энтропии позволяют учитывать статистические связи между алфавитами двух или нескольких источников, между алфавитами на входе и выходе канала связи, между последовательными символами на выходе одного источника.

Объединение источников с алфавитами $A=\{a_i\}$ и $B=\{b_i\}$, имеющих объемы m и n соответственно, полностью характеризуется матрицей совместных вероятностей появления символов a_i и b_j, которая имеет следующий вид:

$$\mathbf{P}_{(A,B)}=\begin{pmatrix} p(a_1,b_1) & p(a_1,b_2) & \dots & p(a_1,b_n) \\ p(a_2,b_1) & p(a_2,b_2) & \dots & p(a_2,b_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(a_m,b_1) & p(a_m,b_2) & \dots & p(a_m,b_n) \end{pmatrix}, \qquad (2.1)$$

где $p(a_i,b_j)$ – вероятность совместного появления символов a_i и b_j.

Сумма всех элементов матрицы (2.1)

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p(a_i,b_j)=1 \qquad (2.2)$$

по формуле суммарной вероятности полной группы событий.

Безусловные вероятности появления символов для каждого алфавита определяются соотношениями:

– для алфавита A (суммирование элементов матрицы $\mathbf{P}_{(A,B)}$ по строкам)

$$p(a_i) = \sum_{j=1}^{n} p(a_i, b_j) \ (i = 1, 2, \ ..., \ m); \tag{2.3}$$

– для алфавита B (суммирование элементов матрицы $\mathbf{P}_{(A,B)}$ по столбцам)

$$p(b_j) = \sum_{i=1}^{m} p(a_i, b_j) \ (j = 1, 2, \ ..., \ n). \tag{2.4}$$

Вероятности $p(a_i, b_j)$ можно выразить через безусловные вероятности $p(a_i)$ или $p(b_j)$ и условные вероятности $p(b_j \mid a_i)$ или $p(a_i \mid b_j)$ в соответствии с тем, какие состояния принять за причину, а какие – за следствие

$$p(a_i, b_j) = p(a_i) p(b_j \mid a_i) = p(b_j) p(a_i \mid b_j), \tag{2.5}$$

где $p(b_j \mid a_i)$ – условная вероятность появления символа b_j после того, как появился символ a_i; $p(a_i \mid b_j)$ – условная вероятность появления символа a_i после того, как появился символ b_j.

Совместная энтропия (энтропия объединения) двух статистически связанных ансамблей A и B находится по формуле

$$H(A, B) = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p(a_i, b_j) \log p(a_i, b_j) \tag{2.6}$$

и представляет собой энтропию совместного появления символов из этих алфавитов.

С использованием соотношений (2.2)–(2.5) совместную энтропию можно представить в двух эквивалентных формах.

Первая форма записи имеет вид

$$H(A, B) = H(A) + H(B \mid A). \tag{2.7}$$

В сумме (2.7) соответствующие слагаемые представляют собой следующие энтропии:

– энтропия источника с алфавитом A

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{m} p(a_i) \log p(a_i); \tag{2.8}$$

– условная энтропия алфавита B относительно алфавита A

$$H(B\mid A)=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p(a_i,b_j)\log p(b_j\mid a_i)=$$
$$=-\sum_{i=1}^{m}p(a_i)\sum_{j=1}^{n}p(b_j\mid a_i)\log p(b_j\mid a_i), \tag{2.9}$$

которая представляет собой среднюю добавочную информацию, содержащуюся в символе алфавита B после того, как стала известна информация, в среднем содержащаяся в символе алфавита A и также может быть записана в виде

$$H(B\mid A)=\sum_{i=1}^{m}p(a_i)H(B\mid a_i), \tag{2.10}$$

где

$$H(B\mid a_i)=-\sum_{j=1}^{n}p(b_j\mid a_i)\log p(b_j\mid a_i) \tag{2.11}$$

– частная условная энтропия алфавита B по отношению к символу a_i, которая представляет собой случайную величину, характеризующую неопределенность, приходящуюся на один символ ансамбля B при условии, что реализовалось конкретное состояние a_i ансамбля A.

Как следует из соотношения (2.9), величина условной энтропии $H(B\mid A)$ определяется видом распределения вероятностей $p(a_i)$ символов алфавита A и величинами элементов матрицы условных вероятностей $p(b_j\mid a_i)$

$$\mathbf{P}_{(B|A)}=\begin{pmatrix} p(b_1\mid a_1) & p(b_2\mid a_1) & \dots & p(b_n\mid a_1)\\ p(b_1\mid a_2) & p(b_2\mid a_2) & \dots & p(b_n\mid a_2)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ p(b_1\mid a_m) & p(b_2\mid a_m) & \dots & p(b_n\mid a_m)\end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Вторая форма записи определяется выражением

$$H(A,B)=H(B)+H(A\mid B) \tag{2.13}$$

и включает в себя следующие энтропии:

– энтропию алфавита *B*

$$H(B) = -\sum_{j=1}^{n} p(b_j)\log p(b_j); \tag{2.14}$$

– условную энтропию алфавита *A* относительно алфавита *B*

$$\begin{aligned} H(A\,|\,B) &= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p(a_i, b_j)\log p(a_i\,|\,b_j) = \\ &= -\sum_{j=1}^{n} p(b_j)\sum_{i=1}^{m} p(a_i\,|\,b_j)\log p(a_i\,|\,b_j). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Энтропия $H(A\,|\,B)$ представляет собой среднюю добавочную информацию, которую дает символ алфавита *A* после того, как стала известна информация, в среднем содержащаяся в символе алфавита *B* и может быть записана в эквивалентном виде

$$H(A\,|\,B) = \sum_{j=1}^{n} p(b_j)H(A\,|\,b_j), \tag{2.16}$$

где

$$H(A\,|\,b_j) = -\sum_{i=1}^{m} p(a_i\,|\,b_j)\log p(a_i\,|\,b_j) \tag{2.17}$$

– частная условная энтропия алфавита *A* по отношению к символу b_j, характеризующая неопределенность, приходящуюся на один символ ансамбля *A* при условии, что реализовалось конкретное состояние b_j ансамбля *B*.

Соотношение (2.15) показывает, что условная энтропия $H(A\,|\,B)$ зависит от распределения вероятностей $p(b_j)$ символов алфавита *B* и величин элементов матрицы условных вероятностей $p(a_i\,|\,b_j)$

$$\mathbf{P}_{(A|B)} = \begin{pmatrix} p(a_1\,|\,b_1) & p(a_1\,|\,b_2) & \dots & p(a_1\,|\,b_n) \\ p(a_2\,|\,b_1) & p(a_2\,|\,b_2) & \dots & p(a_2\,|\,b_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(a_m\,|\,b_1) & p(a_m\,|\,b_2) & \dots & p(a_m\,|\,b_n) \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Уяснению соотношений между рассмотренными энтропиями дискретных источников с зависимыми алфавитами A и B способствует их графическое отображение в виде так называемых диаграмм Венна – Эйлера, показанных на рис. 2.1.

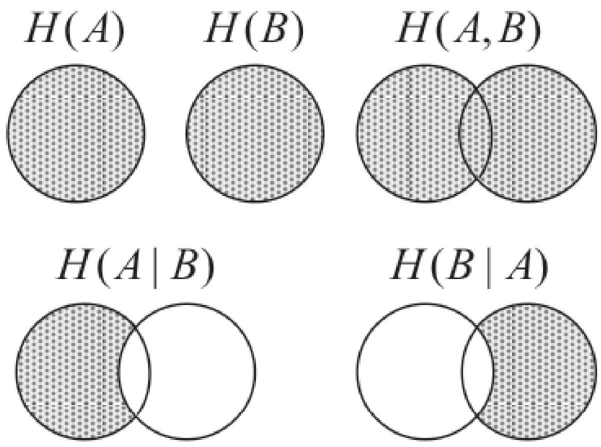

Рис. 2.1. Соотношения между энтропиями

На этих диаграммах заштрихованными областями обозначены энтропии $H(A)$ и $H(B)$ алфавитов A и B, совместная энтропия $H(A,B)$, а также условные энтропии $H(A|B)$ и $H(B|A)$.

Условная энтропия имеет следующие свойства:

1. Условная энтропия есть величина, ограниченная неравенствами

$$0 \le H(A|B) \le H(A); \tag{2.19}$$

$$0 \le H(B|A) \le H(B). \tag{2.20}$$

2. Если между алфавитами A и B имеется однозначная связь, то условная энтропия обращается в нуль

$$H(A|B) = H(B|A) = 0. \tag{2.21}$$

3. Если алфавиты A и B статистически независимы, то условная энтропия равна безусловной

$$H(A|B) = H(A); \tag{2.22}$$

$$H(B|A) = H(B). \tag{2.23}$$

Свойства совместной энтропии:

1. Совместная энтропия обладает свойством симметрии

$$H(A,B) = H(B,A). \tag{2.24}$$

2. Совместная энтропия есть неотрицательная величина, сверху ограниченная неравенством

$$H(A,B) \le H(A) + H(B). \qquad (2.25)$$

3. Если между алфавитами A и B имеется однозначная связь (при этом $H(A) = H(B)$), то совместная энтропия составляет

$$H(A,B) = H(A) = H(B). \qquad (2.26)$$

4. Если алфавиты A и B статистически независимы, то совместная энтропия равна сумме их энтропий

$$H(A,B) = H(A) + H(B). \qquad (2.27)$$

2.2. Расчетные задания

Задание 2.1. Матрица совместных вероятностей объединения алфавитов A и B имеет вид

$$\mathbf{P}_{(A,B)} = \begin{pmatrix} p(a_1,b_1) & p(a_1,b_2) \\ p(a_2,b_1) & p(a_2,b_2) \\ p(a_3,b_1) & p(a_3,b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}25 \\ 0{,}2 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}15 \end{pmatrix}.$$

Рассчитать: энтропии алфавитов $H(A)$ и $H(B)$; частные условные энтропии $H(B\,|\,a_i)$ и $H(A\,|\,b_j)$; условные энтропии $H(B\,|\,A)$ и $H(A\,|\,B)$; совместную энтропию $H(A,B)$ по формулам (2.6), (2.10) и (2.16).

```
%Script_2_1
%Расчет условной и совместной энтропии алфавитов A и
B
%при заданной матрице совместных вероятностей P(A,B)
clear all; close all; clc
%Задание анонимной функции
%---------------------------
fun=@(x) -x.*log2(x+(x==0));
%---------------------------
%Значения совместных вероятностей
P_AB=[.1 .25;.2 0;.3 .15];
disp('Матрица совместных вероятностей P(A,B):')
disp(P_AB)
%Определение объемов алфавитов
[m, n]=size(P_AB);
```

```
disp('Объем алфавита A:')
disp(m)
disp('Объем алфавита B:')
disp(n)
%Расчет вероятностей символов алфавита A
p_a=sum(P_AB,2);
disp('Вероятности символов алфавита A:')
disp(p_a)
%Рачет энтропии алфавита A
H_A=sum(fun(p_a));
disp('Энтропия алфавита A, бит/символ:')
disp(H_A)
%Расчет вероятностей символов алфавита B
p_b=sum(P_AB,1);
disp('Вероятности символов алфавита B:')
disp(p_b)
%Рачет энтропии алфавита B
H_B=sum(fun(p_b));
disp('Энтропия алфавита B, бит/символ:')
disp(H_B)
%Совместная энтропия H(A,B) - первая форма
%Расчет элементов матрицы условных вероятностей
P(B|A)
P_B_A=bsxfun(@rdivide,P_AB,p_a(:));
disp('Матрица условных вероятностей P(B|A):')
disp(P_B_A)
%Расчет частных условных энтропий H(B|a)
H_B_a=sum(fun(P_B_A),2);
disp('Частные условные энтропии H(B|a), бит/символ:')
disp(H_B_a)
%Расчет условной энтропии H(B|A)
H_B_A=sum(p_a.*H_B_a);
disp('Условная энтропия H(B|A), бит/символ:')
disp(H_B_A)
%Расчет совместной энтропии H(A,B)
H_AB=H_A+H_B_A;
disp('Совместная энтропия H(A,B), бит/символ - первая
форма:')
disp(H_AB)
%Совместная энтропия H(A,B) - вторая форма
%Расчет элементов матрицы условных вероятностей
P(A|B)
P_A_B=bsxfun(@rdivide,P_AB,p_b(:)');
disp('Матрица условных вероятностей P(A|B):')
```

```
disp(P_A_B)
%Расчет частных условных энтропий H(A|b)
H_A_b=sum(fun(P_A_B),1);
disp('Частные условные энтропии H(A|b), бит/символ:')
disp(H_A_b)
%Расчет условной энтропии H(A|B)
H_A_B=sum(p_b.*H_A_b);
disp('Условная энтропия H(A|B), бит/символ:');
disp(H_A_B)
%Расчет совместной энтропии H(A,B)
H_AB=H_B+H_A_B;
disp('Совместная энтропия H(A,B), бит/символ - вторая
форма:')
disp(H_AB)
%Расчет совместной энтропии H(A,B)
H_AB=sum(sum(fun(P_AB),1));
disp('Совместная энтропия H(A,B), бит/символ - общая
формула:')
disp(H_AB)
```

Задание 2.2. Матрица совместных вероятностей объединения алфавитов A и B имеет вид

$$\mathbf{P}_{(A,B)} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Рассчитать: энтропии алфавитов $H(A)$ и $H(B)$; частные условные энтропии $H(B\,|\,a_i)$ и $H(A\,|\,b_j)$; условные энтропии $H(B\,|\,A)$ и $H(A\,|\,B)$; совместную энтропию $H(A,B)$ по формулам (2.6), (2.10) и (2.16).

Указание: использовать `Script_2_1`.

Задание 2.3. Матрица совместных вероятностей объединения алфавитов A и B имеет вид

$$\mathbf{P}_{(A,B)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Рассчитать: энтропии алфавитов $H(A)$ и $H(B)$; частные условные энтропии $H(B|a_i)$ и $H(A|b_j)$; условные энтропии $H(B|A)$ и $H(A|B)$; совместную энтропию $H(A,B)$ по формулам (2.6), (2.10) и (2.16). Отличаются ли величины энтропий $H(A)$, $H(B)$, $H(B|A)$, $H(A|B)$ и $H(A,B)$ от значений соответствующих энтропий системы, рассмотренной в предыдущей задаче?

Указание: использовать `Script_2_1`.

Задание 2.4. Матрица совместных вероятностей объединения алфавитов A и B имеет вид

$$\mathbf{P}_{(A,B)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассчитать: энтропии алфавитов $H(A)$ и $H(B)$; частные условные энтропии $H(B|a_i)$ и $H(A|b_j)$; условные энтропии $H(B|A)$ и $H(A|B)$; совместную энтропию $H(A,B)$ по формулам (2.6), (2.10) и (2.16).

Указание: использовать `Script_2_1`.

Задание 2.5. Матрица совместных вероятностей объединения алфавитов A и B имеет вид

$$\mathbf{P}_{(A,B)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Рассчитать: энтропии алфавитов $H(A)$ и $H(B)$; частные условные энтропии $H(B|a_i)$ и $H(A|b_j)$; условные энтропии $H(B|A)$ и $H(A|B)$; совместную энтропию $H(A,B)$ по формулам (2.6), (2.10) и (2.16).

Указание: использовать `Script_2_1`.

Задание 2.6. Матрица совместных вероятностей объединения алфавитов A и B имеет вид

$$\mathbf{P}_{(A,B)} = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,1 & 0,08 & 0,05 & 0,03 \\ 0,02 & 0,04 & 0,12 & 0,04 & 0,02 \\ 0,03 & 0,05 & 0,08 & 0,1 & 0,12 \end{pmatrix}.$$

Рассчитать: энтропии алфавитов $H(A)$ и $H(B)$; частные условные энтропии $H(B|a_i)$ и $H(A|b_j)$; условные энтропии $H(B|A)$ и $H(A|B)$; совместную энтропию $H(A,B)$ по формулам (2.6), (2.10) и (2.16).

Указание: использовать `Script_2_1`.

Задание 2.7. Вероятности появления символов источника с алфавитом A составляют: $p(a_1) = 0{,}2$; $p(a_2) = 0{,}3$; $p(a_3) = 0{,}5$. Матрица условных вероятностей появления символов источника B после появления символов из алфавита A имеет вид

$$\mathbf{P}_{(B|A)} = \begin{pmatrix} p(b_1|a_1) & p(b_2|a_1) & p(b_3|a_1) \\ p(b_1|a_2) & p(b_2|a_2) & p(b_3|a_2) \\ p(b_1|a_3) & p(b_2|a_3) & p(b_2|a_3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,666 & 0,334 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Рассчитать: энтропии алфавитов $H(A)$ и $H(B)$; частные условные энтропии $H(B|a_i)$ и $H(A|b_j)$; условные энтропии $H(B|A)$ и $H(A|B)$; совместную энтропию $H(A,B)$ по формулам (2.6), (2.10) и (2.16).

```
%Script_2_7
%Расчет условной и совместной энтропии алфавитов A и
B
%при заданном векторе вероятностей символов алфавита
A
%и матрице условных вероятностей P(B|A)
clear all; close all; clc
%Задание анонимной функции
%---------------------------
fun=@(x) -x.*log2(x+(x==0));
```

```
%---------------------------
%Значения вероятностей символов алфавита А
p_a=[.2 .3 .5];
disp('Вероятности символов алфавита A:')
disp(p_a)
%Значения условных вероятностей
P_B_A=[.5 .5 0; 0 .666 .334; 0 .4 .6];
disp('Матрица условных вероятностей P(B|A):')
disp(P_B_A)
%Определение объемов алфавитов
[m, n]=size(P_B_A);
disp('Объем алфавита A:')
disp(m)
disp('Объем алфавита B:')
disp(n)
%Рачет энтропии алфавита A
H_A=sum(fun(p_a));
disp('Энтропия алфавита A, бит/символ:')
disp(H_A)
%Расчет частных условных энтропий H(B|a)
H_B_a=sum(fun(P_B_A),2);
disp('Частные условные энтропии H(B|a), бит/символ:')
disp(H_B_a)
%Расчет условной энтропиии H(B|A)
H_B_A=sum(p_a'.*H_B_a);
disp('Условная энтропия H(B|A), бит/символ:')
disp(H_B_A)
%Расчет элементов матрицы совместных вероятностей
P(A,B)
P_AB=bsxfun(@times,P_B_A,p_a(:));
disp('Матрица совместных вероятностей P(A,B):')
disp(P_AB)
%Расчет вероятностей символов алфавита B
p_b=sum(P_AB,1);
disp('Вероятности символов алфавита B:')
disp(p_b)
%Рачет энтропии алфавита B
H_B=sum(fun(p_b));
disp('Энтропия алфавита B, бит/символ:')
disp(H_B)
%Расчет элементов матрицы условных вероятностей
P(A|B)
P_A_B=bsxfun(@rdivide,P_AB,p_b(:)');
disp('Матрица условных вероятностей P(A|B):')
```

```
disp(P_A_B)
%Расчет частных условных энтропий H(A|b)
H_A_b=sum(fun(P_A_B),1);
disp('Частные условные энтропии H(A|b), бит/символ:')
disp(H_A_b)
%Расчет условной энтропиии H(A|B)
H_A_B=sum(p_b.*H_A_b);
disp('Условная энтропия H(A|B), бит/символ:');
disp(H_A_B)
%Расчет совместной энтропии H(A,B)
H_AB=H_A+H_B_A;
disp('Совместная энтропия H(A,B), бит/символ - первая
форма:')
disp(H_AB)
%Расчет совместной энтропии H(A,B)
H_AB=H_B+H_A_B;
disp('Совместная энтропия H(A,B), бит/символ - вторая
форма:')
disp(H_AB)
%Расчет совместной энтропии H(A,B)
H_AB=sum(sum(fun(P_AB),1));
disp('Совместная энтропия H(A,B), бит/символ - общая
формула:')
disp(H_AB)
```

Задание 2.8. Вероятности появления символов источника с алфавитом A составляют: $p(a_1) = 1/2$; $p(a_2) = 1/3$; $p(a_3) = 1/6$. Матрица условных вероятностей появления символов источника B после появления символов из алфавита A имеет вид

$$\mathbf{P}_{(B|A)} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 3/10 & 1/5 & 1/5 & 3/10 \\ 1/6 & 1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Рассчитать: энтропии алфавитов $H(A)$ и $H(B)$; частные условные энтропии $H(B|a_i)$ и $H(A|b_j)$; условные энтропии $H(B|A)$ и $H(A|B)$; совместную энтропию $H(A,B)$ по формулам (2.6), (2.10) и (2.16).

Указание: использовать `Script_2_7`.

2.3. Отчет и контрольные вопросы

Отчет по лабораторной работе оформляется в виде документа MS Word и должен содержать:

1. Название лабораторной работы (шрифт Times New Roman).

2. Результаты выполнения всех расчетных заданий, включая листинги m-файлов, копируемые из окна **Editor**, результаты их выполнения, копируемые из окна **Command Window** (шрифт Courier New), а также полученные графики, копируемые из окна **Figure** по команде **Edit | Copy Figure**.

Защита лабораторной работы проводится на основе представленного отчета и ответов на контрольные вопросы из следующего списка:

1. Дайте определение матрицы $\mathbf{P}_{(A,B)}$ совместных вероятностей появления символов двух статистически связанных алфавитов $A=\{a_i\}$ и $B=\{b_i\}$, имеющих объемы m и n.

2. Чему равна сумма всех элементов матрицы $\mathbf{P}_{(A,B)}$?

3. Чему равны суммы всех элементов строк матрицы $\mathbf{P}_{(A,B)}$?

4. Чему равны суммы всех элементов столбцов матрицы $\mathbf{P}_{(A,B)}$?

5. Запишите выражение, связывающее совместные вероятности символов алфавитов A и B с безусловными и условными вероятностями.

6. Запишите общее выражение для совместной энтропии двух статистически связанных алфавитов.

7. Приведите первую форму записи для совместной энтропии.

8. Приведите вторую форму записи для совместной энтропии.

9. Дайте определение частной условной энтропии.

10. Дайте определение матрицы $\mathbf{P}_{(B|A)}$ условных вероятностей появления символов алфавитов A и B.

11. Изобразите диаграммы Венна – Эйлера, поясняющие соотношения между энтропиями.

12. Перечислите свойства условной энтропии.

13. В каких случаях условная энтропия принимает наименьшее и наибольшее значение?

14. Перечислите свойства совместной энтропии.

15. В каких случаях совместная энтропия принимает наименьшее и наибольшее значение?

Лабораторная работа № 3
Дискретные источники информации

Цель работы: Изучить характеристики дискретных источников информации, овладеть программными средствами их расчета в MATLAB.

3.1. Теоретические сведения

Математическая модель дискретного источника определяется статистическими характеристиками вырабатываемых им информационных последовательностей.

Пусть источник с алфавитом $A=\{a_1, a_2\ ,..., a_m\}$ генерирует последовательность символов, причем в k-й момент времени (на k-м шаге) на выходе источника наблюдается некоторый символ a_i, так, что «фрагмент» длиной $L+1$ символов из всей последовательности имеет вид

$$..., a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_L}, a_i, ... \tag{3.1}$$

и описывается совместным распределением вероятностей

$$\begin{aligned} &p(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_L}, a_i) = \\ &= p(a_{i_1}) p(a_{i_2} \mid a_{i_1}) \ldots p(a_i \mid a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_L}), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $p(a_{i_1})$ – вероятность появления символа a_{i_1}; $p(a_{i_2} \mid a_{i_1})$ – условная вероятность появления символа a_{i_2} после символа a_{i_1}; $p(a_i \mid a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_L})$ – условная вероятность появления символа a_i при условии, что предшествующими символами были символы $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_L}$ в указанном порядке.

Дискретный источник является стационарным, если совместное распределение вероятностей в выражении (3.2) при любых значениях L не зависит от выбора начальной точки (шага k) отсчета времени.

Стационарный дискретный источник является эргодическим, если его вероятностные характеристики, полученные при исследовании одной, достаточно длинной последовательности (теоретически бесконечной длины) с вероятностью, близкой к единице (теоретически равной единице), совпадают с его статистическими характеристиками (получаемыми по ансамблю всех реализаций, вырабатываемых источником).

Дискретный источник с памятью L-го порядка – это дискретный источник, у которого статистическая связь между последовательными символами распространяется на $L+1$ символов и для любой последовательности (3.1) описывается совместным распределением вероятностей (3.2).

Энтропия стационарного эргодического дискретного источника с памятью L-го порядка находится по формуле

$$H_{L+1}(A) = -\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2}^{m}\cdots\sum_{i_L=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} p(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_L}, a_i)\times \times \log p(a_i \mid a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_L}). \quad (3.3)$$

В зависимости от величины порядка памяти L источника получаются различные частные случаи.

1. Дискретный источник без памяти (с памятью 0-го порядка) – это дискретный источник, у которого все символы для любой последовательности (3.1) статистически независимы и совместное распределение вероятностей (3.2) равно произведению вероятностей появления символов

$$p(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_L}, a_i) = p(a_{i_1})p(a_{i_2})\ldots p(a_{i_L})p(a_i). \quad (3.4)$$

Таким образом, этот источник полностью задан, если задан вектор (вектор-строка) $\mathbf{p}$ распределения вероятностей символов a_i

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p(a_1) & p(a_2) & \ldots & p(a_m) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

При $L = 0$ подстановка выражения (3.4) в (3.3) с учетом того, что условная вероятность $p(a_i \mid a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_L}) = p(a_i)$ и суммы $\sum_{i_2}^{m} p(a_{i_1}) = \sum_{i_2}^{m} p(a_{i_2}) = \ldots = \sum_{i_L}^{m} p(a_{i_L}) = 1$, дает формулу для энтропии источника с независимыми символами:

$$H_1(A) = -\sum_{i=1}^{m} p(a_i) \log p(a_i) \,. \tag{3.6}$$

Иногда такой источник называют дискретным источником Бернулли.

Доказано, что всякий стационарный источник без памяти также является эргодическим.

2. Стационарный (и эргодический) источник без памяти и с равновероятными символами. Такой источник полностью задан, если задан объем m его алфавита. Энтропия источника согласно (1.5) определяется выражением

$$H_0(A) = \log m \,. \tag{3.7}$$

Иногда этот источник называют источником Хартли.

Другие частные случаи получаются при соответствующих значениях $L > 0$.

3. Стационарный эргодический дискретный источник с памятью 1-го порядка получается из общего случая при $L = 1$. Данный источник полностью задан, если известны либо вектор вероятностей символов a_i

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p(a_1) & p(a_2) & \ldots & p(a_m) \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

и матрица условных вероятностей

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p(a_1 \mid a_1) & p(a_2 \mid a_1) & \ldots & p(a_m \mid a_1) \\ p(a_1 \mid a_2) & p(a_2 \mid a_2) & \ldots & p(a_m \mid a_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p(a_1 \mid a_m) & p(a_2 \mid a_m) & \ldots & p(a_m \mid a_m) \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

либо матрица совместных вероятностей

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p(a_1, a_1) & p(a_1, a_2) & \ldots & p(a_1, a_m) \\ p(a_2, a_1) & p(a_2, a_2) & \ldots & p(a_2, a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p(a_m, a_1) & p(a_m, a_2) & \ldots & p(a_m, a_m) \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

где $p(a_i)$ – вероятность появления символа a_i; $p(a_j \mid a_i)$ – условная вероятность появления символа a_j после символа a_i; $p(a_i, a_j)$ – совместная вероятность появления двойки символов a_i и a_j. Энтропия этого источника согласно (2.9) определяется выражением

$$\begin{aligned} H_2(A) &= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} p(a_i, a_j)\log p(a_j \mid a_i) = \\ &= -\sum_{i=1}^{m} p(a_i)\sum_{j=1}^{m} p(a_j \mid a_i)\log p(a_j \mid a_i). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Энтропии, определяемые соотношениями (3.3), (3.7), (3.6), (3.11) удовлетворяют неравенствам

$$H_0(A) > H_1(A) > H_2(A) > \cdots > H_{L+1}(A), \tag{3.12}$$

из которых следует, что по мере роста «протяженности» памяти между символами энтропия источника уменьшается.

Информационные свойства дискретных источников оцениваются следующими основными характеристиками:

1. Коэффициент избыточности источника с энтропией $H(A)$ показывает, какая доля максимально возможной для данного объема алфавита m информации не вырабатывается источником и определяется выражением

$$\chi = 1 - \frac{H(A)}{H_0(A)} = 1 - \frac{H(A)}{\log m}. \tag{3.13}$$

Значение коэффициента χ лежит в пределах $0 \le \chi \le 1$ и является безразмерной величиной.

2. Производительность источника с энтропией $H(A)$ определяет среднее количество информации, создаваемое источником в единицу времени, и находится по формуле

$$I'(A) = \frac{1}{\overline{\tau}} H(A) = \overline{V} H(A), \tag{3.14}$$

где $\overline{\tau}$ – средняя длительность одного символа;

$$\bar{V} = \frac{1}{\bar{\tau}} \tag{3.15}$$

– средняя скорость передачи символов источника.

Величина $\bar{\tau}$ для источника независимых символов с различными длительностями τ_i находится по формуле математического ожидания

$$\bar{\tau} = \sum_{i=1}^{m} \tau_i p(a_i). \tag{3.16}$$

Если символы равновероятны и в (3.16) $p(a_i) = \dfrac{1}{m}$, то $\bar{\tau} = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\tau_i$.

Если длительности всех символов одинаковы и равны τ, то в соответствии с (3.16) $\bar{\tau} = \tau$.

Величина $\bar{V}$ определяет, какое число элементарных символов (сигналов) передается в единицу времени и называется также технической скоростью передачи или скоростью модуляции (манипуляции). Скорость модуляции $\bar{V}$ измеряется в бодах. 1 Бод – это скорость, при которой за одну секунду передается один символ. При этом очевидно, что производительность $I'(A)$ измеряется в величинах бит в секунду.

3.2. Расчетные задания

Задание 3.1. Вероятности появления символов источника с алфавитом A составляют: $p(a_1) = 0{,}5$; $p(a_2) = 0{,}25$; $p(a_3) = p(a_4) = 0{,}125$. Вычислить: энтропию и избыточность источника, среднюю длительность символа, скорость модуляции и производительность источника, если длительности символов $\tau_1 = 0{,}1$; $\tau_2 = 0{,}2$; $\tau_3 = 0{,}3$; $\tau_4 = 0{,}4$ миллисекунд.

```
%Script_3_1
%Расчет характеристик дискретного источника без памя-
ти
clear all; close all; clc
%Задание анонимной функции
%---------------------------
```

```
fun=@(x) -x.*log2(x+(x==0));
%---------------------------
%Задание вероятностей символов
p=[.5 .25 .125 .125];
disp('Вероятности символов:')
disp(p)
%Сумма вероятностей символов
s=sum(p);
disp('Сумма вероятностей:')
disp(s)
%Определение объема алфавита
m=length(p);
disp('Объем алфавита:')
disp(m)
%Расчет энтропии
H=sum(fun(p));
disp('Энтропия источника, бит/символ:')
disp(H)
%Расчет максимальной энтропии
H0=log2(m);
disp('Максимальная энтропия, бит/символ:')
disp(H0)
%Расчет коэффициента избыточности
x=1-H/H0;
disp('Коэффициент избыточности:')
disp(x)
%Задание длительностей символов
Ti=[.1 .2 .3 .4]*10^(-3);
disp('Длительности символов, с:')
disp(Ti)
%Расчет средней длительности символов, скорости моду-
ляции
%и производительности
T=sum(Ti.*p);
disp('Средняя длительность символов, с:')
disp(T)
V=1/T;
disp('Скорость модуляции, Бод:')
disp(V)
I=V*H;
disp('Производительность, бит/с:')
disp(I)
```

Задание 3.2. Дискретный источник с памятью 1-го порядка задан матрицей совместных вероятностей символов

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p(a_1,a_1) & p(a_1,a_2) & p(a_1,a_3) \\ p(a_2,a_1) & p(a_2,a_2) & p(a_2,a_3) \\ p(a_3,a_1) & p(a_3,a_2) & p(a_3,a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}08 & 0{,}08 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}06 & 0{,}02 & 0{,}22 \end{pmatrix}.$$

Определить: энтропию и избыточность источника; производительность источника, если длительности символов одинаковы и составляют $\tau = 800$ мкс.

```
%Script_3_2
%Расчет характеристик дискретного источника с памятью 
1-го порядка
%при заданной матрице совместных вероятностей P
clear all; close all; clc
%Задание анонимной функции
%---------------------------
fun=@(x) -x.*log2(x+(x==0));
%---------------------------
%Задание матрицы совместных вероятностей
P=[.04 .08 0.08;.1 .4 0;0.06 0.02 .22];
disp('Матрица совместных вероятностей P:')
disp(P)
%Расчет суммы элементов матрицы совместных вероятно-
стей
s=sum(sum(P));
disp('Сумма вероятностей:')
disp(s)
%Определение объема алфавита
[m, n]=size(P);
disp('Объем алфавита:')
disp(m)
%Проверка равенства m = n
if m~=n
disp('Матрица должна быть квадратной!')
end
%Расчет вероятностей символов
p=sum(P,2);
disp('Вероятности символов алфавита:')
disp(p)
%Расчет элементов матрицы условных вероятностей П
```

```
PI=bsxfun(@rdivide,P,p(:));
disp('Матрица условных вероятностей П:')
disp(PI)
%Расчет энтропии источника
H=sum(p.*sum(fun(PI),2));
disp('Энтропия источника, бит/символ:')
disp(H)
%Расчет коэффициента избыточности
x=1-H/log2(m);
disp('Коэффициент избыточности:')
disp(x)
%Задание длительности символов, с
T=800*10^(-6);
%Расчет производительности источника
I=H/T;
disp('Производительность, бит/с:')
disp(I)
```

Задание 3.3. Дискретный источник с памятью 1-го порядка задан матрицей совместных вероятностей символов

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0,08 & 0,1 & 0,12 \\ 0,02 & 0,05 & 0,18 \\ 0,2 & 0,1 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

Определить: энтропию и избыточность источника; производительность источника, если длительности символов $\tau_1 = 1/8$ мс; $\tau_2 = 1/4$ мс; $\tau_3 = 1/3$ мс.

Указание: использовать `Script_3_1`, `Script_3_2`.

Задание 3.4. Дискретный источник с памятью 1-го порядка задан матрицей совместных вероятностей символов

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,05 \\ 0,05 & 0,2 & 0,15 \\ 0,1 & 0,1 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

Определить: энтропию и избыточность источника; производительность источника, если длительности символов $\tau_1 = 1/2$ мс; $\tau_2 = 1/4$ мс; $\tau_3 = 1/4$ мс.

Указание: использовать `Script_3_1`, `Script_3_2`.

Задание 3.5. Дискретный источник с памятью 1-го порядка задан матрицей условных вероятностей символов

$$\mathbf{\Pi}=\begin{pmatrix} p(a_1\,|\,a_1) & p(a_2\,|\,a_1) & p(a_3\,|\,a_1) \\ p(a_1\,|\,a_2) & p(a_2\,|\,a_2) & p(a_3\,|\,a_2) \\ p(a_1\,|\,a_3) & p(a_2\,|\,a_3) & p(a_3\,|\,a_3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,075 & 0,075 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

Вычислить энтропию, избыточность и производительность источника, если вероятности символов равны $p(a_1) = p(a_2) = 0{,}1$; $p(a_3) = 0{,}8$, а их длительности составляют $\tau_1 = \tau_2 = 0{,}4$ мс; $\tau_3 =$ $= 0{,}1$ мс.

```
%Script_3_5
%Расчет характеристик дискретного источника с памятью
1-го порядка
%при заданной матрице условных вероятностей П
%и векторе вероятностей символов
clear all; close all; clc
%Задание анонимной функции
%----------------------------
fun=@(x) -x.*log2(x+(x==0));
%----------------------------
%Задание матрицы условных вероятностей
PI=[0 .4 .6;.4 0 .6;.075 .075 .85];
disp('Матрица условных вероятностей П:')
disp(PI)
%Задание вектора вероятностей символов
p=[.1; .1; .8];
disp('Вероятности символов:')
disp(p)
%Определение объема алфавита
[m, n]=size(PI);
disp('Объем алфавита:')
disp(m)
%Проверка равенства m = n
if m~=n
disp('Матрица должна быть квадратной!')
end
%Расчет энтропии источника
```

```
H=sum(p.*sum(fun(PI),2));
disp('Энтропия источника, бит/символ:')
disp(H)
%Расчет коэффициента избыточности
x=1-H/log2(m);
disp('Коэффициент избыточности:')
disp(x)
%Задание длительностей символов
Ti=[.4; .4; .1]*10^(-3);
disp('Длительности символов, с:')
disp(Ti)
%Расчет средней длительности символов, скорости моду-
ляции
%и производительности
T=sum(Ti.*p);
disp('Средняя длительность символов, с:')
disp(T)
V=1/T;
disp('Скорость модуляции, Бод:')
disp(V)
I=V*H;
disp('Производительность, бит/с:')
disp(I)
```

Задание 3.6. Дискретный источник с памятью 1-го порядка задан матрицей условных вероятностей символов

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассчитать энтропию, избыточность и производительность источника, если вероятности символов равны $p(a_1) = p(a_2) = 0{,}4$; $p(a_3) = 0{,}2$, а их длительности составляют $\tau_1 = \tau_2 = 0{,}45$ мс; $\tau_3 = 0{,}2$ мс.

Указание: использовать `Script_3_5`.

Задание 3.7. Рассчитать энтропию, избыточность и производительность дискретного источника с памятью 1-го порядка, если матрица условных вероятностей имеет вид

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix},$$

вероятности символов составляют $p(a_1) = 3/11$; $p(a_2) = p(a_3) = 4/11$, а их длительности равны $\tau_1 = 0{,}2$ мс; $\tau_2 = \tau_3 = 0{,}1$ мс.

Указание: использовать `Script_3_5`.

3.3. Отчет и контрольные вопросы

Отчет по лабораторной работе оформляется в виде документа MS Word и должен содержать:

1. Название лабораторной работы (шрифт Times New Roman).

2. Результаты выполнения всех расчетных заданий, включая листинги m-файлов, копируемые из окна **Editor**, результаты их выполнения, копируемые из окна **Command Window** (шрифт Courier New), а также полученные графики, копируемые из окна **Figure** по команде **Edit | Copy Figure**.

Защита лабораторной работы проводится на основе представленного отчета и ответов на контрольные вопросы из следующего списка:

1. Запишите выражение для совместной вероятности последовательности из $L+1$ символов, вырабатываемой дискретным источником с алфавитом $A = \{a_1, a_2\ ,\ldots,\ a_m\}$ на *k*-м шаге.

2. Что такое дискретный стационарный источник?

3. Дайте определение дискретного стационарного эргодического источника.

4. Что такое дискретный источник с памятью *L*-го порядка?

5. Запишите выражение для энтропии стационарного эргодического дискретного источника с памятью *L*-го порядка.

6. Запишите выражение для энтропии стационарного эргодического дискретного источника без памяти.

7. Запишите выражение для энтропии стационарного эргодического дискретного источника с памятью 1-го порядка.

8. Что такое коэффициент избыточности дискретного источника? В каких пределах он изменяется?

9. Дайте определение производительности дискретного источника информации.

10. Что такое средняя скорость передачи символов? В каких единицах она измеряется?

Лабораторная работа № 4
Дискретные источники Маркова первого порядка

Цель работы: Изучить характеристики дискретных источников Маркова первого порядка, овладеть программными средствами их расчета в MATLAB.

4.1. Теоретические сведения

Для описания дискретных стационарных источников с памятью используется математический аппарат однородных дискретных цепей Маркова, и поэтому они называются дискретными марковскими источниками, или источниками Маркова.

Особенностью дискретных марковских источников является то, что выполнение условия стационарности этих источников еще не обеспечивает условие их эргодичности.

Наиболее просто условие эргодичности формулируется для стационарного источника Маркова первого прядка, описываемого простой марковской цепью.

Этот источник эквивалентен некоторой системе A с дискретными состояниями $a_1, a_2, \ldots, a_m$, которые она может принимать с вероятностями состояний $p_1^{(k)} = p^{(k)}(a_1)$, $p_2^{(k)} = p^{(k)}(a_2)$, …, $p_m^{(k)} = p^{(k)}(a_m)$ в последовательности шагов с номерами 0, 1, …, k, … и постоянными вероятностями переходов $p_{ji} = p(a_j \mid a_i)$ из состояния a_i в состояние a_j. При этом согласно (3.8), (3.9) вектор вероятностей состояний системы на k-м шаге имеет вид

$$\mathbf{p}_k = \begin{pmatrix} p_1^{(k)} & p_2^{(k)} & \ldots & p_m^{(k)} \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

а матрица переходных вероятностей равна

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{m1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1m} & p_{2m} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Матрица переходных вероятностей является стохастической – каждая строка матрицы **П** характеризует полную группу случайных событий и для любой строки справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ji} = 1. \qquad (4.3)$$

Процесс переходов системы A из состояния в состояние удобно изображать в виде размеченного ориентированного графа состояний, вершины которого представляют собой конкретные состояния, направленные дуги отражают возможные переходы из состояния в состояние, а возле дуг указаны соответствующие значения переходных вероятностей (рис. 4.1).

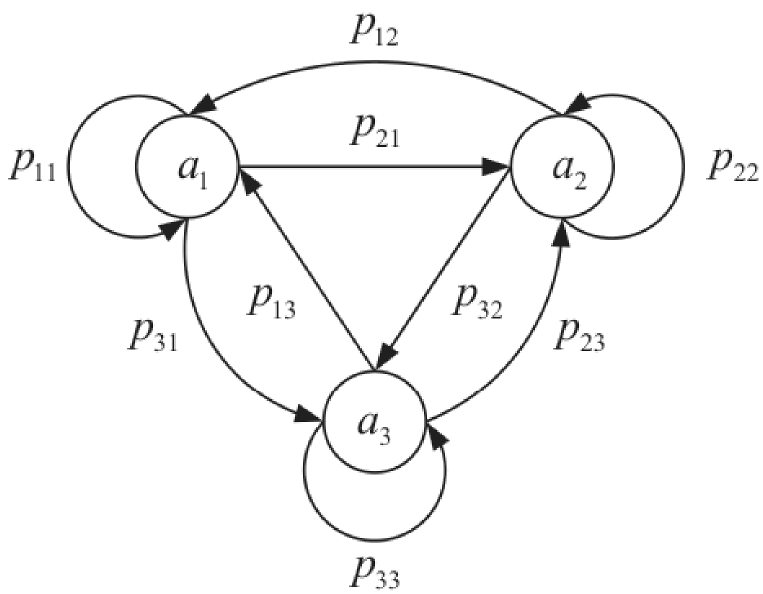

Рис. 4.1. Граф состояний дискретного марковского источника при $m = 3$

На графах такого рода вероятности задержки p_{ii} системы в состояниях a_i (диагональные элементы матрицы **П**) иногда для простоты не проставляют, поскольку в соответствии с формулой (4.3) они являются дополнением до единицы всех остальных элементов i-й строки:

$$p_{ii} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} p_{ji} . \qquad (4.4)$$

Случайный процесс, протекающий в системе A, называется марковским процессом с дискретным временем и дискретными состояниями, или марковской цепью, если для любого шага k_0 условные вероятности состояний системы в будущем (при $k > k_0$) зависят только от ее состояния на данном шаге (при $k = k_0$) и не зависят от того, на каком шаге (при $k < k_0$) и откуда система пришла в это состояние.

Данное определение означает, что для каждого шага *k* вероятность перехода из любого состояния a_i в любое состояние a_j ($i, j = 1, 2, \ldots m$), не зависит от того, когда и как система *A* оказалась в состоянии a_i. Следовательно, если обозначить символом $p_{ji}^{(k)}$ вероятность перехода системы из состояния a_i в состояние a_j за *k* шагов (при этом $p_{ji}^{(1)} = p_{ji}$ – исходные вероятности переходов на одном шаге), то зависимость от предшествующего $(k-1)$-го момента можно выразит в виде рекуррентной формулы

$$p_{ji}^{(k)} = \sum_{q=1}^{m} p_{qi} p_{jq}^{(k-1)} \ \ (k = 2, 3, \ldots). \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) называется уравнением Маркова (или частным случаем уравнения Колмогорова – Чепмена) и характеризует однородную (или гомогенную) марковскую цепь – цепь, у которой переходные вероятности p_{ji} постоянны и не зависят от номера шага *k*.

Формулу (4.5) обычно представляют в матричном виде

$$\mathbf{\Pi}^{(k)} = \mathbf{\Pi}^{k} = \mathbf{\Pi}^{k-1}\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{21}^{(k)} & \cdots & p_{m1}^{(k)} \\ p_{12}^{(k)} & p_{22}^{(k)} & \cdots & p_{m2}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1m}^{(k)} & p_{2m}^{(k)} & \cdots & p_{mm}^{(k)} \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

где $\mathbf{\Pi}^{(k)} = \mathbf{\Pi}^{k}$ – есть *k*-шаговая матрица переходов, равная *k*-й степени ($k = 1, 2, \ldots$) исходной матрицы (4.2).

Если обозначить $p_i^{(0)}$ – вероятность начального состояния системы (на нулевом шаге) для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, то вероятности

$p_i^{(k)}$ состояний системы на k-м шаге связаны с переходными вероятностями $p_{ji}^{(k)}$ рекуррентным соотношением

$$p_i^{(k)} = \sum_{q=1}^{m} p_q^{(0)} p_{iq}^{(k)} \ (k = 1, 2, \ldots). \tag{4.7}$$

Введя вектор начальных состояний $\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} & \ldots & p_m^{(0)} \end{pmatrix}$, выражение (4.7) можно представить в матричной форме

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_0 \mathbf{\Pi}^{(k)} = \mathbf{p}_0 \mathbf{\Pi}^k \ (k = 1, 2, \ldots). \tag{4.8}$$

Соотношение (4.7) можно записать в эквивалентном виде

$$p_i^{(k)} = \sum_{q=1}^{m} p_q^{(k-1)} p_{iq} \ (k = 1, 2, \ldots) \tag{4.9}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1} \mathbf{\Pi} \ (k = 1, 2, \ldots). \tag{4.10}$$

Уравнения (4.7)–(4.10) также называют уравнениями Маркова.

Для того чтобы стационарный источник Маркова 1-го порядка был эргодическим, необходимо, чтобы в эквивалентной ему однородной марковской цепи с возрастанием номера шага k устанавливался стационарный режим, в котором система A продолжает блуждать по состояниям, но вероятности состояний уже от номера шага не зависят. Такие вероятности называются предельными (финальными), не зависят от начального состояния системы и находятся с помощью предельного перехода

$$p_i = p(a_i) = \lim_{k \to \infty} p_i^{(k)}. \tag{4.11}$$

Однородная марковская цепь, в которой достигается стационарный режим, называется регулярной или эргодической.

Регулярная цепь удовлетворяет следующим условиям:

1. Все состояния системы A являются транзитивными – из любого состояния можно перейти в любое другое за конечное число шагов. Математически это означает, что существует неко-

торое значение шага k, для которого все элементы матрицы $\mathbf{\Pi}^k$ отличны от нуля.

2. Цепь не является ни циклической, ни поглощающей. Циклическая цепь – это цепь, в которой в каждое состояние можно попадать через определенное не случайное число шагов (периодов времени). Поглощающей цепью называется цепь, имеющая, по крайней мере, одно поглощающее состояние, попав в которое система сохраняет навсегда (повторяет его на каждом шаге с вероятностью, равной единице), причем из любого состояния можно попасть в поглощающее состояние за произвольное число шагов.

Циклические и поглощающие марковские цепи не позволяют адекватно описывать реальные дискретные источники и поэтому в теории информации рассматриваются только регулярные цепи.

Матрица **П** регулярной цепи называется регулярной матрицей переходных вероятностей.

Для регулярных цепей доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если **П** есть регулярная матрица переходных вероятностей, то степени $\mathbf{\Pi}^k$ при $k \to \infty$ стремятся к стохастической матрице

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{\Pi}^k = \mathbf{\Pi}_\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{p} \\ \vdots \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

где $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_m \end{pmatrix}$ – вектор-строка финальных вероятностей.

Поскольку $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, то величину финальной вероятности p_i можно интерпретировать как относительное время пребывания системы в состоянии a_i при очень большом числе шагов.

Эта теорема называется фундаментальной теоремой для регулярных цепей Маркова. Следствием этой теоремы является предельное соотношение (4.11).

Теорема 2. Если **П** есть регулярная матрица переходных вероятностей, а **p** – финальное распределение, то **p** есть единственный вероятностный вектор, такой, что

$$\mathbf{p} = \mathbf{p\Pi}. \tag{4.13}$$

Уравнение (4.13) позволяет определять величины предельных вероятностей регулярной цепи. Для этого его удобно представить в развернутом виде

$$p_i = \sum_{q=1}^{m} p_q p_{iq} \quad (i = 1, 2, \ldots m) \tag{4.14}$$

или

$$\begin{cases} (p_{11} - 1)p_1 + p_{12}p_2 + \ldots + p_{1m}p_m = 0, \\ p_{21}p_1 + (p_{22} - 1)p_2 + \ldots + p_{2m}p_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{m1}p_1 + p_{m1}p_2 + \ldots + (p_{mm} - 1)p_m = 0. \end{cases} \tag{4.15}$$

Система (4.15) имеет нулевой вектор свободных членов и, следовательно, бесконечное число решений с точностью до постоянного множителя. Для получения единственного решения необходимо отбросить одно, например последнее, уравнение системы, заменив его нормировочным условием

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1. \tag{4.16}$$

В результате система (4.15) с условием (4.16) приобретает окончательный вид

$$\begin{cases} (p_{11} - 1)p_1 + p_{12}p_2 + \ldots + p_{1m}p_m = 0, \\ p_{21}p_1 + (p_{22} - 1)p_2 + \ldots + p_{2m}p_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{m-11}p_1 + p_{m-11}p_2 + \ldots + (p_{m-1m} - 1)p_m = 0, \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1. \end{cases} \tag{4.17}$$

Система (4.17) имеет единственное решение и однозначно определяет финальные вероятности $p_1, p_2, ..., p_m$, дающие в сумме единицу.

Распределение $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_m \end{pmatrix}$ финальных вероятностей называется эргодическим распределением. Соответственно энтропия эргодического марковского источника 1-го порядка с учетом введенных обозначений для переходных и финальных вероятностей согласно (3.11) определяется выражением

$$H_2(A) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{m} p_{ji} \log p_{ji} \,. \tag{4.18}$$

4.2. Расчетные задания

Задание 4.1. Марковский источник 1-го порядка задан графом состояний, представленным на рис. 4.2.

Требуется: построить матрицу переходных вероятностей; полагая, что в начальном состоянии источник вырабатывает символ a_1, найти значения вероятностей $p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, p_3^{(k)}$ за первые пятнадцать шагов; убедиться, что марковская цепь является регулярной; найти эргодическое распределение вероятностей; рассчитать энтропию и избыточность источника.

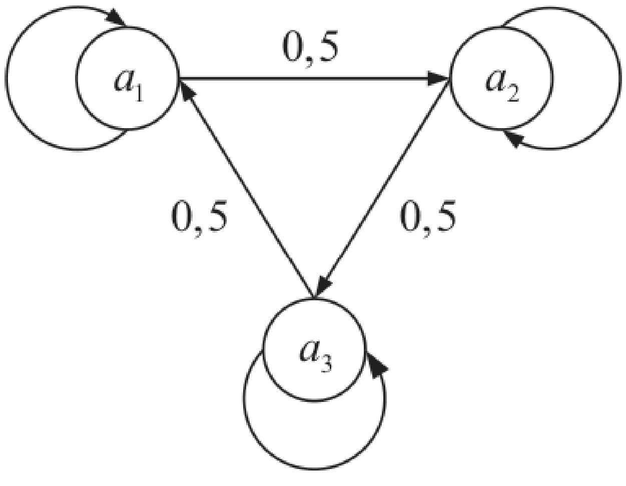

Рис. 4.2. Граф состояний источника

Решение: С учетом обозначений величин вероятностей на графе матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0{,}5 & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & 0{,}5 \\ 0{,}5 & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Недостающие вероятности находим из следующих рассуждений:

– из состояния a_1 возможны два перехода – переход $a_1 \to a_1$ с вероятностью p_{11} и переход $a_1 \to a_2$ с вероятностью $p_{21} = 0{,}5$, следовательно, $p_{31} = 0$ и $p_{11} = 1 - p_{21} = 0{,}5$;

– из состояния a_2 также возможны два перехода – $a_2 \to a_2$ и $a_2 \to a_3$ с вероятностями p_{22} и $p_{32} = 0{,}5$ соответственно, следовательно, $p_{21} = 0$ и $p_{22} = 1 - p_{32} = 0{,}5$;

– возможные переходы из состояния a_3 есть $a_3 \to a_3$ и $a_3 \to a_1$, а их вероятности составляют p_{33} и $p_{13} = 0{,}5$, откуда $p_{23} = 0$ и $p_{33} = 1 - p_{13} = 0{,}5$.

Таким образом, матрица переходных вероятностей

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix};$$

В силу того, что в начальном состоянии источник вырабатывает символ a_1, вектор начальных вероятностей состояний

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} & p_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

```
%Script_4_1
%Расчет характеристик марковского источника 1-го по-
рядка
clear all; close all; clc
%Задание анонимной функции
%----------------------------
fun=@(x) -x.*log2(x+(x==0));
%----------------------------
%Задание матрицы одношаговых переходных вероятностей
П
P=[.5 .5 0; 0 .5 .5; .5 0 .5];
```

```
disp('Матрица одношаговых переходных вероятностей
П:')
disp(P)
%Задание вектора начальных вероятностей состояний p0
p=[1 0 0];
disp('Вектор начальных вероятностей состояний p0:')
disp(p)
%Задание числа шагов K
K=15;
disp('Число шагов K:')
disp(K)
%Вычисления по шагам
for k=1:K
formatSpec = '%i-й шаг:\n';
fprintf(formatSpec,k);
disp('---------')
pk=p*P^k;
disp('Вектор вероятностей состояний:')
disp(pk)
disp('Многошаговая матрица переходных вероятностей:')
disp(P^k)
end
%Вычисление финальных вероятностей,
%энтропии и избыточности источника
disp('Вычисление финальных вероятностей:')
disp('----------------------------------')
%Определения порядка матрицы P
[~,m]=size(P);
%Задание матрицы линейной системы
A=P'-eye(m);
A(m,:)=ones(1,m);
disp('Матрица линейной системы:')
disp(A)
%Задание вектора свободных членов
b=[zeros(1,m-1) 1]';
disp('Вектор свободных членов:')
disp(b)
%Решение системы линейных уравнений
pf=linsolve(A,b);
disp('Вектор финальных вероятностей:')
disp(pf)
disp('Вычисление энтропии источника:')
disp('-------------------------------')
disp('Частные условные энтропии, бит/символ::')
```

```
H_A_a=sum(fun(P),2);
disp(H_A_a)
disp('Энтропия источника, бит/символ::')
H_A=sum(pf.*H_A_a);
disp(H_A)
disp('Избыточность источника:')
x=1-H_A/log2(m);
disp(x)
```

Задание 4.2. Граф состояний марковского источника 1-го порядка показан на рис. 4.3, *а*.

Требуется: построить матрицу переходных вероятностей; полагая, что в начальном состоянии источник вырабатывает символ a_1, найти значения вероятностей $p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, p_3^{(k)}$ за первые пять шагов; убедиться, что марковская цепь является регулярной; найти эргодическое распределение вероятностей; рассчитать энтропию и избыточность источника.

Указание: использовать методику, используемую при решении задания 4.1, а также `Script_4_1`.

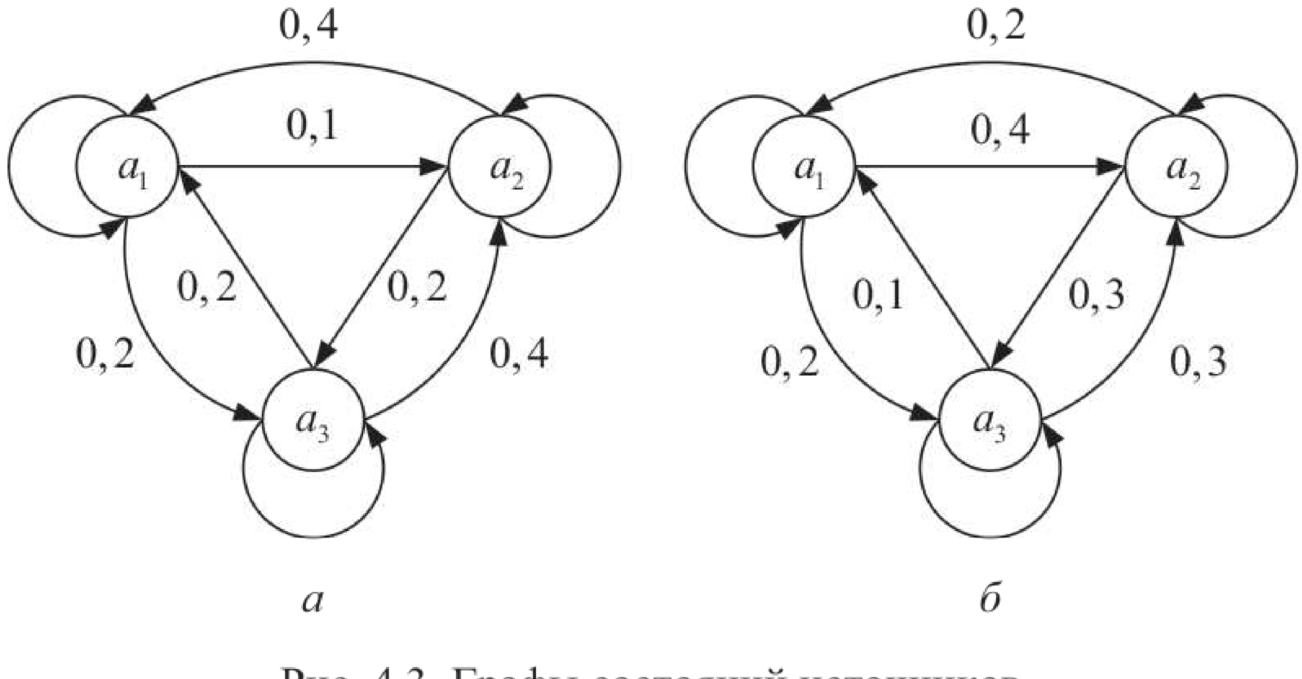

Рис. 4.3. Графы состояний источников

Задание 4.3. Граф состояний марковского источника 1-го порядка показан на рис. 4.3, *б*.

Требуется: построить матрицу переходных вероятностей; полагая, что в начальном состоянии источник вырабатывает символ a_1, найти значения вероятностей $p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, p_3^{(k)}$ за первые пять шагов; убедиться, что марковская цепь является регулярной; найти эргодическое распределение вероятностей; рассчитать энтропию и избыточность источника.

Указание: использовать методику, используемую при решении задания 4.1, а также `Script_4_1`.

Задание 4.4. Граф состояний марковского источника 1-го порядка показан на рис. 4.4, *а*.

Требуется: построить матрицу переходных вероятностей; полагая, что в начальном состоянии источник вырабатывает символ a_1, найти значения вероятностей $p_1^{(k)}$ и $p_2^{(k)}$ за первые пять шагов; убедиться, что марковская цепь является регулярной; найти эргодическое распределение вероятностей; рассчитать энтропию и избыточность источника.

Указание: использовать методику, используемую при решении задания 4.1, а также `Script_4.1`.

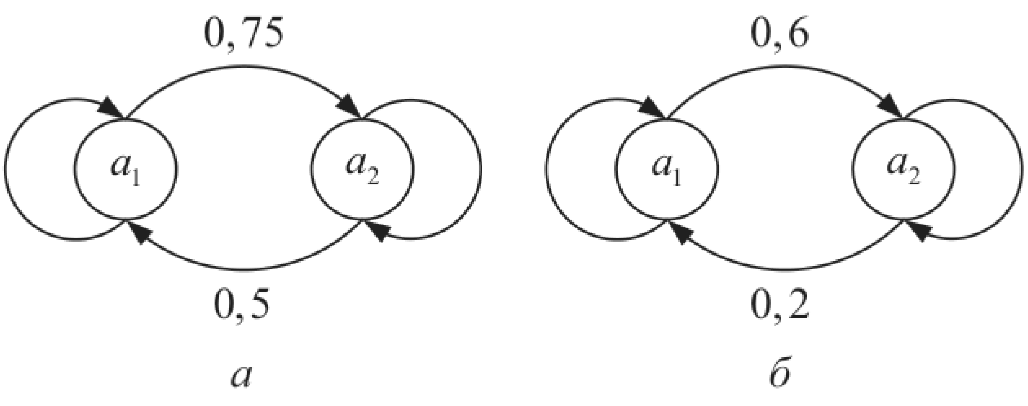

Рис. 4.4. Графы состояний источников

Задание 4.5. Марковский источник 1-го порядка задан графом состояний, показанном на рис. 4.4, *б*.

Требуется: построить матрицу переходных вероятностей; полагая, что в начальном состоянии источник вырабатывает символ a_1, найти значения вероятностей $p_1^{(k)}$ и $p_2^{(k)}$ за первые пять шагов; убедиться, что марковская цепь является регулярной; найти эргодическое распределение вероятностей; рассчитать энтропию и избыточность источника.

Указание: использовать методику, используемую при решении задания 4.1, а также `Script_4_1`.

4.3. Отчет и контрольные вопросы

Отчет по лабораторной работе оформляется в виде документа MS Word и должен содержать:

1. Название лабораторной работы (шрифт Times New Roman).

2. Результаты выполнения всех расчетных заданий, включая листинги m-файлов, копируемые из окна **Editor**, результаты их выполнения, копируемые из окна **Command Window** (шрифт Courier New), а также полученные графики, копируемые из окна **Figure** по команде **Edit** | **Copy Figure**.

Защита лабораторной работы проводится на основе представленного отчета и ответов на контрольные вопросы из следующего списка:

1. Дайте определение источника Маркова 1-го порядка как системы A с дискретными состояниями $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

2. Что такое вектор $\mathbf{p}_k$ вероятностей состояний на k-м шаге и матрица переходных вероятностей $\mathbf{П}$?

3. Изобразите граф состояний дискретного марковского источника с объемом алфавита $m = 3$.

4. Запишите рекуррентное уравнение Маркова для условных переходных вероятностей за k шагов.

5. Запишите уравнение Маркова для условных переходных вероятностей за k шагов в матричном виде.

6. Запишите рекуррентные уравнения Маркова для вероятностей состояний на k-м шаге в двух эквивалентных формах.

7. Запишите уравнения Маркова для вероятностей состояний на k-м шаге в двух эквивалентных матричных формах.

8. Сформулируйте условие эргодичности стационарного дискретного источника Маркова 1-го порядка.

9. Запишите предельное соотношение для финальных вероятностей состояний.

10. Перечислите условия, которым удовлетворяет регулярная марковская цепь.

11. Дайте определение циклической и поглощающей цепи.

12. К какой матрице стремится степень $\mathbf{П}^k$ регулярной матрицы переходных вероятностей $\mathbf{П}$ при $k \to \infty$?

13. Как можно интерпретировать величину финальной вероятности?

14. Запишите систему линейных уравнений для финальных вероятностей.

15. Запишите выражение для энтропии эргодического стационарного дискретного источника Маркова 1-го порядка.

Лабораторная работа № 5
Дискретные каналы связи

Цель работы: Изучить характеристики дискретных каналов связи, овладеть программными средствами их расчета в MATLAB.

5.1. Теоретические сведения

Дискретный канал связи – это канал, у которого поступающие на его вход и снимаемые с его выхода сигналы образуют дискретные множества символов.

Свойства дискретного канала определены, если заданы:

– алфавиты $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ и $\hat{A} = \{\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_n\}$ входных и выходных символов соответственно;

– средняя скорость передачи символов $\bar{V}$;

– либо совместные вероятности $p(a_i, \hat{a}_j)$ появления символов a_i и $\hat{a}_j$, либо вероятности $p(a_i)$ появления символов a_i и значения переходных вероятностей $p(\hat{a}_j \mid a_i)$ появления символа $\hat{a}_j$ после символа a_i, либо, наконец, вероятности $p(\hat{a}_j)$ появления символов $\hat{a}_j$ и условные апостериорные вероятности $p(a_i \mid \hat{a}_j)$ передачи символа a_i при условии, что был принят символ $\hat{a}_j$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$).

В общем случае число входных символов m может отличаться от числа символов n на выходе канала.

Дискретный канал называется стационарным, если условные вероятности $p(\hat{a}_j \mid a_i)$ не зависят от времени.

Дискретный канал называется каналом без памяти, если переходные вероятности $p(\hat{a}_j \mid a_i)$ не зависят от того, какие символы передавались и принимались ранее.

Дискретные стационарные каналы без памяти часто называют просто дискретными каналами без памяти.

Взаимная информация $I(A, \hat{A})$ между входным и выходным алфавитами A и $\hat{A}$ дискретного канала без памяти – это среднее количество информации, содержащееся в принятом символе множества $\hat{A}$ относительно переданного символа множества A.

Выражение для определения средней взаимной информации можно представить в двух эквивалентных формах.

Первая форма записи имеет вид

$$I(A,\hat{A}) = H(A) - H(A\,|\,\hat{A}) \tag{5.1}$$

и включает в себя следующие энтропии:

– энтропию источника с алфавитом A

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{m} p(a_i)\log p(a_i); \tag{5.2}$$

– условную энтропию, равную среднему количеству потерянной в канале информации, или ненадежность канала

$$H(A\,|\,\hat{A}) = -\sum_{j=1}^{n} p(\hat{a}_j)\sum_{i=1}^{m} p(a_i\,|\,\hat{a}_j)\log p(a_i\,|\,\hat{a}_j). \tag{5.3}$$

Вторая форма записи определяется выражением

$$I(A,\hat{A}) = H(\hat{A}) - H(\hat{A}\,|\,A), \tag{5.4}$$

в которое входят следующие энтропии:

– энтропия множества выходных символов $\hat{A}$

$$H(\hat{A}) = -\sum_{j=1}^{n} p(\hat{a}_j)\log p(\hat{a}_j); \tag{5.5}$$

– условная энтропия, равная среднему количеству бесполезной части информации, содержащейся в принятых символах из-за воздействия помех, или энтропия шума

$$H(\hat{A}\,|\,A) = -\sum_{i=1}^{m} p(a_i)\sum_{j=1}^{n} p(\hat{a}_j\,|\,a_i)\log p(\hat{a}_j\,|\,a_i). \tag{5.6}$$

Зависимости (5.1), (5.4) наглядно иллюстрируются диаграммой, показанной на рис. 5.1.

Свойства взаимной информации:

1. Взаимная информация обладает свойством симметрии

$$I(A,\hat{A}) = I(\hat{A},A), \tag{5.7}$$

т. е. алфавит $\hat{A}$ содержит столько же информации относительно A, что и алфавит A относительно $\hat{A}$.

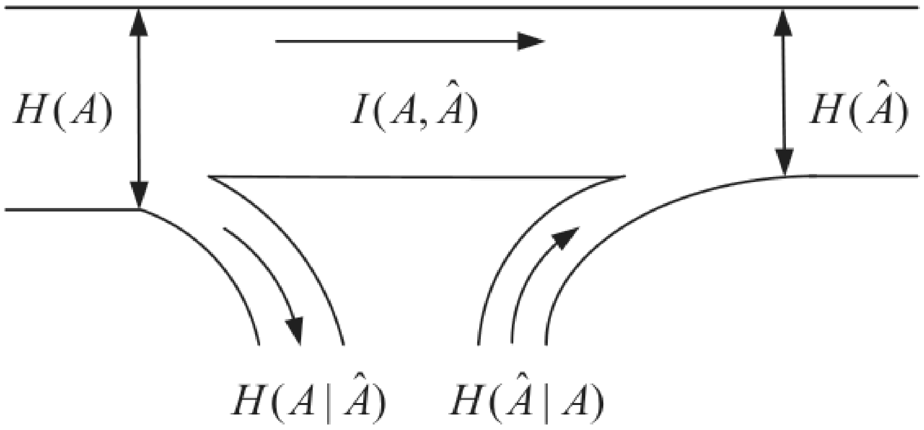

Рис. 5.1. Диаграмма информационного потока

2. Величина взаимной информации ограничена неравенствами

$$0 \le I(A,\hat{A}) \le H(A). \tag{5.8}$$

3. При обрыве канала, когда алфавиты A и $\hat{A}$ становятся статистически независимыми, взаимная информация обращается в нуль

$$I(A,\hat{A}) = 0, \tag{5.9}$$

поскольку в формулах (5.1) и (5.4) условные энтропии равны безусловным: $H(A\,|\,\hat{A}) = H(A)$, $H(\hat{A}\,|\,A) = H(\hat{A})$.

4. При отсутствии помех взаимная информация максимальна и равна энтропии источника

$$I(A,\hat{A}) = H(A), \tag{5.10}$$

когда по реализации символа из алфавита $\hat{A}$ можно однозначно восстановить переданный символ из алфавита A и в выражениях (5.1) и (5.4) $H(A\,|\,\hat{A}) = H(\hat{A}\,|\,A) = 0$.

5. Еще одной эквивалентной формой записи для взаимной информации является выражение

$$I(A,\hat{A}) = H(A) + H(\hat{A}) - H(A,\hat{A}), \tag{5.11}$$

где

$$H(A,\hat{A}) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p(a_i,\hat{a}_j)\log p(a_i,\hat{a}_j) \qquad (5.12)$$

– совместная энтропия алфавитов A и $\hat{A}$; $p(a_i,\hat{a}_j)$ – совместная вероятность появления символов a_i и $\hat{a}_j$.

Выражение (5.11) легко получить, если учесть, что в соответствии с равенством (2.13) совместная энтропия алфавитов A и $\hat{A}$ составляет

$$H(A,\hat{A}) = H(\hat{A}) + H(A\,|\,\hat{A}),$$

и, следовательно, условная энтропия равна

$$H(A\,|\,\hat{A}) = H(A,\hat{A}) - H(\hat{A}).$$

Подстановка в формулу (5.1) этого значения условной энтропии дает выражение (5.11).

Рассмотренные свойства удобно иллюстрировать диаграммами Венна – Эйлера (рис. 5.2).

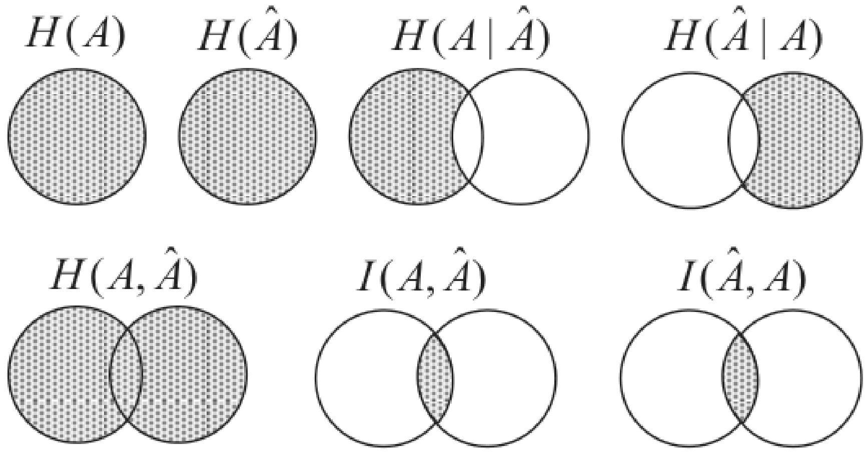

Рис. 5.2. Соотношения между энтропиями

На этих диаграммах заштрихованными областями обозначены энтропии $H(A)$ и $H(\hat{A})$ входного и выходного алфавитов, условные энтропии $H(A\,|\,\hat{A})$ и $H(\hat{A}\,|\,A)$, совместная энтропия $H(A,\hat{A})$, а также взаимная информация $I(A,\hat{A})$ и $I(\hat{A},A)$.

Основные характеристики дискретного канала без памяти:

1. Скорость передачи информации по каналу связи – это среднее количество информации, получаемое на выходе канала в единицу времени

$$I'(A,\hat{A}) = \frac{1}{\overline{\tau}} I(A,\hat{A}) = \overline{V} I(A,\hat{A}), \tag{5.13}$$

где $I(A,\hat{A})$ – взаимная информация между входным и выходным алфавитами; $\overline{\tau}$, $\overline{V}$ – средняя длительность и скорость передачи символов соответственно.

2. Пропускная способность канала связи – это наибольшая скорость передачи информации при заданных свойствах канала

$$C = \max_{\mathbf{p}(A)} I'(A,\hat{A}) = \overline{V} \max_{\mathbf{p}(A)} I(A,\hat{A}), \tag{5.14}$$

взятая по всем возможным законам распределения вероятностей входных символов $\mathbf{p}(A) = \begin{pmatrix} p(a_1) & p(a_2) & \dots & p(a_m) \end{pmatrix}$.

Скорость передачи информации и пропускная способность имеют размерность бит в секунду.

С математической точки зрения, поиск пропускной способности сводится к поиску распределения вероятности $\mathbf{p}(A)$ входных символов источника, обеспечивающего в выражении (5.14) максимум информации

$$I_{\max} = \max_{\mathbf{p}(A)} I(A,\hat{A}) \tag{5.15}$$

при заданной матрице условных переходных вероятностей

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p(\hat{a}_1 \mid a_1) & p(\hat{a}_2 \mid a_1) & \dots & p(\hat{a}_n \mid a_1) \\ p(\hat{a}_1 \mid a_2) & p(\hat{a}_2 \mid a_2) & \dots & p(\hat{a}_n \mid a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(\hat{a}_1 \mid a_m) & p(\hat{a}_2 \mid a_m) & \dots & p(\hat{a}_n \mid a_m) \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

и естественных ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} p(a_i) = 1 \tag{5.17}$$

и

$$p(a_i) \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, m). \tag{5.18}$$

В общем случае для решения оптимизационной задачи (5.15)–(5.18) необходимо использовать численные методы. При этом, поскольку целевая функция (5.15) является выпуклой функцией как входного, так и выходного распределений вероятностей, гарантируется достижение глобального максимума.

Однако возможно и аналитическое вычисление пропускной способности в случаях, когда матрица (5.16) обладает некоторыми специфическими свойствами, определяющими модель дискретного канала без памяти.

Дискретный канал называется симметричным по входу, если все строки матрицы (5.16) являются перестановками одного и того же множества вероятностей $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$. Из этого свойства следует, что частные условные энтропии

$$H(\hat{A} \mid a_i) = -\sum_{j=1}^{n} p(\hat{a}_j \mid a_i) \log p(\hat{a}_j \mid a_i) = -\sum_{j=1}^{n} \pi_j \log \pi_j \quad (5.19)$$

имеют одинаковое значение для всех входных символов a_i и, следовательно, шум в канале в одинаковой степени нарушает передачу каждого из m возможных входных символов.

Дискретный канал называется симметричным по выходу, когда все столбцы матрицы (5.16) являются перестановками одного и того же множества вероятностей $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$. Отсюда следует, что для любого симметричного по выходу канала равномерное распределение $p(a_i) = \frac{1}{m}$ (i = 1, 2, …, m) на входе, как следует из соотношения $p(\hat{a}_j) = \sum_{i=1}^{m} p(a_i) p(\hat{a}_j \mid a_i)$, приводит к также равномерному распределению вероятностей на выходе канала $p(\hat{a}_j) = \frac{1}{n}$ (j = 1, 2, …, n).

Доказано, что пропускная способность дискретного симметричного по входу канала без памяти удовлетворяет неравенству

$$C \le \overline{V}\left[\log n + \sum_{j=1}^{n} \pi_j \log \pi_j\right], \quad (5.20)$$

где $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ – элементы каждой из строк матрицы (5.16). В этом случае для матриц **П** определенного вида при равномерном распределении вероятностей символов на входе знак неравенства в (5.20) может переходить в знак равенства.

Дискретный канал называется m-ичным (m-арным, m-позиционным) каналом без памяти, если число символов на его входе равно числу выходных символов и $m = n$. Для такого канала матрица (5.16) является квадратной матрицей m-го порядка.

Дискретный m-ичный канал без памяти называется симметричным, если он симметричен как по входу, так и по выходу и, следовательно, элементы всех строк и столбцов матрицы (5.16) являются перестановками одного и того же множества вероятностей $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$. Доказано, что пропускная способность такого канала определяется выражением

$$C = \overline{V}\left[\log m + \sum_{i=1}^{m} \pi_i \log \pi_i\right] \tag{5.21}$$

и достигается, когда распределение вероятностей на входе и выходе канала равномерно

$$p(a_i) = p(\hat{a}_i) = \frac{1}{m} \ (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{5.22}$$

Рассмотренные типы каналов без памяти имеют следующие важные частные случаи.

1. Симметричный m-ичный канал без памяти. У такого канала $m = n$ и квадратная матрица переходных вероятностей

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p(\hat{a}_1 \mid a_1) & p(\hat{a}_2 \mid a_1) & \ldots & p(\hat{a}_m \mid a_1) \\ p(\hat{a}_1 \mid a_2) & p(\hat{a}_2 \mid a_2) & \ldots & p(\hat{a}_m \mid a_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p(\hat{a}_1 \mid a_m) & p(\hat{a}_2 \mid a_m) & \ldots & p(\hat{a}_m \mid a_m) \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1-p & p/(m-1) & \ldots & p/(m-1) \\ p/(m-1) & 1-p & \ldots & p/(m-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p/(m-1) & p/(m-1) & \ldots & 1-p \end{pmatrix}, \tag{5.23}$$

где p – вероятность ошибки при приеме m-ичного символа.

Пропускная способность такого канала согласно (5.21) определяется выражением

$$C = \overline{V}\left[\log m + (1-p)\log(1-p) + p\log\frac{p}{m-1}\right] \qquad (5.24)$$

и достигается при равномерном распределении вероятностей символов на входе и выходе канала (5.22).

Свойства пропускной способности (5.24):

– пропускная способность ограничена неравенствами

$$0 \le C \le \overline{V}\log m; \qquad (5.25)$$

– при $p = 0$, когда помехи в канале отсутствуют, пропускная способность равна наибольшей производительности источника информации

$$C = \overline{V}\log m. \qquad (5.26)$$

Такой канал часто называют симметричным m-ичным каналом без помех;

– при $p = \dfrac{m-1}{m}$, когда в (5.23) $p(\hat{a}_j \mid a_i) = \dfrac{1}{m}$, происходит обрыв канала и $C = 0$.

2. Двоичный симметричный канал без памяти. Данный канал является частным случаем m-ичного симметричного канала при $m = 2$, когда матрица переходных вероятностей (5.23) имеет особенно простой вид

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p(\hat{a}_1 \mid a_1) & p(\hat{a}_2 \mid a_1) \\ p(\hat{a}_1 \mid a_2) & p(\hat{a}_2 \mid a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \qquad (5.27)$$

где p – вероятность ошибки при приеме одного двоичного символа (вероятность ошибки на бит информации).

Для иллюстрации процесса передачи двоичных символов по этому каналу обычно используется диаграмма переходных вероятностей, показанная на рис. 5.3.

Формула для пропускной способности вытекает из выражения (5.24) при $m = 2$ и имеет вид

$$C = \overline{V}\left[1 + (1-p)\log(1-p) + p\log p\right]. \qquad (5.28)$$

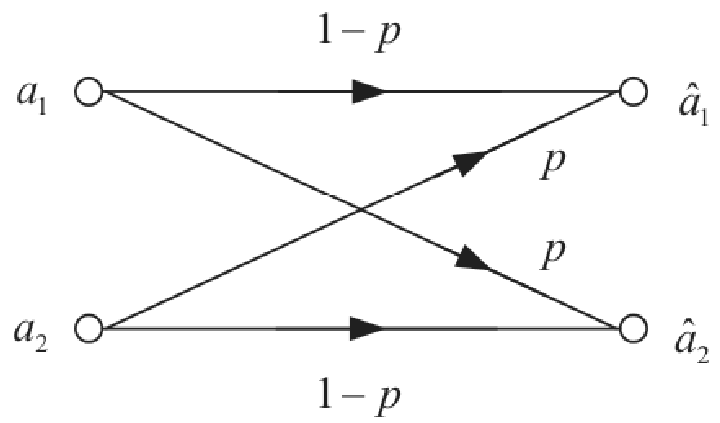

Рис. 5.3. Диаграмма переходных вероятностей
двоичного симметричного канала без памяти

Пропускная способность (5.28) достигается при $p(a_i) = p(\hat{a}_i) = 1/2$ (i = 1, 2) и имеет следующие свойства:

– пропускная способность ограничена неравенствами

$$0 \le C \le \overline{V}; \tag{5.29}$$

– при отсутствии помех, когда $p = 0$, пропускная способность равна средней скорости модуляции

$$C = \overline{V}; \tag{5.30}$$

– при обрыве канала, когда $p = 1/2$, пропуская способность равна нулю $C = 0$.

3. Двоичный симметричный канал со стираниями. Этот канал является симметричным по входу, но несимметричным по выходу и имеет размерности m = 2 и n = 3. Он отличается от двоичного симметричного канала без памяти наличием дополнительного выходного символа $\hat{a}_3$ (символа стирания), который с вероятностью q может появиться при передаче каждого из двух входных символов. Матрица переходных вероятностей (5.16) имеет вид

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p(\hat{a}_1 \mid a_1) & p(\hat{a}_2 \mid a_1) & p(\hat{a}_3 \mid a_1) \\ p(\hat{a}_1 \mid a_2) & p(\hat{a}_2 \mid a_2) & p(\hat{a}_3 \mid a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p-q & p & q \\ p & 1-p-q & q \end{pmatrix}, \tag{5.31}$$

где p – вероятность ошибочного приема двоичного символа, q – вероятность стирания символа.

Из матрицы (5.31) видно, что наряду с решениями о переданном символе a_1 или a_2, здесь иногда принимается решение о стирании принятого символа. Стирание происходит в случае, когда переданный символ искажен так, что не может быть опознан и входными событиями могут быть символы a_1 или a_2 с равными вероятностями.

Диаграмма переходных вероятностей показана на рис. 5.4.

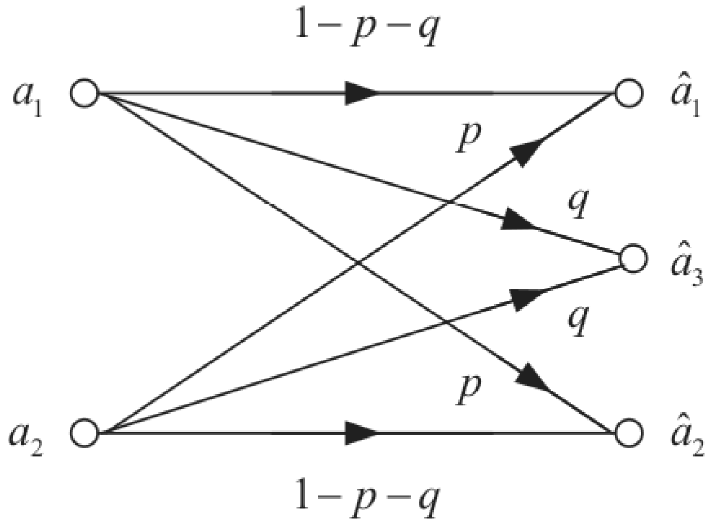

Рис. 5.4. Диаграмма переходных вероятностей двоичного симметричного канала со стираниями

Пропускная способность определяется выражением

$$C = \overline{V}\left\{(1-q)\left[1-\log(1-q)\right]+\right.$$
$$\left.+(1-p-q)\log(1-p-q)+p\log p\right\} \tag{5.32}$$

и достигается при $p(a_i)=1/2$ (i = 1, 2), когда распределение выходных символов $p(\hat{a}_1)=p(\hat{a}_2)=1/2(1-q)$, $p(\hat{a}_3)=q$.

Свойства пропускной способности (5.32):

– пропускная способность ограничена неравенствами

$$0 \le C \le \overline{V}(1-q); \tag{5.33}$$

– при $p=0$, когда помехи в канале отсутствуют, пропускная способность равна

$$C=\overline{V}(1-q); \tag{5.34}$$

– при обрыве канала, когда условные переходные вероятности $p(\hat{a}_1 \mid a_i)=p(\hat{a}_2 \mid a_i)$ $(i=1,\ 2)$ и $p=(1-q)/2$, пропускная способность равна нулю $C=0$.

При $q = 0$ формула (5.32) преобразуется в выражение (5.28) для пропускной способности двоичного симметричного канала.

5.2. Расчетные задания

Задание 5.1. Вероятности появления символов источника с алфавитом A составляют: $p(a_1) = 0{,}7$; $p(a_2) = 0{,}2$; $p(a_3) = 0{,}1$. Матрица условных переходных вероятностей дискретного канала без памяти имеет вид

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p(\hat{a}_1 \mid a_1) & p(\hat{a}_2 \mid a_1) & p(\hat{a}_3 \mid a_1) \\ p(\hat{a}_1 \mid a_2) & p(\hat{a}_2 \mid a_2) & p(\hat{a}_3 \mid a_2) \\ p(\hat{a}_1 \mid a_3) & p(\hat{a}_2 \mid a_3) & p(\hat{a}_2 \mid a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}98 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}1 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Рассчитать: энтропию входных символов $H(A)$ и энтропию шума $H(\hat{A} | A)$; энтропию выходных символов $H(\hat{A})$ и ненадежность канала $H(A | \hat{A})$; совместную энтропию $H(A, \hat{A})$ и среднюю взаимную информацию $I(A, \hat{A})$ тремя способами по формулам (5.1), (5.4) и (5.11).

```
%Script_5_1
%Расчет взаимной информации дискретного канала без
памяти
%при заданном векторе вероятностей символов входного
алфавита
%и матрице условных переходных вероятностей П
clear all; close all; clc
%Задание анонимной функции
%---------------------------
fun=@(x) -x.*log2(x+(x==0));
%---------------------------
%Задание вероятностей символов входного алфавита
p_in=[.7 .2 .1];
disp('Вероятности символов входного алфавита:')
disp(p_in)
%Задание условных переходных вероятностей
PI=[.98 .01 .01; .1 .75 .15; .2 .3 .5];
disp('Матрица условных переходных вероятностей П):')
disp(PI)
```

```
%Определение объема алфавита
[m, n]=size(PI);
%Проверка равенства m = n
if m~=n
disp('Матрица должна быть квадратной!')
end
disp('Объем алфавита:')
disp(m)
%Рачет энтропии входного алфавита
H_in=sum(fun(p_in));
disp('Энтропия входного алфавита, бит/символ:')
disp(H_in)
%Расчет энтропиии шума
H_noise=sum(p_in'.*sum(fun(PI),2));
disp('Энтропия шума, бит/символ:')
disp(H_noise)
%Расчет элементов матрицы совместных вероятностей
P_joint=bsxfun(@times,PI,p_in(:));
disp('Матрица совместных вероятностей символов:')
disp(P_joint)
%Расчет вероятностей символов выходного алфавита
p_out=sum(P_joint,1);
disp('Вероятности символов выходного алфавита:')
disp(p_out)
%Рачет энтропии выходного алфавита
H_out=sum(fun(p_out));
disp('Энтропия выходного алфавита, бит/символ:')
disp(H_out)
%Расчет элементов матрицы условных апостериорных
вероятностей
P_ap=bsxfun(@rdivide,P_joint,p_out(:)');
disp('Матрица условных апостериорных вероятностей:')
disp(P_ap)
%Расчет ненадежности канала
H_insec=sum(p_out.*sum(fun(P_ap),1));
disp('Ненадежность канала, бит/символ:');
disp(H_insec)
%Расчет взаимной информации
I=H_in-H_insec;
disp('Взаимная информация, бит/символ - первая
форма:')
disp(I)
I=H_out-H_noise;
```

```
disp('Взаимная информация, бит/символ - вторая
форма:')
disp(I)
%Расчет совместной энтропии
H_joint=sum(sum(fun(P_joint)));
disp('Совместная энтропия входного и выходного
алфавитов, бит/символ:')
disp(H_joint)
I=H_in+H_out-H_joint;
disp('Взаимная информация, бит/символ - общая
формула:')
disp(I)
```

Задание 5.2. Вероятности появления символов источника с алфавитом A составляют: $p(a_1) = 0{,}5$; $p(a_2) = 0{,}3$; $p(a_3) = 0{,}2$. Матрица условных переходных вероятностей дискретного канала без памяти имеет вид

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}15 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Вычислить: энтропию входных символов $H(A)$ и энтропию шума $H(\hat{A}\,|\,A)$; энтропию выходных символов $H(\hat{A})$ и ненадежность канала $H(A\,|\,\hat{A})$; совместную энтропию $H(A,\hat{A})$ и среднюю взаимную информацию $I(A,\hat{A})$ тремя способами.

Указание: использовать `Script_5_1`.

Задание 5.3. Вероятности появления символов источника с алфавитом A составляют: $p(a_1) = 0{,}9$; $p(a_2) = 0{,}1$. Матрица условных переходных вероятностей дискретного канала без памяти имеет вид

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p(\hat{a}_1\,|\,a_1) & p(\hat{a}_2\,|\,a_1) \\ p(\hat{a}_1\,|\,a_2) & p(\hat{a}_2\,|\,a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}84 & 0{,}16 \\ 0{,}04 & 0{,}96 \end{pmatrix}.$$

Определить: энтропию входных символов $H(A)$, ненадежность канала $H(A|\hat{A})$ и среднюю взаимную информацию $I(A,\hat{A})$ по формуле (5.1).

Вычислить максимальное значение $I_{\max}$ взаимной информации по формуле (5.15) с учетом ограничений (5.17), (5.18) и найти распределение вероятностей входного алфавита, обеспечивающее его достижение.

Указание: файл внешней функции `fun_H_insec` сохранить до его использования в основной программе.

```
%Script_5_3
%Расчет взаимной информации дискретного канала без
памяти
%при заданном векторе вероятностей символов входного
алфавита
%и матрице условных переходных вероятностей П
%Определение максимального значения взаимной
информации
%и распределения вероятностей входного алфавита,
обеспечивающее
%достижения максимума
%Используется внешняя функция fun_H_insec
clear all; close all; clc
%Задание анонимной функции
%---------------------------
fun=@(x) -x.*log2(x+(x==0));
%---------------------------
%Задание вероятностей символов входного алфавита
p_in=[.9 .1];
disp('Вероятности символов входного алфавита:')
disp(p_in)
%Задание условных переходных вероятностей
PI=[.84 .16;.04 .96];
disp('Матрица условных вероятностей П:')
disp(PI)
%Определение объема алфавита
m=length(p_in);
disp('Объем алфавита:')
disp(m)
%Рачет энтропии входного алфавита
H_in=sum(fun(p_in));
```

```
disp('Энтропия входного алфавита, бит/символ:')
disp(H_in)
%Расчет элементов матрицы совместных вероятностей
P_joint=bsxfun(@times,PI,p_in(:));
disp('Матрица совместных вероятностей символов:')
disp(P_joint)
%Расчет вероятностей символов выходного алфавита
p_out=sum(P_joint,1);
disp('Вероятности символов выходного алфавита:')
disp(p_out)
%Расчет элементов матрицы условных апостериорных
вероятностей
P_ap=bsxfun(@rdivide,P_joint,p_out(:)');
disp('Матрица условных апостериорных вероятностей:')
disp(P_ap)
%Расчет ненадежности канала
H_insec=sum(p_out.*sum(fun(P_ap),1));
disp('Ненадежность канала, бит/символ:');
disp(H_insec)
%Расчет взаимной информации
I=H_in-H_insec;
disp('Взаимная информация, бит/символ:')
disp(I)
%Задание целевой функции
fun_I_max=@(p_in) -(sum(fun(p_in))-
fun_H_insec(p_in,PI));
%Задание линейных ограничений-равенств
disp('Ограничения целевой функции:')
A=-eye(m);
disp('Матрица линейных ограничений-равенств:')
disp(A)
b=zeros(m,1);
disp('Вектор линейных ограничений-равенств:')
disp(b)
%Задание линейных ограничений-неравенств
Aeq=ones(1,m);
disp('Матрица линейных ограничений-неравенств:')
disp(Aeq)
beq=1;
disp('Вектор линейных ограничений-неравенств:')
disp(beq)
%Вычисление экстремума
options=optimoptions(@fmincon);
[p,I_max]=fmincon(fun_I_max,p_in,A,b,Aeq,beq);
```

```
disp('Максимальное значение взаимной информации, 
бит/символ:')
disp(-I_max)
disp('Оптимальное распределение вероятностей входных 
символов:')
disp(p)

function y=fun_H_insec(p,PI)
%Расчет ненадежности дискретного канала H_insec
%p - вектор вероятностей символов
%PI - матрица переходных вероятностей П
%Задание анонимной функции
%---------------------------
fun=@(x) -x.*log2(x+(x==0));
%---------------------------
P=bsxfun(@times,PI,p(:));
pa=sum(P,1);
PA=bsxfun(@rdivide,P,pa(:)');
y=sum(pa.*sum(fun(PA),1));
```

Задание 5.4. Вероятности появления символов источника с алфавитом A составляют: $p(a_1) = 0{,}8$; $p(a_2) = 0{,}2$. Матрица условных переходных вероятностей дискретного канала без памяти имеет вид

$$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 \\ 0,125 & 0,875 \end{pmatrix}.$$

Определить: энтропию входных символов $H(A)$, ненадежность канала $H(A\,|\,\hat{A})$ и среднюю взаимную информацию $I(A,\hat{A})$ по формуле (5.1).

Вычислить максимальное значение $I_{\max}$ взаимной информации по формуле (5.15) с учетом ограничений (5.17), (5.18) и найти распределение вероятностей входного алфавита, обеспечивающее его достижение.

Указание: использовать `Script_5_3`.

Задание 5.5. По формуле (5.24) построить графики зависимости нормированной пропускной способности $C/\bar{V}$ симметричного m-ичного канала без памяти от вероятности ошибки p

при значениях объема алфавита $m = 2, 4, 8, 16$. Рассчитать значения вероятности ошибки при обрыве канала.

```
%Script_5_5
%Расчет пропускной способности m-ичного симметричного
канала без памяти
%при различных значениях m
clear all; close all; clc
%Задание значений вероятности ошибки
p=0:.001:1;
%Определение длины вектора
np=length(p);
%Задание значений m
vm=[2 4 8 16];
%Определение длины вектора
nm=length(vm);
%Задание размерностей массивов
pe=zeros(1,nm);
c=zeros(nm,np);
str= cell(1,nm);
%Расчет пропускной способности
for k=1:nm
m=vm(k);
pe(k)=(m-1)/m;
c(k,:)=log2(m)+(1-p).*log2(1-p)+p.*log2(p/(m-1));
str{k}=['m = ',num2str(m)];
end
%Построение графиков
plot(p,c)
grid
hold on
plot(pe,0,'r.')
xlabel('Вероятность ошибки p')
ylabel('Пропускная способность C / V, бит/символ')
title('Пропускная способность m-ичного симметричного
канала без памяти')
legend(str)
%Вывод значений вероятности ошибки при обрыве канала
disp('Вероятности ошибки при обрыве канала:')
A=[vm;pe];
fprintf('%3s %4s\n','m','p');
fprintf('%3i  %5.4f\n',A);
```

Задание 5.6. По формуле (5.28) построить график зависимости нормированной пропускной способности $C/\bar{V}$ двоичного симметричного канала без памяти от вероятности ошибки *p*.

```
%Script_5_6
%Расчет пропускной способность двоичного
симметричного канала без памяти
clear all; close all; clc
%Задание значений вероятности ошибки
p=0:.001:1;
%Расчет пропускной способности
c=1+(1-p).*log2(1-p)+p.*log2(p);
%Построение графика
plot(p,c)
grid
xlabel('Вероятность ошибки p')
ylabel('Пропускная способность C / V')
title('Пропускная способность двоичного симметричного
канала без памяти')
```

Задание 5.7. По формуле (5.32) построить графики зависимости нормированной пропускной способности $C/\bar{V}$ двоичного симметричного канала со стираниями от вероятности ошибки *p* $(0 \le p \le 1/2)$ при значениях вероятности стирания принятого символа $q = 0$; 0,2; 0,4; 0,5. Рассчитать значения вероятности ошибки при обрыве канала.

```
%Script_5_7
%Расчет пропускной способности двоичного
симметричного канала со стираниями
clear all; close all; clc
%Задание значений вероятности ошибки
p=0:.001:1/2;
%Определение длины вектора
np=length(p);
%Задание значений q
vq=[0 .2 .4 .5];
%Определение длины вектора
nq=length(vq);
%Задание размерностей массивов
pe=zeros(1,nq);
```

```
c=zeros(nq,np);
str= cell(1,nq);
%Расчет пропускной способности
for k=1:nq
q=vq(k);
pe(k)=(1-q)/2;
c(k,:)=(1-q)*(1-log2(1-q))+(1-p-q).*log2(1-p-
q)+p.*log2(p);
str{k}=['q = ',num2str(q)];
end
%Построение графиков
plot(p,c)
grid
hold on
plot(pe,0,'r.')
xlabel('Вероятность ошибки p')
ylabel('Пропускная способность C / V')
title('Пропускная способность двоичного симметричного
канала со стираниями')
legend(str)
ylim([0 1])
%Вывод значений вероятности ошибки при обрыве канала
disp('Вероятности ошибки при обрыве канала:')
A=[vq;pe];
fprintf('%3s %6s\n','q','p');
fprintf('%5.4f %5.4f\n',A);
```

5.3. Отчет и контрольные вопросы

Отчет по лабораторной работе оформляется в виде документа MS Word и должен содержать:

1. Название лабораторной работы (шрифт Times New Roman).

2. Результаты выполнения всех расчетных заданий, включая листинги m-файлов, копируемые из окна **Editor**, результаты их выполнения, копируемые из окна **Command Window** (шрифт Courier New), а также полученные графики, копируемые из окна **Figure** по команде **Edit** | **Copy Figure**.

Защита лабораторной работы проводится на основе представленного отчета и ответов на контрольные вопросы из следующего списка:

1. Дайте определение дискретного канала связи.

2. Перечислите, какие параметры определяют свойства дискретного канала связи.

3. Какой дискретный канал называется стационарным?

4. Что такое дискретный канал без памяти?

5. Дайте определение взаимной информации $I(A, \hat{A})$ между входным и выходным алфавитами A и $\hat{A}$ дискретного канала без памяти.

6. Приведите первую форму записи для взаимной информации.

7. Приведите вторую форму записи для взаимной информации.

8. Перечислите основные свойства взаимной информации.

9. Чему равна взаимная информация при обрыве канала?

10. Чему равна взаимная информация при отсутствии помех?

11. Изобразите диаграмму информационного потока.

12. Изобразите диаграммы Венна – Эйлера, поясняющие соотношения между энтропиями входного и выходного алфавитов канала A и $\hat{A}$.

13. Приведите третью форму записи для взаимной информации.

14. Что такое скорость передачи информации по дискретному каналу связи?

15. Дайте определение пропускной способности дискретного канала связи.

16. Сформулируйте оптимизационную задачу поиска пропускной способности дискретного канала связи.

17. Дайте определения симметричного по входу и по выходу канала.

18. Дайте определения m-ичного и m-ичного симметричного канала.

19. Запишите общее выражение для пропускной способности m-ичного симметричного канала. При каком распределении вероятностей символов на входе и выходе канала она достигается?

20. Какой вид имеет матрица переходных вероятностей симметричного m-ичного канала без памяти при заданной вероятности ошибочного приема символа p?

21. Запишите выражение для пропускной способности симметричного m-ичного канала без памяти при известной вероятности ошибки p.

22. Перечислите свойства пропускной способности симметричного m-ичного канала без памяти.

23. Какой вид имеет матрица переходных вероятностей двоичного симметричного канала без памяти при заданной вероятности ошибочного приема двоичного символа p?

24. Изобразите диаграмму переходных вероятностей двоичного симметричного канала без памяти.

25. Запишите выражение для пропускной способности двоичного симметричного канала без памяти при известной вероятности ошибки p.

26. Перечислите свойства пропускной способности двоичного симметричного канала без памяти.

27. Какой вид имеет матрица переходных вероятностей двоичного симметричного канала со стираниями при заданной битовой вероятности ошибки p и вероятности стирания символа q?

28. Изобразите диаграмму переходных вероятностей двоичного симметричного канала со стираниями.

29. Запишите выражение для пропускной способности двоичного симметричного канала со стираниями при известной вероятности ошибки p и вероятности стирания символа q.

30. Перечислите свойства пропускной способности двоичного симметричного канала со стираниями.

Лабораторная работа № 6
Непрерывные источники информации

Цель работы: Изучить характеристики непрерывных источников информации, овладеть программными средствами их расчета в MATLAB.

6.1. Теоретические сведения

Непрерывный источник информации – это источник, который вырабатывает непрерывные сообщения (сигналы), являющиеся реализациями непрерывного случайного процесса $U(t)$.

Сечение случайного сигнала $U(t)$ – это случайная величина $U = U(t)$, соответствующая фиксированному значению времени t.

Реализация (траектория) случайного сигнала $U(t)$ – это неслучайная функция $u_i(t)$ времени t, равным которой может оказаться случайный сигнал в результате i-го испытания. Множество $\{\, u_i(t) \,\}$ отдельных реализаций образует ансамбль реализаций случайного сигнала $U(t)$.

Случайный сигнал $U(t)$ в общем случае полностью описывается с помощью многомерной (m-мерной) плотности распределения вероятностей $f(u_1, u_2, \ldots, u_m;\ t_1, t_2, \ldots, t_m)$, где u_1, u_2, …, u_m – аргументы плотности распределения, связанные с соответствующими сечениями сигнала в фиксированные моменты времени $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m$.

Случайный сигнал $U(t)$ называется стационарным в узком (строгом) смысле, если все его многомерные плотности распределения вероятностей любого порядка m инвариантны относительно сдвига по времени.

В частности, его одномерная плотность распределения не зависит от времени

$$f(u;\ t_1) = f(u;\ t_1 - t_1) = f(u;\ 0) = f(u), \qquad (6.1)$$

двумерная плотность зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$

$$f(u_1,\ u_2;\ t_1,\ t_2) = \\ = f(u_1,\ u_2;\ t_1 - t_1,\ t_2 - t_1) = f(u_1,\ u_2;\ \tau), \tag{6.2}$$

а m-мерная плотность распределения зависит лишь от $m-1$ временных параметров $\tau_{i-1} = t_i - t_1$, $i = 2,\ 3,\ \ldots,\ m$, т. е.

$$f(u_1, u_2,\ ...,\ u_m;\ t_1, t_2,\ ...,\ t_m) = f(u_1, u_2,\ ...,\ u_m;\ \tau_1, \tau_2,\ ...,\ \tau_{m-1}).$$

Случайный сигнал $U(t)$ называется стационарным в широком смысле, если его одномерная плотность (6.1) не зависит от времени, а двумерная плотность распределения вероятностей (6.2) зависит только от разности моментов времени.

У такого сигнала математическое ожидание и дисперсия постоянны во времени:

$$m_U = M\{U(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u)du; \tag{6.3}$$

$$\sigma_U^2 = D\{U(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [u - m_U]^2 f(u)du, \tag{6.4}$$

а корреляционная функция зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$ и определяется выражением

$$R_U(t_1, t_2) = R_U(t_2 - t_1) = R_U(\tau) = \\ = M\{[U(t_1) - m_U][U(t_2) - m_U]\} = \tag{6.5}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [u_1 - m_U)][u_2 - m_U] f(u_1, u_2; \tau) du_1 du_2.$$

Автокорреляционная функция $R_U(\tau)$ является четной функцией времени, $R_U(\tau) = R_U(-\tau)$, при нулевом значении аргумента равна дисперсии $R_U(0) = \sigma_U^2$ и в соответствии с теоремой Винера – Хинчина связана с энергетическим спектром (спектральной плотностью мощности) $G_U(f)$ стационарного случайного сигнала парой преобразований Фурье:

$$G_U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_U(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau; \tag{6.6}$$

$$R_U(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_U(f)\exp(j2\pi f\tau)df\,. \tag{6.7}$$

Функция $G_U(f)$ показывает, какая часть мощности стационарного случайного сигнала приходится на единицу полосы частот, является четной неотрицательной функцией частоты и имеет размерность энергии.

Сигнал, стационарный в узком смысле, всегда является стационарным в широком смысле. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Стационарный случайный сигнал $U(t)$ называется эргодическим в строгом смысле, если с вероятностью, равной единице, все его вероятностные характеристики могут быть получены по одной реализации сигнала. Практически часто интересуются не всеми, а только отдельными характеристиками процесса и вводят понятие эргодичности относительно этих характеристик. При этом аналоги соответствующих вероятностных характеристик сигнала определяются путем усреднения одной реализации на некотором интервале времени [0, T] и установления условий, при которых дисперсия получающихся средних значений стремится к нулю при $T \to \infty$.

Стационарный гауссовский (нормальный) случайный сигнал полностью определяется многомерной плотностью распределения вероятностей

$$\begin{gathered} f(u_1, u_2, \ldots, u_m;\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{m-1}) = \frac{1}{\sigma_U^m \sqrt{(2\pi)^m \det \mathbf{R}}} \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_U^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} q_{ij}(u_i - m_U)(u_j - m_U)\right], \end{gathered} \tag{6.8}$$

где $\det \mathbf{R}$ – определитель матрицы коэффициентов корреляции

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

с элементами $r_{ij} = r\left(|\,t_i - t_j\,|\right)$, равными значениям коэффициента корреляции (нормированной корреляционной функции) $r_U(\tau) = R_U(\tau)/\sigma_U^2$ в точках $\tau_{|i-j|} = \left|t_i - t_j\right|$; q_{ij} – элементы матрицы $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1}$, обратной матрице $\mathbf{R}$.

Как следует из выражения (6.8), нормальные случайные сигналы исчерпывающим образом определяются указанием математического ожидания и корреляционной функции. Поэтому для гауссовских сигналов понятия стационарности в узком и широком смысле совпадают.

Для выполнения условия эргодичности стационарного нормального случайного сигнала относительно математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции достаточно, чтобы его энергетический спектр $G_U(f)$ был непрерывной функцией частоты или, что эквивалентно, чтобы корреляционная функция $R_U(\tau)$ была абсолютно интегрируемой и, следовательно, чтобы $\lim\limits_{\tau\to\infty} R_U(\tau) = 0$.

Одномерная плотность распределения вероятностей сечения $U = U(t)$ гауссовского случайного сигнала составляет

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_U}\exp\left[-\frac{(u - m_U)^2}{2\sigma_U^2}\right] \tag{6.10}$$

и полностью определяется величинами математического ожидания (6.3) и дисперсии (6.4).

Если любые два сечения нормального случайного сигнала в несовпадающие моменты времени некоррелированные, то $r_{ij} = q_{ij} = 0$ при $i \neq j$, матрицы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}$ становятся единичными матрицами, плотность распределения (6.8) принимает вид

$$\begin{gathered} f(u_1, u_2,\ \ldots,\ u_m;\ \tau_1, \tau_2,\ \ldots,\ \tau_{m-1}) = \\ = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_U}\exp\left[-\frac{(u_i - m_U)^2}{2\sigma_U^2}\right] \end{gathered} \tag{6.11}$$

и становится равной произведению одномерных плотностей распределения (6.10) при значениях аргументов $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m$.

Следовательно, для гауссовских сигналов некоррелированность различных сечений сигнала тождественна их статистической независимости.

Математическая модель непрерывного источника определяется статистическими характеристиками вырабатываемых им информационных сигналов.

Стационарный эргодический источник – это источник, вырабатывающий стационарный эргодический случайный сигнал $U(t)$.

Энтропию одного сечения U сигнала $U(t)$ на выходе стационарного эргодического источника можно найти, если разбить диапазон возможных значений случайной величины U на малые интервалы Δu и ввести дискретную случайную величину U_Δ, принимающую значения u_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ с вероятностями $p(u_i) \approx f(u_i)\Delta u$, где $f(u)$ одномерная плотность вероятности случайной величины U; u_i – среднее значение i-го интервала. При этом энтропия дискретной случайной величины U_Δ в соответствии с (1.3) может быть записана в виде

$$H(U_\Delta) = -\sum_{i=1}^{m} p(u_i)\log p(u_i) \approx -\sum_{i=1}^{m} f(u_i)\Delta u \log\left[f(u_i)\Delta u\right] =$$
$$= -\sum_{i=1}^{m}\left[f(u_i)\log f(u_i)\right]\Delta u - \sum_{i=1}^{m}\left[f(u_i)\Delta u\right]\log\Delta u. \qquad (6.12)$$

По мере уменьшения длины интервала Δu свойства дискретной случайной величины U_Δ все больше приближаются к свойствам непрерывной случайной величины U и поэтому предельный переход в формуле (6.12) при $\Delta u \to 0$ приводит к следующему выражению для энтропии сечения U:

$$H(U) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\log f(u)du - \lim_{\Delta u \to 0}\log\Delta u. \qquad (6.13)$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (6.13) имеет конечное значение и полностью определяется видом одномерной плотности распределения сигнала $U(t)$. Второе слагаемое зависит только от величины интервала Δu и при $\Delta u \to 0$ стремится к бесконечности.

В качестве меры неопределенности непрерывного источника используется первое слагаемое в (6.13), которое называется дифференциальной (относительной, приведенной) энтропией и имеет вид

$$h(U) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \log f(u) du. \qquad (6.14)$$

Дифференциальная энтропия (6.14) измеряется в величинах бит/отсчет и имеет следующие свойства:

1. Дифференциальная энтропия не может служить абсолютной мерой неопределенности непрерывного источника. Однако при сравнении, например, абсолютных энтропий $H(U)$ различных источников, энтропий отсчетов сигналов на входе и выходе канала связи и т. д. второе слагаемое в выражении (6.13) при вычислении соответствующих разностей сокращается, и информационные свойства полностью определяются разностью соответствующих дифференциальных энтропий (отсюда и название – дифференциальная энтропия).

2. Дифференциальная энтропия является относительной мерой неопределенности, и ее значение зависит от масштаба случайной величины U и, следовательно, от выбора единиц ее измерения. Так, при изменении масштаба в k раз, что соответствует переходу к случайной величине $V = kU$, дифференциальная энтропия составит

$$h(V) = h(kU) = h(U) + \log|k|. \qquad (6.15)$$

3. Дифференциальная энтропия, в отличие от энтропии дискретного источника, наряду с нулевыми и положительными значениями также может принимать и отрицательные значения.

4. Дифференциальная энтропия не изменяется, если к случайной величине U прибавить некоторую постоянную величину c, т. е. при переходе к случайной величине $V = U \pm c$ дифференциальная энтропия составит

$$h(V) = h(U \pm c) = h(U). \qquad (6.16)$$

Отсюда следует, что дифференциальная энтропия не зависит от значения математического ожидания случайной величины U, и случайные величины, отличающиеся только математическими ожиданиями, имеют одинаковые дифференциальные энтропии.

Дифференциальные энтропии (6.14) случайных величин с некоторыми законами распределения вероятностей:

1. Дифференциальная энтропия гауссовской случайной величины U с плотностью распределения вероятностей (6.10), математическим ожиданием m_U и дисперсией σ_U^2 составляет

$$h(U) = \log\left(\sqrt{2\pi e}\,\sigma_U\right) = \frac{1}{2}\log\left(2\pi e\sigma_U^2\right) \qquad (6.17)$$

и, как и следовало ожидать, не зависит от величины математического ожидания.

Доказано, что если ограничения на область определения случайной величины U отсутствуют, но ее дисперсия σ_U^2 ограничена, то максимально возможной дифференциальной энтропией, определяемой выражением (6.17), обладает гауссовская случайная величина с законом распределения (6.10).

2. Дифференциальная энтропия случайной величины, распределенной по закону Симпсона (по треугольному закону)

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{2}{\beta-\alpha}\left(1 - \dfrac{|\alpha+\beta-2u|}{\beta-\alpha}\right) & \text{при } \alpha \le u \le \beta, \\ 0 & \text{при } u < \alpha,\ u > \beta \end{cases} \qquad (6.18)$$

с математическим ожиданием и дисперсией

$$m_U = \frac{\alpha+\beta}{2},\ \sigma_U^2 = \frac{(\beta-\alpha)^2}{24} \qquad (6.19)$$

составляет

$$h(U) = \log\left[\frac{\sqrt{e}\,(\beta-\alpha)}{2}\right] = \frac{1}{2}\log\left(6e\,\sigma_U^2\right). \qquad (6.20)$$

3. Дифференциальная энтропия случайной величины, распределенной по закону Лапласа (по двойному экспоненциальному закону)

$$f(u) = \frac{\lambda}{2}\exp\left(-\lambda\left|u - m_U\right|\right) \tag{6.21}$$

с математическим ожиданием m_U и дисперсией

$$\sigma_U^2 = \frac{2}{\lambda^2},\ \lambda > 0 \tag{6.22}$$

составляет

$$h(U) = \log\left(\frac{2e}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}\log\left(2e^2\sigma_U^2\right). \tag{6.23}$$

4. Дифференциальная энтропия случайной величины, распределенной по равномерному закону

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \text{при } \alpha \le u \le \beta, \\ 0 & \text{при } u < \alpha,\ u > \beta \end{cases} \tag{6.24}$$

с математическим ожиданием и дисперсией

$$m_U = \frac{\alpha + \beta}{2},\ \sigma_U^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \tag{6.25}$$

составляет

$$h(U) = \log(\beta - \alpha) = \frac{1}{2}\log\left(12\sigma_U^2\right). \tag{6.26}$$

Доказано, что если единственным ограничением для случайной величины U является область ее возможных значений $[\alpha, \beta]$, то максимально возможной дифференциальной энтропией, определяемой равенством (6.26), обладает случайная величина с равномерным распределением вероятностей (6.24).

По аналогии с дискретными источниками для непрерывных источников также вводятся понятия совместной и условной дифференциальных энтропий, которые позволяют учитывать статистические связи между сечениями сигналов U и V двух или нескольких источников, между последовательными сечениями сигнала на выходе одного источника, между отсчетами сигналов на входе и выходе канала связи.

Совместная дифференциальная энтропия двух сечений U и V определяется выражением

$$h(U,V) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\log f(u,v)dudv\,, \qquad (6.27)$$

где $f(u,v)$ – совместная плотность распределения случайных величин *U* и *V*.

Совместную плотность распределения $f(u,v)$ можно представить в виде

$$f(u,v) = f(u)f(v\,|\,u) = f(v)f(u\,|\,v)\,, \qquad (6.28)$$

где

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dv\,;\ f(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)du \qquad (6.29)$$

– плотности распределения составляющих *U* и *V*; $f(u\,|\,v)$ – условная плотность вероятностей составляющей *U* при заданном значении $V = v$; $f(v\,|\,u)$ – условная плотность распределения составляющей *V* при заданном значении $U = u$.

Условная дифференциальная энтропия случайной величины *U* при известной случайной величине *V* определяется по формуле

$$h(U\,|\,V) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\log f(u\,|\,v)dudv\,, \qquad (6.30)$$

а условная дифференциальная энтропия случайной величины *V* при известной случайной величине *U* составляет

$$h(V\,|\,U) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\log f(v\,|\,u)dudv\,. \qquad (6.31)$$

Из выражений (6.27)–(6.31) следует, что перечисленные дифференциальные энтропии связаны соотношениями

$$h(U,V) = h(V) + h(U\,|\,V)\,; \qquad (6.32)$$

$$h(U,V) = h(U) + h(V\,|\,U)\,, \qquad (6.33)$$

причем для статистически независимых сечений *U* и *V*, когда в выражениях (6.28) совместная и условные плотности распределения $f(u,v) = f(u)f(v)$ и $f(u\,|\,v) = f(u)$, $f(v\,|\,u) = f(v)$, дифференциальная энтропия объединения равна сумме энтропий $h(U)$ и $h(V)$

$$h(U,V) = h(U) + h(V), \tag{6.34}$$

а условные дифференциальные энтропии равны соответствующим безусловным

$$h(U \mid V) = h(U),\ h(V \mid U) = h(V). \tag{6.35}$$

Совместная плотность распределения сечений $U_1 = U(t_1)$ и $U_2 = U(t_2)$ стационарного гауссовского сигнала $U(t)$ с математическим ожиданием m_U, дисперсией σ_U^2 и нормированной автокорреляционной функцией $r_U(\tau)$ согласно (6.8), (6.9) при $m = 2$ и $\tau = |t_1 - t_2|$ определяется выражением

$$\begin{gathered} f(u_1,\ u_2;\ \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_U^2\sqrt{1 - r_U^2(\tau)}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{(u_1 - m_U)^2 - 2r_U(\tau)(u_1 - m_U)(u_2 - m_U) + (u_2 - m_U)^2}{2\sigma_U^2\left[1 - r_U^2(\tau)\right]}\right\}. \end{gathered} \tag{6.36}$$

Подстановка (6.36) в (6.27) показывает, что совместная дифференциальная энтропия сечений U_1 и U_2 равна

$$h(U_1,\ U_2) = \log\left[2\pi e\sqrt{1 - r_U^2(\tau)}\,\sigma_U^2\right], \tag{6.37}$$

а условная дифференциальная энтропия согласно (6.17) и (6.32), (6.33) составляет

$$\begin{gathered} h(U_1 \mid U_2) = h(U_2 \mid U_1) = \log\left\{\sqrt{2\pi e\left[1 - r_U^2(\tau)\right]}\,\sigma_U\right\} = \\ = \frac{1}{2}\log\left\{2\pi e\left[1 - r_U^2(\tau)\right]\sigma_U^2\right\}. \end{gathered} \tag{6.38}$$

6.2. Расчетные задания

Задание 6.1. Используя формулы (6.10), (6.18), (6.19), (6.21), (6.22), (6.24), (6.25), построить графики плотностей вероятностей случайных величин *U*, распределенных по закону Гаусса, Симпсона, Лапласа и с равномерным законом при $m_U = 0$ и $\sigma_U^2 = 1$. Вычислить дисперсии построенных плотностей распределения вероятностей.

```
%Script_6_1
%Построение графиков плотностей вероятностей
непрерывных случайных величин
%и вычисление их дисперсий
clear all; close all; clc
%Задание анонимных функций для плотностей
распределения вероятностей
Gauss=@(u)pdf('Normal',u,0,1);
Simpson=@(u)tripuls(u,2*sqrt(6))/sqrt(6);
Laplace=@(u)sqrt(2)/2*exp(-abs(u)*sqrt(2));
Uniform=@(u).5*rectpuls(u,2*sqrt(3))/sqrt(3);
%Задание значений аргумента
u=-4:.01:4;
%Вычисление распределений вероятностей
f_G=Gauss(u);
f_S=Simpson(u);
f_L=Laplace(u);
f_U=Uniform(u);
%Построение графиков
plot(u,f_G,u,f_S,u,f_L,u,f_U)
grid
xlabel('Значения аргумента u')
ylabel('Плотность распределения вероятностей f(u)')
title('Законы распределения вероятностей')
legend('Гаусса','Симпсона','Лапласа','Равномерный')
%Задание анонимных функций для вычисления дисперсий
d_Gauss=@(u) u.^2.*Gauss(u);
d_Simpson=@(u) u.^2.*Simpson(u);
d_Laplace=@(u) u.^2.*Laplace(u);
d_Uniform=@(u) u.^2.*Uniform(u);
%Вычисление дисперсий
disp('Результаты расчета дисперсий:')
disp('-----------------------------')
d_G=integral(d_Gauss,-Inf,Inf);
disp('Распределение Гаусса:')
disp(d_G)
d_S=integral(d_Simpson,-Inf,Inf);
```

```
disp('Распределение Симпсона:')
disp(d_S)
d_L=integral(d_Laplace,-Inf,Inf);
disp('Распределение Лапласа:')
disp(d_L)
d_U=integral(d_Uniform,-Inf,Inf);
disp('Равномерное распределение:')
disp(d_U)
```

Задание 6.2. По формулам (6.17), (6.20), (6.23) и (6.26) построить графики зависимостей дифференциальной энтропии случайных величин *U*, распределенных по закону Гаусса, Симпсона, Лапласа и с равномерным законом от величины дисперсии σ_U^2, выраженной в децибелах.

```
%Script_6_2
%Построение графиков зависимостей дифференциальной
энтропии от дисперсии
clear all; close all; clc
e=exp(1);
%Задание значений дисперсии в децибелах
s_dB=0:.01:10;
%Вычисление значений дисперсии в «разах»
s=10.^(.1*s_dB);
%Вычисление дифференциальных энтропий
h_Gauss=.5*log2(2*pi*e*s);
h_Simpson=.5*log2(6*e*s);
h_Laplace=.5*log2(2*e^2*s);
h_Uniform=.5*log2(12*s);
%Построение графиков
plot(s_dB,h_Gauss,s_dB,h_Simpson,s_dB,h_Laplace,s_dB,
h_Uniform)
grid
xlabel('Дисперсия \sigma^2_U, дБ')
ylabel('Дифференциальная энтропия h(U), бит/отсчет')
str1='Дифференциальная энтропия случайных величин';
str2='с различными законами распределения
вероятностей';
title({str1;str2})
legend('Гаусса','Симпсона','Лапласа','Равномерный',
'Location','Best')
```

Задание 6.3. С использованием формулы (6.36) построить графики двумерной гауссовской плотности распределения вероятностей и линии уровня при $m_U = 0$, $\sigma_U^2 = 1$ и значениях коэффициента корреляции $r_U = r_U(\tau) = -0{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ 0{,}8$.

```
%Script_6_3
%Построение графиков плотности двумерного нормального
распределения и линий
%уровня при нулевом математическом ожидании,
единичной дисперсии
%и различных значениях коэффициента корреляции
clear all; close all; clc
%Задание значений аргументов для построения графиков
umi=-2; uma=-umi;
du=.2;
u1=umi:du:uma;
u2=u1;
%Формирование сетки значений аргументов
[u1,u2]=meshgrid(u1,u2);
%Задание значений r
vr=[-.5 0 .5 .8];
%Определение длины вектора
nr=length(vr);
%Задание размерности массива
str=cell(1,nr);
%Расчет плотности распределения
for k=1:nr
r=vr(k);
str{k}=['r_U = ',num2str(r)];
c=1/(2*pi*sqrt(1-r^2));
d=2*(1-r^2);
f=c*exp(-(u1.^2-2*r*u1.*u2+u2.^2)/d);
%Построение графиков
subplot(2,2,k)
surf(u1,u2,f)
title(str(k))
xlabel('u_1')
ylabel('u_2')
zlabel('f(u_1,u_2)')
end
%Задание значений аргументов для построения линий
уровня
```

```
du=.01;
u1=umi:du:uma;
u2=u1;
%Формирование сетки значений аргументов
[u1,u2]=meshgrid(u1,u2);
figure
%Расчет плотности распределения
for k=1:nr
r=vr(k);
c=1/(2*pi*sqrt(1-r^2));
d=2*(1-r^2);
f=c*exp(-(u1.^2-2*r*u1.*u2+u2.^2)/d);
subplot(2,2,k)
%Построение линий уровня
contour(u1,u2,f)
grid
colorbar
title(str(k))
xlabel('u_1')
ylabel('u_2')
end
```

Задание 6.4. По формуле (6.38) построить графики зависимостей условной дифференциальной энтропии сечений $U_1 = U(t_1)$ и $U_2 = U(t_2)$ стационарного гауссовского случайного процесса от величины дисперсии σ_U^2, выраженной в децибелах, при значениях коэффициента корреляции $r_U = r_U(\tau)$ = 0; 0,5; 0,9; 0,99.

```
%Script_6_4
%Построение графиков зависимостей условной
дифференциальной энтропии
%сечений стационарного гауссовского процесса от
дисперсии
%при различных значениях коэффициента корреляции
clear all; close all; clc
e=exp(1);
%Задание значений дисперсии в децибелах
s_dB=0:.01:10;
%Вычисление значений дисперсии в «разах»
s=10.^(.1*s_dB);
%Задание значений r
```

```
vr=[0 .5 .9 .99];
%Определение длины векторов
ns=length(s);
nr=length(vr);
%Задание размерностей массивов
h=zeros(nr,ns);
str=cell(1,nr);
%Вычисление дифференциальных энтропий
for k=1:nr
r=vr(k);
str{k}=['r_U = ',num2str(r)];
h(k,:)=.5*log2(2*pi*e*sqrt(1-r^2)*s);
end
%Построение графиков
plot(s_dB,h)
grid
xlabel('\sigma^2_U, дБ')
ylabel('h(U_1|U_2), бит/отсчет')
legend(str,'Location','NorthWest')
str1='Условная дифференциальная энтропия сечений
гауссовского процесса';
str2='при различных значениях коэффициента
корреляции';
title({str1;str2})
```

6.3. Отчет и контрольные вопросы

Отчет по лабораторной работе оформляется в виде документа MS Word и должен содержать:

1. Название лабораторной работы (шрифт Times New Roman).

2. Результаты выполнения всех расчетных заданий, включая листинги m-файлов, копируемые из окна **Editor**, результаты их выполнения, копируемые из окна **Command Window** (шрифт Courier New), а также полученные графики, копируемые из окна **Figure** по команде **Edit | Copy Figure**.

Защита лабораторной работы проводится на основе представленного отчета и ответов на контрольные вопросы из следующего списка:

1. Дайте определение непрерывного источника информации.

2. Что такое сечение случайного сигнала? Это детерминированная или случайная величина?

3. Что такое реализация случайного сигнала? Это детерминированная или случайная функция?

4. Каким образом описывается случайный сигнал?

5. Дайте определение стационарного в узком смысле случайного сигнала.

6. Какой вид имеют одномерная, двумерная и m-мерная плотности распределения вероятностей стационарного в узком смысле случайного сигнала?

7. Дайте определение стационарного в широком смысле случайного сигнала.

8. Запишите выражения для математического ожидания и дисперсии стационарного случайного сигнала.

9. Запишите выражение для автокорреляционной функции стационарного случайного сигнала и перечислите ее свойства.

10. Дайте определение энергетического спектра (спектральной плотности мощности) стационарного случайного сигнала и перечислите его свойства.

11. Дайте определение эргодического случайного сигнала.

12. Что такое гауссовский (нормальный) случайный сигнал?

13. Запишите выражение для одномерной плотности распределения гауссовского случайного сигнала.

14. Приведите достаточное условие эргодичности гауссовского случайного сигнала.

15. Какой непрерывный источник называется стационарным эргодическим источником информации?

16. Приведите выражение для дифференциальной энтропии сечения стационарного случайного сигнала.

17. Перечислите свойства дифференциальной энтропии.

18. Чему равна дифференциальная энтропия сечения гауссовского стационарного случайного сигнала? Каким важным свойством она обладает?

19. Дайте определение совместной дифференциальной энтропии двух сечений стационарных случайных сигналов.

20. Приведите две формы записи для совместной дифференциальной энтропии.

Лабораторная работа № 7
Непрерывные каналы связи

Цель работы: Изучить характеристики непрерывных каналов связи, овладеть программными средствами их расчета в MATLAB.

7.1. Теоретические сведения

Непрерывный канал связи – это канал, у которого поступающие на его вход и снимаемые с его выхода сигналы являются реализациями непрерывных случайных процессов.

Реализация $s(t)$ случайного сигнала $S(t)$ на выходе непрерывного канала связи определяется выражением

$$s(t) = u(t) + n(t),\ 0 \le t \le T, \qquad (7.1)$$

где $u(t)$ и $n(t)$ – соответственно реализации полезного сигнала $U(t)$ и аддитивного шума $N(t)$, являющихся статистически независимыми случайными процессами; T – длительность сигнала.

Непрерывный канал связи, описываемый моделью (7.1), называется гауссовским каналом, если он удовлетворяет следующим допущениям:

– основные параметры канала (коэффициент передачи канала и задержка сигнала) являются известными постоянными величинами;

– полоса пропускания канала ограничена верхней частотой F;

– полезный сигнал $U(t)$ является стационарным случайным процессом с нулевым средним значением и постоянной дисперсией (средней мощностью) $\sigma_U^2 = P_U$;

– шум $N(t)$ описывается моделью аддитивного белого гауссовского шума с односторонней спектральной плотностью мощности N_0.

Гауссовский канал часто называют частотно-ограниченным каналом с постоянными параметрами и аддитивным белым гауссовским шумом.

Аддитивный белый гауссовский шум $N(t)$ – это стационарный гауссовский процесс с нулевым средним значением и равномерной спектральной плотностью мощности в бесконечной полосе частот

$$G_N(f) = \frac{N_0}{2} \text{ при } -\infty < f < \infty, \tag{7.2}$$

где N_0 – односторонняя спектральная плотность мощности (интенсивность) шума, имеющая размерность Вт/Гц = Дж.

Автокорреляционная функция белого гауссовского шума, связанная парой преобразований Фурье (6.6) и (6.7) с энергетическим спектром (7.2), определяется выражением

$$R_N(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau), \tag{7.3}$$

где $\delta(\tau)$ – дельта-функция (единичная импульсная функция, функция Дирака), которая является обобщенной функцией и формально может быть определена либо с помощью двух соотношений

$$\delta(\tau) = \begin{cases} \infty \text{ при } \tau = 0, \\ 0 \text{ при } \tau \neq 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)d\tau = 1, \tag{7.4}$$

либо с помощью так называемого фильтрующего свойства дельта-функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(\tau)\delta(\tau - \tau_0)d\tau = \xi(\tau_0), \tag{7.5}$$

в котором $\xi(\tau)$ – произвольная непрерывная в точке τ_0 функция.

Размерность дельта-функции обратна размерности ее аргумента.

В силу того, что дисперсия (средняя мощность) белого шума равна бесконечности, этот процесс является математической абстракцией и реально не существует. Однако аддитивный белый гауссовский шум является важнейшей математической моделью аддитивной флуктуационной помехи с очень большой шириной спектра, значительно превышающей полосу частот F канала связи. Очевидно, что при этом дисперсия (средняя мощность) шума $N(t)$ в полосе частот F составляет $\sigma_N^2 = P_N = N_0 F$.

Название «белый шум» дано по аналогии с белым светом, включающим все частотные компоненты.

По аналогии с соответствующими формулами (5.1), (5.4) и (5.11) для дискретного канала можно записать первую, и вторую и третью формы записи для взаимной информации между сечениями U и S сигналов $U(t)$ и $S(t)$:

$$I(U,S) = h(U) - h(U \mid S), \tag{7.6}$$

$$I(U,S) = h(S) - h(S \mid U), \tag{7.7}$$

$$I(U,S) = h(U) + h(S) - h(U,S). \tag{7.8}$$

Обычно рассматривают вторую форму записи (7.7), принимая во внимание, что отсчеты сигнала $U(t)$ и шума $N(t)$ статистически независимы (и также независимы отсчеты сигнала $S(t)$ и шума $N(t)$). Как следует из равенства (7.1), при этом условная дифференциальная энтропия $h(S \mid U)$ равна сумме соответствующих условных дифференциальных энтропий

$$h(S \mid U) = h\left[(U+N) \mid U\right] = h(U \mid U) + h(N / U)$$

и поскольку $h(U \mid U) = 0$, $h(N \mid U) = h(N)$, составляет

$$h(S \mid U) = h(N). \tag{7.9}$$

В результате подстановка (7.9) в (7.7) дает окончательное выражение для взаимной информации между сечениями U и S:

$$I(U,S) = h(S) - h(N). \tag{7.10}$$

В силу того, что канал имеет ограниченную полосу пропускания F, в соответствии с теоремой В.А. Котельникова, выборочные функции $s(t)$, $u(t)$, $n(t)$ на интервале наблюдения $\left[0,T\right]$ можно представить совокупностями из

$$m = 2FT \tag{7.11}$$

отсчетов $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$, отстоящих через интервалы времени

$$\Delta t = \frac{1}{2F}. \qquad (7.12)$$

При этом статистические свойства дискретизированных процессов описываются многомерными плотностями распределения вероятностей $f(\mathbf{s}) = f(s_1, s_2, \ ..., \ s_m)$, $f(\mathbf{u}) = f(u_1, u_2, \ ..., \ u_m)$, $f(\mathbf{n}) = f(n_1, n_2, \ ..., \ n_m)$, а выражение для средней взаимной информации между совокупностями отсчетов согласно (7.10) имеет вид

$$I(\mathbf{U}, \mathbf{S}) = h(\mathbf{S}) - h(\mathbf{N}), \qquad (7.13)$$

где

$$h(\mathbf{S}) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} f(s_1, s_2, ..., s_m)\log f(s_1, s_2, ..., s_m) ds_1 ds_2 ... ds_m$$

и

$$h(\mathbf{N}) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} f(n_1, n_2, ..., n_m)\log f(n_1, n_2, ..., n_m) dn_1 dn_2 ... dn_m$$

– дифференциальные энтропии дискретизированного сигнала $S(t)$ и шума $N(t)$ соответственно.

Скорость передачи информации по непрерывному каналу связи – это количество информации, которое в среднем передается принятыми непрерывными сигналами $S(t)$, относительно переданных сигналов $U(t)$ в единицу времени. Как и в дискретном случае, скорость передачи информации имеет размерность бит/с.

Средняя скорость передачи информации дискретизированным сигналом в соответствии с формулой (5.13) определяется выражением

$$I'_{\Delta t}(\mathbf{U}, \mathbf{S}) = \frac{1}{T} I(\mathbf{U}, \mathbf{S}), \qquad (7.14)$$

где $I(\mathbf{U}, \mathbf{S})$ задается формулой (7.13). По мере увеличения длительности T эта скорость возрастает, так как при каждом новом отсчете реализации уточняются. В пределе при $T \to \infty$ многомерные (m-мерные) плотности распределения становятся бесконечномерными, и предел выражения (7.14) будет определять среднюю скорость передачи информации по непрерывному каналу связи

$$I'(\mathbf{U},\mathbf{S}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} I(\mathbf{U},\mathbf{S}). \qquad (7.15)$$

Переход к пределу при $T \to \infty$ также означает усреднение скорости по всем возможным реализациям сигналов.

Степень воздействия аддитивного белого гауссовского шума на различные ансамбли входных сигналов различна. Вследствие этого различны и определяемые формулой (7.15) значения скорости передачи информации.

Пропускная способность непрерывного канала связи – это максимально возможная скорость передачи информации при заданных свойствах канала, взятая по всем возможным ансамблям входных сигналов:

$$C = \max_{f(\mathbf{u})} I'(\mathbf{U},\mathbf{S}), \qquad (7.16)$$

где $f(\mathbf{u})$ – m-мерная плотность распределения вектора отсчетов $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ дискретизированного сигнала $U(t)$. С учетом равенств (7.13) и (7.15) формулу (7.16) можно представить в виде

$$C = \max_{f(\mathbf{u})}\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T} I(\mathbf{U},\mathbf{S})\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\max_{f(\mathbf{u})} I(\mathbf{U},\mathbf{S})\right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left\{\max_{f(\mathbf{u})}\left[h(\mathbf{S}) - h(\mathbf{N})\right]\right\}.$$

Поскольку статистические характеристики шума $N(t)$ заданы, максимизация $h(\mathbf{N})$ в полученной формуле не требуется, откуда следует окончательное выражение для пропускной способности:

$$C = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\max_{f(\mathbf{u})} h(\mathbf{S}) - h(\mathbf{N})\right]. \qquad (7.17)$$

Входящие в формулу (7.17) дифференциальные энтропии определяются следующим образом:

1. Дифференциальная энтропия одного отсчета белого гауссовского шума $N(t)$ согласно (6.17) задается выражением

$$h(N) = \frac{1}{2}\log\left(2\pi e \sigma_N^2\right), \qquad (7.18)$$

где $\sigma_N^2 = P_N = N_0 F$ – дисперсия (средняя мощность) шума в полосе частот F. Как видно из формулы (7.3), любые сколь угодно близкие отсчеты шума некоррелированы и, следовательно (поскольку шум гауссовский), статистически независимы. Поэтому суммарная дифференциальная энтропия m отсчетов равна сумме дифференциальных энтропий (7.18) и с учетом (7.11) составляет

$$h(\mathbf{N}) = \frac{m}{2}\log\left(2\pi e\sigma_N^2\right) = FT\log\left(2\pi e\sigma_N^2\right). \qquad (7.19)$$

2. В силу того, что полезный сигнал $U(t)$ и шум $N(t)$ статистически независимы, дисперсия σ_S^2 сигнала $S(t)$ согласно (7.1) равна сумме дисперсий σ_U^2 и σ_N^2 полезного сигнала $U(t)$ и шума $N(t)$ и является ограниченной величиной $\sigma_S^2 = \sigma_U^2 + \sigma_N^2$. При этом дифференциальная энтропия $h(S)$ отсчета сигнала $S(t)$ принимает максимальное значение, когда он имеет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием. Это имеет место, если отсчет сигнала $U(t)$ также распределен по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией σ_U^2 (поскольку сумма двух гауссовских случайных величин имеет такую же плотность распределения). Таким образом, максимальное значение дифференциальной энтропии одного отсчета сигнала $S(t)$ составляет

$$h(S) = \frac{1}{2}\log\left(2\pi e\sigma_S^2\right) = \frac{1}{2}\log\left[2\pi e\left(\sigma_U^2 + \sigma_N^2\right)\right]. \qquad (7.20)$$

Дифференциальная энтропия $h(\mathbf{S})$ совокупности из m отсчетов будет максимальной, если все отсчеты будут статистически независимыми. Это имеет место, когда полезный сигнал $U(t)$ имеет равномерный двухсторонний энергетический спектр в ограниченной полосе частот F

$$G_U(f) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_U^2}{2F} \ \text{при} \ |f| \le F, \\ \ 0 \ \ \text{при} \ |f| > F, \end{cases} \qquad (7.21)$$

а его автокорреляционная функция определяется выражением

$$R_U(\tau) = \sigma_U^2 \frac{\sin 2\pi F\tau}{2\pi F\tau}. \tag{7.22}$$

(Из формулы (7.22) следует, отсчеты сигнала $U(t)$, взятые через интервалы времени, кратные величине (7.12), являются некоррелированными и, следовательно, статистически независимыми.) Суммарная дифференциальная энтропия m независимых отсчетов сигнала $S(t)$ равна сумме дифференциальных энтропий (7.20) и с учетом (7.11) составляет

$$h(\mathbf{S}) = \frac{m}{2}\log\left(2\pi e\sigma_S^2\right) = FT\log\left[2\pi e\left(\sigma_U^2 + \sigma_N^2\right)\right]. \tag{7.23}$$

Подстановка полученных формул (7.19) и (7.23) в правую часть равенства (7.17) дает искомое выражение для определения величины C:

$$C = F\left\{\log\left[2\pi e\left(\sigma_U^2 + \sigma_N^2\right)\right] - \log\left(2\pi e\sigma_N^2\right)\right\} = F\log\frac{\sigma_U^2 + \sigma_N^2}{\sigma_N^2}$$

или

$$C = F\log\left(1 + \frac{\sigma_U^2}{\sigma_N^2}\right) \tag{7.24}$$

Формула (7.24) впервые была получена в 1948 г. независимо Н. Винером и К. Е. Шенноном. Она называется формулой Шеннона для пропускной способности гауссовского канала связи, и с учетом того, что $\sigma_U^2 = P_U$, $\sigma_N^2 = P_N$, обычно представляется в эквивалентной форме записи

$$C = F\log\left(1 + \frac{P_U}{P_N}\right), \tag{7.25}$$

где P_U / P_N – отношение средней мощности сигнала к средней мощности шума или просто отношение сигнал-шум по мощности.

Формула (7.25) позволяет выяснить, как изменяется пропускная способность по мере увеличения полосы пропускания канала F. Для этого с учетом равенства $P_N = N_0 F$ ее следует представить в виде

$$C = F\log\left(1+\frac{P_U}{N_0F}\right) \tag{7.26}$$

или

$$C = F\log e \ln\left(1+\frac{P_U}{N_0F}\right)$$

и найти предельное значение C при $F \to \infty$:

$$C_\infty = \lim_{F\to\infty} C = \log e\frac{P_U}{N_0} \approx 1{,}443\frac{P_U}{N_0} \text{ бит/с.} \tag{7.27}$$

Результат (7.27) следует из приближенного равенства $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon$ при $|\varepsilon| \ll 1$. Таким образом, при увеличении F пропускная способность сначала быстро возрастает, а затем асимптотически стремится к пределу (7.27).

Величину C_∞ часто называют границей Шеннона. Она представляет собой пропускную способность гауссовского канала при условии, что на ширину частотного спектра входного сигнала не накладывается никаких ограничений.

Из выражения (7.27) следует, что для передачи заданного количества дискретной (цифровой) информации по каналу с постоянными параметрами и аддитивным белым гауссовским шумом отношение энергии сигнала E_b, приходящейся на бит переданной информации, к спектральной плотности шума (отношение сигнал-шум по энергии)

$$h_b^2 = \frac{E_b}{N_0} = \frac{P_U T}{N_0} \tag{7.28}$$

должно превосходить некоторую пороговую величину. Действительно, поскольку скорость передачи информации $I'(\mathbf{U},\mathbf{S}) < C_\infty$, то справедливо неравенство $TI'(\mathbf{U},\mathbf{S}) < TC_\infty$ или, в соответствии с (7.27), $TI'(\mathbf{U},\mathbf{S}) < \log e\dfrac{P_U T}{N_0}$. Следовательно, для передачи одного бита информации необходимо, чтобы величина отношения сигнал-шум (7.28) удовлетворяла неравенству

$$h_b^2 > \frac{1}{\log e} \approx 0,693 \approx -1,592 \text{ дБ}. \tag{7.29}$$

Правая часть неравенства (7.29) представляет собой границу Шеннона для отношения сигнал-шум по энергии.

Выражение (7.26) позволяет установить связь между величинами h_b^2, F и $I' = I'(\mathbf{U},\mathbf{S})$. Для этого необходимо формально подставить в формулу (7.26) I' вместо C, и разделить обе части полученного равенства на F:

$$\frac{I'}{F} = \log\left(1 + \frac{P_U}{N_0 F}\right),$$

откуда следует, что

$$2^{I'/F} = 1 + \frac{P_U}{N_0 F},$$

или

$$\frac{P_U}{N_0 F} = 2^{I'/F} - 1.$$

Для устранения зависимости левой части от полосы пропускания F следует умножить обе части полученного равенства на F / I':

$$\frac{P_U / I'}{N_0} = \frac{F}{I'}\left(2^{I'/F} - 1\right)$$

и учесть, что минимальная длительность одного бита равна $T = 1/I'$:

$$\frac{P_U T}{N_0} = \frac{F}{I'}\left(2^{I'/F} - 1\right).$$

Наконец, сопоставление левой части последнего равенства с формулой (7.28), позволяет записать искомую зависимость:

$$h_b^2 = \frac{F}{I'}\left(2^{I'/F} - 1\right). \tag{7.30}$$

Формула (7.30) определяет зависимость отношения сигнал-шум h_b^2 от величины F / I', имеющей размерность 1/(бит/с/Гц), при $I' = C$. Поскольку скорость передачи информации I' не должна превышать пропускную способность C канала, при фиксированном значении F / I' необходимое для эффективной передачи дискретной информации отношение сигнал-шум должно превосходить величину h_b^2, определяемую формулой (7.30).

7.2. Расчетные задания

Задание 7.1. По формулам (7.21) и (7.22) построить графики спектральной плотности мощности и автокорреляционной функции частотно-ограниченного стационарного случайного сигнала при величине дисперсии $\sigma_U^2 = 1$ Вт и значениях полосы частот $F = 1, 2, 3$ кГц.

```
%Script_7_1
%Построение графиков спектральной плотности мощности
%и автокорреляционной функции частотно-ограниченного
%стационарного случайного сигнала
%при различных значениях полосы частот F
clear all; close all; clc
%Задание значений частоты
f=-4:.01:4;
%Задание значений времени
t=-2:.01:2;
%Задание значений ширины спектра F
vF=[1 2 3];
%Определение длины вектора
nF=length(vF);
%Задание размерностей массивов
G=zeros(nF,length(f));
R=zeros(nF,length(t));
str=cell(1,nF);
%Расчет спектральной плотности мощности
%и автокорреляционной функции
for k=1:nF
F=vF(k);
str{k}=['F = ',num2str(F),' кГц'];
G(k,:)=.5*rectpuls(f,2*F)/F;
R(k,:)=sinc(2*F*t);
end
%Построение графиков
subplot(2,1,1)
```

```
plot(f,G)
grid
legend(str)
xlabel('f, кГц')
ylabel('G_U(f), Вт/Гц')
title('Спектральная плотность мощности')
subplot(2,1,2)
plot(t,R)
set(gca,'XMinorTick','on')
legend(str)
xlabel('\tau, мс')
ylabel('R_U(\tau), Вт')
title('Автокорреляционная функция')
grid
```

Задание 7.2. По формуле (7.25) построить график зависимости нормированной пропускной способности C/F от величины отношения сигнал-шум P_U / P_N, выраженной в децибелах.

```
%Script_7_2
%Построение графика зависимости нормированной
пропускной способности C/F
%от отншения сигнал-шум по мощности;
clear all; close all; clc
%Задание значений отношения мощностей в децибелах
g_dB=-20:.01:50;
%Вычисление значений отношения мощностей в «разах»
g=10.^(.1*g_dB);
%Расчет пропускной способности
C_F=log2(1+g);
%Построение графика
plot(g_dB,C_F)
grid
xlabel('P_u/P_N, дБ')
ylabel('C/F, бит')
title('Зависимость пропускной способности от
отношения сигнал-шум')
```

Задание 7.3. По формуле (7.26) построить график зависимости нормированной пропускной способности CN_0 / P_U от величины нормированной частоты N_0F / P_U. В соответствии с равенством (7.27) штриховой горизонтальной линией обозначить уровень $C_\infty N_0 / P_U$ предельного значения пропускной способности.

```
%Script_7_3
%Построение графика зависимости нормированной
пропускной способности
%от нормированной полосы частот канала
clear all; close all; clc
%Задание значений нормированной полосы частот
v=0:.01:10;
%Расчет пропускной способности
Cv=v.*log2(1+1./v);
%Построение графика
plot(v,Cv)
grid
xlabel('N_0F/P_U')
ylabel('CN_0/P_U, бит/с/Гц')
title('Зависимость пропускной способности от полосы
частот')
%Уровень предельного значения пропускной способности
loge=log2(exp(1));
line([0 max(v)],[loge,loge],'LineStyle','--')
```

Задание 7.4. По формуле (7.30) построить график зависимости отношения сигнал-шум h_b^2 от величины F / I', выражая h_b^2 и F / I' в децибелах. В соответствии с неравенством (7.29) штриховой горизонтальной линией обозначить границу Шеннона и указать ее приближенное значение $\approx -1{,}6$ дБ. Стрелкой с надписью $I' = C$ обозначить граничную кривую и в соответствующих областях графика указать значения $I' < C$, $I' > C$.

```
%Script_7_4
%Построение графика зависимости отношения сигнал-шум
%от отношения ширины полосы к скорости передачи
информации
clear all; close all; clc
%Задание значений аргумента в децибелах
FI_dB=-10:.01:10;
%Вычисление значений аргумента в «разах»
FI=10.^(.1*FI_dB);
%Расчет отношения сигнал-шум в «разах»
```

```
h=FI.*(2.^(1./FI)-1);
%Расчет отношения сигнал-шум в децибелах
h_dB=10*log10(h);
%Построение графика
plot(FI_dB,h_dB)
grid
xlabel('F/I\prime, дБ')
ylabel('h^2_b, дБ')
title('Отношение сигнал-шум на бит информации h^2_b в
зависимости от F/I\prime')
ylim([-5,20])
set(gca,'YMinorTick','on')
%Обозначение границы Шеннона
loge_dB=10*log10(1/log2(exp(1)));
line([min(FI_dB),max(FI_dB)],[loge_dB,loge_dB],'LineS
tyle','--')
%Добавление надписей на график
text(-8.2,-.8,'\approx -1.6 дБ')
text(-8.4,12.5,'\leftarrow I\prime = C')
text(-5.7,7,'I\prime < C')
text(-5.7,2,'I\prime > C')
```

Задание 7.5. Километрическое затухание сигнала в канале связи в полосе частот до $F = 4$ кГц составляет 2 дБ/км. По формуле (7.25) построить графики зависимостей пропускной способности C от протяженности канала связи L при значениях отношения сигнал-шум P_U / P_N = 10, 20, 30, 40, 50 дБ.

```
%Script_7_5
%Построение графиков пропускной способности в
зависимости от протяженности
%канала связи при различных значениях отношения
сигнал-шум
clear all; close all; clc
%Задание значения ширины полосы F,кГц
F=4;
%Задание значения километрического затухания A, дБ/км
A=2;
%Задание значений протяженности канала, км
L=0:.01:20;
%Определение значений затухания, дБ
a_dB=A*L;
```

```
%Задание значений отношения сигнал-шум, дБ
vg_dB=[50 40 30 20 10];
%Определение длины вектора
ng=length(vg_dB);
%Задание размерностей массивов
C=zeros(ng,length(L));
str=cell(1,ng);
%Расчет спропускной способности
for k=1:ng
g_dB=vg_dB(k);
str{k}=['P_U/P_N = ',num2str(g_dB),' дБ'];
g=10.^(.1*(g_dB-a_dB));
C(k,:)=F*log2(1+g);
end
%Построение графиков
plot(L,C)
grid
legend(str)
xlabel('Протяженность канала L, км')
ylabel('Пропускная способность C, кбит/с')
title('Пропускная способность в зависимости от
протяженности канала связи')
```

7.3. Отчет и контрольные вопросы

Отчет по лабораторной работе оформляется в виде документа MS Word и должен содержать:

1. Название лабораторной работы (шрифт Times New Roman).

2. Результаты выполнения всех расчетных заданий, включая листинги m-файлов, копируемые из окна **Editor**, результаты их выполнения, копируемые из окна **Command Window** (шрифт Courier New), а также полученные графики, копируемые из окна **Figure** по команде **Edit** | **Copy Figure**.

Защита лабораторной работы проводится на основе представленного отчета и ответов на контрольные вопросы из следующего списка:

1. Что такое непрерывный канал связи?

2. Какой непрерывный канал связи называется гауссовским каналом или частотно-ограниченным каналом с постоянными параметрами и аддитивным белым гауссовским шумом?

3. Дайте определение белого гауссовского шума $N(t)$.

4. Приведите три формы записи для взаимной информации $I(U,S)$ между сечениями стационарных случайных сигналов $U(t)$ и $S(t)$ на входе и выходе канала.

5. Запишите выражение для взаимной информации $I(\mathbf{U},\mathbf{S})$ между совокупностями отсчетов сигналов на выходе и входе гауссовского канала связи.

6. Дайте определение скорости передачи информации по непрерывному каналу связи.

7. Запишите выражение для средней скорости передачи информации $I' = I'(\mathbf{U},\mathbf{S})$ по непрерывному каналу связи.

8. По какой исходной формуле рассчитывается пропускная способность гауссовского канала связи?

9. Запишите выражение для дифференциальной энтропии $h(\mathbf{N})$ совокупности отсчетов белого гауссовского шума.

10. Какими должны быть энергетический спектр и автокорреляционная функция гауссовского сигнала на входе канала, чтобы дифференциальная энтропия совокупности его отсчетов была максимальной?

11. Запишите формулу Шеннона для пропускной способности частотно-ограниченного канала с постоянными параметрами и аддитивным белым гауссовским шумом в зависимости от отношения сигнал-шум по мощности P_U / P_N.

12. Каким образом пропускная способность зависит от ширины полосы частот гауссовского канала связи?

13. Приведите выражение для границы Шеннона, определяющей пропускную способность гауссовского канала связи без частотных ограничений.

14. Какому неравенству должно удовлетворять отношение сигнал-шум по энергии h_b^2, для передачи одного бита информации?

15. Запишите выражение, определяющее зависимость отношения сигнал-шум h_b^2 от величины F / I'.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аджемов А. С. Общая теория связи: Учебник для вузов / А. С. Аджемов, В. Г. Санников. – М.: Горячая линия – Телеком, 2018. – 624 с.
2. Вернер М. Основы кодирования: Учебник для вузов. – М.: Техносфера, 2004. – 286 с.
3. Гилат А. MATLAB. Теория и практика. 5-е изд. / Пер. с англ. Смоленцев Н. К. – М.: ДМК Пресс, 2016. – 416 с.
4. Дмитриев В. И. Прикладная теория информации. – М.: Высш. шк., 1989. – 320 с.
5. Колесник В. Д. Курс теории информации / В. Д. Колесник, Г. Ш. Полтырев. – М.: Наука, 1982. – 416 с.
6. Кудряшов Б. Д. Теория информации: Учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2009. – 320 с.
7. Теория электрической связи: Учебник для вузов / А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, В. И. Коржик, М. В. Назаров – М.: Радио и связь, 1999. – 432 с.
8. Фано Р. Передача информации. Статистическая теория связи: Пер. с англ.; Под ред. Р. Л. Добрушина. – М.: Мир, 1965. – 438 с.
9. Cover T. M. Elements of Information Theory / T. M. Cover, J. A. Thomas. 2nd Ed. – New York: Wiley, 2006. – 748 p.
10. Gazi O. Information Theory for Electrical Engineers. – Singapore: Springer, 2018. – 276 p.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Книги почтой

Заказ можно сделать на сайте издательства
www.infra-e.ru

Учебное издание

Приходько Андрей Иванович

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ В MATLAB

Учебное пособие

ISBN 978-5-9729-1019-9

Подписано в печать 07.02.2022
Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».

Издательство «Инфра-Инженерия»
160011, г. Вологда, ул. Козленская, д. 63
Тел.: 8 (800) 250-66-01
E-mail: booking@infra-e.ru
https://infra-e.ru