И. С. Гоноровский

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Учебник для вузов

И. С. Гоноровский

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов радиотехнических специальностей вузов

Москва
«Радио и связь»
1986

ББК 32.841
Г65
УДК 621.372(075)

Гоноровский И. С.

Г65 Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1986. — 512 с.: ил.

Изложены основы современной теории детерминированных и случайных сигналов и преобразования сигналов в радиотехнических цепях. В отличие от предыдущего издания (1977 г.) расширены разделы, посвященные цифровым сигналам и их обработке, статистическим методам в радиотехнике, большее внимание уделено синтезу цифровых цепей, введена глава, посвященная новому направлению в радиоэлектронике: «Кепстральный анализ сигналов».

Для студентов радиотехнических специальностей вузов, полезна инженерам.

Г $\frac{2402020000\text{-}182}{046(01)\text{-}86}$ 92-86

ББК 32.841

Рецензенты: кафедра «Теория цепей и сигналов» и кафедра «Радиотехнические системы» Горьковского политехнического института

Учебник

Иосиф Семенович Гоноровский

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Заведующая редакцией *Г. И. Козырева.* Редактор *Т. М. Бердичевская*
Художественный редактор *Н. С. Шеин.* Переплет художника *Ю. В. Архангельского*
Технический редактор *Т. Н. Зыкина.* Корректор *Г. Г. Казакова*

ИБ № 692

Сдано в набор 27.01.86. Подписано в печать 02.07.86. Т-07570.
Формат 70×100¹/₁₆. Бумага офсетная № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 41,6. Усл. кр.-отт. 41,6. Уч.-изд. л. 41,11. Тираж 30 000 экз. Изд. № 21351 Зак. № 1326. Цена 1 р. 70 к.

Издательство «Радио и связь», 101000 Москва, Почтамт, а/я 693

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, 129041, Б. Переяславская, 46

© Издательство «Радио и связь», 1986

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

«Радиотехнические цепи и сигналы» (РТЦиС)— базовый курс в системе подготовки современного инженера в области радиотехники и радиоэлектроники. Его целью является изучение фундаментальных закономерностей, связанных с получением сигналов, их передачей по каналам связи, обработкой и преобразованием в радиотехнических цепях. Курс РТЦиС, опирающийся на такие дисциплины, как «Математика», «Физика», «Основы теории цепей», вводит студентов в круг новых понятий и терминов, глубокое понимание и усвоение которых необходимо для изучения последующих инженерных дисциплин: это тот язык, на котором говорят современные радиоинженеры. Излагаемые в курсе РТЦиС методы анализа сигналов и радиотехнических цепей используют математический аппарат, в основном известный студентам из предшествующих дисциплин. Важная задача курса РТЦиС — научить студентов выбирать математический аппарат, адекватный решаемой задаче, показать, как работает этот аппарат при решении конкретных научных и технических задач в области радиотехники. Не менее важно научить студентов видеть тесную связь математического описания с физической стороной рассматриваемого явления, уметь составлять математические модели изучаемых процессов.

Радиоэлектроника является отраслью знаний, чрезвычайно быстро развивающейся как в научном, так и в техническом плане. Появляются новые направления, использующие как новые научные идеи и методы, так и новые схемотехнические решения, новую техническую базу. Однако и некоторые «старые», традиционные методы и идеи не отмирают, остаются необходимыми в арсенале радиоинженера. Это обстоятельство заставляет жестко отбирать материал, излагаемый в курсе так, чтобы он отвечал современным требованиям и учитывал тенденции развития радиоэлектроники. Неизбежно за рамками курса остаются конкретные вопросы схемотехники, хотя принципиальные вопросы, необходимые для понимания схемотехнических задач, в курсе освещаются.

Каков же круг вопросов, которые в настоящее время наиболее важны для большинства приложений радиоэлектроники и в соответствии с новой программой УМУ-Т-7/171 должны составлять основное содержание курса РТЦиС?

Во-первых, это вопросы теории сигналов:

спектральный и корреляционный анализ информационных и управляющих сигналов;

особенности спектрального и корреляционного анализа узкополосных радиосигналов, введение понятий комплексного и аналитического сигналов;

основы теории дискретных и цифровых сигналов;

статистический анализ случайных сигналов и помех, изучаемый в едином комплексе с детерминированными сигналами.

Во-вторых, это теория преобразования перечисленных выше сигналов в линейных цепях — апериодических и частотно-избирательных.

В-третьих, это основные положения теории нелинейных и параметрических устройств и преобразования в них сигналов.

Важное значение приобрели вопросы теории цифровой обработки сигналов, оптимальной обработки сигналов на фоне помех и основные положения теории синтеза радиотехнических цепей — аналоговых и цифровых.

В свете перечисленных требований в книгу введены новые разделы и сделаны дополнения, учитывающие специфику современной элементной базы, новых методов представления сигналов и методов их обработки. Современный курс, посвященный радиоцепям и сигналам, невозможен без изложения основных понятий нового принципа обработки мультипликативных и «свернутых» сигналов (обобщенная линейная фильтрация), а также кепстрального анализа. Для уяснения этих понятий требуется знакомство со всем предыдущим содержанием курса, что и обусловило помещение новой главы «Обобщенная линейная фильтрация. Кепстральный анализ» в конце книги.

Материал предыдущего издания переработан и в методическом плане с целью повышения его доходчивости. Материал повышенной сложности, рассчитанный на более подготовленных студентов, набран петитом.

В работе над книгой и при подготовке рукописи автор пользовался ценными советами и критическими замечаниями ряда сотрудников кафедры радиотехники МАИ, а также других вузов и научно-исследовательских институтов.

К рецензированию книги были привлечены кафедры Горьковского политехнического института «Теория цепей и сигналов» и «Радиотехнические системы». Большое число критических замечаний и ценных рекомендаций, сделанных коллективами этих кафедр, позволило существенно улучшить содержание учебника. При окончательном редактировании рукописи были учтены замечания и пожелания ряда членов научно-методической комиссии МВ и ССО СССР по радиотехнике и радиоуправлению. Всем коллегам автор выражает свою искреннюю признательность.

Глава 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, СИГНАЛОВ И ЦЕПЕЙ

1.1. ПЕРЕДАЧА СИГНАЛОВ НА РАССТОЯНИЕ И ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В РАДИОТЕХНИКЕ ЧАСТОТЫ

Основной задачей радиотехники является передача сообщения на расстояние. Расстояние разделяет отправителя и адресата, датчик команд и исполнительное устройство, исследуемый процесс и измерительный механизм, источник космического радиоизлучения и регистрирующий прибор радиотелескопа, различные блоки ЭВМ — словом, источник и потребитель информации.

Расстояние, на которое передается сообщение, может быть очень незначительным (передача команд в ЭВМ от одного блока к другому) или огромным (межконтинентальная или космическая связь). Передача сообщений осуществляется с помощью проводных, кабельных, волноводных линий или в свободном пространстве. Естественно, что для передачи сигналов целесообразно использовать те физические процессы, которые имеют свойство перемещаться. К числу таких процессов относятся применяемые в радиотехнике электромагнитные колебания — радиоволны.

Любой физический процесс, используемый в качестве агента (посредника, переносчика) для передачи информации, должен обладать свойством принимать всю совокупность состояний, по которым можно было бы однозначно установить соответствующее состояние объекта или процесса, являющегося источником информации. Для этого радиоволны подвергают модуляции. Процесс модуляции заключается в том, что высокочастотное колебание, способное распространяться на большие расстояния, наделяется признаками, характеризующими полезное сообщение. Таким образом, это колебание используется как переносчик сообщения, подлежащего передаче.

Выбор длины волны излучаемого колебания весьма существен для обеспечения устойчивой и надежной связи. Выбор того или иного диапазона волн для каждой конкретной системы связи определяется следующими факторами:

особенностью распространения электромагнитных волн данного диапазона;

характером помех в данном диапазоне;

характером сообщения (шириной спектра);

габаритными размерами антенной системы, необходимыми для осуществления направленного излучения.

Практически для использования пригодны те участки диапазона, в которых обеспечиваются благоприятные условия распространения радиоволн и в приемлемой степени удовлетворяются остальные перечисленные условия.

Для современной радиотехники характерны интенсивное изучение малоисследованных диапазонов волн и стремление к расширению диапазона используемых волн в сторону как весьма длинных, так и коротких, вплоть до световых. Последнее не должно казаться странным, так как радиоволны и световые волны имеют одинаковую природу (электромагнитные волны).

Подразделение радиоволн на диапазоны, вошедшее в практику, дано в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Волны	Диапазон радиоволн	Диапазон радиочастот	Нерекомендуемые термины
Декамегаметровые	100 000—10 000 км	3—30 Гц	
Мегаметровые	10 000—1000 км	30—300 Гц	
Гектокилометровые	1000—100 км	300—3000 Гц	
Мириаметровые	100—10 км	3—30 кГц	Сверхдлинные
Километровые	10—1 км	30—300 кГц	Длинные
Гектометровые	1000—100 м	300—3000 кГц	Средние
Декаметровые	100—10 м	3—30 МГц	Короткие
Метровые	10—1 м	30—300 МГц	
Дециметровые	100—10 см	300—3000 МГц	
Сантиметровые	10—1 см	3—30 ГГц	Ультракороткие
Миллиметровые	10—1 мм	30—300 ГГц	
Децимиллиметровые	1—0,1 мм	300—3000 ГГц	Субмиллиметровые

Примечание. Длина волны λ связана с периодом колебания T или с частотой $f=1/T$ соотношением $\lambda=cT=c/f$, где $c=3\cdot10^8$ м/с—скорость распространения электромагнитных волн в вакууме.

Связь на мириаметровых и километровых волнах, применявшаяся на первом этапе развития радиотелеграфии, имеет два больших недостатка:

необходимость большой мощности передатчика из-за сильного поглощения поверхностной волны при ее распространении над земной поверхностью;

невозможность передачи сигналов, ширина спектра которых соизмерима с несущей частотой.

Гектометровые волны получили широкое применение в радиовещании. Основным преимуществом связи на этих волнах является устойчивость приема, недостатком — трудность обеспечения большой дальности действия. Поэтому на таких волнах осуществляется преимущественно местное радиовещание в зоне с радиусом в несколько сотен километров. Лишь небольшое число сверхмощных гектометровых радиостанций обслуживает большие районы. В СССР, имеющем огромную территорию, существуют наиболее мощные в мире радиовещательные станции этого диапазона.

Главные преимущества декаметровых волн — возможность обеспечения большой дальности действия при относительно малой мощности передатчика и возможность осуществления направленного излучения. Основным недостатком связи на этих волнах является колебание уровня принимаемого сигнала (замирание), часто сопровождающееся сильными искажениями передачи при сложной структуре сигнала, состоящего из большого числа компонентов с различными частотами. Условия распространения неодинаковы для различных составляющих спектра сигнала. Это явление, называемое избирательным замиранием, приводит к временным выпадениям из спектра сигнала отдельных составляющих или, наоборот, к увеличению их амплитуд. Таким образом, в точке приема нарушается правильное соотношение между отдельными спектральными компонентами сигнала, в результате чего искажаются его тембр и чистота. Так как явление избирательного замирания проявляется тем сильнее, чем шире спектр сигнала, то на декаметровых волнах осуществлять передачу таких сложных сигналов, как, например, телевизионные, практически невозможно.

Большой экспериментальный материал по распространению декаметровых волн позволил установить оптимальные длины волн для различных часов суток и времени года, что открыло путь широкому развитию коротковолнового радиовещания. В настоящее время декаметровые волны широко применяются также в радиотелеграфии на магистральных линиях связи, в морской и авиационной радионавигации.

В результате освоения диапазонов радиоволн 10 м—0,1 мм появились новые области радиовещания, в частности телевизионные. Для диапазона метровых волн характерно удачное сочетание следующих двух факторов. Применение очень высокой частоты излучения позволяет соответственно расширить полосу частот передаваемого сообщения, так как условия передачи и усиления сигналов в радиоаппаратуре определяются в основном относительной шириной спектра сигнала. Особенности же распространения метровых волн (в пределах прямой видимости) почти полностью исключают искажения сигнала из-за интерференции волн, распространяющихся по разным путям.

Из приведенного краткого обзора видно, что развитие радиотехники характеризуется непрерывным расширением используемых диапазонов волн.

Из курса физики известно, что эффективное излучение электромагнитной энергии можно осуществить лишь при условии, что геометрические размеры излучающей системы соизмеримы с длиной волны. Поэтому передача сообщений в диапазоне мириаметровых волн затруднена. Напротив, для диапазона световых волн можно создать малогабаритные излучатели с чрезвычайно высокой направленностью и огромной концентрацией энергии в луче. Например, луч, посланный с Земли, образует на поверхности Луны пятно диаметром всего лишь в несколько сотен метров. Однако использование световых волн для передачи сообщений связано с трудностями реализации модуляции, приема, а также с влиянием погодных условий и т. д.

1.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В процессе передачи и приема сообщений сигналы подвергаются различным преобразованиям. Некоторые из этих преобразований являются типовыми, обязательными для большинства радиотехнических систем независимо от их назначения, а также от характера передаваемых сообщений. Перечислим эти фундаментальные процессы и попутно отметим их основные черты применительно к обобщенной схеме радиотехнического канала, представленной на рис. 1.1.

Преобразование исходного сообщения в электрический сигнал и кодирование. При передаче речи и музыки такое преобразование осуществляется с помощью микрофона, при передаче изображений (телевидение) — с помощью передающих трубок (например, суперортикона). При передаче письменного сообщения (радиотелеграфия) сначала осуществляют кодирование, заключающееся в том, что каждая буква текста заменяется комбинацией

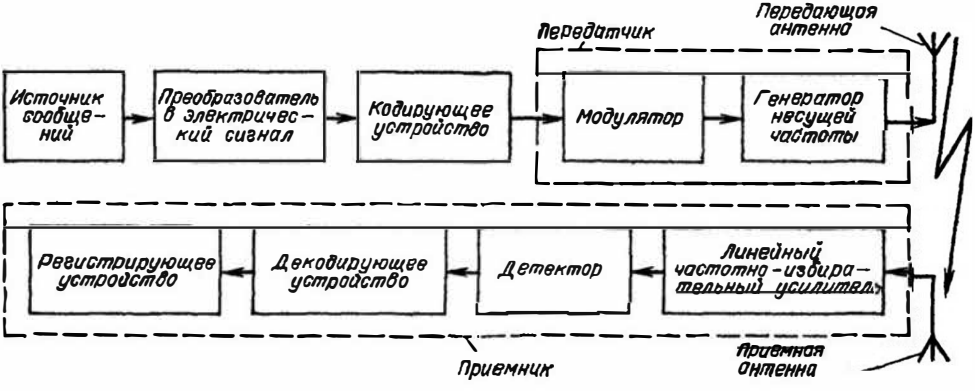


Рис. 1.1. Радиотехнический канал связи

стандартных символов (например, точек, тире и пауз в коде Морзе), которые затем преобразуют в стандартные электрические сигналы (например, импульсы разной длительности или разной полярности).

Следует отметить, что схема на рис. 1.1 соответствует введению информации «в начале» канала связи, т. е. непосредственно в передатчике. Несколько иначе обстоит дело, например, в радиолокационном канале, где информация о цели (дальность, высота, скорость и т. д.) получается в результате приема радиоволны, отраженной от цели.

Генерация высокочастотных колебаний. Высокочастотный генератор является источником колебаний несущей частоты. В зависимости от назначения радиоканала связи мощность колебаний изменяется от тысячных долей до миллионов ватт. Естественно, что конструктивные формы и размеры этих генераторов различны — от простейшего малогабаритного элемента до грандиозного технического сооружения.

Основными характеристиками высокочастотного генератора являются частота и диапазонность (возможность быстрой перестройки с одной рабочей частоты на другую), мощность и КПД. Особенно важное значение для радиотехники имеет стабильность частоты колебаний. Условия распространения радиоволн и широкий спектр частот диктуют применение очень высоких несущих частот. Условия же обработки сигналов на фоне помех и необходимость ослабления взаимных помех между различными радиоканалами заставляют добиваться максимально возможного уменьшения абсолютных изменений частоты. Это приводит к чрезвычайно жестким требованиям к относительной стабильности частоты.

Управление колебаниями (модуляция). Процесс модуляции заключается в изменении одного или нескольких параметров высокочастотного колебания по закону передаваемого сообщения. Частоты модулирующего сигнала, как правило, малы по сравнению с несущей частотой генератора. Для осуществления модуляции используются различные приемы, обычно основанные на изменении потенциала электродов электронных приборов, входящих в радиопередающее устройство. Основная характеристика процесса модуляции — степень соответствия между изменением параметра высокочастотного колебания и модулирующим сигналом.

Усиление слабых сигналов в приемнике. Антенна приемника улавливает ничтожную долю энергии, излучаемой антенной передатчика. В зависимости от расстояния между передающей и приемной станциями, от степени направленности излучения антенн и условий распространения радиоволн мощность на входе приемника 10^{-10} — 10^{-14} Вт. На выходе же приемника для надежной регистрации сигнала требуется мощность порядка единиц ватт и более. Отсюда следует, что усиление в приемнике должно достигать 10^7—10^{14} по мощности или 10^4—10^7 по напряжению.

В современных приемниках уверенная регистрация сигнала обеспечивается при напряжениях на входе порядка 1 мкВ. Решение этой сложной задачи оказывается возможным благодаря достижениям современной электроники. Большую роль играют также специальные методы построения схем приемников, обеспечивающие большое усиление при сохранении устойчивости работы приемника.

Проблема усиления в приемнике неотделима от проблемы выделения сигнала на фоне помех. Поэтому одним из основных параметров приемника является избирательность, под которой подразумевается способность выделять полезные сигналы из совокупности сигнала и посторонних воздействий (помех), отличающихся от сигнала частотой. Частотная избирательность осуществляется с помощью резонансных колебательных цепей.

Выделение сообщения из высокочастотного колебания (детектирование и декодирование). Детектирование является процессом, обратным модуля-

ции. В результате детектирования должно быть получено напряжение (ток), изменяющееся во времени так же, как изменяется один из параметров (амплитуда, частота или фаза) модулированного колебания, т. е. должно быть восстановлено передаваемое сообщение. Детектор, как правило, включается на выходе приемника, следовательно, к нему подводится модулированное колебание, уже усиленное предыдущими ступенями приемника. Основное требование к детектору — точное воспроизведение формы сигнала.

После детектирования осуществляется декодирование сигнала, т. е. процесс, обратный кодированию. В ряде радиотехнических каналов кодирование и декодирование не используются.

Помимо перечисленных процессов, так или иначе связанных с преобразованием частотных спектров, в радиотехнических устройствах широкое применение находит усиление колебаний без трансформации частоты, осуществляемое в различных усилителях. К таким усилителям относятся:

низкочастотные усилители управляющих сигналов, используемые перед модулятором передатчика, а также на выходе приемника;

усилители коротких импульсов, применяемые в телевизионной и радиолокационной технике. а также в импульсных системах радиосвязи;

высокочастотные усилители большой мощности, используемые в радиопередающих устройствах;

высокочастотные усилители слабых сигналов, применяемые в радиоприемных и измерительных устройствах.

Кроме упомянутых процессов, присущих, как уже отмечалось, любому радиотехническому каналу, в ряде специальных случаев широко применяются другие процессы: умножение и деление частоты, генерация коротких импульсов, различные виды импульсной модуляции и т. д.

1.3. КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В РАДИОТЕХНИКЕ

С информационной точки зрения сигналы можно разделить на детерминированные и случайные.

Детерминированным называют любой сигнал, мгновенное значение которого в любой момент времени можно предсказать с вероятностью единица. Примерами детерминированных сигналов могут служить импульсы или пачки импульсов, форма, амплитуда и положение во времени которых известны, а также непрерывный сигнал с заданными амплитудными и фазовыми соотношениями внутри его спектра.

К случайным относят сигналы, мгновенные значения которых заранее неизвестны и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью, меньшей единицы. Такими сигналами являются, например, электрическое напряжение, соответствующее речи, музыке, последовательности знаков телеграфного кода при передаче неповторяющегося текста. К случайным сигналам относится также последовательность радиоимпульсов на входе радиолокационного приемника, когда амплитуды импульсов и фазы их высокочастотного заполнения флуктуируют из-за изменения условий распространения, положения цели и некоторых других причин. Можно привести большое число других примеров случайных сигналов. По существу, любой сигнал, несущий в себе информацию, должен рассматриваться как случайный.

Перечисленные выше детерминированные сигналы, «полностью известные», информации уже не содержат. В дальнейшем такие сигналы часто будут обозначаться термином колебание.

Наряду с полезными случайными сигналами в теории и практике приходится иметь дело со случайными помехами — шумами. Уровень шумов яв-

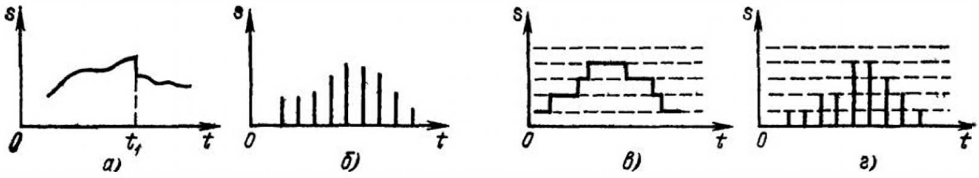


Рис. 1.2. Сигналы произвольные по величине и по времени (*а*), произвольные по величине и дискретные по времени (*б*), квантованные по величине и непрерывные по времени (в), квантованные по величине и дискретные по времени (*г*)

ляется основным фактором, ограничивающим скорость передачи информации при заданном сигнале. Поэтому изучение случайных сигналов неотделимо от изучения шумов. Полезные случайные сигналы, а также помехи часто объединяют термином случайные колебания или случайные процессы.

Дальнейшее подразделение сигналов можно связать с их природой: можно говорить о сигнале как о физическом процессе или как о закодированных, например в двоичный код, числах.

В первом случае под сигналом понимают какую-либо изменяющуюся во времени электрическую величину (напряжение, ток, заряд и т. д.), определенным образом связанную с передаваемым сообщением.

Во втором случае то же сообщение содержится в последовательности двоично-кодированных чисел.

Сигналы, формируемые в радиопередающих устройствах и излучаемые в пространство, а также поступающие в приемное устройство, где они подвергаются усилению и некоторым преобразованиям, являются физическими процессами.

В предыдущем параграфе указывалось, что для передачи сообщений на расстояние используются модулированные колебания. В связи с этим сигналы в канале радиосвязи часто подразделяют на управляющие сигналы и на радиосигналы; под первыми понимают модулирующие, а под вторыми — модулированные колебания.

Обработка сигналов в виде физических процессов осуществляется с помощью аналоговых электронных цепей (усилителей, фильтров и т. д.).

Обработка сигналов, закодированных в цифру, осуществляется с помощью вычислительной техники.

Представленная на рис. 1.1 и описанная в § 1.2 структурная схема канала связи не содержит указаний о виде используемого для передачи сообщения сигнала и структуре отдельных устройств.

Между тем сигналы от источника сообщений, а также после детектора (рис. 1.1) могут быть как непрерывные, так и дискретные (цифровые). В связи с этим применяемые в современной радиоэлектронике сигналы можно разделить на следующие классы:

произвольные по величине и непрерывные по времени (рис. 1.2, *а*);
произвольные по величине и дискретные по времени (рис. 1.2, *б*);
квантованные по величине и непрерывные по времени (рис. 1.2, *в*);
квантованные по величине и дискретные по времени (рис. 1.2, *г*).

Сигналы первого класса (рис. 1.2, *а*) иногда называют аналоговыми, так как их можно толковать как электрические модели физических величин, или непрерывными, так как они задаются по оси времени на несчетном множестве точек. Такие множества называются континуальными. При этом по оси ординат сигналы могут принимать любое значение в определенном интервале. Поскольку эти сигналы могут иметь разрывы, как на рис. 1.2, *а*,

то, чтобы избежать некорректности при описании, лучше такие сигналы обозначать термином к о н т и н у а л ь н ы й.

Итак, континуальный сигнал $s(t)$ является функцией непрерывной переменной t, а дискретный сигнал $s(x)$ — функцией дискретной переменной x, принимающей только фиксированные значения [9]. Дискретные сигналы могут создаваться непосредственно источником информации (например, дискретными датчиками в системах управления или телеметрии) или образовываться в результате дискретизации континуальных сигналов.

На рис. 1.2, *б* представлен сигнал, заданный при дискретных значениях времени t (на счетном множестве точек); величина же сигнала в этих точках может принимать любое значение в определенном интервале по оси ординат (как и на рис. 1.2, *а*). Таким образом, термин д и с к р е т н ы й характеризует не сам сигнал, а способ задания его на временно́й оси.

Сигнал на рис. 1.2, *в* задан на всей временно́й оси, однако его величина может принимать лишь дискретные значения. В подобных случаях говорят о сигнале, квантованном по уровню.

В дальнейшем термин дискретный будет применяться только по отношению к дискретизации по времени; дискретность же по уровню будет обозначаться термином к в а н т о в а н и е.

Квантование используют при представлении сигналов в цифровой форме с помощью цифрового кодирования, поскольку уровни можно пронумеровать числами с конечным числом разрядов. Поэтому дискретный по времени и квантованный по уровню сигнал (рис. 1.2, *г*) в дальнейшем будет называться ц и ф р о в ы м.

Таким образом, можно различать континуальные (рис. 1.2, *а*), дискретные (рис. 1.2, *б*), квантованные (рис. 1.2, *в*) и цифровые (рис. 1.2, *г*) сигналы.

Каждому из этих классов сигналов можно поставить в соответствие аналоговую, дискретную или цифровую цепи. Связь между видом сигнала и видом цепи показана на функциональной схеме (рис. 1.3).

При обработке континуального сигнала с помощью аналоговой цепи не требуется дополнительных преобразований сигнала. При обработке же континуального сигнала с помощью дискретной цепи необходимы два преобразования: дискретизация сигнала по времени на входе дискретной цепи и

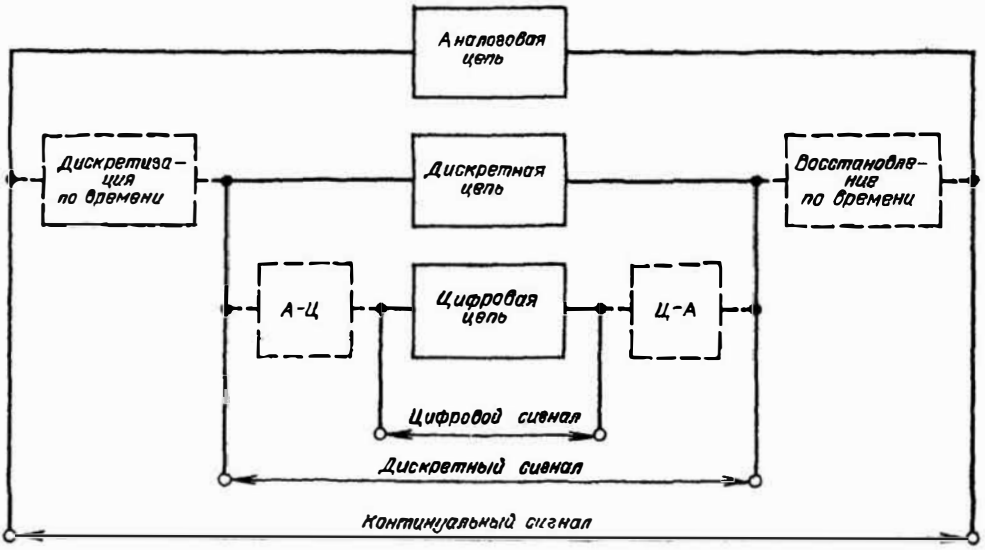


Рис. 1.3. Виды сигнала и соответствующие им цепи

обратное преобразование, т. е. восстановление континуальной структуры сигнала на выходе дискретной цепи. Наконец, при цифровой обработке континуального сигнала требуются еще два дополнительных преобразования: аналог—цифра, т. е. квантование и цифровое кодирование на входе цифровой цепи, и обратное преобразование цифра—аналог, т. е. декодирование на выходе цифровой цепи.

Процедура дискретизации сигнала и особенно преобразование аналог—цифра требуют очень высокого быстродействия соответствующих электронных устройств. Эти требования возрастают с повышением частоты континуального сигнала. Поэтому цифровая техника получила наибольшее распространение при обработке сигналов на относительно низких частотах (звуковых и видеочастотах). Однако достижения микроэлектроники способствуют быстрому повышению верхней границы обрабатываемых частот.

1.4. РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И МЕТОДЫ ИХ АНАЛИЗА

1. КЛАССИФИКАЦИЯ ЦЕПЕЙ

Радиотехнические цепи и элементы, используемые для осуществления перечисленных в § 1.2 преобразований сигналов и колебаний, можно разбить на следующие основные классы:

линейные цепи с постоянными параметрами;

линейные цепи с переменными параметрами;

нелинейные цепи.

Следует сразу же указать, что в реальных радиоустройствах четкое выделение линейных и нелинейных цепей и элементов не всегда возможно. Отнесение одних и тех же элементов к линейным или нелинейным часто зависит от уровня воздействующих на них сигналов.

Тем не менее приведенная выше классификация цепей необходима для понимания теории и техники обработки сигналов.

Сформулируем основные свойства этих цепей.

2. ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Можно исходить из следующих определений.

1. Цепь является линейной, если входящие в нее элементы не зависят от внешней силы (напряжения, тока), действующей на цепь.

2. Линейная цепь подчиняется принципу суперпозиции (наложения).

В математической форме этот принцип выражается следующим равенством:

$$L\,[s_1(t) + s_2(t) + \ldots] = L\,[s_1(t)] + L\,[s_2(t)] + \ldots, \qquad (1.1)$$

где L — оператор, характеризующий воздействие цепи на входной сигнал.

Суть принципа суперпозиции может быть сформулирована следующим образом: *при действии на линейную цепь нескольких внешних сил поведение цепи (ток, напряжение) можно определить путем наложения (суперпозиции) решений, найденных для каждой из сил в отдельности.* Можно использовать еще и такую формулировку: *в линейной цепи сумма эффектов от отдельных воздействий совпадает с эффектом от суммы воздействий.* При этом предполагается, что цепь свободна от начальных запасов энергии.

Принцип наложения лежит в основе спектрального и операторного методов анализа переходных процессов в линейных цепях, а также метода интеграла наложения (интеграл Дюамеля). Применяя принцип наложения, любые сложные сигналы при передаче их через линейные цепи

можно разложить на простые, более удобные для анализа (например, гармонические).

3. *При любом сколь угодно сложном воздействии в линейной цепи с постоянными параметрами не возникает колебаний новых частот.* Это вытекает из того факта, что при гармоническом воздействии на линейную цепь с постоянными параметрами колебание на выходе также остается гармоническим с той же частотой, что и на входе; изменяются лишь амплитуда и фаза колебания. Разложив сигналы $s_1(t)$, $s_2(t)$, ... на гармонические колебания и подставив результаты разложения в (1.1), убедимся, что на выходе цепи могут существовать только колебания с частотами, входящими в состав входного сигнала.

Это означает, что ни одно из преобразований сигналов, сопровождающихся появлением новых частот (т. е. частот, отсутствующих в спектре входного сигнала), не может в принципе быть осуществлено с помощью линейной цепи с постоянными параметрами. Такие цепи находят широчайшее применение для решения задач, не связанных с трансформацией спектра, таких как линейное усиление сигналов, фильтрация (по частотному признаку) и т. д.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Имеются в виду цепи, один или несколько параметров которых изменяются во времени (но не зависят от входного сигнала). Подобные цепи часто называются линейными параметрическими.

Сформулированные в предыдущем пункте свойства 1 и 2 справедливы и для линейных параметрических цепей. Однако в отличие от предыдущего случая даже простейшее гармоническое воздействие создает в линейной цепи с переменными параметрами сложное колебание, имеющее спектр частот. Это можно пояснить на следующем простейшем примере. Пусть к резистору, сопротивление которого изменяется во времени по закону

$$R(t) = R_0/(1 + m\cos\Omega t),$$

приложена гармоническая ЭДС

$$e(t) = E_0\cos\omega t.$$

Ток через сопротивление

$$i(t) = e(t)/R(t) = (E_0/R_0)(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega t = (E_0/R_0)[\cos\omega t + (m/2)\cos(\omega + \Omega)t + (m/2)\cos(\omega - \Omega)t]. \quad (1.2)$$

Как видим, в составе тока имеются компоненты с частотами $\omega \pm \Omega$, которых нет в $e(t)$. Даже из этой простейшей модели ясно, что, изменяя во времени сопротивление, можно осуществить преобразование спектра входного сигнала.

Аналогичный результат, хотя и с более сложными математическими выкладками, можно получить для цепи с переменными параметрами, содержащей реактивные элементы — катушки индуктивности и конденсаторы. Этот вопрос рассматривается в гл. 10. Здесь лишь отметим, что линейная цепь с переменными параметрами преобразует частотный спектр воздействия и, следовательно, может быть использована для некоторых преобразований сигналов, сопровождающихся трансформацией спектра. Из дальнейшего будет также видно, что периодическое изменение во времени индуктивности или емкости колебательной цепи позволяет при некоторых условиях осуществить «накачку» энергии от вспомогательного устройства, изменяющего этот параметр («параметрические усилители» и «параметрические генераторы», гл. 10).

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Радиотехническая цепь является нелинейной, если в ее состав входят один или несколько элементов, параметры которых зависят от уровня входного сигнала. Простейший нелинейный элемент — диод с вольт-амперной характеристикой, представленной на рис. 1.4.

Перечислим основные свойства нелинейных цепей.

1. К нелинейным цепям (и элементам) *принцип суперпозиции неприменим*. Это свойство нелинейных цепей тесно связано с кривизной вольт-амперных (или иных аналогичных) характеристик нелинейных элементов, нарушающей пропорциональность между током и напряжением. Например, для диода, если напряжению u_1 соответствует ток i_1, а напряжению u_2 — ток i_2, то суммарному напряжению $u_3 = u_1 + u_2$ будет соответствовать ток i_3, отличный от суммы $i_1 + i_2$ (рис. 1.4).

Из этого простого примера видно, что при анализе воздействия сложного сигнала на нелинейную цепь его нельзя разлагать на более простые; необходимо искать отклик цепи на результирующий сигнал. Неприменимость для нелинейных цепей принципа суперпозиции делает непригодными спектральный и иные методы анализа, основанные на разложении сложного сигнала на составляющие.

2. Важным свойством нелинейной цепи является преобразование спектра сигнала. При воздействии на нелинейную цепь простейшего гармонического сигнала в цепи помимо колебаний основной частоты возникают гармоники с частотами, кратными основной частоте (а в некоторых случаях и постоянная составляющая тока или напряжения). В дальнейшем будет показано, что при сложной форме сигнала в нелинейной цепи помимо гармоник возникают еще и колебания с комбинационными частотами, являющиеся результатом взаимодействия отдельных колебаний, входящих в состав сигнала.

С точки зрения преобразования спектра сигнала следует подчеркнуть принципиальное различие между *линейными параметрическими и нелинейными цепями*. В нелинейной цепи структура спектра на выходе зависит не только от формы входного сигнала, но и от его амплитуды. В линейной параметрической цепи структура спектра от амплитуды сигнала не зависит.

Особенный интерес для радиотехники представляют свободные колебания в нелинейных цепях. Подобные колебания называются автоколебаниями, поскольку они возникают и могут устойчиво существовать в отсутствие внешнего периодического воздействия. Расход энергии компенсируется источником энергии постоянного тока.

Основные радиотехнические процессы: генерация, модуляция, детектирование и преобразование частоты — сопровождаются трансформацией частотного спектра. Поэтому эти процессы можно осуществить с помощью либо нелинейных, либо линейных параметрических цепей. В некоторых случаях используются одновременно как нелинейные, так и линейные параметрические цепи. Следует, кроме того, подчеркнуть, что нелинейные элементы работают в сочетании с линейными цепями, осуществляющими выделение полезных компонентов преобразованного спектра. В связи с этим, как уже отмечалось в начале данного параграфа, деление цепей на линейные, нелинейные и линейные параметрические весьма условно. Обычно для описания поведения различных узлов одного и того же радиотехнического устройства приходится применять разнообразные математические методы — линейные и нелинейные.

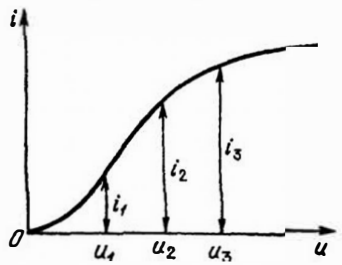


Рис. 1.4. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента (диода)

Изложенные выше основные свойства цепей трех классов — линейных с постоянными параметрами, линейных параметрических и нелинейных — сохраняются при любых формах реализации цепей: с сосредоточенными параметрами, с распределенными параметрами (линии, излучающие устройства) и т. д. Эти свойства распространяются также и на устройства цифровой обработки сигналов.

Следует, однако, подчеркнуть, что положенный в основу деления цепей на линейные и нелинейные принцип суперпозиции сформулирован выше для *операции суммирования сигналов* на входе цепи [см. (1.1)]. Однако этой операцией не исчерпываются требования к современным системам обработки сигналов. Важным для практики является, например, случай, когда сигнал на входе цепи является *произведением* двух сигналов. Оказывается, что и для подобных сигналов можно осуществить обработку, подчиняющуюся принципу суперпозиции, однако эта обработка будет являться сочетанием специально подобранных *нелинейных* и линейных операций. Подобная обработка называется г о м о м о р ф н о й.

Синтез подобных устройств рассматривается в конце курса (см. гл. 16), после изучения линейных и нелинейных цепей, а также цифровой обработки сигналов, развитие которой и явилось толчком к широкому применению гомоморфной обработки.

1.5. ПРОБЛЕМА ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СОВМЕСТИМОСТИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Комплекс устройств, используемых для передачи информации от источника до получателя (а также разделяющая их среда), образуют *канал связи*. От канала связи требуется по возможности полная передача информации. Потери информации могут вызываться искажениями сигналов из-за несовершенства отдельных элементов канала, а также из-за помех.

Помехи возникают во всех элементах канала связи: как в среде, используемой для передачи сигнала от передатчика к приемнику, так и в технических устройствах, выполняющих необходимые преобразования сигнала. В первом случае помехи называются внешними, во втором — внутренними.

Источником внешних помех являются атмосферные явления, шумы космического пространства, радиоустройства, работающие на близких частотах, индустриальные помехи, медицинская радиоаппаратура и др.

Помехи подобного рода создают *проблему электромагнитной совместимости* (ЭМС).

Взаимные помехи между радиостанциями устраняют рациональным размещением (распределением) частот, регламентируемым специальными международными соглашениями, улучшением качества передачи в результате уменьшения нежелательного, так называемого внеполосного излучения, увеличением стабильности несущей частоты, применением направленных антенн и т. д. Все это позволяет в какой-то мере разрешить проблему «тесноты в эфире». Однако проблема ЭМС еще далека от своего разрешения. Ее требуется учитывать при проектировании и разработке новых радиотехнических устройств и систем, в частности при выборе формы и параметров радиосигналов, выборе частотного диапазона, в котором помехи минимальны, при размещении радиоустройств и т. д.[1].

---

[1] Проблема ЭМС детально рассматривается в книге: Князев А. Д. Элементы теории и практики обеспечения ЭМС радиоэлектронных средств. — М.: Радио и связь, 1984.

Внутренние шумы, обязанные своим возникновением дискретной природе заряженных частиц, образуются из-за теплового движения этих частиц в элементах электрических цепей, из-за дробового эффекта в электронных приборах и ряда других явлений, имеющих место при работе радиотехнических устройств. Особенно сильно действие внутренних шумов при большом усилении сигнала, т. е. при приеме слабых сигналов. Одновременно с полезным сигналом усиливаются и шумы, которые могут по интенсивности оказаться соизмеримыми с сигналом, в результате чего последний окажется частично или полностью замаскированным.

Принципиально задача ослабления внутренних шумов является наиболее сложной, но и их уровень можно существенно снизить, применив усилительные устройства, работающие в режиме глубокого (например, до температуры жидкого гелия) охлаждения, в результате чего снижается интенсивность теплового движения частиц. Однако, несмотря на все эти меры, полностью избавиться от помех невозможно.

Со времени изобретения радио А. С. Поповым (в 1885 г.) и до настоящего времени основной проблемой радиотехники была и остается проблема помехоустойчивости связи, включающая в себя и упомянутую выше проблему ЭМС, и большое число других проблем, охватывающих все разделы радиотехники: генерирование мощных колебаний, освоение и выбор волн, обеспечивающие благоприятные условия распространения, использование антенн направленного действия, поиски новых видов радиосигналов и новых способов их обработки на фоне помех и т. д.

Глава 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

2.1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Основными энергетическими характеристиками вещественного сигнала $s(t)$ являются его мощность и энергия.

Мгновенная мощность определяется как квадрат мгновенного значения $s(t)$:

$$p(t) = s^2(t).$$

Если $s(t)$ — напряжение или ток, то $p(t)$ есть мгновенная мощность, выделяемая на сопротивлении в 1 Ом.

Энергия сигнала на интервале t_2, t_1 определяется как интеграл от мгновенной мощности:

$$\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t)\,dt. \tag{2.1}$$

Отношение

$$\frac{\mathcal{E}}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} s^2(t)\,dt = \overline{s^2(t)} \tag{2.2}$$

имеет смысл средней на интервале t_2, t_1 мощности сигнала.

Реальные сигналы имеют конечную длительность и ограниченную по величине мгновенную мощность. Энергия таких сигналов конечна. В теории сигналов часто рассматриваются функции времени, заданные на всей оси времени $-\infty < t < \infty$ при конечной величине средней мощности. Говорить об энергии подобных сигналов, обращающейся в бесконечно большую величину, не имеет смысла.

2.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СИГНАЛА В ВИДЕ СУММЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Для теории сигналов и их обработки важное значение имеет разложение заданной функции $f(x)$ по различным ортогональным системам функций $\varphi_n(x)$. Напомним основные определения, относящиеся к свойствам ортогональных систем.

Бесконечная система действительных функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \tag{2.3}$$

называется ортогональной на отрезке $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = 0 \text{ при } n \neq m. \tag{2.4}$$

При этом предполагается, что

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx \neq 0, \tag{2.5}$$

т. е. что никакая из функций рассматриваемой системы (2.3) не равна тождественно нулю.

Условие (2.4) выражает попарную ортогональность функций системы (2.3). Величина

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx} \tag{2.6}$$

называется нормой функций $\varphi_n(x)$.

Функция $\varphi_n(x)$, для которой выполняется условие

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = 1, \tag{2.7}$$

называется нормированной функцией, а система нормированных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., в которой каждые две различные функции взаимно ортогональны, называется ортонормированной системой.

В математике доказывается, что если функции $\varphi_n(x)$ непрерывны, то произвольная кусочно-непрерывная функция $f(x)$, для которой выполняется условие

$$\int |f(x)|^2\,dx < \infty,$$

может быть представлена в виде суммы ряда

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots \tag{2.8}$$

Интеграл в предыдущем выражении вычисляется по области определения $f(x)$.

Умножим обе части уравнения (2.8) на $\varphi_n(x)$ и проинтегрируем в пределах a, b. Все слагаемые вида $\int_a^b c_m \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx$ при $m \neq n$ обращаются в нуль в силу ортогональности функций $\varphi_m(x)$ и $\varphi_n(x)$. В правой части остается одно слагаемое

$$\int_a^b c_n \varphi_n(x)\,\varphi_n(x)\,dx = c_n \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = c_n \|\varphi_n\|^2,$$

что позволяет написать

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = c_n \|\varphi_n\|^2,$$

откуда следует важное соотношение

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx. \tag{2.9}$$

Ряд (2.8), в котором коэффициенты c_n определены по формуле (2.9), называется обобщенным рядом Фурье по данной системе $\varphi_n(x)$. Совокупность коэффициентов c_n называется спектром сигнала $f(x)$ в ортогональной системе $\varphi_n(x)$ и полностью определяет этот сигнал.

Обобщенный ряд Фурье обладает следующим важным свойством: при заданной системе функций $\varphi_n(x)$ и фиксированном числе слагаемых ряда (2.8) он обеспечивает наилучшую аппроксимацию (в смысле минимума среднеквадратической ошибки) данной функции $f(x)$. Это означает, что среднеквадратическая ошибка, под которой подразумевается величина

$$M = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x) \right]^2 dx,$$

достигает минимума, когда коэффициенты ряда $a_n = c_n$.

Действительно, подставив в предыдущее выражение $a_n = c_n + b_n$ и использовав равенства (2.4), (2.6) и (2.9), получим

$$M = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{n=0}^{N} c_n^2 \|\varphi_n\|^2 + \sum_{n=0}^{N} b_n^2 \|\varphi_n\|^2.$$

Отсюда следует, что M достигает минимума при $b_n = 0$, т. е. при $a_n = c_n$. Таким образом,

$$M_{\min} = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{n=0}^{N} c_n^2 \|\varphi_n\|^2. \tag{2.10}$$

Так как величина

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \|f\|^2$$

является квадратом нормы функции $f(x)$, а $M_{\min} \geqslant 0$, то на основании (2.10) можно написать следующее неравенство:

$$\sum_{n=0}^{N} c_n^2 \|\varphi_n\|^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{2.11}$$

Это основное неравенство, называемое неравенством Бесселя, справедливо для любой ортогональной системы.

Ортогональная система называется полной, если увеличением числа членов в ряде среднеквадратическую ошибку M можно сделать сколь угодно малой.

Условие полноты можно записать в виде соотношения

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \| \varphi_n \|^2 = \| f \|^2. \tag{2.12}$$

При выполнении этого условия можно считать, что ряд (2.8) *сходится в среднем*, т. е.

$$\lim_{N \to \infty} \int \left[f(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n(x) \right]^2 dx = 0. \tag{2.13}$$

Из этого, однако, еще не следует, что $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ сходится к $f(x)$, т. е. что

$$\max \left| f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \right| = 0$$

при любых значениях x. В п. 1 § 2.4 будет приведен пример, показывающий, что в отдельных точках на оси x ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ может отличаться от $f(x)$, хотя равенство (2.13) имеет место.

Для системы функций $\varphi_n(x)$, принимающих комплексные значения, приведенные выше определения обобщаются следующим образом:

условие ортогональности

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m^*(x) dx = 0 \text{ при } n \neq m; \tag{2.4'}$$

квадрат нормы функции

$$\| \varphi_n \|^2 = \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_n^*(x) dx = \int_a^b | \varphi_n(x) |^2 dx; \tag{2.6'}$$

коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{\| \varphi_n \|^2} \int_a^b f(x) \varphi_n^*(x) dx. \tag{2.9'}$$

В этих выражениях $\varphi^*(x)$ обозначает функцию, комплексно-сопряженную функции $\varphi(x)$.

Применительно к сигналам $s(t)$, являющимся функциями времени, выражение (2.8) в дальнейшем будет записываться в форме

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(t). \tag{2.14}$$

В новых обозначениях квадрат нормы функции $s(t)$ по аналогии с (2.6) будет

$$\| s \|^2 = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt = \mathcal{E}. \tag{2.15}$$

Это выражение совпадает с (2.1).

Таким образом, в соответствии с формулой (2.12) энергия сигнала

$$\mathcal{Э} = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \|\varphi_n\|^2, \tag{2.16}$$

а при использовании ортонормированной системы функций $\varphi_n(t)$

$$\mathcal{Э} = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2. \tag{2.16'}$$

При этом имеется в виду, что промежуток времени $t_2 - t_1$, в котором определяется энергия $\mathcal{Э}$, является *интервалом ортогональности* для системы функций $\varphi_n(t)$.

Очевидно, что средняя за время $t_2 - t_1$ мощность сигнала

$$\overline{s^2(t)} = \frac{\mathcal{Э}}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \|\varphi_n\|^2. \tag{2.17}$$

Выбор наиболее рациональной ортогональной системы функций зависит от цели, преследуемой при разложении сложной функции в ряд. Среди разнообразных задач, требующих разложения сложного сигнала, наиболее важными являются: 1) точное разложение на простейшие ортогональные функции; 2) аппроксимация сигналов, процессов или характеристик, когда требуется свести к минимуму число членов ряда (при заданной допустимой погрешности).

При первой постановке задачи наибольшее распространение получила ортогональная система основных тригонометрических функций — синусов и косинусов. Это объясняется рядом причин. Во-первых, *гармоническое колебание является единственной функцией времени, сохраняющей свою форму при прохождении через любую линейную цепь* (с постоянными параметрами). Изменяются лишь амплитуда и фаза колебания. Во-вторых, разложение сложного сигнала по синусам и косинусам позволяет использовать символический метод, разработанный для анализа передачи гармонических колебаний через линейные цепи. По этим, а также и некоторым другим причинам гармонический анализ получил широкое распространение во всех отраслях современной науки и техники.

При второй постановке задачи — приближенном разложении функций — применяются разнообразные ортогональные системы функций: полиномы Чебышева, Эрмита, Лагерра, Лежандра, функции Уолша и многие другие. Некоторые из этих систем функций будут рассмотрены в гл. 14.

2.3. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

При разложении периодического сигнала $s(t)$ в ряд Фурье по тригонометрическим функциям в качестве ортогональной системы берут

$$1,\ \cos\omega_1 t,\ \sin\omega_1 t,\ \cos 2\omega_1 t,\ \sin 2\omega_1 t,\ \ldots,\ \cos n\omega_1 t,\ \sin n\omega_1 t,\ \ldots \tag{2.18}$$

или

$$\ldots e^{-i2\omega_1 t},\ e^{-i\omega_1 t},\ 1,\ e^{i\omega_1 t},\ e^{i2\omega_1 t},\ \ldots \tag{2.19}$$

Интервал ортогональности в обоих случаях совпадает с периодом $T = 2\pi/\omega_1$ функции $s(t)$.

Система функций (2.18) приводит к тригонометрической форме ряда Фурье, а система (2.19) — к комплексной форме. Между этими двумя формами существует простая связь.

Воспользуемся сначала ортогональной системой (2.19). Тогда ряд Фурье должен быть записан в форме

$$s(t) = \ldots c_{-2}\, e^{-i2\omega_1 t} + c_{-1}\, e^{-i\omega_1 t} + c_0 + c_1\, e^{i\omega_1 t} + c_2\, e^{i2\omega_1 t} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\omega_1 t}. \qquad (2.20)$$

Совокупность коэффициентов c_n ряда Фурье в базисе тригонометрических функций называется частотным спектром периодического сигнала. Коэффициенты ряда (2.20) c_n легко определяются с помощью формул, приведенных в предыдущем параграфе.

Из формулы (2.6′) следует, что

$$\|\varphi_n(t)\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega_1 t}\, e^{-in\omega_1 t}\, dt = T. \qquad (2.21)$$

Таким образом, независимо от n норма $\|\varphi_n\| = \sqrt{T}$. Используя формулу (2.9′), получаем

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\, e^{-in\omega_1 t}\, dt. \qquad (2.22)$$

В выражениях (2.21) и (2.22) учтено, что функции $e^{in\omega_1 t}$ соответствует комплексно-сопряженная функция $e^{-in\omega_1 t}$.

Коэффициенты c_n в общем случае являются комплексными величинами. Подставив в (2.22) $e^{-in\omega_1 t} = \cos n\omega_1 t - i \sin n\omega_1 t$, получим

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega_1 t\, dt - i \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\omega_1 t\, dt = c_{nc} - i c_{ns}. \qquad (2.23)$$

Косинусная (действительная) и синусная (мнимая) части коэффициента c_n определяются формулами

$$c_{nc} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega_1 t\, dt, \quad c_{ns} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\omega_1 t\, dt. \qquad (2.24)$$

Коэффициенты c_n часто бывает удобно записывать в форме

$$c_n = |c_n|\, e^{i\theta_n}, \qquad (2.25)$$

где

$$|c_n| = \sqrt{c_{nc}^2 + c_{ns}^2}, \qquad \theta_n = -\operatorname{arctg} \frac{c_{ns}}{c_{nc}}. \qquad (2.26), (2.27)$$

Модуль $|c_n|$ является функцией, четной относительно n, а аргумент θ_n — нечетной (последнее вытекает непосредственно из выражений (2.24), показывающих, что c_{nc} является четной, а c_{ns} нечетной функциями n).

Общее выражение (2.20) можно привести к виду

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|\, e^{i(n\omega_1 t + \theta_n)}. \qquad (2.28)$$

Теперь нетрудно перейти к тригонометрической форме ряда Фурье. Выделив из ряда (2.28) пару слагаемых, соответствующую какому-либо заданному значению $|n|$, например $|n| = 2$, и, учтя соотношения $\theta_{-2} = -\theta_2$, $|c_{-2}| = |c_2|$, получим для суммы этих слагаемых

$$|c_{-2}|\, e^{i(-2\omega_1 t + \theta_{-2})} + |c_2|\, e^{i(2\omega_1 t + \theta_2)} = |c_2| [e^{-i(2\omega_1 t + \theta_2)} + e^{i(2\omega_1 t + \theta_2)}] =$$

$$= 2|c_2| \cos(2\omega_1 t + \theta_2). \qquad (2.29)$$

Отсюда видно, что при переходе к тригонометрической форме ряд (2.28) необходимо записать следующим образом:

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,|c_n| \cos(n\omega_1 t + \theta_n). \qquad (2.30)$$

Смысл удвоения коэффициентов Фурье c_n в тригонометрическом ряду при $n \geqslant 1$ становится ясным из рассмотрения векторной диаграммы (рис. 2.1), соответствующей (2.29) при $|n| = 2$. Вещественная функция $2\,|c_n| \cos(n\omega_1 t + \theta_n)$ получается как сумма проекций на горизонтальную ось OB двух векторов длиной $|c_n|$, вращающихся с угловой частотой $|n|\,\omega_1$ во взаимно противоположных направлениях. Вектор, вращающийся против часовой стрелки, соответствует положительной частоте, а вектор, вращающийся по часовой стрелке, — отрицательной. *После перехода к тригонометрической форме понятие «отрицательная частота» теряет смысл.* Коэффициент c_0 не удваивается, так как в спектре периодического сигнала составляющая с нулевой частотой не имеет «дублера».

Вместо выражения (2.30) в математической и радиотехнической литературе часто встречается следующая форма записи:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \theta_n), \qquad (2.31)$$

причем $\theta_n = -\operatorname{arctg}(b_n/a_n)$.

Из сопоставления выражений (2.31) и (2.30) видно, что амплитуда n-й гармоники A_n связана с коэффициентом $|c_n|$ ряда (2.28) соотношением

$$A_n = 2\,|c_n|, \text{ а } a_n = 2c_{nc},\ b_n = 2c_{ns}.$$

Таким образом, для всех положительных значений n (включая и $n = 0$)

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega_1 t\,dt,\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\omega_1 t\,dt. \qquad (2.32)$$

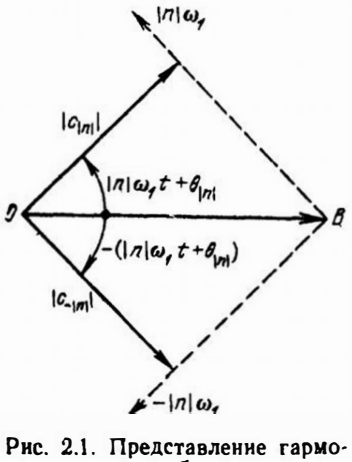


Рис. 2.1. Представление гармонического колебания в виде двух комплексных составляющих: с положительной и отрицательной частотами

Если сигнал представляет собой функцию, четную относительно t, т. е. $s(t) = s(-t)$, в тригонометрической записи ряда остаются только косинусоидальные члены, так как коэффициенты b_n в соответствии с формулой (2.32) обращаются в нуль. Для нечетной относительно t функции $s(t)$, наоборот, в нуль обращаются коэффициенты a_n и ряд состоит только из синусоидальных членов.

Две характеристики — амплитудная и фазовая, т. е. модули и аргументы комплексных коэффициентов ряда Фурье, полностью определяют структуру частотного спектра периодического колебания. Наглядное представление о «ширине» спектра дает графическое изображение спектра амплитуд. В качестве примера на рис. 2.2, *а* построен спектр коэффициентов $|c_n|$, а на рис. 2.2, *б* — спектр амплитуд $A_n = 2\,|c_n|$ для одного и того же периодического колебания. Для исчерпываю-

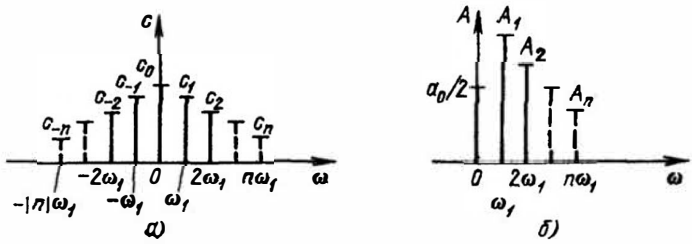


Рис. 2.2. Коэффициенты комплексного (*а*) и тригонометрического (*б*) рядов Фурье периодической функции времени

щей характеристики спектра подобные построения должны быть дополнены заданием начальных фаз отдельных гармоник.

Спектр периодической функции называется линейчатым или дискретным, так как состоит из отдельных линий, соответствующих дискретным частотам 0, ω_1, $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = 3\omega_1$ и т. д.

Использование для гармонического анализа сложных периодических колебаний рядов Фурье в сочетании с принципом наложения представляет собой эффективное средство для изучения влияния линейных цепей на прохождение сигналов. Следует, правда, отметить, что определение сигнала на выходе цепи по сумме гармоник с заданными амплитудами и фазами является непростой задачей, особенно если не обеспечивается быстрая сходимость ряда Фурье, представляющего входной сигнал. Наиболее распространенные в радиотехнике сигналы не соответствуют этому условию, и для удовлетворительного воспроизведения формы сигналов обычно необходимо суммировать большое число гармоник.

2.4. СПЕКТРЫ ПРОСТЕЙШИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Рассмотрим несколько примеров периодических колебаний, часто используемых в различных радиотехнических устройствах.

1. ПРЯМОУГОЛЬНОЕ КОЛЕБАНИЕ (РИС. 2.3)

Подобное колебание, часто называемое меандром[1], находит особенно широкое применение в измерительной технике.

При выборе начала отсчета времени в соответствии с рис. 2.3, *а* функция является нечетной, а рис. 2.3, *б* — четной. Применяя формулы (2.24), находим для нечетной функции (рис. 2.3, *а*) при $s(t) = e(t)$:

$$c_{nc} = 0,\ c_{ns} = \frac{E}{T}\left[\int_{-T/2}^{0}(-1)\sin n\omega_1 t\,dt + \int_{-0}^{T/2}\sin n\omega_1 t\,dt\right] = \frac{2E}{Tn\omega_1}\left(1-\cos\frac{n\omega_1 T}{2}\right).$$

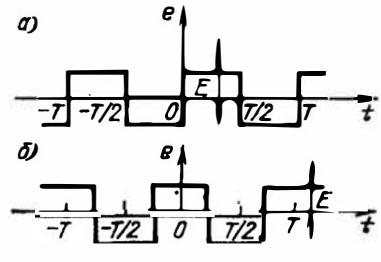


Рис. 2.3. Периодическое колебание прямоугольной формы (меандр)

[1] Меандр — греческое слово, обозначающее «орнамент».

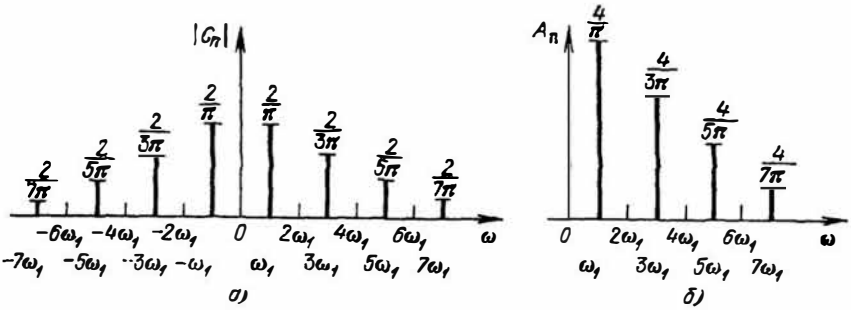


Рис. 2.4. Коэффициенты комплексного (*а*) и тригонометрического (*б*) ряда Фурье колебания, показанного на рис. 2.3

Учитывая, что $T\omega_1 = 2\pi$, получаем

$$c_{ns} = \frac{E}{\pi n}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0, 2, 4, \ldots, \\ 2E/n\pi & \text{при } n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

Начальные фазы θ_n в соответствии с (2.27) равны $-\pi/2$ для всех гармоник.

Запишем ряд Фурье в тригонометрической форме

$$e(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} 2\,|c_{ns}| \cos\left(n\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4E}{\pi}\left(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t + \ldots\right). \qquad (2.33)$$

Спектр коэффициентов $|c_n|$ комплексного ряда Фурье показан на рис. 2.4, *а*, а тригонометрического ряда — на рис. 2.4, *б* (при $E = 1$).

При отсчете времени от середины импульса (рис. 2.3, *б*) функция является четной относительно t и для нее

$$e(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\cos\omega_1 t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t - \ldots\right). \qquad (2.34)$$

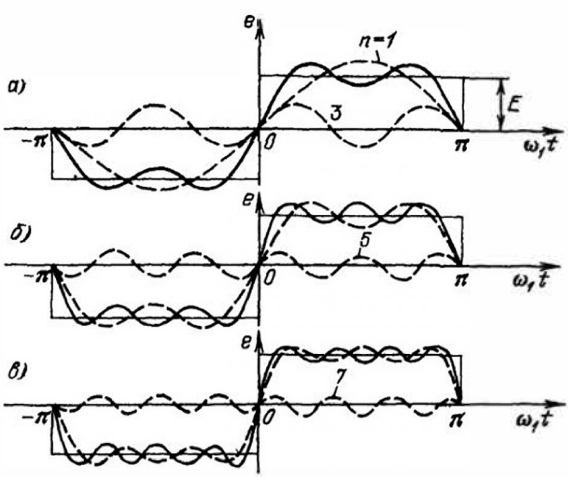


Рис. 2.5. Суммирование 1-й и 3-й гармоник (*а*), 1, 3 и 5-й гармоник (*б*), 1, 3, 5 и 7-й гармоник (*в*) колебания, показанного на рис. 2.3

Графики 1-й ($n = 1$) и 3-й ($n = 3$) гармоник и их суммы изображены на рис. 2.5, *а*. На рис. 2.5, *б* эта сумма дополнена 5-й гармоникой, а на рис. 2.5, *в* — 7-й.

С увеличением числа суммируемых гармоник сумма ряда приближается к функции $e(t)$ всюду, кроме точек разрыва функции, где образуется выброс. При $n \to \infty$ величина этого выброса равна $1{,}18E$, т. е. сумма ряда отличается от заданной функции на 18 %. Этот дефект сходимости в математике получил название я в л е н и я Г и б б с а. Несмотря на то, что в

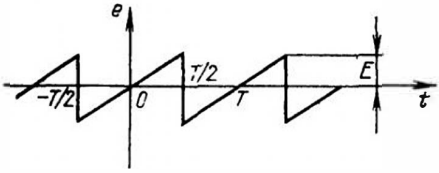


Рис. 2.6 Периодическое колебание пилообразной формы

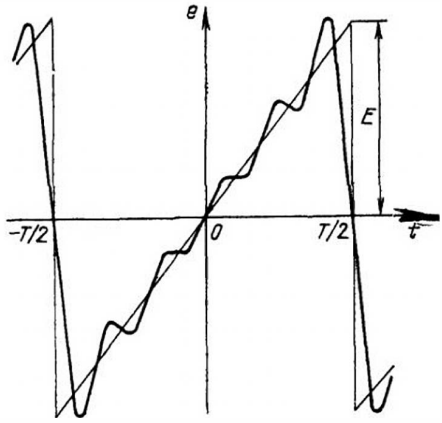


Рис. 2.7. Сумма первых пяти гармоник колебания, показанного на рис. 2.6

рассматриваемом случае ряд Фурье не сходится к разлагаемой функции $e(t)$ в точках ее разрыва, ряд сходится в среднем, поскольку при $n \to \infty$ выбросы являются бесконечно узкими и не вносят никакого вклада в интеграл (2.13).

2. ПИЛООБРАЗНОЕ КОЛЕБАНИЕ (РИС. 2.6)

С подобными функциями часто приходится иметь дело в устройствах для развертки изображения в осциллографах. Так как эта функция является нечетной, ряд Фурье для нее содержит только синусоидальные члены. С помощью формул (2.24)—(2.31) нетрудно определить коэффициенты ряда Фурье. Опуская эти выкладки, напишем окончательное выражение для ряда

$$e(t) = \frac{2E}{\pi}\left(\sin\omega_1 t - \frac{1}{2}\sin 2\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\sin 4\omega_1 t + \ldots\right). \qquad (2.35)$$

Как видим, амплитуды гармоник убывают по закону $1/n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ На рис. 2.7 показан график суммы первых пяти гармоник (в увеличенном масштабе).

3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ УНИПОЛЯРНЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ (РИС. 2 8)

Ряд Фурье для этой функции имеет следующий вид:

$$e(t) = \frac{E}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos\omega_1 t + \frac{1}{3^2}\cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega_1 t + \ldots\right)\right]. \qquad (2.36)$$

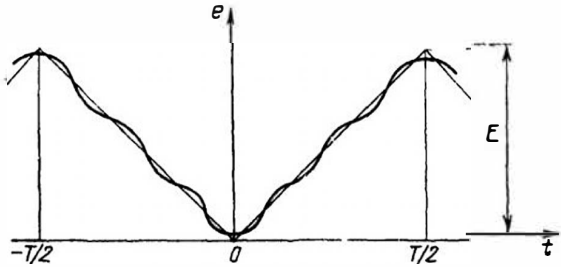


Рис. 2.8. Сумма трех первых гармоник периодической функции

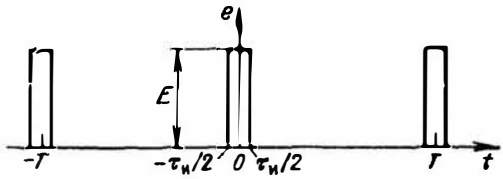


Рис. 2.9. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов с большой скважностью

На рис. 2.8 изображена сумма первых трех членов этого ряда. В данном случае отметим более быстрое убывание амплитуд гармоник, чем в предыдущих примерах. Это объясняется отсутствием разрывов (скачков) в функции.

4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ УНИПОЛЯРНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ (РИС 2.9)

Применяя формулу (2.32), находим среднее значение (постоянную составляющую)

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2} e(t)\,dt = \frac{\tau_и}{T}E \tag{2.37}$$

и коэффициент n-й гармоники

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2} e(t)\cos n\omega_1 t\,dt = \frac{2E}{\pi n}\sin\frac{n\omega_1\tau_и}{2}. \tag{2.38}$$

Так как функция $e(t)$ четная, $b_n = 0$ и $A_n = a_n$. Таким образом,

$$e(t) = E\left(\frac{\tau_и}{T} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\omega_1\tau_и}{2}\cos n\omega_1 t\right). \tag{2.39}$$

Величина $N = T/\tau_и$ называется скважностью импульсной последовательности. При больших значениях N спектр сигнала содержит очень большое число медленно убывающих по амплитуде гармоник (рис. 2.10). Расстояние между спектральными линиями очень мало, а амплитуды соседних гармоник близки по величине. Это наглядно вытекает из формулы (2.38), которую в данном случае удобно представить в несколько измененном виде

$$|a_n| = A_n = \frac{2E}{\pi n}\left|\sin\left(n\pi\frac{\tau_и}{T}\right)\right|.$$

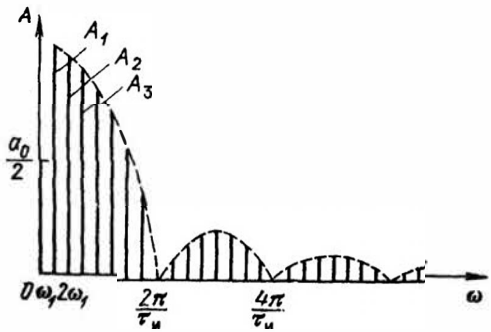


Рис. 2.10. Спектр импульсной последовательности, показанной на рис. 2.9

При малых значениях n можно считать

$$A_n \approx \frac{2E}{\pi n}\frac{n\pi\tau_и}{T} = E\frac{2\tau_и}{T}. \qquad (2.40)$$

Постоянная составляющая, равная $a_0/2 = E\tau_и/T$, вдвое меньше амплитуды 1-й гармоники. При построении спектра коэффициентов $|c_n|$ величина c_0 приближенно равнялась бы $|c_1|$.

2.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЩНОСТИ В СПЕКТРЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА

Пусть сигнал $s(t)$ (ток, напряжение) представляет собой сложную периодическую функцию времени с периодом T.

Энергия такого сигнала, длящегося от $t = -\infty$ до $t = \infty$, бесконечно велика. Основной интерес представляют средняя мощность периодического сигнала и распределение этой мощности между отдельными гармониками. Очевидно, что средняя мощность сигнала, рассматриваемого на всей оси времени, совпадает с мощностью, средней за один период T. Поэтому можно воспользоваться формулой (2.17), в которой под коэффициентами c_n следует подразумевать коэффициенты ряда (2.20), под интервалом ортогональности $t_2 - t_1$ — величину периода T, а под нормой $\|\varphi_n\|$ — величину $\sqrt{T}$ [см. (2.21)].

Таким образом, средняя мощность периодического сигнала

$$\overline{s^2(t)} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 T = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2. \qquad (2.41)$$

Используя тригонометрическую форму ряда Фурье и учитывая, что $c_0 = a_0/2$ и $|c_n| = A_n/2$, получаем

$$\overline{s^2(t)} = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2. \qquad (2.42)$$

Если $s(t)$ представляет собой ток $i(t)$, то при прохождении его через сопротивление r выделяется мощность (средняя)

$$P = \overline{ri^2(t)} = r(I_0^2 + I_1^2/2 + I_2^2/2 + \ldots),$$

где $I_0 = a_0/2$ — постоянная составляющая, а $I_n = A_n$ — амплитуда n-й гармоники тока $i(t)$.

Итак, полная средняя мощность равна сумме средних мощностей, выделяемых отдельно постоянной составляющей I_0 и гармониками с амплитудами I_1, I_2, ... Это означает, что *средняя мощность не зависит от фаз отдельных гармоник*. Это вытекает из ортогональности спектральных составляющих, в данном случае на интервале T.

2.6. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Изложенный в § 2.3 гармонический анализ периодических сигналов можно распространить на непериодические сигналы. Пусть такой сигнал $s(t)$ задан в виде некоторой функции, отличной от нуля в промежутке (t_1, t_2) (рис. 2.11).

Выделив произвольный отрезок времени T, включающий в себя промежуток (t_1, t_2), мы можем представить заданный сигнал в виде ряда Фурье:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_1 t}, \quad 0 < t < T, \tag{2.43}$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$, а коэффициенты c_n в соответствии с формулой (2.22)

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-in\omega_1 t} dt. \tag{2.44}$$

Подставив (2.44) в (2.43), получим

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{t_1}^{t_2} s(x) e^{-in\omega_1 x} dx \right) e^{in\omega_1 t} \frac{\omega_1}{2\pi}, \quad 0 < t < T. \tag{2.45}$$

Здесь учтено, что $T = 2\pi/\omega_1$.

Вне отрезка $(0, T)$ ряд (2.43) определяет функцию $s(t) = s(t \pm kT)$, где k — целое число, т. е. периодическую функцию, полученную повторением $s(t)$ вправо и влево с периодом T. Для того чтобы вне отрезка $(0, T)$ функция равнялась нулю, величина T должна быть бесконечно большой. Но чем больше отрезок T, выбранный в качестве периода, тем меньше коэффициенты c_n. Устремляя T к бесконечности, в пределе получаем бесконечно малые амплитуды гармонических составляющих, сумма которых изображает исходную непериодическую функцию $s(t)$, заданную в интервале $t_1 < t < t_2$ (см. рис. 2.11). Число гармонических составляющих, входящих в ряд Фурье, будет при этом бесконечно большим, так как при $T \to \infty$ основная частота функции $\omega_1 = 2\pi/T \to 0$. Иными словами, расстояние между спектральными линиями (см. рис. 2.2), равное основной частоте ω_1, становится бесконечно малым, а спектр — сплошным.

Поэтому в выражении (2.45) можно заменить ω_1 на $d\omega$, $n\omega_1$ на текущую частоту ω, а операцию суммирования операцией интегрирования.

Таким образом, приходим к двойному интегралу Фурье

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\int_{t_1}^{t_2} s(x) e^{-i\omega x} dx \right] d\omega. \tag{2.46}$$

Внутренний интеграл, являющийся функцией ω,

$$S(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-i\omega t} dt, \tag{2.47}$$

называется спектральной плотностью или спектральной характеристикой функции $s(t)$.

В общем случае, когда пределы t_1 и t_2 не уточнены, спектральная плотность записывается в форме

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt. \tag{2.48}$$

После подстановки (2.48) в выражение (2.46) получаем

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{2.49}$$

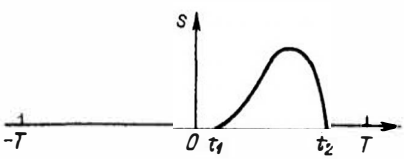


Рис. 2.11. Одиночный импульс

Выражения (2.48) и (2.49) называются соответственно прямым и обратным преобразованиями Фурье.

Выражение (2.48) отличается от (2.22) только отсутствием множителя $1/T$. Следовательно, спектральная плотность $\mathbf{S}(\omega)$ обладает всеми основными свойствами коэффициентов c_n комплексного ряда Фурье. По аналогии с (2.23) и (2.25) можно написать

$$\mathbf{S}(\omega) = A(\omega) - iB(\omega) = S(\omega)\, e^{i\theta(\omega)}, \tag{2.50}$$

где

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos\omega t dt, \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sin\omega t dt. \tag{2.51}$$

Модуль и аргумент спектральной плотности определяются выражениями

$$S(\omega) = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2}, \tag{2.52}$$

$$\theta(\omega) = -\operatorname{arctg}[B(\omega)/A(\omega)]. \tag{2.53}$$

Первое из этих выражений можно рассматривать как амплитудно-частотную (АЧХ), а второе — как фазо-частотную характеристики (ФЧХ) сплошного спектра непериодического сигнала $s(t)$.

Как и в случае ряда Фурье, $S(\omega)$ является четной, а $\theta(\omega)$ — нечетной функцией частоты ω.

На основании формулы (2.50) нетрудно привести интегральное преобразование (2.49) к тригонометрической форме. Имеем [аргумент функции $\theta(\omega)$ в последующих выражениях опущен]:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{i(\omega t+\theta)}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\cos(\omega t+\theta)\, d\omega +$$

$$+ i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\sin(\omega t+\theta)\, d\omega.$$

Из четности модуля и нечетности фазы следует, что подынтегральная функция в первом интеграле является четной, а во втором — нечетной относительно ω. Следовательно, второй интеграл равен нулю и окончательно

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\cos(\omega t+\theta)\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} S(\omega)\cos(\omega t+\theta)\, d\ . \tag{2.54}$$

Переход от комплексной формы (2.49) к тригонометрической (2.54) обычно целесообразен в конце анализа; все промежуточные выкладки при применении интеграла Фурье удобнее и проще производить на основании комплексной формы (2.49).

Отметим, что при $\omega = 0$ выражение (2.47) переходит в следующее:

$$\mathbf{S}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, dt = \text{площадь под кривой } s(t). \tag{2.55}$$

Следовательно, для любого сигнала $s(t)$ спектральная плотность $\mathbf{S}(\omega)$ на нулевой частоте равна «площади сигнала». Это правило полезно для быстрого выявления структуры спектра некоторых сигналов. Примеры применения этого правила приводятся в § 2.10.

2.7. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СПЕКТРАМИ ОДИНОЧНОГО ИМПУЛЬСА И ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСОВ

Пусть заданы импульс $s_1(t)$ и соответствующая ему спектральная плотность $\mathbf{S}_1(\omega) = \mathbf{S}_1(2\pi f)$ (рис. 2.12, *а*). На этом рисунке изображен модуль сплошного спектра $\mathbf{S}_1(2\pi f)$ в виде функции, четной относительно f.

При повторении импульсов с периодом T получается последовательность, представленная на рис. 2.12, *б* (слева). Линейчатый (дискретный) спектр этой последовательности изображен в правой части рисунка. При периоде T интервал между любыми двумя соседними гармониками равен $1/T$.

Коэффициент n-й гармоники в соответствии с выражением (2.22)

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} s_1(t)\,\mathrm{e}^{-in\omega_1 t}\,dt,$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$; t_1 и t_2 соответствуют рис 2.11.

Спектральная же плотность одиночного импульса на той же частоте $\omega = n\omega_1$ будет [см. (2.47)]

$$\mathbf{S}(\omega = n\omega_1) = \int_{t_1}^{t_2} s_1(t)\,\mathrm{e}^{-in\omega_1 t}\,dt.$$

Как ранее уже отмечалось, спектральная плотность $\mathbf{S}_1(\omega = n\omega_1)$ отличается от коэффициента c_n ряда Фурье периодической последовательности только отсутствием множителя $1/T$.

Следовательно, имеет место простое соотношение

$$c_n = \mathbf{S}_1(n\omega_1)/T = f_1\,\mathbf{S}_1(n\omega_1). \qquad (2.56)$$

Соответственно комплексная амплитуда n-й гармоники

$$\mathbf{A}_n = 2c_n = 2f_1\,\mathbf{S}_1(n\omega_1). \qquad (2.56')$$

Итак, *модуль спектральной плотности одиночного импульса и огибающая линейчатого спектра периодической последовательности, полученной путем повторения заданного импульса, совпадают по форме и отличаются только масштабом.*

На рис. 2.12, *б* штриховой линией обозначена огибающая линейчатого спектра $|c_n| = f_1 S_1(n\omega_1)$.

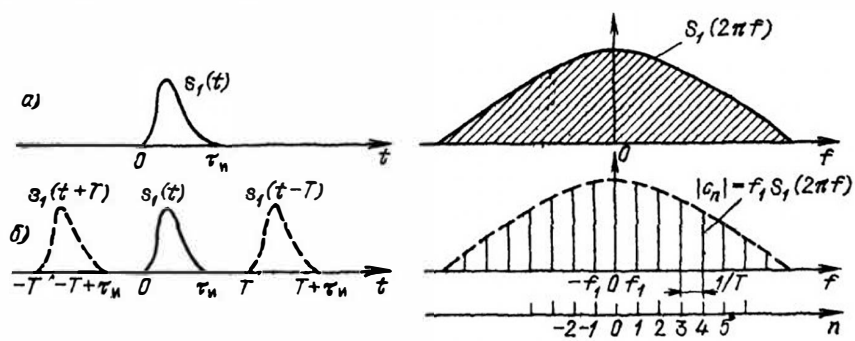


Рис. 2.12. Одиночный импульс и его спектральная плотность (*а*), периодическая последовательность импульсов и ее линейчатый спектр (*б*)

С увеличением T спектральные линии на рис. 2.12, *б* сближаются и коэффициенты c_n уменьшаются, но так, что отношение $|c_n|/f_1$ остается неизменным. В пределе, при $T \to \infty$, приходим к одиночному импульсу со спектральной плотностью

$$\mathbf{S}_1(\omega) = \lim_{f_1 \to 0} (c_n/f_1).$$

Таким образом, становится наглядным термин «спектральная плотность»: $S(\omega)$ *есть амплитуда напряжения (тока), приходящаяся на 1 Гц в бесконечно узкой полосе частот, которая включает в себя рассматриваемую частоту* ω.

2.8. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Между сигналом $s(t)$ и его спектром $\mathbf{S}(\omega)$ существует однозначное соответствие. Для практических приложений важно установить связь между преобразованием сигнала и соответствующим этому преобразованию изменением спектра. Из многочисленных возможных преобразований сигнала рассмотрим следующие наиболее важные и часто встречающиеся: сдвиг сигнала во времени, изменение масштаба времени, сдвиг спектра сигнала по частоте, дифференцирование и интегрирование сигнала. Кроме того, будут рассмотрены сложение сигналов, произведение и свертка двух сигналов, а также свойства взаимной обратимости ω и t в преобразованиях Фурье.

1. СДВИГ СИГНАЛОВ ВО ВРЕМЕНИ

Пусть сигнал $s_1(t)$ произвольной формы существует на интервале времени от t_1 до t_2 и обладает спектральной плотностью $\mathbf{S}_1(\omega)$. При задержке этого сигнала на время t_0 (при сохранении его формы) получим новую функцию времени

$$s_2(t) = s_1(t - t_0),$$

существующую на интервале от $t_1 + t_0$ до $t_2 + t_0$.

Спектральная плотность сигнала $s_2(t)$ в соответствии с (2.48)

$$\mathbf{S}(\omega) = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} s_2(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} s_1(t-t_0)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Вводя новую переменную интегрирования $\tau = t - t_0$, получаем

$$\mathbf{S}(\omega) = e^{-i\omega t_0} \int_{t_1}^{t_2} s_1(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = e^{-i\omega t_0}\, \mathbf{S}_1(\omega). \qquad (2.57)$$

Из этого соотношения видно, что сдвиг во времени функции $s(t)$ на $\pm t_0$ приводит к изменению фазовой характеристики спектра $\mathbf{S}(\omega)$ на величину $\pm\omega t_0$. Очевидно и обратное положение: если всем составляющим спектра функции $s(t)$ дать фазовый сдвиг $\theta(\omega) = \pm\,\omega t_0$, линейно-связанный с частотой ω, то функция сдвигается во времени на $\pm t_0$.

Амплитудно-частотная характеристика спектра (т. е. модуль спектральной плотности) от положения сигнала на оси времени не зависит.

2. ИЗМЕНЕНИЕ МАСШТАБА ВРЕМЕНИ

Пусть сигнал $s_1(t)$, изображенный на рис. 2.13 сплошной линией, подвергся сжатию во времени. Новый сжатый сигнал $s_2(t)$ (штриховая кривая

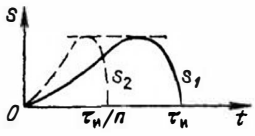


Рис. 2.13. Сжатие сигнала при сохранении его формы и амплитуды

на рис. 2.13) связан с исходным соотношением $s_2(t) = s_1(nt)$, $n > 1$.

Длительность импульса $s_2(t)$ в n раз меньше, чем исходного, и равна $\tau_и/n$. Спектральная плотность сжатого импульса

$$S_2(\omega) = \int_0^{\tau_и/n} s_2(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^{\tau_и/n} s_1(nt)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Вводя новую переменную интегрирования $\tau = nt$, получаем

$$S_2(\omega) = \frac{1}{n}\int_0^{\tau_и} s_1(\tau)\, e^{-i\frac{\omega}{n}\tau}\, d\tau.$$

Но интеграл в правой части этого выражения есть не что иное, как спектральная плотность исходного сигнала $s_1(t)$ при частоте ω/n, т. е. $S_1(\omega/n)$.

Таким образом,

$$S_2(\omega) = (1/n)\, S_1(\omega/n).$$

Итак, при сжатии сигнала в n раз на временной оси во столько же раз расширяется его спектр на оси частот. Модуль спектральной плотности при этом уменьшается в n раз. Очевидно, что при растягивании сигнала во времени (т. е. при $n < 1$) имеют место сужение спектра и увеличение модуля спектральной плотности.

3. СМЕЩЕНИЕ СПЕКТРА СИГНАЛА

Применим (2.48) к произведению $s(t)\cos(\omega_0 t + \theta_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos(\omega_0 t + \theta_0)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\left[\frac{1}{2}e^{i(\omega_0 t+\theta_0)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}e^{-i(\omega_0 t+\theta_0)}\right] e^{-i\omega t}\, dt = \frac{e^{i\theta_0}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-i(\omega-\omega_0)t}\, dt +$$

$$+ \frac{e^{-i\theta_0}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-i(\omega+\omega_0)t}\, dt.$$

Первый интеграл в правой части есть не что иное, как спектральная плотность функции $s(t)$ при частоте $\omega - \omega_0$, а второй интеграл — при частоте $\omega + \omega_0$. Поэтому полученное выше соотношение можно записать в форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos(\omega_0 t + \theta_0)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{2}[e^{i\theta_0} S(\omega - \omega_0) + e^{-i\theta_0} S(\omega + \omega_0)], \quad (2.58)$$

где $S(\omega)$ — спектральная плотность сигнала $s(t)$.

Из выражения (2.58) вытекает, что расщепление спектра $S(\omega)$ на две части, смещенные соответственно на $+\omega_0$ и $-\omega_0$, эквивалентно умножению функции $s(t)$ на гармоническое колебание $\cos\omega_0 t$ (при $\theta_0 = 0$).

Более подробно это положение рассматривается в гл. 3 при изучении модулированных колебаний.

4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИГНАЛА

Дифференцирование сигнала $s_1(t)$ можно трактовать как почленное дифференцирование всех гармонических составляющих, входящих в его спектр. Но производная функции $e^{i\omega t}$ равна $i\omega e^{i\omega t}$, из чего непосредственно вытекают следующие соответствия:

$$s_1(t) \div S_1(\omega), \quad s_2(t) = \frac{ds_1(t)}{dt} \div i\omega S_1(\omega) = S_2(\omega). \tag{2.59}$$

К этому результату можно прийти также из общего преобразования Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds_1(t)}{dt} e^{-i\omega t}\, dt = s_1(t)\, e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega S_1(\omega) = i\omega S_1(\omega).$$

Первое слагаемое в правой части обращается в нуль, поскольку при $t \to \pm\infty$ $s_1(t) \to 0$ (условие интегрируемости сигнала).

Аналогичным образом можно показать, что сигналу

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{t} s_1(x)\, dx$$

соответствует спектральная плотность

$$S_2(\omega) = (1/i\omega)\, S_1(\omega). \tag{2.60}$$

Следует, однако, подчеркнуть, что в отличие от операции $i\omega S_1(\omega)$ операция $(1/i\omega)\, S_1(\omega)$ законна только для сигналов, отвечающих условию[1] $S(0) = 0$, т. е. для сигналов с нулевой площадью

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, dt = 0 \text{ (см. приложение 2).}$$

5. СЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ

Так как преобразование Фурье, определяющее спектральную плотность заданной функции времени, является линейным, очевидно, что при сложении сигналов $s_1(t)$, $s_2(t)$, ..., обладающих спектрами $S_1(\omega)$, $S_2(\omega)$, ..., суммарному сигналу $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + \ldots$ соответствует спектр $S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) + \ldots$

6. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ СИГНАЛОВ

Пусть рассматриваемый сигнал $s(t)$ является произведением двух функций времени $f(t)$ и $g(t)$.

Используя общую формулу (2.48), определяем спектр сигнала $s(t)$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt. \tag{2.61}$$

Каждую функцию $f(t)$ и $g(t)$ можно представить в виде интеграла Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \quad g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega.$$

[1] См.: Математические основы современной радиоэлектроники / И. А. Большаков, Л. С. Гуткин, Б. Р. Левин, Р. Л. Стратонович. — М.: Сов. радио, 1968.

Подставляя в (2.61) второй из этих интегралов, получаем

$$\mathbf{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(x)\, e^{ixt}\, dx \right] e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i(\omega - x)t}\, dt \right] dx.$$

Заключенный в квадратные скобки интеграл по переменной t представляет собой спектральную плотность функции $f(t)$ при частоте $\omega - x$, т. е. $\mathbf{F}(\omega - x)$. Следовательно,

$$\mathbf{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(x)\, \mathbf{F}(\omega - x)\, dx. \qquad (2.62)$$

Итак, спектр произведения двух функций времени $f(t)$ и $g(t)$ равен, (с коэффициентом $1/2\pi$) свертке их спектров $\mathbf{F}(\omega)$ и $\mathbf{G}(\omega)$.

Из выражений (2.61) и (2.62) в частном случае $\omega = 0$ вытекает следующее равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(x)\, \mathbf{F}(-x)\, dx.$$

Заменяя в последнем выражении x на ω, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\omega)\, \mathbf{F}(-\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\omega)\, \mathbf{F}^*(\omega)\, d\omega, \qquad (2.63)$$

где $\mathbf{F}^*(\omega) = \mathbf{F}(-\omega)$ — спектральная функция, комплексно-сопряженная функция $\mathbf{F}(\omega)$.

Аналогично можно показать, что произведению двух спектров $\mathbf{F}(\omega) \times \mathbf{G}(\omega) = \mathbf{S}(\omega)$ соответствует функция времени $s(t)$, являющаяся сверткой функций $f(t)$ и $g(t)$:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(t - y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - y)\, g(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega)\, \mathbf{G}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \qquad (2.64)$$

Последнее выражение особенно широко используется при анализе передачи сигналов через линейные цепи. В этом случае функции времени $f(t)$ и $g(t)$ имеют смысл соответственно входного сигнала и импульсной характеристики цепи (см. § 6.3), а $\mathbf{F}(\omega)$ и $\mathbf{G}(\omega)$ — спектральной плотности сигнала и передаточной функции цепи.

7. ВЗАИМНАЯ ЗАМЕНЯЕМОСТЬ ω И t В ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ФУРЬЕ

Обратимся к общему выражению (2.48) и выясним свойства функции $S(\omega)$ для различных функций $s(t)$.

1. Если $s(t)$ есть функция, четная относительно t, то, переписывая выражение (2.48) в виде

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos\omega t\,dt - i\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sin\omega t\,dt,$$

убеждаемся, что при четности $s(t)$ второй интеграл равен нулю, так как произведение $s(t)\sin\omega t$ является функцией, нечетной относительно t, а пределы интегрирования симметричны.

Таким образом, при $s(t)$, четной относительно t, функция $S(\omega)$, определяемая первым интегралом, есть функция вещественная и четная относительно ω.

2. Если $s(t)$ нечетна относительно t, то в нуль обращается первый интеграл и

$$S(\omega) = -i\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sin\omega t\,dt.$$

В этом случае $S(\omega)$ — нечетная и чисто мнимая функция.

3. Если, наконец, $s(t)$ не является четной или нечетной функцией относительно t, то ее можно разложить на две функции: четную $s_1(t)$ и нечетную $s_2(t)$. При этом $S(\omega)$ представляет комплексную функцию, причем действительная ее часть четна, а мнимая нечетна относительно ω.

Из п. 1 вытекает, что при четной функции $s(t)$ можно произвольно выбирать знак перед t в обратном преобразовании Фурье [см. (2.49)]: выберем знак минус и запишем формулу (2.49) в виде

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega.$$

В последнем интеграле заменим переменную интегрирования ω на t и параметр t на ω. Тогда левая часть должна быть записана в виде функции от аргумента ω

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(t)\,e^{-i\omega t}dt.$$

Но интеграл в последнем выражении можно рассматривать как спектральную плотность новой функции $S(t)$, полученной заменой ω на t в выражении спектральной плотности сигнала $s(t)$.

Обозначим эту спектральную плотность через $S'(\omega)$. Тогда

$$S'(\omega) = 2\pi s(\omega). \qquad (2.65)$$

Этот результат показывает, что переменные ω и t в преобразованиях Фурье *взаимно заменимы*; если колебанию (четному) $s(t)$ соответствует спектр $S(\omega)$, то колебанию $S(t)$ соответствует спектр $2\pi s(\omega)$.

2.9. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ В СПЕКТРЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА

Для получения выражения, аналогичного (2.42), можно идти двумя путями: исходя из (2.42) совершить предельный переход $T \to \infty$ или воспользоваться результатами предыдущего параграфа.

Рассмотрим второй путь. Для этого воспользуемся выражением (2.63). Если $f(t)$ и $g(t)$ представляют собой одно и то же колебание

$$f(t) = g(t) = s(t),$$

то интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt = \mathcal{Э}$$

представляет собой полную энергию сигнала $s(t)$. Кроме того, произведение спектральных плотностей $\mathbf{G}(\omega)$ и $\mathbf{F}^*(\omega)$ приводится к виду

$$\mathbf{G}(\omega)\, \mathbf{F}^*(\omega) = \mathbf{S}(\omega)\, \mathbf{S}^*(\omega) = |\mathbf{S}(\omega)|^2 = S^2(\omega),$$

где $\mathbf{S}(\omega)$ — спектр сигнала $s(t)$, а $S(\omega)$ — модуль этого спектра.

Таким образом, в соответствии с (2.63) приходим к окончательному результату

$$\mathcal{Э} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{S}(\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} S^2(\omega)\, d\omega. \qquad (2.66)$$

Это важное соотношение, устанавливающее связь между энергией сигнала и модулем его спектральной плотности, известно под названием равенства Парсеваля.

Между выражениями (2.42) и (2.66) имеется существенное различие. В § 2.5 речь шла о средней мощности периодического колебания. Операция усреднения осуществлялась делением энергии отрезка колебания за один период на величину T. Для непериодического колебания конечной длительности усреднение энергии за бесконечно большой период дает нуль и, следовательно, средняя мощность такого колебания равна нулю.

Важно отметить, что энергия непериодического сигнала не зависит от фазировки спектральных составляющих. Это является, как и для периодического сигнала, результатом ортогональности спектральных составляющих. Различие заключается лишь в интервалах ортогональности: период T для периодического сигнала и бесконечно большой интервал для непериодического сигнала.

Из выражения (2.66) видно, что величину $|\mathbf{S}(\omega)|^2$, имеющую смысл энергии, приходящейся на 1 Гц, можно рассматривать как *спектральную плотность энергии* сигнала.

2.10. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕКТРОВ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Основной задачей настоящего параграфа является пояснение свойств преобразований Фурье, приведенных в предыдущих параграфах, на примерах, важных для практики.

1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ИМПУЛЬС

Простейшее колебание, определяемое выражением

$$s_1(t) = \begin{cases} A & \text{при } -\tau_и/2 \leqslant t \leqslant \tau_и/2, \\ 0 & \text{при } t < -\tau_и/2 \text{ и } t > \tau_и/2 \end{cases} \tag{2.67}$$

и представленное на рис. 2.14, *а*, получило широкое распространение как в технике, так и в теории сигналов и цепей. Применяя формулу (2.48), находим спектральную плотность (рис. 2.14, *б*)

$$S_1(\omega) = A \int_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{A}{-i\omega}\left(e^{-\frac{i\omega\tau_и}{2}} - e^{\frac{i\omega\tau_и}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2A}{\omega}\sin\frac{\omega\tau_и}{2} = A\tau_и\left[\frac{\sin(\omega\tau_и/2)}{\omega\tau_и/2}\right]. \tag{2.68}$$

Заметим, что произведение $A\tau_и$, равное площади импульса, определяет значение спектральной плотности импульса при $\omega = 0$, т. е. $S_1(0) = A\tau_и$ [см. (2.55)].

Таким образом, выражение (2.68) можно записать в форме

$$S_1(\omega) = S_1(0)\frac{\sin(\omega\tau_и/2)}{\omega\tau_и/2} = S_1(0)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau_и}{2}\right). \tag{2.69}$$

Здесь через $\mathrm{sinc}(\omega\tau_и/2)$ обозначена функция

$$\mathrm{sinc}(x) = (\sin x)/x. \tag{2.70}$$

При удлинении (растягивании) импульса расстояние между нулями функции $S_1(\omega)$ сокращается, что равносильно сужению спектра. Значение $S_1(0)$ при этом возрастает. При укорочении (сжатии) импульса, наоборот, расстояние между нулями функции $S_1(\omega)$ увеличивается (расширение спектра), а значение $S_1(0)$ уменьшается. В пределе при $\tau_и \to 0$ ($A = \mathrm{const}$) точки $\omega_1 = \pm 2\pi/\tau_и$, соответствующие двум первым нулям функции $S_1(\omega)$, удаляются в бесконечность и спектральная плотность, бесконечно малая по величине, становится равномерной в полосе частот от $-\infty$ до ∞.

На рис. 2.15 показаны отдельно графики модуля $S_1(\omega)$, отнесенного к величине $S_1(0)$, и аргумента $\theta(\omega)$ спектральной плотности. Первый из этих графиков можно рассматривать как АЧХ, а второй — как ФЧХ спектра прямоугольного импульса. Каждая перемена знака $S_1(\omega)$ учитывается на рис. 2.15, *б* приращением фазы на π.

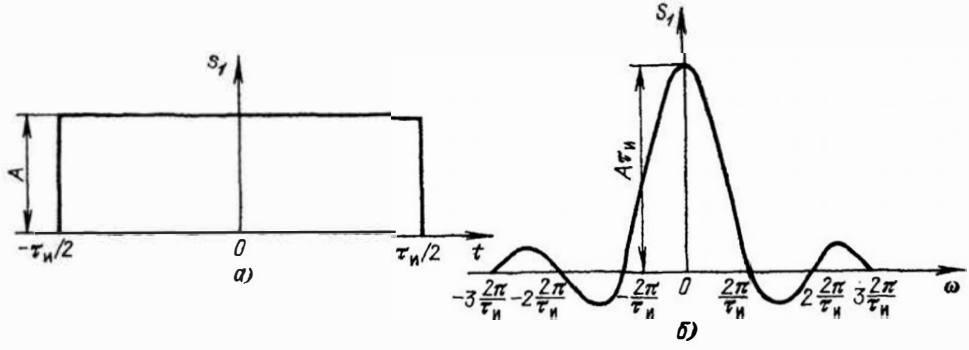


Рис. 2.14. Прямоугольный импульс (*а*) и его спектральная плотность (*б*)

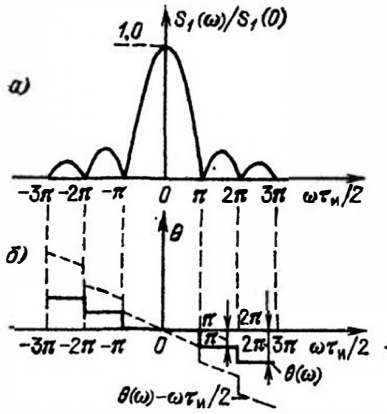


Рис. 2.15. Модуль (*а*) и аргумент (*б*) спектральной плотности прямоугольного импульса

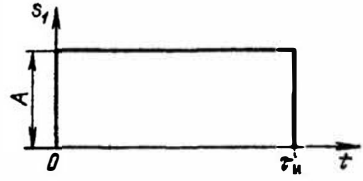


Рис. 2.16. Совмещение начала отсчета времени с фронтом прямоугольного импульса

При отсчете времени не от середины импульса (как на рис. 2. 13), а от фронта (рис. 2.16) ФЧХ спектра импульса должна быть дополнена слагаемым $\omega\tau_и/2$, учитывающим сдвиг импульса на время $\tau_и/2$ (в сторону запаздывания). Результирующая ФЧХ принимает при этом вид, показанный на рис. 2.15, *б* штриховой линией.

2. ТРЕУГОЛЬНЫЙ ИМПУЛЬС

Представленный на рис. 2.17, *а* импульс определяется выражением

$$s_2(t) = \begin{cases} A\left(\dfrac{t}{\tau_и/2} + 1\right), & -\dfrac{\tau_и}{2} \leqslant t \leqslant 0, \\ A\left(1 - \dfrac{t}{\tau_и/2}\right), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\tau_и}{2}. \end{cases} \tag{2.71}$$

Прямое вычисление спектральной плотности треугольного импульса по формуле (2.48) хотя и несложно, все же несколько громоздко.

Для иллюстрации применения теорем о спектрах, приведенных в предыдущем параграфе, найдем сначала спектральную плотность функции, являющейся производной от заданного сигнала $s_2(t)$. График производной показан на рис. 2.17, *б*. Спектральная плотность положительного прямоугольного импульса длительностью $\tau_и/2$ и амплитудой $\dfrac{A}{\tau_и/2}$ по аналогии с формулой (2.68) и с учетом сдвига середины импульса на время $\tau_и/4$ относительно точки $t = 0$

$$\frac{A}{\tau_и/2}\,\frac{\tau_и}{2}\,\frac{\sin(\omega\tau_и/4)}{\omega\tau_и/4}\,e^{+i\omega\tau_и/4} = A\,\frac{\sin(\omega\tau_и/4)}{\omega\tau_и/4}\,e^{i\omega\tau_и/4}.$$

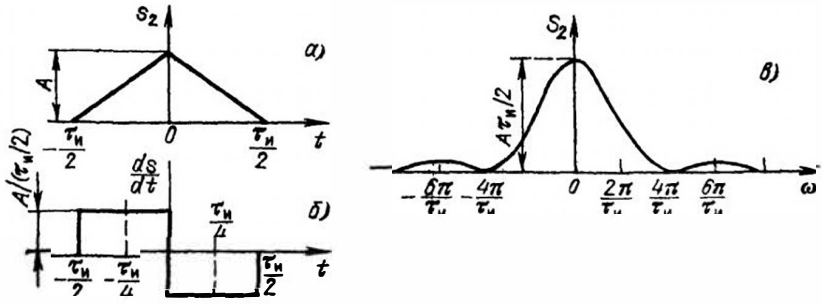


Рис. 2.17. К определению спектральной плотности треугольного импульса

Спектральная плотность отрицательного импульса, показанного на рис. 2.17, *б*, соответственно

$$-A\frac{\sin(\omega\tau_и/4)}{\omega\tau_и/4}e^{-i\omega\tau_и/4}.$$

Суммарная спектральная плотность двух импульсов

$$A\frac{\sin(\omega\tau_и/4)}{\omega\tau_и/4}(e^{i\omega\tau_и/4}-e^{-i\omega\tau_и/4})=i2A\frac{\sin^2(\omega\tau_и/4)}{\omega\tau_и/4}. \qquad (2.72)$$

Спектральная плотность треугольного импульса, являющегося интегралом от функции $s_2'(t)$, получается делением предыдущего выражения (2.72) на $i\omega$ [см. (2.60)]:

$$S_2(\omega)=\frac{2A}{\omega}\frac{\sin^2(\omega\tau_и/4)}{\omega\tau_и/4}=\frac{A\tau_и}{2}\left(\frac{\sin\omega\tau_и/4}{\omega\tau_и/4}\right)^2. \qquad (2.73)$$

Множитель $A\tau_и/2 = S_2(0)$ — площадь треугольного импульса.

График $S_2(\omega)$ представлен на рис. 2.17, *в*. Полезно отметить, что уровень боковых лепестков спектра треугольного импульса убывает пропорционально $1/\omega^2$, а не $1/\omega$, как в случае прямоугольного импульса. Бо́льшая скорость убывания спектра объясняется отсутствием разрывов в рассматриваемой функции. Аналогичная картина была отмечена в § 2.4 при рассмотрении линейчатого спектра периодической последовательности треугольных импульсов.

Обобщение этого важного вопроса, основанное на использовании аппарата дельта-функций, дается в § 2.13.

3. КОЛОКОЛООБРАЗНЫЙ (ГАУССОВСКИЙ) ИМПУЛЬС (РИС. 2.18, *а*)

Представленный на рис. 2.18, *а* импульс определяется выражением

$$s_3(t)=Ae^{-t^2/2a^2},\quad -\infty<t<\infty. \qquad (2.74)$$

Этот импульс, совпадающий по форме с графиком нормального (гауссовского) закона распределения вероятностей, называется также гауссовским импульсом. Постоянная a имеет смысл половины длительности импульса, определяемой на уровне $e^{-1/2} = 1/e^{1/2}$ от амплитуды импульса. Таким образом, полная длительность импульса $\tau_и$ равна $2a$.

Применяя выражение (2.48), получаем

$$S_3(\omega)=A\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2a^2}e^{-i\omega t}\,dt. \qquad (2.75)$$

Для вычисления интеграла удобно в подынтегральной функции дополнить показатель степени до квадрата суммы

$$-\left(\frac{t^2}{2a^2}+i\omega t\right)=-\left[\left(\frac{t^2}{2a^2}+i\omega t+d^2\right)-d^2\right]=$$

$$=-\left[\left(\frac{t}{\sqrt{2}a}+d\right)^2-d^2\right],$$

где величина d определяется из условия

$$i\omega t=2\left(t/\sqrt{2}a\right)d,$$

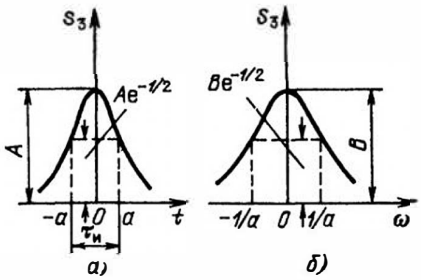


Рис. 2.18. Колоколообразный (гауссовский) импульс (*а*) и его спектральная плотность (*б*)

откуда

$$d = i\omega a/\sqrt{2}. \tag{2.76}$$

Таким образом, выражение (2.75) можно привести к виду

$$S_3(\omega) = Ae^{d^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t/\sqrt{2}a + d)^2}\, dt.$$

Переходя к новой переменной $x = (t/\sqrt{2}a) + d$, получаем

$$S_3(\omega) = Ae^{d^2}\sqrt{2}a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Учитывая, что входящий в это выражение интеграл равен $\sqrt{\pi}$, окончательно получаем

$$S_3(\omega) = A\sqrt{2\pi}\, a e^{-a^2\omega^2/2} = Be^{-\omega^2/2b^2}, \tag{2.77}$$

где $b = 1/a$; $B = \sqrt{2\pi}\, aA$.

График этой функции изображен на рис. 2.18, *б*.

Полученный результат имеет важное значение для теории сигналов. Оказывается, что гауссовский импульс и его спектр выражаются одинаковыми функциями и обладают свойством симметрии: для получения одной из них по заданной другой достаточно заменить t на ω или наоборот. При этом спектральная полоса, определяемая на уровне $e^{-1/2}$ от максимального значения, равна $2b = 2/a = 2 \cdot 2\tau_и = 4\tau_и$, а коэффициент $B = \sqrt{2\pi}aA$.

Гауссовскому спектру

$$S_3(\omega) = Be^{-\omega^2/2b^2} \tag{2.78}$$

соответствует гауссовский импульс

$$s_3(t) = Ae^{-b^2t^2/2} = \frac{Bb}{\sqrt{2\pi}} e^{-b^2t^2/2} \tag{2.79}$$

с длительностью $2/b$ и амплитудой $A = Bb/\sqrt{2\pi}$.

Очевидно, что чем меньше длительность импульса $\tau_и$, тем шире спектральная полоса $2b$.

4. ИМПУЛЬС ВИДА SINC (x)

На рис. 2.19, *а* изображен импульс, определяемый выражением

$$s_4(t) = \operatorname{sinc}(\omega_m t) = \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t} = \frac{\sin 2\pi f_m t}{2\pi f_m t}. \tag{2.80}$$

Вместо вычисления спектральной плотности по формуле (2.48) воспользуемся результатами п. 1 данного параграфа и свойством взаимной заменяемости ω и t в преобразованиях Фурье для четных функций времени (см. п. 7 § 2.8).

Из рис. 2.14 очевидно, что после замены ω на t и t на ω заданной функции $s_3(t)$ будет соответствовать спектр прямоугольной формы. Остается лишь найти площадь этого спектра и его уровень.

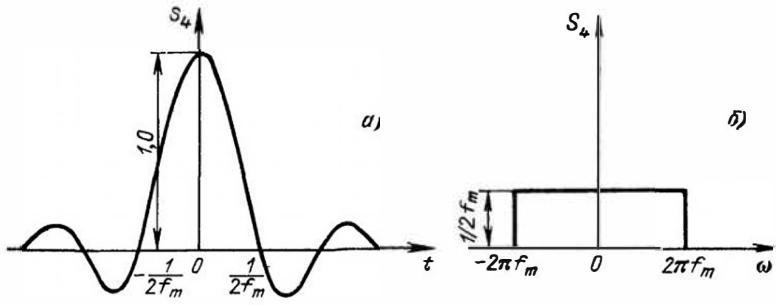


Рис 2.19. Импульс вида sinc $(\omega_m t)$ (*а*) и его спектральная плотность (*б*)

Для этого сопоставим абсциссу $t = \pi/\omega_m$ на рис. 2.19, *а* с аналогичной абсциссой $\omega = 2\pi/\tau_и$ на рис. 2.14, *б*. Очевидно, что при замене t на ω (или наоборот) в данном примере необходимо исходить из соответствия $\pi/\omega_m \rightarrow \rightarrow 2\pi/\tau_и$, т. е. $\tau_и \rightarrow 2\omega_m$, откуда следует, что $2\omega_m$ и есть искомая ширина спектра $S_4(\omega)$.

Уровень спектра, равномерный в полосе $-\omega_m \leqslant \omega \leqslant \omega_m$, проще всего определить по его значению в точке $\omega = 0$, для которой $S_4(0)$ равно площади импульса [см. (2.55)]:

$$S_4(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_3(t)\,dt = A\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t}\,dt = \frac{A}{\omega_m}\int_{-x}^{x} \frac{\sin x}{x}\,dx =$$

$$= \frac{A}{\omega_m}\,\pi = \frac{A}{2f_m}. \qquad (2.81)$$

Итак, окончательно

$$S_4(\omega) = \begin{cases} A\,2f_m & \text{при } |\omega| \leqslant \omega_m, \\ 0 & \text{при } |\omega| > \omega_m. \end{cases} \qquad (2.82)$$

5. ГРУППА ОДИНАКОВЫХ И РАВНООТСТОЯЩИХ ИМПУЛЬСОВ

Спектральную плотность первого импульса в пачке (рис. 2.20) обозначим через $S_1(\omega)$. Тогда для второго импульса, сдвинутого относительно первого на время T (в сторону запаздывания), спектральную плотность можно на основании (2.57) представить выражением $S_2(\omega) = S_1(\omega)\,e^{-i\omega T}$, для третьего импульса $S_3(\omega) = S_1(\omega)\,e^{-i2\omega T}$ и т. д.

Для группы из N импульсов в соответствии с принципом линейного суммирования спектров при сложении сигналов спектральная плотность

$$S(\omega) = S_1(\omega)\left[1 + e^{-i\omega T} + e^{-i2\omega T} + \ldots + e^{-i(N-1)\omega T}\right]. \qquad (2.83)$$

При частотах, отвечающих условию $\omega = k2\pi/T$, где k — целое число, каждое из слагаемых в квадратных скобках равно единице и, следовательно,

$$S[k2\pi/T] = NS_1[k2\pi/T]. \qquad (2.84)$$

Таким образом, при частотах $\omega = k2\pi/T$ модуль спектральной

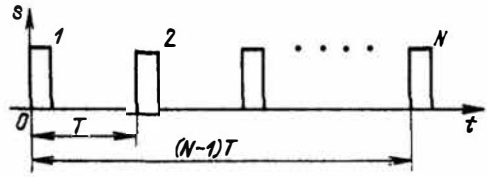


Рис. 2.20. Пачка одинаковых, равноотстоящих импульсов

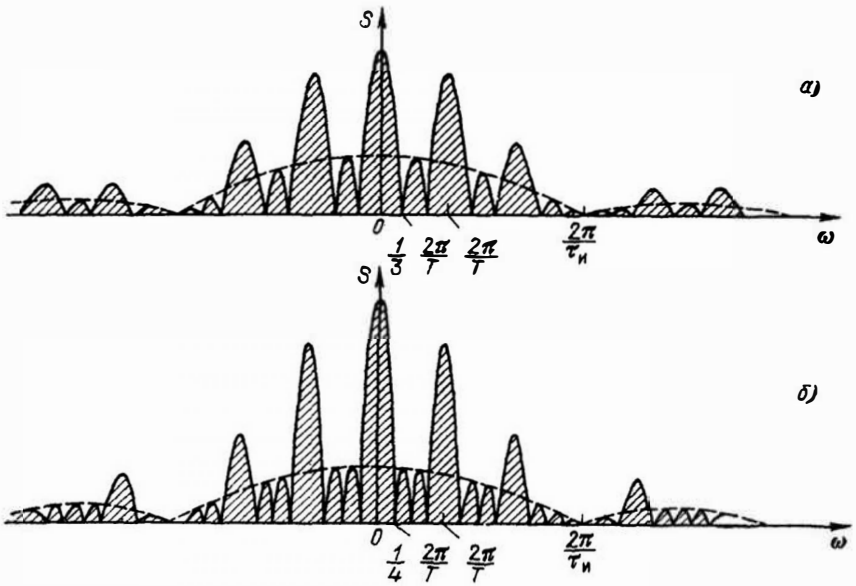


Рис. 2.21. Модуль спектральной плотности пачки из трех (*а*) и четырех (*б*) импульсов

плотности пачки в N раз больше модуля спектра одиночного импульса. Это объясняется тем, что спектральные составляющие различных импульсов с указанными выше частотами складываются с фазовыми сдвигами, кратными 2π.

При частотах же $\omega = (1/N)(2\pi/T)$, а также при некоторых других частотах, для которых сумма векторов e^{-ikT} обращается в нуль, суммарная спектральная плотность равна нулю. При промежуточных значениях частот модуль $S(\omega)$ определяется как геометрическая сумма спектральных плотностей отдельных импульсов.

В качестве иллюстрации на рис. 2.21, *а* изображен спектр (модуль) пачки из трех прямоугольных импульсов, а на рис. 2.21, *б* — из четырех при интервале между соседними импульсами $T = 3\tau_и$. Штриховыми линиями показана спектральная плотность одиночного импульса. С увеличением числа импульсов в пачке спектральная плотность все более расщепляется и в пределе при $N \to \infty$ принимает линейчатую структуру спектра периодической функции (см. рис. 2.12).

2.11. БЕСКОНЕЧНО КОРОТКИЙ ИМПУЛЬС С ЕДИНИЧНОЙ ПЛОЩАДЬЮ (ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ)

Некоторые из возможных импульсов, площадь которых равна единице, изображены на рис. 2.22. Амплитуды всех этих импульсов обратно пропорциональны соответствующим образом определенной длительности. При стремлении длительности к нулю амплитуда обращается в бесконечность, а площадь импульса остается неизменной и равной единице.

Амплитуду прямоугольного импульса следует приравнять величине $1/x_1$ (рис. 2.22, *а*), где x_1 — длительность импульса.

При гауссовском импульсе (рис. 2.22, *б*) амплитуда должна быть приравнена $1/\sqrt{2\pi}a$, поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2a^2}\,dx = \sqrt{2\pi}\,a.$$

Наконец, для импульса вида $\sin(2\pi f_m x)/\pi x$ (рис. 2.22, *в*), площадь которого равна единице, амплитуда равна $2f_m$ (при $x = 0$). Длительность импульса (главного лепестка) обратно пропорциональна параметру f_m.

При устремлении параметров x_1 и a к нулю, а f_m к бесконечности все три изображенные на рис. 2.22 функции можно определить следующим образом:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x \neq 0 \end{cases} \tag{2.85}$$

при одновременном условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = \text{площадь импульса} = 1. \tag{2.86}$$

Функция $\delta(x)$, обладающая указанными свойствами, называется единичным импульсом, импульсной функцией или дельта-функцией (а также функцией Дирака).

Применительно к исходным функциям, изображенным на рис. 2.22, *б* и *в*, дельта-функция должна быть определена выражениями

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a} e^{-x^2/2a^2}, \quad \delta(x) = \lim_{f_m\to\infty} [\sin(2\pi f_m x)/\pi x].$$

Возможны и другие многочисленные определения $\delta(x)$.

При сдвиге импульса по оси x на величину x_0 определения (2.85), (2.86) должны быть записаны в более общей форме

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = x_0, \\ 0 & \text{при } x \neq x_0, \end{cases} \tag{2.87}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\,dx = 1, \tag{2.88}$$

$$\delta(x - x_0) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a} e^{-(x-x_0)^2/2a^2}, \tag{2.89}$$

$$\delta(x - x_0) = \lim_{f_m\to\infty} \frac{\sin 2\pi f_m (x - x_0)}{\pi (x - x_0)}. \tag{2.90}$$

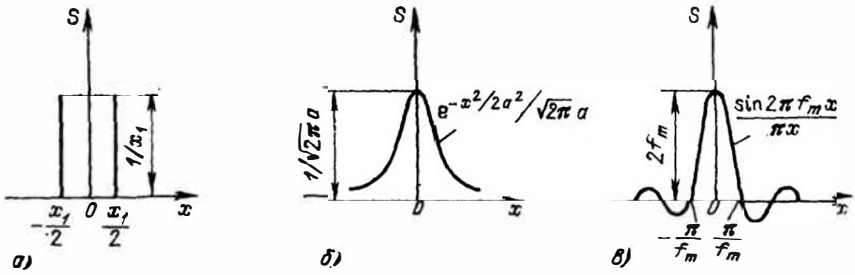


Рис. 2.22. Импульсы, обращающиеся в дельта-функцию при стремлении длительности к нулю

Функция $\delta(x)$ обладает важными свойствами, благодаря которым она получила широкое распространение в математике, физике и технике.

Из определений (2.87), (2.88) вытекает основное соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) f(x)\,dx = f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\,dx = f(x_0). \qquad (2.91)$$

Так как по определению функция $\delta(x-x_0)$ равна нулю на всей оси x, кроме точки $x=x_0$ (где она бесконечно велика), то промежуток интегрирования можно сделать сколь угодно малым, лишь бы он включал в себя точку x_0. В этом промежутке функции $f(x)$ принимает постоянное значение $f(x_0)$, которое можно вынести за знак интеграла. Таким образом, умножение любой подынтегральной функции $f(x)$ на $\delta(x-x_0)$ позволяет приравнять интеграл произведения значению $f(x)$ в точке $x=x_0$.

В математике соотношение (2.91) называется *фильтрующим* свойством дельта-функции[1].

В теории сигналов приходится иметь дело с дельта-функциями от аргументов t или ω, в зависимости от того, в какой области рассматривается функция — во временно́й или частотной.

Рассмотрим сначала свойства функции $\delta(t)$. В этом случае основное значение имеет спектральная характеристика дельта-функции. В § 2.10 было установлено, что при сокращении длительности $\tau_и$ прямоугольного импульса (неизменной амплитуды) ширина основного лепестка спектральной плотности увеличивается, а величина $S(0)$ быстро уменьшается. В данном же случае, когда уменьшение длительности импульса сопровождается одновременным увеличением его амплитуды, значение спектральной плотности остается неизменным и равным величине $S(0)=1$ для всех частот $-\infty < \omega < \infty$. То же самое имеет место при укорочении любого из импульсов, показанных на рис. 2.22.

Следовательно, спектральная плотность дельта-функции вещественна и равна единице для всех частот. Из этого также вытекает, что ФЧХ спектра дельта-функции $\delta(t)$ равна нулю для всех частот. Это означает, что все гармонические составляющие единичного импульса при нулевых начальных фазах, суммируясь, образуют пик бесконечно большой величины в момент времени $t=0$.

Аналогично функция $\delta(t-t_0)$, определяющая единичный импульс в момент t_0, имеет спектральную плотность $\mathrm{S}(\omega)=\mathrm{e}^{-i\omega t_0}$. Модуль этой функции по-прежнему равен единице, а ФЧХ $\theta(\omega)=-\omega t_0$.

Найденная ранее спектральная плотность дельта-функции может быть получена и с помощью преобразования Фурье:

$$\mathrm{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt.$$

Используя свойство (2.91), находим

$$\mathrm{S}(\omega)=\mathrm{e}^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt=\mathrm{e}^{-i\omega t_0}. \qquad (2.92)$$

При $t_0=0$ $\mathrm{S}(\omega)=1$. Следует иметь в виду, что правая часть равенства $S(\omega)=1$ является *размерной единицей*: это площадь импульса, численно равная единице. Если под $\delta(t)$ подразумевается импульс напряжения, то размерность $S(\omega)$ есть вольт × секунда (В·с).

---

[1] На языке техники более подходящим по смыслу являлся бы термин *стробирующее* свойство.

Можно, очевидно, и $\delta(t-t_0)$ представить в виде обратного преобразования Фурье от $S(\omega)=e^{-i\omega t_0}$:

$$\delta(t-t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-t_0)}\,d\omega. \qquad (2.93)$$

Энергия единичного импульса бесконечно велика. При спектральном рассмотрении это вытекает из равенства Парсеваля [см. (2.66)], правая часть которого при $S(\omega)=1$ обращается в бесконечность. При временно́м рассмотрении это следует из того, что энергия импульса, пропорциональная квадрату его амплитуды (т. е. величине $1/\tau_и^2$) и первой степени длительности $\tau_и$, с укорочением импульса растет как $1/\tau_и$. При $\tau_и\to 0$ энергия бесконечно велика.

Понятие единичного импульса особенно широко используется при исследовании действия коротких импульсов на линейные цепи. При этом не обязательно, чтобы амплитуда реального импульса была бесконечно велика, а длительность бесконечно мала. Достаточно, чтобы длительность импульса была мала по сравнению с постоянной времени исследуемой цепи (или по сравнению с периодом собственного колебания цепи).

Рассмотрим теперь свойства $\delta(\omega)$. Все, что ранее было сказано относительно $\delta(t)$, можно распространить на $\delta(\omega)$ при замене t на ω и ω на t.

По аналогии с выражением (2.93) можем написать

$$\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\,dt. \qquad (2.94)$$

(Перемена знака в показателе степени в данном случае не влияет на значение интеграла, см. § 2.8, п. 7.) Соответственно

$$\delta(\omega-\omega_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega-\omega_0)t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega-\omega_0)t}\,dt. \qquad (2.94')$$

2.12. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ СИГНАЛА И ШИРИНОЙ ЕГО СПЕКТРА. СКОРОСТЬ УБЫВАНИЯ СПЕКТРА

Из предыдущих параграфов уже ясно, что чем меньше длительность сигнала, тем шире его спектр. Для установления количественных соотношений между указанными параметрами сигнала необходимо условиться об определении понятий *длительность* сигнала и *ширина* его спектра. В практике применяются различные определения, выбор которых зависит от назначения сигнала, его формы, а также от структуры спектра. В некоторых случаях выбор является произвольным. Так, ширину спектра прямоугольного импульса определяют либо как основание главного лепестка (например, в п. 1 § 2.10), либо на уровне $1/\sqrt{2}$ от максимального значения спектральной плотности. Длительность колоколообразного импульса (см. § 2.10, п. 3) и ширину его спектра иногда определяют на уровне 0,606 от максимального значения соответственно $s(t)$ или $S(\omega)$. Часто пользуются энергетическим критерием, понимая под шириной спектра полосу частот, содержащую заданную долю полной энергии сигнала.

Для практики важное значение имеет также оценка протяженности «хвостов» спектра вне полосы частот, содержащей основную часть энергии сигнала.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПОЛОСА× ×ДЛИТЕЛЬНОСТЬ

Для выявления предельных соотношений, связывающих длительность сигнала и ширину спектра, в современной теории сигналов большое распространение получил *метод моментов*.

По аналогии с понятием момента инерции в механике эффективную длительность сигнала $T_{эф}$ можно определить выражением

$$T_{эф}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t-t_0)^2 s^2(t)\,dt \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt,$$

где середина импульса t_0 определяется из условия

$$t_0 = \int_{-\infty}^{\infty} t s^2(t)\,dt \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt.$$

Имеется в виду, что функция $s(t)$ интегрируема с квадратом (сигнал с конечной энергией).

Аналогично эффективная ширина спектра $\Omega_{эф} = 2\pi F_{эф}$ определяется выражением[1]

$$\Omega_{эф}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S^2(\omega)\,d\omega \Big/ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\,d\omega.$$

Так как модуль спектра $S(\omega)$ не зависит от смещения $s(t)$ во времени, можно положить $t_0 = 0$. Наконец, сигнал $s(t)$ можно нормировать таким образом, чтобы его энергия $Э$ равнялась единице и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\,d\omega = 1.$$

При этих условиях выражения для $T_{эф}$ и $\Omega_{эф}$ принимают вид

$$T_{эф}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 s^2(t)\,dt, \quad \Omega_{эф}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S^2(\omega)\,d\omega,$$

и, следовательно, произведение длительность × полоса

$$T_{эф}\,\Omega_{эф} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2 s^2(t)\,dt\right]^{1/2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S^2(\omega)\,d\omega\right]^{1/2}.$$

Нужно иметь в виду, что $T_{эф}$ и $\Omega_{эф}$ являются среднеквадратическими отклонениями соответственно от $t = t_0$ и $\omega = 0$. Поэтому полную длительность сигнала следует приравнять $2T_{эф}$, а полную ширину спектра (включая и область отрицательных частот) — величине $2\Omega_{эф}$.

Произведение $T_{эф}\Omega_{эф}$ зависит от формы сигнала, однако оно не может быть меньше 1/2. Оказывается, что наименьшее возможное значение $T_{эф}\Omega_{эф} = 1/2$ соответствует колоколообразному импульсу[2].

Метод моментов применим не к любым сигналам. Из выражений для $T_{эф}$ и $\Omega_{эф}$ видно, что функция $s(t)$ с увеличением t должна убывать быстрее, чем $1/t$, а функция $S(\omega)$ — быстрее, чем $1/\omega$, так как в противном случае соответствующие интегралы стремятся к бесконечности (расходятся).

---

[1] Имеются в виду сигналы без высокочастотного заполнения.

[2] Доказательство приведено в предыдущем издании настоящего учебника. См. также [31].

В частности, это относится к спектру строго прямоугольного импульса, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S^2(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \frac{\sin^2(\omega\tau_и/2)}{(\omega/2)^2}\, d\omega = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\omega\tau_и\right) d\omega \to \infty.$$

В этом случае выражение для $T_{эф}\Omega_{эф}$ не имеет смысла и оценку эффективной ширины спектра прямоугольного импульса приходится основывать на иных критериях.

Рассмотрим некоторые простые сигналы типа видеоимпульсов, т. е. сигналов, спектр которых сосредоточен в области низких частот, и определим с помощью равенства Парсеваля энергию, содержащуюся в полосе Δf от $\omega = 0$ до некоторой граничной частоты $\omega_{гр} = 2\pi f_{гр}$:

$$Э_{\Delta f} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{гр}} S^2(\omega)\, d\omega.$$

Относя затем $Э_{\Delta f}$ к полной энергии импульса $Э$, определяем коэффициент

$$\eta(f_{гр}\tau_и) = Э_{\Delta f}/Э,$$

характеризующий концентрацию энергии в заданной полосе.

В качестве исходного сигнала примем прямоугольный импульс, затем рассмотрим треугольный и колоколообразный (гауссовский). Последний особенно показателен, так как для него обеспечивается максимально возможная концентрация энергии спектра в заданной полосе $0 - f_{гр}$.

Для прямоугольного импульса в соответствии с (2.68)

$$Э_{\Delta f} = (A\tau_и)^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{гр}} \frac{\sin^2(\omega\tau_и/2)}{(\omega\tau_и/2)^2}\, d\omega = A^2\tau_и^2 \frac{1}{\pi} \frac{2}{\tau_и} \times$$

$$\times \int_0^{\omega_{гр}\tau_и/2} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = Э\eta\left(\frac{\omega_{гр}\tau_и}{2}\right), \quad \text{где } Э = A^2\tau_и.$$

Вычислив интеграл[1], получим

$$\eta\left(\frac{\omega_{гр}\tau_и}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\left[\mathrm{si}(\omega_{гр}\tau_и) - \frac{\sin^2(\omega_{гр}\tau_и/2)}{\omega_{гр}\tau_и/2}\right],$$

где $\mathrm{si}(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x}\, dx$ — интегральный синус.

Переходя к аргументу $\frac{\omega_{гр}\tau_и}{2} = \pi f_{гр}\tau_и$, записываем

$$\eta(\pi f_{гр}\tau_и) = \frac{2}{\pi}\left[\mathrm{si}(2\pi f_{гр}\tau_и) - \frac{\sin^2(\pi f_{гр}\tau_и)}{\pi f_{гр}\tau_и}\right].$$

Для треугольного импульса, спектральная плотность которого определяется формулой (2.73), а полная энергия $Э = A^2\tau_и/3$,

---

[1] Интегрирование по частям дает

$$\int_0^b \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = -\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^b + \int_0^b \frac{2\sin x\cos x}{x}\, dx = -\frac{\sin^2 b}{b} + \mathrm{si}(2b).$$

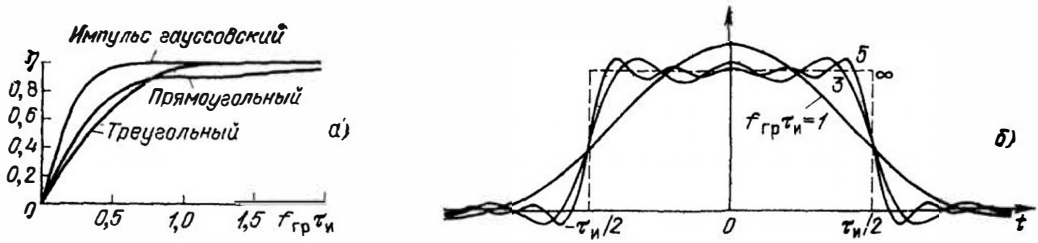


Рис. 2.23. Доля энергии сигнала в полосе $f_{гр}\tau_и$ ($а$) и деформация импульса при усечении спектра ($б$)

$$\mathcal{Э} = \left(\frac{A\tau_и}{2}\right)^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{гр}} \left(\frac{\sin\frac{\omega\tau_и}{4}}{\omega\tau_и/4}\right)^4 d\omega = \mathcal{Э}\eta\,(\omega_{гр}\,\tau_и/4),$$

где[1] $\eta\,(\omega_{гр}\,\tau_и/4) = \eta\left(\frac{\pi f_{гр}\,\tau_и}{2}\right) = \frac{3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi f_{гр}\tau_и}{2}} \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx.$

Для гауссовского импульса в соответствии с (2.77) получаем

$$\mathcal{Э}_{\Delta f} = A^2\,2\pi a^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{гр}} e^{-a^2\omega^2}\,d\omega = \sqrt{\pi}\,A^2 a \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a\omega_{гр}} e^{-x^2}\,dx = \mathcal{Э}\eta\,(a\omega_{гр}),$$

где $\mathcal{Э} = \sqrt{\pi}\,A^2 a$ — полная энергия гауссовского импульса, а функция

$$\eta\,(a\omega_{гр}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a\omega_{гр}} e^{-x^2}\,dx = \Phi\,(a\omega_{гр}) \text{ — интеграл вероятности.}$$

Учитывая, что длительность гауссовского импульса определена в п. 3 § 2.10 и равна $2a$, аргумент функции η можно записать в форме $a\omega_{гр} = \pi f_{гр}\tau_и$. Функции η для трех импульсов представлены на рис. 2.23, $а$.

Итак, значение произведения $f_{гр}\tau_и$, требующееся для заданного η, максимально для прямоугольного импульса (при $\eta > 0{,}9$) и минимально для гауссовского. В частности, уровню $\eta = 0{,}95$ соответствуют значения $f_{гр}\tau_и$, равные 1,8; 0,94 и 0,48.

Выбор границы спектра по энергетическому критерию в некоторых практических задачах не всегда приемлем. Так, если при обработке импульса требуется сохранить его форму достаточно близкой к прямоугольной, то $f_{гр}\tau_и$ должно быть гораздо больше единицы. Для иллюстрации этого важного положения на рис. 2.23, $б$ показаны исходный импульс (штриховая линия) и его деформация при усечении спектра на уровнях $f_{гр}\tau_и = 1{,}3$ и 5.

В любом случае при заданной форме сигнала сжатие его во времени с целью, например, повышения точности определения момента его появления

---

[1] Последовательное интегрирование по частям приводит к следующей формуле:

$$\int_0^b \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx = \frac{1}{3}\left\{-\frac{\varphi\,(b)}{b^3} - \frac{1}{2}\frac{\varphi'(b)}{b^2} - \frac{1}{2}\frac{\varphi''\,(b)}{b} - 2\mathrm{si}\,(2b) + 4\,\mathrm{si}\,(4b)\right\}.$$

где $\varphi\,(b) = \sin^4 b$; $\varphi'(b) = \frac{1}{2}\,(2\sin 2b - \sin 4b)$; $\varphi''\,(b) = 2b\,(\cos 2 - \cos 4b)$.

неизбежно сопровождается расширением спектра, что заставляет расширять полосу пропускания измерительного устройства. Аналогично сжатие спектра импульса с целью повышения точности измерения частоты неизбежно сопровождается растяжением сигнала во времени, что требует удлинения времени наблюдения (измерения). Невозможность одновременно сконцентрировать сигнал в узкой полосе частот и в коротком интервале времени представляет собой одно из проявлений известного в физике принципа неопределенности.

Вопрос о величине произведения длительность × полоса актуален в связи с проблемой электромагнитной совместимости, возникающей при взаимных помехах радиостанций. С этой точки зрения наиболее желательна форма импульсов, близкая к колоколообразной.

2. СКОРОСТЬ УБЫВАНИЯ СПЕКТРА ВНЕ ОСНОВНОЙ ПОЛОСЫ

Для выявления связи между поведением $S(\omega)$ в области относительно высоких частот и структурой сигнала $s(t)$ воспользуемся свойствами таких испытательных сигналов, как единичный импульс и единичный скачок.

Единичный импульс $\delta(t)$ является единственной функцией, имеющей неубывающую спектральную плотность на всей оси частот $-\infty < \omega < \infty$.

Поэтому можно утверждать, что сигнал $s(t)$, спектр которого вне основной полосы не убывает с ростом ω, содержит в своем составе дельта-функцию (в реальных условиях достаточно мощный короткий импульс).

Далее, единственной функцией времени, имеющей спектральную плотность вида $1/\omega$, является единичный скачок $u(t) = 1$, $t \geqslant 0$. Следовательно, убывание хвоста спектра сигнала $s(t)$ по закону $1/\omega$ свидетельствует о наличии в функции $s(t)$ скачков, т. е. разрывов непрерывности. Но в точках разрыва производная функции обращается в дельта-функцию (с постоянным коэффициентом, равным величине скачка). Поэтому убывание спектра пропорционально $1/\omega$ указывает на наличие дельта-функции в составе *производной* $s'(t)$. Это рассуждение можно продолжить и для производных сигнала $s(t)$ более высоких порядков.

Проиллюстрируем сказанное примерами трех сигналов, представленных на рис. 2.24: с разрывом, с изломом и «гладкого» сигнала (без разрывов и изломов).

В первом примере (рис. 2.24, *а*) производная $s'(t)$ определяется выражением

$$s'(t) = \delta(t) - \alpha e^{-\alpha t}, \quad t \geqslant 0, \quad \alpha = 1/\tau_0,$$

и спектральная плотность функции $s'(t)$ в соответствии с табл. 2.1

$$S_{s'}(\omega) = 1 - \alpha \frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{i\alpha}{\alpha + i(\omega)}.$$

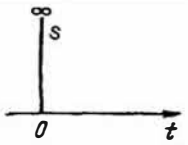
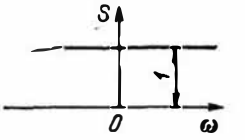
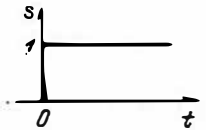
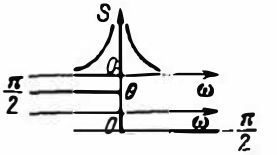
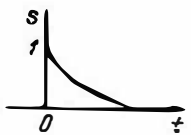
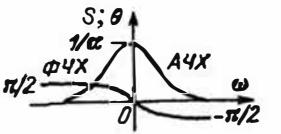
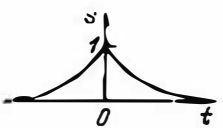
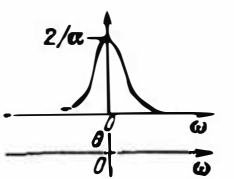
Для определения спектральной плотности сигнала $s(t)$, являющегося интегралом от $s'(t)$, можно исходить из выражения

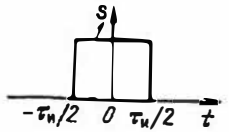
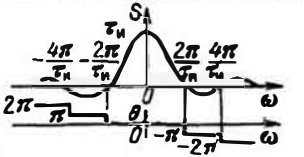
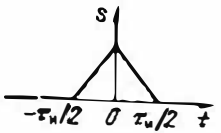
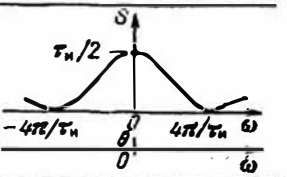
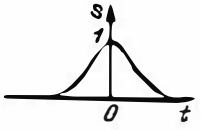
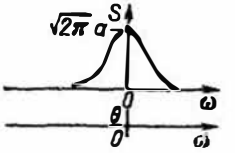
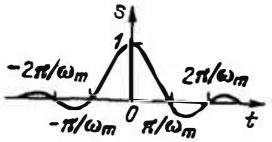
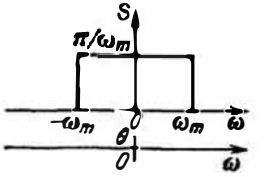
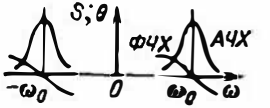
$$S_s(\omega) = \frac{1}{i\omega} S_{s'}(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega}.$$

В данном случае операция $1/i\omega$ законна, поскольку $S_{s'}(0) = 0$ [см. (2.60)].

При $\omega \gg \alpha$ спектральная плотность $S_s(\omega) \approx 1/i\omega$. Как видно из рис. 2.24, *а*, это объясняется наличием функции $\delta(t)$ в первой производной сигнала $s(t)$.

Таблица 2.1

Сигнал		Изображение по Лапласу	Спектральная плотность	
	$\delta(t)$	1	1	
	$s(t)=\begin{cases}1 \text{ при } t \geqslant 0,\\ 0 \text{ при } t<0,\end{cases}$	$\frac{1}{p}$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{i\omega}$	
	$s(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t} \text{ при } t \geqslant 0,\\ 0 \text{ при } t<0\end{cases}$ $\alpha>0$	$\frac{1}{\alpha+p}$	$\frac{1}{\alpha+i\omega}$	
	$s(t)=e^{-\alpha\lvert t\rvert}$, $\alpha>0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2-p^2}$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$	

	$s(t)=\begin{cases}1 \text{ при } \lvert t\rvert < \tau_и/2,\\ 0 \text{ при } \lvert t\rvert > \tau_и/2\end{cases}$	$\frac{1}{p}\left(e^{p\tau_и/2}-e^{-p\tau_и}\right)$	$\tau_и \frac{\sin \omega \tau_и/2}{\omega\tau_и/2}$	
	$s(t)=\begin{cases}1-\lvert t\rvert/2 \text{ при } \lvert t\rvert < \tau_и/2,\\ 0 \text{ при } \lvert t\rvert > \tau_и/2\end{cases}$	$-\frac{4}{\tau_и p}\left[1-\frac{1}{2}\times\right.$ $\times\left(e^{p\tau_и/2}+\right.$ $\left.\left.+e^{-p\tau_и/2}\right)\right]$	$\frac{\tau_и}{2}\left(\frac{\sin \omega\tau_и/4}{\omega\tau_и/4}\right)^2$	
	$s(t)=e^{-t^2/2a^2}$	$\sqrt{\pi}\, a\, e^{a^2p^2/2}$	$\sqrt{\pi}\, a\, e^{-a^2\omega^2/2}$	
	$s(t)=\frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t}$	—	π/ω_m при $\lvert\omega\rvert < \omega_m$ 0 при $\lvert\omega\rvert > \omega_m$	
	$s(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t}\cos \omega_0 t \text{ при } t \geqslant 0,\\ 0 \text{ при } t < 0\end{cases}$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha^2)+\omega_0^2}$	$\frac{i\omega+\alpha}{(i\omega+\alpha)^2+\omega^2}$	

Во втором примере (рис. 2.24, *б*) производная функции

$$s'(t) = \begin{cases} -\alpha e^{-\alpha t} & \text{при } t > 0, \\ \alpha e^{\alpha t} & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

не содержит дельта-функции, но терпит в точке $t = 0$ разрыв. После повторного дифференцирования получим функцию, отличающуюся от исходного сигнала $s(t)$ только масштабом по оси ординат и наличием функции $-2\alpha\delta(t)$.

Следовательно, спектральная плотность второй производной

$$S_{s''}(\omega) = \alpha^2 S_s(\omega) - 2\alpha,$$

причем при $\omega = 0$ эта функция равна $-\alpha$.

Разделим теперь полученное выражение на $(i\omega)^2$ и учтем, что $S_{s''}(\omega)/(i\omega)^2$ есть спектральная плотность двухкратного интеграла от функции $s''(t)$, т. е. $S_{s''}(\omega)/(i\omega)^2 = S_s(\omega)$.

Таким образом, можно составить следующее соотношение:

$$S_s(\omega) = [\alpha^2 S_s(\omega) - 2\alpha]/(i\omega)^2,$$

откуда вытекает равенство

$$S_s(\omega) = 2\alpha/(\alpha^2 + \omega^2).$$

При $\omega \gg \alpha$ $S_s(\omega) = 2\alpha/\omega^2$.

Отсюда видно, что разрыв первой производной приводит к убыванию спектра по закону $1/\omega^2$. Этот результат можно обобщить следующим обра-

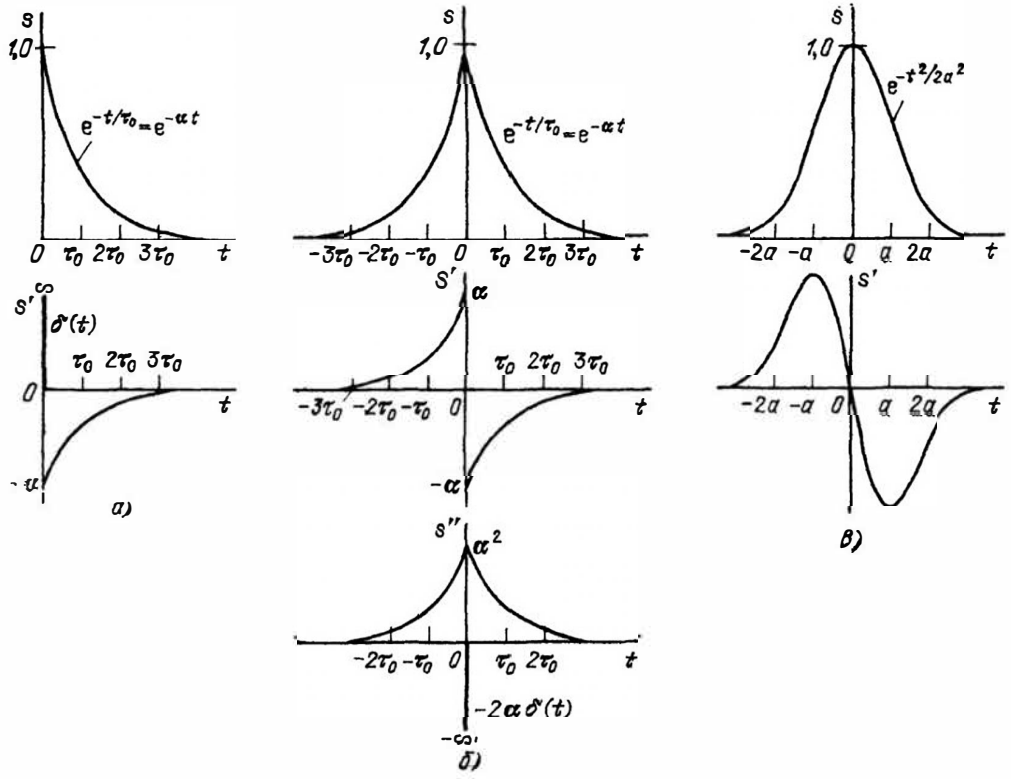


Рис. 2.24. Примеры сигналов:
а) с разрывом; *б*) с изломом; *в*) без разрыва и излома

зом: вне основной полосы частотный спектр убывает по закону $1/\omega^{n+1}$, где n — порядок производной, при котором возникает первый разрыв.

С этой точки зрения сигнал, показанный на рис. 2.24, *в*, производные которого непрерывны при всех значениях n, вплоть до $n = \infty$, должен обладать спектром, скорость убывания которого является максимально возможной. Этот вывод согласуется с тем, что произведение длительность × полоса минимальна для колоколообразного импульса (см. п. 1 данного параграфа).

Основываясь на приведенных рассуждениях нетрудно также объяснить происхождение пульсации спектра вне основной полосы частот. Периодическая пульсация с неубывающими максимумами может возникать только в результате интерференции спектров двух дельта-функций, разнесенных во времени. Спектр прямоугольного импульса, пульсирующий с максимумами, убывающими по закону $1/\omega$, является наглядным примером интерференции спектров двух единичных скачков.

2.13. СПЕКТРЫ НЕКОТОРЫХ НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Одним из условий применимости преобразования Фурье к функции $s(t)$ является ее абсолютная интегрируемость:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|\, dt < \infty. \tag{2.95}$$

Это условие существенно ограничивает класс сигналов, для которых существует спектр Фурье, выражаемый обычными функциями. Например, такие важные для теории сигналов и цепей функции, как гармоническое колебание, заданное при $-\infty < t < \infty$ или включаемое в некоторый момент времени, единичный скачок, и некоторые другие функции не отвечают условию (2.95).

Рассмотренные в предыдущем параграфе свойства дельта-функции позволяют устранить это препятствие.

Обратимся, например, к гармоническому сигналу $s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$. Не обращая внимания на то, что такой сигнал не является абсолютно интегрируемым, выражение для спектральной плотности запишем в форме (2.48):

$$\mathbf{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{i\omega t}\, dt = A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t + \theta_0)\, e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= \frac{A_0 e^{i\theta_0}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t}\, dt + \frac{A_0 e^{-i\theta_0}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega_0)t}\, dt.$$

На основании формулы (2.94′) получаем

$$\mathbf{S}(\omega) = \frac{A_0}{2} [2\pi e^{i\theta_0} \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi e^{-i\theta_0} \delta(\omega + \omega_0)] =$$

$$= A_0 \pi [e^{i\theta_0} \delta(\omega - \omega_0) + e^{-i\theta_0} \delta(\omega + \omega_0)]. \tag{2.96}$$

Эта функция равна нулю для всех частот, кроме $\omega = \omega_0$ и $\omega = -\omega_0$, при которых $\mathbf{S}(\omega)$ обращается в бесконечность. Как и следовало ожидать, гармоническому колебанию с *конечной* амплитудой соответствует *бесконечно большая* спектральная плотность при дискретных частотах ω_0 и $-\omega_0$.

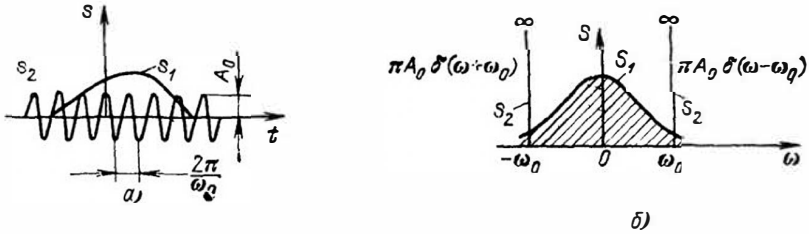


Рис. 2.25. Импульсный и монохроматический сигналы (*а*) и их спектральные плотности (*б*)

В частности, приравнивая ω_0 нулю, получаем спектральную плотность сигнала, представляющего собой постоянное напряжение (ток) A_0:

$$S(\omega) = A_0 \cdot 2\pi\delta(\omega). \tag{2.97}$$

Распространив соотношение (2.96) на все гармоники любого периодического сигнала

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \theta_n),$$

можно ввести понятие спектральной плотности периодического сигнала в виде суммы дельта-функций

$$S(\omega) = A_0 \cdot 2\pi\delta(\omega) + A_1 \pi [e^{i\theta_1} \delta(\omega - \omega_1) + e^{-i\theta_1} \delta(\omega + \omega_1)]$$
$$+ A_2 \pi [e^{i\theta_2} \delta(\omega - 2\omega_1) + e^{-i\theta_2} \delta(\omega + 2\omega_1)] + \ldots$$
$$\ldots + A_n \pi [e^{i\theta_n} \delta(\omega - n\omega_1) + e^{-i\theta_n} \delta(\omega + n\omega_1)] + \ldots \tag{2.98}$$

Такой подход оказывается полезным при рассмотрении смеси импульсного и гармонического сигналов.

Пусть, например, отыскивается спектр суммы двух сигналов: импульсного $s_1(t)$ и гармонического $s_2(t) = A_0 \cos \omega_0 t$ (рис. 2.25, *а*). Применяя выражение (2.48) к $s_1(t)$, находим обычную спектральную плотность $S(\omega)$, определяющую сплошной спектр (на рис. 2.25, *б* заштрихован). Применение же (2.48) к $s_2(t)$ дает спектр, определяемый выражением (2.96). На рис. 2.25, *б* этот спектр изображается двумя спектральными линиями, уходящими в бесконечность.

Отыщем теперь спектральную плотность единичного скачка. Эту простейшую разрывную функцию представим в виде суммы

$$s(t) = {}^1/_2 + {}^1/_2 \operatorname{sign}(t), \tag{2.99}$$

где $\operatorname{sign}(t)$ — сигнум-функция, равная единице, знак которой изменяется при переходе переменной t через нуль.

Постоянной составляющей 1/2 соответствует спектральная плотность [см. (2.97)] $\pi\delta(\omega)$, а спектральную плотность нечетной функции ${}^1/_2 \operatorname{sign}(t)$ нетрудно найти с помощью правила, сформулированного в предыдущем параграфе. Продифференцировав функцию ${}^1/_2 \operatorname{sign}(t)$, получим производную, которая равна нулю на всей оси времени, кроме момента $t = 0$, где она равна $\delta(t)$. Спектральная плотность $\delta(t)$ равна единице, следовательно, искомая спектральная плотность сигнум-функции будет $1/i\omega$.

В результате получаем спектральную плотность единичного скачка

$$S(\omega) = \pi\delta(\omega) + 1/i\omega. \tag{2.100}$$

При рассмотрении воздействия единичного скачка на цепи, передаточная функция которых при $\omega = 0$ равна нулю (т. е. на цепи, не пропускающие постоянный ток), спектральную плотность можно определять по формуле

$$\mathbf{S}(\omega) = 1/i\omega. \qquad (2.100')$$

2.14. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ НА ПЛОСКОСТИ КОМПЛЕКСНОЙ ЧАСТОТЫ

Анализ прохождения сигналов через линейные цепи, описываемые комплексной передаточной функцией, значительно облегчается при использовании методов контурного интегрирования на плоскости комплексной частоты $p = \sigma + i\omega$. Переход от действительной переменной ω к $p = \sigma + i\omega$ позволяет также полностью устранить ограничения, вытекающие из требования абсолютной интегрируемости функции $s(t)$.

Представим функцию $s(t)$, в общем случае существующую при $-\infty < t < \infty$, в виде суммы двух функций:

$$s(t) = s_+(t) + s_-(t),$$

из которых $s_+(t)$ задана при $0 < t < \infty$, а $s_-(t)$ — при $-\infty < t < 0$.

Обращаясь к паре преобразований Фурье (2.48), (2.49), совершаем переход от ω к p сначала для функции $s_+(t)$. Для этого домножим $s_+(t)$ на $e^{-\sigma_1 t}$, где $\sigma_1 > 0$ выберем таким образом, чтобы обеспечивалась абсолютная интегрируемость функции $e^{-\sigma_1 t} s_+(t)$ в пределах $0 < t < \infty$.

Тогда выражение (2.49) принимает вид

$$e^{-\sigma_1 t} s_+(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_+(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \qquad (2.49')$$

причем $\mathbf{S}_+(\omega)$ является спектральной плотностью функции $e^{-\sigma_1 t} s_+(t)$.

Теперь подставим в (2.49') $i\omega = p - \sigma_1$ и $\omega = (p - \sigma_1)/i$:

$$e^{-\sigma_1 t} s_+(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \mathbf{S}_+\left(\frac{p-\sigma_1}{i}\right) e^{(p-\sigma_1)t} dp,$$

откуда

$$s_+(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \mathbf{S}_+\left(\frac{p-\sigma_1}{i}\right) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} L_{s+}(p) e^{pt} dp. \qquad (2.101)$$

Новая функция $L_{s+}(p)$, являющаяся не чем иным, как спектральной плотностью сигнала $e^{-\sigma_1 t} s_+(t)$ [см. комментарий к (2.49')], определяется выражением

$$L_{s+}(p) = \mathbf{S}_+\left(\frac{p-\sigma_1}{i}\right) = \mathbf{S}_+(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\sigma_1 t} s_+(t) e^{-i\omega t} dt,$$

откуда

$$L_{s+}(p) = \int_0^{\infty} s_+(t) e^{-pt} dt. \qquad (2.102)$$

Полученное соотношение называется преобразованием (односторонним) Лапласа функции $s_+(t)$.

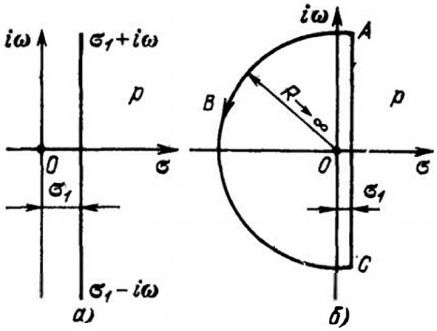


Рис. 2.26. Путь интегрирования по прямой $\sigma_1 - i\infty$, $\sigma_1 + i\infty$ на p-плоскости ($а$); образование замкнутого контура добавлением дуги ABC при $R \to \infty$ ($б$)

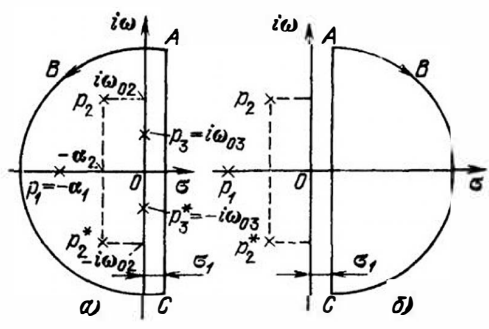


Рис. 2.27. Замыкание контура интегрирования для представления функции $s_+(t)$: $а$) при $t>0$; $б$) при $t<0$.

Соотношение (2.101) по аналогии с выражением (2.49) часто называют обратным преобразованием Лапласа.

Сравнение выражений (2.101) и (2.49) показывает, что переход от ω к p означает изменение пути интегрирования. В выражении (2.49) интегрирование ведется по действительной оси ω, а в выражении (2.101) — по прямой, проходящей параллельно мнимой оси $i\omega$ на расстоянии σ_1 вправо от этой оси (рис. 2.26, $а$). Значение постоянной σ_1 определяется характером подынтегральной функции в (2.101): путь интегрирования должен проходить правее полюсов этой функции.

Добавлением к прямой $\sigma_1 - i\infty$, $\sigma_1 + i\infty$ дуги бесконечно большого радиуса можно образовать замкнутый контур интегрирования (рис. 2.26, $б$). Для того чтобы добавление этой дуги не изменяло значения интеграла, нужно руководствоваться следующим правилом: при положительных значениях t контур должен быть расположен в левой полуплоскости переменного p, а при отрицательных t — в правой.

Тогда в первом случае при $t > 0$ [при проведении дуги в левой полуплоскости (рис. 2.27, $а$)] контур интегрирования охватывает все полюсы подынтегральной функции (лежащие левее прямой $\sigma_1 - i\infty$, $\sigma_1 + i\infty$) и в соответствии с теорией вычетов интеграл (2.101) определяется как

$$s_+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} L_{s+}(p)\, e^{pt}\, dp = \frac{1}{2\pi i}\oint_{ABCA} L_{s+}(p)\, e^{pt}\, dp = \sum \text{res}, \quad (2.103)$$

где Σ res — сумма вычетов в полюсах подынтегральной функции.

При проведении же дуги в правой полуплоскости, т. е. при $t < 0$ (рис. 2.27, $б$), полюсы функции $L_{s+}(p)\, e^{pt}$ оказываются вне контура интегрирования и в соответствии с теоремой Коши интеграл по замкнутому контуру равен нулю.

Таким образом, в зависимости от способа замыкания контура интегрирования получим:

при $t > 0$ (контур по рис. 2.27, $а$) $s_+(t)$ определяется выражением (2.103);

при $t < 0$ (контур по рис. 2.27, $б$)

$$s_+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} L_{s+}(p)\, e^{pt}\, dp = \frac{1}{2\pi i}\oint_{ABCA} L_{s+}(p)\, e^{pt}\, dp = 0. \quad (2.104)$$

Напомним важное свойство контурного интеграла: он не зависит от формы замкнутого контура, по которому проводится интегрирование, если только полюсы подынтегральной функции остаются внутри контура. На основании этого свойства контур, образованный добавлением дуги ABC бесконечно большого радиуса (см. рис. 2.27, *а*) к прямой $\sigma_1 - i\infty$, $\sigma_1 + i\infty$, можно произвольно деформировать при соблюдении условия, что все полюсы, расположенные левее прямой $\sigma_1 - i\infty$, $\sigma_1 + i\infty$, остаются внутри контура.

Итак, вычисление интеграла (2.103) сводится к определению вычетов в полюсах подынтегральной функции.

На рис. 2.27, *а* показано положение полюсов для следующих функций времени:

$$s_1(t) = e^{-\alpha_1 t}, \quad t \geqslant 0, \quad p_1 = -\alpha_1,$$

$$s_2(t) = \begin{cases} e^{-\alpha_2 t}\cos\omega_{02} t, & t \geqslant 0, \\ e^{-\alpha_2 t}\sin\omega_{02} t, & t \geqslant 0, \end{cases} \quad p_2,\ p_2^* = -\alpha_2 \pm i\omega_{p2}, \tag{2.105}$$

$$s_3(t) = \begin{cases} \cos\omega_{03} t, & t \geqslant 0, \\ \sin\omega_{03} t, & t \geqslant 0, \end{cases} \quad p_3,\ p_3^* = \pm i\omega_{p3}. \tag{2.105'}$$

Рассуждения, аналогичные предыдущим, можно привести для функции $s_-(t)$, заданной при $-\infty < t < 0$. Домножив $s_-(t)$ на $e^{-\sigma_2 t}$, при $\sigma_2 < 0$, выбранной таким образом, чтобы обеспечивалась абсолютная интегрируемость функции $e^{-\sigma_2 t} s_-(t)$ в пределах $-\infty < t < 0$, можно написать

$$L_{s-}(p) = \int_{-\infty}^{0} s_-(t)\, e^{-\sigma_2 t} e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} s_-(t)\, e^{-pt}\, dt, \tag{2.106}$$

$$s_-(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} L_{s-}(p)\, e^{pt}\, dp. \tag{2.107}$$

Контур интегрирования для данного случая показан на рис. 2.28. Интеграл равен сумме вычетов в полюсах функции $L_{s-}(p)\, e^{pt}$, расположенных в правой полуплоскости p. Эту сумму следует взять со знаком минус, поскольку при $t < 0$ контур обходится по часовой стрелке.

Выражения (2.102), (2.106) и (2.101), (2.107) можно объединить следующим образом:

$$L_s(p) = L_{s+}(p) + L_{s-}(p), \tag{2.108}$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} L_{s+}(p)\, e^{pt}\, dp + \int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} L_{s-}(p)\, e^{pt}\, dp\right]. \tag{2.109}$$

Соотношение (2.108) называется двусторонним преобразованием Лапласа.

Области сходимости функций $L_{s+}(p)$ и $L_{s-}(p)$ на плоскости p показаны на рис. 2.29. Для $L_{s-}(p)$ эта область расположена справа от прямой $\sigma = -\sigma_1$, на которой расположены полюсы (комплексно-сопряженные), а для $L_{s-}(p)$ — слева от прямой $\sigma = |\sigma_2|$. Область сходимости для $L_s(p)$ имеет вид полосы шириной $\sigma_1 + |\sigma_2|$.

Путь интегрирования должен проходить по прямой, расположенной внутри этой полосы и параллельной оси $i\omega$, а также по замыкающей дуге, расположенной в левой полуплоскости для $t > 0$ и соответственно в правой полуплоскости для $t < 0$.

Одностороннее преобразование Лапласа получило особенно широкое распространение при анализе переходных процессов, связанных с действием на цепь внешней силы, когда начало отсчета времени совмещают с началом воздействия. Двустороннее преобразование Лапласа находит все большее применение при анализе процессов и функций времени, двусторонних по самой своей сути (например, корреляционных функций, рассматриваемых в § 2.18).

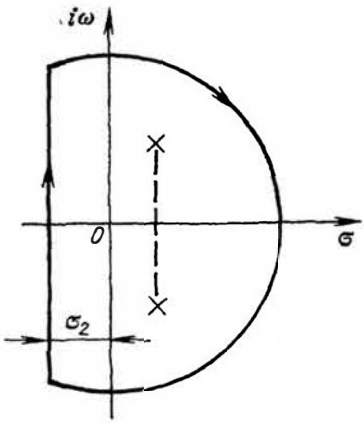


Рис. 2.28. Замыкание контура интегрирования для представления функции $s_-(t)$ при $t<0$

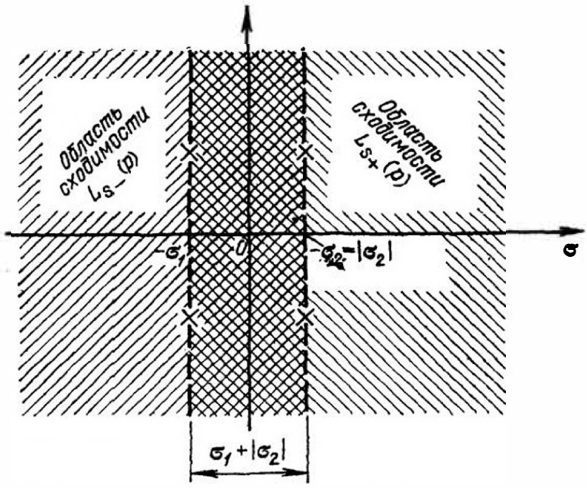


Рис. 2.29. *Области сходимости* при двустороннем преобразовании Лапласа

При рассмотрении четных функций $s(t) = s(-t)$, когда можно считать $s_+(t) = s_-(-t)$, имеет место следующее соотношение:

$$L_{s-}(p) = \int_{-\infty}^{0} s(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_{\infty}^{0} s(-t)\, e^{-p(-t)}\, d(-t) = \int_{0}^{\infty} s(t)\, e^{pt}\, dt = L_{s+}(-p). \quad (2.110)$$

Поясним применение выражений (2.106)—(2.110) на двух примерах.

1. Четная функция $s(t) = e^{-\alpha|t|}$ при $\alpha > 0$ (рис. 2.30). По формулам (2.102) и (2.110) находим

$$L_{s+}(p) = 1/(\alpha + p), \quad L_{s-}(p) = 1/(\alpha - p).$$

Тогда

$$L_s(p) = 1/(\alpha + p) + 1/(\alpha - p) = 2\alpha/(\alpha^2 - p^2). \quad (2.111)$$

2. Прямоугольный импульс при отсчете времени от фронта (см. рис. 2.16) или от середины импульса (см. рис. 2.14, *а*).

В первом случае

$$L_s(p) = (1/p)(1 - e^{-p\tau_и}).$$

Во втором случае

$$L_s(p) = L_{s+}(p) + L_{s-}(p),$$

где

$$L_{s+}(p) = \frac{1}{p}(1 - e^{-p\tau_и/2}); \quad L_{s-}(p) = L_{s+}(-p) = \frac{1}{-p}(1 - e^{+p\tau_и/2}).$$

Таким образом,

$$L_s(p) = (1/p)(e^{p\tau_и/2} - e^{-p\tau_и/2}). \quad (2.112)$$

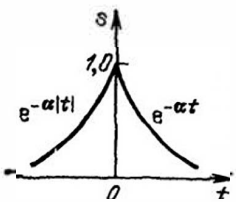


Рис. 2.30. Пример функции времени, требующей применения двустороннего преобразования Лапласа

Большинство свойств преобразования Лапласа совпадает с аналогичными свойствами преобразования Фурье, изложенными в § 2.8. Если сигналу $s(t)$

соответствует изображение по Лапласу $L_s(p)$, то имеются следующие соответствия:

$$s(t-t_0) \div e^{-pt_0} L_s(p),\ s(t)\, e^{-\alpha t} \div L_s(p+\alpha),$$

$$s(t)\, e^{i\omega_0 t} \div L_s(p-i\omega_0),\ s(t)\cos\omega_0 t \div {}^1/_2 L_s(p-i\omega_0) + {}^1/_2 L_s(p+i\omega_0),$$

$$\frac{ds(t)}{dt} \div pL_s(p),\ \int_0^t s(t)\,dt \div (1/p)\, L_s(p),\ \int_{-\infty}^{\infty} s_1(y)\, s_2(t-y)\,dy \div L_1(p)\, L_2(p).$$

В заключение остановимся на правилах перехода от изображения Лапласа к преобразованию Фурье S (ω) (имеются в виду односторонние преобразования Лапласа).

Если на оси $i\omega$ функция $L_s(p)$ не имеет полюсов, то для такого перехода достаточно в (2.102) положить $\sigma_1 = 0$, т. е. перейти от переменной p к переменной $i\omega$. В противном случае, чтобы избежать ошибки, необходимо определить вклад этих полюсов в спектральную плотность сигнала[1].

Дело в том, что интегрирование функции $L_s(p)\, e^{pt}$ по полуокружности бесконечно малого радиуса с центром в полюсе $p_1 = i\omega$ приводит к гармоническому колебанию с частотой ω_1 и амплитудой 1/2. Спектральная плотность такого колебания, равная $\pi\delta(\omega - \omega_1)$, должна быть прибавлена к сплошному спектру, обусловленному интегрированием по оси $i\omega$.

Так, для функции $L_s(p)$ с одним полюсом в точке $p_1 = 0$ [$s(t) = 1$, $t \geqslant 0$] мы ранее получили

$$S(\omega) = \pi\delta(\omega) + 1/i\omega;$$

для функции $L_s(p)$ с двумя комплексно-сопряженными полюсами $p_{1,2} = \pm i\omega_0$ [$s(t) = \cos\omega_0 t$, $t \geqslant 0$] спектральная плотность будет

$$S(\omega) = \pi[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] \qquad (2.113)$$

и т. д. (см. приложение 1).

Изображения по Лапласу и соответствующие им спектры Фурье некоторых распространенных в теории сигналов функций приведены в таблице 2.1.

2.15. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ С ОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛОСОЙ ЧАСТОТ В ВИДЕ РЯДА КОТЕЛЬНИКОВА

В теории и технике сигналов широко используется теорема Котельникова (теорема отсчетов): *если наивысшая частота в спектре функции $s(t)$ меньше, чем f_m, то функция $s(t)$ полностью определяется последовательностью своих значений в моменты, отстоящие друг от друга не более чем на $1/2f_m$ секунд.*

В соответствии с этой теоремой сигнал $s(t)$, ограниченный по спектру наивысшей частотой $\omega_m = 2\pi f_m$, можно представить рядом

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{n}{2f_m}\right) \frac{\sin\omega_m(t-n/2f_m)}{\omega_m(t-n/2f_m)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t)\,\varphi_n(t). \qquad (2.114)$$

В этом выражении $1/2f_m = \Delta t$ обозначает интервал между двумя отсчетными точками на оси времени, а $s(n/2f_m) = s(n\Delta t)$ — выборки функции $s(t)$ в моменты времени $t = n\Delta t$.

[1] См.: Тронин Ю. В. Утеряна дельта-функция! — Радиотехника и электроника, 1986, № 2, с. 408.

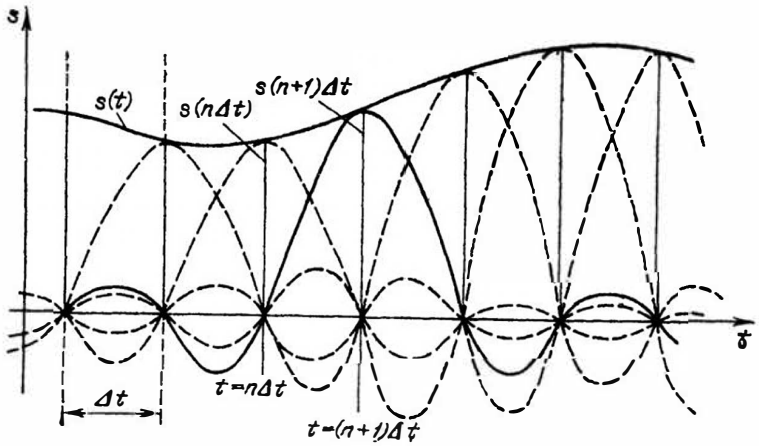


Рис. 2.31. Представление сигнала рядом Котельникова

Представление заданной функции $s(t)$ рядом (2.114) иллюстрируется рис. 2.31.

Функция вида

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin \omega_m (t - n\Delta t)}{\omega_m (t - n\Delta t)}, \tag{2.115}$$

уже встречавшаяся ранее (см. § 2.10, рис. 2.19, *а*), обладает следующими свойствами:

а) в точке $t = n\Delta t$ $\varphi_n(n\Delta t) = 1$, а в точках $t = k\Delta t$, где k — любое целое положительное или отрицательное число, отличное от n, $\varphi_n(k\Delta t) = 0$;

б) спектральная плотность функции $\varphi_0(t)$ равномерна в полосе частот $|\omega| < \omega_m$ и равна $1/2f_m = \pi/\omega_m$ [см. (2.82) и рис. 2.19, *б*].

Так как функция $\varphi_n(t)$ отличается от $\varphi_0(t)$ только сдвигом на оси времени на $n\Delta t$, то спектральная плотность функции $\varphi_n(t)$

$$\Phi_n(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2f_m} e^{-in\Delta t\omega} = \Delta t e^{-in\Delta t} & \text{при } -\omega_m < \omega < \omega_m, \\ 0 & \text{при } \omega < -\omega_m \text{ и } \omega > \omega_m. \end{cases} \tag{2.116}$$

Модуль этой функции изображен на рис. 2.32, *б*.

То, что ряд (2.114) точно определяет заданный сигнал $s(t)$ в точках отсчета, не требует дополнительных доказательств, поскольку коэффициентами ряда являются сами выборки из функции, т. е. величины $s(n\Delta t)$. Можно доказать, что ряд (2.114) определяет функцию $s(t)$ в любой момент t, а не только в точках отсчета $t = n\Delta t$. Воспользуемся для этого общими правилами разложения функции по ортогональной системе, изложенными в § 2.2. В данном случае разложение производится по функциям вида (2.115), для которых интервал ортогональности равен бесконечности, а норма $\|\varphi_n\|$ в соответствии с (2.5)

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega_m (t - n\Delta t)}{\omega_m^2 (t - n\Delta t)^2} dt = \frac{1}{\omega_m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{\omega_m} = \Delta t.$$

Не предрешая заранее значения коэффициентов ряда (2.114), применяем для их определения общую формулу (2.9), справедливую для обобщенно-

го ряда Фурье

$$c_n = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, \varphi_n(t)\, dt. \qquad (2.117)$$

При этом исходим из условия, что $s(t)$ — квадратично-интегрируемая функция (энергия сигнала конечна).

Для вычисления интеграла в выражении (2.117) воспользуемся формулой (2.63), согласно которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, \varphi_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \mathrm{S}(\omega)\, \boldsymbol{\Phi}_n^*(\omega)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2f_m} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \mathrm{S}(\omega)\, e^{in\Delta t\omega}\, d\omega. \qquad (2.117')$$

Пределы интегрирования здесь приведены в соответствии с заданной граничной частотой $\omega_m = 2\pi f_m$ в спектре сигнала, а также в спектре функции $\varphi_n(t)$.

Интеграл в правой части (2.117) с коэффициентом $1/2\pi$ есть не что иное, как значение $s(t)$ в момент $t = n\Delta t$. Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, \varphi_n(t)\, dt = \Delta t s(n\Delta t).$$

Подставляя этот результат в (2.117'), получаем окончательное выражение

$$c_n = s(n\Delta t),$$

из которого следует, что коэффициентами ряда (2.114) являются выборки функции $s(t)$ в точках $t = n\Delta t$.

Поскольку ограничение спектра конечной наивысшей частотой обеспечивает непрерывность функции $s(t)$, ряд (2.114) сходится к функции $s(t)$ при любом значении t.

Соотношение между спектром $S(2\pi f)$ сигнала $s(t)$ и спектром $\Phi_n(2\pi f)$ базисной функции $\varphi_n(t)$ при $\Delta t = 1/2f_m$ иллюстрируется рис. 2.32, *а* и *б*.

Если взять интервал между выборками $\Delta t'$ меньшим $\Delta t = 1/2f_m$, то ширина $2f_m'$ спектра $\Phi_n'(\omega)$ функции $\varphi_n'(t)$ будет больше, чем у спектра $S(\omega)$ (рис. 2.32, *в*). Это повышает точность представления сигнала $s(t)$, так как исключается возможность неучета «хвостов» спектра $S(\omega)$ вне граничных частот f_m; кроме того, ослабляются требования к АЧХ фильтра, восстанавливающего непрерывный сигнал.

При увеличении же $\Delta t''$ по сравнению с Δt (рис. 2.32, *г*) спектр $\Phi_n''(\omega)$ функции $\varphi_n''(t)$ становится уже, чем спектр сигнала $s(t)$, и при вычислении

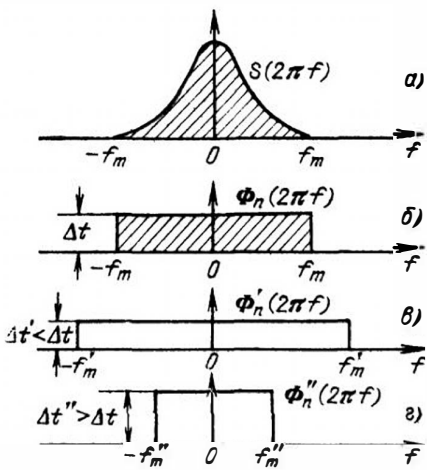


Рис. 2.32. Связь между спектром сигнала $s(t)$ и спектром базисной функции $\varphi_n(t)$

интеграла в выражении (2.117) пределы интегрирования должны быть $-2\pi f_m''$, $2\pi f_m''$ вместо $-2\pi f_m$, $2\pi f_m$. Коэффициенты c_n при этом являются уже выборками не заданного сигнала $s(t)$, а некоторой другой функции $s_1(t)$, спектр которой ограничен наивысшей частотой $f_m'' < f_m$.

Рассмотрим теперь случай, когда длительность сигнала $s(t)$ конечна и равна T_c, а полоса частот по-прежнему равна f_m. Эти условия, строго говоря, несовместимы, так как функция конечной длительности обладает теоретически бесконечно широким спектром. Однако практически всегда можно определить наивысшую частоту спектра f_m так, чтобы «хвосты» функции времени, обусловленные отсеканием частот, превышающих f_m, содержали пренебрежимо малую долю энергии по сравнению с энергией исходного сигнала $s(t)$. При таком допущении для сигнала длительностью T_c с полосой частот f_m общее число независимых параметров [т. е. значений $s(n\Delta t)$], которое необходимо для полного задания сигнала, очевидно, будет

$$N = T_c/\Delta t = 2f_m T_c.$$

При этом выражение (2.114) принимает следующий вид (при отсчете времени от первой выборки):

$$s(t) = \sum_{n=0}^{2f_m T_c} s(n\Delta t)\,\frac{\sin \omega_n (t - n\Delta t)}{\omega_m (t - n\Delta t)}. \qquad (2.118)$$

Число N иногда называют числом степеней свободы сигнала $s(t)$, так как даже при произвольном выборе значений $s(n\Delta t)$ сумма вида (2.118) определяет функцию, удовлетворяющую условиям заданного спектра и заданной длительности сигнала. Число N иногда называют также базой сигнала.

Энергию и среднюю мощность сигнала нетрудно выразить через заданную последовательность временных выборок. Используя формулы (2.16) и (2.123), а также равенство $\|\varphi_n\|^2 = \Delta t$, получаем

$$\mathcal{E} = \sum_{n=0}^{2f_m T_c} [s(n\Delta t)]^2 \|\varphi_n\|^2 = \Delta t \sum_{n=0}^{2f_m T_c} |s(n\Delta t)]^2,$$

$$\overline{s^2(t)} = \frac{\mathcal{E}}{T_c} = \frac{\Delta t}{T_c} \sum_{n=0}^{2f_m T_c} [s(n\Delta t)]^2 = \frac{1}{2f_m T_c} \sum_{n=0}^{2f_m T_c} |s(n\Delta t)]^2.$$

Из последнего выражения видно, что средняя за время T_c мощность непрерывного сигнала равна среднему квадрату выборок, число которых равно $2f_m T_c$.

2.16. ТЕОРЕМА ОТСЧЕТОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Иногда сигнал необходимо представить с помощью частотных выборок спектральной функции $S(\omega)$, а не временных выборок функции $s(t)$. Для функции $S(\omega)$ можно составить ряд, аналогичный выражению (2.114). Для этого базисная функция $\varphi_n(t) = \operatorname{sinc}[\omega_m (t - n\Delta t)]$ [см. (2.115)] должна быть заменена функцией $\varphi_n(\omega) = \operatorname{sinc}\left[\frac{T_c}{2}(\omega - n\Delta\omega)\right] = \operatorname{sinc}\left[\frac{T_c}{2}\left(\omega - n\frac{2\pi}{T_c}\right)\right]$, которая получена из (2.115) заменой t на ω, полуширины спектра ω_m на полудлительность сигнала $T_c/2$ и $\Delta t = 1/2f_m$ на $\Delta\omega = 2\pi/T_c$.

Таким образом,

$$S(\omega) = \sum_{n=-f_m T_c}^{f_m T_c} S(n\Delta\omega) \frac{\sin \frac{T_c}{2}(\omega - n\Delta\omega)}{\frac{T_c}{2}(\omega - n\Delta\omega)} =$$

$$= \sum_{n=-f_m T_c}^{f_m T_c} S\left(n\frac{2\pi}{T_c}\right) \frac{\sin \frac{T_c}{2}\left(\omega - n\frac{2\pi}{T_c}\right)}{\frac{T_c}{2}\left(\omega - n\frac{2\pi}{T_c}\right)}. \qquad (2.119)$$

Расстановка частотных выборок иллюстрируется рис. 2.33.

Если ранее временно́й интервал между двумя соседними выборками Δt не должен был превышать $2\pi/2\omega_m$, то теперь частотный интервал $\Delta\omega$ не должен превышать $2\pi/T_c$. При ширине спектра $2\omega_m$, охватывающей область частот $-\omega_m < \omega < \omega_m$, число выборок равно $2\omega_m/\Delta\omega = 2f_m T_c$, как и при представлении сигнала рядом (2.118).

В общем случае выборки $S(n2\pi/T_c)$ являются комплексными числами и в каждой отсчетной точке на оси частот должны быть заданы два параметра — действительная и мнимая части $S(n2\pi/T_c)$ (или модуль и аргумент). Таким образом, общее число параметров получается вдвое большим, чем при временно́м представлении сигнала, когда выборки $s(n/2f_m)$ — действительные числа. Избыточность представления сигнала в частотной области легко устраняется, если учесть, что $S(n2\pi/T_c)$ и $S(-n2\pi/T_c)$ являются комплексно-сопряженными функциями, так что задание одной из них однозначно определяет другую. Таким образом, спектр сигнала полностью характеризуется совокупностью комплексных выборок, взятых только в области положительных частот, и числом независимых параметров или степеней свободы сигнала $N = 2f_m T_c$, как и при представлении сигнала во временно́й области.

К приведенному выше определению максимального допустимого интервала $\Delta\omega = 2\pi/T_c$, основанному на замене $t \rightleftarrows \omega$ в (2.114), можно прийти и с помощью строгих рассуждений. Полагая, как и в § 2.15, заданными длительность T_c и спектр $S(\omega)$ сигнала $s(t)$, представляем этот сигнал в виде ряда Фурье (вместо интеграла Фурье)

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T_x}t}, \quad -\frac{T_x}{2} \leqslant t \leqslant \frac{T_x}{2},$$

где $T_x \geqslant T_c$ — произвольный отрезок оси t, включающий в себя отрезок T_c.

В соответствии с (2.22) и (2.56) коэффициенты

$$c_n = \frac{1}{T_x} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} s(t) e^{-in\frac{2\pi}{T_x}t} dt =$$

$$= \frac{1}{T_x} S\left(\omega = n\frac{2\pi}{T_x}\right).$$

Как видим, коэффициенты c_n, будучи умноженными на T_x, есть не что иное, как значения спектральной плотности $S(\omega)$ на дис-

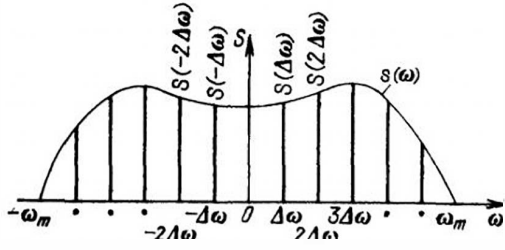


Рис. 2.33. Дискретизация спектра сигнала по Котельникову

кратных частотах $n\frac{2\pi}{T_x} = n\Delta\omega$, т. е. отсчеты $\mathbf{S}(n\Delta\omega)$, фигурирующие в выражении (2.119). Очевидно, что максимально допустимый интервал между отсчетами на оси частот соответствует условию $T_x = T_c$, т. е. $\Delta\omega \leqslant 2\pi/T_c$.

2.17. ДИСКРЕТИЗОВАННЫЕ СИГНАЛЫ

В предыдущих параграфах под дискретизацией сигнала $s(t)$ подразумевалось аналитическое его представление с помощью совокупности отсчетов в дискретные моменты времени $n\Delta t$.

В современной радиоэлектронике широко распространены системы, в которых осуществляется дискретизация сигнала, например, при использовании импульсных методов передачи сообщения в радиосвязи. В системах с цифровой обработкой исходный континуальный сигнал преобразуется в дискретный сигнал (см. рис. 1.2, *б*).

Выбор шага (темпа) T дискретизации производится на основании теоремы отсчетов (см. § 2.15).

Процедуру дискретизации (взятие выборок), осуществляемую с помощью электронного ключа, удобно рассматривать как умножение функции $s(t)$ на вспомогательную периодическую последовательность $y_T(t)$ достаточно коротких тактовых импульсов. В качестве таких импульсов обычно рассматривают прямоугольные импульсы с длительностью τ_0, малой по сравнению с T. Таким образом, дискретизованный с шагом T сигнал можно определить выражением

$$s_T(t) = s(t)\, y_T(t). \tag{2.120}$$

Функции $s(t)$, $y_T(t)$ и $s_T(t)$ показаны на рис. 2.34, *а*.

Для выявления требования к «малости» величины τ_0/T рассмотрим сначала структуру спектра дискретизованного сигнала $s_T(t)$. Спектральную плотность $\mathbf{S}(\omega)$ исходного континуального сигнала $s(t)$ будем считать заданной.

Запишем периодическую функцию $y_T(t)$ в виде ряда Фурье по формуле (2.39), в которой под $\tau_и$ будем подразумевать величину τ_0, а под ω_1, как и в (2.39), — частоту повторения $\omega_1 = 2\pi/T$:

$$y_T(t) = U_0\left[\frac{\tau_0}{T} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\omega_1\tau_0}{2}\right)\cos n\omega_1 t\right].$$

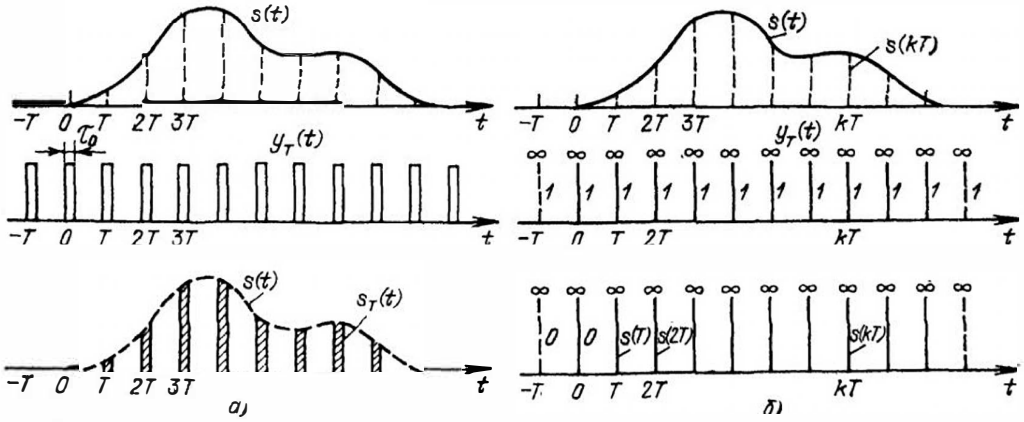


Рис. 2.34. Дискретизация сигнала как умножение на последовательность тактовых импульсов конечной длительности (*а*) или на последовательность дельта-функций (*б*).

Учитывая, что $n\omega_1\tau_0/2 = n\pi\tau_0/T$, а также имея в виду равенство $\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau_0}{T} = \frac{\tau_0}{T}\operatorname{sinc}(n\pi\tau_0/T)$, получаем

$$y_T(t) = U_0\frac{\tau_0}{T}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi\tau_0}{T}\right)\cos n\omega_1 t\right].$$

Тогда выражение (2.120) принимает вид

$$s_T(t) = U_0\frac{\tau_0}{T}\left[s(t) + 2s(t)\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi\tau_0}{T}\right)\cos n\omega_1 t\right].$$

Первому слагаемому в правой части соответствует спектральная плотность $\mathbf{S}(\omega)$ исходного континуального сигнала, а каждому из произведений $s(t)\cos n\omega_1 t$ — спектральная плотность $^1/_2[\mathbf{S}(\omega - n\omega_1) + \mathbf{S}(\omega + n\omega_1)]$ (см. теорему в п. 3 § 2.8 о смещении спектра).

Следовательно, искомая спектральная плотность

$$S_T(\omega) = U_0\frac{\tau_0}{T}\left[\mathbf{S}(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi\tau_0}{T}\right)\mathbf{S}(\omega - n\omega_1) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi\tau_0}{T}\right)\mathbf{S}(\omega + n\omega_1)\right].$$

Поскольку $\operatorname{sinc}(0) = 1$, последнее выражение можно записать в следующей окончательной форме:

$$\mathbf{S}_T(\omega) = U_0\frac{\tau_0}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi\tau_0}{T}\right)\mathbf{S}(\omega - n\omega_1). \qquad (2.121)$$

Графики функций $S(\omega)$ и $S_T(\omega)$ представлены на рис. 2.35.

Итак, *спектр* $\mathbf{S}_T(\omega)$ *дискретизованного сигнала представляет собой последовательность спектров* $\mathbf{S}(\omega)$ *исходного сигнала* $s(t)$, *сдвинутых один относительно другого на* $\omega_1 = 2\pi/T$ *и убывающих по закону* $\sin\left(\frac{n\pi\tau_0}{T}\right)\Big/\frac{n\pi\tau_0}{T}$.

Если шаг выборок в соответствии с теоремой отсчетов выбран из условия $T < 1/2f_m = \pi/\omega_m$, отдельные спектры не перекрываются, как это показано на рис. 2.35, *а*, и могут быть разделены с помощью фильтров.

В практике величину T обычно берут в несколько раз меньшей чем $1/2f_m$, что необходимо для повышения точности воспроизведения сигнала и облегчения реализации фильтров.

С уменьшением отношения τ_0/T лепестки спектра убывают медленнее и в пределе, при $\tau_0/T \to 0$, спектр приобретает строго периодическую структуру (и, естественно, уровень лепестков стремится к нулю). Если одновременно с уменьшением τ_0 увеличивать U_0 так, чтобы площадь импульса $U_0\tau_0$ оставалась неизменной, то функции $y_T(t)$ и $s_T(t)$ примут вид, показанный на рис. 2.34, *б*. Приравнивая для упрощения $U_0\tau_0 = 1$, приходим к следующему определению тактовой функции:

$$y_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t - kT).$$

Тогда выражение (2.120) переходит в

$$s(t) = s(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}s(kT)\,\delta(t - kT). \qquad (2.122)$$

Последовательность временных отсчетов приобретает вид последовательности дельта-функций с весовыми коэффициентами, равными значениями сигнала $s(t)$ в точках kT (см. рис. 2.34, *б*).

При этом выражение (2.121) принимает вид

$$S_T(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - n\omega_1). \qquad (2.123)$$

Отметим, что энергия сигнала $s_T(t)$, выраженного через дельта-функции, бесконечно велика. Соответственно и энергия спектра $S_T(\omega)$, определяемого выражением (2.123), бесконечно велика. При использовании же реальных тактовых импульсов с конечной энергией спектр $S_T(\omega)$ при $\omega \to \infty$ убывает (см. рис. 2.35).

Представление $s_T(t)$ в форме (2.122) существенно упрощает спектральный анализ дискретных сигналов. Например, спектральную плотность $S_T(\omega)$ можно определить непосредственно по совокупности временных отсчетов $\{s(kt)\}$, без обращения к спектру $S(\omega)$ исходного континуального сигнала. Действительно, применив обычное преобразование Фурье (2.48) к выражению (2.122) для случая, когда $k = 0, 1, \ldots, \infty$, получим

$$S_T(\omega) = \int_0^{\infty} s_T(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\, \delta(t - kT)\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} s(kT) \int_0^{\infty} e^{-i\omega t}\, \delta(t - kT)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\, e^{-i\omega kT}. \qquad (2.124)$$

По своей размерности функции $S(\omega)$ и $S_T(\omega)$ неодинаковы: первая имеет размерность $\left[\frac{\text{сигнал}}{\text{частота}}\right]$, а вторая — просто [сигнал].

Переходя к комплексной частоте $p = \sigma + i\omega$, получаем изображение по Лапласу дискретизованного сигнала

$$S_T(p) = L\,[s_T(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\, e^{-pkT}. \qquad (2.125)$$

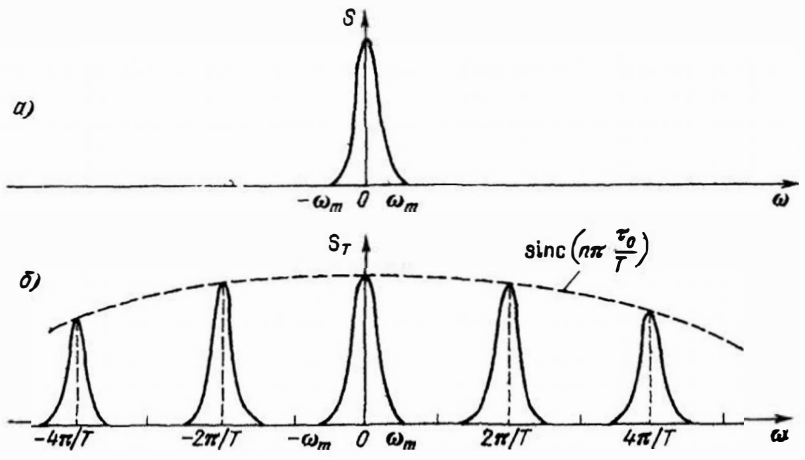


Рис. 2.35. Спектры исходного (*а*) и дискретизованного (*б*) сигналов

Оригинал, т. е. функцию $s_T(t)$, можно определить по заданному изображению $S_T(p)$ с помощью обратного преобразования Лапласа, записываемого в обычной форме:

$$s_T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} S_T(p)\, e^{pt}\, dt \qquad (2.126)$$

[см. (2.103)].

Выражение (2.126) определяет всю последовательность $\{s(kT)\}$ в форме, совпадающей с выражением (2.122). Для определения одного k-го отсчета $s(kT)$ без множителя $\delta(t - kT)$ можно применить более простое выражение

$$s(kT) = T \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\pi/T}^{\sigma_1 + i\pi/T} S(p)\, e^{pkT}\, dp, \qquad (2.127)$$

в котором интегрирование ведется в пределах одного частного интервала от $-\pi/T$ до π/T[1].

Некоторые дополнительные характеристики дискретных сигналов, существенные при цифровой обработке, приводятся в § 12.2.

2.18. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Наряду со спектральным подходом к описанию сигналов часто на практике оказывается необходимой характеристика, которая давала бы представление о некоторых свойствах сигнала, в частности о скорости изменения во времени, а также о длительности сигнала без разложения его на гармонические составляющие.

В качестве такой временной характеристики широко используется к о р р е л я ц и о н н а я функция сигнала.

Для детерминированного сигнала $s(t)$ конечной длительности корреляционная функция определяется следующим выражением:

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, s^*(t + \tau)\, dt, \qquad (2.128)$$

где τ — временной сдвиг сигнала.

---

[1] Вычислим правую часть (2.126) после замены пределов интегрирования, подстановки $t = mT$, где m — любое целое число, и подстановки $S(p)$ по формуле (2.125):

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\pi/T}^{\sigma_1 + i\pi/T} \sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\, e^{-pkT} e^{pmT}\, dp = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT) \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\pi/T}^{\sigma_1 + i\pi/T} e^{p(m-k)T}\, dp.$$

Учитывая, что в данном случае $p = \sigma_1 + i\omega$, и переходя к переменной интегрирования ω, получаем

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\, e^{\sigma_1 (m-k) T} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(m-k)\pi}{(m-k)T}.$$

При $m = k$ $I = s(kT)/T$, а при $m \neq k$ $I = 0$. Таким образом, для определения $s(kT)$ достаточно заменить в (2.126) $s_T(t)$ на $s(kT)$ и пределы интегрирования $\sigma_1 - i\infty$, $\sigma_1 + i\infty$ на $\sigma_1 - i\pi/T$, $\sigma_1 + i\pi/T$.

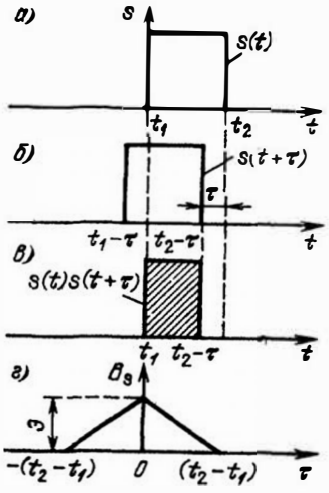


Рис. 2.36. Построение корреляционной функции для прямоугольного импульса

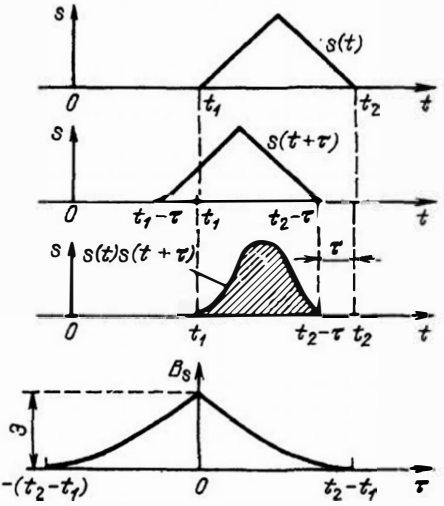


Рис. 2.37. Построение корреляционной функции для треугольного импульса

В данной главе рассматриваются сигналы, являющиеся вещественными функциями времени, и обозначение комплексного сопряжения можно опустить:

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, s(t+\tau)\, dt. \qquad (2.129)$$

Из выражения (2.129) видно, что $B_s(t)$ характеризует степень связи (корреляции) сигнала $s(t)$ со своей копией, сдвинутой на величину τ по оси времени. Ясно, что функция $B_s(t)$ достигает максимума при $\tau = 0$, так как любой сигнал полностью коррелирован с самим собой. При этом

$$B_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt = Э, \qquad (2.130)$$

т. е. максимальное значение корреляционной функции равно энергии сигнала.

С увеличением τ функция $B_s(\tau)$ убывает (не обязательно монотонно) и при относительном сдвиге сигналов $s(t)$ и $s(t+\tau)$ на время, превышающее длительность сигнала, обращается в нуль.

На рис. 2.36 показано построение корреляционной функции для простейшего сигнала в виде прямоугольного импульса (рис. 2.36, *а*). Сдвинутый на τ (в сторону опережения) сигнал $s(t+\tau)$ показан на рис. 2.36, *б*, а произведение $s(t)\, s(t+\tau)$ — на рис. 2.36, *в*. График функции $B_s(\tau)$ изображен на рис. 2.36, *г*. Каждому значению τ соответствуют свое произведение $s(t)\, s(t+\tau)$ и площадь под графиком функции $s(t)\, s(t+\tau)$. Численные значения таких площадей для соответствующих τ и дают ординаты функции $B_s(\tau)$.

Аналогичное построение для треугольного импульса изображено на рис. 2.37. Из общего определения корреляционной функции, а также из приведенных примеров видно, что безразлично, вправо или влево относи-

тельно своей копии сдвигать сигнал на величину τ. Поэтому выражение (2.129) можно обобщить следующим образом:

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, s(t+\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, s(t-\tau)\, dt. \qquad (2.129')$$

Это равносильно утверждению, что $B_s(\tau)$ является *четной функцией* τ.

На рис. 2.38, *а* показан сигнал в виде пачки из четырех одинаковых импульсов, сдвинутых один относительно другого на время T_1, а на рис. 2.38, *б* — соответствующая этому сигналу корреляционная функция. Вблизи значений τ, равных 0, $\pm T_1$, $\pm 2T_1$ и $\pm 3T_1$, эта функция имеет такой же вид, как и для одиночного импульса (см. рис. 2.36, *г*). Максимальное значение корреляционной функции (при $\tau = 0$) равно учетверенной энергии одного импульса.

Для периодического сигнала, энергия которого бесконечно велика, определение корреляционной функции с помощью выражений (2.129) или (2.129′) неприемлемо. В этом случае исходят из следующего определения:

$$B_{s\,\text{пер}}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\, s(t+\tau)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t-\tau)\, s(t)\, dt. \qquad (2.131)$$

При таком определении корреляционная функция приобретает размерность мощности, причем $B_{s\,\text{пер}}(0)$ равна средней мощности периодического сигнала. Ввиду периодичности сигнала $s(t)$ усреднение произведения $s(t) \times s(t+\tau)$ или $s(t-\tau)\, s(t)$ по бесконечно большому отрезку T должно совпадать с усреднением по периоду T_1. Поэтому выражение (2.131) можно заменить выражением

$$B_{s\,\text{пер}}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} s(t)\, s(t+\tau)\, dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} s(t)\, s(t-\tau)\, dt. \qquad (2.132)$$

Входящие в это выражение интегралы суть не что иное, как корреляционная функция сигнала на интервале T_1. Обозначая ее через $B_{sT_1}(\tau)$, приходим к соотношению

$$B_{s\,\text{пер}}(\tau) = B_{sT_1}(\tau)/T_1.$$

Очевидно также, что периодическому сигналу $s(t)$ соответствует и периодическая корреляционная функция $B_{s\,\text{пер}}(\tau)$. Период функции $B_{s\,\text{пер}}(\tau)$

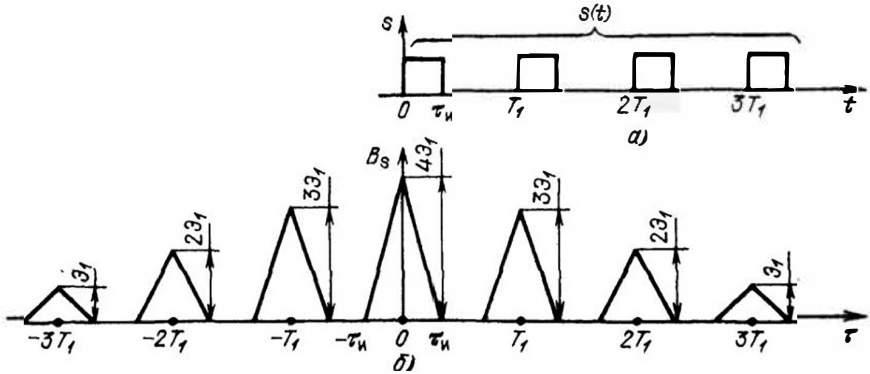


Рис. 2.38. Пачка из четырех прямоугольных импульсов (*а*) и корреляционная функция (*б*)

совпадает с периодом T_1 исходного сигнала $s(t)$. Например, для простейшего (гармонического) колебания $s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$ корреляционная функция

$$B_{s\,\text{пер}}(\tau) = \frac{A_0^2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \cos(\omega_0 t + \theta_0) \cos[\omega_0 (t+\tau) + \theta_0]\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} A_0^2 \cos \omega_0 \tau, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_1}.$$

При $\tau = 0$ $B_{s\,\text{пер}}(0) = \frac{1}{2} A_0^2$ есть средняя мощность гармонического колебания с амплитудой A_0. Важно отметить, что корреляционная функция $B_{s\,\text{пер}}(\tau)$ не зависит от начальной фазы колебания θ_0.

На рис. 2.39, *б* изображена корреляционная функция сигнала, представляющего собой периодическую последовательность прямоугольных импульсов (рис. 2.39, *а*). Каждый из импульсов функции $B_{s\,\text{пер}}(\tau)$ совпадает по форме с корреляционной функцией одиночного импульса из периодической последовательности $s(t)$. Однако в данном случае максимальные ординаты $B_{s\,\text{пер}}(\tau)$ равны не энергии (как на рис. 2.38), а средней мощности сигнала $s(t)$, т. е. величине $\overline{s^2(t)}$.

Для оценки степени связи между двумя различными сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$ используется взаимная корреляционная функция, определяемая общим выражением

$$B_{s_1 s_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, s_2^*(t+\tau)\, dt. \qquad (2.133)$$

Для вещественных функций $s_1(t)$ и $s_2(t)$

$$B_{s_1 s_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, s_2(t+\tau)\, dt. \qquad (2.134)$$

Рассмотренная выше корреляционная функция $B_s(\tau)$ является частным случаем функции $B_{s_1 s_2}(\tau)$, когда $s_1(t) = s_2(t)$.

Построение взаимной корреляционной функции для двух сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ приведено на рис. 2.40. Исходное положение сигнала $\tau = 0$ показано на рис. 2.40, *а*. При сдвиге сигнала $s_2(t)$ влево ($\tau > 0$, рис. 2.40, *б*) корреляционная функция сначала возрастает, затем убывает до нуля при $\tau = T$. При сдвиге вправо ($\tau < 0$) корреляционная функция сразу убывает. В результате получается асимметричная относительно оси ординат функция $B_{s_1 s_2}(\tau)$ (рис. 2.40, *в*).

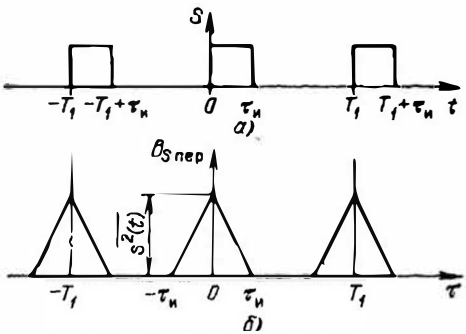


Рис. 2.39. Периодическая последовательность импульсов (*а*) и ее корреляционная функция (*б*)

Очевидно, что значение $B_{s_1 s_2}$ не изменится, если вместо упреждения сигнала $s_2(t)$ дать задержку сигналу $s_1(t)$. Поэтому выражение (2.134) можно обобщить следующим образом:

$$B_{s_1 s_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, s_2(t-\tau)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)\, s_1(t-\tau)\, dt = B_{s_2 s_1}(-\tau). \qquad (2.135)$$

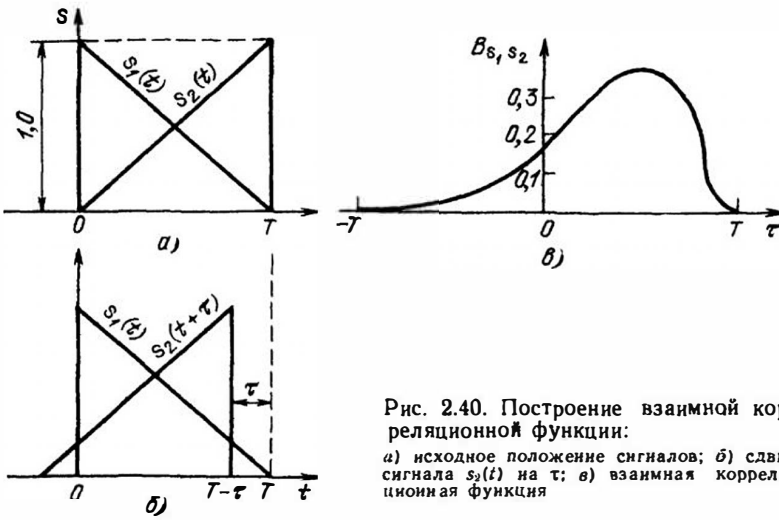


Рис. 2.40. Построение взаимной корреляционной функции:

а) исходное положение сигналов; б) сдвиг сигнала $s_2(t)$ на τ; в) взаимная корреляционная функция

Соответственно

$$B_{s_2 s_1}(\tau) = B_{s_1 s_2}(-\tau). \qquad (2.135')$$

Следует, однако, различать выражения (2.129′) и (2.135). В отличие от $B_s(\tau)$ взаимная корреляционная функция не обязательно является четной относительно τ. Кроме того, взаимная корреляционная функция *не обязательно* достигает максимума при $\tau = 0$. Оба эти свойства функции $B_{s_1 s_2}(\tau)$ иллюстрируются рис. 2.40.

2.19. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ СИГНАЛА

Воспользуемся выражением (2.63), в котором положим $f(t) = s(t)$, $g(t) = s(t+\tau)$ и соответственно $\mathbf{F}(\omega) = \mathbf{S}(\omega)$, $\mathbf{G}(\omega) = \mathbf{S}(\omega)\, e^{-i\omega\tau}$. Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, s(t+\tau)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega)\, \mathbf{S}^*(\omega)\, e^{-i\omega\tau}\, d\omega = B_s(\tau).$$

Учитывая, что $\mathbf{S}(\omega)\, \mathbf{S}^*(\omega) = S^2(\omega)$, приходим к искомому соотношению

$$B_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\, e^{-i\omega\tau}\, d\omega. \qquad (2.136)$$

На основании известных свойств преобразований Фурье можно также написать[1].

$$S^2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau. \qquad (2.137)$$

[1] Вследствие четности функции $B_s(\tau)$ знак перед $i\omega\tau$ в показателе степени может быть произвольным. То же относится к (2.137).

Итак, прямое преобразование Фурье (2.137) корреляционной функции $B_s(\tau)$ дает спектральную плотность энергии (см. замечание в конце § 2.10), а преобразование (2.136) дает корреляционную функцию $B_s(\tau)$.

Из выражений (2.136) и (2.137) вытекают свойства, аналогичные отмеченным в § 2.10: *чем шире спектр $S(\omega)$ сигнала, тем меньше интервал корреляции, т. е. сдвиг τ, в пределах которого корреляционная функция отлична от нуля.* Соответственно чем больше интервал корреляции заданного сигнала, тем уже его спектр.

Из выражений (2.136) и (2.137) также видно, что корреляционная функция $B_s(\tau)$ не зависит от ФЧХ спектра сигнала. Так как при заданном амплитудном спектре $S(\omega)$ форма функции $s(t)$ существенно зависит от ФЧХ, то можно сделать следующее заключение: *различным по форме сигналам $s(t)$, обладающим одинаковыми амплитудными спектрами, соответствуют одинаковые корреляционные функции $B_s(\tau)$.*

Глава 3. МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

3.1. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для передачи информации на расстояние применяются сигналы, эффективно излучаемые с помощью антенных устройств и обладающие способностью распространяться в виде свободных радиоволн в среде, разделяющей отправителя и получателя информации. Такими сигналами являются высокочастотные колебания. Передаваемая информация должна быть тем или иным способом заложена в высокочастотное колебание, называемое н е с у щ и м. Частота ω_0 этого колебания выбирается в зависимости от расстояния, на которое должна передаваться информация, от условий распространения радиоволн и ряда других технических и экономических факторов. Но в любом случае *частота ω_0 должна быть велика по сравнению с наивысшей частотой Ω_m спектра передаваемого сообщения*[1].

Это объясняется тем, что для неискаженной передачи сообщений через радиотехнические цепи, а также для устранения искажений, возникающих при распространении радиоволн, необходимо чтобы ширина спектра сообщения Ω_m была мала по сравнению с ω_0; чем меньше отношение Ω_m/ω_0, тем меньше проявляется несовершенство характеристик системы. Поэтому чем выше требуемая скорость передачи информации и, следовательно, шире спектр сообщения Ω_m, тем выше должна быть несущая частота радиосигнала. Как правило, выполняется неравенство $\Omega_m/\omega_0 \ll 1$.

Любой радиосигнал можно поэтому трактовать как «узкополосный» процесс даже при передаче «широкополосных» сообщений.

Приведем следующие примеры. При передаче речи или музыки спектр сообщения обычно ограничивают полосой от $F_{min} = 30$—50 Гц до $F_{max} = 3000$—$10\,000$ Гц. Даже на самой длинной волне вещательного диапазона $\lambda = 2000$ м при несущей частоте $f_0 = 150$ кГц отношение $F_{max}/f_0 = 10^4/1{,}5 \times 10^5 \approx 0{,}06$. При передаче тех же сообщений на коротких волнах (при частотах 15—20 МГц) это отношение не превышает сотых долей процента. При передаче подвижных изображений (телевидение) полоса частот сообщения весьма широка и достигает 5—6 МГц, однако и несущая частота выбирается не менее 50—60 МГц, так что отношение F_{max}/f_0 не превышает 10 %.

[1] В данной главе Ω используется для обозначения частоты модулирующей функции.

В самом общем случае радиосигнал, несущий в себе информацию, можно представить в виде

$$a(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)] = A(t)\cos\psi(t), \tag{3.1}$$

в котором амплитуда A или фаза θ изменяются по закону передаваемого сообщения.

Если A и θ — постоянные величины, то выражение (3.1) описывает простое гармоническое колебание, не содержащее в себе никакой информации. Если A и θ (следовательно, и ψ) подвергаются принудительному изменению для передачи сообщения, то колебание становится модулированным.

В зависимости от того, какой из двух параметров изменяется — амплитуда A или угол θ — различают два основных вида модуляции: амплитудную и угловую. Угловая молуляция, в свою очередь, подразделяется на два вида: частотную (ЧМ) и фазовую (ФМ). Эти два вида модуляции тесно связаны между собой, и различие между ними проявляется лишь в характере изменения во времени угла ψ при одной и той же модулирующей функции.

Модулированное колебание имеет спектр, структура которого зависит как от спектра передаваемого сообщения, так и от вида модуляции. То обстоятельство, что ширина спектра модулирующего сообщения мала по сравнению с несущей частотой ω_0, позволяет считать $A(t)$ и $\theta(t)$ медленными функциями времени. Это означает, что относительное изменение $A(t)$ или $\theta(t)$ за один период несущего колебания мало по сравнению с единицей.

Рассмотрим сначала вопрос об изменении амплитуды. При скорости изменения амплитуды dA/dt приращение амплитуды за один период T_0 можно приближенно приравнять $(dA/dt)\,T_0$. Следовательно, относительное изменение за период

$$\left|\frac{dA}{dt}\right|\frac{T_0}{A} = \left|\frac{dA}{dt}\right|\frac{1}{A}\frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Можно считать, что условие медленности функции $A(t)$ выполняется, если

$$\frac{2\pi}{\omega_0}\left|\frac{dA}{dt}\right|\frac{1}{A} \ll 1 \text{ или } \left|\frac{dA}{dt}\right|\frac{1}{A} \ll \frac{\omega_0}{2\pi}. \tag{3.2}$$

Аналогично можно установить условие медленности функции θ.

Так как мгновенная частота колебания равна скорости изменения фазы (об этом подробнее будет сказано в следующих параграфах), то, дифференцируя аргумент выражения (3.1), находим

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\theta}{dt}.$$

Производная $d\theta/dt$ определяет отклонение частоты $\omega(t)$ от частоты ω_0. Это отклонение может быть быстрым или медленным. Для того чтобы колебания $a(t)$ можно было считать близким к гармоническому, нужно, чтобы изменение частоты за время T было мало по сравнению с частотой $\omega(t)$ в любой рассматриваемый момент времени.

Таким образом, условие медленности функции $\theta(t)$ можно записать в виде следующих неравенств:

$$\frac{\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\right| T}{\omega(t)} \ll 1 \text{ или } \left|\frac{d^2\theta}{dt^2}\right| \ll \frac{\omega(t)}{T}.$$

Так как обычно $\omega(t)$ очень мало отличается от ω_0, можно считать $T \approx 2\pi/\omega_0$ и исходить из условия

$$\left|\frac{d^2\theta}{dt^2}\right| \ll \frac{1}{2\pi}\omega_0^2. \qquad (3.3)$$

Для большинства используемых в радиотехнике сигналов неравенства (3.2) и (3.3) обычно выполняются. Это означает, что при любом виде модуляции параметры радиосигнала: амплитуда, фаза или частота — изменяются настолько медленно, что в пределах одного периода T_0 колебание можно считать гармоническим.

Эта предпосылка лежит в основе всего дальнейшего рассмотрения свойств радиосигналов и их спектров.

3.2. РАДИОСИГНАЛЫ С АМПЛИТУДНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Амплитудная модуляция (АМ) является наиболее простым и очень распространенным в радиотехнике способом заложения информации в высокочастотное колебание. При АМ огибающая амплитуд несущего колебания изменяется по закону, совпадающему с законом изменения передаваемого сообщения, частота же и начальная фаза колебания поддерживаются неизменными. Поэтому для амплитудно-модулированного радиосигнала общее выражение (3.1) можно заменить следующим:

$$a(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \theta_0). \qquad (3.4)$$

Характер огибающей $A(t)$ определяется видом передаваемого сообщения.

При непрерывном сообщении (рис. 3.1, *а*) модулированное колебание приобретает вид, показанный на рис. 3.1, *б*. Огибающая $A(t)$ совпадает по форме с модулирующей функцией, т. е. с передаваемым сообщением $s(t)$. Рисунок 3.1, *б* построен в предположении, что постоянная составляющая функции $s(t)$ равна нулю (в противоположном случае амплитуда несущего колебания A_0 при модуляции может не совпадать с амплитудой немодулированного колебания). Наибольшее изменение $A(t)$ «вниз» не может быть больше A_0. Изменение же «вверх» может быть в принципе и больше A_0.

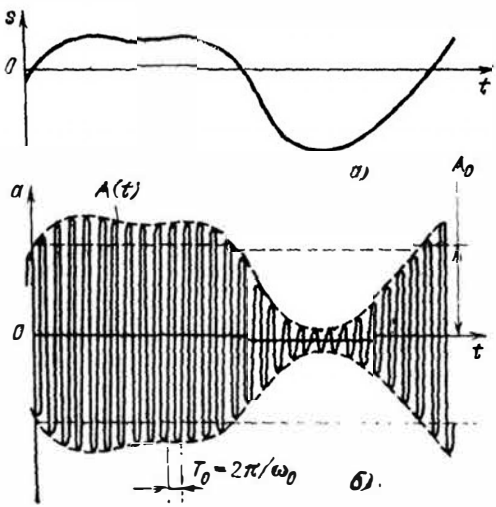


Рис. 3.1. Модулирующая функция (*а*) и амплитудно-модулированное колебание (*б*)

Основным параметром амплитудно-модулированного колебания является коэффициент модуляции.

Определение этого понятия особенно наглядно для тональной модуляции, когда модулирующая функция является гармоническим колебанием:

$$s(t) = S_0\cos(\Omega t + \gamma).$$

Огибающую модулированного колебания при этом можно представить в виде

$$A(t) = A_0 + k_{\text{ам}}\, s(t) = A_0 + \Delta A_m \cos(\Omega t + \gamma), \qquad (3.5)$$

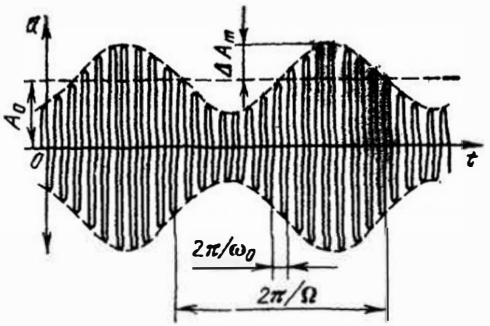


Рис. 3.2. Колебание, модулированное по амплитуде гармонической функцией

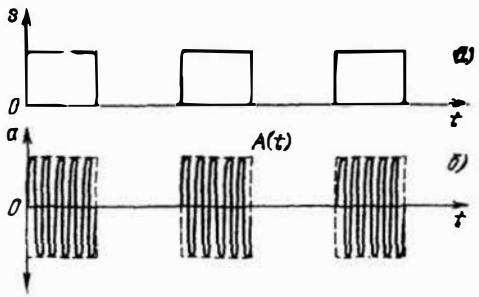


Рис. 3.3. Колебание, модулированное по амплитуде импульсной последовательностью

где Ω — частота модуляции; γ — начальная фаза огибающей; $k_{ам}$ — коэффициент пропорциональности; $\Delta A_m = k_{ам} S_0$ — амплитуда изменения огибающей (рис. 3.2).

Отношение

$$M = \Delta A_m / A_0$$

называется коэффициентом модуляции.

Таким образом, мгновенное значение модулированного колебания

$$a(t) = A_0 |1 + M \cos(\Omega t + \gamma)| \cos(\omega_0 t + \theta_0). \qquad (3.6)$$

При неискаженной модуляции ($M \leqslant 1$) амплитуда колебания изменяется в пределах от минимальной $A_{min} = A_0 (1 - M)$ до максимальной $A_{max} = A_0 (1 + M)$.

В соответствии с изменением амплитуды изменяется и средняя за период высокой частоты мощность модулированного колебания. Пикам огибающей соответствует мощность, в $(1 + M)^2$ раз большая мощности несущего колебания. Средняя же за период модуляции мощность пропорциональна среднему[1] квадрату амплитуды $A(t)$:

$$\overline{A^2(t)} = A_0^2 \overline{[1 + M \cos(\Omega t + \gamma)]^2} = A_0^2 (1 + 0{,}5M^2). \qquad (3.7)$$

Эта мощность превышает мощность несущего колебания всего лишь в $(1 + 0{,}5M^2)$ раз. Таким образом, при 100 %-ной модуляции ($M = 1$) пиковая мощность равна $4P_0$, а средняя мощность $1{,}5P_0$ (через $P_0 = \frac{1}{2} A_0^2$ обозначена мощность несущего колебания). Отсюда видно, что обусловленное модуляцией приращение мощности колебания, которое в основном и определяет условия выделения сообщения при приеме, даже при предельной глубине модуляции не превышает половины мощности несущего колебания.

При передаче дискретных сообщений, представляющих собой чередование импульсов и пауз (рис. 3.3, *а*), модулированное колебание имеет вид последовательности радиоимпульсов, изображенных на рис. 3.3, *б*. При этом имеется в виду, что фазы высокочастотного заполнения в каждом из импульсов такие же, как и при «нарезании» их из одного непрерывного гармониче-

[1] Среднее значение $\cos(\Omega t - \gamma)$ за период модулирующей частоты равна нулю, а среднее значение $\cos^2(\Omega t + \gamma)$ равно 1/2. Черта над функцией означает операцию усреднения по времени.

ского колебания. Только при этом условии показанную на рис. 3.3, *б* последовательность радиоимпульсов можно трактовать как колебание, модулированное лишь по амплитуде. Если от импульса к импульсу фаза изменяется, то следует говорить о смешанной амплитудно-угловой модуляции.

3.3. СПЕКТР АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННОГО КОЛЕБАНИЯ

Пусть задано высокочастотное модулированное колебание, о котором известно, что частота ω_0 и начальная фаза θ_0 величины постоянные, а огибающая $A(t)$ содержит в себе передаваемое сообщение $s(t)$. Аналитически такое колебание можно представить с помощью выражения (3.4).

Требуется установить связь между спектром модулированного колебания и спектром модулирующей функции, т. е. спектром исходного сообщения $s(t)$. Проще и нагляднее всего это можно сделать для тональной (гармонической) модуляции, когда огибающая

$$A(t) = A_0 [1 + M \cos(\Omega t + \gamma)],$$

а модулированное колебание определяется выражением (3.6).

Перепишем выражение (3.6) в форме

$$a(t) = A_0 [\cos(\omega_0 t + \theta_0) + M \cos(\Omega t + \gamma) \cos(\omega_0 t + \theta_0)].$$

Второе слагаемое в правой части этого выражения, являющееся продуктом модуляции, можно привести к виду

$$M \cos(\Omega t + \gamma) \cos(\omega_0 t + \theta_0) = \frac{M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega) t + (\theta_0 + \gamma)] +$$

$$+ \frac{M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega) t + (\theta_0 - \gamma)],$$

после чего развернутое выражение колебания $a(t)$ принимает вид

$$a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) + \frac{MA_0}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega) t +$$

$$+ \theta_0 + \gamma] + \frac{MA_0}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega) t + \theta_0 - \gamma]. \qquad (3.8)$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное немодулированное колебание с частотой ω_0. Второе и третье слагаемые соответствуют новым колебаниям (гармоническим), появляющимся в процессе модуляции амплитуды. Частоты этих колебаний $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$ называются верхней и нижней боковыми частотами модуляции.

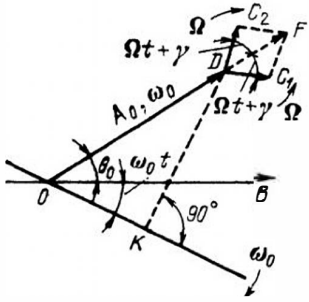


Рис. 3.4. Векторное представление амплитудно-модулированного колебания

Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют от амплитуды немодулированного колебания долю, равную $M/2$, а их фазы симметричны относительно фазы несущего колебания. Это иллюстрируется векторной диаграммой, представленной на рис. 3.4. На этой диаграмме ось времени вращается по часовой стрелке с угловой частотой ω_0, причем отсчет угла $\omega_0 t$ ведется от линии OB. Поэтому несущее колебание $A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$ изображается на этой диаграмме в виде неподвижного вектора OD длиной A_0, составляющего с горизонталью угол

θ_0. Мгновенное значение несущего колебания в момент t равно проекции вектора A_0 на ось времени (отрезок OK).

Для представления на этой же диаграмме колебания с частотой $\omega_0 + \Omega$, превышающей угловую частоту вращения оси времени на величину Ω, необходимо воспользоваться вектором, вращающимся с угловой частотой Ω против часовой стрелки (вектор DC_1). Для изображения колебания с частотой $\omega_0 - \Omega$ потребуется вектор, вращающийся с такой же частотой Ω по часовой стрелке (вектор DC_2). Поэтому колебания боковых частот — верхней и нижней — изображаются двумя векторами длиной $MA_0/2$, вращающимися во взаимно противоположных направлениях. Начала этих векторов перенесены из точки O в точку D. Их фазы симметричны относительно вектора несущего колебания A_0. Это следует из выражения (3.8), которое для большей наглядности целесообразно записать в несколько измененной форме

$$a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) = \frac{MA_0}{2} \cos[(\omega_0 t + \theta_0) + (\Omega t + \gamma)] + \frac{MA_0}{2} \cos[(\omega_0 t + \theta_0) - (\Omega t + \gamma)].$$

Из этого выражения видно, что при любой начальной фазе огибающей γ векторы DC_1 и DC_2, соответствующие колебаниям верхней и нижней боковых частот, занимают симметричное относительно вектора OD положение, причем векторы колебаний боковых частот образуют с вектором несущего колебания углы, равные $\pm(\Omega t + \gamma)$. Равнодействующий вектор DF, являющийся геометрической суммой векторов DC_1 и DC_2 и называемый вектором модуляции, всегда располагается на линии OD, вследствие чего сумму всех трех колебаний — несущей и двух боковых частот — можно рассматривать как колебание с постоянными начальной фазой и частотой, но с модулированной амплитудой.

Попутно заметим, что если в результате прохождения через электрические цепи нарушается равенство амплитуд колебаний боковых частот или симметрия их фаз относительно фазы несущего колебания, то возникает качание вектора, представляющего результирующее колебание, относительно направления OD. Это равносильно возникновению паразитной ФМ.

Остановимся на вопросе о фазе огибающей амплитуд при чисто амплитудной модуляции. Допустим, что начальная фаза высокочастотного колебания $\theta_0 = 90^\circ$. Тогда векторная диаграмма примет вид, показанный на рис. 3.5. Если при $\Omega t = 0$ векторы боковых частот DC_1 и DC_2 направлены вверх (положение I на рис. 3.6), то огибающая амплитуд проходит в этот момент через свое максимальное значение $A_0(1 + M)$. Этот случай соответствует начальной фазе огибающей $\gamma = 0$ [см. (3.6)], а уравнение огибающей будет

$$A(t) = A_0(1 + M \cos \Omega t).$$

Если же в момент $\Omega t = 0$ векторы DC_1 и DC_2 занимают горизонтальное положение, то огибающая проходит через значение, равное A_0. В этом случае начальная фаза огибающей $\gamma = -\pi/2$ и уравнение для огибающей будет

$$A(t) = A_0(1 + M \sin \Omega t).$$

Положение векторов боковых частот DC_1 и DC_2 при $\Omega t = \pi/2$, π и $3\pi/2$ для $\gamma = 0$ обозначено на рис. 3.6 соответственно цифрами II, III и IV.

Спектральная диаграмма колебания при тональной модуляции показана на рис. 3.7. Ширина спектра в этом случае равна удвоенной частоте мо-

дуляции 2Ω, а амплитуды колебаний боковых частот не могут превышать половины амплитуды немодулированного колебания (при $M \leqslant 1$).

Аналогичные результаты можно получить при модуляции любым сложным сигналом. Картину образования спектра амплитудно-модулированного колебания проще всего пояснить сначала на примере, когда модулирующее сообщение $s(t)$ является суммой колебаний двух тонов:

$$s(t) = S_1 \cos \Omega_1 t + S_2 \cos \Omega_2 t.$$

По аналогии с выражением (3.5) получаем

$$A(t) = A_0 + \Delta A_{m_1} \cos \Omega_1 t + \Delta A_{m_2} \cos \Omega_2 t = A_0 (1 + M_1 \cos \Omega_1 t + M_2 \cos \Omega_2 t).$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.4) и используя тригонометрические преобразования, аналогичные тем, которые были проведены при получении уравнения (3.8), приходим к следующему результату (начальные фазы несущего и модулирующих колебаний здесь для упрощения опущены):

$$a(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{M_1 A_0}{2} \cos (\omega_0 + \Omega_1) t + \frac{M_1 A_0}{2} \cos (\omega_0 - \Omega_1) t + \frac{M_2 A_0}{2} \cos (\omega_0 + \Omega_2) t + \frac{M_2 A_0}{2} \cos (\omega_0 - \Omega_2) t.$$

Из полученного выражения следует, что каждой из частот Ω_1 и Ω_2 соответствует своя тональная модуляция, сопровождающаяся возникновением пары боковых частот, причем этот процесс является линейным в том смысле, что амплитуды и фазы колебаний боковых частот от различных модулирующих напряжений взаимно независимы (последнее свойство сохраняется при условии, что суммарное изменение огибающей «вниз» не превышает 100 %).

Из приведенного примера нетрудно вывести правило построения спектральной диаграммы амплитудно-модулированного колебания $a(t)$ по заданному спектру модулирующей функции $s(t)$. Пусть последний имеет вид,

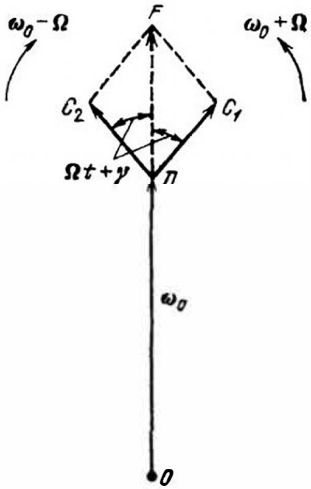


Рис. 3.5. Векторная диаграмма АМ при начальной фазе несущего колебания $\theta = 90°$

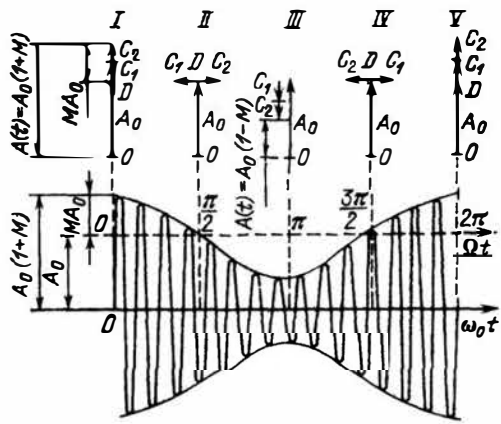


Рис. 3.6. Фазы колебаний боковых частот в различные моменты времени

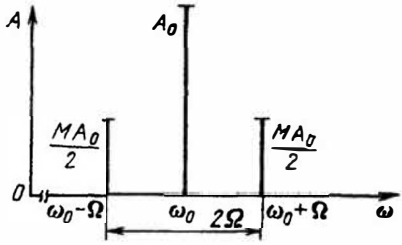


Рис. 3.7. Спектр колебания при тональной (гармонической) АМ

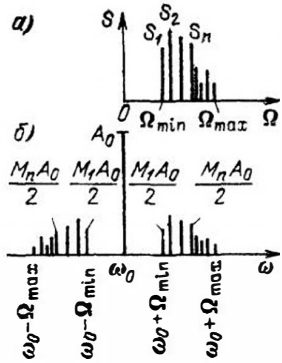


Рис. 3.8. Дискретные спектры:
а) сложной модулирующей функции; *б*) модулированного по амплитуде колебания

представленный на рис. 3.8, *а*. Через S_1, S_2, ..., S_n, ... обозначены амплитуды гармонических колебаний, входящих в спектр сообщения $s(t)$, а через Ω_{min} и Ω_{max} — граничные частоты спектра.

Спектральная диаграмма высокочастотного колебания, промодулированного по амплитуде сообщением $s(t)$, изображена на рис. 3.8, *б*. Коэффициенты модуляции M_1, M_2, ..., M_n пропорциональны амплитудам S_1, S_2, ..., S_n соответствующих тонов, входящих в сложное сообщение $s(t)$.

Перейдем к общему случаю, когда спектр сообщения $s(t)$ не обязательно дискретный. Будем исходить из общего выражения (3.4). Передаваемое сообщение $s(t)$ содержится в законе изменения огибающей $A(t)$. Не предрешая вида функции $s(t)$, составляем выражение для спектральной плотности $S_a(\omega)$ модулированного по амплитуде колебания $a(t)$, рассматриваемого как произведение огибающей $A(t)$ на гармоническое колебание $\cos(\omega_0 t + \theta_0)$.

Основываясь на соотношении (2.58), в котором положим $s(t) = A(t)$, получаем

$$S_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t)\cos(\omega_0 t + \theta_0)\, e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} e^{i\theta_0} S_A(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-i\theta_0} S_A(\omega + \omega_0). \qquad (3.9)$$

В этом выражении S_A обозначает спектральную плотность огибающей, т. е. модулирующей функции.

Следует подчеркнуть, что спектр медленно меняющейся функции времени $A(t)$ концентрируется в области относительно низких частот. Поэтому функция $S_A(\omega - \omega_0)$ существенно отличается от нуля лишь при частотах ω, близких к ω_0, т. е. когда разность $\omega - \omega_0 = \Omega$ относительно мала. Аналогично слагаемое $S_A(\omega + \omega_0)$ существует при частотах, близких к $-\omega_0$.

Таким образом, спектральная плотность модулированного колебания $S_a(\omega)$ образует два всплеска: вблизи $\omega = \omega_0$ и вблизи $\omega = -\omega_0$. Поэтому для узкополосного сигнала можно считать, что в области положительных частот

$$S_a(\omega) \approx \tfrac{1}{2} e^{i\theta_0} S_A(\omega - \omega_0), \qquad (3.10)$$

а в области отрицательных частот

$$S_a(\omega) \approx \tfrac{1}{2} e^{-i\theta_0} S_A(\omega + \omega_0). \qquad (3.10')$$

Поясним правило построения спектра $S_a(\omega)$ на следующем примере. Пусть огибающая высокочастотного колебания имеет вид

$$A(t) = A_0 [1 + k_{ам}\, s(t)], \tag{3.11}$$

где $s(t)$ — передаваемое сообщение, имеющее спектральную плотность $S(\Omega)$, а коэффициент $k_{ам}$ имеет тот же смысл, что и в выражении (3.5)[1].

Спектральная плотность огибающей $A(t)$ изображена на рис. 3.9, *а*. Дискретная часть этого спектра, равная $2\pi A_0 \delta(\Omega)$, соответствует постоянной величине A_0, а сплошная часть $k_{ам} A_0 S(\Omega)$ — передаваемому сообщению $s(t)$.

Спектральная плотность $S_a(\omega)$ модулированного колебания $a(t)$ показана на рис. 3.9, *б*. В данном случае дискретные составляющие $\pi A_0 \delta(\omega \mp \omega_0)$ отображают несущее колебание $A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$, а сплошной спектр — колебания боковых частот модуляции.

Если радиосигнал не содержит несущего колебания (с конечной амплитудой), например, при передаче одиночного радиоимпульса, дискретная часть в спектре отсутствует.

Рассмотрим спектр прямоугольного радиоимпульса (рис. 3.10, *б*), определяемого выражением

$$a(t) = \begin{cases} k_{ам}\, A_0\, B \cos \omega_0 t & \text{при } -\tau_и/2 < t \quad \tau_и/2, \\ 0 & \text{при } t < -\tau_и/2 \text{ и } t > \tau_и/2. \end{cases} \tag{3.12}$$

В данном примере под сообщением $s(t)$ следует подразумевать видеоимпульс (рис. 3.10, *а*). Спектральная плотность подобного сообщения [см. (2.68)]

$$S(\Omega) = B\, \frac{\sin(\Omega\tau_и/2)}{\Omega\tau_и/2}. \tag{3.13}$$

Огибающая амплитуд колебания $a(t)$

$$A(t) = k_{ам}\, A_0\, s(t),$$

а спектральная плотность этой огибающей

$$S_A(\Omega) = k_{ам}\, A_0\, S(\Omega) = k_{ам}\, A_0\, B\, \frac{\sin \Omega\tau_и/2}{\Omega\tau_и/2}.$$

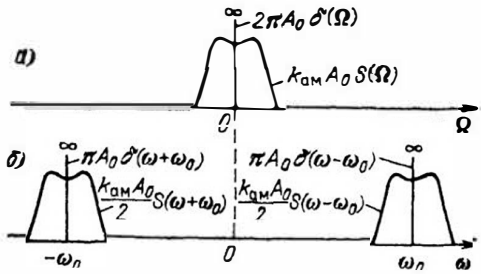


Рис. 3.9. Спектральные плотности
а) огибающей; *б*) амплитудно-модулированного колебания

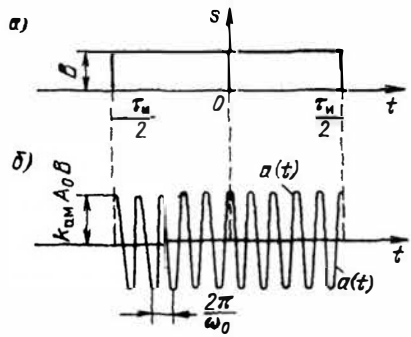


Рис. 3.10. Импульс прямоугольной формы (*а*) и тот же импульс с высокочастотным заполнением ω_0 (*б*)

[1] Как отмечалось в сноске на с. 72, текущая частота спектра модулирующей функции обозначается через Ω.

Так как в данном случае $\theta_0 = 0$ (рис. 3.10, *б*), то по формуле (3.9)

$$S_a(\omega) = \frac{k_{ам} A_0 B}{2}\left[\frac{\sin\frac{(\omega-\omega_0)\tau_и}{2}}{\frac{(\omega-\omega_0)\tau_и}{2}} + \frac{\sin\frac{(\omega+\omega_0)\tau_и}{2}}{\frac{(\omega+\omega_0)\tau_и}{2}}\right]. \quad (3.14)$$

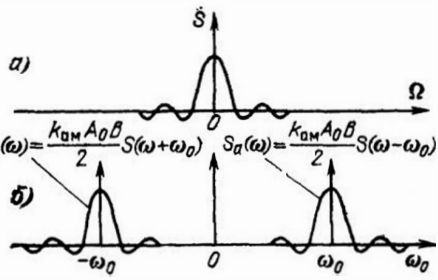


Рис. 3.11. Спектральные плотности функций, представленных на рис. 3.10

Графики спектральных плотностей модулирующей функции $s(t)$ и радиоимпульса $a(t)$ изображены на рис. 3.11, *а* и *б*.

3.4. УГЛОВАЯ МОДУЛЯЦИЯ. ФАЗА И МГНОВЕННАЯ ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЯ

Для простого гармонического колебания

$$a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) = A_0 \cos\psi(t)$$

набег фазы за какой-либо конечный промежуток времени от $t = t_1$ до $t = t_2$ равен

$$\psi(t_2) - \psi(t_1) = (\omega_0 t_2 + \theta_0) - (\omega_0 t_1 + \theta_0) = \omega_0 (t_2 - t_1). \quad (3.15)$$

Отсюда видно, что при постоянной угловой частоте набег фазы за какой-либо промежуток времени пропорционален длительности этого промежутка.

С другой стороны, если известно, что набег фазы за время $t_2 - t_1$ равен $\psi(t_2) - \psi(t_1)$, то угловую частоту можно определить как отношение

$$\omega_0 = |\psi(t_2) - \psi(t_1)|/(t_2 - t_1), \quad (3.16)$$

если, конечно, имеется уверенность, что в течение рассматриваемого промежутка времени частота сохраняла постоянное значение.

Из (3.16) видно, что угловая частота есть не что иное, как *скорость изменения фазы колебания*.

Переходя к сложному колебанию, частота которого может изменяться во времени, равенства (3.15), (3.16) необходимо заменить интегральным и дифференциальным соотношениями

$$\psi(t_2) - \psi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t)\, dt, \quad (3.17)$$

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}. \quad (3.18)$$

В этих выражениях $\omega(t) = 2\pi f(t)$ — мгновенная угловая частота колебания; $f(t)$ — мгновенная частота.

Согласно выражениям (3.17), (3.18) полную фазу высокочастотного колебания в момент t можно определить как

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(t)\, dt + \theta_0, \quad (3.19)$$

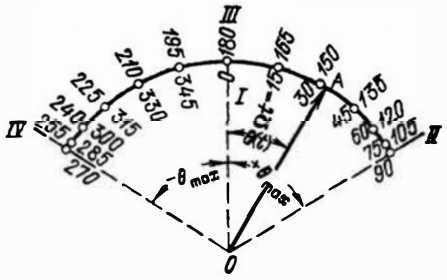


Рис. 3.12. Представление высокочастотного колебания при угловой модуляции в виде качающегося вектора

где первое слагаемое в правой части определяет набег фазы за время от начала отсчета до рассматриваемого момента t; θ_0 — начальная фаза колебания (в момент $t = 0$).

При таком подходе фазу $\psi(t) = \omega_0 t + \theta(t)$, фигурирующую в выражении (3.1), следует заменить на $\psi(t) = \omega_0 t + \theta(t) + \theta_0$.

Итак, общее выражение для высокочастотного колебания, амплитуда которого постоянна, т. е. $A(t) = A_0$, а аргумент $\psi(t)$ модулирован, можно представить в форме

$$a(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \theta(t) + \theta_0]. \tag{3.20}$$

Соотношения (3.18), (3.19), устанавливающие связь между изменениями частоты и фазы, указывают на общность двух разновидностей угловой модуляции — частотной и фазовой.

Поясним соотношения (3.18)—(3.20) на примере простейшей гармонической ЧМ, когда мгновенная частота колебания определяется выражением

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_д \cos \Omega t, \tag{3.21}$$

где $\omega_д = 2\pi f_д$ представляет собой амплитуду частотного отклонения. Для краткости $\omega_д$ в дальнейшем будем называть *девиацией частоты* или просто *девиацией*. Через ω_0 и Ω, как и при АМ, обозначены несущая и модулирующая частоты.

Составим выражение для мгновенного значения колебания (тока или напряжения), частота которого изменяется по закону (3.21), а амплитуда постоянна.

Подставляя в (3.19) $\omega(t)$ из уравнения (3.21), получаем

$$\psi(t) = \int_0^t (\omega_0 + \omega_д \cos \Omega t)\, dt + \theta_0.$$

Выполнив интегрирование, найдем

$$\psi(t) = \omega_0 t + (\omega_д/\Omega) \sin \Omega t + \theta_0. \tag{3.22}$$

Таким образом,

$$a(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + (\omega_д/\Omega) \sin \Omega t + \theta_0]. \tag{3.23}$$

Фаза колебания $a(t)$ наряду с линейно-возрастающим слагаемым $\omega_0 t$ содержит еще периодическое слагаемое $(\omega_д/\Omega) \sin \Omega t$. Это позволяет рассматривать $a(t)$ как колебание, *модулированное по фазе*. Закон этой модуляции является интегральным по отношению к закону изменения частоты. Именно модуляция частоты по закону $\omega_д \cos \Omega t$ приводит к модуляции фазы по закону $(\omega_д/\Omega) \sin \Omega t$. Амплитуду изменения фазы

$$\theta_{max} = \omega_д/\Omega = m \tag{3.24}$$

часто называют *индексом угловой модуляции*.

Заметим, что индекс модуляции совершенно не зависит от средней (немодулированной) частоты ω_0, а определяется исключительно девиацией $\omega_д$ и модулирующей частотой Ω.

Рассмотрим теперь противоположный случай, когда стабильное по частоте и фазе колебание пропускается через устройство, осуществляющее

периодическую модуляцию фазы по закону $\theta(t) = \theta_{max} \sin \Omega t$, так что колебание на выходе устройства имеет вид

$$a(t) = A_0 \cos [\omega_0 t + \theta_{max} \sin \Omega t + \theta_0]. \qquad (3.23')$$

Какова частота этого колебания? Используя выражение (3.18), находим

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} (\omega_0 t + \theta_{max} \sin \Omega t + \theta_0) = \omega_0 + \theta_{max} \Omega \cos \Omega t. \qquad (3.21')$$

Учитывая соотношение (3.24), приходим к выводу, что $\theta_{max}\Omega = \omega_д$. Таким образом, гармоническая модуляция фазы с индексом θ_{max} эквивалентна частотной модуляции с девиацией $\omega_д = \theta_{max}\Omega$.

Из приведенного примера видно, что при гармонической угловой модуляции по характеру колебания нельзя заключить, с какой модуляцией мы имеем дело — с частотной или фазовой. В обоих случаях вектор OA, изображающий на векторной диаграмме модулированное колебание, качается относительно своего исходного положения таким образом, что угол θ (рис. 3.12) изменяется во времени по закону $\theta = \theta_{max} \sin \Omega t$ при фазовой модуляции, $\theta = (\omega_д/\Omega) \sin \Omega t$ при частотной модуляции (когда $\Delta\omega = \omega_д \cos \Omega t$). Цифрами I, II, III и IV отмечено положение вектора OA при $\Omega t = 0$, $\pi/2$, π и $3\pi/2$.

Иное положение при негармоническом модулирующем сигнале. В этом случае вид модуляции — частотной или фазовой — можно установить непосредственно по характеру изменения частоты и фазы во времени.

Покажем это на примере пилообразного модулирующего сигнала $s(t)$ (рис. 3.13, *а* и *г*). Очевидно, что пилообразное изменение $\omega(t)$ (рис. 3.13, *б*),

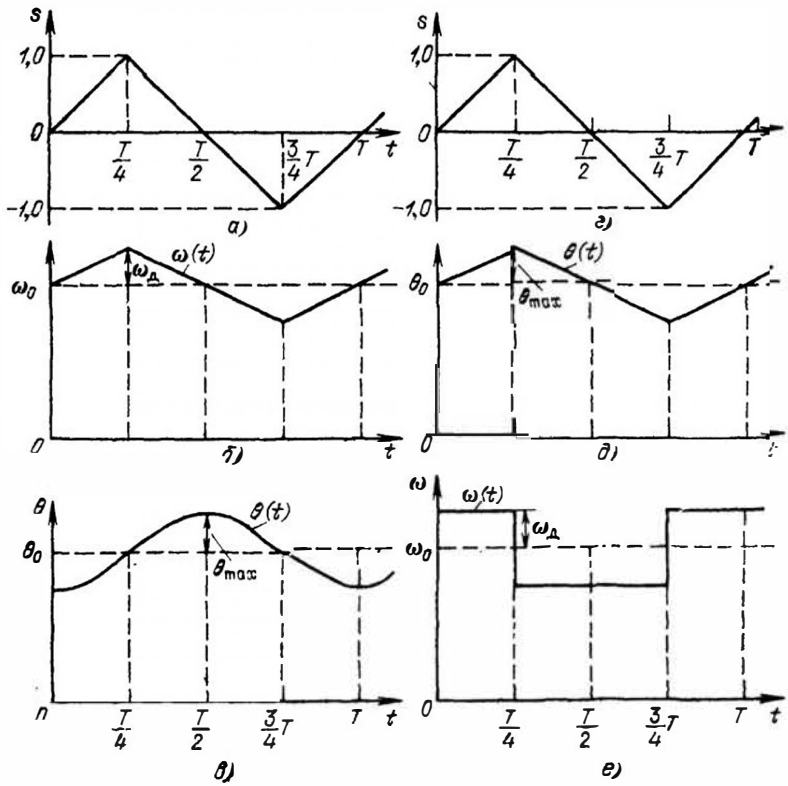


Рис. 3.13. Сравнение функций $\omega(t)$ и $\theta(t)$ при ЧМ и ФМ при пилообразном модулирующем сигнале

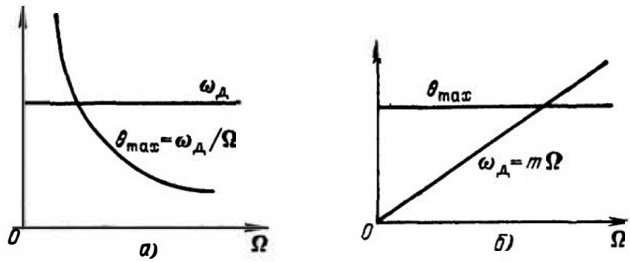


Рис. 3.14. Зависимость индекса θ_{max} и девиации $\omega_д$ от модулирующей частоты при ЧМ (*а*) и ФМ (*б*)

по форме совпадающее с $s(t)$, свидетельствует о наличии ЧМ, а такое же изменение $\theta(t)$ (рис. 3.13, *д*) — о наличии ФМ. Ясно также, что скачкообразное изменение $\omega(t)$, совпадающее по форме с производной сигнала $s'(t)$ (рис. 3.13, *е*), указывает на ФМ.

При гармоническом модулирующем сигнале различие между ЧМ и ФМ можно выявить, только *изменяя частоту модуляции.*

При ЧМ девиация $\omega_д$ *пропорциональна амплитуде модулирующего напряжения и не зависит от частоты модуляции* Ω.

При ФМ величина θ_{max} *пропорциональна амплитуде модулирующего напряжения и не зависит от частоты модуляции* Ω.

Эти положения поясняются рис. 3.14, на котором показаны частотные характеристики величин $\omega_д$ и θ_{max} при частотной и фазовой модуляциях. В обоих случаях предполагается, что на вход модулятора подается модулирующее напряжение с неизменной амплитудой U, а частота Ω изменяется от Ω_{min} до Ω_{max}.

При ЧМ $\omega_д$, зависящая, как указывалось выше, только от амплитуды U, будет постоянной величиной, а индекс модуляции $m = \omega_д/\Omega = \theta_{max}$ с увеличением частоты будет убывать (рис. 3.14, *а*). При ФМ m не зависит от Ω, а $\omega_д = \theta_{max}\Omega = m\Omega$ изменяется пропорционально частоте модуляции (рис. 3.14, *б*).

Кроме структуры колебания (при модуляции сложным сигналом) частотная и фазовая модуляции различаются и способом осуществления. При ЧМ обычно применяется прямое воздействие на частоту колебаний генератора. При ФМ генератор дает стабильную частоту, а фаза колебания модулируется в одном из последующих элементов устройства.

3.5. СПЕКТР КОЛЕБАНИЯ ПРИ УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИИ. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть задано колебание

$$a(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \theta(t)], \tag{3.25}$$

о котором известно, что передаваемое сообщение $s(t)$ заложено в функцию $\theta(t)$. Если колебание $a(t)$ получено с помощью ФМ, то $\theta(t)$ и $s(t)$ полностью совпадают по форме и отличаются лишь постоянным коэффициентом. При этом, очевидно, с точностью до постоянного коэффициента совпадают и спектры функций $\theta(t)$ и $s(t)$.

При ЧМ функция $\theta(t)$ является интегралом от передаваемого сообщения $s(t)$. Это вытекает из выражений (3.19) и (3.20). Так как интегрирование является линейным преобразованием, то при ЧМ спектр функции $\theta(t)$ со-

стоит из тех же компонентов, что и спектр сообщения $s(t)$, но с измененными амплитудами и фазами.

Отвлекаясь от способа осуществления угловой модуляции — фазовой или частотной — и считая заданным спектр функции $\theta(t)$, находим спектр модулированного колебания $a(t)$. Для этого выражение (3.25) преобразуем к виду

$$a(t) = A_0 \cos\theta(t) \cos\omega_0 t - A_0 \sin\theta(t) \sin\omega_0 t = a_c(t) - a_s(t). \quad (3.26)$$

Из (3.26) следует, что модулированное по углу колебание можно рассматривать как сумму двух *квадратурных* колебаний: *косинусного* $a_c(t) = A_0 \cos\theta(t) \cos\omega_0 t$ и *синусного* $a_s(t) = A_0 \sin\theta(t) \sin\omega_0 t$, каждое из которых модулировано только по амплитуде; закон АМ для косинусного колебания определяется медленной функцией $\cos\theta(t)$, а синусного — функцией $\sin\theta(t)$. Но в § 3.3 было установлено, что для определения спектра амплитудно-модулированного колебания достаточно сдвинуть на частоту ω_0 спектр огибающей амплитуд. Следовательно, для нахождения спектра колебания $a(t)$, определяемого выражением (3.26), необходимо сначала найти спектры функций $\cos\theta(t)$ и $\sin\theta(t)$, т. е. спектры огибающих квадратурных колебаний. Перенос этих спектров на частоту ω_0 можно затем осуществить таким же образом, как и при обычной АМ.

Из приведенных рассуждений следует, что при одном и том же передаваемом сообщении спектр колебания, модулированного по углу, значительно сложнее, чем спектр модулированного по амплитуде. Действительно, так как $\cos\theta(t)$ и $\sin\theta(t)$ являются нелинейными функциями своего аргумента $\theta(t)$, то спектры этих функций могут существенно отличаться от спектра функции $\theta(t)$; возможно возникновение кратных и комбинационных частот, как это имеет место при обычных нелинейных преобразованиях спектра.

Это обстоятельство, а также наличие двух квадратурных слагаемых показывают, что при угловой модуляции спектр модулированного колебания нельзя получить простым сдвигом спектра сообщения на величину несущей частоты ω_0, как это имеет место при АМ. При угловой модуляции связь между спектрами сообщения и модулированного колебания оказывается более сложной.

3.6. СПЕКТР КОЛЕБАНИЯ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИИ

Используем полученные выше результаты для анализа колебания вида

$$a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + m \sin\Omega t). \quad (3.25')$$

Это выражение совпадает с (3.23) и (3.23′) при модуляции частоты по закону $\omega(t) = \omega_0 + \omega_д \cos\Omega t$. Начальная фаза θ_0, а также начальная фаза модулирующей функции γ опущены для упрощения выкладок. При необходимости они легко могут быть введены в окончательные выражения.

В данном случае $\theta(t) = m \sin\Omega t$. Подставляя $\theta(t)$ в выражение (3.26), получаем

$$a(t) = A_0 \cos(m \sin\Omega t) \cos\omega_0 t - A_0 \sin(m \sin\Omega t) \sin\omega_0 t. \quad (3.27)$$

Учитывая, что множители $\cos(m \sin\Omega t)$ и $\sin(m \sin\Omega t)$ являются периодическими функциями времени, разложим их в ряд Фурье.

В теории бесселевых функций доказываются следующие соотношения:

$$\sin(m \sin\Omega t) = 2J_1(m) \sin\Omega t + 2J_3(m) \sin 3\Omega t + 2J_5(m) \sin 5\Omega t + \ldots, \quad (3.28)$$

$$\cos(m\sin\Omega t) = J_0(m) + 2J_2(m)\cos 2\Omega t + 2J_4(m)\cos 4\Omega t + \ldots, \quad (3.29)$$

$$\sin(m\cos\Omega t) = 2J_1(m)\cos\Omega t - 2J_3(m)\cos 3\Omega t + 2J_5(m)\cos 5\Omega t - \ldots, \quad (3.28')$$

$$\cos(m\cos\Omega t) = J_0(m) - 2J_2(m)\cos 2\Omega t + 2J_4(m)\cos 4\Omega t - \ldots \quad (3.29')$$

Здесь $J_n(m)$ — бесселева функция первого рода n-го порядка от аргумента m.

С помощью соотношений (3.28) и (3.29) уравнение (3.27) можно привести к виду

$$a(t) = A_0[J_0(m)\cos\omega_0 t - 2J_1(m)\sin\Omega t\sin\omega_0 t + 2J_2(m)\cos 2\Omega t\cos\omega_0 t - 2J_3(m)\sin 3\Omega t\sin\omega_0 t + \ldots] \quad (3.30)$$

или в более развернутой форме

$$a(t) = A_0\cos(\omega_0 t + m\sin\Omega t) = A_0\{J_0(m)\cos\omega_0 t + J_1(m)[\cos(\omega_0+\Omega)t - \cos(\omega_0-\Omega)t] + J_2(m)[\cos(\omega_0+2\Omega)t + \cos(\omega_0-2\Omega)t] + J_3(m)[\cos(\omega_0+3\Omega)t - \cos(\omega_0-3\Omega)t] + \ldots\}. \quad (3.31)$$

Таким образом, при частотной и фазовой модуляциях спектр колебания состоит из бесконечного числа боковых частот, расположенных попарно симметрично относительно несущей частоты ω_0 и отличающихся от последней на $n\Omega$, где n — любое целое число. Амплитуда n-й боковой составляющей $A_n = J_n(m)A_0$, где A_0 — амплитуда немодулированного колебания, а m — индекс модуляции. Отсюда следует, что вклад различных боковых частот в суммарную мощность модулированного колебания определяется величиной m.

Рассмотрим режимы угловой модуляции при малых и больших значениях m. Если $m \ll 1$, так что имеют место приближенные равенства

$$\sin(m\sin\Omega t) \approx m\sin\Omega t, \quad \cos(m\sin\Omega t) \approx 1,$$

то выражение (3.27) переходит в следующее:

$$a(t) \approx A_0(\cos\omega_0 t - m\sin\Omega t\sin\omega_0 t) = A_0\left[\cos\omega_0 t + \frac{m}{2}\cos(\omega_0+\Omega)t - \frac{m}{2}\cos(\omega_0-\Omega)t\right]. \quad (3.32)$$

Сравним это уравнение с уравнением для амплитудно-модулированного колебания, у которого модулирующая функция (т. е. передаваемое сообщение) такая же, как и при ЧМ. Так как выражение (3.32) получено из (3.25') для модуляции частоты по закону $\omega(t) = \omega_0 + \omega_д\cos\Omega t$, то для удобства сравнения зададим модуляцию амплитуды по аналогичному закону $A(t) = A_0(1 + M\cos\Omega t)$. Тогда амплитудно-модулированное колебание запишется в форме

$$a_{ам}(t) = A_0(1 + M\cos\Omega t)\cos\omega_0 t = A_0\left[\cos\omega_0 t + \frac{M}{2}\cos(\omega_0+\Omega)t + \frac{M}{2}\cos(\omega_0-\Omega)t\right]. \quad (3.33)$$

Из сравнения (3.32) и (3.33) видно, что при малых значениях m спектр колебания, как и при АМ, состоит из несущей частоты ω_0 и двух боковых частот: верхней $\omega_0 + \Omega$ и нижней $\omega_0 - \Omega$. Единственное отличие заключается в фазировке колебаний боковых частот относительно несущего колеба-

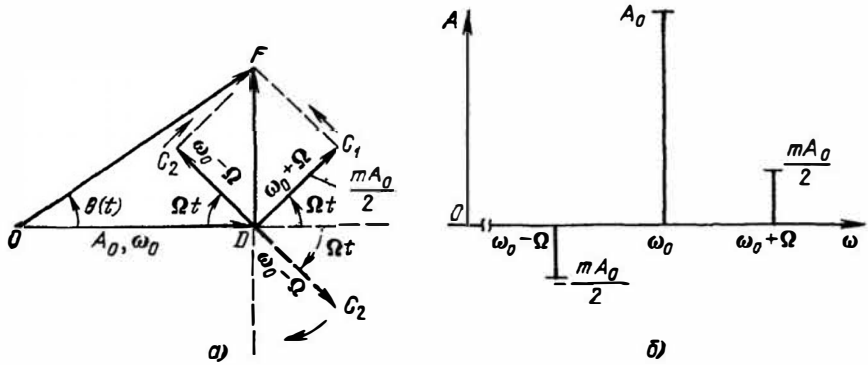


Рис. 3.15. Векторная диаграмма (*а*) и спектр колебания (*б*) при угловой модуляции с индексом $m<1$

ния. При АМ фазы колебаний боковых частот симметричны относительно несущей частоты, а при угловой модуляции фаза колебания нижней боковой частоты сдвинута на 180° [знак минус перед последним слагаемым (3.32)]. Это положение иллюстрируется векторной диаграммой, показанной на рис. 3.15, *а*. Направление вектора DC_2 при АМ обозначено штриховой линией. Изменение направления этого вектора на 180° приводит к тому, что вектор модуляции DF всегда перпендикулярен к направлению вектора OD, изображающего несущее колебание. Вектор OF, изображающий результирующее колебание, изменяется как по фазе, так и по амплитуде; однако при $m = \theta_{max} \ll 1$ амплитудные изменения настолько малы, что ими можно пренебречь и модуляцию можно в первом приближении рассматривать как чисто фазовую.

Спектральная диаграмма для угловой модуляции при $m \ll 1$ показана на рис. 3.15, *б*. Равенство амплитуд колебаний боковых частот сохраняется, а фаза колебания нижней частоты сдвинута на 180°. Амплитуды колебаний боковых частот равны $mA_0/2$, и поэтому в данном случае индекс модуляции m совпадает по значению с коэффициентом M, характеризующим глубину изменения амплитуды при АМ. Заметим, что ширина спектра при $m \ll 1$ равна 2Ω, как и при АМ. Этот результат показывает, что при очень малых девиациях $\omega_д$ (по сравнению с Ω) ширина спектра от $\omega_д$ не зависит.

При увеличении фазового отклонения, т. е. при возрастании m, уравнение (3.32) и диаграмма на рис. 3.15, *а* не дают правильного представления о действительной картине явлений при частотной или фазовой модуляции. Это объясняется тем, что с помощью колебаний несущей частоты и всего лишь одной пары боковых частот невозможно представить колебание, частота или фаза которого изменяется в широких пределах, а амплитуда остается строго постоянной. Для получения правильной картины необходимо учитывать боковые частоты высших порядков в соответствии с выражением (3.31).

При значениях индексов m от 0,5 до 1 приобретает некоторое значение вторая пара боковых частот, ввиду чего ширина спектра должна быть приравнена 4Ω. Далее, при $1<m<2$ приходится учитывать третью и четвертую пары боковых частот и т. д. Спектральные диаграммы для $m = 1$

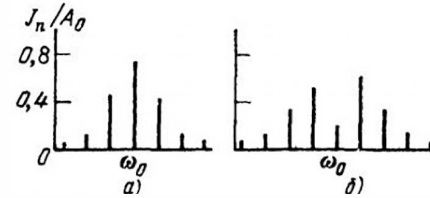


Рис. 3.16. Спектры колебания при угловой модуляции:
а) $m=1$; *б*) $m=2$

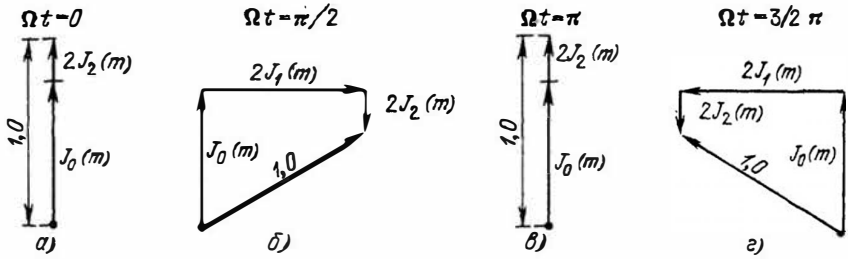


Рис. 3.17. Фазировка колебаний боковых частот в различные моменты времени

и $m = 2$ приведены на рис. 3.16. Фазы колебаний на этих рисунках не учитываются, однако следует иметь в виду, что при нечетных n амплитуды нижних боковых частот следует брать со знаком минус. Амплитуды всех составляющих спектра представлены на этих рисунках в виде вертикальных отрезков, длины которых равны $J_n(m)$, а расстояния от отрезка $J_0(m)$, соответствующего амплитуде колебания несущей частоты, равны $n\Omega$, где Ω — частота модуляции, а n — порядковый номер боковой частоты. Амплитуда результирующего колебания принята за 100 %, т. е. $A_0 = 1$; обозначенные на рисунках величины J_n определяют амплитуды колебаний соответствующих частот в долях от амплитуды результирующего колебания.

Векторные диаграммы для различных моментов Ωt при $m = 1$, построенные по выражению (3.30), представлены на рис. 3.17, *а—г*. При $n > 2$ $J_n(1) \ll 1$, поэтому учтены только J_0, J_1 и J_2.

Рассмотрим теперь большие значения m. Вопрос сводится к выяснению зависимости бесселевой функции $J_n(m)$ от порядкового номера n при больших значениях аргумента m. Оказывается, что при $m \gg 1$ величина $|J_n(m)|$ более или менее равномерна при всех целых значениях $|n|$, меньших, чем аргумент m. При $|n|$, близких к m, $|J_n(m)|$ образует всплеск, а при дальнейшем увеличении $|n|$ функция $|J_n(m)|$ быстро убывает до нуля. Общий характер этой зависимости показан на рис. 3.18 для $m = 100$. Из рисунка видно, что наивысший номер n боковой частоты, которую еще необходимо принимать в расчет, приблизительно равен индексу модуляции m (в данном случае $n = 100$).

Приравнивая это максимальное значение n_{max} величине m, приходим к выводу, что полная ширина спектра частотно-модулированного колебания

$$2\,|n_{max}|\,\Omega \approx 2m\Omega.$$

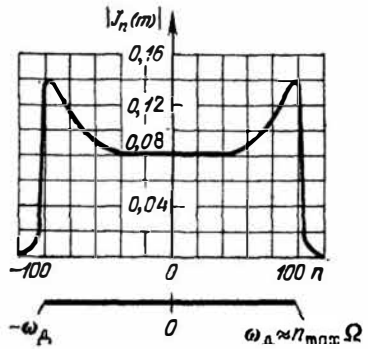


Рис. 3.18. Ширина спектра ЧМ колебания при больших значениях индекса модуляции

Но $m = \omega_д/\Omega$, следовательно, при больших *индексах модуляции ширина спектра модулированного колебания близка к удвоенной девиации частоты*

$$2\,|n_{max}|\,\Omega \approx 2\omega_д. \qquad (3.34)$$

Эта полоса частот обозначена в нижней части рис. 3.18.

Заметим, что в соответствии с определением m [см. (3.24)] выражение «модуляция с малым индексом» эквивалентно выражению «быстрая модуляция», а выражение «модуляция с большим индексом» эквивалентно выражению «медленная модуля-

ция». Поэтому можно сформулировать следующее положение: при *быстрой угловой модуляции* (*когда* $\omega_д \ll \Omega$) *ширина спектра модулированного колебания близка к значению* 2Ω; *при медленной угловой модуляции* (когда $\omega_д \gg \Omega$) *ширина спектра близка к значению* $2\omega_д$.

3.7. СПЕКТР РАДИОИМПУЛЬСА С ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

При модуляции частоты колебания по закону, отличающемуся от гармонического, нахождение спектра колебания усложняется. Выбор наиболее удобного метода анализа зависит от характера модулирующей функции. Поясним один из возможных методов на примере широко распространенного сигнала — импульса с *линейной частотной модуляцией* (ЛЧМ импульса). Подобный сигнал изображен на рис. 3.19, *а*, а закон изменения частоты заполнения импульса — на рис. 3.19, *б*.

Мгновенную частоту заполнения $\omega(t) = 2\pi f(t)$ можно определить выражением

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t, \quad |t| \leqslant T_c/2, \tag{3.35}$$

где

$$|\beta| = 2\omega_д/T_c = 2 \cdot 2\pi f_д/T_c \tag{3.36}$$

есть скорость линейного изменения частоты внутри импульса. Тогда мгновенное значение колебания, представленного на рис. 3.19, *а*, можно записать в виде

$$a(t) = A_0 \cos\left(\int \omega(t)\, dt\right) = A_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}\right), \quad -T_c/2 < t < T_c/2. \tag{3.37}$$

Произведение полной девиации частоты на длительность импульса

$$2f_д T_c = m \tag{3.38}$$

является основным параметром ЛЧМ сигнала. Напомним, что в § 2.15 аналогичный параметр $N = 2f_m T_c$ был назван базой сигнала. Поскольку $f_д$ определяет ширину спектра рассматриваемого сигнала, параметр m можно трактовать как базу ЛЧМ сигнала.

С учетом (3.38) выражение (3.36) можно записать в форме

$$|\beta| = 2\pi m/T_c^2. \tag{3.39}$$

При этом сигнал $a(t)$ определяется при $\beta > 0$ выражением

$$a(t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi m t^2}{T_c^2}\right), \quad -\frac{T_c}{2} < t < \frac{T_c}{2}. \tag{3.40}$$

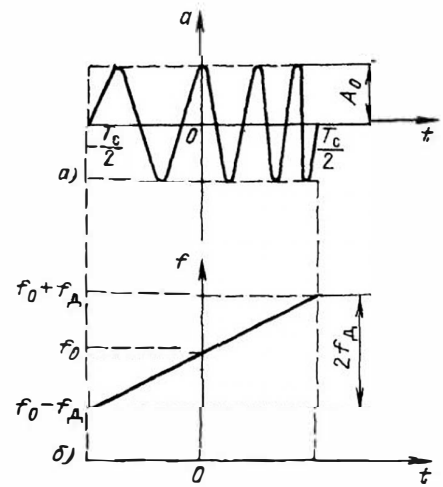


Рис. 3.19. ЛЧМ импульс (*а*) и изменение частоты его заполнения (*б*)

Определим спектральную плотность этого сигнала с помощью общего выражения (2.48):

$$S(\omega) = A_0 \int_{-T_c/2}^{T_c/2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi m t^2}{T_c^2}\right) e^{-i\omega t}\, dt = \frac{A_0}{2} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} \exp\left\{i\left[\frac{\pi m t^2}{T_c^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (\omega - \omega_0) t\right]\right\} dt + \frac{A_0}{2} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} \exp\left\{-i\left[\frac{\pi m}{T_c^2} t^2 + (\omega + \omega_0) t\right]\right\} dt. \quad (3.41)$$

Первое слагаемое в правой части полученного выражения определяет всплеск спектральной плотности вблизи частоты $\omega = \omega_0$, а второе — всплеск вблизи частоты $\omega = -\omega_0$.

При определении $S(\omega)$ в области положительных частот второе слагаемое можно отбросить [см. (3.10)]. В первом же слагаемом показатель степени в подынтегральной функции целесообразно дополнить до квадрата разности (β считаем положительной величиной)

$$\frac{\pi m t^2}{T_c^2} - (\omega - \omega_0) t = \left[\frac{\pi m t^2}{T_c^2} - (\omega - \omega_0) t + d^2\right] - d^2 = \left(\frac{\sqrt{\pi m}\, t}{T_c} - d\right)^2 -$$

$$- d^2, \quad (3.42)$$

где

$$d = (\omega - \omega_0) T_c / 2\sqrt{\pi m}. \quad (3.43)$$

Подставляя (3.42) в (3.41) и переходя к новой переменной

$$y = \sqrt{\pi m}\, t / T_c - d, \quad (3.44)$$

получаем

$$S(\omega) = \frac{A_0}{2} e^{-id^2} \frac{T_c}{\sqrt{\pi m}} \int_{-u_1}^{u_2} e^{iy^2}\, dy, \quad (3.45)$$

где пределы интегрирования определяются выражениями

$$u_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}\left[1 + \frac{(\omega - \omega_0)}{\omega_д}\right], \quad u_2 = \sqrt{\frac{m}{2}}\left[1 - \frac{(\omega - \omega_0)}{\omega_д}\right]. \quad (3.46)$$

Используем известные из математики определения *интегралов Френеля*

$$C(x) = \int_0^x \cos\frac{\pi y^2}{2}\, dy, \quad S(x) = \int_0^x \sin\frac{\pi y^2}{2}\, dy. \quad (3.47)$$

$$C(x) + iS(x) = \int_0^x e^{\frac{i\pi y^2}{2}}\, dy. \quad (3.48)$$

Тогда выражение (3.45) с учетом (3.43) и (3.46) приводится к следующей формуле:

$$S(\omega) = \frac{A_0 T_c}{2\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[-i\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\beta}\right] \{C(u_1) + C(u_2) + i[S(u_1) + S(u_2)]\}. \quad (3.49)$$

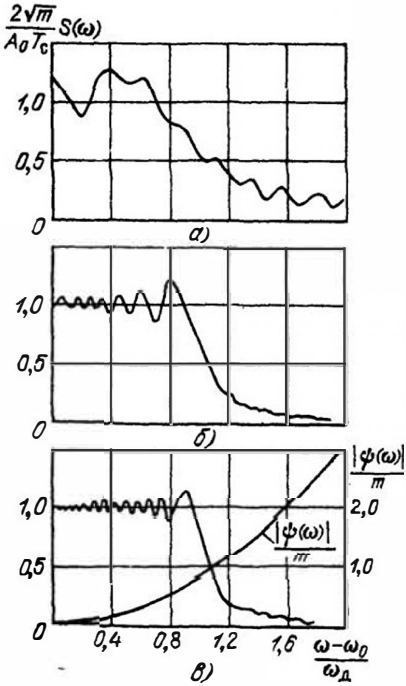


Рис. 3.20. Спектральная плотность ЛЧМ импульса при различных значениях базы $m=2f_{д}T_{с}$:
а) $m=10$; *б*) $m=60$; *в*) $m=100$

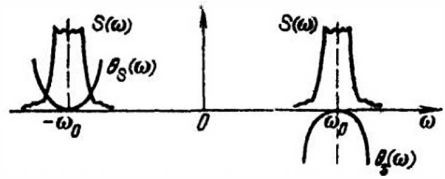


Рис. 3.21. Амплитудно- и фазо-частотная характеристики спектра ЛЧМ импульса на всей оси частот

Из (3.49) следует, что в области $\omega>0$ АЧХ спектральной плотности ЛЧМ сигнала

$$S(\omega)=\frac{A_0T_c}{2\sqrt{m}}\frac{1}{\sqrt{2}}\times$$

$$\times\sqrt{[C(u_1)+C(u_2)]^2+[S(u_1)+S(u_2)]^2}, \qquad (3.50)$$

а ФЧХ

$$\theta_s(\omega)=-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\beta}+\operatorname{arctg}$$

$$\times\frac{S(u_1)+S(u_2)}{C(u_1)+C(u_2)}=-\frac{m}{4}\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_д^2}+$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{S(u_1)+S(u_2)}{C(u_1)+C(u_2)}. \qquad (3.51)$$

Графики зависимости $(2\sqrt{m}/A_0T_c)\,S(\omega)$ от $(\omega-\omega_0)/\omega_д$ (рис. 3.20, *а*, *б* и *в*) показывают, что при больших значениях m форма $S(\omega)$ приближается к прямоугольной и ширина спектра близка к величине $2\omega_д$. При этом характеристика $|\psi(\omega)|$ принимает вид квадратичной параболы (рис. 3.20, *в*). Второе слагаемое в (3.51), стремящееся к постоянной величине $\pi/4$, опущено.

При $\omega=\omega_0$ $u_1=u_2=\sqrt{m}/2$, так что при больших значениях m и $\omega=\omega_0$, когда

$C(u_1)\approx C(u_2)\approx 0{,}5$ и $S(u_1)\approx S(u_2)\approx 0{,}5$,

квадратный корень в выражении (3.50) обращается в $\sqrt{2}$, а $S(\omega_0)\to$ $\to A_0T_c/2\sqrt{m}$.

На рис. 3.21 показана структура АЧХ и ФЧХ спектра ЛЧМ импульса при $\beta>0$ на всей оси частот. В области отрицательных частот ФЧХ по знаку обратна фазовой характеристике спектра при положительных частотах.

При $\beta<0$, т. е. при убывании частоты внутри радиоимпульса, знак минус перед правой частью выражения (3.51) должен быть изменен на обратный.

3.8. СПЕКТР КОЛЕБАНИЯ ПРИ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИИ

Обобщим выражения (3.25), (3.26), заменив в них постоянную амплитуду A_0 функцией времени $A(t)$:

$$a(t)=A(t)\cos[\omega_0t+\theta(t)]=A(t)\cos\theta(t)\cos\omega_0t-A(t)\sin\theta(t)\sin\omega_0t=$$

$$=a_c(t)-a_s(t). \qquad (3.52)$$

Как и в § 3.5, 3.6, определение спектра колебания сводится к нахождению спектров функций $A_c(t) = A(t)\cos\theta(t)$ и $A_s(t) = A(t)\sin\theta(t)$, т. е. огибающих квадратурных колебаний, и к последующему сдвигу этих спектров на величину ω_0.

Обозначим спектральные плотности функций $A_c(t)$ и $A_s(t)$ символами $S_{A_c}(\omega)$ и $S_{A_s}(\omega)$. Тогда

$$S_{A_c}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A_c(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} A(t)\cos\theta(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \qquad (3.53)$$

$$S_{A_s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A_s(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} A(t)\sin\theta(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Спектральная плотность косинусного квадратурного колебания $a_c(t) = A_c(t) \times \cos\omega_0 t$ в соответствии с выражением (2.58) при $\theta_0 = 0$ будет

$$S_{a_c}(\omega) = {}^1/_2 [S_{A_c}(\omega-\omega_0) + S_{A_c}(\omega+\omega_0)]. \qquad (3.54)$$

При определении спектра синусного квадратурного колебания $a_s(t) = A_s(t) \times \sin\omega_0 t$ фазовый угол θ_0 в (2.58) следует приравнять $-90°$. Следовательно,

$$S_{a_s}(\omega) = -\frac{i}{2}[S_{A_s}(\omega-\omega_0) + S_{A_s}(\omega+\omega_0)]. \qquad (3.54')$$

В области положительных частот можно считать

$$S_{A_c}(\omega+\omega_0) \approx 0, \quad S_{A_s}(\omega+\omega_0) \approx 0.$$

Таким образом, окончательно спектральная плотность колебания $a(t) = a_c(t) - a_s(t)$ определяется выражением

$$S_a(\omega) = S_{a_c}(\omega) - S_{a_s}(\omega) = {}^1/_2 \{S_{A_c}(\omega-\omega_0) + iS_{A_s}(\omega-\omega_0)\}, \quad \omega > 0. \qquad (3.55)$$

Переходя к переменной $\Omega = \omega - \omega_0$, получаем

$$S_a(\omega_0+\Omega) = {}^1/_2 [S_{A_c}(\Omega) - iS_{A_s}(\Omega)]. \qquad (3.56)$$

Структура спектра колебания $a(t)$ при амплитудно-частотной модуляции зависит от соотношения и вида функций $A(t)$ и $\theta(t)$.

При АМ спектр колебания $a(t)$ характеризуется полной симметрией амплитуд и фаз колебаний боковых частот относительно несущего колебания; при угловой модуляции [$A(t) = A_0 = \text{const}$] фазы колебаний нижних боковых частот при нечетных n сдвинуты на 180° (см. § 3.6). Одновременная модуляция по амплитуде и углу может при некоторых соотношениях между $A(t)$ и $\theta(t)$ приводить к асимметрии спектра $S_a(\omega_0 + \Omega)$ относительно ω_0 не только по фазам, но и по амплитудам. В частности, если $\theta(t)$ является нечетной функцией t, то при любой функции $A(t)$ спектр колебания $a(t)$ несимметричен.

Пример подобного спектра представлен на рис. 3.22. (По отношению к точке $\omega = 0$ модуль спектральной плотности симметричен при любых условиях.)

Для симметрии спектра $S_a(\omega)$ требуется четность функции $\theta(t)$ при одновременном условии, чтобы функция $A(t)$ была либо четной, либо нечетной функцией t. Если функция $A(t)$ может быть представлена в виде суммы четной и нечетной составляющих, то спектр $S_a(\omega)$ несимметричен даже при четной функции $\theta(s)$. Например, импульс с линейной ЧМ, рассмотренный в § 3.7, имеет симметричный спектр. В этом случае прямоугольная огибающая при надлежащем выборе точек отсчета времени является функцией, четной относительно t, как и функция $\theta(t) = \frac{1}{2}\beta t^2$.

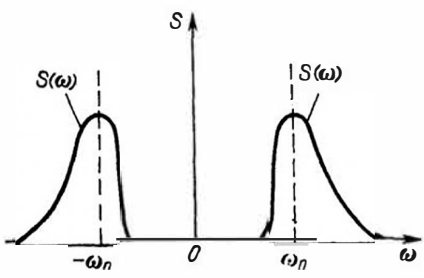


Рис. 3.22. Пример асимметричного спектра при смешанной амплитудной и угловой модуляциях

Наглядное представление о деформации спектра колебания при смешанной модуляции — амплитудной и угловой — можно получить, рассмотрев случай, когда обе модуляции осуществляются гармонической функцией с одной и той же частотой Ω. Для упрощения анализа зададим эту функцию в виде гармонического колебания $\cos\Omega t$ для угловой модуляции и в виде $\cos\Omega t$ или $\sin\Omega t$ для амплитудной.

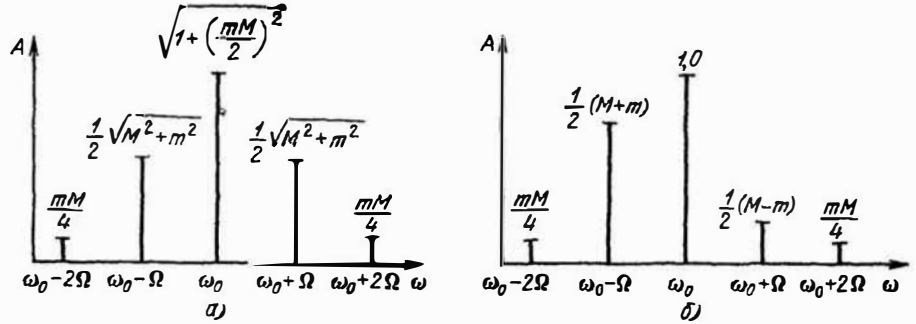


Рис. 3.23. Спектр колебания при одновременной модуляции амплитуды и частоты гармонической функцией

1. Обе функции, как $A(t)$, так и $\theta(t)$, четные относительно t:

$$A(t) = A_0(1 + M\cos\Omega t),\quad \theta(t) = m\cos\Omega t,\quad M \leqslant 1;\quad m \ll 1.$$

Выражение (3.52) принимает вид

$$a(t) = A_0(1 + M\cos\Omega t)\cos[\omega_0 t + m\cos\Omega t].$$

Полагая, как и в § 3.3, справедливыми приближенные равенства $\cos(m\cos\Omega t) \approx 1$, $\sin(m\cos\Omega t) \approx m\cos\Omega t$, приводим это выражение к виду, аналогичному (3.32):

$$a(t) = A_0\left[(1+M\cos\Omega t)\cos\omega_0 t - m\left(\frac{M}{2} + \cos\Omega t + \frac{M}{2}\cos 2\Omega t\right)\sin\omega_0 t\right] =$$

$$= A_0\left\{\cos\omega_0 t + \frac{M}{2}[\cos(\omega_0+\Omega)t + \cos(\omega_0-\Omega)t] - m\left[\frac{M}{2}\sin\omega_0 t + \frac{1}{2}\sin(\omega_0+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\Omega)t + \frac{1}{2}\sin(\omega_0-\Omega)t\right] - \frac{mM}{4}[\sin(\omega_0+2\Omega)t + \sin(\omega_0-2\Omega)t]\right\}.$$

Суммируя квадратурные составляющие $\cos\omega_0 t$ и $(mM/2)\sin\omega_0 t$, получаем для амплитуды результирующего колебания на частоте ω_0 следующее выражение: $\sqrt{1+(mM/2)^2}$ при $A_0 = 1$. Аналогичным образом находим амплитуду $0{,}5\sqrt{M^2+m^2}$ для колебаний с частотами $\omega_0 + \Omega$ и $mM/4$ для частот $\omega_0 \pm 2\Omega$. Спектр колебания $a(t)$, представленный на рис. 3.23, *а*, симметричен.

2. Функция $\theta(t)$ — четная, а $A(t)$ содержит четную и нечетную составляющие:

$$A(t) = A_0(1 + M\sin\Omega t),\quad \theta(t) = m\cos\Omega t,\quad M \leqslant 1;\quad m \ll 1.$$

Выкладки, аналогичные предыдущим, приводят к следующим результатам: амплитуда равна 1 на частоте ω_0; $1/2(M-m)$ на частоте $\omega_0 - \Omega$; $1/2(M+m)$ на частоте $\omega_0 - \Omega$; $mM/4$ на частотах $\omega_0 \pm 2\Omega$. Спектр колебания для рассматриваемого случая представлен на рис. 3.23, *б*. Симметрия спектра нарушается в данном примере из-за неодинаковых амплитуд колебаний верхней и нижней боковых частот.

Асимметрия спектра при амплитудно-угловой модуляции может рассматриваться как показатель неправильной работы устройства, осуществляющего АМ; перекос спектра указывает на то, что полезная АМ сопровождается паразитной угловой модуляцией.

3.9. ОГИБАЮЩАЯ, ФАЗА И ЧАСТОТА УЗКОПОЛОСНОГО СИГНАЛА

Современное состояние радиотехники характеризуется непрерывным совершенствованием способов передачи информации. Изыскиваются новые виды сигналов и новые способы их обработки.

Рассмотренные в предыдущих параграфах модулированные колебания являются лишь простейшими видами радиосигналов. Часто приходится иметь дело с радиосигналами, получаемыми в результате одновременной мо-

дуляции амплитуды и частоты (или фазы) колебания по очень сложному закону.

В любом случае предполагается, что заданный сигнал $a\ (t)$ представляет собой узкополосный процесс. Это означает, что все спектральные составляющие сигнала группируются в относительно узкой по сравнению с некоторой центральной частотой ω_0 полосе.

При представлении подобных сигналов в форме

$$a\ (t) = A\ (t) \cos \psi\ (t) \tag{3.57}$$

возникает неоднозначность в выборе функций $A\ (t)$ и $\psi\ (t)$, так как при любой функции $\psi\ (t)$ всегда можно удовлетворить уравнению (3.57) надлежащим выбором функции $A\ (t)$.

Так, простейшее (гармоническое) колебание

$$a\ (t) = A_0 \cos \omega_0 t \tag{3.58}$$

можно представить в форме

$$a\ (t) = A\ (t) \cos \omega t, \tag{3.58'}$$

где $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$.

В выражении (3.58') огибающая $A\ (t)$ в отличие от A_0 является функцией времени, которую можно определить из условия сохранения заданной функции $a\ (t)$

$$A_0 \cos \omega_0 t = A\ (t) \cos (\omega_0 + \Delta\omega)\ t,$$

откуда

$$A\ (t) = \frac{A_0 \cos \omega_0 t}{\cos (\omega_0 + \Delta\omega)\ t} = \frac{A_0 \cos \omega_0 t}{\cos \Delta\omega t \cos \omega_0 t - \sin \Delta\omega t \sin \omega_0 t} =$$

$$= \frac{A_0}{\cos \Delta\omega t - \sin \Delta\omega t \cdot \operatorname{tg} \omega_0 t}. \tag{3.59}$$

Из этого примера видно, что при нерациональном выборе $\psi\ (t)$ (ωt вместо $\omega_0 t$) очень усложнилось выражение для $A\ (t)$, причем эта новая функция $A\ (t)$ по существу не является «огибающей» в общепринятом смысле, так как она может пересекать кривую $a\ (t)$ (вместо касания в точках, где $a\ (t)$ имеет максимальное значение). Оперирование подобной «огибающей» не имеет смысла, а в некоторых случаях и недопустимо, так как может привести к ошибочным практическим выводам (например, при рассмотрении работы амплитудного детектора).

Неопределенности можно избежать при представлении $A\ (t)$ и $\psi\ (t)$ с помощью следующих соотношений:

$$A\ (t) = \sqrt{a^2\ (t) + a_1^2\ (t)}, \quad \omega\ (t) = \operatorname{arctg} [a_1\ (t)/a\ (t)], \tag{3.60), (3,61}$$

где $a_1\ (t)$ — новая функция, связанная с исходной соотношениями

$$a_1\ (t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\ (\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \quad a\ (t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_1\ (\tau)}{\tau - t}\, d\tau. \tag{3.62), (3 63}$$

Эти соотношения называются преобразованиями Гильберта, а функция $a_1\ (t)$ — функцией, сопряженной (по Гильберту) исходной функции $a\ (t)$.

Для выяснения смысла выражений (3.60), (3.61), а также требования, чтобы $a_1\ (t)$ являлась функцией, сопряженной по Гильберту исходной функ-

ции $a(t)$, рассмотрим сначала некоторые свойства $A(t)$, вытекающие непосредственно из выражения (3.60) и справедливые при любой функции $a_1(t)$.

Прежде всего мы видим, что в точках, где функция $a_1(t)$ равна нулю, имеет место равенство $A(t) = a(t)$.

Дифференцируя (3.60), получаем

$$A\frac{dA}{dt} = a\frac{da}{dt} + a_1\frac{da}{dt}.$$

Отсюда видно, что при $a_1 = 0$, когда $A(t) = a(t)$, имеет место дополнительное равенство

$$\frac{dA}{dt} = \frac{da}{dt}.$$

Следовательно, в точках, в которых $a_1(t) = 0$, кривые $A(t)$ и $a(t)$ имеют общие касательные.

Этих условий, однако, еще недостаточно для того, чтобы можно было рассматривать $A(t)$ как «простейшую» огибающую быстро осциллирующей функции $a(t)$. Необходимо потребовать, чтобы кривая $A(t)$ касалась кривой $a(t)$ в точках, в которых последняя имеет амплитудное или достаточно близкое к нему значение. Иными словами, в точках, где $a_1(t)$ обращается в нуль, функция $a(t)$ должна принимать значения, близкие к амплитудным. Это условие как раз и обеспечивается, если функция $a_1(t)$ является сопряженной по Гильберту функции $a(t)$. Это свойство преобразований Гильберта нагляднее всего иллюстрируется на примере гармонического сигнала.

Пусть $a(t) = \cos \omega_0 t$, $-\infty < t < \infty$. Найдем сопряженную функцию $a_1(t)$. Применяя общее выражение (3.62) и переходя к новой переменной $x = \tau - t$, находим

$$a_1(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega_0\tau}{\tau - t}\,d\tau = -\frac{1}{\pi}\cos\omega_0 t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega_0 x}{x}\,dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sin\omega_0 t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega_0 x}{x}\,dx.$$

Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx = 0$$

(в смысле главного значения) и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \pi.$$

Следовательно, функции $a(t) = \cos \omega_0 t$ соответствует сопряженная функция $a_1(t) = \sin \omega_0 t$, которая проходит через нуль в моменты, когда исходная функция проходит через максимум. Аналогичным образом нетрудно убедиться, что функции $a(t) = \sin \omega_0 t$, $-\infty < t < \infty$, соответствует сопряженная функция $a_1(t) = -\cos \omega_0 t$.

Подставляя $a(t) = \cos \omega_0 t$ и $a_1(t) = \sin \omega_0 t$ в выражение (3.60), получаем для огибающей гармонического колебания общепринятое выражение $A(t) = \sqrt{\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t} = 1$.

Аналогичный результат получается и для $a(t) = \sin \omega_0 t$, $a_1(t) = -\cos \omega_0 t$.

Как видим, выражение (3.60) определяет огибающую в виде линии, касательной к исходной функции в точках ее максимума и в случае гармонического колебания соединяющей два соседних максимума кратчайшим путем. Таким образом, выражение (3.60) определяет «простейшую» огибающую. Это свойство выражения (3.60) сохраняется и для сложного сигнала, если выполняется условие медленности изменения огибающей, т. е. если речь идет об узкополосном сигнале [см. (3.2), (3.3)].

Если исходный сигнал представляет собой сумму спектральных составляющих

$$a(t) = \sum_n (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t), \tag{3.64}$$

то сопряженная функция

$$a_1(t) = \sum_n (a_n \sin \omega_n t - b_n \cos \omega_n t). \tag{3.65}$$

Ряд (3.65) называется рядом, сопряженным ряду (3.64).

Если сигнал $a(t)$ представлен не рядом (3.64), а интегралом Фурье

$$a(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t]\, d\omega, \tag{3.66}$$

то функция $a_1(t)$ может быть представлена в виде интеграла

$$a_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [a(\omega) \sin \omega t - b(\omega) \cos \omega t]\, d\omega, \tag{3.67}$$

сопряженного интегралу (3.66).

Нетрудно установить связь между спектрами функций $a(t)$ и $a_1(t)$. Так как при преобразовании гармонического колебания по Гильберту его амплитуда остается неизменной, то очевидно, что по модулю спектральная плотность $S_1(\omega)$ сопряженной функции $a_1(t)$ не может отличаться от спектральной плотности $S(\omega)$ исходной функции $a(t)$. Фазовая же характеристика спектра $S_1(\omega)$ *отличается* от ФЧХ спектра $S(\omega)$. Из сопоставления выражений (3.66) и (3.67) непосредственно вытекает, что спектральные составляющие функции $a_1(t)$ отстают по фазе на 90° от соответствующих составляющих функции $a(t)$. Следовательно, при $\omega > 0$ спектральные плотности $S_1(\omega)$ и $S(\omega)$ связаны соотношением

$$S_1(\omega) = -iS(\omega), \quad \omega > 0. \tag{3.68}$$

В области отрицательных частот соответственно получается

$$S_1(\omega) = iS(\omega), \quad \omega < 0. \tag{3.69}$$

Вследствие изменения ФЧХ сопряженная функция $a_1(t)$ по своей форме может сильно отличаться от исходной функции $a(t)$.

После того как найдена сопряженная функция $a_1(t)$, можно с помощью выражений (3.60), (3.61) найти огибающую $A(t)$, полную фазу $\psi(t)$ и мгновенную частоту узкополосного сигнала

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\operatorname{arctg} \frac{a_1(t)}{a(t)}\right] = \frac{a(t)\, a_1'(t) - a_1(t)\, a'(t)}{a^2(t) + a_1^2(t)}. \tag{3.70}$$

Выделив в найденной таким образом частоте $\omega(t)$ постоянную часть ω_0, можно написать выражение

$$\psi(t) = \omega_0 t + \theta(t) + \theta_0, \tag{3.71}$$

в котором $\theta(t)$ не содержит слагаемого, линейно зависящего от времени. Тем самым устраняется произвол в выборе «средней частоты» сигнала ω_0 и соответственно функции $\theta(t)$.

В заключение следует отметить, что в некоторых случаях выражения (3.60)—(3.69) используют также и для широкополосных сигналов, когда понятие «огибающая амплитуд» теряет свой обычный смысл. При этом отказываются от требования, чтобы огибающая $A(t)$ касалась кривой $a(t)$ вблизи точек, в которых $a(t)$ имеет амплитудное значение.

Поясним применение преобразования Гильберта для определения огибающей, фазы и мгновенной частоты сигнала на следующем примере.

Пусть задан сигнал в виде суммы двух гармонических колебаний с близкими частотами[1] ω_1 и ω_2

$$a(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t \tag{3.72}$$

и требуется $a(t)$ представить в форме

$$a(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \theta(t) + \theta_0]. \tag{3.73}$$

Расстройка $|\Delta\omega| = |\omega_2 - \omega_1|$ полагается настолько малой по сравнению с $(\omega_2 + \omega_1)/2$, что колебание $a(t)$ можно считать узкополосным.

Что следует в данном случае подразумевать под $A(t)$, ω_0 и $\theta(t)$? Непосредственно из выражения (3.72) трудно выявить структуру огибающей и фазы результирующего колебания $a(t)$. Используем поэтому выражения (3.60), (3.61). Сопряженная функция

$$a_1(t) = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t.$$

Применяя формулу (3.60), находим огибающую сигнала $a(t)$

$$A(t) = \sqrt{(A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t)^2 + (A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t)^2} =$$
$$= A_1 \sqrt{1 + k^2 + 2k \cos \Delta\omega t}, \tag{3.74}$$

где $k = A_2/A_1$; $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, причем для определенности считается, что $k < 1$ и $\Delta\omega > 0$.

Полную фазу суммарного колебания находим по формуле (3.61):

$$\psi(t) = \operatorname{arctg} \frac{a_1(t)}{a(t)} = \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega_1 t + k \sin \omega_2 t}{\cos \omega_1 t + k \cos \omega_2 t}. \tag{3.75}$$

Применяя далее формулу (3.70), после несложных алгебраических и тригонометрических преобразований приходим к следующему выражению для мгновенной частоты:

$$\omega(t) = \omega_1 + \Delta\omega k \frac{k + \cos \Delta\omega t}{1 + k^2 + 2k \cos \Delta\omega t} = \omega_1 + \Delta\omega \eta(t), \tag{3.76}$$

$$\eta(t) = k \frac{k + \cos \Delta\omega t}{1 + k^2 + 2k \cos \Delta\omega t}. \tag{3.77}$$

Так как постоянная составляющая функции $\eta(t)$ равна нулю, то входящие в выражение (3.71) средняя частота ω_0 и функция $\theta(t)$ будут

$$\omega_0 = \omega_1, \quad \theta(t) = \Delta\omega \int_0^t \eta(x)\, dx. \tag{3.78), (3.79}$$

Итак, на основании (3.74), (3.76) и (3.78), (3.79) выражение (3.73) приводится к виду

$$a(t) = A_1 \sqrt{1 + k^2 + 2k \cos \Delta\omega t} \cos \left[\omega_1 t + \Delta\omega \int_0^t \eta(x)\, dx \right], \tag{3.80}$$

где $\eta(t)$ определяется выражением (3.77).

При этом исключаются произвол и неопределенность в выборе огибающей и фазы суммарного колебания.

Графики функции $\eta(t)$, характеризующие изменение частоты, приведены на рис. 3.24 для некоторых значений k.

[1] Для сокращения выкладок положим начальные фазы $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

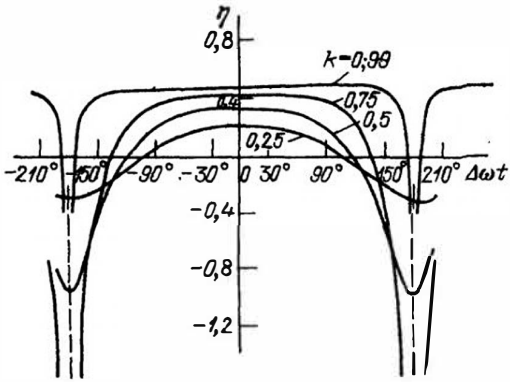


Рис. 3.24. Мгновенная частота колебания, являющегося суммой двух гармонических колебаний

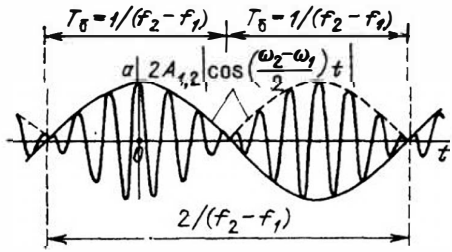


Рис. 3.25. Сумма двух гармонических колебаний с близкими частотами f_1 и f_2 при одинаковых амплитудах ($k = 1$)

При $k \ll 1$, т. е. при наложении слабого колебания $A_2 \cos \omega_2 t$ на сильное $A_1 \cos \omega_1 t$, выражения (3.74)—(3.77) значительно упрощаются:

$$A(t) \approx A(1 + k \cos \Delta\omega t),\ \omega_0 = \omega_1,\ \omega(t) \approx \omega_1 + k\Delta\omega \cos \Delta\omega t,\ \psi(t) \approx \omega_1 t + k \sin \Delta\omega t. \tag{3.81}$$

В этом случае огибающая, частота и фаза суммарного колебания изменяются по гармоническому закону с частотой $|\Delta\omega| = |\omega_2 - \omega_1|$ относительно своих средних значений соответственно A_1, ω_1 и $\omega_1 t$.

При $k = 1$ функция $\eta(t)$ в соответствии с (3.77) принимает постоянное значение

$$\eta(t) = \frac{1 + \cos \Delta\omega t}{2(1 + \cos \Delta\omega t)} = \frac{1}{2} \tag{3.82}$$

на всей оси времени, кроме точек $\Delta\omega t = \pm(\pi, 3\pi, \ldots)$, где $\eta(t) = \infty$. Эти выбросы соответствуют производным скачкообразно изменяющейся фазы при переходах огибающей биения через нуль.

Таким образом, в интервалах между указанными моментами частота суммарного колебания $\omega_1 + \Delta\omega/2 = (\omega_1 + \omega_2)/2$.

К этому результату можно прийти непосредственно из выражения (3.72), которое при $A_1 = A_2$ подстановкой $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega_0$, $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega_0$ легко приводится к виду

$$a(t) = 2A_{1,2} \cos \Delta\omega_0 t \cos \omega_0 t = 2A_{1,2} \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t.$$

График колебания $a(t)$ при $k = 1$ представлен на рис. 3.25.

Период функции $\cos \Delta\omega_0 t = \cos 2\pi \frac{(f_2 - f_1)}{2} t$ равен $2/(f_2 - f_1)$, причем в точках перехода через нуль эта функция, как отмечалось выше, меняет свой знак. Если не учитывать перемену знака, т. е. определять огибающую амплитуд функцией $\left|\cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2} t\right|$, то период биений будет вдвое короче, как показано на рис. 3.25. Поэтому частота биений равна $f_2 - f_1$.

Формулы (3.74)—(3.82) имеют большое прикладное значение, так как в физике и технике часто приходится иметь дело с биениями двух гармонических колебаний.

3.10. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИГНАЛ

В электротехнике при анализе воздействия гармонического колебания (напряжение, ток) на линейную цепь его принято представлять в форме

$$a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) = A_0 \operatorname{Re}[e^{i(\omega_0 t + \theta_0)}] = \operatorname{Re}[\mathbf{A}_0 e^{i\omega_0 t}] \tag{3.83}$$

или

$$a(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0) = A_0 \operatorname{Im}[e^{i(\omega_0 t + \theta_0)}] = \operatorname{Im}[\mathbf{A}_0 e^{i\omega_0 t}], \tag{3.84}$$

где $\mathbf{A}_0 = A_0 e^{i\theta_0}$ — комплексная амплитуда.

Часто символ Re или Im опускают и пишут просто

$$a(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \theta_0)} = \mathbf{A}_0 e^{i\omega_0 t},$$

подразумевая действительную или мнимую часть этого выражения.

Такое представление позволяет использовать преимущества методов теории функций комплексной переменной с последующим возвратом в конце анализа к тригонометрической форме путем отбрасывания мнимой части.

В современной радиотехнике представление колебаний в комплексной форме распространено на негармонические колебания.

Если задан физический сигнал в виде действительной функции $a(t)$, то соответствующий ему комплексный сигнал представляется в форме

$$z_a(t) = a(t) + ia_1(t), \tag{3.85}$$

где $a_1(t)$ — функция, сопряженная по Гильберту сигналу $a(t)$.

Заметим, что и в выражении (3.84) мнимая часть комплексной функции является функцией, сопряженной по Гильберту действительной части.

Главная особенность определенного таким образом комплексного сигнала заключается в том, что его спектральная плотность

$$\mathbf{Z}_a(\omega) = \mathbf{S}_a(\omega) + i\mathbf{S}_{a_1}(\omega) \tag{3.86}$$

содержит только положительные частоты. Действительно, согласно (3.68), (3.69) при $\omega > 0$ $\mathbf{S}_{a_1}(\omega) = -i\mathbf{S}_a(\omega)$, а при $\omega < 0$ $\mathbf{S}_{a_1}(\omega) = i\mathbf{S}_a(\omega)$.

Следовательно,

$$\mathbf{Z}_a(\omega) = \begin{cases} 2\mathbf{S}_a(\omega) & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \tag{3.87}$$

Так, если узкополосному сигналу $a(t)$ соответствует спектральная плотность $\mathbf{S}_a(\omega)$, модуль которой изображен на рис. 3.26 штриховой линией, то сигналу $z_a(t) = a(t) + ia_1(t)$ соответствует спектральная плотность $\mathbf{Z}_a(\omega)$, модуль которой изображен на том же рисунке сплошной линией.

Интеграл Фурье для сигнала $z_a(t)$ принимает следующий вид:

$$z_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathbf{Z}_a(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty 2\mathbf{S}_a(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega, \tag{3.88}$$

где $\mathbf{S}_a(\omega)$ — спектральная плотность исходного (физического) сигнала $a(t)$.

Комплексный сигнал, определяемый выражениями (3.85) и (3.86), называется аналитическим сигналом[1].

---

[1] Смысл термина «аналитический сигнал» заключается в том, что при переходе к переменной $l = x + iy$ функция $z_a(t) = z_a(x + iy)$, определяемая в соответствии с (3.88) интегралом $\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty 2\mathbf{S}_a(\omega) e^{-\omega y} e^{i\omega x}\, d\omega$, является *аналитической* функцией для каждого $y > 0$. Для доказательства определим энергию сигнала $z_a(x + iy)$ с помощью равенства Парсеваля

$$\mathcal{E}_z = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |2S_a(\omega) e^{-\omega y}|^2\, d\omega < 2\mathcal{E}_a.$$

Как видим, множитель $e^{-2\omega y}$ обеспечивает сходимость интеграла при любом $y > 0$, поскольку $\omega > 0$. В случае же действительного сигнала $a(t)$ переход к $a(x + iy)$ приводит к бесконечному возрастанию множителя $e^{-2\omega y}$ в области $\omega < 0$. Иными словами, аналитичность сигнала обусловлена тем, что в области $\omega < 0$ спектральная плотность функции $z_a(t)$ равна нулю.

Пусть задан физический сигнал

$$a(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)] = A(t)\cos\psi(t)$$

и требуется определить соответствующий ему аналитический сигнал $z_a(t)$. Исходя из общего выражения (3.62) для сопряженной функции $a_1(t)$ можно написать

$$z_a(t) = A(t)\cos\psi(t) - \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\tau)\cos\psi(\tau)}{\tau - t}\,dt.$$

Точное определение $a_1(t)$ при сложной функции $A(\tau)\cos\psi(\tau)$ является трудной задачей, которую можно обойти, если исходный сигнал $a(t)$, является достаточно узкополосным процессом. Можно показать, что в этом случае

$$a_1(t) = A(t)\sin\psi(t) = A(t)\sin[\omega_0 t + \theta(t) + \theta_0].$$

Таким образом, аналитический сигнал можно записать в следующем виде:

$$z_a(t) = A(t)\,e^{i\psi(t)} = A(t)\,e^{i[\omega_0 t + \theta(t) + \theta_0]} = \mathbf{A}(t)\,e^{i\omega_0 t}, \qquad (3.89)$$

где

$$\mathbf{A}(t) = A(t)\,e^{i[\theta(t) + \theta_0]} \qquad (3.90)$$

представляет собой *комплексную огибающую* узкополосного сигнала.

Соотношения между $A(t)$, $a(t)$ и $a_1(t)$ иллюстрируются векторной диаграммой на рис. 3.27. Модуль комплексной огибающей, равный $A(t)$ [поскольку $|e^{i[\theta(t)+\theta_0]}| = 1$ при любом законе изменения $\theta(t)$], содержит информацию только об амплитудной модуляции колебания, а фазовый множитель $e^{i\theta(t)}$ — только об угловой модуляции. В целом же произведение $A(t)\,e^{i\theta(t)}$ содержит полную информацию о сигнале $a(t)$ (за исключением несущей частоты ω_0, которая предполагается известной).

Это свойство комплексной огибающей, позволяющее при анализе узкополосных сигналов исключить из рассмотрения частоту ω_0, придает важное значение понятию «аналитический сигнал».

Рассмотрим основные свойства аналитического сигнала и комплексной огибающей.

1. *Произведение аналитического сигнала $z_a(t)$ на сопряженный ему сигнал $z_a^*(t)$ равно квадрату огибающей исходного (физического) сигнала $a(t)$.*

Действительно,

$$z_a(t)\,z_a^*(t) = [a(t) + ia_1(t)][a(t) - ia_1(t)] = a^2(t) + a_1^2(t) = A^2(t). \qquad (3.91)$$

Таким образом, модуль аналитического сигнала $z_a(t)$ равен просто огибающей сигнала $A(t)$.

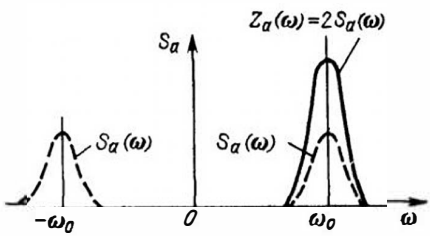


Рис. 3.26. Соотношение между спектрами физического и аналитического сигналов

2. *Спектральная плотность комплексной огибающей $\mathbf{A}(t)$ совпадает со смещенной на ω_0 влево спектральной плотностью аналитического сигнала $z_a(t)$.*

Основываясь на общей формуле (2.48), можно написать

$$\mathbf{Z}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z_a(t)\,e^{-i\omega t}\,dt.$$

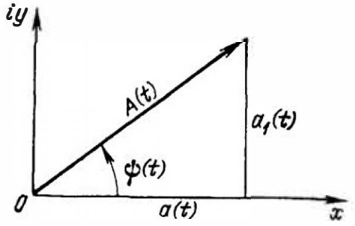


Рис. 3.27. Соотношение между амплитудой аналитического сигнала и функциями $a(t)$, $a_1(t)$

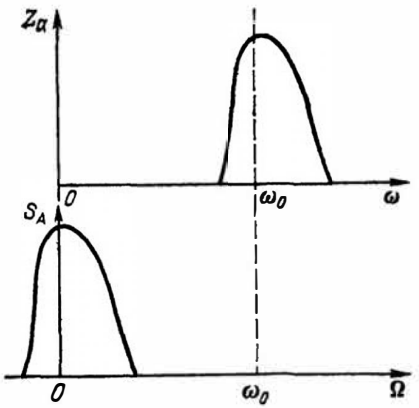


Рис. 3.28. Соотношение между спектрами комплексной огибающей и аналитического сигнала

Подставляя в это выражение $z_a(t) = \mathbf{A}(t)\, e^{i\omega_0 t}$, получаем

$$\mathbf{Z}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(t)\, e^{-i(\omega-\omega_0)t}\, dt = S_A(\omega-\omega_0),\ \omega > 0. \tag{3.92}$$

Это соотношение является обобщением формулы (2.58) на случай комплексной функции времени $\mathbf{A}(t)$, умножаемой на $e^{i\omega_0 t}$ (вместо $\cos\omega_0 t$ в § 2.7, п. 3). Выражение (3.9), выведенное для вещественной огибающей $A(t)$ (при чисто амплитудной модуляции), является частным случаем общего выражения (3.92).

Введя обозначение $\omega - \omega_0 = \Omega$, перепишем (3.92) в несколько иной форме

$$\mathbf{Z}_a(\omega_0+\Omega) = S_A(\Omega) = 2S_a(\omega_0+\Omega) \tag{3.93}$$

[см. (3.87)].

Соотношение между спектрами $S_A(\Omega)$ и $\mathbf{Z}_a(\omega_0+\Omega)$ иллюстрирует рис. 3.28. Особо следует отметить, что спектр $S_A(\Omega)$ комплексной огибающей $\mathbf{A}(t)$ не обязательно симметричен относительно нулевой частоты (см. рис. 3.28). Если спектр $S_a(\omega)$ физического колебания $a(t)$ несимметричен относительно $\omega = \omega_0$, как это может иметь место, например, при амплитудно-угловой модуляции (см. § 3.8), то и функция $\mathbf{Z}_a(\omega) = 2S_a(\omega)$, $\omega > 0$, несимметрична: после сдвига $\mathbf{Z}_a(\omega)$ на величину ω_0 влево спектр комплексной огибающей $S_A(\Omega)$ будет несимметричен относительно частоты $\Omega = 0$. В любом случае функция $S_A(\Omega)$ отлична от нуля в области частот $\Omega < 0$. Следовательно, *комплексная функция* $\mathbf{A}(t)$ *не является аналитическим сигналом*. Это объясняется тем, что действительная и мнимая части $\mathbf{A}(t)$ не являются функциями, сопряженными по Гильберту.

3. *Корреляционная функция аналитического сигнала, определяемая общим выражением*

$$B_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z_a(t)\, z_a^*(t+\tau)\, dt, \tag{3.94}$$

является *комплексной функцией*.

Действительно, выразив $B_z(\tau)$ через модуль спектральной плотности сигнала $S_a(\omega)$ с помощью выражения вида (2.136), получим

$$B_z(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty Z_a^2(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = 4\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty S_a^2(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega =$$

$$= 4\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty S_a^2(\omega)\cos\omega\tau d\omega + i4\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty S_a^2(\omega)\sin\omega\tau d\omega. \qquad (3.95)$$

Действительная часть этого выражения есть не что иное, как удвоенная корреляционная функция исходного физического колебания $a(t)$, т. е. $2B_a(\tau)$, а мнимая часть учитывает взаимную корреляцию колебаний $a(t)$ и $a_1(t)$.

Для раскрытия смысла мнимой части выражения (3.95) вернемся к общему определению корреляционной функции (3.94) и запишем ее в форме

$$B_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [a(t) + ia_1(t)]\,[a(t+\tau) - ia_1(t+\tau)]\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\, a(t+\tau)\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} a_1(t)\, a_1(t+\tau)\, dt + i\left[\int_{-\infty}^{\infty} a_1(t)\, a(t+\tau)\, dt - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\, a_1(t+\tau)\, dt\right] = B_a(\tau) + B_{a_1}(\tau) + i\,[B_{a_1 a}(\tau) - B_{aa_1}(\tau)]. \qquad (3.95')$$

В § 2.19 было установлено, что корреляционная функция действительного сигнала зависит только от модуля спектральной плотности. Так как модули спектров функций $a(t)$ и $a_1(t)$ одинаковы (см. § 3.9), то первые два интеграла в (3.95′) равны и в сумме дают $2B_a(\tau)$. Следовательно, мнимые части в выражениях (3.95), (3.95′) совпадают и можно написать следующее равенство:

$$B_{a_1 a}(\tau) - B_{aa_1}(\tau) = 4\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty S_a^2(\omega)\sin\omega\tau d\omega.$$

Но в соответствии с (2.137) $B_{aa_1}(\tau) = B_{a_1 a}(-\tau)$, так что левую часть можно записать в форме $B_{a_1 a}(\tau) - B_{a_1 a}(-\tau)$. Далее, правая часть, содержащая под интегралом множитель $\sin\omega\tau$, является нечетной функцией τ, откуда следует, что и разность $B_{a_1 a}(\tau) - B_{aa_1}(\tau)$ является нечетной функцией. Это возможно только при нечетности функции $B_{a_1 a}(\tau)$. Таким образом, приходим к равенству $B_{a_1 a}(\tau) - B_{aa_1}(\tau) = 2B_{a_1 a}(\tau)$ и соответственно к соотношению

$$B_{a_1 a}(\tau) = 2\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty S_a^2(\omega)\sin\omega\tau d\tau.$$

Формулу (3.95′) теперь можно представить в виде

$$B_z(\tau) = 2B_a(\tau) + i2B_{a_1 a}(\tau). \qquad (3.96)$$

Итак, $\mathrm{Re}\,[B_z(\tau)] = 2B_a(\tau)$, откуда вытекает полезное соотношение между корреляционной функцией $B_a(\tau)$ исходного действительного сигнала и корреляционной функцией $B_z(\tau)$ аналитического сигнала

$$B_a(\tau) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[B_z(\tau)]. \qquad (3.97)$$

4. *Корреляционные функции аналитического сигнала и комплексной огибающей этого сигнала связаны между собой соотношением*

$$B_z(\tau) = e^{-i\omega_0\tau}\, B_A(\tau). \qquad (3.98)$$

Действительно, подставив в (3.94) $z_a(t) = \mathbf{A}(t)\, e^{i\omega_0 t}$ и $z_a^*(t) = \mathbf{A}^*(t) \times e^{-i\omega_0 t}$, получим важное соотношение

$$B_z(\tau) = e^{-i\omega_0\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(t)\, \mathbf{A}^*(t + \tau)\, dt, \qquad (3.99)$$

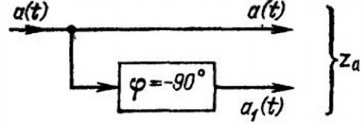


Рис. 3.29. Формирование аналитического сигнала, соответствующего заданному вещественному сигналу $a(t)$

в котором интеграл есть *корреляционная функция комплексной огибающей* $\mathbf{A}(t)$. Поэтому выражение (3.97) можно записать в форме

$$B_a(\tau) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[e^{-i\omega_0\tau} B_A(\tau)] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[e^{-i\omega_0\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(t)\, \mathbf{A}^*(t+\tau)dt\right]. \qquad (3.97')$$

В частности, при $\tau = 0$ получаем

$$B_a(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(t)\, dt = \frac{1}{2} B_z(0). \qquad (3.100)$$

Из этого выражения видно, что, поскольку $B_a(0) = Э$, *энергия аналитического сигнала равна удвоенной энергии исходного действительного сигнала.*

Следует указать, что применение понятия энергии к комплексной функции имеет не только формальный смысл. В гл. 13 будет показано, что в некоторых устройствах обработки сигналов приходится иметь дело с совокупностью двух функций времени, сопряженных по Гильберту, т. е. с аналитическим сигналом как с физическим процессом.

Формирование аналитического сигнала можно пояснить на простой модели, показанной на рис. 3.29. Исходный сигнал $a(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)]$ подается на выход непосредственно по прямому каналу и через фазосдвигающее устройство, обеспечивающее сдвиг на —90° для всех спектральных составляющих узкополосного сигнала $a(t)$. В результате такого сдвига получается колебание $A(t)\cos[\omega_0 + \theta(t) - 90°] = A(t)\sin[\omega_0 t + \theta(t)] = a_1(t)$, сопряженное по Гильберту функции $a(t)$. Следовательно, совокупность $a(t)$ и $a_1(t)$, действующую на выходе, можно трактовать как аналитический сигнал

$$z_a(t) = A(t)\, e^{i\theta(t)}\, e^{i\omega_0 t} = \mathbf{A}(t)\, e^{i\omega_0 t}.$$

В последующих главах будут даны примеры применения понятия «аналитический сигнал» как для упрощения анализа прохождения через радиоцепи сигналов действительных, так и для описания совокупности двух квадратурных сигналов.

3.11. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ МОДУЛИРОВАННОГО КОЛЕБАНИЯ

При нахождении корреляционной функции модулированного колебания $a(t) = A(t)\cos\psi(t)$ будем исходить из условия абсолютной интегрируемости функции $a(t)$ (сигнал с конечной энергией), что позволяет применять определение (см. § 2.18)

$$B_a(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\, a(t+\tau)\, dt. \qquad (3.101)$$

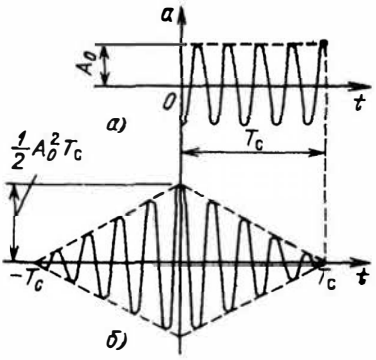


Рис. 3.30. Импульс с высокочастотным заполнением (*а*) и корреляционная функция (*б*)

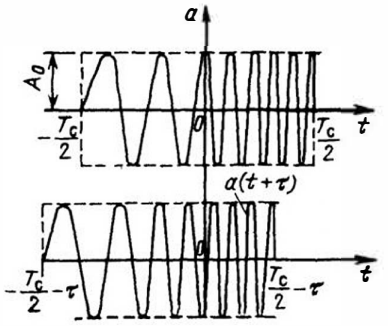


Рис. 3.31. К построению корреляционной функции ЛЧМ импульса

Вычисление интеграла для сложных сигналов требует громоздких выкладок. Задача существенно упрощается при переходе от колебания $a(t)$ к аналитическому сигналу $z_a(t) = \mathbf{A}(t)\, e^{i\omega_0 t}$. Основываясь на соотношениях, выведенных в предыдущем параграфе, рассмотрим сначала чисто амплитудную модуляцию, когда $a(t) = A(t) \cos \omega_0 t$, $\theta(t) = 0$ и, следовательно, $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}^*(t) = A(t)$.

Тогда формула (3.97′) принимает вид

$$B_a(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[e^{-i\omega_0 \tau} \int_{-\infty}^{\infty} A(t)\, A(t+\tau)\, dt \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau \int_{-\infty}^{\infty} A(t)\, A(t+\tau)\, dt. \qquad (3.102)$$

Обозначив, как и в выражении (3.97′), интегральный множитель через $B_A(\tau)$, окончательно получим

$$B_a(\tau) = B_A(\tau)\,(1/2 \cos \omega_0 \tau). \qquad (3.103)$$

Второй множитель $(1/2 \cos \omega_0 \tau)$ есть корреляционная функция гармонического колебания с частотой ω_0 и единичной амплитудой.

Итак, корреляционная функция амплитудно-модулированного радиосигнала равна произведению корреляционных функций огибающей и высокочастотного заполнения.

В качестве примера на рис. 3.30, *а* показан радиоимпульс с прямоугольной огибающей, а на рис. 3.30, *б* — соответствующая этому импульсу корреляционная функция. Следует отметить, что эта функция не зависит от начальной фазы заполнения радиоимпульса, а ее огибающая совпадает с корреляционной функцией прямоугольного видеоимпульса (см. § 2.18, рис. 2.36, *г*).

Для иллюстрации применения общего выражения (3.99) к амплитудно-частотной модуляции найдем корреляционную функцию импульса, изображенного на рис. 3.19, *а*.

При обозначениях формулы (3.37) и рис. 3.19 аналитический сигнал запишется в виде

$$z_a(t) = A_0\, e^{i\beta t^2/2}\, e^{i\omega_0 t}, \quad T_c/2 \leqslant t \leqslant T_c/2. \qquad (3.104)$$

Применяя формулы (3.94) и (3.97′), получаем

$$B_a(\tau) = \frac{A_0^2}{2} \operatorname{Re} \int_{-T_c/2}^{T_c/2-\tau} e^{i[\omega_0 t + \beta t^2/2]} e^{-i[\omega_0 (t+\tau) + \beta (t+\tau)^2/2]}\, dt. \qquad (3.105)$$

Пределы интегрирования взяты с учетом условия одновременного существования функций $a(t)$ и $a(t+\tau)$ (рис. 3.31).

С помощью несложных преобразований выражение (3.105) приводится к виду

$$B_a(\tau) = \begin{cases} \dfrac{A_0^2 \sin\left(\dfrac{\beta T_c}{2}\tau - \dfrac{\beta\tau^2}{2}\right)\cos\omega_0\tau}{\beta\tau} & \text{при } |\tau| \leqslant \dfrac{T_c}{2}, \\ 0 & \text{при } |\tau| > T_c/2. \end{cases} \qquad (3.106)$$

Используя введенный в § 3.7 параметр m [см. (3.38)] и учитывая, что $\beta T_c^2 = 2\omega_д T_c = 2\pi m$, приводим выражение (3.106) к более общему виду

$$B_a(\tau) = \frac{1}{2} A_0^2 T_c \frac{\sin\left[\pi m \dfrac{\tau}{T_c}\left(1 - \dfrac{\tau}{T_c}\right)\right]}{\dfrac{\pi m \tau}{T_c}} \cos\omega_0\tau. \qquad (3.106')$$

Множитель $^1/_2 A_0^2 T_c = B_a(0) = Э$ равен полной энергии рассматриваемого радиоимпульса (как и при импульсе с постоянной частотой заполнения, см. рис. 3.30, *б*).

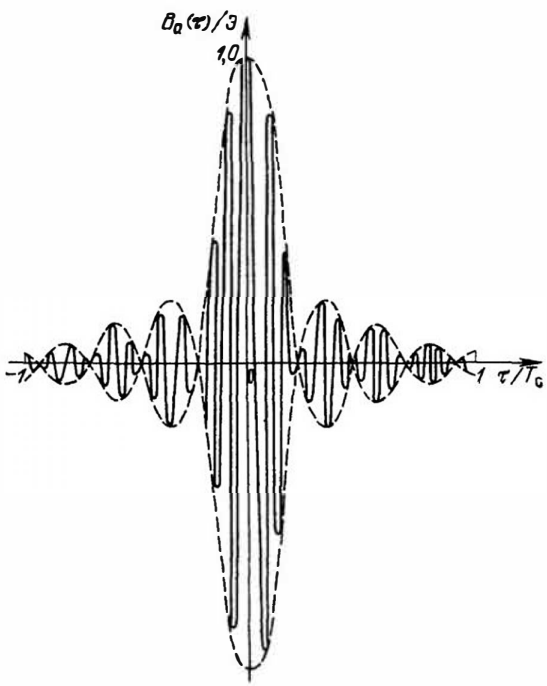


Рис. 3.32. Корреляционная функция ЛЧМ импульса

Таким образом,

$$\frac{B_a(\tau)}{B_a(0)} = \frac{B_a(\tau)}{\mathcal{E}} = \frac{\sin\left[\frac{\pi m \tau}{T_c}\left(1-\frac{\tau}{T_c}\right)\right]}{\frac{\pi m \tau}{T_c}} \cos\omega_0 \tau. \qquad (3.107)$$

График этой функции построен на рис. 3.32 для параметра $m = 100$ в предположении, что $\omega_0 T_c$ очень велико (масштаб выбран произвольно). Огибающая корреляционной функции образует весьма острый пик (при $m \gg 1$), а частота заполнения постоянна и равна центральной частоте ω_0 исходного радиоимпульса.

Рассмотренный здесь сигнал с большой базой m и его корреляционная функция представляют большой практический интерес для современной радиотехники.

3.12. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ УЗКОПОЛОСНОГО СИГНАЛА

Пусть задан сигнал

$$a(t) = A(t)\cos\psi(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)], \qquad (3.108)$$

спектр которого заключен в узкой полосе частот от ω_1 до ω_2 так, что модуль спектральной плотности $S_a(\omega)$ имеет вид, представленный на рис. 3.33, *а*, причем в пределах полосы $\Delta\omega_0$ спектр не обязательно симметричен относительно центральной частоты $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$. Под узкополосностью сигнала подразумевается условие $\Delta\omega_0/\omega_0 = \Delta f_0/f_0 \ll 1$, где $\Delta f_0 = \Delta\omega_0/2\pi = f_2 - f_1$ — полоса частот, Гц.

Предполагается, что функция $A(t)$ является простейшей огибающей, т. е. что $A(t)$ и $\psi(t)$ отвечают соотношениям (3.60) и (3.61).

Если при дискретизации подобного сигнала исходить из ряда (2.114), то интервал между выборками должен быть не больше чем $1/2f_2$, где f_2 — наивысшая частота в спектре сигнала. Нецелесообразность такого подхода

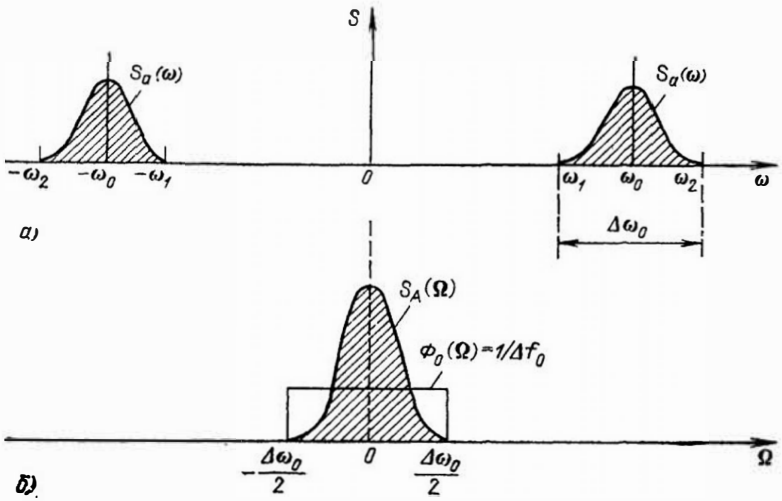


Рис. 3.33. Спектр узкополосного радиосигнала (*а*) и комплексной огибающей этого сигнала (*б*)

очевидна, так как информация о сигнале заложена не в частоту f_2 (или f_1), а в огибающую $A(t)$ или в фазу $\theta(t)$, которые изменяются во времени медленно с относительно низкими частотами модуляции. Желательно поэтому так преобразовать выражение (2.114), чтобы интервалы между выборками определялись фактической шириной спектра, т. е. величиной Δf_0, а не верхней частотой f_2.

Для этого перейдем к аналитическому сигналу, соответствующему заданной функции $a(t)$:

$$z_a(t) = A(t)\, e^{j\psi t} = A(t)\, e^{i\theta(t)}\, e^{i\omega_0 t} = \mathbf{A}(t)\, e^{i\omega_0 t}, \tag{3.109}$$

где комплексная огибающая $\mathbf{A}(t) = A(t)\, e^{i\theta(t)}$ представляет собой низкочастотную функцию, спектр которой $S_A(\Omega)$ примыкает к нулевой частоте (рис. 3.33, *б*). Разложим комплексную функцию $\mathbf{A}(t) = A(t)\, e^{i\theta(t)}$ по ортогональной системе

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n(t), \tag{3.110}$$

где базисная функция $\varphi_n(t)$ определяется выражением (2.115).

Подставив этот ряд в (3.109), получим

$$z_a(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n(t)\right] e^{i\omega_0 t}, \tag{3.111}$$

после чего исходное колебание $a(t)$ определим как действительную часть функции $z_a(t)$:

$$a(t) = \mathrm{Re}\left\{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n(t)\right] e^{i\omega_0 t}\right\}. \tag{3.112}$$

Как видим, задача дискретизации высокочастотного колебания свелась к задаче дискретизации комплексной огибающей $\mathbf{A}(t)$. При определении наибольшего допустимого интервала между выборками в разложении (3.110) необходимо исходить из наивысшей частоты в спектре функции $\mathbf{A}(t)$. Из определения ω_0 как средней частоты в полосе $\Delta\omega_0$ очевидно, что эта частота, отсчитываемая от $\Omega = 0$, равна $\Delta\omega_0/2$ или в герцах $\Delta f_0/2$. Следовательно, интервал между выборками не должен превышать

$$\Delta t = 1/(2\Delta f_0/2) = 1/\Delta f_0, \tag{3.113}$$

а функция $\varphi_n(t)$ должна иметь вид

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin(\Delta\omega_0/2)(t - n\Delta t)}{(\Delta\omega_0/2)(t - n\Delta t)} = \frac{\sin \pi\Delta f_0 (t - n\Delta t)}{\pi\Delta f_0 (t - n\Delta t)}. \tag{3.114}$$

От аналогичной функции, использованной в § 2.15, $\varphi_n(t)$ отличается только заменой ω_m на $\Delta\omega_0/2$. Следовательно, спектральная плотность $\mathbf{\Phi}(\Omega)$ функции $\varphi_0(t)$ равна $2\pi/\Delta\omega_0 = 1/\Delta f_0$ в полосе частот $|\Omega| \leqslant \Delta\omega_0/2$ (рис. 3.32), а спектральная плотность функции $\varphi_n(t)$

$$\mathbf{\Phi}_n(\Omega) = \begin{cases} \dfrac{\omega}{\Delta\omega_0/2}\, e^{-in\Delta t\Omega} & \text{при } |\Omega| \leqslant \dfrac{\Delta\omega_0}{2}, \\ 0 & \text{при } |\Omega| > \dfrac{\Delta\omega_0}{2}. \end{cases} \tag{3.115}$$

Квадрат нормы функции $\varphi_n(t)$ по аналогии с выражением, приведенным на стр. 60,

$$||\varphi_n||^2 = \pi/0{,}5\Delta\omega_0 = I/\Delta f_0. \tag{3.116}$$

Далее по формуле (2.9) с учетом (3.116)

$$c_n = \frac{1}{\| \varphi_n \|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(t)\, \varphi_n(t)\, dt = \Delta f_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(t)\, \varphi_n(t)\, dt. \qquad (3.117)$$

Используя формулу (2.63), в которой заменяем ω на Ω[1], получаем

$$c_n = \Delta f_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega_0/2}^{\Delta\omega_0/2} S_A(\Omega)\, \mathbf{\Phi}_n(-\Omega)\, d\Omega =$$

$$= \Delta f_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega_0/2}^{\Delta\omega_0/2} S_A(\Omega)\, \frac{1}{\Delta t_0}\, e^{in\Delta t\Omega}\, d\Omega = \mathbf{A}(n\Delta t) = A(n\Delta t)\, e^{i\theta(n\Delta t)}. \qquad (3.118)$$

В выражении (3.118) S_A — спектр комплексной огибающей $\mathbf{A}(t)$, а $\mathbf{A}(n\Delta t)$ — ее значение в отсчетной точке $t = n\Delta t$.

Итак, коэффициенты ряда (3.110) являются выборками функции $\mathbf{A}(t)$, взятыми через интервалы $\Delta t = 1/\Delta f_0$.

Подставляя (3.118) в (3.111), получаем

$$z_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n\Delta t)\, \varphi_n(t)\, e^{i[\omega_0 t + \theta(n\Delta t)]}$$

и по формуле (3.112) определяем

$$a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n\Delta t)\, \varphi_n(t) \cos[\omega_0 t + \theta(n\Delta t)] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n\Delta t)\, \frac{\sin \pi\Delta f_0 (t - n\Delta t)}{\pi\Delta f_0 (t - n\Delta t)} \cos[\omega_0 t + \theta(n\Delta t)]. \qquad (3.119)$$

При заданной длительности сигнала T_c число отсчетных точек $T_c/\Delta t = T_c \Delta f_0$, причем в каждой точке должны быть заданы два параметра: $A(n\Delta t)$ и $\theta(n\Delta t)$.

Следует иметь в виду, что при несимметричном (в полосе $\Delta\omega_0$) спектре введенная в данном параграфе частота $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ может не совпадать со «средней частотой» в выражении (3.73). Иными словами, фаза $\theta(t)$ может содержать слагаемое, линейно-зависящее от времени.

Проиллюстрируем выражение (3.119) на примерах колебания, промодулированного по амплитуде или по частоте.

При АМ исходим из колебания $a(t) = A(t) \cos \omega_0 t$, в котором $A(t)$ — вещественная функция со спектром $S_A(\omega)$, ограниченным наивысшей частотой $\Omega_m = 2\pi F_m$. В этом случае ширина спектра модулированного колебания $a(t)$ равна $\Delta f_{\text{ам}} = 2F_m$, причем в пределах этой полосы спектральная плотность $S_a(\omega)$ симметрична относительно ω_0. Интервал между выборками в соответствии с формулой (3.113) должен быть не больше чем $\Delta t = 1/\Delta f_{\text{ам}} = 1/2F_m$, т. е. таким же, как и при дискретизации исходного сообщения (модулирующего напряжения).

Так как фаза высокочастотного заполнения при чисто амплитудной модуляции постоянна, то передавать ее нет необходимости. Отсюда вытекает очевидный результат: *амплитудно-модулированное колебание вполне определяется значениями своих амплитуд, взятыми через интервал* $1/2F_m$, где F_m *— верхняя частота в спектре модулирующей функции* (т. е. в спектре передаваемого сообщения).

[1] Поскольку здесь рассматривается спектр огибающей.

Иными словами, при чисто амплитудной модуляции число степеней свободы модулированного колебания такое же, как и число степеней свободы модулирующей функции.

Рассмотрим теперь частотно-модулированное колебание

$$a(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \theta(t)],$$

когда мгновенная частота $\omega(t) = \omega_0 + d\theta/dt$ модулирована тем же сообщением, что и в предыдущем случае, причем максимальная девиация частоты $f_д$ велика по сравнению с F_m, так что ширину $\Delta f_{чм}$ полосы частот модулированного колебания можно приравнять к $2f_д$ [см. случай «широкополосной» частотной модуляции, (3.34)]. Интервал между выборками должен быть взят $\Delta t \leqslant 1/\Delta f_{чм} = 1/2f_д$. Так как при ЧМ амплитуда колебания неизменна, то передавать ее нет необходимости. Следовательно, для однозначного представления частотно-модулированного колебания достаточно задавать фазу $\theta(n\Delta t)$ этого колебания в отсчетных точках, отстоящих одна от другой на время $\Delta t \leqslant 1/2f_д$. При одной и той же длительности сообщения $T_с$ число выборок фазы при ЧМ $\Delta f_{чм} T_с = 2f_д T_с$, а число выборок огибающей при АМ $\Delta f_{ам} T_с = 2F_m T_с$. Отсюда видно, что при одинаковом передаваемом сообщении (при одинаковом количестве информации) частотно-модулированный сигнал обладает числом степеней свободы в $f_д/F_m = m$ раз большим, чем амплитудно-модулированный. Это является результатом расширения спектра сигнала при ЧМ. На приемной стороне канала связи после частотного детектирования модулированного колебания выделяется напряжение, которое имеет спектр и число степеней свободы такие же, как и исходное сообщение.

Из приведенного примера следует, что при одной и той же ширине спектра информационная емкость радиосигнала различна в зависимости от вида модуляции.

При смешанной модуляции — амплитудной и угловой — в каждой отсчетной точке нужно брать две выборки: амплитуды и фазы.

Глава 4. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

4.1. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Информация, передаваемая по каналу связи или извлекаемая в результате измерения, заключена в сигнале.

До приема сообщения (до испытания) сигнал следует рассматривать как случайный процесс, представляющий собой совокупность (ансамбль) функций времени, подчиняющихся некоторой общей для них статистической закономерности. Одна из этих функций, ставшая полностью известной после приема сообщения, называется *реализацией* случайного процесса. Эта реализация является уже не случайной, а детерминированной функцией времени.

Важной, но не исчерпывающей характеристикой случайного процесса является присущий ему одномерный закон распределения вероятностей.

На рис. 4.1 изображена совокупность функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., образующих случайный процесс $X(t)$. Значения, которые могут принимать отдельные функции в момент времени $t = t_1$, образуют совокупность случайных величин $x_1(t)$, $x_2(t)$, ...

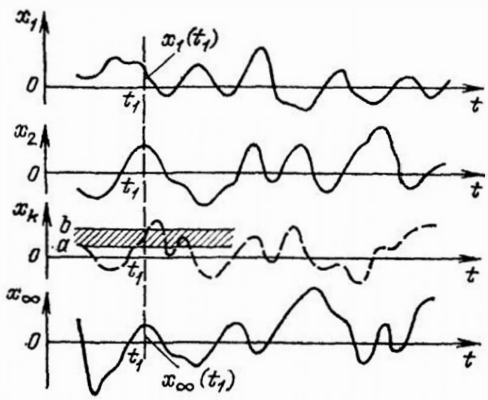


Рис. 4.1. Совокупность функций, образующих случайный процесс

Вероятность того, что величина $x_k(t_1)$ при измерении попадает в какой-либо заданный интервал (a, b) (рис. 4.1), определяется выражением

$$P_{t_1}(a < x \leqslant b) = \int_a^b p(x; t_1)\, dx. \tag{4.1}$$

Функция $p(x; t_1)$ представляет собой дифференциальный закон распределения случайной величины $x(t_1)$; $p(x; t_1)$ называется одномерной плотностью вероятности, а P_{t_1} — интегральной вероятностью.

Функция $p(x; t_1)$ имеет смысл для случайных x непрерывного типа, могущих принимать любое значение в некотором интервале. При любом характере функции $p(x; t_1)$ должно выполняться равенство

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} p(x; t_1)\, dx = 1, \tag{4.2}$$

где $x_{\min}$ и $x_{\max}$ — границы возможных значений $x(t_1)$.

Если же x является случайной величиной дискретного типа и может принимать любое из конечного числа дискретных значений, то (4.2) следует заменить суммой

$$\sum_i P_i = 1, \tag{4.2'}$$

где P_i — вероятность, соответствующая величине x_i.

Задание одномерной плотности вероятности $p(x; t_1)$ позволяет произвести статистическое усреднение как самой величины x, так и любой функции $f(x)$. Под статистическим усреднением подразумевается усреднение x по множеству (по ансамблю) в каком-либо «сечении» процесса, т. е. в фиксированный момент времени.

Для практических приложений наибольшее значение имеют следующие параметры случайного процесса:

математическое ожидание

$$m_x(t) = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x; t)\, dx; \tag{4.3}$$

дисперсия

$$D_x(t) = M\{[x(t) - m_x(t)]^2\}; \tag{4.4}$$

среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x(t) = \sqrt{M\{[x(t) - m_x(t)]^2\}} = \sqrt{D_x(t)}. \tag{4.5}$$

Одномерная плотность вероятности недостаточна для полного описания процесса, так как она дает вероятностное представление о случайном процессе $X(t)$ только в отдельные фиксированные моменты времени. Более

полной характеристикой является двумерная плотность вероятности[1] $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$, позволяющая учитывать связь значений x_1 и x_2, принимаемых случайной функцией в произвольно выбранные моменты времени t_1 и t_2.

Исчерпывающей вероятностной характеристикой случайного процесса является n-мерная плотность вероятности при достаточно больших n. Однако большое число задач, связанных с описанием случайных сигналов, удается решать на основе двумерной плотности вероятности.

Задание двумерной плотности вероятности $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$ позволяет, в частности, определить важную характеристику случайного процесса — *ковариационную функцию*

$$K_x(t_1, t_2) = M[x(t_1)\, x(t_2)]. \tag{4.6}$$

Согласно этому определению ковариационная функция случайного процесса $X(t)$ представляет собой статистически усредненное произведение значений случайной функции $X(t)$ в моменты t_1 и t_2.

Для каждой реализации случайного процесса произведение $x(t_1)\, x(t_2)$ является некоторым числом. Совокупность реализаций образует множество случайных чисел, распределение которых характеризуется двумерной плотностью вероятности $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$. При заданной функции $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$ операция усреднения по множеству осуществляется по формуле

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, p(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2. \tag{4.7}$$

При $t_2 = t_1$ двумерная случайная величина $x_1 x_2$ вырождается в одномерную величину $x_1^2 = x_2^2$. Можно поэтому написать

$$K_x(t_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2\, p(x_1; t_1)\, dx_1 = M[x^2(t)]. \tag{4.7'}$$

Таким образом, при нулевом интервале между моментами времени t_1 и t_2 ковариационная функция определяет величину среднего квадрата случайного процесса в момент $t = t_1$.

При анализе случайных процессов часто основной интерес представляет его флуктуационная составляющая. В таких случаях применяется к о р р е л я ц и о н н а я функция

$$R_x(t_1, t_2) = M\{[x(t_1) - m_x(t_1)]\,[x(t_2) - m_x(t_2)]\}. \tag{4.8}$$

Подставляя в (4.7) $x(t_1) - m_x(t_1)$ вместо $x(t_1)$ и $x(t_2) - m_x(t_2)$ вместо $x(t_2)$, можно получить следующее выражение:

$$R_x(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) - m_x(t_1)\, m_x(t_2).$$

При $t_1 = t_2 = t$ выражение (4.8) в соответствии с (4.4) определяет дисперсию случайного процесса $D_x(t)$. Следовательно,

$$K_x(t, t) - m_x^2(t) = R_x(t, t) = D_x(t).$$

Исследование случайного процесса, а также воздействия его на радиоцепи существенно упрощается при стационарности процесса.

---

[1] Здесь и в дальнейшем одной и той же буквой p обозначаются плотности вероятности различных случайных функций. В некоторых разделах, если это необходимо для устранения путаницы, будут применяться индексы, уточняющие параметр, к которому относится данное распределение. Например, при рассмотрении случайного процесса $x(t) = A(t) \cos \theta(t)$ будут применяться обозначения $p_x(x)$, $p_A(A)$ и $p_\theta(\theta)$.

Случайный процесс называется строго стационарным, если его плотность вероятности $p(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ произвольного порядка n зависит только от интервалов $t_2 - t_1$, $t_3 - t_1$, ..., $t_n - t_1$ и не зависит от положения этих интервалов в области изменения аргумента t.

В радиотехнических приложениях теории случайных процессов условие стационарности обычно ограничивается требованием независимости от времени только одномерной и двумерной плотностей вероятности (случайный процесс, стационарный в широком смысле). Выполнение этого условия позволяет считать, что математическое ожидание, средний квадрат и дисперсия случайного процесса не зависят от времени, а корреляционная функция зависит не от самих моментов времени t_1 и t_2, а только от интервала между ними $\tau = t_2 - t_1$.

Стационарность процесса в широком смысле можно трактовать как стационарность в рамках корреляционной теории (для моментов не выше второго порядка).

Таким образом, для случайного процесса, стационарного в широком смысле, предыдущие выражения можно записывать без обозначения фиксированных моментов времени. В частности,

$$m_x = M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\, dx, \tag{4.9}$$

$$K_x(\tau) = M[x(t)\, x(t+\tau)], \tag{4.10}$$

$$R_x(\tau) = K_x(\tau) - m_x^2, \tag{4.11}$$

$$D_x = K_x(0) - m_x^2 = R_x(0) = \sigma_x^2, \tag{4.12}$$

$$\sigma_x = \sqrt{K_x(0) - m_x^2}. \tag{4.13}$$

Дальнейшее упрощение анализа случайных процессов достигается при использовании условия *эргодичности* процесса. Стационарный случайный процесс называется эргодическим, если при определении любых статистических характеристик усреднение по множеству реализаций эквивалентно усреднению по времени одной теоретически бесконечно длинной реализации.

Условие эргодичности случайного процесса включает в себя и условие его стационарности. В соответствии с определением эргодического процесса соотношения (4.10)—(4.13) эквивалентны следующим выражениям, в которых операция усреднения по времени обозначена чертой:

$$\overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt, \tag{4.14}$$

$$K_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x(t+\tau)\, dt, \tag{4.15}$$

$$R_x(\tau) = K_x(\tau) - (\overline{x(t)})^2, \tag{4.16}$$

$$D_x = K_x(0) - (\overline{x(t)})^2 = \sigma_x^2, \tag{4.17}$$

$$\sigma_x = \sqrt{K_x(0) - (\overline{x(t)})^2}. \tag{4.18}$$

Если $x(t)$ представляет собой электрический сигнал (ток, напряжение), то $\overline{x(t)}$ — постоянная составляющая случайного сигнала, $R_x(0) = \overline{x^2(t)}$ — средняя мощность флуктуации сигнала [относительно постоянной составляющей $x(t)$].

Выражение (4.15) внешне совпадает с определением (2.131) корреляционной функции детерминированного сигнала (периодического).

Часто применяется нормированная корреляционная функция

$$r_x(\tau) = R_x(\tau)/D_x = [K_x(\tau) - (\bar{x})^2]/D_x. \tag{4.19}$$

Функции $K_x(\tau)$, $R_x(\tau)$ и $r_x(\tau)$ характеризуют связь (корреляцию) между значениями $x(t)$, разделенными промежутком τ. Чем медленнее, плавнее изменяется во времени $x(t)$, тем больше промежуток τ, в пределах которого наблюдается статистическая связь между мгновенными значениями случайной функции.

При экспериментальном исследовании случайных процессов используются временные корреляционные характеристики процесса (4.15)—(4.19), поскольку, как правило, экспериментатору доступно наблюдение одной реализации сигнала, а не множества его реализаций. Интегрирование выполняется, естественно, не в бесконечных пределах, а на конечном интервале T, длина которого должна быть тем больше, чем выше требование к точности результатов измерения.

4.2. ВИДЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. ПРИМЕРЫ

Применение общих определений, приведенных в предыдущем параграфе, иллюстрируется ниже на нескольких характерных случайных процессах.

Наряду с обозначением случайного процесса символом $X(t)$ будет применяться в том же смысле обозначение $x(t)$, под которым подразумевается случайная функция времени. Как и ранее, $x_k(t)$ обозначает k-ю реализацию случайной функции $x(t)$.

1. ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ СО СЛУЧАЙНОЙ АМПЛИТУДОЙ

Пусть в выражении, определяющем сигнал

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0) = A\cos\psi(t), \tag{4.20}$$

частота ω_0 и начальная фаза θ_0 являются детерминированными и постоянными величинами, а амплитуда A — случайная, равновероятная в интервале от 0 до A_{max} величина (рис. 4.2).

Найдем одномерную плотность вероятности $p(x; t_1)$ для фиксированного момента времени t_1. Мгновенное значение $x(t_1)$ может быть любым в интервале от 0 до $A_{max}\cos\psi(t_1)$, причем будем считать, что $\cos\psi(t_1) > 0$. Следовательно,

$$p(x; t_1) = 1/A_{max}\cos\psi(t_1), \quad 0 < x < A_{max}\cos\psi(t_1).$$

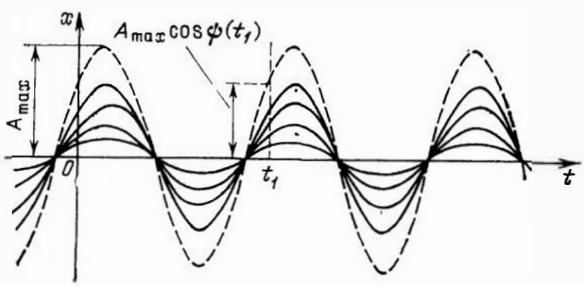


Рис. 4.2. Совокупность гармонических колебаний со случайной амплитудой

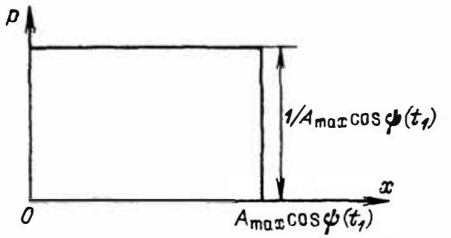


Рис. 4.3. Плотность вероятности гармонического колебания со случайной амплитудой

График функции $p(x; t_1)$ для фиксированного значения t_1 представлен на рис. 4.3.

Математическое ожидание

$$M[x(t_1)] = \frac{1}{A_{max}\cos\psi(t_1)} \times \int_0^{A_{max}\cos\psi(t_1)} x\,dx = \frac{1}{2} A_{max}\cos\psi(t_1).$$

Далее,

$$M[x^2(t_1)] = \frac{1}{A_{max}\cos\psi(t_1)} \int_0^{A_{max}\cos\psi(t_1)} x^2\,dx = \frac{1}{3} A_{max}^2\cos^2\psi(t_1).$$

Наконец, дисперсия

$$D_x(t_1) = M[x^2(t_1)] - [M[x(t_1)]]^2 = \frac{1}{3} A_{max}^2\cos^2\psi(t_1) -$$

$$- \frac{1}{4} A_{max}^2\cos^2\psi(t_1) = \frac{1}{12} A_{max}^2\cos^2\psi(t_1). \qquad (4.21)$$

Рассматриваемый случайный процесс *нестационарный и неэргодический*.

2. ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ СО СЛУЧАЙНОЙ ФАЗОЙ

Пусть амплитуда и частота гармонического сигнала заранее достоверно известны, а начальная фаза θ — случайная величина, которая с одинаковой вероятностью может принимать любое значение в интервале от $-\pi$ до π. Это означает, что плотность вероятности начальной фазы

$$p_\theta(\theta) = 1/2\pi, \quad -\pi < \theta < \pi. \qquad (4.22)$$

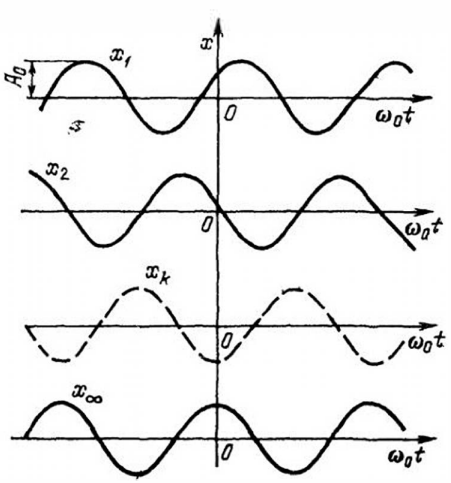


Рис. 4.4. Совокупность гармонических колебаний со случайными фазами

Одну из реализаций случайного процесса $x(t)$, образуемого совокупностью гармонических колебаний со случайными фазами (рис. 4.4), можно определить выражением

$$x_k(t) = \cos(\omega_0 t + \theta_k) = \cos\psi_k(t). \qquad (4.23)$$

Полная фаза колебания $\psi(t) = \omega_0 t + \theta$ является случайной величиной, равновероятной в интервале от $\omega_0 t - \pi$ до $\omega_0 t + \pi$. Следовательно,

$$p_\psi(\psi) = 1/2\pi, \quad \omega_0 t - \pi < \psi < \omega_0 t + \pi. \qquad (4.24)$$

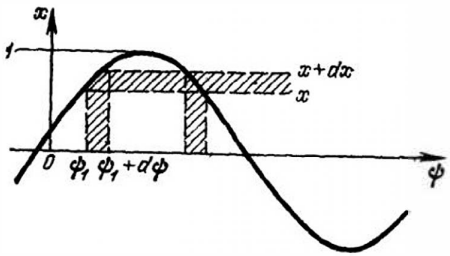


Рис. 4.5. К определению плотности вероятности гармонического колебания со случайной фазой

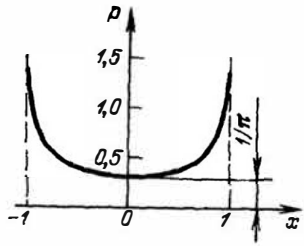


Рис. 4.6. Плотность вероятности гармонического колебания со случайной фазой

Найдем одномерную плотность вероятности $p_x(x)$ случайного процесса $X(t)$. Выделим интервал $x,\ x+dx$ (рис. 4.5) и определим вероятность того, что при измерении, проведенном в промежутке времени от t_1 до t_1+dt, мгновенное значение сигнала окажется в интервале $x,\ x+dx$. Эту вероятность можно записать в виде $p_x(x)\,dx$, где $p_x(x)$ — искомая плотность вероятности. Очевидно, что вероятность $p_x(x)\,dx$ совпадает с вероятностью попадания случайной фазы колебаний ψ в один из двух заштрихованных на рис. 4.5 фазовых интервалов. Эта последняя вероятность равна $2p_\psi(\psi)\,d\psi$. Следовательно,

$$p_x(x)\,dx = 2p_\psi(\psi)\,d\psi = (2/2\pi)\,d\psi,$$

откуда искомая функция[1]

$$p_x(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\left|\dfrac{dx}{d\psi}\right|},\quad -1 < x < 1.$$

Но

$$\left|\frac{dx}{d\psi}\right| = |\sin\psi| = \sqrt{1-\cos^2\psi} = \sqrt{1-x^2}.$$

Таким образом, окончательно

$$p_x(x) = 1/\pi\sqrt{1-x^2},\quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{4.25}$$

График этой функции изображен на рис. 4.6.

Существенно, что одномерная плотность вероятности не зависит от выбора момента времени t, а среднее по множеству (см. (2.271.7) в [28])

$$M[x(t)] = \int_{-1}^{1} x p_x(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0 \tag{4.26}$$

совпадает со средним по времени

$$\overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(\omega_0 t+\theta)\,dt = 0.$$

(Это справедливо для любой реализации рассматриваемого случайного процесса.)

[1] Абсолютное значение производной берется на том основании, что плотность вероятности является неотрицательной величиной.

Корреляционную функцию[1] в данном случае можно получить усреднением произведения $x(t_1)\,x(t_2)$ по множеству без обращения к двумерной плотности вероятности [см. общее выражение (4.8)]. Подставляя в (4.8)

$$x(t_1)\,x(t_2) = \cos(\omega_0 t_1 + \theta)\cos(\omega_0 t_2 + \theta) = {}^1/_2\{\cos\omega_0(t_2 - t_1) + \cos[\omega_0(t_1 + t_2) + 2\theta]\}$$

а также учитывая, что первое слагаемое $\cos\omega_0(t_2 - t_1)$ является детерминированной величиной, а второе слагаемое при статистическом усреднении с помощью одномерной плотности вероятности $p_\theta(\theta) = 1/2\pi$ [см. (4.22)] обращается в нуль, получаем

$$R_x(t_1,\ t_2) = M[x(t_1)\,x(t_2)] = {}^1/_2\cos\omega_0\tau. \qquad (4.27)$$

Такой же результат получается и при усреднении произведения $x_k(t)\,x_k(t+\tau)$ по времени для любой реализации процесса.

Независимость среднего значения от t_1 и корреляционной функции от положения интервала $\tau = t_2 - t_1$ на оси времени позволяет считать рассматриваемый процесс стационарным. Совпадение же результатов усреднения по множеству и времени (для любой реализации) указывает на эргодичность процесса. Аналогичным образом нетрудно показать, что гармоническое колебание со случайной амплитудой и случайной фазой образует стационарный, но не эргодический процесс (различные реализации обладают неодинаковой дисперсией).

3. ГАУССОВСКИЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

Нормальный (гауссовский) закон распределения случайных величин чаще других встречается в природе. Нормальный процесс особенно характерен для помех канала связи. Он очень удобен для анализа. Поэтому случайные процессы, распределение которых не слишком сильно отличается от нормального, часто заменяют гауссовским процессом. Одномерная плотность вероятности нормального процесса определяется выражением

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]. \qquad (4.28)$$

В данном параграфе рассматривается стационарный и эргодический гауссовский процесс. Поэтому под m_x и σ_x^2 можно подразумевать соответственно постоянную составляющую и среднюю мощность флуктуационной составляющей одной (достаточно длительной) реализации случайного процесса.

Графики плотности вероятности при нормальном законе для некоторых значений σ_x изображены на рис. 4.7. Функция $p(x)$ симметрична относительно среднего значения. Чем больше σ_x, тем меньше максимум, а кривая становится более пологой [площадь под кривой $p(x)$ равна единице при любых значениях σ_x].

Широкое распространение нормального закона распределения в природе объясняется тем, что при суммировании достаточно большого числа независимых или слабо зависимых случайных величин распределение суммы близко к нормальному при любом распределении отдельных слагаемых.

Это положение, сформулированное в 1901 г. А. М. Ляпуновым, получило название *центральной предельной теоремы.*

Наглядными физическими примерами случайного процесса с нормальным законом распределения являются шумы, обусловленные тепловым дви-

[1] Ковариационная функция рассматриваемого процесса совпадает с корреляционной функцией, так как $M[x(t)] = 0$.

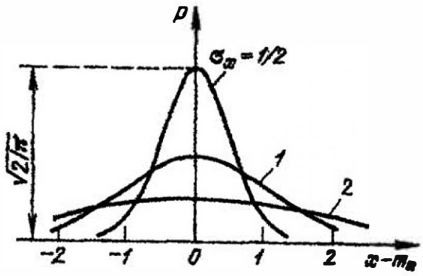


Рис. 4.7. Одномерная плотность вероятности нормального распределения

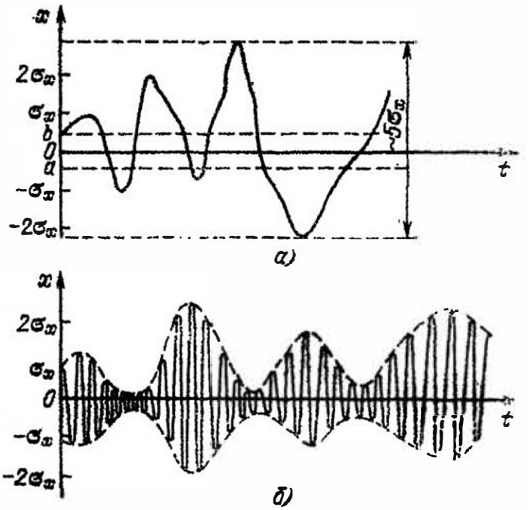


Рис. 4.8. Случайные функции с одинаковым распределением (нормальным), но с различными частотными спектрами

жением свободных электронов в проводниках электрической цепи как дробовым эффектом в электронных приборах (см. § 7.3). Не только шумы и помехи, но и полезные сигналы, являющиеся суммой большого числа независимых случайных элементарных сигналов, например гармонических колебаний со случайной фазой или амплитудой, часто можно трактовать как гауссовские случайные процессы.

На основе функции $p\,(x)$ можно найти относительное время пребывания сигнала $x\,(t)$ в определенном интервале уровней, отношение максимальных значений к среднеквадратическому (пикфактор) и ряд других важных для практики параметров случайного сигнала. Поясним это на примере одной из реализаций гауссовского процесса, изображенной на рис. 4.8, *а* для $m_x = 0$. Эта функция времени соответствует шумовой помехе, энергетический спектр которой простирается от нулевой частоты до некоторой граничной частоты. Вероятность пребывания значения $x\,(t)$ в интервале от a до b определяется выражением (4.1). Подставляя в это выражение (4.28), при $m_x = 0$ получаем

$$P(a<x<b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\int_a^b e^{-x^2/2\sigma_x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\int_0^b e^{-x^2/2\sigma_x^2}dx -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\int_0^a e^{-x^2/2\sigma_x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{b/\sigma_x} e^{-u^2/2}\,dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{a/\sigma_x} e^{-u^2/2}\,dy =$$

$$= \Phi\left(\frac{b}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma_x}\right). \qquad (4.29)$$

Функция

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-u^2/2}\,dy \qquad (4.30)$$

называется **интегралом вероятностей**. В математических справочниках приводятся таблицы этой функции.

Таблица 4.1

Интервал значений	Вероятность пребывания в интервале	Вероятность пребывания вне интервала
$(-\sigma_x,\ \sigma_x)$	$2\cdot 0{,}3413 = 0{,}6826$	$\sim 0{,}317$
$(-2\sigma_x,\ 2\sigma_x)$	$2\cdot 0{,}4772 = 0{,}9544$	$\sim 0{,}046$
$(-3\sigma_x,\ 3\sigma_x)$	$2\cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$	$\sim 0{,}003$

Подставив в (4.29) $b/\sigma_x = 1, 2, 3$ и соответственно $a/\sigma_x = -1$, -2, и -3, нетрудно найти вероятности пребывания $x(t)$ в полосах шириной $2\sigma_x$, $4\sigma_x$ и $6\sigma_x$, симметричных относительно оси t.

В рассматриваемом частном случае ($|a| = b$) формулу (4.29) можно упростить на основании симметрии функции относительно оси ординат (рис. 4.7).

Таким образом,

$$P(-b < x < b) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{b/\sigma_x} e^{-y^2/2}\,dy = 2\Phi\left(\frac{b}{\sigma_x}\right).$$

Результаты вычислений сведены в табл. 4.1. В последней графе приведены величины, равные $1 - 2\Phi(b/\sigma_x)$. Из этой таблицы следует, что ширину шумовой дорожки (рис. 4.8, *а*) нормального шума можно приравнять $(4 \ldots 5)\,\sigma_x$. Если принимать во внимание пики функции $x(t)$, вероятность которых не менее 1 %, то пикфактор шума (отношение пика к σ_x) можно оценить значением ~ 3. Напомним, что для гармонического колебания пикфактор равен $\sqrt{2}$.

Отношение времени пребывания $x(t)$ в заданном интервале к общему времени наблюдения (достаточно большому для эффективного усреднения) можно трактовать как вероятность попадания $x(t)$ в указанный интервал. На такой трактовке основан принцип построения различных приборов, используемых для экспериментального нахождения одномерной плотности вероятности случайного процесса.

Можно отметить, что приведенные выше данные о распределении вероятностей не дают никаких представлений о поведении функции $x(t)$ во времени. На рис. 4.8, *б* показана реализация гауссовского процесса со спектром, сосредоточенным в узкой полосе частот с центральной частотой ω_0. По своей плотности вероятности $p(x)$ и, следовательно, по значениям m_x и σ_x этот процесс не отличается от низкочастотного, показанного на рис. 4.8, *а*.

Для описания временных характеристик функции $x(t)$ необходимо привлечь двумерную плотность вероятности, позволяющую найти ковариационную функцию [см. (4.7)]. Другой способ — нахождение спектра мощности случайного процесса. Он рассматривается в следующем параграфе.

4.3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Подразумевая под случайным процессом множество (ансамбль) функций времени, необходимо иметь в виду, что функциям, имеющим различную форму, соответствуют различные спектральные характеристики. Усреднение комплексной спектральной плотности, введенной в § 2.6 или 2.1, по всем функциям приводит к нулевому спектру процесса (при $M[x(t)] = 0$) из-за

случайности и независимости фаз спектральных составляющих в различных реализациях. Можно, однако, ввести понятие спектральной плотности среднего квадрата случайной функции, поскольку значение среднего квадрата не зависит от соотношения фаз суммируемых гармоник. Если под случайной функцией $x(t)$ подразумевается электрическое напряжение или ток, то средний квадрат этой функции можно рассматривать как среднюю мощность, выделяемую в сопротивлении 1 Ом. Эта мощность распределена по частотам в некоторой полосе, зависящей от механизма образования случайного процесса. Спектральная плотность средней мощности представляет собой среднюю мощность, приходящуюся на 1 Гц при заданной частоте ω. Размерность функции $W(\omega)$, являющейся отношением мощности к полосе частот, есть

$$[W(x)] = \left[\frac{\text{Мощность}}{\text{Полоса частот}}\right] = [\text{Мощность} \times \text{время}] = [\text{Энергия}].$$

Спектральную плотность случайного процесса можно найти, если известен механизм образования случайного процесса. Применительно к шумам, связанным с атомистической структурой материи и электричества, эта задача будет рассмотрена в § 7.3. Здесь же мы ограничимся несколькими определениями общего характера.

Выделив из ансамбля какую-либо реализацию $x_k(t)$ и ограничив ее длительность конечным интервалом T, можно применить к ней обычное преобразование Фурье и найти спектральную плотность $\mathbf{X}_{kT}(\omega)$. Тогда энергию рассматриваемого отрезка реализации можно вычислить с помощью формулы (2.66):

$$\mathcal{Э}_{kT} = \int_{-T/2}^{T/2} x_{kT}^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2\,d\omega. \tag{4.31}$$

Разделив эту энергию на T, получим среднюю мощность k-й реализации на отрезке T

$$\overline{x_{kT}^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2}{T}\,d\omega. \tag{4.32}$$

При увеличении T энергия $\mathcal{Э}_{kT}$ возрастает, однако отношение $\mathcal{Э}_{kT}/T$ стремится к некоторому пределу. Совершив предельный переход $T \to \infty$, получим

$$x_k^2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{|\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2}{T}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_k(\omega)\,d\omega,$$

где

$$W_k(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2}{T} \tag{4.33}$$

представляет собой *спектральную плотность средней мощности* рассматриваемой k-й реализации.

В общем случае величина $W_k(\omega)$ должна быть усреднена по множеству реализаций. Ограничиваясь в данном случае рассмотрением стационарного и эргодического процесса, можно считать, что найденная усреднением по одной реализации функция $W_k(\omega)$ характеризует весь процесс в целом. Опу-

ская индекс k, получаем окончательное выражение для средней мощности случайного процесса

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\, d\omega,$$

где

$$W_x(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|\mathbf{X}_T(\omega)|^2}{T}. \tag{4.34}$$

Если рассматривается случайный процесс с ненулевым средним значением $x(t)$, то спектральную плотность следует представить в форме

$$W_x(\omega) = (\overline{x(t)})^2 \cdot 2\pi\delta(\omega) + W_{\sim}(\omega), \tag{4.35}$$

где $W_{\sim}(\omega)$ — сплошная часть спектра, соответствующая флуктуационной составляющей x, а $\delta(\omega)$ — дельта-функция.

При интегрировании по $f = \omega/2\pi$ первое слагаемое в правой части дает $(\overline{x(t)})^2$, т. е. мощность постоянной составляющей, а второе — мощность флуктуационной составляющей, т. е. дисперсию

$$D_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\sim}(\omega)\, d\omega = \sigma_x^2. \tag{4.36}$$

Для процесса с нулевым средним

$$\overline{x^2(t)} = D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(2\pi f)\, df, \tag{4.37}$$

Из определения спектральной плотности (4.33) очевидно, что $W_x(\omega)$ является четной и неотрицательной функцией ω.

4.4. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ И КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

С одной стороны, скорость изменения $x(t)$ во времени определяет ширину спектра. С другой стороны, скорость изменения $x(t)$ определяет ход ковариационной функции. Очевидно, что между $W_x(\omega)$ и $K_x(\tau)$ имеется тесная связь.

Теорема Винера — Хинчина утверждает, что $K_x(\tau)$ и $W_x(\omega)$ связаны между собой преобразованиями Фурье:

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau, \tag{4.38}$$

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega. \tag{4.39}$$

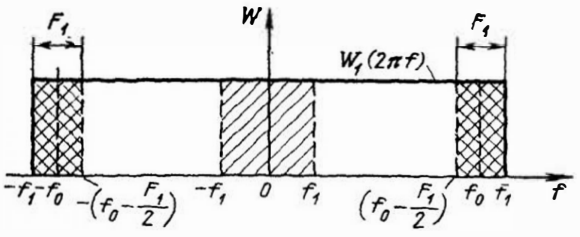


Рис. 4.9. Широкополосный и узкополосный спектры случайного процесса (примеры 1, 2, 3); границы центральной полосы $\pm F_1$

Для случайных процессов с нулевым средним аналогичные выражения имеют вид

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau, \tag{4.38'}$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega. \tag{4.39'}$$

Из этих выражений вытекает свойство, аналогичное свойствам преобразований Фурье, установленным в гл. 2 для детерминированных сигналов: *чем шире спектр случайного процесса, тем меньше интервал корреляции, и соответственно чем больше интервал корреляции, тем уже спектр процесса.*

Большой интерес представляет белый шум, когда спектр равномерен на всех частотах $-\infty < \omega < \infty$.

Если в выражение (4.39) подставить $W_x(\omega) = W_0 = \text{const}$, то получим [см. (2.93)]

$$R_x(\tau) = W_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\, d\omega = W_0\, \delta(\tau), \tag{4.40}$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция.

Для белого шума с бесконечным и равномерным спектром корреляционная функция равна нулю для всех значений τ, кроме $\tau = 0$, при котором $R_x(0)$ обращается в бесконечность. Подобный шум, имеющий игольчатую структуру с бесконечно тонкими случайными выбросами, иногда называют дельта-коррелированным процессом. Дисперсия белого шума бесконечно велика.

Поясним применение приведенных выше соотношений на примерах.

1. Пусть заданы следующие параметры напряжения шума (гауссовский стационарный процесс с нулевым средним): среднеквадратическое значение $u_{c\kappa} = 2$ В и энергетический спектр $W_1(2\pi f)$, равномерный в полосе частот от $-f_1$ до f_1 (сплошная линия на рис. 4.9), при $f_1 = 10$ МГц.

Шум с подобным спектром обычно называют широкополосным. В данном случае

$$W_1(2\pi f) = u_{c\kappa}^2/2f_1 = (2)^2/2\cdot 10^7 = 2\cdot 10^{-7}\ \text{В}^2/\text{Гц}.$$

Корреляционная функция рассматриваемого процесса [см. (4.39)]

$$R_1(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} W_1(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} W_1(\omega) \cos\omega\tau\, d\omega =$$

$$= 2\cdot 10^{-7} \frac{1}{2\pi} \frac{2\sin\omega_1\tau}{\tau} = 2\cdot 10^{-7} 2f_1 \frac{\sin\omega_1\tau}{\omega_1\tau} = \sigma_1^2 \frac{\sin\omega_1\tau}{\omega_1\tau}. \tag{4.41}$$

Дисперсия шума

$$D_1 = u_{\text{ск}}^2 = R_1(0) = 4\text{В}^2.$$

Нормированная корреляционная функция (рис. 4.10, *а*)

$$r_1(\tau) = R_1(\tau)/\sigma_1^2 = \sin\omega_1\tau/\omega_1\tau. \qquad (4.42)$$

2. Вырежем из спектра исходного шума полосу от $f = -F_1$ до $f = F_1$, обозначенную на рис. 4.9 штриховкой, и найдем $R_2(\tau)$, $r_2(\tau)$ и D_2, соответствующие этому ограниченному по полосе шуму.

При $F_1 = 2$ МГц

$$D_2 = 2F_1 W_1(\omega) = 2\cdot 2\cdot 10^6\cdot 2\cdot 10^{-7} = 0{,}8B^2,$$

$$R_2(\tau) = 2\cdot 10^{-7}\cdot 2F_1\frac{\sin\Omega_1\tau}{\Omega_1\tau} = 0{,}8\,\frac{\sin\Omega_1\tau}{\Omega_1\tau},$$

$$r_2(\tau) = R_2(\tau)/\sigma_2^2 = (\sin\Omega_1\tau)/\Omega_1\tau.$$

Сужение спектра привело к растяжению графика $r_2(\tau)$ по оси τ (рис. 4.10, *а*). Интервал корреляции увеличился в $f_1/F_1 = 5$ раз.

3. Найдем аналогичные характеристики для шума, спектр которого обозначен на рис. 4.9 двойной штриховкой. От предыдущего этот случай отличается положением спектральной полосы на оси частот. Шум с подобным спектром называют узкополосным (при $\Omega_1/\omega_0 \ll 1$).

Дисперсия этого шума D_3, очевидно, не отличается от D_2.

Корреляционная функция

$$R_3(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-(\omega_0+\Omega_1/2)}^{-(\omega_0-\Omega_1/2)} W_1(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\Omega_1/2}^{\omega_0+\Omega_1/2} W_1(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\omega_0-\Omega_1/2}^{\omega_0+\Omega_1/2} W_1(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega =$$

$$= 2\cdot 10^{-7}\,\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\omega_0+\Omega_1/2)\tau}{\tau} - \frac{\sin(\omega_0-\Omega_1/2)\tau}{\tau}\right] =$$

$$= 2\cdot 10^{-7}\,\frac{1}{\pi\tau}\cdot 2\sin\frac{\Omega_1\tau}{2}\cos\omega_0\tau = 2\cdot 10^{-7}\cdot 2F_1\,\frac{\sin\Omega_1\tau/2}{\Omega_1\tau/2}\cos\omega_0\tau. \qquad (4.43)$$

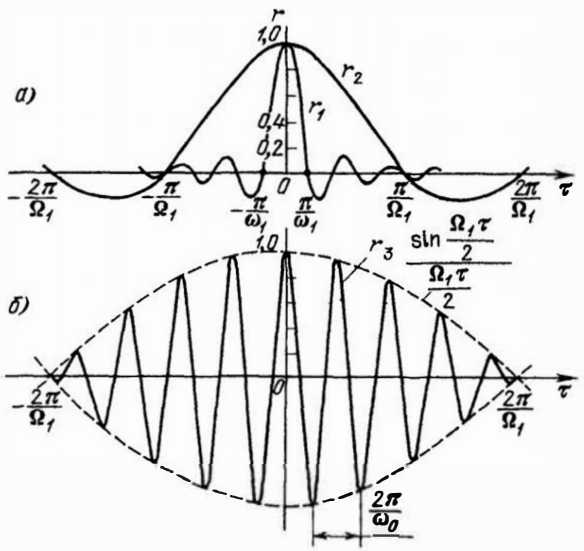


Рис. 4.10. Нормированная корреляционная функция случайного процесса со спектром, равномерным в полосе:
а) $|\omega| \leqslant \omega_1$ и $|\omega| \leqslant \Omega_1$; *б*) $\omega_0 - \Omega_1/2 \leqslant |\omega| \leqslant \omega_0 + \Omega_1/2$

Нормированная корреляционная функция (рис 4.10, *б*)

$$r_3(\tau) = \frac{\sin(\Omega_1 \tau/2)}{\Omega_1 \tau/2} \cos \omega_0 \tau. \qquad (4.44)$$

Огибающая функции $r_3(\tau)$ (штриховая линия) по форме подобна огибающей функции $r_2(\tau)$, однако эта функция имеет вдвое большую протяженность. Высокочастотное заполнение функции $r_3(\tau)$ имеет частоту ω_0, равную центральной частоте спектра шума (см. рис. 4.9).

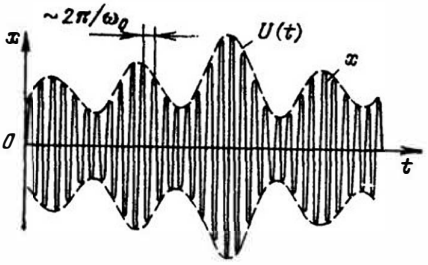


Рис. 4.11. Примерный вид реализации случайного процесса, корреляционная функция которого показана на рис. 4.10, *б* (масштабы по осям t и τ разные)

График нормированной корреляционной функции, показанный на рис. 4.10, *б*, позволяет составить представление о характере шумового колебания с узкополосным спектром. Осцилляции корреляционной функции с частотой ω_0 указывают на то, что и мгновенное значение шумового колебания изменяется в *среднем* с частотой ω_0. Напомним, что корреляционная функция гармонического колебания является также гармонической функцией той же частоты (см. § 2.18). Изменение же огибающей корреляционной функции по закону $\frac{\sin\Omega_1\tau/2}{\Omega_1\tau/2}$ указывает на то, что огибающая шумового колебания, являющаяся случайной величиной, изменяется во времени относительно медленно, подобно функции времени, спектр которой ограничен наивысшей частотой Ω_1. Примерный вид шумового колебания, соответствующего корреляционной функции (4.44), представлен на рис. 4.11 (в измененном масштабе времени).

Итак, шумовое колебание с узкополосным спектром следует представлять высокочастотным колебанием с медленно (по сравнению с частотой ω_0) изменяющимися амплитудой и фазой:

$$x(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)], \qquad (4.45)$$

где ω_0 — центральная частота спектра шума.

Следует подчеркнуть, что все параметры этого колебания: амплитуда, фаза и частота — являются случайными функциями времени. Статистические характеристики этих параметров рассматриваются в § 4.6.

4.5. ВЗАИМНАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И ВЗАИМНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В данном параграфе рассматриваются стационарные процессы с нулевым средним, поэтому связь между процессами $x(t)$ и $y(t)$ оценивается с помощью взаимной *корреляционной* функции, определяемой выражениями[1]

$$R_{xy}(\tau) = M[x(t)\, y(t+\tau)], \quad R_{yx}(\tau) = M[y(t)\, x(t+\tau)]. \qquad (4.46)$$

[1] Подразумевается, что не только сами процессы $x(t)$ и $y(t)$, но и связи между ними стационарны.

Кроме того, имеются в виду эргодические процессы, поэтому вместо (4.46) можно применять временно́е усреднение:

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)\,y(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,y(t+\tau)\,dt, \tag{4.47}$$

$$R_{yx}(\tau) = \overline{y(t)\,x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t)\,x(t+\tau)\,dt. \tag{4.48}$$

Как и для детерминированных колебаний, взаимная корреляционная функция не изменяется, если сдвиг на τ одной из функций $x(t)$ или $y(t)$ заменить сдвигом в обратном направлении другой функции. Поэтому можно написать следующие равенства:

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)\,y(t+\tau)} = \overline{x(t-\tau)\,y(t)}, \tag{4.49}$$

$$R_{yx}(\tau) = \overline{y(t)\,x(t-\tau)} = \overline{y(t-\tau)\,x(t)}. \tag{4.50}$$

Из последних выражений вытекают следующие соотношения между $R_{xy}(\tau)$ и $R_{yx}(\tau)$, аналогичные выражениям (2.135) и (2.135′):

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau),\quad R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau). \tag{4.51}$$

Соотношения (4.49)—(4.51) не следует смешивать с условиями четности функций. Каждая из функций $R_{xy}(\tau)$ и $R_{yx}(\tau)$ не обязательно четна относительно τ (см. § 2.18).

В итоге корреляция между значениями функций $x(t)$ и $y(t)$ в два различных момента времени, разделенных интервалом τ, задается корреляционной матрицей

$$R(\tau) = \begin{bmatrix} R_{xx}(\tau) & R_{xy}(\tau) \\ R_{yx}(\tau) & R_{yy}(\tau) \end{bmatrix}, \tag{4.52}$$

где $R_{xx}(\tau)$ и $R_{yy}(\tau)$ — корреляционные функции соответственно процессов $x(t)$ и $y(t)$.

Пусть, например, рассматривается сумма двух эргодических процессов $x(t)$ и $y(t)$ с нулевыми средними ($\bar{x} = \bar{y} = 0$) и требуется определить корреляционную функцию случайного процесса $s(t) = x(t) + y(t)$ (при условии, что взаимные корреляционные функции стационарны).

Используя формулу (4.16) и учитывая равенства (4.47), (4.48), получаем

$$\begin{aligned} R_s(\tau) &= \overline{s(t)\,s(t+\tau)} = \overline{[x(t)+y(t)]\,[x(t+\tau)+y(t+\tau)]} = \\ &= \overline{x(t)\,x(t+\tau)} + \overline{x(t)\,y(t+\tau)} + \overline{y(t)\,x(t+\tau)} + \overline{y(t)\,y(t+\tau)} = \\ &= R_{xx}(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) + R_{yy}(\tau). \end{aligned} \tag{4.53}$$

При $\tau = 0$ $R_{xx}(0) = \sigma_x^2$ и $R_{yy}(0) = \sigma_y^2$, а $R_{xy}(0) = R_{yx}(0)$.

Следовательно,

$$D_s = R_s(0) = D_x + D_y + R_{xy}(0) + R_{yx}(0) = D_x + D_y + 2R_{xy}(0). \tag{4.53′}$$

Если процессы $x(t)$ и $y(t)$ статистически независимы, то дисперсия (средняя мощность) суммы будет $D_s = D_x + D_y$.

В противном случае в зависимости от знака $R_{xy}(0)$ мощность процесса $s(t)$ может быть больше или меньше суммы дисперсий D_x и D_y.

Для разности $s(t) = x(t) - y(t)$ получается выражение, аналогичное (4.53). Необходимо лишь знак плюс перед членом $2R_{xy}$ заменить минусом.

При независимости процессов $x(t)$ и $y(t)$ дисперсия процесса $s(t)$, как и при суммировании, будет

$$D_s = D_x + D_y. \tag{4.54}$$

Применим теперь к $R_s(\tau)$ соотношение Винера — Хинчина (4.38):

$$W_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = W_x(\omega) + W_y(\omega) + W_{xy}(\omega) + W_{yx}(\omega). \tag{4.55}$$

В этом выражении

$$W_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau,\quad W_{yx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \tag{4.56}$$

имеют смысл взаимных спектральных плотностей случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$.

В отличие от спектральных плотностей $W_x(\omega)$ или $W_y(\omega)$, которые являются действительными функциями ω и не могут принимать отрицательные значения, взаимные спектральные плотности $W_{xy}(\omega)$ и $W_{yx}(\omega)$ могут быть комплексными функциями. Это связано с тем, что функции $R_{xy}(\tau)$ и $R_{yx}(\tau)$ не обязательно четные относительно τ. Подстановка в (4.56) соотношения (4.51) приводит к равенству

$$W_{xy}(\omega) = W^*_{yx}(\omega), \tag{4.57}$$

откуда следует, что

$$W_{xy}(\omega) + W_{yx}(\omega) = 2\mathrm{Re}\,[W_{xy}(\omega)] = 2\mathrm{Re}\,[W_{yx}(\omega)]. \tag{4.58}$$

Таким образом, выражение (4.55) можно записать в форме

$$W_s(\omega) = W_x(\omega) + W_y(\omega) + 2\mathrm{Re}\,[W_{xy}(\omega)]. \tag{4.59}$$

Это выражение поясняет физический смысл взаимной спектральной плотности $W_{xy}(\omega)$. Если случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ статистически независимы, то $W_{xy}(\omega) = 0$ и спектр суммы $s(t) = x(t) + y(t)$ равен сумме спектров $W_x(\omega)$ и $W_y(\omega)$ и, следовательно, мощность процесса $s(t)$ равна сумме мощностей процессов $x(t)$ и $y(t)$.

Если действительная часть взаимной спектральной плотности положительна, то $W_s(\omega) > W_x(\omega) + W_y(\omega)$ и, следовательно, корреляция между процессами приводит к возрастанию средней мощности суммарного процесса ($\sigma_s^2 > \sigma_x^2 + \sigma_y^2$). Очевидно, что при отрицательной действительной части $W_{xy}(\omega)$ средняя мощность суммарного процесса меньше, чем $D_x + D_y$.

Если $D_s = D_x + D_y$, то процессы $x(t)$ и $y(t)$ являются независимыми, аддитивными (см. § 2.18).

В практике часто встречается случай суммирования процесса $x(t)$ с процессом $Kx(t - T)$, т. е. с тем же процессом, задержанным на время T и усиленным в K раз (рис. 4.12).

Составим матрицу (4.52) для процессов $x(t)$ и $y = Kx(t - T)$. В обозначениях (4.52) получаем

$$R_{xx}(\tau) = R_x(\tau);$$

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)\, y(t+\tau)} = \overline{Kx(t)\, x(t-T+\tau)} = KR_x(\tau - T),$$

$$R_{yx}(\tau) = \overline{y(t)\, x(t+\tau)} = \overline{Kx(t-T)\, x(t+\tau)} = KR_x(\tau + T),$$

$$R_{yy}(\tau) = R_y(\tau) = \overline{y(t)\, y(t+\tau)} = \overline{K^2 x(t-T)\, x(t-T+\tau)} = K^2 R_x(\tau).$$

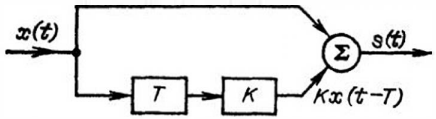


Рис. 4.12. К определению корреляционной функции суммы двух случайных процессов с одинаковыми энергетическими спектрами

Таким образом, корреляционная матрица процессов $x(t)$ и $y(t) = Kx(t-T)$ принимает вид

$$R(\tau) = \begin{bmatrix} R_x(\tau) & KR_x(\tau-T) \\ KR_x(\tau+T) & K^2 R_x(\tau) \end{bmatrix}.$$

Найдем теперь корреляционную функцию процесса $s(t) = x(t) + y(t)$ на выходе сумматора (рис. 4.12). Подставив в (4.53) элементы матрицы $R(\tau)$, получим

$$R_s(\tau) = R_x(\tau) + KR_x(\tau-T) + KR_x(\tau+T) + K^2 R_x(\tau).$$

Приравнивая $\tau = 0$, находим дисперсию процесса

$$D_s = D_x + KR_x(-T) + KR_x(T) + K^2 D_x = (1+K^2) D_x + 2KR_x(T) =$$
$$= D_x[1 + K^2 + 2Kr_x(T)],$$

где $r_x(T) = R_x(T)/D_x$ — нормированная корреляционная функция процесса $x(t)$ (напомним, что в данном примере $M[x(t)] = 0$).

При замене сумматора вычитающим устройством знак плюс перед слагаемым $2Kr_x(T)$ должен быть заменен минусом.

Если задержка T значительно больше интервала корреляции процесса $x(t)$, что $r_x(T) \to 0$ и $D_s = D_x(1 + K^2)$.

4.6. УЗКОПОЛОСНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

Краткое описание свойств гауссовского шума, сформированного из белого шума вырезанием относительно узкой полосы частот, было дано в § 4.4. Там отмечалось, что каждая из реализаций подобного случайного процесса имеет вид почти гармонического колебания

$$x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)] = A(t)\cos\psi(t), \tag{4.60}$$

все параметры которого — огибающая $A(t)$, фаза $\theta(t)$ и частота $\omega(t)$ — являются случайными медленно меняющимися функциями времени.

При представлении шума в форме (4.60) предполагается, что огибающая $A(t)$ отвечает соотношению

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \tag{4.61}$$

где $y(t)$ — функция, сопряженная по Гильберту исходной функции $x(t)$, а ω_0 выбрана таким образом, что фаза $\theta(t)$ не содержит слагаемого, линейно-зависящего от t.

В этом смысле нет различия между случайным и детерминированным процессами (см. § 3.9). Дополнительно этот вопрос рассматривается в § 4.7.

Дальнейшее рассмотрение основано на допущении, что спектральная плотность шума $x(t)$ сконцентрирована в узкой по сравнению с величиной ω_0 полосе, причем функция $W_x(\omega)$ в указанной полосе симметрична относительно точки ω_0 (рис. 4.13, *а*).

Рассмотрим стационарный эргодический процесс с нормальным законом распределения вероятностей. Здесь необходимо подчеркнуть, что указанное распределение характеризует физическое колебание $x(t)$, т. е. мгновенное значение колебания (в любой момент времени t). Параметры же колебания:

$A(t)$, $\theta(t)$ и $\omega(t) = d\psi/dt$ — обладают законами распределения, существенно отличающимися от нормального[1]. Для полного описания свойств узкополосного процесса требуется знание законов распределения, а также корреляционных функций всех параметров колебания.

1. ОГИБАЮЩАЯ

Представим высокочастотное колебание $x(t)$, определяемое выражением (4.60), в виде двух квадратурных колебаний:

$$x(t) = A(t)\cos\theta(t)\cos\omega_0 t - A(t)\sin\theta(t)\sin\omega_0 t = A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t. \quad (4.60')$$

Здесь, как и в § 3.5,

$$A_c(t) = A(t)\cos\theta, \quad A_s(t) = A(t)\sin\theta \quad (4.62)$$

представляют собой амплитуды соответственно косинусной и синусной составляющих колебания $x(t)$, причем

$$A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}, \quad \theta(t) = \operatorname{arctg} A_s/A_c. \quad (4.63)$$

Для отыскания плотностей вероятности $p_A(A)$ и $p_\theta(\theta)$ требуется знание соответствующих плотностей $p(A_c)$ и $p(A_s)$, а также совместной плотности вероятности $p(A_c, A_s)$.

Плотности $p(A_c)$ и $p(A_s)$ можно определить, сопоставив случайную функцию $A_c(t)$ [или $A_s(t)$] с функцией $x(t)$:

$$x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)], \quad A_c(t) = A(t)\cos\theta(t).$$

Отличие $A_c(t)$ от $x(t)$ заключается в исключении слагаемого $\omega_0 t$ из аргумента косинуса. Как и для детерминированного колебания, это означает сдвиг спектра каждой из реализаций случайного процесса на величину ω_0 (в направлении к нулевой частоте *при сохранении структуры спектра*). При этом сохраняется и закон распределения случайной функции $x(t)$. Поэтому, если процесс $x(t)$ гауссовский, то и процесс $A_c(t)$ гауссовский (оба процесса с нулевым средним).

Спектр $W_{A_c}(\Omega)$ (рис. 4.13, *б*) случайной функции $A_c(t)$ можно получить из спектра функции $x(t)$ сдвигом на ω_0 левого лепестка и на $-\omega_0$ правого лепестка спектра $W_x(\omega)$ (рис. 4.13).

В результате получается спектр

$$W_{A_c}(\Omega) = 2W_x(\omega_0 + \Omega), \quad (4.64)$$

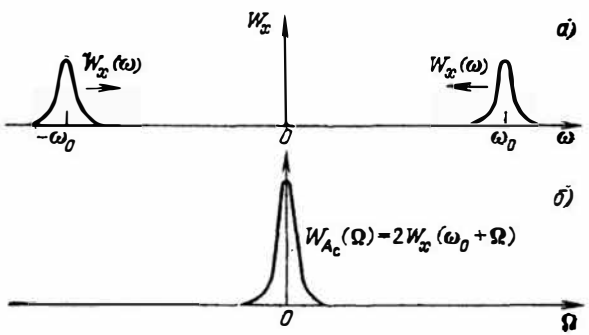


Рис. 4.13. Спектры:
а) узкополосного процесса с центральной частотой ω_0; *б*) косинусной составляющей комплексной огибающей

[1] Это вытекает из нелинейной зависимости параметров A, θ и ω от x и y.

группирующийся вблизи нулевой частоты. Коэффициент 2 учитывает[1] сложение мощностей, приходящихся на оба лепестка $W_x(\omega)$.

Аналогичные рассуждения используем для случайного процесса $A_s(t)$ и его спектра

$$W_{A_s}(\Omega) = 2W_x(\omega_0 + \Omega).$$

Из этого выражения и рис. 4.13 вытекает, что площадь под кривой $W_x(\omega)$ (в двух лепестках) совпадает с площадью под кривой $W_{A_c}(\Omega)$ [или $W_{A_s}(\Omega)$]. Следовательно, дисперсии случайных функций $A_c(t)$, $A_s(t)$ и $x(t)$ одинаковы: $\sigma^2_{A_c} = \sigma^2_{A_s} = \sigma^2_x$.

При учете первого выражения (4.63), из которого вытекает равенство $A^2(t) = A_c^2(t) + A_s^2(t)$, приходим к следующему выражению для среднего квадрата огибающей (из-за некоррелированности квадратур):

$$\langle A^2 \rangle = \overline{A^2(t)} = D_{A_c} + D_{A_s} = 2D_x = 2\sigma_x^2. \tag{4.65}$$

Итак, одномерные плотности вероятности случайных функций $A_c(t)$ и $A_s(t)$ можно определить выражениями

$$p(A_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left(-\frac{A_c^2}{2\sigma_x^2}\right),$$
$$p(A_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left(-\frac{A_s^2}{2\sigma_x^2}\right). \tag{4.66}$$

Кроме того, взаимная корреляция между функциями $A_c(t)$ и $A_s(t)$ равна нулю при $\tau = 0$. Действительно, возводя выражение (4.60′) в квадрат и усредняя по множеству, получаем

$$M[x^2(t)] = M[A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t]^2 = M[A_c^2(t)]\cos^2\omega_0 t +$$
$$+ M[A_s^2(t)]\sin^2\omega_0 t - 2M[A_c(t)\,A_s(t)]\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t.$$

Но левая часть этого выражения равна $R_x(0) = D_x$, кроме того, $M[A_c^2(t)] = M[A_s^2(t)] = D_x = R_{A_s}(0)$, а $M[A_c(t)\,A_s(t)] = R_{A_cA_s}(0)$ является взаимной корреляционной функцией случайных процессов $A_c(t)$ и $A_s(t)$ при $\tau = 0$. Следовательно, предыдущее равенство приводится к виду

$$R_x(0) = R_{A_c}(0) - R_{A_cA_s}(0)\sin 2\omega_0 t = \sigma_x^2 - R_{A_cA_s}(0)\sin 2\omega_0 t, \tag{4.67}$$

из которого вытекает, что $R_{A_cA_s}(0) = 0$ [поскольку процессы $x(t)$ и $A_c(t)$ стационарны, равенство (4.67) должно выполняться в любой момент времени].

Итак, $A_c(t)$ и $A_s(t)$, отсчитываемые в один и тот же момент времени, — статистически независимые величины[2]. Поэтому совместную плотность вероятности $p(A_c, A_s)$ можно определить выражением

$$p(A_c, A_s) = p(A_c)\,p(A_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(\frac{-A_c^2 - A_s^2}{2\sigma_x^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right). \tag{4.68}$$

---

[1] В случае детерминированного АМ колебания (рис. 3.9) при переходе от спектра $S_a(\omega)$ к спектру $S_A(\omega)$ удваивается спектральная плотность напряжения (или тока), что приводит к учетверению спектральной плотности энергии, пропорциональной $S_A^2(\omega)$. В данном случае мощность случайного процесса всего лишь удваивается из-за некогерентного суммирования спектров от обоих лепестков $W_x(\omega)$.

[2] Это положение вытекает также из соотношения (4.65), показывающего, что средний квадрат огибающей $A(t)$, т. е. D_{A_1}, является аддитивной суммой средних квадратов функций $A_c(t)$ и $A_s(t)$.

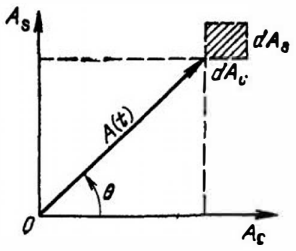


Рис. 4.14. К определению двумерной плотности вероятности квадратурных составляющих комплексной огибающей узкополосного процесса

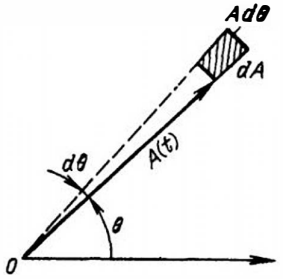


Рис. 4.15. К определению двумерной плотности вероятностей модуля и аргумента комплексной огибающей

Вероятность того, что конец вектора $A(t)$ лежит в элементарном прямоугольнике $dA_c dA_s$ (рис. 4.14), равна произведению вероятностей пребывания A_c в интервале dA_c и A_s в интервале dA_s:

$$p(A_c)\,dA_c p(A_s)\,dA_s = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA_c\,dA_s.$$

При переходе от прямоугольных координат к полярным площадь заштрихованного на рис. 4.15 элемента будет $Ad\theta dA$, а вероятность пребывания конца вектора в этом элементе равна $\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)Ad\theta dA$.

Из этого выражения следует, что двумерная плотность вероятности

$$p(A,\theta) = \frac{A}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right). \tag{4.69}$$

Интегрируя по переменной θ, получаем одномерную плотность вероятности

$$p_A(A) = \int_{-\pi}^{\pi} p(A,\theta)\,d\theta = \frac{A}{\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad 0 < A < \infty. \tag{4.70}$$

Обоснование пределов интеграла приводится в следующем пункте данного параграфа.

Распределение огибающей, характеризуемое плотностью вероятности (4.70), называется распределением Рэлея (рис. 4.16). Максимальное значение функции $p_A(A)$ получается при $A = \sigma_x$. Это означает, что $A = \sigma_x$ является наивероятнейшим значением огибающей.

Среднее же значение (математическое ожидание) огибающей

$$M[A] = \int_0^\infty A p_A(A)\,dA =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2}\int_0^\infty A^2\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma_x. \tag{4.71}$$

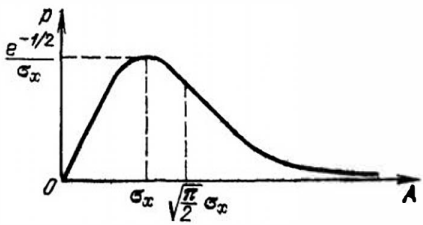


Рис. 4.16. Распределение Рэлея

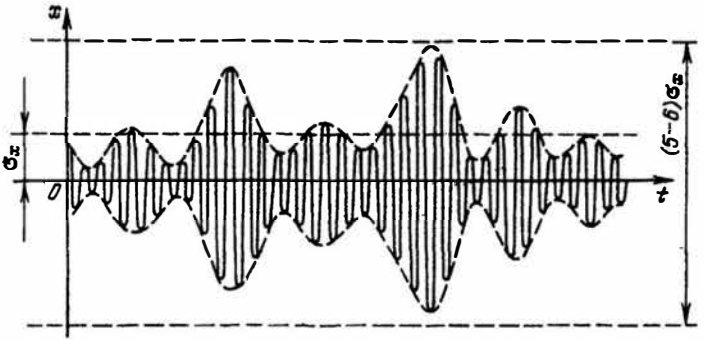


Рис. 4.17. Ширина шумовой дорожки для узкополосного нормального шума при вероятности превышения границ около 1 %

Аналогично средний квадрат огибающей

$$M[A^2] = \int_0^\infty A^2 p_A(A)\, dA =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2} \int_0^\infty A^3 \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) dA = 2\sigma_x^2. \tag{4.72}$$

Этот результат совпадает с (4.65). Таким образом, средняя мощность огибающей равна удвоенной дисперсии шума. Это аналогично соотношению между квадратом амплитуды A_0 и средней мощностью гармонического колебания $a(t) = A_0 \cos \omega_0 t$, равной $\overline{a^2(t)} = {}^1/_2 A_0^2$.

Вероятность того, что огибающая $A(t)$ превысит некоторый заданный уровень C, определяется формулой

$$P(A > C) = \int_C^\infty p_A(A)\, dA =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2} \int_C^\infty A \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) dA = \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma_x^2}\right), \tag{4.73}$$

а вероятность того, что огибающая $A(t)$ будет ниже уровня C, — формулой

$$P(A < C) = 1 - \exp(-C^2/2\sigma_x^2). \tag{4.74}$$

Из этих формул видно, что уже при $C = 3\sigma_x$ вероятность превышения уровня C составляет всего лишь около 1 %. Поэтому можно считать, что ширина шумовой дорожки, фактически наблюдаемой, например, на экране осциллографа (рис. 4.17), не превышает $(5 \ldots 6)\,\sigma_x$.

Этот результат, естественно, близок к данным, приведенным в § 4.2 для шумовой дорожки широкополосного гауссовского процесса (со спектром, примыкающим к нулевой частоте).

Ковариационная функция огибающей узкополосного нормального шума [13] определяется по формуле, которую приводим без вывода:

$$K_A(\tau) = \frac{\pi\sigma_x^2}{2} \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 r_0^2(\tau) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \ldots 2n}\right]^2 r_0^{2n}(\tau)\right\}. \tag{4.75}$$

Здесь $r_0(\tau)$ представляет собой огибающую нормированной корреляционной функции шума $x(t)$, т. е. функции, определяемой выражением (при $\bar{x}=0$)

$$r_x(\tau)=R_x(\tau)/\sigma_x^2=r_0(\tau)\cos\omega_0\tau. \tag{4.76}$$

Так как $r_0\leqslant 1$, то ряд (4.75) быстро сходится. Поэтому можно ограничиться первыми двумя членами:

$$K_A(\tau)\approx\frac{\pi\sigma_x^2}{2}\left[1+\frac{1}{4}r_0^2(\tau)\right]. \tag{4.77}$$

Применяя к $K_A(\tau)$ преобразование Фурье [см. (4.38)], находим спектральную плотность мощности огибающей

$$W_A(\Omega)=\frac{\pi\sigma_x^2}{2}2\pi\delta(\Omega)+\frac{\pi\sigma_x^2}{2}\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}r_0^2(\tau)\,e^{-i\Omega\tau}\,d\tau. \tag{4.78}$$

Из выражения (4.78) видно, что спектр огибающей примыкает к нулевой частоте. Первое слагаемое в правой части (4.78) соответствует постоянной составляющей огибающей, а второе — сплошной части спектра.

Примеры применения формул (4.75)—(4.78) приводятся в § 11.3—11.5.

2. ФАЗА

Интегрирование двумерной плотности вероятности $p(A,\theta)$, определяемой выражением (4.69), по переменной A дает одномерную плотность вероятности фазы

$$p_\theta(\theta)=\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\int\limits_0^\infty A\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\int\limits_0^\infty\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)d(A^2)=\frac{1}{2\pi},\quad -\pi<\theta\leqslant\pi. \tag{4.79}$$

Этот результат согласуется с пределами интегрирования в (4.70).

Заметим, что из представления $p(A,\theta)$ [см. (4.69)] в виде произведения

$$p(A,\theta)=\frac{A}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)=$$

$$=\left[\frac{A}{\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)\right]\left(\frac{1}{2\pi}\right)=p_A(A)\,p_\theta(\theta)$$

непосредственно вытекает статистическая независимость случайных величин A и θ. Как и в отношении $A_c(t)$ и $A_s(t)$, это справедливо при отсчете $A(t)$ и $\theta(t)$ в один и тот же момент времени [см. замечание к (4.67)].

Соотношения (4.70) и (4.79) позволяют сделать следующее общее заключение: произведение вида $x=A\cos\theta$, в котором A и θ — независимые случайные величины, причем A распределена по Рэлею, а θ равновероятна в интервале $(-\pi,\pi)$, обладает нормальной плотностью вероятности.

Условие узкополосности процесса $x(t)$ не обязательно; необходимо лишь, чтобы A и θ были связаны соотношениями (4.63).

Корреляционная функция фазы $\theta(t)$ определяется выражением [13]

$$R_\theta(\tau)=\frac{\pi}{2}r_0(\tau)+\frac{\pi}{4}r_0^2(\tau)+\frac{\pi}{12}r_0^3(\tau)+\ldots \tag{4.80}$$

При $\tau = 0$ ряд сходится к $\pi^2/3$, т. е. дисперсия фазы равна $\pi^2/3$. Действительно, при распределении (4.79)

$$D_\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 p_\theta(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\theta^3}{3}\right)_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}. \tag{4.81}$$

3. ЧАСТОТА

Основываясь на выражении (4.60), мгновенную частоту шума можно записать в форме

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_0 + \dot{\theta}(t),$$

откуда видно, что закон распределения мгновенной частоты определяется распределением производной фазы θ.

Приведем без вывода [14] выражение для плотности вероятности случайной величины $\dot{\theta}$

$$p(\dot{\theta}) = \left[2\Delta\omega_{эк}\left(1 + \frac{\dot{\theta}^2}{(\Delta\omega_{эк})^2}\right)^{3/2}\right]^{-1}, \tag{4.82}$$

где $\Delta\omega_{эк}$ — эквивалентная ширина спектра узкополосного процесса, определяемая выражением

$$(\Delta\omega_{эк})^2 = \int_0^\infty (\omega - \omega_0)^2 W(\omega)\, d\omega \Big/ \int_0^\infty W(\omega)\, d\omega. \tag{4.83}$$

Последнее выражение эквивалентно формуле

$$(\Delta\omega_{эк})^2 = -\frac{d^2 r_0(\tau)}{d\tau^2}\Big|_{\tau=0},$$

где $r_0(\tau)$ — огибающая нормированной корреляционной функции процесса, обладающего спектром $W(\omega)$ [симметричным относительно центральной частоты ω_0].

График функции $p(\dot{\theta})$ изображен на рис. 4.18. Среднее значение абсолютной величины $|\dot{\theta}|$ равно $\Delta\omega_{эк}$.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда энергетический спектр $W(\omega)$ равномерен в полосе частот $\pm\Delta\omega$ при центральной частоте ω_0. Нормированная корреляционная функция в соответствии с выражением (4.44)

$$r_x(\tau) = \frac{\sin \Delta\omega_0 \tau}{\Delta\omega_0 \tau}\cos\omega_0\tau, \quad \text{а} \quad r_0(\tau) = \frac{\sin \Delta\omega_0\tau}{\Delta\omega_0\tau} = \frac{\sin y}{y}.$$

Дважды дифференцируя последнее выражение по τ, находим $r_0''(\tau) = (\Delta\omega_0)^2 \dfrac{-y^3 \sin y - 2y^2\cos y + 2y\sin y}{y^4}$.

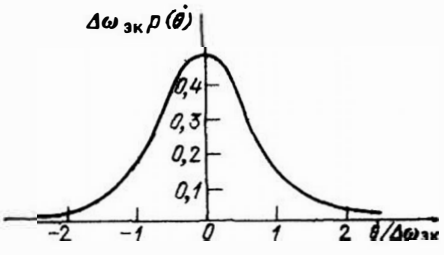


Рис. 4.18. Плотность вероятности производной фазы гауссовского случайного процесса

При $\tau \to 0$ и $y \to 0$ получаем

$$r_0''(0) = -\frac{1}{3}(\Delta\omega_0)^2, \tag{4.83'}$$

$$\Delta\omega_{эк} = \sqrt{-r_0''(0)} = \Delta\omega_0/\sqrt{3}. \tag{4.83''}$$

Итак, для шума со спектром, равномерным в полосе $(-\Delta\omega_0, \Delta\omega_0)$ (см. рис. 4.9), среднее значение $|\dot{\theta}|$ равно $\Delta\omega_0/\sqrt{3}$.

4.7. КОМПЛЕКСНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

Пусть задан действительный стационарный случайный процесс $x(t)$ со спектром $W_x(\omega)$. В теории случайных процессов доказывается, что если $x(t)$ дифференцируем в среднеквадратическом смысле так, что выполняется условие $\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 W_x(\omega)\, d\omega < \infty$, то к $x(t)$ можно применить интегральное преобразование

$$x_1(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t}\, d\tau,$$

причем интеграл также понимается в среднеквадратическом смысле.

Определенный таким образом случайный (стационарный) процесс $x_1(t)$ по отношению к $x(t)$ является сопряженным (по Гильберту), а процесс

$$z(t) = x(t) + ix_1(t) \tag{4.84}$$

является *комплексным случайным процессом*.

Применение понятия комплексного случайного процесса особенно полезно при рассмотрении узкополосных процессов. Если $x(t)$ можно представить в виде $x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)]$, где $A(t)$ и $\theta(t)$ — случайные функции, то, как и для детерминированного аналитического сигнала (см. § 3.10), $x_1(t) = A(t)\sin[\omega_0 t + \theta(t)]$ и

$$z(t) = A(t)\, e^{i[\omega_0 t + \theta(t)]}. \tag{4.85}$$

Поясним физический смысл этого понятия на модели (рис. 4.19), аналогичной использованной в гл. 3 модели формирования детерминированного аналитического сигнала (см. рис. 3.29).

Пусть узкополосный стационарный шум со спектром $W_x(\omega)$ поступает на выход по двум каналам: прямому и через фазосдвигающее звено с характеристикой $\varphi(\omega) = -90°$ (в полосе шума). Различие между процессами $x(t)$ и $x_1(t)$ обусловлено лишь влиянием фазосдвигающего звена. Амплитудно-частотная характеристика этого звена равна единице, следовательно, спектры мощности процессов $x(t)$ и $x_1(t)$ одинаковы: $W_{x1}(\omega) = W_x(\omega)$. То же относится к корреляционным функциям

$$R_x(\tau) = R_{x_1}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega$$

и к дисперсиям

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x_1}^2 = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\, d\omega.$$

(Имеются в виду процессы с нулевым средним.)

Найдем теперь спектральную и корреляционную функции *совокупности процессов* $x(t)$ и $x_1(t)$.

С этой целью выделим одну из реализаций процесса $x(t)$ и обозначим через $\mathbf{X}_{kT}(\omega)$ спектральную плотность отрезка k-й реализации с конечной

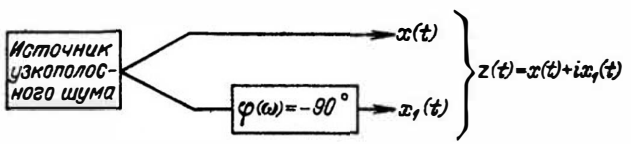


Рис. 4.19. Формирование случайного аналитического процесса

длительностью T (см. § 4.3). Этот же отрезок k-й реализации на выходе канала со звеном $\varphi(\omega) = -90°$ будет иметь спектральную плотность $\mathbf{X}_{1kT}(\omega) = \mathbf{X}_{kT}(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)} = -i\,\mathbf{X}_{kT}(\omega)$ при $\omega > 0$ и $+i\,\mathbf{X}_{kT}(\omega)$ при $\omega < 0$.

Рассматривая совокупность отрезков $x_{kT}(t)$ и $x_{1kT}(t)$ как сумму *квадратурных* колебаний

$$z_{kT}(t) = x_{kT}(t) + i x_{1kT}(t),$$

можно определить спектральную плотность отрезка $z_{kT}(t)$ следующим образом:

при $\omega > 0$

$$\mathbf{Z}_{kT}(\omega) = \mathbf{X}_{kT}(\omega) + i[-i\mathbf{X}_{kT}(\omega)] = 2\mathbf{X}_{kT}(\omega);$$

при $\omega < 0$

$$\mathbf{Z}_{kT}(\omega) = \mathbf{X}_{kT}(\omega) + i[i\mathbf{X}_{kT}(\omega)] = 0.$$

На основании этих равенств можно утверждать, что $x_{1kT}(t)$ является по отношению к $x_{kT}(t)$ функцией, *сопряженной* по Гильберту (см. § 3.9) и, следовательно, при определении спектра и корреляционной функции аналитического случайного процесса (4.84) исходить из выражений, аналогичных (3.87) и (3.95), выведенных в § 3.10 для детерминированного аналитического сигнала.

Переходя в выражении (3.87) от спектральной плотности $S_a(\omega)$ колебания (напряжение, ток) к спектральной плотности $W_x(\omega)$ *средней мощности* исходного колебания $x(t)$, получаем

$$W_z(\omega) = \begin{cases} 4W_x(\omega) & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \tag{4.86}$$

Применяя теорему Винера — Хинчина (см. (4.39)), находим корреляционную функцию аналитического случайного процесса

$$R_z(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty 4W_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = 4\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty W_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega + i4\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty W_x(\omega)\sin\omega\tau\, d\omega. \tag{4.87}$$

Это выражение совершенно аналогично выражению (3.95). Как и для детерминированного аналитического сигнала, $R_z(\tau)$ — комплексная корреляционная функция. Действительная часть этой функции совпадает с удвоенной корреляционной функцией исходного процесса $x(t)$, т. е. с $2R_x(\tau)$, а мнимая часть учитывает взаимную корреляцию процессов $x(t)$ и $x_1(t)$.

Комплексный характер корреляционной функции $R_z(\tau)$ обусловлен тем, что спектр $W_z(\tau)$ несимметричен относительно оси $\omega = 0$, т. е. существует только в области $\omega > 0$.

При $\tau = 0$ мнимая часть в соотношении (4.87) обращается в нуль, что означает некоррелированность процессов $x(t)$ и $x_1(t)$ в один и тот же момент t.

По аналогии с выражениями (3.96) можно написать

$$R_z(\tau) = 2R_x(\tau) + i2R_{x_1x}(\tau). \tag{4.88}$$

где

$$R_{x_1x}(\tau) = 2\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty W_x(\omega)\sin\omega\tau\, d\tau. \tag{4.89}$$

Характер взаимной корреляционной функции $R_{x_1 x}(\tau)$ определяется формой энергетического спектра процесса $W_x(\omega)$.

При $\tau = 0$ $R_{x_1 x}(0) = 0$ и, следовательно, средняя мощность аналитического случайного процесса

$$D_z = \sigma_z^2 = R_z(0) = 2R_x(0) = 2D_x. \tag{4.90}$$

Очевидно также, что средние мощности процессов $x(t)$ и $x_1(t)$ одинаковы: $D_x = D_{x_1}$.

Проиллюстрируем свойства корреляционной функции $R_{x_1 x}(\tau)$, входящей в выражение (4.88), на примере, когда исходный узкополосный аналитический процесс $x(t)$ обладает спектром прямоугольной формы при центральной частоте ω_0 и полосе $\Omega_1 \ll \omega_0$. Подобный спектр показан на рис. 4.9 (двойная штриховка).

Приравнивая в (4.89) $W_x(\omega) = W_1(\omega)$ и интегрируя в пределах от $\omega_0 - \Omega_1/2$ до $\omega_0 + \Omega_1/2$ получаем

$$R_{x_1 x}(\tau) = 2\frac{W_1 \Omega_1}{2\pi} \frac{\sin(\Omega_1 \tau/2)}{\Omega_1 \tau/2} \sin\omega_0\tau = D_x \frac{\sin(\Omega_1\tau/2)}{\Omega_1 \tau/2} \sin\omega_0 \tau.$$

Здесь через $D_x = W_1 2F_1$ обозначена дисперсия исходного процесса $x(t)$.

В данном примере огибающая $\sin(\Omega_1\tau/2)/(\Omega_1\tau/2)$ взаимной корреляционной функции $R_{x_1 x}(\tau)$ совпадает с огибающей корреляционной функции $R_x(\tau)$ [см. (4.44)]. Различие между двумя этими функциями заключается в фазах высокочастотного заполнения [$\cos\omega_0\tau$ в $R_x(\tau)$ и $\sin\omega_0\tau$ в $R_{x_1 x}(\tau)$].

При $\tau = 0$ $R_{x_1 x}(\tau) = 0$ — процессы $x_1(t)$ и $x(t)$ в один и тот же момент времени некоррелированны. Однако при $\omega_0\tau = \pi/2$ $\tau = \pi/2\omega_0 = 1/4f_0$ — функция $R_{x_1 x}(\tau) = 1/4f_0 = D_x \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{4}\frac{F_1}{f_0}\right)$. При $F_1/f_0 \ll 1$ эта функция достигает максимального значения, близкого к $D_x = \sigma_x^2$.

4.8. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ. ПРОСТРАНСТВО СИГНАЛОВ

Рассмотренные в § 2.2 способы разложения произвольных сигналов по заданной системе ортогональных функций можно вывести из общей теории линейных пространств, составляющей один из разделов высшей алгебры.

Действительно, пусть сигнал $s(t)$ с конечной энергией $\mathcal{Э}$ представлен в виде обобщенного ряда Фурье (2.14):

$$s(t) = \sum_{n=1}^{m} c_n \varphi_n(t). \tag{4.91}$$

Предполагается, что первые m слагаемых ряда обеспечивают требуемую точность представления сигнала $s(t)$.

В § 2.2 были установлены следующие соотношения между энергией $\mathcal{Э}$, *нормой* функции $s(t)$, обозначаемой $||s||$, и спектральными коэффициентами c_n (действительного сигнала):

$$\mathcal{Э} = \|s\|^2 = \int_T s^2(t)\,dt, \tag{4.92}$$

$$\|s\|^2 = \sum_{n=1}^{m} |c_n|^2 \|\varphi_n\|^2. \tag{4.93}$$

В этих выражениях $\int_T$ обозначает интеграл по интервалу времени T, а $||\varphi_n||$ — норму базисной функции $\varphi_n(t)$.

Выражение (4.93) ничем не отличается от известного из векторной алгебры определения нормы вектора $\mathbf{S}$ в m-мерном линейном (векторном) пространстве. Это позволяет поставить в соответствие сигналу $s(t)$ вектор $\mathbf{S}$, проведенный из начала координат в соответствующую точку пространства. При этом слагаемое $c_n\varphi_n(t)$ должно трактоваться как проекция вектора $\mathbf{S}$ на n-ю ось системы координат.

При использовании ортонормированной системы, когда $||\varphi_n|| = 1$, выражение (4.93) принимает вид

$$\|s\|^2 = \|\mathbf{S}\| = \sum_{n=1}^{m} |c_n|^2 = \mathcal{E}. \qquad (4.93')$$

В этом случае $||\varphi_n||$ является нормой единичного вектора (орта), определяющего направление n-й оси системы координат, а вектор сигнала $s(t)$ можно записать в виде вектора-строки

$$\mathbf{S} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}, \qquad (4.94)$$

В этом смысле можно говорить о пространстве, каждый элемент которого является вектором, представляющим определенный сигнал; можно также говорить, что каждая точка в пространстве сигналов, являющаяся концом вектора, проведенного из начала координат, соответствует определенному сигналу.

Длина вектора (норма), как это вытекает из (4.93'), равна $\mathcal{E}^{1/2}$.

Следовательно, всем сигналам с одинаковой энергией $\mathcal{E}$, *независимо от их формы*, соответствуют точки, расположенные на многомерной сфере радиуса $\mathcal{E}^{1/2}$.

Пространство сигналов является функциональным, поскольку каждый его элемент характеризуется не мгновенным значением $s(t)$, а некоторым функционалом от $s(t)$. К таким функционалам относятся, например, энергия сигнала $\mathcal{E} = \int_T |s(t)|^2\, dt$ и спектральные коэффициенты

$$c_n = \int_T s(t)\,\varphi_n(t)\, dt.$$

Для иллюстрации понятия «пространство сигналов» удобна базисная функция вида $\sin x/x$ (ряд Котельникова), когда коэффициентами ряда (4.91) являются отсчеты самого сигнала $s(t)$ в моменты времени $t = n\Delta t$ (см. § 2.15), так что выражение (4.94) принимает вид

$$\mathbf{S} = \{s(\Delta t), s(2\Delta t), \ldots, s(m\Delta t)\}. \qquad (4.95)$$

Этот частный случай интересен тем, что координатами сигнальной точки (конца вектора $\mathbf{S}$) в пространстве сигналов являются отсчеты сигнала $s(t)$ в дискретные моменты времени $t = n\Delta t$.

Множество функций $s(t)$, для которых норма (4.93) ограничена (сигналы с конечной энергией), называются пространством L^2. Если такие сигналы определены на интервале T, то используется обозначение $L^2(T)$.

Для передачи сигналов по каналу с помехами, а также для разрешения сигналов основное значение имеет не положение сигнальной точки в пространстве сигналов, а расстояние между точками, представляющими различные сигналы. Для выяснения смысла термина «расстояние между сигналами» воспользуемся известными свойствами скалярного произведения векторов.

Пусть имеются два вектора $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, заданные своими координатами, соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$: $\mathbf{X} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$, $\mathbf{Y} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$.

Скалярное произведение $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ определяется выражением

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \beta_n. \tag{4.96}$$

С другой стороны, $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ желательно выразить через функции времени $x(t)$, $y(t)$, соответствующие векторам $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$.

Из векторной алгебры известно соотношение

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \int_T x(t)\, y(t)\, dt. \tag{4.97}$$

В справедливости этого соотношения нетрудно убедиться подстановкой в (4.97) $x(t) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \varphi_n(t)$ и $y(t) = \sum_{n=1}^{m} \beta_n \varphi_n(t)$.

После перемножения сумм получим два вида слагаемых: с одинаковыми и с разными индексами. В силу попарной ортогональности базисных функций слагаемые второго вида после интегрирования обращаются в нуль. Интегрирование слагаемых первого вида приводит к выражению (4.96).

Учитывая, что правая часть равенства (4.97) есть не что иное, как взаимная корреляционная функция детерминированных сигналов $x(t)$ и $y(t)$ (при сдвиге $\tau = 0$) [см. (2.134)], приходим к важному результату

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = B_{xy}(0) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \beta_n. \tag{4.98}$$

Из этого соотношения следует[1], что если сигналы взаимно некоррелированны [$B_{xy}(0) = 0$], то соответствующие им векторы ортогональны [$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$].

В частном случае $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ выражение (4.98) дает равенство

$$(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = B_{xx}(0) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n^2 = \| \mathbf{X} \|^2 = \mathcal{E}_x, \tag{4.99}$$

т. е. квадрат нормы вектора $\mathbf{X}$ совпадает с определением корреляционной функции сигнала $x(t)$ (при $\tau = 0$).

На основе приведенных выше соотношений нетрудно определить расстояние d_{xy} между двумя сигнальными точками в пространстве сигналов как норму разностного вектора $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$:

$$d_{xy} = \| \mathbf{X} - \mathbf{Y} \|.$$

Квадрат этой нормы в соответствии с (4.99) равен скалярному произведению вектора $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$ на вектор $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$

$$d_{xy}^2 = \| \mathbf{X} - \mathbf{Y} \|^2 = (\mathbf{X} - \mathbf{Y}, \mathbf{X} - \mathbf{Y}).$$

Для скалярного умножения векторов верен распределительный закон, т. е.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Следовательно,

$$d_{xy}^2 = (\mathbf{X}, \mathbf{X}) + (\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) - (\mathbf{Y}, \mathbf{X}) - (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y - 2\mathcal{E}_{xy}.$$

---

[1] Напомним, что символами $B_s(\tau)$ и $B_{s_1 s_2}(\tau)$ обозначены соответствующие функции *детерминированных сигналов*.

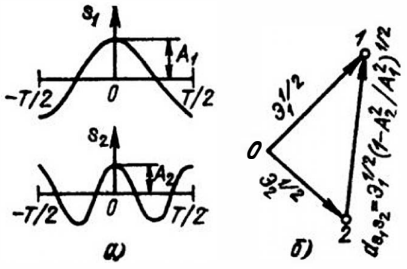


Рис. 4.20. К определению расстояния между двумя ортогональными сигналами

С учетом (4.98) и (4.99) получаем

$$d_{xy}^2 = B_{xx}(0) + B_{yy}(0) - 2B_{xy}(0) = \mathcal{Э}_x + \mathcal{Э}_y - 2\mathcal{Э}_{xy}, \qquad (4.100)$$

где $\mathcal{Э}_{xy}$ — «энергия взаимодействия».

Из (4.100) видно, что расстояние между сигнальными точками, соответствующими сигналам $x(t)$ и $y(t)$, зависит как от энергии каждого из сигналов, так и от взаимной корреляционной функции $B_{xy}(0)$.

Известно, что скалярное произведение можно записать в форме

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \|\mathbf{X}\| \cdot \|Y\| \cos\gamma,$$

где γ — угол между векторами $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Таким образом,

$$\cos\gamma = \frac{(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{Y}\|}. \qquad (4.101)$$

Используя формулы (4.98) и (4.99), записываем последнее равенство следующим образом:

$$\cos\gamma = \frac{B_{xy}(0)}{\mathcal{Э}_x^{1/2}\,\mathcal{Э}_y^{1/2}} = \frac{\mathcal{Э}_{xy}}{\mathcal{Э}_x^{1/2}\,\mathcal{Э}_y^{1/2}}. \qquad (4.102)$$

Итак, расстояние между сигнальными точками и угол между соответствующими им векторами полностью определяются энергиями сигналов $x(t)$, $y(t)$ и энергией взаимодействия между ними.

Проиллюстрируем эти свойства на простых сигналах. На рис. 4.20, *а* изображены два отрезка косинусоидального колебания одинаковой длительности T, но с различными (кратными) частотами. Энергии сигналов: $\mathcal{Э}_1 = A_1^2 T/2$ и $\mathcal{Э}_2 = A_2^2 T/2$.

Оба сигнала представлены в m-мерном пространстве $L^2(T)$. Длительность сигналов равна целому числу периодов, так что взаимная корреляционная функция $B_{s_1s_2}(0) = 0$ и, следовательно, сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ ортогональны. Применяя формулу (4.100), находим

$$d_{s_1s_2}^2 = \mathcal{Э}_1 + \mathcal{Э}_2 = \frac{T}{2}(A_1^2 + A_2^2) = \mathcal{Э}_1(1 + A_2^2/A_1^2),$$

$$d_{s_1s_2} = \mathcal{Э}_1^{1/2}(1 + A_2^2/A_1^2)^{1/2}.$$

Вследствие ортогональности функций $s_1(t)$ и $s_2(t)$ угол между векторами $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ равен $\pi/2$ [см. (4.102)]. Положение сигнальных точек *1* и *2* (отмеченных кружками) в пространстве сигналов показано на рис. 4.20, *б* (положение точки 0 выбрано произвольно).

Рассмотрим теперь два сигнала с одинаковыми амплитудами и частотами, но с различными начальными фазами

$$s_1(t) = A_0 \cos\omega t, \quad |t| \leqslant T/2,$$

$$s_2(t) = A_0 \cos(\omega t - \theta_0), \quad |t| \leqslant T/2.$$

Как и в предыдущем примере, T равно целому числу периодов колебаний $s_1(t)$ и $s_2(t)$; энергии одинаковы: $\mathcal{Э}_1 = \mathcal{Э}_2 = A_0^2 T/2$.

Взаимная корреляционная функция

$$B_{s_1 s_2}(0) = \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)\, s_2(t)\, dt = A_0^2 \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \theta_0)\, dt =$$

$$= \frac{A_0^2 T}{2} \cos \theta_0.$$

Рассмотрим частные случаи $\theta_0 = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$ и π.

1. $\theta_0 = 0$; $B_{s_1 s_2}(0) = A_0^2 T/2 = \mathcal{E}_1$; $d_{s_1 s_2} = 0$; $\cos \gamma = 1$; $\gamma = 0$;

Сигнальные точки *1* и *2* совпадают.

2. $\theta_0 = \pi/4$; $B_{s_1 s_2}(0) = \frac{A_0^2 T}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\mathcal{E}_1}{\sqrt{2}}$;

$d_{s_1 s_2}^2 = 2\mathcal{E}_1 - 2B_{s_1 s_2}(0) = 2\mathcal{E}_1 (1 - 1/\sqrt{2}) = 0{,}293$; $d_{s_1 s_2} = 0{,}541$;

$\cos \gamma = B_{s_1 s_2}(0)/\mathcal{E}_1 = 1/\sqrt{2}$; $\gamma = \pi/4$.

3. $\theta_0 = \pi/2$; $B_{s_1 s_2}(0) = 0$; $d_{s_1 s_2}^2 = 2\mathcal{E}_1$; $d_{s_1 s_2} = \sqrt{2}\, \mathcal{E}_1^{1/2}$; $\cos \gamma = 0$; $\gamma = \pi/2$.

4. $\theta_0 = \pi$; $B_{s_1 s_2}(0) = -\mathcal{E}_1$; $d_{s_1 s_2}^2 = 2\mathcal{E}_1 - (-2\mathcal{E}_1) = 4\mathcal{E}_1$; $d_{s_1 s_2} = 2\mathcal{E}_1^{1/2}$;

$\cos \gamma = -1$; $\gamma = \pi$.

Из рассмотренного примера вытекает, что при заданной и одинаковой энергии двух сигналов любое различие в их форме не может увеличить расстояние между сигнальными точками более чем до $2\mathcal{E}_{1,2}^{1/2}$ (это вытекает также из того факта, что сигнальные точки при заданной энергии сигнала расположены на многомерной сфере радиуса $\mathcal{E}_1^{1/2}$).

В заключение найдем смещение сигнальной точки, соответствующее сдвигу сигнала во времени на τ. Для этого требуется определить расстояние между сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t) = s_1(t - \tau)$.

В данном случае

$$B_{s_1 s_2}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, s_2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, s_1(t - \tau)\, dt = B_{s_1}(\tau),$$

где $B_{s_1}(\tau)$ — корреляционная функция сигнала $s_1(t)$.

По формуле (4.100) находим

$$d_{s_1 s_2} = \{2[B_{s_1}(0) - B_{s_1}(\tau)]\}^{1/2}.$$

Если под $s_1(t)$ подразумевается, например, импульс с длительностью $\tau_и$, то при $\tau > \tau_и$ корреляционная функция $B_{s_1}(\tau) = 0$ и $d_{s_1 s_2} = [2B_{s_1}(0)]^{1/2}$. Иными словами, неперекрывающиеся во времени сигналы *ортогональны*.

Применение к сигналам теории векторных пространств оказывается полезным, в частности, для синтеза цепей, подчиняющихся обобщенному принципу суперпозиции. Этот вопрос рассматривается в гл. 16.

4.9. ПРОСТРАНСТВО СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Пусть рассматривается стационарный случайный процесс с дисперсией D_x, заданный на отрезке времени $0 < t < T$. Без утраты общности рассмотрения положим $M(x) = 0$.

При представлении ансамбля реализаций в пространстве $L^2(T)$ каждой из реализаций можно поставить в соответствие свою сигнальную точку, от-

стоящую от начала координат на расстоянии $R_k = \mathcal{Э}_{Tk}^{1/2}$ (см. предыдущий параграф). Энергия $\mathcal{Э}_{Tk}$ изменяется от одной реализации к другой случайным образом, а среднее значение (математическое ожидание) энергии $\mathcal{Э}_T = \sigma_x^2 T$.

Совокупность всех сигнальных точек образует сложную многомерную поверхность, тем больше отличающуюся от сферической, соответствующей среднему радиусу $R_0 = \mathcal{Э}_T^{1/2}$, чем больше дисперсия $D_\mathcal{Э} = \sigma_\mathcal{Э}^2$ случайной величины $\mathcal{Э}_{Tk}$.

Для оценки величины $\sigma_\mathcal{Э}^2$ составим выражение для энергии k-й реализации процесса $x(t)$

$$\mathcal{Э}_{Tk} = \int_0^T x_k^2(t)\,dt = \Delta t \sum_{n=1}^{m} x_n^2 = \Delta t \sum_{n=1}^{m} y_n, \tag{4.103}$$

где m — число отсчетов, определяющих функцию $x_k(t)$ на отрезке $T = m\Delta t$ (см. § 2.15), а $y_n = x_n^2$ — отсчеты мощности (мгновенной) реализации $x_k(t)$ в моменты времени $t = n\Delta t$.

Очевидно, что математическое ожидание случайной величины $\mathcal{Э}_{Tk}$

$$M(\mathcal{Э}_{Tk}) = \Delta t \sum_{n=1}^{m} M(y_n) = \Delta t \sum_{n=1}^{m} M(x_n^2) = \Delta t m \sigma_x^2,$$

а среднее значение квадрата $\mathcal{Э}_{Tk}$ в соответствии с (4.103)

$$M(\mathcal{Э}_{Tk}^2) = M\left[\left(\Delta t \sum_{n=1}^{m} y_n\right)^2\right].$$

Следовательно, искомая дисперсия

$$\sigma_\mathcal{Э}^2 = M(\mathcal{Э}_{Tk}^2) - [M(\mathcal{Э}_{Tk})]^2 = (\Delta t)^2 \sum_{n=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} M(y_n y_l) - (\Delta t)^2 m^2 \sigma_x^4 =$$

$$= (\Delta t)^2 \sum_{n=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} [M(y_n y_l) - \sigma_x^4]. \tag{4.104}$$

Для конкретности будем исходить из нормального распределения процесса $x(t)$, а также из условия взаимной независимости отсчетов $y_n = x_n^2$ и $y_l = x_l^2$. Тогда

$$M(y_k y_l) = M(x_n^2 x_l^2) = M(x_n^2)\, M(x_l^2) = \sigma_x^4.$$

и все слагаемые вида $M(y_n y_l) - \sigma_x^4$ при $n \neq l$ в выражении (4.104) обращаются в нуль. Остаются слагаемые при $n = m$, число которых равно m, а сами слагаемые имеют вид $M(x_n^4) - \sigma_x^4$.

При плотности вероятности $p(x) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma_x)\exp(-x^2/2\sigma_x^2)$

$$M(x_n^4) = M(x^4) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} x^4\, e^{-x^2/2\sigma_x^2}\,dx = 3\sigma_x^4.$$

Таким образом, выражение (4.104) приводится к виду

$$\sigma_\mathcal{Э}^2 = (\Delta t)^2 m \cdot 2\sigma_x^4,\ \sigma_\mathcal{Э} = \Delta t \sqrt{m}\sqrt{2}\,\sigma_x^2.$$

Составим отношение

$$\frac{\sigma_\mathcal{Э}}{\mathcal{Э}_T} = \frac{\Delta t \sqrt{m}\sqrt{2}\,\sigma_x^2}{\Delta t m \sigma_x^2} = \sqrt{\frac{2}{m}}. \tag{4.105}$$

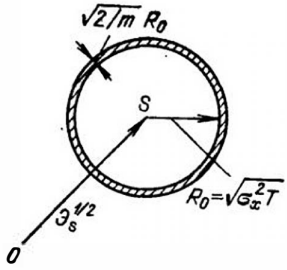


Рис. 4.21. Представление в многомерном пространстве сигналов смеси детерминированного сигнала и шумовой помехи при $\sigma_x^2 T \ll \mathcal{E}_s$

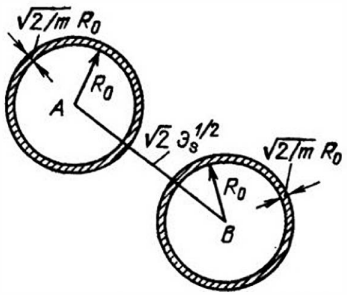


Рис. 4.22. Представление двух ортогональных сигналов с шумовой помехой

Использование понятия пространства сигналов эффективно при больших базах сигнала m (сотни и тысячи). Из (4.105) видно, что при $m \gg 1$ отношение $\sigma_{\mathcal{E}} / \mathcal{E}_T$ настолько мало, что можно говорить о сосредоточении сигнальных точек в тонком сферическом слое радиусом $R_0 = \mathcal{E}_T^{1/2}$ и толщиной[1] слоя около $\sqrt{2/m}\,R_0$. Таким образом, в многомерном пространстве сигналов случайный процесс, отвечающий оговоренным ранее условиям (стационарность, число независимых отсчетов в интервале T, равное m), можно представить в виде «тонкостенного» шара с центром в начале координат.

При совместном воздействии сигнала (детерминированного) и помехи (случайного процесса) представление суммарного колебания в пространстве сигналов основывается на правилах векторного сложения (вычитания), изложенных в предыдущем параграфе (предполагается, что сигнал и помеха представлены одинаковым числом степеней свободы m). На рис. 4.21 иллюстрируется случай относительно слабой помехи ($\sigma_x^2 T$ меньше энергии сигнала $\mathcal{E}_s$), образующей в пространстве сигналов полый шар радиуса $R_0 = \sqrt{\sigma_x^2 T}$ с центром в точке s, соответствующей сигналу $s(t)$ с энергией $\mathcal{E}_s$.

Описанное свойство многомерного пространства сигналов позволяет в наглядной форме объяснить преимущества многобазовых сигналов при решении задачи разрешения (различения) сигналов на фоне помех. Пусть на вход приемного устройства, рассчитанного на обработку двух ортогональных сигналов $A(t)$ и $B(t)$, обладающих одинаковыми энергией, длительностью и шириной спектра, но различной формой, воздействует смесь, состоящая из шумовой помехи и одного из указанных сигналов.

Положение сигнальных точек $A(t)$ и $B(t)$ в пространстве сигналов показано на рис. 4.22. Расстояние между двумя ортогональными сигналами равно $\sqrt{2}\,\mathcal{E}_s^{1/2}$ (см. примеры предыдущего параграфа).

В приемник тем или иным способом закладываются копии сигналов $A(t)$ и $B(t)$, так что в отсутствие помехи выходное устройство безошибочно принимает решение о том, какой из сигналов поступает на вход.

При наличи помехи каждый из сигналов $A(t)$ и $B(t)$ совместно с помехой образует в многомерном пространстве сигналов полый шар, как это изо-

---

[1] $\dfrac{\mathcal{E}_T + \sigma_{\mathcal{E}}}{\mathcal{E}_T} = \left(\dfrac{R_0 + \Delta R}{R_0}\right)^2 = 1 + \dfrac{2\Delta R}{R_0} + \left(\dfrac{\Delta R}{R_0}\right)^2 \approx 1 + \dfrac{2\Delta R}{R_0}$,

откуда $2\Delta R / R_0 = \sigma_{\mathcal{E}} / \mathcal{E}_T = \sqrt{2/m}$.

бражено на рис. 4.22. Если радиусы шаров меньше половины расстояния между точками A и B, т. е. $\sqrt{\sigma_z^2 T} < {}^1/_2 \sqrt{2}\,\mathcal{E}_s^{1/2}$, возможность безошибочного различения сигналов практически сохраняется [22].

Допустим теперь, что при сохранении неизменными $\mathcal{E}_s$ и T база сигнала m уменьшена. Поскольку база сигнала равна $2\Delta fT$ (см. § 2.15 и 3.11), это уменьшение имеет место при сужении полосы частот сигнала. Расстояние между сигнальными точками A и B остается прежним, однако расположение сигнальных точек суммы сигнал + помеха в пространстве сигналов «размывается», и тем сильнее, чем меньше число координат m. Вероятность «перепутывания» сигналов $A(t)$ и $B(t)$ возрастает с уменьшением базы сигнала.

Глава 5. ЛИНЕЙНЫЕ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА АКТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

В данной главе приводятся основные сведения о линейных активных цепях. Рассматриваются частотные характеристики избирательных цепей, используемых для различных линейных преобразований сигналов (усиления, фильтрации и т. д.). Особое внимание уделяется изучению линейных активных цепей с обратной связью, используемых в большинстве современных радиоэлектронных устройств.

В общей теории цепей под активной подразумевается цепь, содержащая наряду с пассивными элементами (катушками индуктивности, конденсаторами и резисторами) также и источники энергии (генераторы ЭДС или генераторы тока).

Активный характер цепей радиоэлектронных устройств обусловлен применением в них усилительных элементов: транзисторов, электронных ламп, ламп бегущей волны и т. д. При этом предполагается, что энергия сигнала на выходе активной цепи больше, чем на входе. Для большей определенности видоизменим формулировку следующим образом: *цепь активна, если при гармоническом возбуждении средняя мощность сигнала на выходе больше мощности на входе*, т. е. коэффициент усиления по мощности больше единицы. Из такого определения ясно, что цепь, осуществляющая усиление напряжения, например, с помощью повышающего трансформатора без усиления мощности является пассивной, даже если в нее входят активные элементы со своими источниками питания.

При построении схем замещения активных цепей источники постоянного тока или напряжения опускаются. На этих схемах активные элементы (транзисторы, лампы и др.) отображаются с помощью элементов, параметры которых зависят от режима работы и в конечном счете от источников энергии, питающих активный элемент. При этих допущениях любой (как активный, так и пассивный) линейный четырехполюсник можно представить схемой, изображенной на рис. 5.1. На этом рисунке $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$ обозначают комплексные амплитуды гармонических напряжений и токов независимых источников при фиксированной частоте ω.

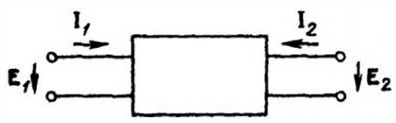


Рис. 5.1. Схема замещения линейного четырехполюсника

Четырехполюсник полностью характеризуется соотношениями между напряжениями и токами на его входе и выходе. Вид этих соотношений зависит от выбора исходных величин.

Напомним вкратце основные формы представления четырехполюсников.

Если исходными являются напряжения $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, то уравнения для определения токов $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$ записываются в форме

$$\mathbf{I}_1 = Y_{11}\,\mathbf{E}_1 + Y_{12}\,\mathbf{E}_2, \quad \mathbf{I}_2 = Y_{21}\,\mathbf{E}_1 + Y_{22}\,\mathbf{E}_2 \tag{5.1}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

$$\text{где } [Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

является матрицей параметров, имеющих смысл и размерность проводимостей.

Если уравнение (5.1) решить относительно $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, то получатся системы уравнений

$$\mathbf{E}_1 = Z_{11}\,\mathbf{I}_1 + Z_{12}\,\mathbf{I}_2, \quad \mathbf{E}_2 = Z_{21}\,\mathbf{I}_1 + Z_{22}\,\mathbf{I}_2, \tag{5.4}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \tag{5.5}$$

$$\text{где } [Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

является матрицей параметров, имеющих размерность сопротивлений.

Исходным уравнениям четырехполюсника, записанным в форме

$$\mathbf{E}_1 = H_{11}\,\mathbf{I}_1 + H_{12}\,\mathbf{E}_2, \quad \mathbf{I}_2 = H_{21}\,\mathbf{I}_1 + H_{22}\,\mathbf{E}_2, \tag{5.7}$$

соответствует матрица параметров

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \tag{5.8}$$

в которой H_{11} имеет размерность сопротивления, H_{22} — проводимости, а H_{12} и H_{21} — безразмерные параметры.

Приведем еще уравнения в форме

$$\mathbf{I}_1 = G_{11}\,\mathbf{E}_1 + G_{12}\,\mathbf{I}_2, \quad \mathbf{E}_2 = G_{21}\,\mathbf{E}_1 + G_{22}\,\mathbf{I}_2, \tag{5.9}$$

которой соответствует матрица

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

где G_{11} — проводимость; G_{22} — сопротивление, а G_{12} и G_{21} — безразмерные параметры.

В теории усилителей наибольшее распространение получили матрицы Z-, Y- и H-параметров. Связь между одними и теми же величинами, выраженными через различные системы параметров, представлена в табл. 5.1. В этой таблице определители ΔY, ΔZ и ΔH соответствующих матриц определяются выражениями

$$\Delta Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}, \quad \Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}, \quad \Delta H = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}. \tag{5.11}$$

Таблица 5.1

Исходная система параметров	Связь с другими системами параметров		Исходная система параметров	Связь с другими системами параметров		Исходная система параметров	Связь с другими системами параметров	
Y_{11}	$\frac{Z_{22}}{\Delta Z}$	$\frac{1}{H_{11}}$	Z_{11}	$\frac{Y_{22}}{\Delta Y}$	$\frac{\Delta H}{H_{22}}$	H_{11}	$\frac{\Delta Z}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}}$
Y_{12}	$-\frac{Z_{12}}{\Delta Z}$	$-\frac{H_{12}}{H_{11}}$	Z_{12}	$-\frac{Y_{12}}{\Delta Y}$	$\frac{H_{12}}{H_{22}}$	H_{12}	$\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$
Y_{21}	$-\frac{Z_{21}}{\Delta Z}$	$\frac{H_{21}}{H_{11}}$	Z_{21}	$-\frac{Y_{21}}{\Delta Y}$	$-\frac{H_{21}}{H_{22}}$	H_{21}	$-\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$
Y_{22}	$\frac{Z_{11}}{\Delta Z}$	$\frac{\Delta H}{H_{11}}$	Z_{22}	$\frac{Y_{11}}{\Delta Y}$	$\frac{1}{H_{22}}$	H_{22}	$\frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{\Delta Y}{Y_{11}}$

Уравнения (5.1), (5.4), (5.7) и аналогичные им другие уравнения позволяют построить эквивалентные схемы замещения четырехполюсников.

На рис. 5.2, *а* изображена схема замещения[1], построенная в соответствии с уравнением (5.1). На этой схеме оба напряжения $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ рассматриваются как напряжения внешних источников. Генератор тока $Y_{12}\mathbf{E}_2$ учитывает влияние выходного напряжения $\mathbf{E}_2$ на входной ток $\mathbf{I}_1$, а генератор тока $Y_{21}\mathbf{E}_1$ — влияние напряжения $\mathbf{E}_1$ на выходной ток $\mathbf{I}_2$. Оба генератора можно рассматривать как зависимые источники, так как обеспечиваемые ими токи пропорциональны напряжениям внешних источников. Параметр Y_{21} имеет смысл взаимной проводимости от входа к выходу, а Y_{12} — от выхода к входу. Очевидно также, что Y_{11} есть входная проводимость четырехполюсника при $\mathbf{E}_2 = 0$, т. е. при коротком замыкании выхода, а Y_{22} — выходная проводимость при возбуждении четырехполюсника от источника $\mathbf{E}_2$ при коротком замыкании входа.

Эквивалентная схема четырехполюсника, соответствующая уравнениям (5.4) и (5.5), изображена на рис. 5.2, *б*. На этой схеме зависимые источники напряжения $Z_{12}\mathbf{I}_2$ и $Z_{21}\mathbf{I}_1$ учитывают влияние $\mathbf{I}_2$ на $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{I}_1$ на $\mathbf{E}_2$ соответственно. Уравнениям (5.7), (5.8) соответствует схема замещения, показанная на рис. 5.2, *в*.

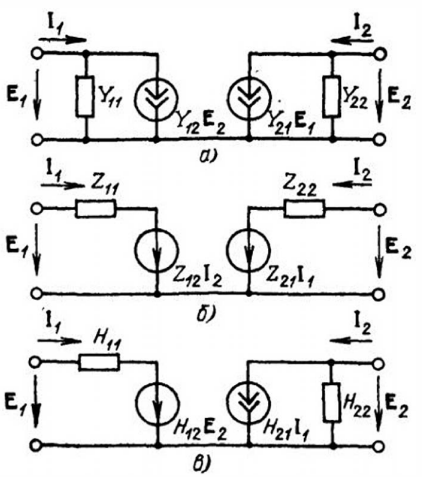


Рис. 5.2. Схемы замещения четырехполюсника, основанные на матрице: *а*) *Y*-параметров; *б*) *Z*-параметров; *в*) *H*-параметров

Здесь необходимо отметить следующую особенность активного четырехполюсника: как правило, $Y_{21} \neq Y_{12}$ или $Z_{21} \neq Z_{12}$, $H_{21} \neq H_{12}$. Это означает, что активные четырехполюсники *необратимы* и, следовательно, принцип взаимности к активным четырехполюсникам неприменим.

Взаимные проводимости или сопротивления пассивных четырехполюсников, как известно, равны (теорема взаимности). Это позволяет схемы замещения, показанные, например, на рис. 5.2, *а* и *б*, упростить для пассивного четы-

[1] Наличие общей шины на рис. 5.2 и в последующих аналогичных схемах позволяет говорить о трехполюснике. Это не влияет на уравнения цепи.

Рис. 5.3. Преобразование схем замещения, изображенных на рис. 5.2, *а* и *б*, справедливое только для пассивного четырехполюсника

рехполюсника и привести их к виду, при котором зависимые источники отсутствуют (рис. 5.3).

При анализе радиоэлектронных цепей особенно часто приходится иметь дело с четырехполюсниками, возбуждаемыми только со стороны входа; под выходным напряжением при этом подразумевается падение напряжения на сопротивлении нагрузки $Z_н = 1/G_н$, т. е. $\dot{E}_2 = -\dot{I}_2 Z_н$. В подобных случаях нагрузочный элемент целесообразно вводить внутрь четырехполюсника.

При представлении четырехполюсника с помощью Y-матрицы получается схема замещения, показанная на рис. 5.4, *а*, которая отличается от схемы на рис. 5.2, *а* только тем, что нагрузочная проводимость $G_н$ введена в четырехполюсник. Это позволяет рассматривать новый четырехполюсник как разомкнутый, у которого ток на выходе $\dot{I}_2' = 0$. Матрица параметров этого нового четырехполюсника

$$[Y]' = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22}' \end{bmatrix}, \tag{5.12}$$

где $Y_{22}' = Y_{22} + G_н$.

Второе уравнение (5.1) принимает при этом вид

$$\dot{I}_2' = Y_{21}\dot{E}_1 + Y_{22}'\dot{E}_2 = 0,$$

откуда следует важное соотношение

$$\frac{\dot{E}_2}{\dot{E}_1} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}'} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}+G_н}. \tag{5.13}$$

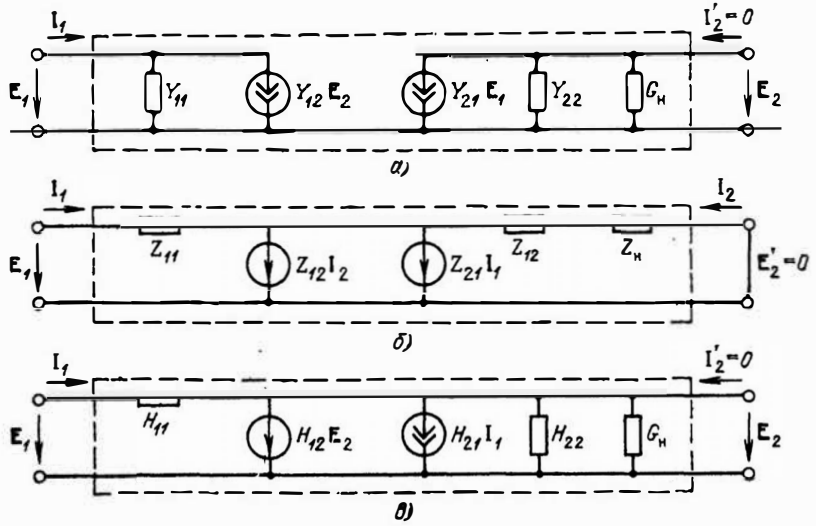


Рис. 5.4. Введение нагрузочного элемента в состав четырехполюсника

Исключив с помощью этого соотношения $\mathbf{E}_1$ из первого уравнения (5.1), а также учитывая, что $\mathbf{E}_2 = -\mathbf{I}_2 Z_н$, получим отношение токов

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{Y_{21}\, G_н}{Y_{11}\, Y'_{22} - Y_{12}\, Y_{21}} = \frac{Y_{21}\, G_н}{\Delta Y'}, \qquad (5.13')$$

где $\Delta Y' = Y_{11}\,(Y_{22} + G_н) - Y_{12}Y_{21}$ — определитель матрицы (5.12).

При использовании Z-матрицы схема замещения принимает вид, показанный на рис. 5.4, *б*. В данном случае выходные зажимы замкнуты накоротко ($\mathbf{E}'_2 = 0$), а матрица параметров

$$[Z]' = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z'_{22} \end{bmatrix},$$

где $Z'_{22} = Z_{22} + Z_н$.

Второе уравнение (5.4) при этом приводится к соотношению

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = -\frac{Z_{21}}{Z'_{22}} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_н}, \qquad (5.14)$$

а первое уравнение — к соотношению

$$\frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} = \frac{Z_{21}\, Z_н}{Z_{11}\, Z'_{22} - Z_{12}\, Z_{21}} = \frac{Z_{21}\, Z_н}{\Delta Z'}, \qquad (5.14')$$

где $\Delta Z' = Z_{11}\,(Z_{22} + Z_н) - Z_{12}Z_{21}$ — определитель матрицы $[Z]'$.

Наконец, второе уравнение (5.7) при подстановке $H'_{22} = H_{22} + G_н$ и $\mathbf{E}_2 = -\mathbf{I}_2 Z_н$ (рис. 5.4, *в*) дает

$$0 = H_{21}\,\mathbf{I}_1 + H'_{22}\,\mathbf{E}_2 = H_{21}\,\mathbf{I}_1 - H'_{22}\,Z_н\,\mathbf{I}_2,$$

откуда следует соотношение

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{H_{21}}{H'_{22}\,Z_н} = \frac{H_{21}}{(H_{22} + G_н)\,Z_н} = \frac{H_{21}}{Z_н\,H_{22} + 1}. \qquad (5.15)$$

Исключив с помощью этого соотношения $\mathbf{I}_1$ из первого уравнения (5.7), получим

$$\frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} = -\frac{H_{21}}{H_{11}\,H'_{22} - H_{12}\,H_{21}} = -\frac{H_{21}}{\Delta H'}, \qquad (5.15')$$

где $\Delta H' = H_{11}\,(H_{22} + G_н) - H_{12}\,H_{21}$.

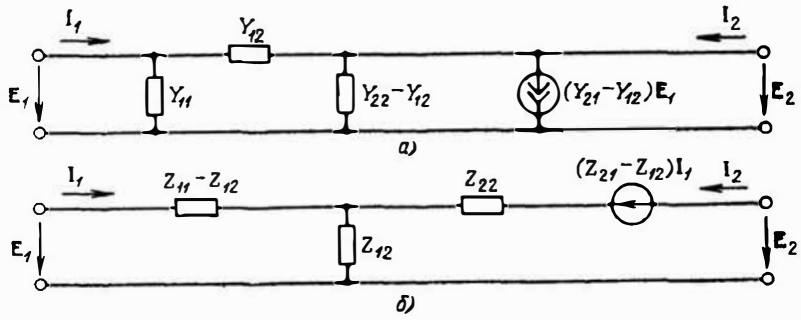


Рис. 5.5. Схемы замещения с одним зависимым источником тока (*а*) или напряжения (*б*) (элемент Z_{22} следует заменить на $Z_{22} - Z_{12}$)

Общие уравнения (5.1), (5.4) и (5.7) можно преобразовать таким образом, что соответствующие им схемы замещения четырехполюсника будут содержать только по одному зависимому источнику.

Так, записав второе уравнение (5.1) в форме

$$\mathbf{I}_2 = Y_{12}\,\mathbf{E}_1 + Y_{22}\,\mathbf{E}_2 + (Y_{21} - Y_{12})\,\mathbf{E}_1, \tag{5.16}$$

приходим к схеме замещения, содержащей один зависимый источник тока $(Y_{21} - Y_{12})\ \mathbf{E}_1$ (рис. 5.5, *а*).

Аналогично записав второе уравнение (5.4) в форме

$$\mathbf{E}_2 = Z_{12}\,\mathbf{I}_1 + Z_{22}\,\mathbf{I}_2 + (Z_{21} - Z_{12})\,\mathbf{I}_1, \tag{5.16'}$$

приходим к схеме с одним зависимым источником напряжения $(Z_{21} - Z_{12})\ \mathbf{I}_1$ (рис. 5.5, *б*).

5.2. АКТИВНЫЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИК КАК ЛИНЕЙНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ

Приведенные в предыдущем параграфе выражения (5.13)—(5.15), записанные в форме

$$\mathbf{K}_E = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22} + G_н} = \frac{Z_{21}\,Z_н}{Z_{11}\,(Z_{22} + Z_н) - Z_{12}\,Z_{21}} =$$

$$= -\frac{H_{21}}{H_{11}\,(H_{22} + G_н) - H_{12}\,H_{21}}, \tag{5.17}$$

$$\mathbf{K}_I = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{Y_{21}\,G_н}{Y_{11}\,(Y_{22} + G_н) - Y_{12}\,Y_{21}} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_н} = \frac{H_{21}\,G_н}{H_{22} + G_н}, \tag{5.18}$$

можно рассматривать как коэффициенты усиления соответственно напряжения и тока активного четырехполюсника.

В широкополосных усилителях, как правило, усилительные приборы (транзисторы, лампы и др.) обеспечивают (при правильном выборе нагрузки) выполнение следующих неравенств:

$$G_н \gg Y_{22},\ Z_н \ll Z_{22}. \tag{5.19}$$

Поэтому при грубой оценке усилительной способности четырехполюсника можно исходить из приближенных равенств

$$|\mathbf{K}_E| \approx \left|\frac{Y_{21}}{G_н}\right|, \tag{5.20}$$

$$|\mathbf{K}_I| \approx \left|\frac{Z_{21}}{Z_{22}}\right|. \tag{5.21}$$

Отсюда следует, что коэффициент усиления мощности (выраженный в вольтамперах)

$$\mathbf{K}_P = |\mathbf{K}_E|\,|\mathbf{K}_I| \approx \to \approx \left|\frac{Y_{21}}{G_н}\right|\left|\frac{Z_{21}}{Z_{22}}\right| = \frac{|Y_{21}|^2}{|G_н\,Y_{11}|}. \tag{5.22}$$

(Здесь использованы соотношения между Z_{21}-, Z_{22}- и Y-параметрами из табл. 5.1.)

Из (5.22) очевидна решающая роль параметра Y_{21} (соответственно Z_{21} и H_{21}) в усилении мощности колебания в активном четырехполюснике. Физический смысл этого параметра раскрывается в следующих параграфах на примерах некоторых усилительных приборов.

При анализе активного четырехполюсника как усилителя важное значение имеют такие его параметры, как входное и выходное сопротивления. На рис. 5.6 представлена обобщенная схема, содержащая источник сигнала $\mathbf{E}_c$, активный четырехполюсник и сопротивление нагрузки $Z_н$.

Входное сопротивление (между зажимами 1—1′) легко определить с помощью уравнений (5.4) в сочетании с (5.14).

Подставив $\mathbf{I}_2$ из (5.14) в первое уравнение (5.4), получим

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{I}_1 \left(Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z'_{22}} \right) = \mathbf{I}_1 Z_{вх},$$

откуда

$$Z_{вх} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z'_{22}} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_н}. \tag{5.23}$$

Под выходным сопротивлением четырехполюсника поразумевается сопротивление между зажимами 2—2′ при $\mathbf{E}_c = 0$ (но с учетом внутреннего сопротивления источника сигнала Z_i). Сопротивление Z_i рассматривается при этом как нагрузка.

По аналогии с (5.23) при замене Z_{11} на Z_{22} и $Z_н$ на Z_i получаем

$$Z_{вых} = Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{11} + Z_i}. \tag{5.24}$$

При учете внутреннего сопротивления Z_i источника сигнала под коэффициентом усиления следует подразумевать отношение $\mathbf{E}_2/\mathbf{E}_c = \mathbf{K}_E$. Этот коэффициент можно найти с помощью формулы (5.17) добавлением Z_i к Z_{11} или H_{11}. Таким образом,

$$\mathbf{K}_E = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_c} = \frac{Z_{21} Z_н}{(Z_{11} + Z_i)(Z_{22} + Z_н) - Z_{12} Z_{21}} =$$

$$= - \frac{H_{21}}{(H_{11} + Z_i)(H_{22} + G_н) - H_{12} H_{21}}. \tag{5.25}$$

При использовании Y-матрицы нетрудно получить выражение

$$\mathbf{K}_E = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_c} = - \frac{Z_{вх}}{Z_i + Z_{вх}} \frac{Y_{21}}{Y_{22} + G_н}. \tag{5.26}$$

Выбор наиболее удобной для практики системы параметров зависит от типа усилительного прибора и схемы его включения. Поясним это на примере широко распространенного усилителя на транзисторе, включенном по схеме с общим эмиттером (ОЭ) (рис. 5.7, *а*).

Особенностью работы транзистора в схеме с ОЭ является управление током коллектора с помощью воздействия на ток базы. Кроме того, необходимо учитывать обратное воздействие выходного напряжения $\mathbf{U}_{вых}$ на входную цепь. Эти свойства транзистора удобно описываются уравнениями четырехполюсника (5.7). В связи с этим в теории и технике транзисторных усилителей общепринята матрица H-параметров, которой соответствует схема замещения, показанная на рис. 5.2, *в*.

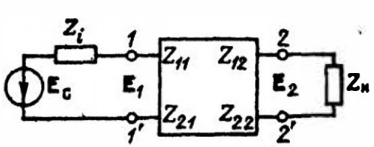


Рис. 5.6. Обобщенная схема активного четырехполюсника с учетом параметров источника сигнала и нагрузки

Выше было показано, что усилительная способность активного четырехполюсника в основном определяется безразмерным

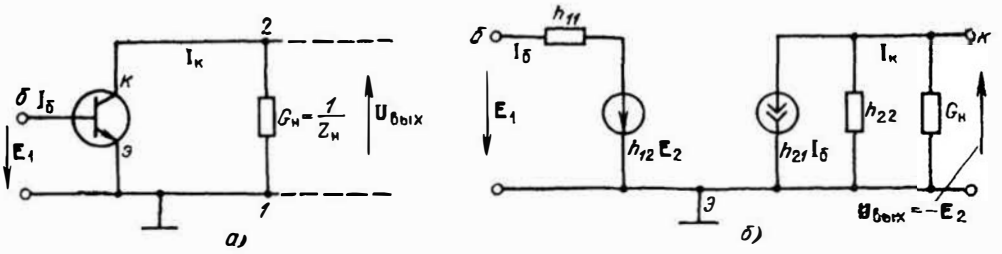


Рис. 5.7. Транзисторный усилитель (*а*) и его схема замещения (*б*)

параметром H_{21} (соответственно Y_{21} и Z_{21}). Для усилителя с ОЭ этот параметр совпадает с отношением токов $\beta = I_к/I_б$. Он входит в паспортные данные биполярного транзистора и обозначается символом $h_{21э}$.

В соответствии с новыми обозначениями схема замещения[1] транзисторного усилителя принимает вид, показанный на рис. 5.7, *б*, а формулы (5.17), (5.18) запишутся в виде

$$\mathbf{K}_E = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} = -\frac{h_{21э}}{h_{11}(h_{22}+G_н) - h_{21э}\,h_{12}}, \tag{5.27}$$

$$\mathbf{K}_I = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{h_{21э}\,G_н}{h_{22}+G_н}. \tag{5.27'}$$

Напомним, что h_{11} имеет смысл входного сопротивления база—эмиттер (при коротком замыкании выходной цепи), h_{12} — коэффициент обратной связи по напряжению (при разомкнутой входной цепи) и h_{22} — выходная проводимость транзистора (при разомкнутой входной цепи).

В новых обозначениях второе уравнение (5.7) принимает следующий вид

$$\mathbf{I}_к = h_{21э}\,\mathbf{I}_б + h_{22}\,\mathbf{E}_2 = h_{21э}\,\mathbf{I}_б - h_{22}\,\mathbf{U}_{вых}, \tag{5.28}$$

где $\mathbf{U}_{вых} = \mathbf{I}_к Z_н = -\mathbf{E}_2$ — напряжение, развиваемое на сопротивлении $Z_н = 1/G_н$.

Далее, ток базы $\mathbf{I}_б$ можно представить в виде отношения $\mathbf{E}_1/Z_{вх}$, где $Z_{вх}$ — входное сопротивление транзистора (между зажимами база—эмиттер), определяемое формулой (5.23).

Таким образом, при активных сопротивлениях, когда $Z_{вх} = R_{вх}$,

$$\mathbf{I}_к \approx (h_{21э}/R_{вх})\,\mathbf{E}_1 - h_{22}\,\mathbf{U}_{вых} \approx S\,\mathbf{E}_1 - h_{22}\,\mathbf{U}_{вых} \approx S\,\mathbf{E}_1 + h_{22}\,\mathbf{E}_2. \tag{5.29}$$

Заметим, что если задана характеристика $i_б\,(u_{бэ})$, то тем самым задана и характеристика $i_к\,(u_{бэ}) = \beta i_б\ \ (u_{бэ})$.

Для схемы с ОЭ, как ранее отмечалось, имеет место равенство $\beta \approx h_{21э}$, поэтому параметр

$$S = \frac{h_{21э}}{R_{вх}} \approx h_{21э}\frac{I_б}{E_1} = \frac{I_к}{E_1} \tag{5.30}$$

можно трактовать как крутизну характеристики $i_к\,(u_{бэ})$ в точке $u_{бэ} = U_{БЭ0}$.

На основании выражения (5.29) можно построить схему замещения выходной цепи усилителя, показанную на рис. 5.8, *а*. Символом R_i на рис. 5.8, *а* обозначено внутреннее сопротивление источника тока. Для транзистора в усилителе с ОЭ $R_i = 1/h_{22}$.

[1] Инерционные свойства транзистора этой схемой не учитываются.

Из сравнения уравнения (5.30) с (5.1) следует, что введенный выше параметр S совпадает с параметром Y_{21} (для схемы с ОЭ). Подставив в (5.29) $\mathbf{I}_к = -G_н \mathbf{E}_2$ и разделив полученное уравнение на $\mathbf{E}_1$, приходим к следующей формуле:

$$\mathbf{K}_E \approx -S/(h_{22} + G_н) = -h_{21э} R_{вх} (h_{22} + G_н),$$

которая отличается от (5.27) лишь внешне.

В тех случаях, когда проводимость h_{22} мала по сравнению с проводимостью нагрузки $G_н$, можно пользоваться приближенными формулами

$$\mathbf{K}_E \approx -S/G_н = -SZ_н, \tag{5.31}$$

$$\mathbf{K}_I \approx h_{21э}. \tag{5.32}$$

Работа транзисторного усилителя по схеме с ОЭ в режиме малого сигнала иллюстрируется рис. 5.8, *б*. Амплитуда переменного тока коллектора $I_н$ во много раз меньше постоянного тока $I_{К0}$, соответствующего напряжению смещения $U_{бэ0}$.

Приведем аналогичный пример для усилителя на электронной лампе. Схема простейшего усилителя на пентоде изображена на рис. 5.9, *а*. При малом сигнале (режим линейного усиления) связь между анодным током и напряжениями сетка—катод, анод—катод определяется соотношением

$$i_а = Su_{ск} + (1/R_i)\, u_{ак} = S\,(u_{ск} + Du_{ак}), \tag{5.33}$$

где

$$S = \frac{di_а}{du_{ск}} \quad \text{при } u_{ск} = E_{с0},\ u_{ак} = E_{а0};$$

$$\frac{1}{R_i} = \frac{di_а}{du_{ак}} \quad \text{при } u_{ск} = E_{с0},\ u_{ак} = E_{а0};$$

$D = 1/SR_i$ — проницаемость по управляющей сетке (соотношение справедливо при работе без сеточного тока).

Крутизна S характеристики $i_а\,(u_{ск})$ и внутреннее сопротивление пентода R_i являются дифференциальными параметрами, определенными при незначительных отклонениях тока $i_а$ от исходного значения $i_{а0}$ в рабочей точке на вольт-амперной характеристике пентода.

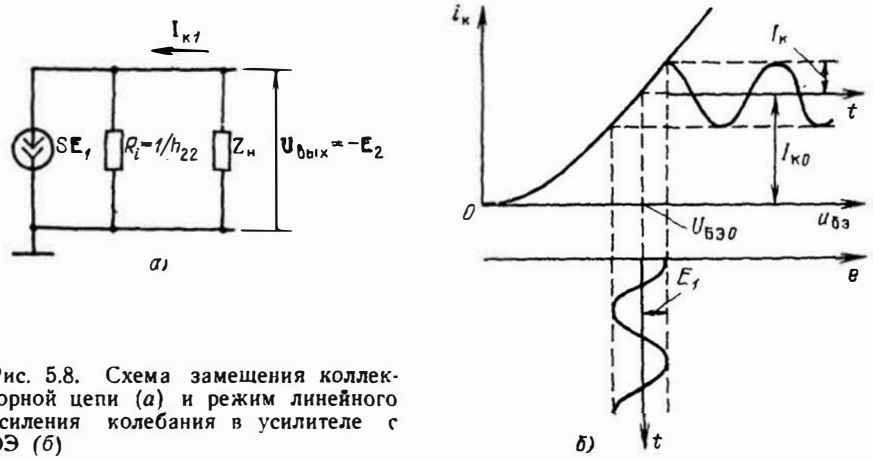


Рис. 5.8. Схема замещения коллекторной цепи (*а*) и режим линейного усиления колебания в усилителе с ОЭ (*б*)

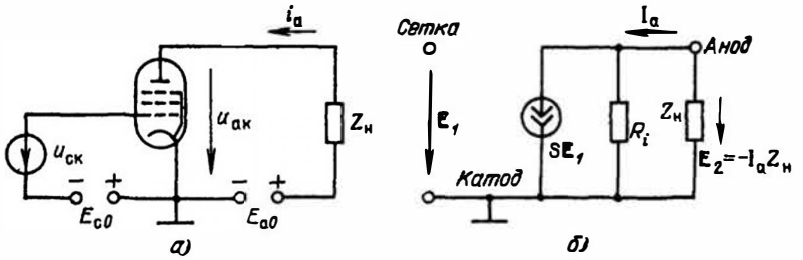


Рис. 5.9. Простейший усилитель на пентоде (*а*) и схема замещения анодной цепи (*б*)

Знак плюс перед вторым слагаемым в выражении (5.33) выбран в связи с тем, что $u_{ак}$ в данном случае рассматривается как напряжение независимого источника.

Для тока цепи сетки можно составить выражение, аналогичное (5.33)

$$i_c = (1/R_{ск})\, u_{ск} + S_{са}\, u_{ак}. \tag{5.34}$$

В данном случае наиболее удобна система Y-параметров.

Переходя к комплексным амплитудам и имея в виду общую схему замещения активного четырехполюсника (рис. 5.2,*а*), заменяем $u_{ск}$ амплитудой $\mathbf{E}_1$ входного гармонического сигнала, ток i_c в цепи сетки — амплитудой $\mathbf{I}_1$, а ток i_a — амплитудой $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_a$. Как и в предыдущем параграфе [см. вывод формулы (5.13′)] полагаем $\mathbf{E}_2 = -\mathbf{I}_a Z_н = -U_{вых}$. Тогда уравнения (5.1) и (5.3) запишутся так:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1}{R_{ск}}\mathbf{E}_1 + S_{са}\mathbf{E}_2,\ \mathbf{I}_2 = S\mathbf{E}_1 = \frac{1}{R_i}\mathbf{E}_2;$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} 1/R_{ск} & S_{са} \\ S & 1/R_i \end{bmatrix}. \tag{5.35}$$

При усилении слабых сигналов рабочая точка на характеристике $i_a(u_{ск})$, как правило, устанавливается в области отрицательных напряжений $u_{ск}$. В этом случае ток сетки отсутствует, входная проводимость сетка—катод практически равна нулю ($R_{ск} \to \infty$) и матрица проводимостей принимает вид

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & 1/R_i \end{bmatrix}. \tag{5.36}$$

Таким образом, $Y_{11} = Y_{12} = 0$, $Y_{21} = S$, $Y_{22} = 1/R_i$.

Матрице (5.36) соответствует схема замещения четырехполюсника (трехполюсника), представленная на рис. 5.9, *б*.

Используя формулу (5.17), находим коэффициент усиления напряжения

$$\mathbf{K}_E = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} = -\frac{S}{1/R_i + 1/\mathbf{Z}_н} = -\frac{SR_i\,\mathbf{Z}_н}{R_i + \mathbf{Z}_н} = -\frac{\mu\,\mathbf{Z}_н}{R_i + \mathbf{Z}_н}, \tag{5.37}$$

где $\mu = SR_i = 1/D$ — коэффициент усиления лампы.

Из (5.37) видно, что усилительная способность лампы используется тем полнее, чем больше отношение $Z_н/R_i$. В холостом режиме ($Z_н \to \infty$) коэффициент усиления каскада

$$\max K_E \to -\mu = -SR_i = -S/G_i.$$

5.3. ЧАСТОТНЫЕ И ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

Приведенные в предыдущем параграфе выражения (5.17), (5.18) для коэффициентов усиления $\mathbf{K}_E$ и $\mathbf{K}_I$ можно трактовать как передаточные функции линейного активного четырехполюсника. Характер этих функций определяется частотными свойствами параметров Z и Y.

Записав $\mathbf{K}_E$ и $\mathbf{K}_I$ в виде функций $\mathbf{K}_E(i\omega)$, $\mathbf{K}_I(i\omega)$, приходим к понятию *передаточная функция* линейного активного четырехполюсника $\mathbf{K}(i\omega)$. Безразмерная в общем случае комплексная функция $\mathbf{K}(i\omega)$ является исчерпывающей характеристикой четырехполюсника в частотной области. Она определяется в стационарном режиме при гармоническом возбуждении четырехполюсника.

Передаточную функцию часто удобно представлять в форме

$$\mathbf{K}(i\omega) = K(\omega)e^{i\varphi(\omega)}. \tag{5.38}$$

Модуль $K(\omega)$ иногда называют амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) четырехполюсника. Аргумент $\varphi(\omega)$ называют фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) четырехполюсника.

Другой исчерпывающей характеристикой четырехполюсника является его импульсная характеристика $g(t)$, которая используется для описания цепи во временной области.

Для активных линейных цепей, как и для пассивных, под импульсной характеристикой цепи $g(t)$ подразумевается отклик, реакция цепи на воздействие, имеющее вид единичного импульса (дельта-функции). Связь между $g(t)$ и $\mathbf{K}(i\omega)$ нетрудно установить с помощью интеграла Фурье.

Если на входе четырехполюсника действует единичный импульс (дельта-функция) ЭДС со спектральной плотностью, равной единице для всех частот, то спектральная плотность выходного напряжения равна просто $\mathbf{K}(i\omega)$. Отклик на единичный импульс, т. е. импульсная характеристика цепи, легко определяется с помощью обратного преобразования Фурье, примененного к передаточной функции $\mathbf{K}(i\omega)$:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{K}(i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{5.39}$$

При этом необходимо учитывать, что перед правой частью этого равенства имеется множитель 1 с размерностью площади дельта-функции. В частном случае, когда имеется в виду δ-импульс напряжения, эта размерность будет [вольт $\times$ секунда].

Соответственно функция $\mathbf{K}(i\omega)$ является преобразованием Фурье импульсной характеристики:

$$\mathbf{K}(i\omega) = \int_{0}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}\,dt. \tag{5.40}$$

В данном случае перед интегралом имеется в виду множитель единица с размерностью [вольт $\times$ секунда]$^{-1}$.

В дальнейшем импульсную характеристику будем обозначать функцией $g(t)$, под которой можно подразумевать не только напряжение, но и любую другую электрическую величину, являющуюся откликом на воздействие в виде дельта-функции.

Как и при представлении сигналов на плоскости комплексной частоты (см. § 2.14), в теории цепей широко распространено понятие передаточной функции $\mathbf{K}(p)$[1], рассматриваемой как преобразование Лапласа от функции $g(t)$:

$$\mathbf{K}(p) = \int_0^\infty g(t)\, e^{-pt}\, dp. \tag{5.41}$$

Переходная функция цепи $h(t)$ представляет собой отклик, реакцию цепи на воздействие, имеющее вид «единичного скачка». Так как такое воздействие является интегралом от единичного импульса (т. е. дельта-функции), то и между $h(t)$ и $g(t)$ существует интегральное соотношение

$$h(t) = \int_0^t g(x)\, dx. \tag{5.42}$$

В последующих главах при анализе передачи сигналов через радиоцепи в основном будет применяться импульсная характеристика $g(t)$.

5.4. АПЕРИОДИЧЕСКИЙ УСИЛИТЕЛЬ

Схема замещения простейшего апериодического резистивного усилителя представлена на рис. 5.10. Усилительный прибор обозначен в виде зависимого источника тока $S\mathbf{E}_1$ с внутренней проводимостью $G_i = 1/R_i$. Емкость C_0 включает в себя межэлектродную емкость активного элемента и емкость внешней цепи, шунтирующие нагрузочный резистор $R_н = 1/G_н$. Схема на рис. 5.10 является обобщенной, она применима к любому активному элементу.

Для транзисторного усилителя под крутизной S следует подразумевать величину $h_{21э}/R_{вх}$ (см. § 5.2), а под G_i — параметр h_{22}. Подставив в формулу (5.27) проводимость G_i вместо h_{22}, а также $\mathbf{G}_н = 1/R_н + i\omega C_0 = G_н + i\omega C_0$, получим передаточную функцию однокаскадного усилителя

$$\mathbf{K}_1(i\omega) = -\frac{S}{G_i + G_н + i\omega C_0} = -\frac{S/(G_i + G_н)}{1 + i\omega C_0/(G_i + C_н)} = -\frac{K_{1\,max}}{1 + i\omega\tau_1}, \tag{5.43}$$

где

$$K_{1\,max} = S/(G_i + G_н) \tag{5.44}$$

— максимальный коэффициент усиления (при $\omega = 0$); $\tau_1 = C_0/(G_i + G_н) = R_э C_0$ — постоянная времени цепи, состоящей из конденсатора C_0, шунтированного резистором $R_э = 1/(G_i + G_н)$.

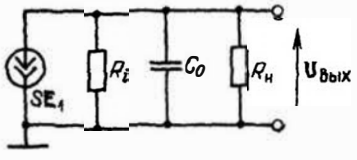


Рис. 5.10. Схема замещения резистивного усилителя

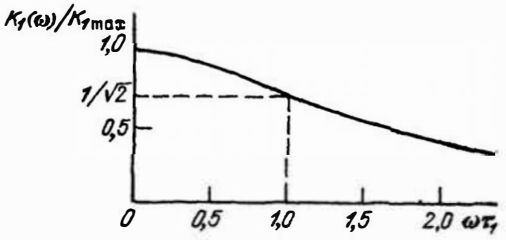


Рис. 5.11. Амплитудно-частотная характеристика апериодического усилителя, представленного на рис. 5.10

[1] Здесь и в дальнейшем обозначения передаточной функции цепи, рассматриваемой как преобразование Фурье или Лапласа от импульсной характеристики $g(t)$, будут различаться только аргументом $K(i\omega)$ или $K(p)$ (см. § 2.13).

Запишем (5.43) в форме

$$\mathbf{K}_1(i\omega) = -K_1(\omega)\, e^{i\varphi_1(\omega)} = -\frac{K_{1\,max}}{\sqrt{1+(\omega\tau_1)^2}}\, e^{i\varphi_1(\omega)}, \qquad (5.45)$$

откуда вытекают следующие выражения для амплитудно- и фазо-частотной характеристик:

$$K_1(\omega) = K_{1\,max}/\sqrt{1+(\omega\tau_1)^2}, \qquad (5.46)$$

$$\varphi_1(\omega) = -\text{arctg}\,\omega\tau_1. \qquad (5.47)$$

При изменении частоты ω получается АЧХ, изображенная на рис. 5.11.

Полоса пропускания усилителя $\Delta\omega_1$, определяемая по ослаблению на границах до $1/\sqrt{2}$ от максимального уровня (при $\omega = 0$), легко находится из условия

$$K_1(\Delta\omega_1) = K_{max}/\sqrt{1+(\Delta\omega_1\tau_1)^2} = K_{1\,max}/\sqrt{2}, \qquad (5.48)$$

откуда $\Delta\omega_1\tau_1 = 1$; $\Delta\omega_1 = 1/\tau_1$.

5.5. КАСКАДНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ИДЕНТИЧНЫХ АПЕРИОДИЧЕСКИХ УСИЛИТЕЛЕЙ

Однокаскадный усилитель позволяет получить относительно небольшое усиление — в десятки или сотни раз. Обычно требуется во много раз большее усиление. Эта задача решается с помощью многокаскадных усилителей, составленных из нескольких, обычно одинаковых, ступеней. Современная микроэлектронная элементная база позволяет почти полностью исключить влияние выходной цепи на входную. Это позволяет считать отдельные каскады «развязанными», благодаря чему результирующая передаточная функция всего усилителя может быть выражена произведением передаточных функций отдельных каскадов, *рассматриваемых порознь*. Если к тому же все каскады идентичны, то при общем их числе n передаточная функция всего усилителя

$$\mathbf{K}_n(i\omega) = [\mathbf{K}_1(i\omega)]^n = \left(-\frac{K_{1\,max}}{1+i\omega\tau_1}\right)^n = (-1)^n K_n(\omega)\, e^{in\varphi_1(\omega)}. \qquad (5.49)$$

Здесь

$$K_n(\omega) = K_{1\,max}^n/[1+(\omega\tau_1)^2]^{n/2} \qquad (5.50)$$

и

$$n\varphi_1(\omega) = -n\,\text{arctg}\,\omega\tau_1 \qquad (5.51)$$

представляют собой соответственно АЧХ и ФЧХ всего усилителя.

Из выражения (5.51) видно, что ФЧХ усилителя $\varphi_n = n\varphi_1$ совпадает по форме с ФЧХ одного звена φ_1, но ее масштаб по оси ординат возрастает в n раз. Амплитудно-частотная характеристика $K_n(\omega)$ изменяется по форме: с увеличением n она становится острее.

Рассмотрим более подробно характеристики двухкаскадного усилителя. При $n = 2$

$$K_2(\omega) = K_{1\,max}^2/[1+(\omega\tau_1)^2]. \qquad (5.52)$$

Полоса пропускания $\Delta\omega_2$, определяемая, как и ранее, по ослаблению $K_2(\omega)$ на границах до $1/\sqrt{2}$ от максимального значения (при $\omega = 0$), должна отвечать условию $1 + (\Delta\omega_2\tau_1)^2 = \sqrt{2}$, откуда следует равенство

$$\Delta\omega_2\tau_1 = \sqrt{\sqrt{2}-1} \approx 0{,}644. \qquad (5.53)$$

Таким образом, полоса пропускания всего усилителя составляет 0,64 от полосы каждого из каскадов ($\Delta\omega_1\tau_1 = 1$).

При $n = 3$ АЧХ усилителя принимает вид

$$K_3(\omega) = K_{1\,max}^3/[1 + (\omega\tau_1)^2]^{3/2}. \tag{5.54}$$

Полоса пропускания $\Delta\omega_3\tau_1$ определяется из условия $[1 + (\Delta\omega_3\tau_1)^2]^{3/2} = \sqrt{2}$, откуда получается равенство

$$\Delta\omega_3\tau_1 = \sqrt{2^{1/3} - 1} \approx 0{,}51. \tag{5.55}$$

Нетрудно обобщить полученные результаты на любое значение n:

$$\Delta\omega_n\tau_1 = \sqrt{2^{1/n} - 1}. \tag{5.56}$$

В табл. 5.2 приведены значения $\Delta\omega_n\tau_1$ для различных n.

Обычно задается определенная полоса пропускания усилителя в целом. Поэтому с увеличением числа каскадов полосу пропускания каждого из них необходимо увеличивать. Например, при заданной полосе двухкаскадного усилителя $\Delta\omega_2$ полоса пропускания одного каскада, равная $1/\tau_1$, должна быть $\Delta\omega_2/0{,}644 = 1{,}55\Delta\omega_2$ (см. табл. 5.2). Представляет интерес выявить зависимость формы АЧХ от n при *заданной* и *неизменной* полосе пропускания усилителя в целом. С этой целью обратимся к формуле (5.52) и представим знаменатель правой части в виде показательной функции. Основываясь на соотношении $a^N = e^{N \ln a}$, записываем

$$[1 + (\omega\tau_1)^2]^{n/2} = e^{\frac{n}{2}\ln[1 + (\omega\tau_1)^2]}. \tag{5.57}$$

Обозначив $(\omega\tau_1)^2 = x$, представим $\ln(1 + x)$ в виде степенного ряда:

$$\ln(1 + x) = x + {}^1/_2x^2 + {}^1/_3x^3 + \ldots \text{ при } |x| \leqslant 1. \tag{5.58}$$

Из табл. 5.2 следует, что при $n > 1$ в пределах полосы пропускания $\Delta\omega_n\tau_1$ величина $\omega\tau_1$ значительно меньше единицы, а $x = (\omega\tau_1)^2 \ll 1$. Так, уже при $n = 3$, $x \leqslant 0{,}51^2 \approx 0{,}25$ и второй член в разложении (5.58), т. е. ${}^1/_2x^2$, не превышает $\approx 0{,}03$. Можно поэтому ограничиться лишь первым членом в разложении (5.58): $\ln(1 + x) \approx x = (\omega\tau_1)^2$.

При этом (5.57) переходит в

$$[1 + (\omega\tau_1)^2]^{n/2} \approx e^{\frac{n}{2}(\omega\tau_1)^2},$$

и модуль передаточной функции будет

$$K_n(\omega) = K_{1\,max}^n\, e^{-n\tau_1^2\omega^2/2}. \tag{5.59}$$

Итак, с увеличением n форма АЧХ приближается к колоколообразной. Это свойство многокаскадного усилителя, составленного из идентичных, взаимно независимых каскадов, часто используется для построения фильтров с колоколообразной АЧХ (гауссовских фильтров). Вопрос об усилении сиг-

Таблица 5.2

n	1	2	3	4	5	6
$\Delta\omega_n\tau_1$	1	0,644	0,510	0,435	0,386	0,336

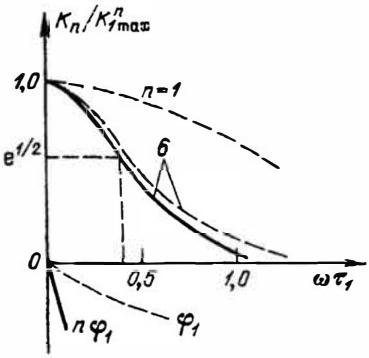


Рис. 5.12. Амплитудно- и фазочастотная характеристики шестикаскадного усилителя

нала является при этом второстепенным, основное значение имеет увеличение крутизны скатов АЧХ, а также скорости убывания «хвостов» АЧХ (см. § 2.12).

При $\omega = 1/\sqrt{n}\tau_1$ последнее выражение приводит к соотношению

$$K_n(\omega) = K_{1\max}^n e^{-1/2}.$$

Следовательно, величину $\Delta\omega_0 = 1/\sqrt{n}\tau_1$ можно трактовать как полосу пропускания гауссовского фильтра, определяемую по ослаблению АЧХ до $e^{-1/2} = 0{,}606$ от максимального значения $K_{1\max}^n$.

Если задана полоса фильтра $\Delta\omega_0$, то полоса пропускания одного каскада должна быть $\Delta\omega_1 = 1/\tau_1 = \sqrt{n}\,\Delta\omega_0$.

Определим ФЧХ подобного фильтра. В общем случае ФЧХ определяется формулой (5.53). Учитывая, однако, что $\omega\tau_1 \ll 1$ [см. рассуждения, приводящие к формуле (5.59)], можно исходить из упрощенного выражения

$$\varphi_n(\omega) \approx -n\omega\tau_1. \tag{5.60}$$

Таким образом, окончательно передаточная функция n-каскадного усилителя-фильтра (при $n \gg 1$)

$$\mathbf{K}_n(i\omega) \approx K_{1\max}^n e^{-\omega^2/2\omega_0^2} e^{-in\omega\tau_1} \tag{5.61}$$

[множитель $(-1)^n$ опущен].

Амплитудно- и фазо-частотная характеристики шестикаскадного усилителя изображены на рис. 5.12. АЧХ одного каскада, а также шестикаскадного усилителя, вычисленные по точным формулам (5.46) и (5.49), показаны штриховой линией. Последняя получается возведением в шестую степень характеристики одиночного каскада. Характеристика соответствующего гауссовского фильтра, вычисленная по приближенной формуле (5.59), показана сплошной линией.

5.6. РЕЗОНАНСНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ

Схема простого резонансного усилителя на транзисторе с ОЭ (рис. 5.13, *а*) отличается от апериодического усилителя только цепью нагрузки. В данном случае нагрузкой является резистор $R_ш$, шунтирующий параллельный колебательный контур L C. Как правило, потерями мощности в катушки индуктивности L и конденсаторе C можно пренебречь по сравнению с мощностью, выделяемой в резисторе $R_ш$. При этом условии полная проводимость нагрузки (между зажимами *1—2*)

$$G_н = G_ш + i\omega C + 1/i\omega L.$$

Приведем основные параметры контура LC с шунтом $R_ш$:

резонансная частота $\omega_р = 1/\sqrt{LC}$;

характеристическое сопротивление $\rho = \sqrt{L/C} = \omega_р L = 1/\omega_р C$;

затухание $\alpha_к = 1/2R_ш C$;

постоянная времени $\tau_к = 2R_ш C = 1/\alpha_к$;

добротность $Q = \dfrac{R_ш}{\rho} = \dfrac{R_ш}{1/\omega_р C} = \dfrac{\omega_р \tau_к}{2} = \dfrac{\omega_р}{2\alpha_к}$.

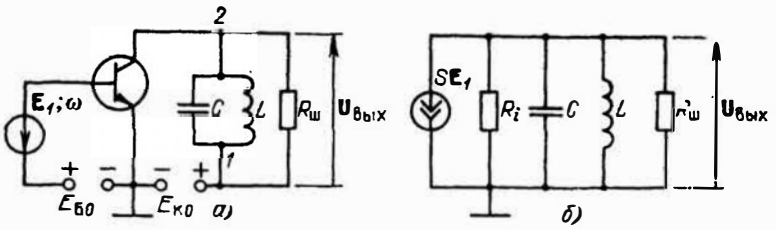


Рис. 5.13. Резонансный усилитель (*а*) и схема замещения коллекторной цепи (*б*)

Исходя из схемы замещения усилителя (рис. 5.13, *б*) и основываясь на формуле (5.27′) (с заменой h_{22} на G_i), определяем передаточную функцию усилителя

$$\mathbf{K}_E(i\omega) = -\frac{S}{G_i+G_н} = \frac{S}{G_i+G_ш+i\omega C+1/i\omega L} = -\frac{S}{C}\times$$

$$\times\frac{i\omega}{\frac{(G_i+G_ш)}{C}i\omega+(i\omega)^2+\frac{1}{LC}}. \qquad (5.62)$$

Слагаемое $(G_i + G_ш)/C = 1/R_эC = 2\alpha_эк$ в знаменателе выражения (5.62) учитывает шунтирующее влияние активного элемента на затухание контура.

С учетом приведенных выше обозначений параметров контура передаточная функция (5.62) приводится к виду

$$\mathbf{K}_E(i\omega) = -\frac{S}{C}\frac{i\omega}{(i\omega)^2+2\alpha_эк\,i\omega+\omega_р^2} \qquad (5.63)$$

или

$$\mathbf{K}_E(p) = -\frac{S}{C}\frac{p}{p^2+2\alpha_эк\,p+\omega_р^2}. \qquad (5.64)$$

Для высокодобротных контуров основным параметром является значение передаточной функции усилителя на частотах, близких к резонансной частоте $\omega_р$. В этом случае выражение (5.63) можно привести к виду

$$\mathbf{K}(i\omega)\approx -\frac{S}{C}\frac{1}{2\alpha_эк}\frac{1}{1+i\frac{2(\omega-\omega_р)}{\omega_р}Q_эк} = -K_{max}\frac{1}{1+i(\omega-\omega_р)\tau_эк}, \qquad (5.65)$$

где $K_{max} = S/(G_i + G_ш)$ — максимальное усиление (на частоте $\omega = \omega_р$); $\tau_эк$ — постоянная времени контура с учетом влияния внутренней проводимости активного элемента G_i.

Величину

$$a_эк = \frac{2(\omega-\omega_р)}{\omega_р}Q_эк = (\omega-\omega_р)\tau_эк \qquad (5.66)$$

часто называют обобщенной расстройкой контура.

Итак, выражение (5.65) можно записать в форме

$$\mathbf{K}(i\omega) = -\frac{K_{max}}{\sqrt{1+a_эк^2}}e^{-i\,\mathrm{arctg}\,a_эк} = -K(a_эк)e^{-i\varphi(a_эк)}. \qquad (5.65')$$

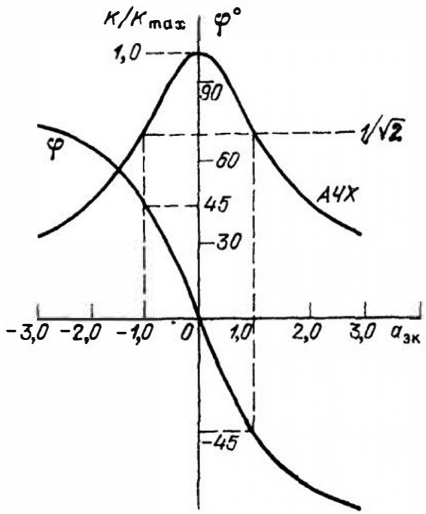


Рис. 5.14. Амплитудно- и фазо-частотная характеристики одноконтурного резонансного усилителя

Характеристики $K(a_{эк})$ и $\psi(a_{эк})$ резонансного усилителя представлены на рис. 5.14.

Относительная полоса пропускания резонансного усилителя, определяемая по ослаблению амплитуды на границах полосы до $1/\sqrt{2}$ от максимального уровня (при $a_{эк} = 0$) и выраженная через обобщенную расстройку $a_{эк}$, равна 2 (см. рис. 5.14). Для перехода от безразмерной относительной полосы пропускания 2 к размерной полосе $2\Delta\omega_0$ положим в (5.66) $|a_{эк}| = 1$, а $|\Delta\omega| = \Delta\omega_0$. Тогда

$$2\Delta\omega_0 = \omega_0/Q_{эк},$$

где $Q_{эк}$, как это следует из (5.66), добротность нагруженного контура.

В заключение приведем упрощенное выражение для импульсной характеристики резонансного усилителя

$$g(t) \approx (-S/C)\, e^{-t/\tau_{эк}} \cos \omega_p t. \quad (5.67)$$

Сопоставление выражений (5.65) и (5.43) указывает на то, что передаточную функцию резонансного усилителя можно получить посредством сдвига передаточной функции соответствующего апериодического усилителя на оси частот на величину ω_p. Следует лишь постоянную времени $\tau_1 = C_0/(G_i + G)$ приравнять величине $\tau_{эк}$.

Все сказанное можно распространить также и на каскадное соединение идентичных резонансных усилителей. Приведенная формула (5.61) позволяет сразу написать аналогичное выражение для передаточной функции резонансного n-каскадного усилителя (фильтра)

$$\mathbf{K}_n(i\omega) = K_{1\,max}^n\, e^{-(\omega-\omega_p)^2/2\Delta\omega_{0n}^2}\, e^{-in(\omega-\omega_p)\tau_{эк}}, \quad (5.68)$$

где $\Delta\omega_{0n} = 1/\sqrt{n}\tau_{эк} = \Delta\omega_0\sqrt{n}$, а $\Delta\omega_0$ — полуширина полосы одного каскада.

5.7. ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ В АКТИВНОМ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКЕ

При анализе линейных усилителей в § 5.2—5.6 на базе матриц параметров эквивалентных четырехполюсников основное внимание уделялось параметрам Y_{21}, Z_{21}, H_{21}, поскольку именно эти параметры определяют усилительную способность активного четырехполюсника. В реальных, не полностью однонаправленных активных четырехполюсниках приходится считаться с воздействием выходного колебания на вход усилителя.

Пусть в рабочем режиме усилителя напряжение и ток на выходе будут $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{I}_2$. Рассматривая эти величины как результат внешнего воздействия со стороны выхода, можно определить $\mathbf{I}_1'$ и $\mathbf{E}_2'$ на входе с помощью схемы замещения (рис. 5.15). На этой схеме зажимы 1—$1'$, к которым подключен входной источник сигнала, условно замкнуты накоротко, а под напряжением, действующим на зажимах 2—$2'$, подразумевается $\mathbf{E}_1' = -Z_i\,\mathbf{I}_1'$, т. е. паде-

ние напряжения на внутреннем сопротивлении источника Z_i, создаваемое током $\mathbf{I}_1'$.

Уравнения (5.4) при обозначениях рис. 5.15 записываются в форме $\mathbf{E}_1' = -Z_i \mathbf{I}_1' = Z_{11}\mathbf{I}_1' + Z_{12}\mathbf{I}_2$, $\mathbf{E}_2 = Z_{21}\mathbf{I}_1' + Z_{22}\mathbf{I}_2$, откуда нетрудно получить соотношение

$$\frac{\mathbf{E}_1'}{\mathbf{E}_2} = Z_{12}\frac{Z_i}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} + Z_{22}Z_i} = Z_{12}\frac{Z_i}{\Delta Z + Z_{22}Z_i}. \qquad (5.69)$$

Напряжение $\mathbf{E}_1'$ часто называют напряжением *обратной реакции* или напряжением *обратной связи*. Элементом обратной связи является Z_{12}. При представлении эквивалентной схемы четырехполюсника с помощью Y или H-матрицы элементами обратной связи являются соответственно параметры Y_{12} и H_{12}.

Рассмотренную обратную связь, обусловленную физическими параметрами усилительного прибора, можно назвать *внутренней обратной связью*. Как правило, она приводит к нежелательным явлениям — зависимости параметров входной цепи усилителя от элементов нагрузки, к опасности нарушения устойчивости при некоторых условиях и т. д.

Рассмотрим основные понятия, касающиеся применения в усилителях *внешней обратной связи*. Наиболее простым способом ее осуществления является соединение выхода усилителя со входом при помощи двухполюсника (рис. 5.16). При соединении выхода со входом с помощью двухполюсника обратной связи Y_{oc} по схеме на рис. 5.16, *а* основной четырехполюсник целесообразно описывать с помощью Y-матрицы. Учитывая очевидное равенство $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_1' - Y_{oc}(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)$, а также соотношения между $\mathbf{I}_1'$, $\mathbf{I}_2'$ и $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ в виде уравнений (5.1), приходим к новой системе уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= (Y_{11} + Y_{oc})\mathbf{E}_1 + (Y_{12} - Y_{oc})\mathbf{E}_2, \\ \mathbf{I}_2 &= (Y_{21} - Y_{oc})\mathbf{E}_1 + (Y_{22} + Y_{oc})\mathbf{E}_2. \end{aligned} \qquad (5.70)$$

Таким образом, четырехполюснику с обратной связью по схеме на рис. 5.16, *а* соответствует матрица проводимостей

$$|Y|' = \begin{bmatrix} Y_{11} + Y_{oc} & Y_{12} - Y_{oc} \\ Y_{21} - Y_{oc} & Y_{22} + Y_{oc} \end{bmatrix}, \qquad (5.71)$$

из которой следует, что подключение двухполюсника Y_{oc} изменяет все элементы матрицы, в том числе и элемент обратной связи ($Y_{12} - Y_{oc}$ вместо Y_{12}).

Аналогично можно показать, что включение двухполюсника Z_{oc} по схеме на рис. 5.16, *б* приводит к матрице

$$|Z|' = \begin{bmatrix} Z_{11} + Z_{oc} & Z_{12} + Z_{oc} \\ Z_{21} + Z_{oc} & Z_{22} + Z_{oc} \end{bmatrix}. \qquad (5.72)$$

В схеме на рис. 5.16, *а* дополнительный ток, поступающий с выхода на вход по цепи обратной связи, равен $(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)Y_{oc}$; так как в усилителях обычно $\mathbf{E}_2 \gg \mathbf{E}_1$, то этот ток приближенно равен $\mathbf{E}_2 Y_{oc}$, т. е. пропорционален выходному напряжению. Поэтому схему на рис. 5.16, *а* можно называть схемой с *обратной связью по напряжению*. В схеме на рис. 5.16, *б*, в которой напряжение обратной связи пропорционально выходному току, осуществляется *обратная связь по току*. Можно, оче-

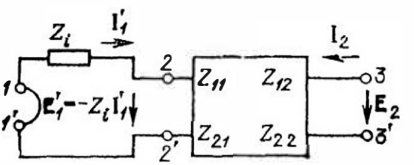


Рис. 5.15. К учету обратной реакции в усилителе

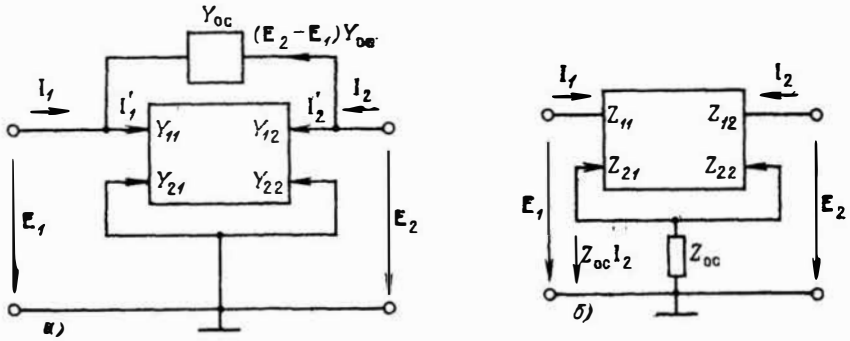


Рис. 5.16. Схема усилителей с обратной связью:
а) по напряжению; *б)* по току

видно, осуществить комбинированную обратную связь — по напряжению и по току одновременно.

Различают два вида обратной связи: о т р и ц а т е л ь н у ю и п о л о ж и т е л ь н у ю. Если введение обратной связи увеличивает коэффициент усиления цепи в какой-либо области частот, то обратная связь для этих частот положительна, в противном случае — отрицательна.

Поясним применение выражений (5.70), (5.71) для схемы транзисторного усилителя с ОЭ при $Y_{oc} = 1/R_{oc}$ (рис. 5.17).

Основываясь на формуле (5.17), в которой Y_{21} заменяем величиной $Y_{21} - Y_{oc}$, а Y_{22} — величиной $Y_{22} + Y_{oc}$ [см. (5.71)], определяем коэффициент усиления напряжения

$$\mathbf{K}_E = -\frac{Y_{21}-Y_{oc}}{(Y_{22}+Y_{oc})+G_н}. \qquad (5.73)$$

Проводимости Y_{21} и Y_{22} — вещественные и положительные величины. То же самое относится и к $Y_{oc} = 1/R_{co}$, $G_н = 1/R_н$. Очевидно, что вычитание из числителя и добавление к знаменателю дроби в (5.73) Y_{oc} приводит к уменьшению коэффициента усиления (по модулю), т. е. в рассматриваемом случае обратная связь *отрицательна*. Это объясняется противофазностью выходного и входного напряжений в резистивной схеме с ОЭ (см. § 5.4). Ток через $R_{oc} \approx \mathbf{E}_2/R_{oc} = -\mathbf{I}_2 R_н/R_{oc}$, направленный с выхода на вход, уменьшает ток $\mathbf{I}_б$ и, следовательно, $\mathbf{E}_2$.

Можно показать, что аналогичное подключение двухполюсника $Y_{oc} = 1/R_{oc}$ к усилителю, работающему по схеме с ОБ, когда напряжения $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_1$ совпадают по фазе, приводит к положительной обратной связи.

На рис. 5.18 изображена структурная схема усилителя с внешней обратной связью по напряжению, осуществляемой с помощью вспомогательного четырехполюсника $\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$.

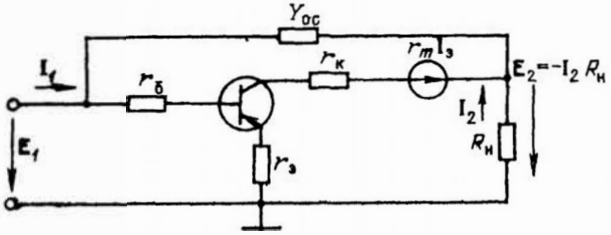


Рис. 5.17. Пример схемы замещения усилителя с ОЭ с внешней обратной связью

Как усилитель $\mathbf{K}_y(i\omega)$, так и четырехполюсник $\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$ предполагаются полностью однонаправленными. Подобное представление имеет смысл в тех случаях, когда входное сопротивление четырехполюсника $\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$ достаточно велико, чтобы не нагружать усилитель $\mathbf{K}_y(i\omega)$; выходное сопротивление четырехполюсника $\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$ должно быть достаточно малым по сравнению с входным сопротивлением усилителя $\mathbf{K}_y(i\omega)$. При этих допущениях передаточную функцию системы

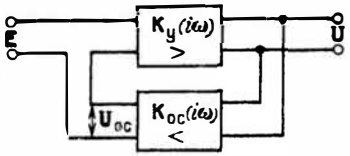


Рис. 5.18. Структурная схема усилителя с обратной связью

$$\mathbf{K}_0(i\omega) = \mathbf{U}/\mathbf{E} \tag{5.74}$$

можно найти с помощью следующих очевидных соотношений. Напряжение на выходе четырехполюсника обратной связи

$$\mathbf{U}_{oc} = \mathbf{K}_{oc}(i\omega)\,\mathbf{U}. \tag{5.75}$$

Напряжение на входе усилителя $\mathbf{K}_y(i\omega)$ равно сумме входной ЭДС $\mathbf{E}$ и напряжения обратной связи $\mathbf{U}_{oc}$.

Следовательно, напряжение на выходе всей цепи

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}_y(i\omega)\,(\mathbf{E} + \mathbf{U}_{oc}) = \mathbf{K}_y(i\omega)\,[\mathbf{E} + \mathbf{K}_{oc}(i\omega)\,\mathbf{U}],$$

Решая это уравнение относительно $\mathbf{U}$, получаем

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{K}_y(i\omega)}{1 - \mathbf{K}_y(i\omega)\,\mathbf{K}_{oc}(i\omega)}\,\mathbf{E},$$

откуда следует, что

$$\mathbf{K}_0(i\omega) = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{K}_y(i\omega)}{1 - \mathbf{K}_y(i\omega)\,\mathbf{K}_{oc}(i\omega)}. \tag{5.76}$$

Это выражение является основным для системы с обратной связью; $\mathbf{K}_0(i\omega)$ иногда называют общей передаточной функцией, или передаточной функцией замкнутой системы. Произведение же $\mathbf{K}_y(i\omega)\,\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$, имеющее смысл передаточной функции каскадного соединения четырехполюсников $\mathbf{K}_y(i\omega)$ и $\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$, называют передаточной функцией разомкнутой системы.

При замене $i\omega$ на p получаем передаточную функцию замкнутой цепи в операторной форме

$$\mathbf{K}_0(p) = \mathbf{K}_y(p)/[1 - \mathbf{K}_y(p)\,\mathbf{K}_{oc}(p)]. \tag{5.77}$$

Сопоставление $\mathbf{K}_0(i\omega)$ с $\mathbf{K}_y(i\omega)$ позволяет определить знак обратной связи в общем случае, когда эти функции являются комплексными. Если на какой-нибудь частоте имеет место неравенство $K_0(\omega) < K_y(\omega)$, т. е. если введение обратной связи приводит к уменьшению усиления, то обратная связь на данной частоте отрицательна, в противном случае — положительна.

При $\mathbf{K}_y(i\omega)\,\mathbf{K}_{oc}(i\omega) = 1$ усиление $\mathbf{K}_0(i\omega)$ становится бесконечно большим. Это означает, что цепь становится неустойчивой и для исследования ее поведения необходимо использовать другие методы, так как выражения (5.74)—(5.76), относящиеся к стационарным режимам, теряют смысл.

Случай неустойчивого состояния покоя (при изучении свойств автоколебательных систем) рассматривается в гл. 9. В данной главе изучаются только устойчивые цепи. Условия устойчивости будут сформулированы в § 5.9 после изложения основ теории устойчивости линейных цепей с обратной связью.

5.8. ПРИМЕНЕНИЕ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК УСИЛИТЕЛЯ

Рассмотрим влияние обратной связи на следующие параметры усилителя:

стабильность коэффициента усиления;

уровень нелинейных искажений сигнала, обусловленных кривизной вольт-амперной характеристики усилительных приборов;

равномерность частотной характеристики в заданной полосе частот.

1. ВЛИЯНИЕ ОС НА СТАБИЛЬНОСТЬ УСИЛЕНИЯ

Пусть в линейной цепи, находящейся под действием гармонической ЭДС и охваченной обратной связью, произошло изменение какого-либо параметра: модуля или аргумента коэффициентов усиления $\mathbf{K}_y(i\omega)$ или $\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$. Причинами этого изменения могут быть непостоянство напряжений источников питания усилителя, изменение температуры окружающей среды, механические вибрации, приводящие к изменению электрических параметров устройства и т. д. Выясним, как влияет обратная связь на относительное изменение выходного сигнала. Сначала рассмотрим случай, когда нестабильность имеется в цепи прямого усиления. Для упрощения анализа исходим из условия, что до изменения режима работы коэффициенты передачи $\mathbf{K}_y(i\omega)$ и $\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$ являлись чисто действительными величинам K_y и K_{oc}, так что коэффициент передачи замкнутой цепи определялся выражением

$$K_0 = K_y/(1 - K_y K_{oc}). \tag{5.78}$$

Пусть обусловленное нестабильностью изменение заключается в том, что коэффициент K_y изменился на малую величину ΔK_y. В отсутствие обратной связи это привело бы к относительному изменению амплитуды выходного напряжения равному $\Delta K_y/K_y$ (амплитуда ЭДС на входе считается неизменной).

Для определения относительного изменения амплитуды при наличии обратной связи продифференцируем выражение (5.78) по K_y:

$$\frac{dK_0}{dK_y} = \frac{1}{(1 - K_y K_{oc})^2} = \frac{K_y}{(1 - K_y K_{oc})} \frac{1}{(1 - K_y K_{oc})} \frac{1}{K_y}.$$

откуда

$$\frac{dK_0}{K_0} = \frac{1}{1 - K_y K_{oc}} \frac{dK_y}{K_y}. \tag{5.79}$$

Из этого выражения видно, что относительное изменение выходного напряжения при наличии обратной связи (т. е. величина dK_0/K_0) может сильно отличаться от изменения, которое имело бы место в ее отсутствие.

Если обратная связь *отрицательна* ($K_y K_{oc} < 0$), имеет место *ослабление нестабильности системы*

$$\frac{dK_0}{K_0} = \frac{1}{1 + |K_y K_{oc}|} \frac{dK_y}{K_y}.$$

При *положительной* обратной связи *нестабильность увеличивается*:

$$\frac{dK_0}{K_0} = \frac{1}{1 - |K_y K_{oc}|} \frac{dK_y}{K_y}.$$

Отсюда следует, что для повышения стабильности усиления цепи целесообразно вводить *отрицательную* обратную связь. Это широко используют

в современной радиоэлектронике. Абсолютную величину $|K_y K_{oc}|$ в зависимости от требований к стабильности системы доводят до 100 и более. При этом, естественно, в $(1 + |K_y K_{oc}|)$ раз уменьшается и усиление цепи K_0. Это уменьшение может быть скомпенсировано увеличением K_y (например, увеличением числа каскадов в кольце, охваченном обратной связью).

Введем в рассмотрение нестабильность в цепи обратной связи. Для этого продифференцируем выражение (5.78) по K_{oc}:

$$\frac{dK_0}{dK_{oc}} = -\frac{K_y(-K_y)}{(1-K_y K_{oc})^2} = \frac{K_y}{1-K_y K_{oc}} K_0,$$

откуда

$$\frac{dK_0}{K_0} = \frac{K_y K_{oc}}{1-K_y K_{oc}} \frac{dK_{oc}}{K_{oc}}.$$

В случае отрицательной связи при $|K_y K_{oc}| \gg 1$

$$\frac{dK_0}{K_0} \approx -\frac{dK_{oc}}{K_{oc}}.$$

Из этого соотношения видно, что влияние на K_0 *нестабильности в самой цепи* K_{oc} *не ослабляется обратной связью*: нестабильность замкнутой цепи с отрицательной обратной связью при $|K_y K_{oc}| \gg 1$ равна нестабильности величины K_{oc}.

Следовательно, при применении отрицательной обратной связи особое внимание следует обратить на повышение стабильности четырехполюсника K_{oc}. Это требование распространяется как на модуль, так и на аргумент (т. е. на фазовую характеристику) передаточной функции цепи. В практике выполнение этого требования облегчается тем, что основные дестабилизирующие факторы имеются в прямом усилителе K_y, содержащем активные элементы и элементы нагрузки; четырехполюсник же K_{oc}, обычно представляющий собой простую пассивную цепь, может быть сделан достаточно стабильным.

2. ОСЛАБЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОС

Выясним влияние отрицательной обратной связи на нелинейные искажения, которые возникают в основном усилителе из-за кривизны характеристик активных элементов. При гармоническом напряжении на входе эти искажения проявляются в виде высших гармонических составляющих усиливаемого сигнала. Допустим, что в отсутствие обратной связи, при подаче на вход ЭДС E_1, на выходе усилителя амплитуда напряжения основной частоты равна U_1, а амплитуда напряжения одной из гармоник U_n. Усилитель с искажениями можно представить в виде идеального линейного усилителя, на входе которого действует «генератор гармоник» (рис. 5.19).

При этом отношения E_n/E_1 и U_n/U_1 одинаковы, так как коэффициент усиления $K_y(\omega)$ считается одинаковым как для основной частоты, так и для частоты n-й гармоники. Таким образом, амплитуда ЭДС эквивалентного генератора E_n должна быть равна U_n/K_y.

При введении отрицательной обратной связи для получения на выходе прежней амплитуды U_1 входную ЭДС E_1 необходимо увеличить в $(1 + |K_y K_{oc}|)$ раз, как это вытекает из формулы (5.78). Это отражено на рис. 5.20 введением дополнительного усилителя с коэффициентом усиления $(1 + |K_y K_{oc}|)$. Следует, однако, иметь в виду, что напряжение основной частоты, действующее непосредственно на зажимах *3—3'*, остается таким же, как и в схеме без

отрицательной обратной связи, представленной на рис. 5.19. Действительно, рассматриваемое напряжение является разностью между ЭДС $E_2 = E_1(1 + |K_y K_{oc}|)$, действующей на зажимах *2—2′* (рис. 5.20), и напряжением обратной связи $|K_{oc}| U_1$, т. е.

$$E_3 = E_2 - K_{oc} U_1 = E_1(1 + |K_y||K_{oc}|) - |K_{oc}| U_1.$$

Но $E_1 |K_y|$ есть не что иное, как U_1 (см. рис. 5.19). Следовательно,

$$E_3 = E_1 + E_1 |K_y||K_{oc}| - |K_{oc}| U_1 = E_1.$$

Напряжение же *n*-й гармоники на входе усилителя с учетом напряжения обратной связи — $U_n K_{oc}$ будет равно разности $E_n - |K_{oc}| U_n$, а на выходе усилителя

$$U_n = |K_y|(E_n - |K_{oc}| U_n),$$

откуда

$$U_n = |K_y| E_n / (1 + |K_y K_{oc}|).$$

Таким образом, отношение

$$\frac{U_n}{U_1} = \frac{|K_y| E_n}{(1 + |K_y K_{oc}|)|K_y| E_1} = \frac{E_n}{E_1} \cdot \frac{1}{1 + |K_y K_{oc}|} \qquad (5.80)$$

получается в $(1 + |K_y K_{oc}|)$ раз меньшим, чем в отсутствие обратной связи. Правда, это улучшение достигается ценой увеличения в $(1 + |K_y K_{oc}|)$ раз напряжения, подводимого к зажимам *2—2′* (рис. 5.20).

Относительное ослабление напряжения высших гармоник можно пояснить еще и следующим образом: введение отрицательной обратной связи приводит к уменьшению усиления в $(1 + |K_y K_{oc}|)$ раз в одинаковой мере для полезного сигнала и для гармоник, однако это уменьшение усиления компенсируется только лишь для полезного сигнала. В предварительном маломощном усилителе нетрудно обеспечить линейный режим работы.

Проведенное выше рассуждение может быть распространено на все гармоники усиливаемого напряжения.

Применение отрицательной обратной связи позволяет помимо ослабления нелинейных искажений понизить при некоторых условиях и уровень фона, создаваемого пульсацией питающих напряжений.

Итак, все побочные колебания, возникающие в *самом усилителе* из-за нелинейности характеристик усилительных приборов и из-за несовершенства источников питания, ослабляются отрицательной обратной связью в $(1 + |K_y K_{oc}|)$ раз.

Если усилитель состоит из нескольких каскадов, стремятся охватить обратной связью весь усилитель в целом, как это показано, например, на рис. 5.21. При этом, однако, усложняется обеспечение устойчивости усили-

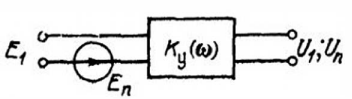


Рис. 5.19. Учет нелинейных искажений в усилителе с помощью эквивалентного генератора гармоник

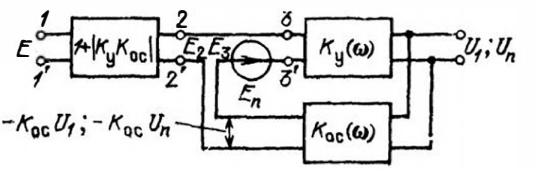


Рис. 5.20. К объяснению эффекта снижения уровня побочных гармоник в усилителе с отрицательной обратной связью

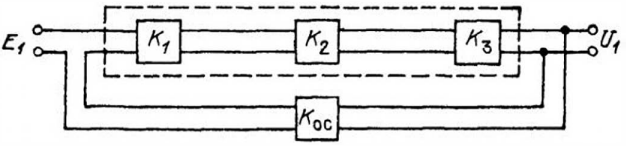


Рис. 5.21. Многокаскадный усилитель с отрицательной обратной связью

теля из-за возрастания суммарного фазового сдвига в кольце, особенно при наличии трансформаторов, обладающих индуктивностью рассеяния.

В тех случаях, когда удается построить многокаскадный усилитель без трансформаторов, а также при небольших паразитных емкостях можно реализовать схему изображенную на рис. 5.21. Такие условия встречаются, например, в транзисторных усилителях звуковых частот.

3. ВЛИЯНИЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ НА АЧХ

Рассмотрим в заключение влияние отрицательной обратной связи на АЧХ усилителя. Непосредственно из выражения (5.76) следует, что при $|\mathbf{K}_y(i\omega)\,\mathbf{K}_{oc}(i\omega)| \gg 1$

$$K_0(\omega) \approx 1/K_{oc}(\omega). \tag{5.81}$$

Если в заданной полосе частот обеспечивается постоянство $K_{oc}(\omega)$, то $K_0(\omega) = \text{const}$. Таким образом, задача сводится к выравниванию АЧХ пассивного четырехполюсника обратной связи, что значительно легче, чем устранение неравномерности характеристики усилителя $K_y(\omega)$.

В промежуточных случаях, когда $K_y K_{oc}$ измеряется несколькими единицами, предельное соотношение (5.81) не достигается, однако характеристика $K_0(\omega)$ становится значительно равномернее, чем $K_y(\omega)$. Это иллюстрируется рис. 5.22.

На рис. 5.22, *а* штриховой линией воспроизведена АЧХ апериодического усилителя, рассмотренного в § 5.4 (см. рис. 5.10). При введении отрицательной обратной связи с вещественным коэффициентом K_{oc} передаточная функция усилителя в соответствии с (5.76) и (5.44) будет

$$\mathbf{K}_0(i\omega) = \frac{K_y(i\omega)}{1 - K_{oc}K_y(i\omega)} = \frac{K_{y\,max}}{(1 + |K_{oc}K_{y\,max}|) + i\omega C_0/G_i + G)}, \tag{5.82}$$

а модуль, т. е. АЧХ,

$$K_0(\omega) = \frac{K_{y\,max}}{\sqrt{(1 + |K_{oc}K_{y\,max}|)^2 + \omega^2[C_0/(G_i + G)]^2}}$$

(показана на рис. 5.22, *а* сплошной линией). Характеристика построена при следующих данных: $K_{y\,max} = 50$, $|K_{oc}| = 0{,}05$.

Таким образом,

$$K_0(\omega) = \frac{50}{\sqrt{(1 + 2{,}5)^2 + [\omega C_0/(G_i + G)]^2}}.$$

Как и следовало ожидать, кривая $K_0(\omega)$ расположена ниже, чем $K_y(\omega)$ (на всех частотах). Это является результатом подачи напряжения с выхода усилителя на его вход в *противофазе* с входным напряжением. На частотах, близких к нулю,

$$K_{0\,max} = \frac{K_{y\,max}}{1 + |K_{oc}K_{y\,max}|} = \frac{50}{1 + 2{,}5} = \frac{1}{3{,}5}K_{y\,max},$$

т. е. усиление уменьшается в 3,5 раза.

Однако характеристика $K_0(\omega)$ значительно равномернее, чем $K_у(\omega)$. Это видно из нормированной частотной характеристики $K_0(\omega)/K_{0\max}$ (см. рис. 5.22, *а*, штрихпунктирная линия). Итак, введение отрицательной обратной связи для стабилизации коэффициента усиления и ослабления нелинейных искажений одновременно выравнивает АЧХ усилителя.

Заметим, что требуемую полосу пропускания можно получить и без отрицательной обратной связи, соответствующим образом уменьшая сопротивление нагрузки R. Однако при этом остальные параметры усилителя — стабильность и нелинейность усиления — были бы ухудшены.

Соответственно характеристике $K_0(i\omega)$ изменяется и импульсная характеристика усилителя. Действительно, записав выражение (5.82) в форме, совпадающей с (5.43):

$$K_0(i\omega) = -\frac{\dfrac{K_{у\max}}{1+|K_{ос}K_{у\max}|}}{1+\dfrac{i\omega C_0}{G_i+G}\dfrac{1}{1+|K_{ос}K_{у\max}|}} = -\frac{\dfrac{K_{у\max}}{1+|K_{ос}K_{у\max}|}}{1+i\omega\tau_{эк}},$$

видим, что обратная связь приводит к изменению эквивалентной постоянной времени: вместо $C_0/(G_i+G)$ получаем

$$\tau_{вк} = \frac{C_0}{G_i+G}\frac{1}{1+|K_{ос}K_{у\max}|} = \frac{\tau}{1+|K_{ос}K_{у\max}|}.$$

При $|K_{ос}K_{у\max}| = 2{,}5$

$$\tau_{эк} = \frac{1}{3{,}5}\frac{C_0}{G_i+G} = \frac{\tau}{3{,}5}.$$

Заметим, что максимальное значение усиления (при $\omega = 0$) уменьшается в такое же число раз. Таким образом, если в отсутствие обратной связи импульсная характеристика рассматриваемого усилителя запишется в виде

$$g(t) = -\frac{K_{у\max}}{C_0/(G_i+G)}\exp\left[-\frac{(G_i+G)t}{C_0}\right],$$

то при введении отрицательной обратной связи

$$g_0(t) = \frac{K_{у\max}}{C_0/(G_i+G)}\exp\left[-\frac{(1+|K_{ос}K_{у\max}|)t}{C_0/(G_i+G)}\right].$$

Нормированная импульсная характеристика $g_0(t)$ при нескольких значениях параметра $|K_{ос}K_{у\max}|$ изображена на рис. 5.22, *б*.

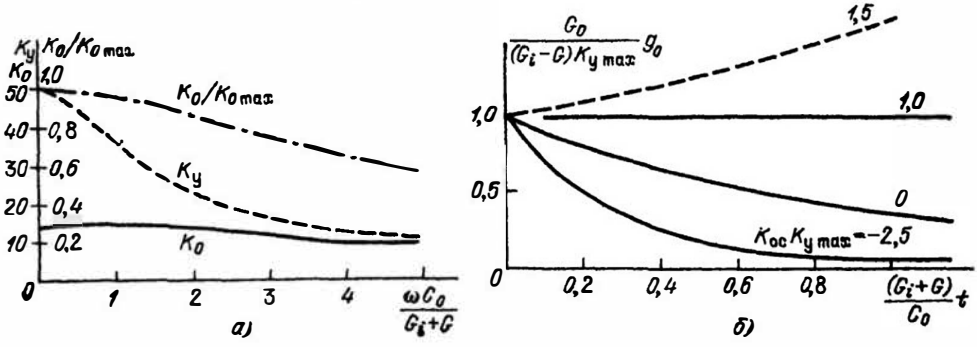


Рис. 5.22. Амплитудно-частотная (*а*) и импульсные (*б*) характеристики усилителя с отрицательной обратной связью

Как и следовало ожидать, введение отрицательной обратной связи ($K_{\text{ос}} K_{\text{у max}} < 0$), расширяющее полосу пропускания цепи, приводит к более быстрому убыванию импульсной характеристики. При положительной обратной связи ($K_{\text{ос}} K_{\text{у max}} > 0$) убывание $g_0(t)$ замедляется. Штриховой линией на рис. 5.22, *б* показана импульсная характеристика при $K_{\text{ос}} \times K_{\text{у max}} > 1$, соответствующая неустойчивому режиму (см. § 5.9).

5.9. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ АКТИВНЫХ ЦЕПЕЙ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В реальной цепи, охваченной обратной связью, всегда имеются реактивные элементы, накапливающие энергию. Даже в усилителе на резисторах имеются такие элементы (паразитные емкости схемы и усилительных приборов, индуктивности проводов и т. д.). Реактивные элементы создают дополнительные фазовые сдвиги. Если на какой-либо частоте эти сдвиги дают в сумме дополнительный угол в 180°, то обратная связь из отрицательной превращается в положительную и создаются условия, при которых возникает паразитная генерация.

Это обстоятельство во многих случаях существенно ограничивает эффективность применения обратной связи, так как при больших значениях $|K_{\text{у}} K_{\text{ос}}|$ для устранения паразитной генерации требуются специальные фазокомпенсаторы и другие устройства, уменьшающие крутизну ФЧХ в кольце обратной связи. Однако часто оказывается, что введение в схему новых элементов приводит лишь к сдвигу частоты паразитной генерации в область очень низких или очень высоких частот.

Итак, применение обратной связи тесно связано с проблемой обеспечения устойчивости цепи.

Для правильного построения цепи и выбора ее параметров большое значение приобретают методы определения устойчивости цепи. В настоящее время известно несколько критериев, различающихся больше по форме, нежели по существу. В основе большинства этих критериев лежит критерий устойчивости решений дифференциального уравнения, описывающего исследуемую цепь.

Пусть линейное однородное уравнение для цепи с сосредоточенными (и постоянными) параметрами задано в форме

$$b_0 \frac{d^n x}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + b_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \ldots + b_{n-1} \frac{dx}{dt} + b_n x = 0. \qquad (5.83)$$

где x — ток, напряжение и т. д., а постоянные коэффициенты b_0, b_1, b_2, ..., b_n — действительные числа, зависящие от параметров цепи.

Решение уравнения (5.83), как известно, имеет вид

$$x = \sum_{i=1}^{n} A_i \, e^{p_i t},$$

где A_i — постоянные, а p_i — корни характеристического уравнения

$$b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \ldots + b_{n-1} p + b_n = 0. \qquad (5.84)$$

Условие устойчивости состояния покоя цепи заключается в том, что после прекращения действия внешних возмущений цепь возвращается в исходное состояние. Для этого необходимо, чтобы возникающие в цепи при нарушении состояния покоя свободные (переходные) токи и напряжения были затухающими. А это, в свою очередь, означает, что корни p_1, p_2, ..., p_n урав-

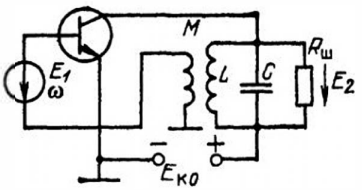


Рис. 5.23. К примеру определения устойчивости усилителя с обратной связью

нения (5.84) должны быть либо отрицательными действительными величинами либо комплексными величинами с отрицательными действительными частями. Из этих простых физических представлений вытекает следующий фундаментальный критерий устойчивости любых линейных систем[1]: *система устойчива, если действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны.* Заметим, что левая часть характеристического уравнения (5.84) представляет собой не что иное, как знаменатель передаточной функции цепи, записанной в форме

$$\mathbf{K}(p) = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n}{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_{m-1} p + b_m}, \quad n \leqslant m. \tag{5.85}$$

Таким образом, *корни характеристического уравнения цепи являются полюсами передаточной функции* $\mathbf{K}(p)$ этой цепи.

Отсюда следует, что сформулированные выше условия отрицательности действительных частей корней равносильны следующему положению: *для устойчивости цепи необходимо, чтобы передаточная функция* $\mathbf{K}(p)$ не имела полюсов в правой полуплоскости комплексной переменной p.

Это хорошо известное из теории цепей положение можно распространить и на передаточную функцию $\mathbf{K}_0(p)$ цепи с обратной связью. Поясним это на примере резонансного усилителя с обратной связью (рис. 5.23).

Передаточную функцию (по напряжению) усилителя определим по формуле (5.70):

$$\mathbf{K}_у(p) = -\frac{S}{C}\frac{p}{p^2 + 2\alpha_{эк} p + \omega_р^2},$$

а передаточную функцию цепи обратной связи $\mathbf{K}_{ос}(p)$ приравняем $\pm M/L$, где M — взаимная индуктивность.

Тогда передаточная функция усилителя, охваченного обратной связью,

$$\mathbf{K}_0(p) = \frac{\mathbf{K}_у(p)}{1 + \mathbf{K}_у(p)\,\mathbf{K}_{ос}} = -\frac{S}{C}\frac{p}{p^2 + (2\alpha_{эк} + \mathbf{K}_{ос}\,S/C)\,p + \omega_р^2}.$$

Находим корни уравнения $p^2 + (2\alpha_{эк} + \mathbf{K}_{ос}\,S/C)\,p + \omega_р^2 = 0$

$$p_{1,2} = -\alpha_{эк} - \frac{\mathbf{K}_{ос}\,S}{2C} \pm i\sqrt{\omega_р^2 - \left(\alpha_{эк} + \frac{\mathbf{K}_{ос}\,S}{2C}\right)^2}.$$

Рассмотрим два возможных случая: отрицательной и положительной обратной связи.

Для создания отрицательной обратной связи произведение $\mathbf{K}_у\mathbf{K}_{ос}$ должно быть отрицательной величиной. Поскольку $\mathbf{K}_у(i\omega)$ при $\omega = \omega_р$, т. е. при резонансе, является отрицательной величиной, то коэффициент $\mathbf{K}_{ос}$ должен быть положительной величиной: $K_{ос} = +M/L$. При этом действительные части обоих корней p_1 и p_2

$$\mathrm{Re}\,(p_{1,2}) = -(\alpha_{эк} + MS/2LC)$$

отрицательны при любом значении M.

При положительной обратной связи $K_{ос} = -M/L$;

$$\mathrm{Re}\,(p_{1,2}) = -\left(\alpha_{эк} - \frac{MS}{2LC}\right)\begin{cases} < 0 \text{ при } MS/2LC < \alpha_{эк}, \\ > 0 \text{ при } MS/2LC > \alpha_{эк}. \end{cases} \tag{5.86}$$

[1] Это фундаментальное положение было обосновано А. М. Ляпуновым, который в 90-х годах прошлого века заложил основы теории устойчивости. Рассматриваемый вопрос об устойчивости состояния покоя системы является частным случаем общей теории устойчивости Ляпунова.

Итак, при отрицательной обратной связи рассматриваемая цепь устойчива при любом значении M, а при положительной обратной связи — только при выполнении условия

$$|K_{oc}| = \frac{M}{L} < \frac{2C\alpha_{эк}}{S} = \frac{1}{SR_{ш}} = \frac{1}{K_{y\max}},$$

где $K_{y\max} \approx SR_{ш} = S/G_{ш}$ — коэффициент усиления на резонансной частоте [см. (5.65)].

В тех случаях, когда цепь описывается дифференциальным уравнением высокого порядка, исследование корней характеристического уравнения, необходимое для решения вопроса об устойчивости системы, является сложной задачей.

Оказывается, что ее можно решить, анализируя соотношения между коэффициентами уравнения без определения самих корней уравнения. Это можно выполнить с помощью теоремы Гурвица[1], которая утверждает, что для того, чтобы действительные части всех корней уравнения

$$b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m = 0$$

с действительными коэффициентами и $b_0 > 0$ были отрицательными, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все определители Δ_1, Δ_2, ..., Δ_m, составленные из коэффициентов уравнения b_0, b_1, ..., b_n по следующей схеме:

$$\Delta_1 = b_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 \\ b_0 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & b_7 \\ b_0 & b_2 & b_4 & b_6 \\ 0 & b_1 & b_3 & b_5 \\ 0 & b_0 & b_2 & b_4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & b_7 & b_9 \\ b_0 & b_2 & b_4 & b_6 & b_8 \\ 0 & b_1 & b_3 & b_5 & b_7 \\ 0 & b_0 & b_2 & b_4 & b_6 \\ 0 & 0 & b_1 & b_3 & b_5 \end{vmatrix} \text{ и т. д.}$$

Сформулированный алгебраический критерий устойчивости часто называют критерием Рауса — Гурвица. При составлении определителей по указанной схеме коэффициенты с индексом, превышающим степень характеристического уравнения, заменяются нулями.

Поэтому, например, для уравнения четвертой степени получаются следующие определители:

$$\Delta_1 = b_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & 0 & 0 \\ b_0 & b_2 & b_4 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_2 & b_4 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что все последовательные определители являются главными диагональными минорами определителя Δ_m. Так как последний столбец определителя Δ_m содержит лишь один отличный от нуля элемент b_m, расположенный на главной диагонали, то выполняется равенство

$$\Delta_m = b_m \Delta_{m-1}.$$

[1] Доказательство этой теоремы см., например, в книге: Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М.: ГИФМЛ, 1972.

Отсюда следует, что в соответствии с теоремой Гурвица условия устойчивости можно формулировать в виде следующих неравенств:

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_{m-1} > 0,\ b_m > 0.$$

Так, для характеристического уравнения второй степени

$$\Delta_1 = b_1 > 0,\quad b_2 > 0, \tag{5.87}$$

для уравнения третьей степени

$$\Delta_1 = b_1 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} = b_1 b_2 - b_3 b_0 > 0,\ b_3 > 0, \tag{5.88}$$

т. е. $b_1 > 0$, $b_1 b_2 > b_3 b_0$, $b_3 > 0$. Так как b_0, b_1 и b_3 положительны, то и $b_2 > 0$.

Для уравнения четвертой степени:

1. $\Delta_1 = b_1 > 0$, 2. $\Delta_2 = b_1 b_2 - b_3 b_0 > 0$,

3. $\Delta_3 = b_3 (b_1 b_2 - b_3 b_0) - b_1^2 b_4 > 0$, 4. $b_4 > 0$.

Из условия 3 на основании условий 4 и 1 вытекает неравенство

$$b_3 (b_1 b_2 - b_0 b_3) > b_1^2 b_4 > 0.$$

Поэтому условие 3 можно заменить условием $b_3 > 0$.

Таким образом, для уравнения четвертой степени получаются следующие условия устойчивости:

$$b_1 > 0,\ b_3 > 0,\ b_3 (b_1 b_2 - b_0 b_3) - b_1^2 b_4 > 0,\ b_4 > 0. \tag{5.89}$$

Поясним применение критерия Гауса—Гурвица на простом примере рассмотренного резонансного усилителя с обратной связью (см. рис. 5.23). Характеристическое уравнение этой цепи при $K_{oc} = M/L$ (отрицательная обратная связь)

$$p^2 + \left(2\alpha_к + \frac{M}{L}\frac{S}{C}\right) p + \omega_p^2 = 0.$$

Сформулированные для уравнения второй степени условия устойчивости (5.87) в данном случае принимают вид

$$\Delta_1 = b_1 = 2\alpha_к + \frac{M}{L}\frac{S}{C} > 0,\quad b_2 = \omega_p^2 > 0.$$

Первое условие выполняется при любом значении $M > 0$, а второе от M не зависит.

При положительной обратной связи ($K_{oc} = -M/L$) цепь устойчива при выполнении условия $2\alpha_к - (M/L)(S/C) > 0$, совпадающего с (5.86).

Критерий Рауса—Гурвица особенно удобен для проверки устойчивости цепи с заданными параметрами (т. е. коэффициентами дифференциального уравнения). Однако им неудобно пользоваться при экспериментах, так как обычно бывают известны не коэффициенты уравнения, а передаточная функция разомкнутой цепи $\mathbf{K}_y(p)\,\mathbf{K}_{oc}\ (p)$. Кроме того, критерий Рауса—Гурвица не дает ясных указаний, как неустойчивую цепь сделать устойчивой.

5.10. ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Требование, чтобы передаточная функция

$$\mathbf{K}_0(p) = \mathbf{K}_y(p)/[1 - \mathbf{K}_y(p)\,\mathbf{K}_{oc}(p)] \tag{5.90}$$

не имела полюсов в правой полуплоскости $p = \sigma + i\omega$, т. е. в области, ограниченной полуокружностью бесконечно большого радиуса R и осью $i\omega$ (рис. 5.24, *а*), равносильно условию, что знаменатель выражения (5.90), не должен иметь нулей в указанной области[1] или, что то же самое, функция

$$\mathbf{H}(p) = \mathbf{K}_y(p)\,\mathbf{K}_{oc}(p) \tag{5.91}$$

не должна обращаться в единицу ни в одной из точек правой полуплоскости p. Но $\mathbf{H}(p)$ представляет собой передаточную функцию разомкнутого кольца обратной связи, т. е. отношение напряжения на зажимах *2—2* к напряжению на зажимах *1—1* при разомкнутом кольце, как это показано на рис. 5.25. Следовательно, об устойчивости системы с обратной связью можно судить по характеристикам разомкнутого тракта.

Для дальнейшего анализа целесообразно перейти от плоскости $p = \sigma + i\omega$ к плоскости $\mathbf{H}(p) = u + iv$ (рис. 5.24, *б*). Каждой точке p плоскости σ, $i\omega$ соответствует определенное значение $\mathbf{H}$ на плоскости u, iv. Любой замкнутый контур на плоскости p преобразуется с помощью выражения (5.91) в некоторый (также замкнутый) контур на плоскости $\mathbf{H}$.

Если исходный контур на плоскости p задан в виде контура на рис. 5.24, *а*, соответствующий ему контур на плоскости $\mathbf{H}$ называется г о д о г р а ф о м функции $\mathbf{H}$.

Показанный на рис. 5.24, *а* контур C можно разбить на два участка: 1) прямая $i\omega$ от ∞ до $-\infty$ и 2) полуокружность бесконечно большого радиуса R.

На первом участке, где $\sigma = 0$, $p = i\omega$, функция $\mathbf{H}(p)$ обращается в функцию $\mathbf{H}(i\omega)$. В соответствии с выражением (5.91) этот участок преобразуется на плоскости $\mathbf{H}$ в линию, определяемую следующим соотношением:

$$\mathbf{H}(i\omega) = \mathbf{K}_y(i\omega)\,\mathbf{K}_{oc}(i\omega) = K_y(\omega)\,K_{oc}(\omega)\,e^{i(\varphi_y + \varphi_{oc})} = u(\omega) + iv(\omega), \tag{5.92}$$

откуда

$$\begin{aligned} u(\omega) &= K_y(\omega)\,K_{oc}(\omega)\cos(\varphi_y + \varphi_{oc}), \\ v(\omega) &= K_y(\omega)\,K_{oc}(\omega)\sin(\varphi_y + \varphi_{oc}). \end{aligned} \tag{5.93}$$

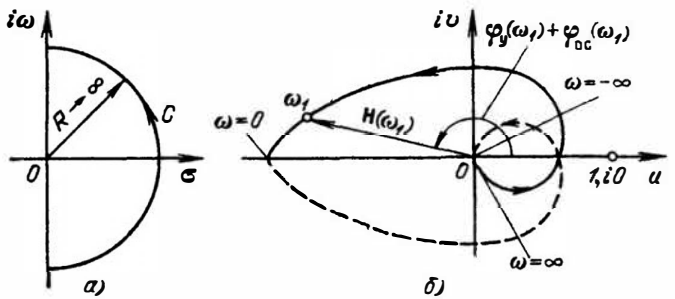


Рис. 5.24. Замкнутый контур на p-плоскости (*а*) и годограф функции $H(i\omega)$ на плоскости $u+iv$ (*б*)

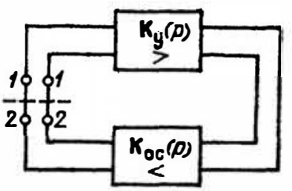


Рис. 5.25. К определению передаточной функции разомкнутого тракта усилитель — четырехполюсник обратной связи

[1] Предполагается, что основной усилитель устойчив, т. е. $\mathbf{K}_y(p)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости p.

В этих выражениях $\varphi_у$ и $\varphi_{ос}$ — аргументы передаточных функций соответственно четырехполюсников $\mathbf{K}_у(i\omega)$ и $\mathbf{K}_{ос}(i\omega)$.

На втором участке контура C (см. рис. 5.24, *а*) при $R \to \infty$ функция $\mathbf{H}(p) \to 0$. Это вытекает из общего выражения

$$\mathbf{K}(p) = B \frac{(p-p_{01})(p-p_{02})\dots(p-p_{0n})}{(p-p_{п1})(p-p_{п3})\dots(p-p_{пm})}, \quad n \leqslant m,$$

которое при $|p| \to \infty$ можно представить в виде Bp^{n-m} (здесь B — постоянный коэффициент, а p_{0i} и $p_{пi}$ — соответственно нули и полюсы функции $\mathbf{K}(p)$).

Совершенно аналогично и функцию $\mathbf{H}(p)$ при $|p| \to \infty$ можно представить в форме $\mathbf{H}(p) = Ap^{n-m}$ где n и m — числа соответственно нулей и полюсов функции $\mathbf{H}(p)$.

При $n < m$ и $|p| \to \infty$ модуль функции H (p) на полуокружности $R \to \infty$ равен нулю[1]. Таким образом, полуокружность бесконечно большого радиуса R на плоскости p преобразуется в точку, лежащую в начале координат на плоскости **H**, и для построения годографа **H** в виде замкнутого контура достаточно знать поведение $\mathbf{H}(p)$ на оси $i\omega$, т. е. знать АЧХ и ФЧХ цепи $\mathbf{K}_у(i\omega)\,\mathbf{K}_{ос}(i\omega)$.

Обходу контура C на рис. 5.24, *а* в положительном направлении (против часовой стрелки) соответствует обход годографа **H** при изменении частоты от ∞ до $-\infty$, т. е. также против часовой стрелки (см. рис. 5.24, *б*).

Очевидно, что вся правая полуплоскость p преобразуется на плоскости **H** во внутреннюю область годографа. Следовательно, *если годограф передаточной функции разомкнутого тракта не охватывает точку 1, i0, то при замкнутой цепи обратной связи система устойчива, в противном случае система неустойчива.*

Это условие называется критерием устойчивости Найквиста.

Показанная на рис. 5.24, *б* диаграмма соответствует устойчивой системе. Это видно из того, что годограф **H** не охватывает точку 1, *i*0. Сплошной линией показана часть контура, соответствующая положительным частотам $0 < \omega < \infty$, а штриховой — часть контура, соответствующая отрицательным частотам. Так как функция $u(\omega)$ четная, а $v(\omega)$ нечетная относительно ω, то оба участка годографа симметричны относительно действительной оси.

Следует также отметить, что рис. 5.24, *б* построен для случая, когда при $\omega = 0$ передаточная функция $\mathbf{H}(i\omega)$ отлична от нуля (это возможно, например, для усилителей постоянного тока, в которых отсутствуют разделительные конденсаторы).

При сложной схеме цепи форма годографа иногда бывает настолько усложненной, что по ней трудно судить о том, охватывается или не охватывается годографом точка 1, *i*0. В подобных случаях оказывается полезным критерий, вытекающий из критерия Найквиста, основанный на подсчете числа пересечений оси $u(\omega)$ на участке 1, ∞. Для устойчивости цепи необходимо, чтобы годограф либо вообще не пересекал этот отрезок (как на рис. 5.24, *б*), либо пересекал его в положительном и отрицательном направлениях одинаковое число раз.

Критерий Найквиста получил наибольшее распространение в радиоэлектронике, автоматике и других смежных областях. Основное его преимуще-

---

[1] Имеются в виду наиболее распространенные в практике четырехполюсники с передаточной функцией у которой степень числителя n меньше степени знаменателя m.

ство: удобство оперирования АЧХ и ФЧХ разомкнутой цепи. В некоторых системах, например содержащих линии, этот метод по существу является единственно приемлемым.

Суть частотного критерия можно наглядно пояснить не прибегая к полярным диаграммам, на основе обычных АЧХ и ФЧХ разомкнутой цепи $\mathbf{K_y K_{oc}}$.

Действительно, длина вектора $\mathbf{H}(i\omega)$, как это ясно из выражения (5.92), есть не что иное, как модуль коэффициента передачи разомкнутой цепи $K_y K_{oc}$, т. е. АЧХ этой цепи, а аргумент $\varphi_н$ (рис. 5.26), равный

$$\varphi_H = \operatorname{arctg} \frac{v(\omega)}{u(\omega)} = \varphi_y(\omega) + \varphi_{oc}(\omega), \tag{5.94}$$

есть ФЧХ цепи $K_y K_{oc}$.

Совместив на общем графике АЧХ и ФЧХ, нетрудно ответить на вопрос об устойчивости цепи.

Если при изменении ω от 0 до ∞ фаза $\varphi_н$ не достигает 2π, то замкнутая цепь устойчива при любом значении $K_y K_{oc}$. С другой стороны, если $K_y K_{oc}$ при любой частоте меньше единицы, то цепь устойчива при любой ФЧХ. Цепь неустойчива если имеются частоты, при которых одновременно выполняются два условия:

$$\varphi_y + \varphi_{oc} = n2\pi, \quad n — \text{целое число}, \quad H = K_y K_{oc} \geqslant 1. \tag{5.95}$$

По существу эти два условия необходимы для обращения в нуль знаменателя в выражении (5.76), определяющем передаточную функцию замкнутой цепи.

Пример АЧХ и ФЧХ устойчивой цепи с обратной связью показан на рис. 5.26, а неустойчивой — на рис. 5.27. В первом случае на частоте ω_0, соответствующей $\varphi_y + \varphi_{oc} = 2\pi$, модуль $H < 1$. Во втором случае $\omega_г$ — частота паразитной генерации. На рис. 5.26 и 5.27 отложены абсолютные значения $\varphi_y + \varphi_{oc}$. При учете знака реальных φ_y и φ_{oc} наклон ФЧХ будет отрицательным.

При построении этих характеристик учтено, что при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ величина $K_y K_{oc}$ обращается в нуль. При $\omega \to 0$ это обусловлено влиянием последовательно включенных конденсаторов в канале K_y или K_{oc}, а при $\omega \to \infty$ — влиянием шунтирующих емкостей (межэлектродных, монтажа и т. д.). Полное изменение фазы при изменении ω от 0 до ∞ зависит от числа звеньев в усилителе и в цепи обратной связи.

Для более сложных цепей, когда набег фазы в тракте $\mathbf{K_y K_{oc}}$ может быть больше 2π, приходится прибегать к критерию Найквиста.

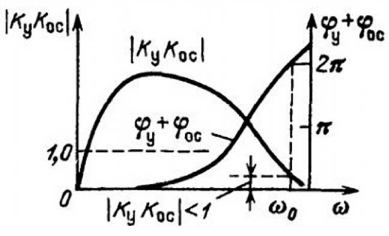


Рис. 5.26. Амплитудно- и фазо-частотная характеристики устойчивого усилителя с обратной связью

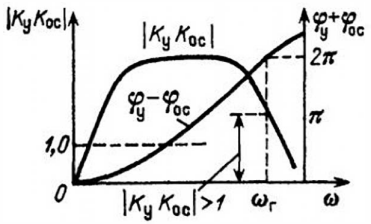


Рис. 5.27. Амплитудно- и фазо-частотная характеристики неустойчивого усилителя

Глава 6. ПРОХОЖДЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

6.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В радиоэлектронике приходится иметь дело с различными сигналами и разнообразными (в основном инерционными) цепями. При передаче сигналов по таким цепям возникают переходные процессы, которые влияют на форму сигналов и в конечном счете на содержащуюся в них информацию. В гл. 1 отмечалось, что большинство радиотехнических устройств представляет собой сочетание линейных и нелинейных элементов. Это усложняет строгий анализ переходных процессов, так как классические методы, основанные на использовании принципа суперпозиции, являются линейными.

Имеется, однако, широкий круг практических задач, которые можно успешно решать линейными методами. Такие задачи встречаются прежде всего при передаче слабых сигналов через усилители и другие устройства, которые по отношению к слабым сигналам практически линейны. Даже в существенно нелинейных устройствах, например радиопередатчиках, можно рассматривать прохождение сигналов через колебательные цепи на основе линейных методов.

Напомним основные методы, которые используются при анализе прохождения сигналов через радиоэлектронные цепи.

Для простейших цепей, описываемых дифференциальными уравнениями не выше второго порядка, задачу обычно нетрудно решить классическим методом дифференциальных уравнений.

Для сложных цепей значительно удобнее методы, основанные на спектральном представлении сигнала: метод интеграла Фурье и тесно с ним связанный операторный метод (преобразования Лапласа). Наряду со спектральными методами в радиоэлектронике часто используется также метод интеграла наложения, сводящийся к свертке входного сигнала с импульсной характеристикой цепи.

При передаче радиосигналов через узкополосные избирательные цепи указанные методы используются с упрощением, основанным на медленности изменения огибающей сигнала.

В данной главе излагаются основные положения теории передачи детерминированных сигналов через линейные цепи с постоянными параметрами.

6.2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД

В основе этого метода лежит использование введенной в предыдущей главе передаточной функции цепи $\mathbf{K}(i\omega)$ (см. § 5.3). Если на входе линейного четырехполюсника действует сигнал произвольной формы в виде ЭДС $e(t)$, то, применяя спектральный метод, следует определить спектральную плотность входного сигнала $\mathbf{E}(\omega)$. Эта операция легко осуществляется с помощью выражения (2.48). Умножением $\mathbf{E}(\omega)$ на $\mathbf{K}(i\omega)$ определяется спектральная плотность сигнала на выходе четырехполюсника. Наконец, применение к произведению $\mathbf{E}(\omega)\,\mathbf{K}(i\omega)$ обратного преобразования Фурье [см. (2.49)] определяет выходной сигнал в виде функции времени.

Таким образом, если входной сигнал записан в виде интеграла

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \tag{6.1}$$

то выходной сигнал можно представить в аналогичной форме

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega)\,\mathbf{K}(i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega. \qquad (6.2)$$

Сравнение выражения (6.2) с (6.1) показывает, что *сигнал на выходе линейной цепи можно получить суммированием составляющих спектра* $\bar{\mathbf{E}}(\omega)$ *входного сигнала, взятых с весом* $\mathbf{K}(i\omega)$. Иными словами, передаточная функция цепи $\mathbf{K}(i\omega)$ является весовой функцией, определяющей относительный вклад различных составляющих спектра $\mathbf{E}(\omega)$ в сигнал $u(t)$.

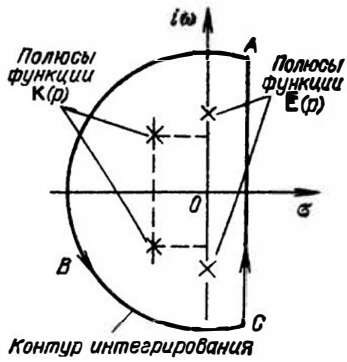


Рис. 6.1. Контур интегрирования при $t>0$

В § 2.14 отмечалось, что анализ переходных процессов значительно упрощается при представлении как внешнего воздействия, так и передаточной функции в виде преобразований Лапласа. При этом обозначение передаточной функции можно сохранить прежним, а изменить только аргумент, так что $\mathbf{K}(i\omega)$ перейдет в $\mathbf{K}(p)$. Функция же $\mathbf{E}(\omega)$ переходит в $L_e(p)$ (см. § 2.14). Преобразование Лапласа от функции времени $e(t)$ в дальнейшем обозначается символом $\bar{E}(p)$. При этом выражение (6.2) приводится к виду (см. § 2.14)

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{\mathbf{E}}(p)\,\mathbf{K}(p)\,e^{pt}\,dp. \qquad (6.3)$$

При $t > 0$ замкнутый контур интегрирования, образованный добавлением дуги бесконечно большого радиуса в левой полуплоскости (рис. 6.1), охватывает все полюсы подынтегральных функций как $\bar{\mathbf{E}}(p)$, так и $\mathbf{K}(p)$, благодаря чему имеет место соотношение

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \bar{\mathbf{E}}(p)\,\mathbf{K}(p)\,e^{pt}\,dp = \sum \text{res}, \quad t > 0 \qquad (6.4)$$

(здесь Σres — сумма вычетов в указанных полюсах).

При $t < 0$ контур интегрирования лежит в правой полуплоскости, не содержит полюсов и интеграл равен нулю.

Показанное на рис. 6.1 расположение полюсов функции $\bar{\mathbf{E}}(p)$ (на мнимой оси) соответствует ЭДС вида $e(t) = E_0 \cos\omega_0 t$, существующей при $t \geqslant 0$.

Итак вычисление интеграла (6.4) сводится к определению вычетов в полюсах подынтегральной функции. Представим подынтегральную функцию выражения (6.4) в виде

$$\bar{\mathbf{E}}(p)\,\mathbf{K}(p)\,e^{pt} = \bar{\mathbf{U}}(p)\,e^{pt} = C(p)/D(p). \qquad (6.5)$$

В данном случае знаменатель $D(p)$ образуется произведением множителей вида $(p - p_{\text{п}i})$, где $p_{\text{п}i}$ — полюсы не только функции $\mathbf{K}(p)$, но и функции $\bar{\mathbf{E}}(p)$.

Тогда вычет функции $C(p)/D(p)$, имеющей в точке p_i простой полюс (первой кратности), определится формулой

$$\text{res}_i = C(p_i) \Big/ \left[\frac{dD(p)}{dp}\right]_{p=p_i}. \qquad (6.6)$$

Если функция $C(p)/D(p)$ имеет в точке p_i полюс кратности k (k — целое положительное ч исло), то

$$\text{res}_i = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \left[\frac{C(p)}{D(p)} (p-p_i)^k \right]_{p=p_i}. \tag{6.7}$$

Методика применения контурных интегралов для определения некоторых функций, играющих большую роль в теории переходных процессов, будет в дальнейшем пояснена на примерах.

6.3. МЕТОД ИНТЕГРАЛА НАЛОЖЕНИЯ

Вместо разложения сложного сигнала на гармонические составляющие (спектральный метод) можно воспользоваться разбиением сигнала на достаточно короткие импульсы (рис. 6.2, *а*).

Если в основе спектрального метода лежит передаточная функция цепи $K(i\omega)$, то метод интеграла наложения базируется на импульсной характеристике цепи $g(t)$, введенной в § 5.3.

Пусть требуется найти сигнал $s_{вых}(t)$ на выходе цепи, если задан сигнал $s(t)$ на входе цепи и известна ее импульсная характеристика $g(t)$. Для уяснения сути метода интеграла наложения поступим следующим образом. Разобьем произвольный сигнал $s(x)$ на элементарные импульсы, как это показано на рис. 6.2, *а*, и найдем отклик цепи в момент t на элементарный импульс (на рис. 6.2, *а* заштрихован), действующий на входе в момент x. Если бы площадь этого импульса равнялась единице, то импульс можно было бы рассматривать как дельта-функцию, возникшую в момент x. При импульсной характеристике цепи $g(x)$ отклик в момент t был бы, очевидно, равен $g(t-x)$. Поскольку, однако, заштрихованная на рис. 6.2, *а* площадь импульса равна $s(x)\,\Delta x$ (а не единице), отклик в момент t будет $s(x)\,\Delta x\, g(t-x)$.

Для определения полного значения выходного сигнала в момент t нужно просуммировать действие всех импульсов в промежутке от $x=0$ до $x=t$. При $\Delta x \to 0$ суммирование сводится к интегрированию.

Следовательно,

$$s_{вых}(t) = \int_0^t s(x)\, g(t-x)\, dx. \tag{6.8}$$

В общем случае, если начало сигнала $s(x)$ не совпадет с началом отсчета времени x, последнее выражение можно записать в форме

$$s_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{t} s(x)\, g(t-x)\, dx. \tag{6.9}$$

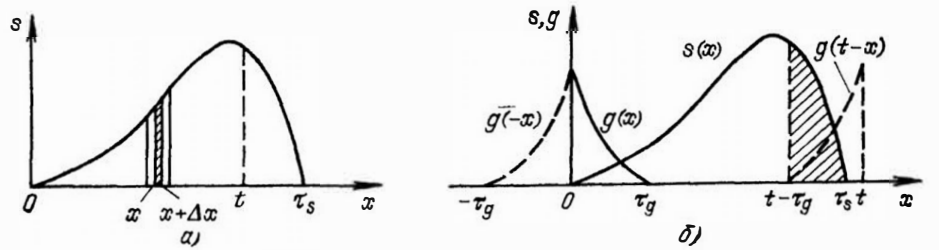


Рис. 6.2. Разбиение сигнала на короткие импульсы (*а*) и свертка сигнала с импульсной характеристикой (*б*)

Для реальных цепей всегда выполняется условие

$$g(t-x)=0 \text{ при } t<x, \tag{6.10}$$

т. е. при отрицательном аргументе функция $g(t-x)$ должна обращаться в нуль, так как отклик не может опережать воздействие. Поэтому выражение (6.8) можно заменить выражением

$$s_{\text{вых}}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} s(x)\,g(t-x)\,dx \tag{6.11}$$

(при этом имеется в виду, что для $x>t$ подынтегральное выражение обращается в нуль).

Приведем, наконец, еще одну форму записи, которая получается из выражения (6.8) при замене x на $t-u$:

$$s_{\text{вых}}(t)=\int_{0}^{t} s(t-x)\,g(x)\,dx=\int_{0}^{t} s(u)\,g(t-u)\,du. \tag{6.12}$$

Интеграл, стоящий в правой части выражения (6.8), в математике называется сверткой функций $s(t)$ и $g(t)$ (см. § 2.7). Таким образом, приходим к следующему важному положению: *сигнал $s_{\text{вых}}(t)$ на выходе линейной цепи является сверткой входного сигнала $s(t)$ с импульсной характеристикой цепи $g(t)$*.

Из выражения (6.8) видно, что сигнал на выходе цепи $s_{\text{вых}}(t)$ в момент t получается суммированием мгновенных значений входного сигнала $s(t)$, взятых с весом $g(t-x)$ за все предыдущее время.

В § 6.2 при суммировании спектра входного сигнала весовой функцией являлась передаточная функция цепи $\mathbf{K}(i\omega)$. В данном случае при суммировании мгновенных значений входного сигнала $s(t)$ *весовой функцией является импульсная характеристика цепи*, взятая с аргументом $(t-x)$, т. е. функция $g(t-x)$.

Из рис. 6.2, *б*, построенного для момента времени $t>\tau_s$, видно, что отклик цепи на воздействие $s(x)$ не может закончиться раньше, чем функция $g(t-x)$ сместится вправо от $s(x)$ на время, равное длительности импульсной характеристики τ_g. Иными словами, сигнал на выходе цепи не может быть короче $\tau_s+\tau_g$.

Для того чтобы при прохождении через цепь сигнал не удлинялся, требуется выполнение условия $\tau_g \to 0$, т. е. импульсная характеристика цепи должна приближаться к дельта-функции, а это равносильно требованию равномерности передаточной функции $K(i\omega)$ при $0<|\omega|<\infty$.

В § 6.4, 6.5 рассматривается прохождение некоторых управляющих сигналов через апериодические цепи. Все остальное содержание главы посвящено анализу передачи радиосигналов через узкополосные цепи.

6.4. ПРОХОЖДЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ АПЕРИОДИЧЕСКИЙ УСИЛИТЕЛЬ

Дискретные сигналы обычно представляют собой последовательности импульсов. При передаче таких последовательностей через инерционные цепи форма импульсов претерпевает изменения, что приводит к частичной или полной потере передаваемой информации. В связи с этим одной из наиболее типичных задач является анализ искажения формы импульсов.

Из всего многообразия импульсов наибольший интерес для анализа представляет прямоугольный импульс. Это обусловлено простотой его

формирования, а также широким применением в системах с двоичным кодом и во многих других радиотехнических устройствах. При этом основное внимание обычно уделяется передаче фронта и среза импульса. Этот вопрос особенно важен, когда передаваемая или извлекаемая информация содержится в положении переднего (или заднего) перепада импульсов на оси времени (например, в некоторых радиолокационных системах).

Рассмотрим прохождение прямоугольного импульса через однокаскадный резистивный усилитель, изученный в § 5.4 и дополненный на выходе разделительной цепью $R_p C_p$ (рис. 6.3, *а*). Назначение этой цепи — защита транзистора от постоянного напряжения, имеющегося в устройстве формирования входного сигнала.

При гармоническом возбуждении на частоте ω и амплитуде входной ЭДС E_1 напряжение на входе транзистора (в предположении, что R_p значительно меньше входного сопротивления база—эмиттер)

$$\mathbf{U}_1 = \frac{\mathbf{E}_1 R_p}{R_p + 1/i\omega C_p} = \mathbf{E}_1 \frac{i\omega R_p C_p}{1 + i\omega R_p C_p} = \mathbf{E}_1 \mathbf{K}_p(i\omega), \qquad (6.13)$$

где $\mathbf{K}_p(i\omega) = i\omega\tau_p/(1 + i\omega\tau_p)$ — передаточная функция разделительной цепи; $\tau_p = R_p C_p$ — постоянная времени этой цепи.

Схема замещения коллекторной цепи усилителя представлена на рис. 6.3, *б*. От схемы на рис. 5.10, *а* она отличается тем, что напряжение $\mathbf{E}_1$ заменено напряжением $\mathbf{U}_1 = \mathbf{E}_1 \mathbf{K}_p(i\omega)$.

Передаточная функция $\mathbf{K}_1(i\omega)$ однокаскадного резистивного усилителя определяется формулой (5.43), а рассматриваемого устройства в целом — выражением

$$\mathbf{K}(i\omega) = \frac{\mathbf{U}_{вых}}{\mathbf{E}_1} = \frac{\mathbf{U}_{вых}}{\mathbf{U}_1}\frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{E}_1} = \mathbf{K}_p(i\omega)\mathbf{K}_1(i\omega) = -\frac{i\omega\tau_p}{1 + i\omega\tau_p}\frac{K_{1\,max}}{1 + i\omega\tau_1},$$

где $\tau_1 = RC_0$.

График $K(\omega)$, вычисленный по формуле

$$K(\omega) = K_{1\,max}\frac{\omega\tau_p}{\sqrt{1 + (\omega\tau_p)^2}\sqrt{1 + (\omega\tau_1)^2}},$$

при $\tau_p/\tau_1 = 100$ представлен на рис. 6.4.

В операторной форме передаточная функция:

$$\mathbf{K}(p) = -K_{1\,max}\frac{p\tau_p}{(1 + p\tau_p)(1 + p\tau_1)}.$$

Пусть в момент $t = 0$ на вход усилителя подается прямоугольный импульс ЭДС $e(t)$ с амплитудой E и длительностью T (рис. 6.5, *а*). В интервале времени от $t = 0$ до $t = T$ напряжение на выходе усилителя можно рассматривать как результат включения при $t = 0$ постоянной ЭДС $e_1(t) = E$.

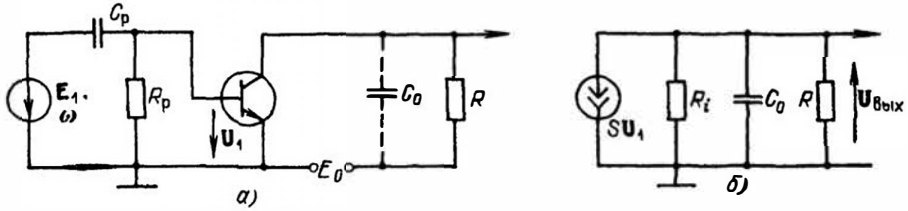


Рис. 6.3. Транзисторный усилитель с разделительной *RC*-цепью на входе (*а*) и схема замещения выходной цепи (*б*)

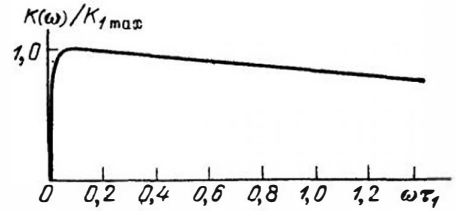


Рис. 6.4. Амплитудно-частотная характеристика усилителя, представленного на рис. 6.3, *а*

В момент $t = T$ включается дополнительная ЭДС $e_2(t) = -E$, компенсирующая первую (рис. 6.5, *б*). Суперпозиция выходных напряжений $u_1(t)$ и $u_2(t)$, обусловленных действием $e_1(t)$ и $e_2(t)$, образует импульс на выходе усилителя. Таким образом, задачу можно свести к рассмотрению переходного процесса в усилителе при включении на входе постоянной ЭДС.

Изображение по Лапласу для $e_1(t) = E$, $t \geqslant 0$, в соответствии с (2.102) будет

$$\bar{E}(p) = \int_0^\infty e_1(t)\, e^{-pt}\, dp = E/p.$$

Тогда по формуле (6.3) выходное напряжение

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{p} E K(p)\, e^{pt}\, dp =$$

$$= -K_{1\max} E \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}\, dp}{(1+p\tau_p)(1+p\tau_1)}.$$

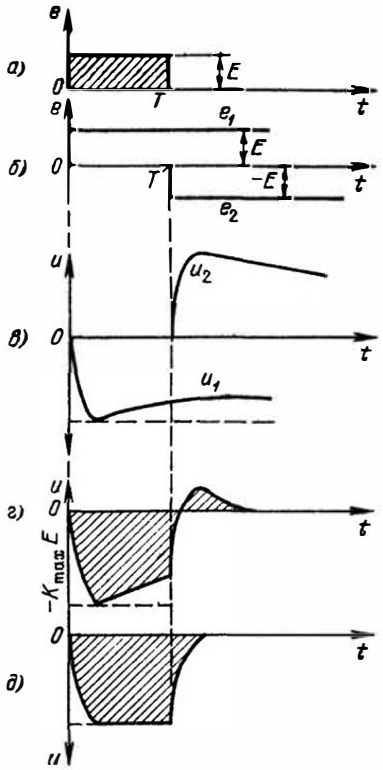


Рис. 6.5. Искажение формы импульса в резистивном усилителе:
а) импульс на входе; *б*) представление импульса в виде суммы двух скачков; *в*) деформация скачков на выходе; *г*) результирующий импульс на выходе; *д*) импульс на выходе усилителя при устранении разделительной цепи

Полюсы подынтегральной функции:

$$p_1 = -1/\tau_p,\ p_2 = -1/\tau_1,\ \tau_1 \ll \tau_p.$$

Вычислив вычеты по формуле (6.6), приходим к следующему результату:

$$u_1(t) = -K_{\max} E \left(e^{-t/\tau_p} - e^{-t/\tau_1}\right). \qquad (6.14)$$

Графики $u_1(t)$ и $u_2(t) = -u_1(t - T)$ изображены на рис. 6.5, *в*, а результирующее напряжение на выходе усилителя $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ — на рис. 6.5, *г*.

Из формулы (6.14) и рис. 6.5, *г* видно, что при малых временах, т. е. при t, соизмеримых с τ_1, первая экспонента в выражении (6.14) близка к единице и основное влияние на фронт импульса оказывает вторая экспонента. Когда же t становится соизмеримым с τ_p, характер функции $u_1(t)$ определяется в основном первой экспонентой. То же самое относится к функции $u_2(t)$ при отсчете времени с момента $t = T$. Прямоугольный импульс с амплитудой $K_{\max}E$, который имел бы место в идеальном усилителе без разделительной цепи изображен на рис. 6.5, *г* штриховой линией.

Искажение формы реального импульса проявляется: а) в конечной крутизне фронта и среза, б) в спаде вершины импульса.

Первый из этих факторов выражен тем *сильнее, чем больше постоянная времени* $\tau_1 = RC_0$ (и, следовательно, чем сильнее завал частотной характеристики в области *верхних* частот).

Второй фактор (спад вершины импульса), наоборот, выражен тем сильнее, чем *меньше постоянная времени* $\tau_р$ *разделительной цепи* $R_р C_р$ (и, следовательно, чем сильнее завал частотной характеристики в области *нижних* частот).

Выбор постоянных времени τ_1 и $\tau_р$ зависит от требований, предъявляемых к форме импульса на выходе усилителя. Если требуется, чтобы за время T амплитуда лишь достигала своего максимально возможного значения $K_{max}E$, то постоянная времени τ_1 может быть близка к T. Форма импульса при этом далека от прямоугольной.

В тех случаях, когда требуется удовлетворительное воспроизведение формы импульса, постоянная времени τ_1 должна сопоставляться со временем, отводимым на длительность фронта выходного импульса, а постоянная времени $\tau_р$ должна быть велика по сравнению с длительностью импульса T. Этот результат имеет важное значение для правильного выбора параметров системы передачи дискретных сигналов, так как он указывает минимальное время, необходимое для перехода от одного дискретного уровня к другому.

Следует отметить, что в случае усиления импульсной последовательности проведенное выше рассмотрение справедливо при достаточно длительном интервале между импульсами, так что наложение переходных процессов от соседних импульсов не имеет места.

Рассмотрим теперь прохождение прямоугольного импульса через один транзисторный апериодический усилитель (схема на рис. 5.10), без разделительной цепи. Для этого достаточно устремить емкость $C_р$ к бесконечности, т. е. закоротить конденсатор $C_р$.

При этом формула (6.14) переходит в

$$u_1(t) = -K_{max} E (1 - e^{-t/\tau}), \qquad (6.14')$$

так как $\tau_р \to \infty$.

Импульс на выходе рассматриваемого усилителя изображен на рис. 6.5, *д*.

6.5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ

В радиоэлектронике часто требуется осуществлять преобразование сигнала, имеющее характер дифференцирования или интегрирования.

На вход линейного устройства, осуществляющего дифференцирование, подается сигнал $s(t)$; с выхода должен сниматься сигнал вида

$$s_{вых}(t) = \tau_0 \frac{ds(t)}{dt}.$$

В интегрирующем устройстве связь между выходным $s_{вых}(t)$ и входным $s(t)$ сигналами должна иметь следующий вид:

$$s_{вых}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int s(t)\, dt.$$

В этих выражениях τ_0 — постоянная величина, имеющая размерность времени.

Дифференцирование и интегрирование являются линейными математическими операциями. Следовательно, для дифференциального или интегрального преобразования сигнала следует применять линейные цепи и элементы, обладающие требуемыми соотношениями между входными и выходными ве-

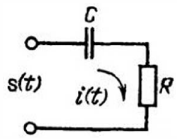


Рис. 6.6. Простейшая цепь, используемая для дифференцирования или интегрирования

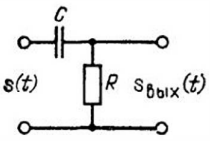


Рис. 6.7. Дифференцирующая цепь

личинами. Этим требованиям отвечают в принципе такие элементы, как обычные конденсаторы или катушки индуктивности в сочетании с резистором при надлежащем съеме выходного сигнала.

Рассмотрим сначала цепь, изображенную на рис. 6.6.

Подразумевая под входным сигналом $s(t)$ ЭДС, составляем уравнение для тока в цепи $i(t)$

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = s(t). \tag{6.15}$$

Умножив это уравнение на C и обозначив постоянную времени цепи $\tau_0 = RC$, получим

$$\tau_0 i(t) + \int i(t)\,dt = Cs(t). \tag{6.16}$$

Характер функциональной связи между током $i(t)$ и входным сигналом $s(t)$ зависит от постоянной времени τ_0. Рассмотрим два крайних случая: очень малого и очень большого τ_0. При очень малом τ_0 первым слагаемым в левой части уравнения (6.16) можно пренебречь. Продифференцировав оставшееся после отбрасывания этого слагаемого уравнение по t, получим

$$i(t) \approx C\frac{ds(t)}{dt}.$$

Отсюда видно, что напряжение на резисторе R, совпадающее по форме с $i(t)$, пропорционально производной входного сигнала

$$u_R = Ri(t) \approx RC\frac{ds(t)}{dt} = \tau_0\frac{ds(t)}{dt}.$$

Таким образом, приходим к схеме дифференцирующего четырехполюсника, показанной на рис. 6.7, в которой выходной сигнал снимается с резистора R.

При очень больших значениях τ_0 второе слагаемое в левой части уравнения (6.16) можно отбросить. При этом ток

$$i(t) \approx \frac{C}{\tau_0}s(t) = \frac{1}{R}s(t)$$

совпадает по форме с входным сигналом, а напряжение на конденсаторе C, равное

$$u_C = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt \approx \frac{1}{CR}\int s(t)\,dt,$$

пропорционально интегралу от входного сигнала $s(t)$. Отсюда следует, что для осуществления интегрирования RC-цепь должна быть такой, как показано на рис. 6.8. Аналогичные результаты можно получить с помощью RL-цепи (рис. 6.9 и 6.10).

Постоянная времени $\tau_0 = L/R$ дифференцирующей цепи должна быть достаточно мала, а интегрирующей — достаточно велика. Принцип диффе-

ренцирования для первой схемы (см. рис. 6.9) можно представить следующим образом. При достаточно большом сопротивлении R ток через RL-цепь почти не зависит от L и совпадает по форме с входным сигналом $s(t)$. Выходной же сигнал $s_{вых}(t)$, снимаемый с индуктивности L,

$$s_{вых}(t) = L\frac{di}{dt} \approx L\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{R}s(t)\right] = \tau_0\frac{ds(t)}{dt}.$$

В схеме, показанной на рис. 6.10, наоборот, ток в основном определяется индуктивностью L (так как R весьма мало):

$$i(t) \approx \frac{1}{L}\int s(t)\,dt,$$

выходной же сигнал, снимаемый с резистора R,

$$s_{вых}(t) = Ri(t) \approx \frac{1}{\tau_0}\int s(t)\,dt.$$

Уточним теперь использованные выше понятия «малое» и «большое» τ_0. Это проще всего сделать на основе спектрального рассмотрения. Если входной сигнал $s(t)$ имеет спектральную плотность $\mathbf{S}(\omega)$, то при точном дифференцировании выходной сигнал

$$s_{вых}(t) = \tau_0\frac{ds(t)}{dt}$$

должен иметь спектральную плотность $i\omega\tau_0\mathbf{S}(\omega)$, а при точном интегрировании — плотность $(1/i\omega\tau_0)\,\mathbf{S}(\omega)$ [см. (2.59) и (2.60)]. Это означает, что для точного дифференцирования требуется четырехполюсник с коэффициентом передачи

$$\mathbf{K}(i\omega) = \tau_0 i\omega, \tag{6.17}$$

а для точного интегрирования

$$\mathbf{K}(i\omega) = 1/\tau_0 i\omega. \tag{6.18}$$

Передаточные функции показанных на рис. 6.7 и 6.8 четырехполюсников соответственно

$$\mathbf{K}(i\omega) = \frac{R}{R+1/i\omega C} = RC\frac{i\omega}{1+RCi\omega} = \frac{\tau_0 i\omega}{1+\tau_0 i\omega}, \tag{6.19}$$

$$\mathbf{K}(i\omega) = \frac{1/i\omega C}{R+1/i\omega C} = \frac{1}{i\omega RC}\,\frac{1}{1+(1/i\omega RC)} = \frac{1}{\tau_0 i\omega}\,\frac{1}{1+(1/\tau_0 i\omega)}. \tag{6.20}$$

Из сравнения выражений (6.17) и (6.19) видно, что для удовлетворительного дифференцирования требуется, чтобы выполнялось условие

$$\tau_0\omega \ll 1. \tag{6.21}$$

Это неравенство должно удовлетворяться для всех частот спектра входного сигнала, в том числе и для самой высокой.

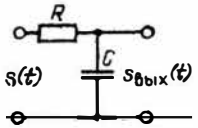


Рис. 6.8. Интегрирующая цепь

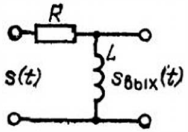


Рис. 6.9. Дифференцирующая цепь

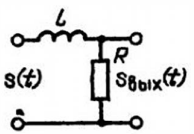


Рис. 6.10. Интегрирующая цепь

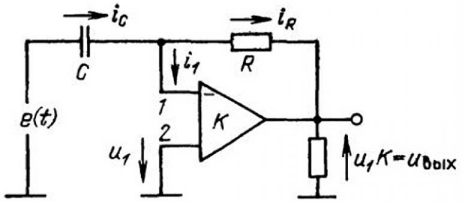


Рис. 6.11. Дифференцирующая цепь с применением отрицательной обратной связи

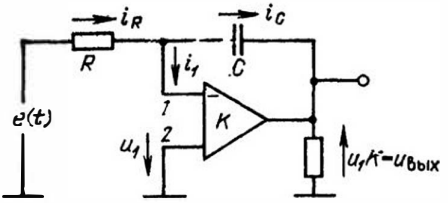


Рис. 6.12. Интегрирующее устройство с применением отрицательной обратной связи

Из сравнения же выражений (6.18) и (6.20) видно, что для удовлетворительного интегрирования требуется выполнение условия

$$\tau_0 \omega \gg 1. \tag{6.22}$$

Это неравенство должно удовлетворяться для всех частот спектра входного сигнала, в том числе и для самой низкой.

Из неравенств (6.21), и (6.22) следует, что при заданной цепи дифференцирование тем точнее, чем ниже частоты, на которых концентрируется энергия входного сигнала, а интегрирование тем точнее, чем выше эти частоты.

Проиллюстрируем неравенство (6.21) следующим примером. Пусть сигнал $s(t)$ на входе схемы, показанной на рис. 6.7, является импульсом с длительностью $\tau_и$ и требуется указать значение τ_0, обеспечивающее удовлетворительное дифференцирование. Наивысшую частоту в спектре сигнала можно оценить величиной $f_m \approx 1/\tau_и$ (см. § 2.11). Следовательно, неравенство (6.21) принимает вид $\tau_0 2\pi/\tau_и \ll 1$ или $\tau_0 \ll \tau_и/2\pi$. Итак, постоянная времени дифференцирующей цепи τ_0 *должна быть мала по сравнению с длительностью импульса* $s(t)$.

Из неравенств (6.21), (6.22) вытекает также следующее принципиальное положение: чем точнее дифференцирование или интегрирование, тем меньше (по модулю) передаточная функция $\mathbf{K}(i\omega)$ цепи, осуществляющей это преобразование сигнала. Сказанное относится к простейшим RC- или RL-цепям, представленным на рис. 6.7—6.10. В пределе, при идеальном преобразовании, $\mathbf{K}(i\omega) \to 0$.

Таким образом, простые RC- или RL-цепи пригодны лишь для приближенного дифференцирования или интегрирования сигналов. Указанные операции можно осуществить достаточно точно при введении в схемы рис. 6.7 и 6.8 усилителя с отрицательной обратной связью при обеспечении условия $|\mathbf{K}_у \mathbf{K}_{ос}| \gg 1$. Этому требованию отвечают *операционные усилители* (ОУ).

На рис. 6.11 представлена схема дифференцирующего устройства на ОУ. Как известно, входное сопротивление ОУ $R_{вх}$ очень велико, благодаря чему коэффициент обратной связи, определяемый отношением $R_{вх}/(R_{вх} + R)$, близок к единице. Напряжение u_1, являющееся разностью напряжения, поступающего со входа, и напряжения обратной связи, настолько мало по сравнению с $u_{вых}$, а следовательно, и по сравнению с напряжением на R и C, что в первом приближении точки *1—2* в схеме на рис. 6.11 можно считать эквипотенциальными. Это позволяет считать, что подлежащий дифференцированию сигнал $e(t)$ приложен непосредственно к емкости, так что ток

$$i_C \approx Cde/dt.$$

Определим ток i_R. Падение напряжения Ri_R на резисторе R совпадает с напряжением $-(u_1 + u_1K) = -u_{вых}(1 + 1/K)$, откуда вытекает равенство

$$i_R = -\frac{u_{вых}}{R}\left(1 + \frac{1}{K}\right).$$

Учитывая, что ток i_1 близок к нулю (из-за малости u_1 и очень большого входного сопротивления ОУ), приходим к соотношению $i_R \approx i_C$, откуда

$$-\frac{u_{вых}}{R}\left(1+\frac{1}{K}\right)=C\frac{de}{dt},$$

или

$$u_{вых}=-\frac{RC}{1+1/K}\frac{de}{dt}. \tag{6.23}$$

В реальных ОУ усиление K измеряется тысячами и более, поэтому точность операции дифференцирования вполне достаточна для радиотехнических применений.

Схема интегрирующего устройства на ОУ представлена на рис. 6.12. В данной схеме

$$i_R=e/R \text{ и } i_C=C\frac{d[-u_{вых}(1+1/K)]}{dt}=i_R,$$

откуда

$$u_{вых}=-\frac{1}{RC(1+1/K)}\int e dt. \tag{6.23'}$$

6.6. АНАЛИЗ РАДИОСИГНАЛОВ В ИЗБИРАТЕЛЬНЫХ ЦЕПЯХ. МЕТОД ОГИБАЮЩЕЙ

В рассмотренных в предыдущей главе задачах мы имели дело с сигналами, которые по своей форме совпадали с формой передаваемого сообщения. При передаче подобных сообщений задача сохранения информации тесно связана с задачей сохранения формы сигналов.

Иначе обстоит дело с радиосигналом, в котором информация заключена в одном из нескольких параметров высокочастотного колебания. Не обязательно сохранять полностью структуру этого колебания; достаточно лишь сохранить закон изменения того параметра, в котором заключена информация. Так, в случае амплитудно-модулированного колебания важно точно передать огибающую амплитуд, между тем как некоторое изменение частоты или фазы заполнения, не имеющее существенного значения, при анализе можно не учитывать. При передаче радиосигналов с угловой модуляцией, наоборот, основное внимание следует уделить точному воспроизведению закона изменения частоты и фазы.

Эти особенности радиосигналов открывают путь к упрощению методов анализа передачи их через линейные цепи. Возможность упрощения особенно существенна, когда радиосигнал представляет собой узкополосный процесс, а цепь — узкополосную систему. Это как раз и характерно для реальных радиосигналов и реальных избирательных цепей. В § 3.1 уже отмечалось, что даже для «широкополосных» сигналов ширина спектра радиосигнала мала по сравнению с несущей частотой сигнала. Соответственно и полоса прозрачности цепи обычно мала по сравнению с ее резонансной частотой.

Анализ передачи сигнала в подобной ситуации существенно упрощается при использовании рассмотренного в § 3.10 понятия аналитического сигнала:

$$z(t)=a_1(t)+ia_1(t)=\mathbf{A}(t)\,e^{i\omega_0 t}, \tag{6.24}$$

где комплексная огибающая $\mathbf{A}(t) = A(t)\, e^{i\theta(t)}$ содержит всю информацию, заложенную в сигнал $a(t)$ в результате модуляции, как амплитудной, так и угловой.

После прохождения через заданную цепь получается новый аналитический сигнал

$$z_{\text{вых}}(t) = a_{\text{вых}}(t) + i a_{1\text{вых}}(t) = \mathbf{A}(t)\, e^{i\omega_0 t} = \\ = A_{\text{вых}}(t)\, e^{i\theta_{\text{вых}}(t)}\, e^{i\omega_0 t}, \tag{6.25}$$

действительная часть которого

$$a_{\text{вых}}(t) = \operatorname{Re} z_{\text{вых}}(t) = A_{\text{вых}}(t) \cos[\omega_0 t + \theta_{\text{вых}}(t)] \tag{6.26}$$

и есть выходной сигнал.

Таким образом, задача сводится к определению влияния цепи на комплексную огибающую входного сигнала.

Эта задача может быть решена двумя способами: спектральным и временны́м.

1. СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПОДХОД

Спектральная плотность $S_a(\omega)$ высокочастотного модулированного колебания $a(t)$ образует два всплеска вблизи частот ω_0 и $-\omega_0$, а передаточная функция $\mathbf{K}(i\omega)$ — вблизи частот ω_p и $-\omega_p$ (рис. 6.13). Для общности здесь принято, что резонансная частота ω_p может не совпадать с центральной частотой сигнала ω_0, т. е. может иметь место расстройка. При этом предполагается, что расстройка

$$\Delta\Omega = \omega_0 - \omega_p \tag{6.27}$$

является величиной того же порядка, что и полоса прозрачности цепи.

Спектральная плотность сигнала $\mathbf{Z}(\omega) = 2S_a(\omega)$ отлична от нуля только в области $\omega > 0$ (см. § 3.10). Графики функций $Z(\omega)$, $S_a(\omega)$ и $K(\omega)$ показаны на рис. 6.13.

Очевидно,

$$z_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathbf{Z}(\omega)\, \mathbf{K}(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty 2S_a(\omega)\, \mathbf{K}(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{6.28}$$

В § 3.3 было показано, что в области положительных частот

$$S_a(\omega) \approx {}^1/_2\, S_A(\omega - \omega_0),$$

где S_A — спектральная плотность огибающей[1] $\mathbf{A}(t)$.

Подставив последнее выражение в (6.28), получим

$$z_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty S_A(\omega - \omega_0)\, \mathbf{K}(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{6.29}$$

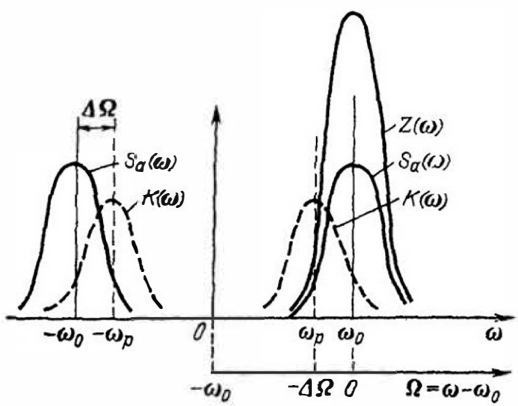


Рис. 6.13. Спектральные плотности модулированного колебания и аналитического сигнала, а также передаточная функция узкополосной цепи

[1] В § 3.3 рассматривался частный случай $\theta = \theta_0 = \text{const}$. При учете $\theta(t)$ формула (3.10) обобщается на комплексную огибающую $\mathbf{A}(t)$ при любом законе изменения фазы во времени.

Перейдем, как и в § 3.8, к новой переменной $\Omega = \omega - \omega_0$. Тогда

$$z_{\text{вых}}(t) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\infty} S_A(\Omega)\, \mathbf{K}[i(\omega_0 + \Omega)]\, e^{i\Omega t}\, d\Omega \right\} e^{i\omega_0 t}. \tag{6.30}$$

Из сопоставления этого выражения с (6.25) видно, что выражение, стоящее в фигурных скобках, соответствует комплексной огибающей выходного колебания

$$\mathbf{A}_{\text{вых}}(t) = A_{\text{вых}}(t)\, e^{i\theta_{\text{вых}}(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\infty} S_A(\Omega)\, \mathbf{K}[i(\omega_0 + \Omega)]\, e^{i\Omega t}\, d\Omega. \tag{6.31}$$

Дальнейшее упрощение анализа вытекает из свойств передаточной функции резонансных цепей, обладающих сильно выраженной частотной избирательностью. Модуль передаточной функции $\mathbf{K}(i\omega)$ быстро убывает при удалении ω от резонансной частоты ω_p. Поэтому передаточную функцию целесообразно выражать в виде функции разности $\omega - \omega_p$.

Введем новое обозначение передаточной функции

$$\mathbf{K}(i\omega) = \mathbf{K}_1[i(\omega - \omega_p)].$$

Подставив теперь $\omega = \omega_0 + \Omega$, получим

$$\mathbf{K}_1[i(\omega_0 - \omega_p + \Omega)] = \mathbf{K}_1[i(\Delta\Omega + \Omega)], \tag{6.32}$$

где $\Delta\Omega = \omega_0 - \omega_p$ [см. (6.27)].

Так как при $\Omega = -\omega_0$ коэффициент передачи $\mathbf{K}_1[i(\Delta\Omega + \Omega)]$ практически равен нулю, нижний предел интеграла в выражении (6.31) можно заменить на $-\infty$. При этом выражение (6.31) принимает следующий вид:

$$\mathbf{A}_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_A(\Omega)\, \mathbf{K}_1[i(\Delta\Omega + \Omega)]\, e^{i\Omega t}\, d\Omega. \tag{6.33}$$

Это выражение ничем не отличается от обычного интеграла Фурье, определяющего оригинал по заданной спектральной плотности огибающей $S_A(\Omega)$ и передаточной функции $\mathbf{K}_1[i(\Delta\Omega + \Omega)]$.

Заменив $i\Omega$ на p, получим выражение в форме обратного преобразования Лапласа

$$\mathbf{A}_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{S}_A(p)\, \mathbf{K}_1[i\Delta\Omega + p]\, e^{pt}\, dp. \tag{6.34}$$

Вычисления, связанные с определением $\mathbf{A}_{\text{вых}}(t)$ по формуле (6.34), значительно проще, чем при непосредственном определении $a_{\text{вых}}(t)$ с помощью обратного преобразования Лапласа, так как переход от $S_a(\omega)$ к $S_A(\Omega)$ и от $\mathbf{K}(p)$ к $\mathbf{K}_1(i\Delta\Omega + p)$ сокращает вдвое число особых точек подынтегральной функции. После определения $\mathbf{A}_{\text{вых}}(t)$ можно составить выражение (6.25) для $a_{\text{вых}}(t)$.

Применение описанного метода иллюстрируется в § 6.7.

2. ВРЕМЕННОЙ ПОДХОД

Обратимся к общему выражению свертки (6.11) и перепишем его в форме

$$a_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x)\, g(t-x)\, dx, \tag{6.35}$$

где $a(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)] = \operatorname{Re}[\mathbf{A}(t)\, e^{i\omega_0 t}]$,

а $g(t) = G(t)\cos[\omega_p t + \gamma(t)] = \operatorname{Re}[\mathbf{G}(t)\, e^{i\omega_p t}]$ (6.36)

—импульсная характеристика фильтра с резонансной частотой ω_p.

Подставив $a(t)$ и $g(t)$ в (6.35), получим

$$a_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x)\, G(t-x)\cos[\omega_0 x + \theta(x)]\cos[\omega_p t - \omega_p x + \gamma(t-$$

$$-x)]\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} A(x)\, G(t-x)\cos[(\omega_0-\omega_p)x + \omega_p t + \theta(x) + \gamma(t-$$

$$-x)]\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} A(x)\, G(t-x)\cos[(\omega_0+\omega_p)x - \omega_p t + \theta(x) -$$

$$-\gamma(t-x)]\, dx. \tag{6.37}$$

Вторым интегралом в (6.37) можно пренебречь по сравнению с первым из-за наличия быстропеременного множителя с частотой $\omega_0 + \omega_p$.

Переходя к комплексной форме, получаем

$$a_{\text{вых}}(t) \approx \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}\, e^{i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} A(x)\, e^{i\theta(x)}\, G(t-x)\, e^{i\gamma(t-x)}\, e^{-i\Delta\Omega(t-x)}\, dx\right],$$

где $\Delta\Omega = \omega_0 - \omega_p$.

Учитывая, что $A(x)\, e^{i\theta(x)} = \mathbf{A}(x)$ и $G(t-x)\, e^{i\gamma(t-x)} = \mathbf{G}(t-x)$ являются комплексными огибающими соответственно входного сигнала и импульсной характеристики фильтра, приходим к следующему выражению:

$$a_{\text{вых}}(t) \approx \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}\, e^{i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(x)\, \mathbf{G}(t-x)\, e^{-i\Delta\Omega(t-x)}\, dx\right]. \tag{6.38}$$

Из этого выражения вытекает, что комплексная огибающая выходного сигнала приближенно определяется половиной свертки комплексной огибающей входного сигнала с комплексной огибающей импульсной характеристики цепи:

$$\mathbf{A}_{\text{вых}}(t) \approx \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(x)\, \mathbf{G}(t-x)\, e^{-i\Delta\Omega(t-x)}\, dx. \tag{6.39}$$

Множитель $e^{-i\Delta\Omega(t-x)}$ учитывает расстройку центральной частоты спектра сигнала относительно резонансной частоты фильтра $\Delta\Omega = \omega_0 - \omega_p$. При точной настройке

$$\mathbf{A}_{\text{вых}}(t) \approx \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(x)\, \mathbf{G}(t-x)\, dx. \tag{6.40}$$

6.7. ПРОХОЖДЕНИЕ РАДИОИМПУЛЬСА ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНСНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ

Имея в виду радиоимпульс с прямоугольной огибающей и немодулированным высокочастотным заполнением, рассмотрим сначала явления в цепи резонансного усилителя, показанной на рис. 5.13, при передаче фронта импульса, т. е. при включении в момент $t = 0$ гармонической ЭДС $e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$. В качестве выходной величины примем напряжение на колебательном контуре усилителя.

Выведем выражение для колебания на выходе усилителя. Воспользуемся формулами (6.33), (6.34).

В данном случае огибающая $A(t)$ имеет вид скачка E_0 (в момент $t = 0$), а с учетом начальной фазы θ_0 комплексная огибающая будет $\mathbf{A}(t) = E_0 e^{i\theta_0}$, $t \geqslant 0$. Спектральная плотность этой огибающей

$$\mathbf{S}_A(\Omega) = E_0 e^{i\theta_0} [\pi\delta(\Omega) + 1/i\Omega],$$

а преобразование Лапласа

$$\overline{\mathbf{S}}_A(p) = E_0 e^{i\theta_0}/p. \tag{6.41}$$

Передаточную функцию усилителя определим по формуле (5.65), в которой аргумент $\omega - \omega_p$ приведем в соответствие с (6.32):

$$\mathbf{K}_1[i(\Delta\Omega + \Omega)] = -K_{max}/[1 + i(\Delta\Omega + \Omega)\tau_к] \tag{6.42}$$

($\tau_к$ имеет тот же смысл, что и $\tau_{эк}$).

Тогда

$$\mathbf{K}_1(i\Delta\Omega + p) = -K_{max}/[1 + (i\Delta\Omega + p)\tau_к]. \tag{6.42'}$$

Подставив (6.41) и (6.42') в (6.34), придем к следующему выражению для комплексной огибающей колебания на выходе усилителя:

$$\mathbf{A}_{вых}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{\mathbf{S}}_A(p)\,\mathbf{K}_1[i\Delta\Omega + p]\,e^{pt}\,dp = -K_{max}E_0 e^{i\theta_0} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}\,dp}{p[1 + (i\Delta\Omega + p)\tau_к]}. \tag{6.43}$$

Подынтегральная функция имеет два полюса

$$p_1 = 0,\ p_2 = -(1 + i\Delta\Omega\tau_к)/\tau_к.$$

Вычеты в этих полюсах легко вычисляются [см. (6.6)]:

$$\text{res}_1 = \frac{1}{1 + i\Delta\Omega\tau_к} = \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{1 + (\Delta\Omega\tau_к)^2}},\ \varphi = \text{arctg}(\Delta\omega\tau_к),$$

$$\text{res}_2 = -\frac{e^{-(1/\tau_к + i\Delta\Omega)t}}{1 + i\Delta\Omega\tau_к} = -\frac{e^{-t/\tau_к}e^{-i(\Delta\Omega t + \varphi)}}{\sqrt{1 + (\Delta\Omega\tau_к)^2}}.$$

Тогда выражение (6.43) принимает вид (знак минус опущен)

$$\mathbf{A}_{вых}(t) = \frac{K_{max}E_0}{\sqrt{1 + (\Delta\Omega\tau_к)^2}}[e^{i(\theta_0 - \varphi)} - e^{-t/\tau_к}e^{i(\theta_0 - \varphi - \Delta\Omega t)}], \tag{6.44}$$

а искомое физическое колебание

$$a_{\text{вых}}(t) = \operatorname{Re}[\mathbf{A}_{\text{вых}}(t)\, e^{i\omega_0 t}] = \frac{K_{\max} E_0}{\sqrt{1+(\Delta\Omega\tau_{\text{к}})^2}} \operatorname{Re}[e^{i(\omega_0 t+\theta_0-\varphi)} -$$

$$- e^{-t/\tau_{\text{к}}} e^{i(\omega_{\text{р}} t+\theta_0-\varphi)}] = \frac{K_{\max} E_0}{\sqrt{1+(\Delta\Omega\tau_{\text{к}})^2}} [\cos(\omega_0 t+\theta_0-\varphi) -$$

$$- e^{-t/\tau_{\text{к}}} \cos(\omega_{\text{р}} t+\theta_0-\varphi)]. \qquad (6.45)$$

Физический смысл полученного решения очевиден. Первое слагаемое в квадратных скобках определяет стационарную часть напряжения на выходе усилителя, а второе — свободное (затухающее) колебание.

Рассмотрим важные для практики следствия, вытекающие из выражения (6.45). Остановимся сначала на точной настройке контура на частоту возбуждающей ЭДС. Приравнивая $\omega_{\text{р}}$ к частоте ω_0, получаем $\Delta\Omega = 0$. Тогда выражение (6.45) упрощается:

$$a_{\text{вых}}(t) = K_{\max} E_0 (1 - e^{-t/\tau_{\text{к}}}) \cos(\omega_0 t + \theta_0) = A_{\text{вых}}(t) \cos(\omega_0 t + \theta_0).$$

Из этого выражения видно, что при совпадении частот ω_0 и $\omega_{\text{р}}$ огибающая амплитуд выходного колебания нарастает по закону $1 - e^{-t/\tau_{\text{к}}}$ независимо от фазы ЭДС в момент включения.

Соответствующая этому случаю кривая, вычисленная по формуле $A_{\text{вых}}(t)/K_{\max} E_0 = 1 - e^{-t/\tau_{\text{к}}}$, приведена на рис. 6.14.

При наличии расстройки огибающая $A_{\text{вых}}(t)$ изменяется по более сложному закону. Для выявления этого закона вычислим модуль разности в квадратных скобках выражения (6.44)

$$|1 - e^{-t/\tau_{\text{к}}} e^{-i\Delta\Omega t}| = \sqrt{1 - 2e^{-t/\tau_{\text{к}}} \cos\Delta\Omega t + e^{-2t/\tau_{\text{к}}}}.$$

Таким образом,

$$\frac{A_{\text{вых}}(t)}{K_{\max} E_0} = \frac{1}{\sqrt{1+(\Delta\Omega\tau_{\text{к}})^2}} \sqrt{1 - 2e^{-t/\tau_{\text{к}}} \cos\Delta\Omega t + e^{-2t/\tau_{\text{к}}}}. \qquad (6.46)$$

Графики этой функции для двух значений параметра расстройки $\Delta\Omega\tau_{\text{к}}$, равных 1 и 2, приведены на том же рис. 6.14.

Видно, что при значительных расстройках процесс установления огибающей принимает колебательный характер. Это объясняется биением двух колебаний: частот ω_0 и $\omega_{\text{св}}$. Последняя при сделанном выше допущении о высокой добротности контура очень мало отличается от резонансной частоты $\omega_{\text{р}}$.

Эффект суммирования вынужденного и свободного колебаний поясняется векторной диаграммой, показанной на рис. 6.15. При вращении оси времени с угловой частотой ω_0 вектор OB, соответствующий стационарному колебанию, неподвижен, а вектор OC, соответствующий свободному колебанию [см. (6.45)], вращается с угловой частотой $\Delta\Omega = \omega_0 - \omega_{\text{р}}$. Записав длину этого вектора в форме $E_0 e^{-\Delta\Omega t/\Delta\Omega\tau_{\text{к}}}$ и задав значение параметра $\Delta\Omega\tau_{\text{к}}$, можно проиллюстрировать характер изменения огибающей $A_{\text{вых}}(t)$.

Векторная диаграмма на рис. 6.15 построена для параметра $\Delta\Omega\tau_{\text{к}} = 2$, когда $e^{-\Delta\Omega t/\Delta\Omega\tau_{\text{к}}} = e^{-\Delta\Omega t/2}$.

В момент времени t, соответствующий $\Delta\Omega t = \pi$, вектор свободного колебания совпадает по направлению с вектором вынужденного колебания, так что результирующий вектор будет $E_0(1 + e^{-\pi/2}) \approx 1{,}21E_0$. Очевидно, что при $\Delta\Omega t = 2\pi$ результирующий вектор будет $E_0(1 - e^{-\pi}) \approx 0{,}96E_0$ и т. д.

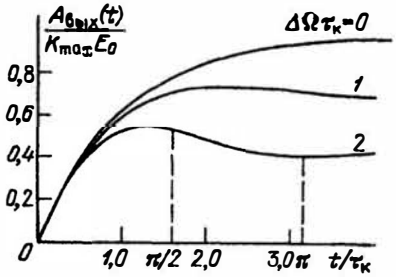


Рис. 6.14. Установление огибающей высокочастотного напряжения на выходе резонансного усилителя при включении гармонической ЭДС. Параметр расстройки $\Delta\Omega\tau_к=1$ и 2

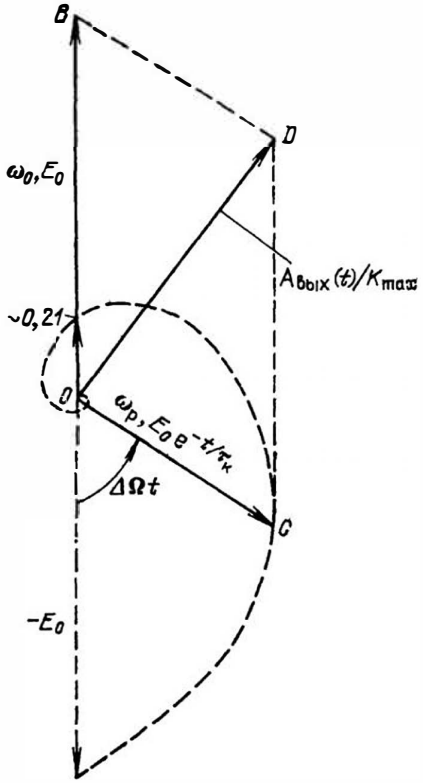


Рис. 6.15. Векторная диаграмма стационарного и свободного колебаний для $\Delta\Omega\tau_к=2$

Из рис. 6.16, где приведены графики нормированной огибающей, т. е. функции $A_{вых}(t)\sqrt{1+(\Delta\Omega)^2\tau_к^2}/K_{max}E_0$, видно, что с увеличением расстройки крутизна фронта огибающей растет и общая продолжительность процесса установления несколько уменьшается.

Используем полученные результаты для определения формы и параметров радиоимпульса на выходе одноконтурного усилителя при прямоугольной форме огибающей импульса на входе.

Колебание на входе (рис. 6.17, *а*) определяется выражением

$$a(t)=\begin{cases}E_0\cos(\omega_0 t+\theta_0) & \text{при } 0<t<T,\\ 0 & \text{при } t<0 \text{ и } t>T.\end{cases}$$

Как и в § 6.4, задачу можно решить, рассматривая независимо явления на фронте и срезе импульса с последующей суперпозицией полученных решений.

Если длительность импульса T больше фактического времени установления режима в контуре при включении гармонической ЭДС, то к моменту окончания входного импульса на выходе усилителя амплитуда колебания будет равна стационарному значению

$$A_{вых\ ст}=K_{max}E_0/\sqrt{1+(\Delta\Omega)^2\tau_к^2}=\text{const}.$$

Начиная с момента $t=T$, после прекращения действия внешней ЭДС, на выходе остается лишь свободное колебание, которое можно представить в форме

$$a_{вых}(t)=A_{вых\ ст}e^{-t/\tau_к}\cos(\omega_p t+\varphi_0)=\frac{K_{max}E_0}{\sqrt{1+(\Delta\Omega)^2\tau_к^2}}e^{-t/\tau_к}\times$$

$$\times\cos(\omega_p t+\varphi_0)\ \text{при}\ t>T, \qquad (6.47)$$

где φ_0 — фаза напряжения на контуре в момент $t=T$.

Таким образом, в отличие от фронта на срезе импульса огибающая амплитуд имеет вид экспоненты независимо от соотношения частот ω_0 и $\omega_р$. Сигнал на выходе усилителя при $\Delta\Omega\tau_к = 0$ и $\Delta\Omega\tau_к = 2$ (рис. 6.17, *б* и *в*) изображен для случая, когда длительность импульса значительно больше времени установления стационарного режима.

В заключение проиллюстрируем применение *временно́го варианта* метода огибающей на примере рассмотренного выше сигнала $a(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$ и резонансного усилителя. Импульсная характеристика усилителя в соответствии с (5.67)

$$g(t) = (S/C)\, e^{-t/\tau_к} \cos \omega_р t, \quad t \geqslant 0, \tag{6.48}$$

[знак минус, как и в (6.44), отброшен].

Переходя к комплексной форме, записываем

$$a(t) = E_0 \operatorname{Re}[e^{i\theta_0} e^{i\omega_0 t}] = \operatorname{Re}[\mathbf{E}(t)\, e^{i\omega_0 t}], \quad t \geqslant 0,$$

где $$\mathbf{E}(t) = E_0 e^{i\theta_0}, \tag{6.49}$$

$$g(t) = (S/C)\, e^{-t/\tau_к} \operatorname{Re}(e^{i\omega_р t}) = (S/C)\, e^{-t/\tau_к} \operatorname{Re}[e^{-i\Delta\Omega t} e^{i\omega_0 t}] =$$

$$= \operatorname{Re}[\mathbf{G}(t)\, e^{i\omega_0 t}], \quad t \geqslant 0,$$

где $$\mathbf{G}(t) = (S/C)\, e^{-t/\tau_к} e^{-i\Delta\Omega t} \tag{6.50}$$

— комплексная огибающая импульсной характеристики, отнесенная к частоте ω_0.

Подставив (6.48) и (6.49) в (6.39), получим

$$\mathbf{A}_{вых}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t E_0 e^{i\theta_0} \frac{S}{C} e^{-(t-x)/\tau_к} e^{-i\Delta\Omega(t-x)}\, dx.$$

С учетом равенств $\tau_к = 2RC$ и $(S/C)\,\tau_к = 2SR = 2K_{max}$ [см. (5.65)] последнее выражение легко приводится к виду

$$\mathbf{A}_{вых}(t) = \frac{K_{max} E_0}{\sqrt{1+(\Delta\Omega\tau_к)^2}} [e^{i(\theta_0-\varphi)} - e^{-t/\tau_к} e^{i(\theta_0-\varphi-\Delta\Omega t)}]. \tag{6.51}$$

Это выражение совпадает с (6.44).

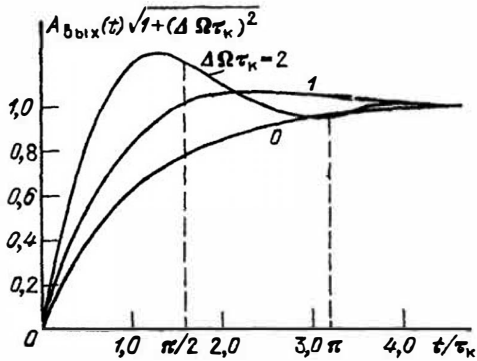


Рис. 6.16. То же, что на рис. 6.14, при *нормировании огибающей* относительно стационарного значения

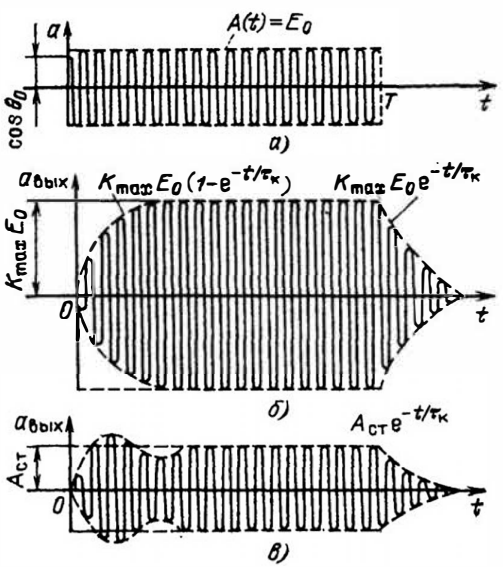


Рис. 6.17. Прохождение радиоимпульса через резонансный усилитель:
а) импульс на входе усилителя; *б)* на выходе при точной настройке контура; *в)* на выходе при расстройке

6.8. ЛИНЕЙНЫЕ ИСКАЖЕНИЯ АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННОГО КОЛЕБАНИЯ В РЕЗОНАНСНОМ УСИЛИТЕЛЕ

На вход одноконтурного усилителя, изображенного на рис. 5.13, воздействует колебание

$$a(t) = E_0 [1 + M \cos(\Omega t + \gamma_0)] \cos(\omega_0 t + \theta_0). \qquad (6.52)$$

Требуется выявить структуру колебания на выходе усилителя.

Колебательный контур, входящий в состав усилителя, является инерционной цепью, что не может не оказать влияния на параметры выходного колебания.

В данном случае простейшей гармонической модуляции амплитуды, когда спектр колебания содержит всего лишь три составляющих, структуру колебания на выходе усилителя проще всего отыскать, рассматривая прохождение через усилитель каждой из составляющих отдельно.

Записав выражение (6.52) в форме

$$a(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) + (ME_0/2) \cos[(\omega_0 + \Omega) t + \theta_0 + \gamma_0] + \\ + (ME_0/2) \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \theta_0 - \gamma_0], \qquad (6.53)$$

найдем передаточные функции усилителя для частот ω_0, $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$.

Основываясь на выражении (6.42′) и положив $\Delta\Omega = 0$ (точная настройка колебательного контура на несущую частоту ω_0), получаем:

для несущей частоты ω_0

$$\mathbf{K}(i\omega_0) = K_1(0) = -K_{max};$$

для боковой частоты $\omega_0 + \Omega$

$$\mathbf{K}[i(\omega_0 + \Omega)] = \mathbf{K}_1(i\Omega) = -\frac{K_{max}}{1 + i\Omega\tau_к} = -\frac{K_{max}}{\sqrt{1 + (\Omega\tau_к)^2}} e^{-i\xi_0};$$

для боковой частоты $\omega_0 - \Omega$

$$\mathbf{K}[i(\omega_0 - \Omega)] = \mathbf{K}_1(-i\Omega) = -\frac{K_{max}}{1 - i\Omega\tau_к} = -\frac{K_{max}}{\sqrt{1 + (\Omega\tau_к)^2}} e^{i\xi_0},$$

где $\xi_0 = \operatorname{arctg}\Omega\tau_к$ — фазовый сдвиг в колебательном контуре на боковых частотах (запаздывание на верхней и опережение на нижней боковых частотах).

С учетом амплитудных и фазовых изменений, претерпеваемых спектральными составляющими в усилителе, можно представить выходное колебание в форме, аналогичной (6.53):

$$a_{вых}(t) = -K_{max} E_0 \left\{ \cos(\omega_0 t + \theta_0) + \frac{M}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega\tau_к)^2}} \cos[(\omega_0 + \Omega) t + \right.$$

$$\left. + \theta_0 + \gamma_0 - \xi_0] + \frac{M}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega\tau_к)^2}} \cos[(\omega_0 - \Omega) t + \theta_0 - \gamma_0 + \xi_0] \right\}.$$

Свернув это выражение, получим

$$a_{вых}(t) = -K_{max} E_0 \left[1 + \frac{M}{\sqrt{1 + (\Omega\tau_к)^2}} \cos(\Omega t + \gamma_0 - \xi_0) \right] \cos(\omega_0 t + \\ + \theta_0). \qquad (6.54)$$

Сопоставим полученное выражение с (6.53). Как и следовало ожидать, частота и фаза АМ колебания при прохождении через резонансный усилитель ($\omega_0 = \omega_р$) не изменяются.

Инерционность колебательной цепи *влияет на огибающую* колебания:

1) глубина модуляции на выходе

$$M_{вых} = M/\sqrt{1+\Omega^2\tau_к^2} = M/\sqrt{1+a_{эк}^2}$$

меньше, чем на входе; относительное уменьшение глубины модуляции, иногда называемое коэффициентом демодуляции,

$$D = \frac{M_{вых}}{M} = \frac{1}{\sqrt{1+a_{эк}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(2\Omega Q_{эк}/\omega_р)^2}}$$

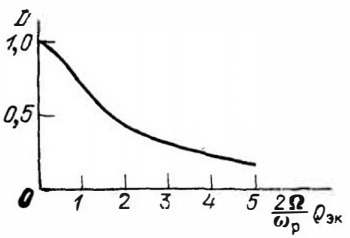


Рис. 6.18. Зависимость коэффициента демодуляции в резонансном усилителе от модулирующей частоты

(график зависимости D от частоты модуляции Ω, представленный на рис. 6.18, соответствует правой ветви резонансной кривой колебательного контура);

2) огибающая амплитуд на выходе отстает по фазе от огибающей входного колебания на угол

$$\xi_0 = \operatorname{arctg} a_{эк} = \operatorname{arctg}(2\Omega Q_{эк}/\omega_р).$$

Оба эти фактора обусловлены тем, что инерционность колебательной цепи снижает скорость изменения во времени огибающей колебания. При этом, однако, *форма огибающей остается неизменной* (гармонической).

Смысл этого результата поясняется рис. 6.19, *а*, на котором показано положение спектра входного колебания относительно резонансной характеристики колебательного контура. Чем выше частота модуляции Ω, тем больше относительное ослабление амплитуды колебаний боковых частот и, следовательно, меньше глубина модуляции колебания.

Полученные из анализа тональной модуляции результаты позволяют представить общую картину явлений при передаче через контур колебаний, модулированных по амплитуде *сложным сообщением*. Входящим в такое со-

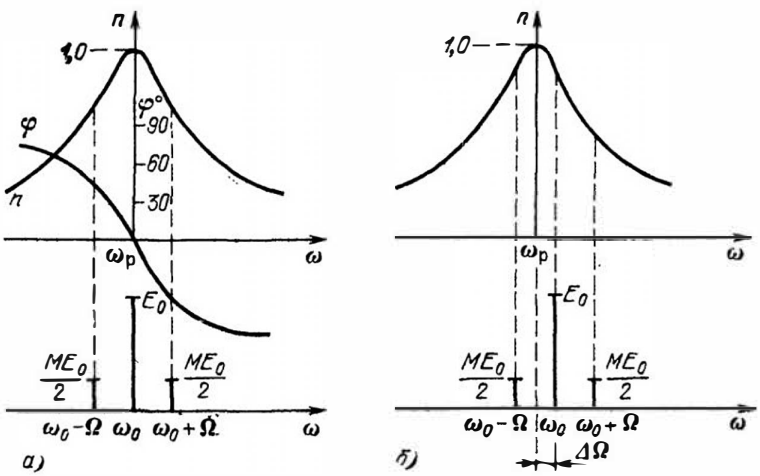


Рис. 6.19. Положение спектра модулированного колебания относительно частотной характеристики усилителя:
а) при точной настройке; *б*) при расстройке

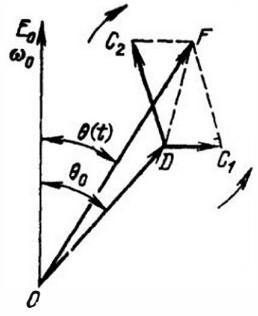


Рис. 6.20. Возникновение паразитной фазовой модуляции при асимметрии амплитуд колебаний боковых частот

общение различным частотам Ω соответствует неодинаковое ослабление: чем выше частота, тем сильнее выражена демодуляция. Так как при приеме колебаний напряжение на выходе детектора приемника пропорционально коэффициенту модуляции, получается относительное ослабление высших частот сообщения. Таким образом, зависимость $D(\Omega)$ определяет степень *линейных частотных искажений* передаваемого сообщения. Подобные искажения называются линейными потому, что они не сопровождаются возникновением новых частот.

Имеет место также и задержка сообщения. Это объясняется тем, что фазовый сдвиг огибающей (при тональной модуляции) зависит от частоты. Колебательный контур влияет на сообщение, содержащееся в огибающей, так же, как и фильтр нижних частот при пропускании непосредственно через него сообщения

Задержка определяется наклоном ФЧХ

$$t_0 = \left| \frac{d\psi}{d\Omega} \right| = \left| \frac{d\left(\operatorname{arctg} \frac{2\Omega}{\omega_p} Q_{эк}\right)}{d\Omega} \right| = \frac{1}{1+\left(\frac{2\Omega}{\omega_p} Q_{эк}\right)^2} \frac{2Q_{эк}}{\omega_p}.$$

Обычно задержку определяют по наклону ФЧХ в точке $\Omega = 0$. Тогда

$$t_0 = 2Q_{эк}/\omega_p = \tau_к.$$

Итак, *задержка сообщения в одиночном контуре, полоса прозрачности которого достаточна для удовлетворительного пропускания спектра сообщения, равна постоянной времени контура.*

Рассмотрим теперь случай неточной настройки контура на несущую частоту модулированного колебания (рис. 6.19, *б*). Несовпадение частот ω_0 и ω_p приводит к *асимметрии боковых частот на выходе усилителя*. Возникновение асимметрии поясняется векторной диаграммой выходных напряжений, представленной на рис. 6.20. На этой диаграмме вектор OD изображает несущее колебание, фаза которого запаздывает относительно фазы входной ЭДС (принятой равной нулю) на угол θ_0 (так как рис. 6.19, *б* соответствует положительной расстройке $\Delta\Omega = \omega_0 - \omega_p > 0$). Амплитуда колебания верхней боковой частоты (вектор DC_1) в данном случае значительно меньше амплитуды колебания нижней боковой частоты (вектор DC_2). Длина равнодействующего вектора OF, изображающего результирующее колебание, изменяется по сложному закону, *не совпадающему с гармоническим законом изменения огибающей* входной ЭДС.

Следует иметь в виду, что для восстановления передаваемого сообщения на выходе радиолинии, работающей с амплитудной модуляцией, применяется амплитудный детектор, представляющий собой нелинейное устройство. Напряжение на выходе детектора пропорционально *огибающей* модулированного колебания. Из этого следует, что нарушение симметрии амплитуд и фаз колебаний боковых частот при неточной настройке контура на несущую частоту ω_0 приводит к *нелинейным искажениям* передаваемых сообщений. Эти искажения проявляются в возникновении новых частот, кратных частоте Ω полезной модуляции.

Кроме искажения формы огибающей амплитуд, возникает также паразитная фазовая модуляция колебания, так как при вращении векторов DC_1 и DC_2 (см. рис. 6.20) непрерывно изменяется фаза $\theta(t)$ вектора OF относи-

тельно фазы несущего колебания (принятой в качестве исходной). В некоторых случаях это может привести к дополнительным искажениям сигнала.

Полученные выше результаты нетрудно распространить на любую колебательную цепь, например на связанные контуры. Если резонансная кривая такой цепи симметрична относительно несущей частоты ω_0, то правую ветвь этой кривой можно рассматривать как характеристику коэффициента D (см. рис. 6.18).

6.9. ПРОХОЖДЕНИЕ ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННОГО КОЛЕБАНИЯ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНСНУЮ ЦЕПЬ

Наряду с непрерывной фазовой модуляцией в радиотехнике находит применение фазовая манипуляция, заключающаяся в скачкообразном изменении фазы высокочастотного колебания на 180° в определенные моменты времени (рис. 6.21, *а*). Амплитуда и частота колебания поддерживаются при этом неизменными. На рис. 6.21, *б* фазы 0 и π чередуются периодически; при передаче реальных сигналов закон чередования может быть более сложным.

Рассмотрим явления в резонансных цепях, возникающие в моменты скачкообразного изменения фазы входного сигнала. При этом будем считать, что тактовые интервалы T_1 между двумя соседними скачками фазы намного больше длительности возникающих в цепи переходных процессов, так что рассмотрение каждого из скачков изолированно от предыдущих вполне допустимо.

Для выявления принципиальной стороны вопроса ограничимся простейшим случаем — передачей фазоманипулированного сигнала через одиночный колебательный контур, настроенный на частоту сигнала ω_0, т. е. $\omega_0 = \omega_р$.

Совместим начало отсчета времени с моментом скачка, как это показано на рис. 6.21. Тогда для $t > 0$ выходной сигнал на основании принципа суперпозиции можно представить в виде суммы свободного колебания, существующего после выключения ранее действовавшего сигнала, и нарастающего колебания с фазой заполнения, на 180° отличающейся от фазы предыдущего сигнала.

Пренебрегая различием между собственной частотой контура $\omega_{св}$ и резонансной частотой $\omega_р$, можно для двух упомянутых колебаний написать следующие выражения:

$$a_1(t) = A_0 e^{-\alpha_к t} \cos\omega_р t, \quad a_2(t) = -A_0(1 - e^{-\alpha_к t}) \cos\omega_р t.$$

Знак минус в правой части второго выражения учитывает опрокидывание фазы.

Результирующий сигнал на выходе цепи (рис. 6.22)

$$s_{вых} = a_1(t) + a_2(t) = (-A_0 + A_0 e^{-\alpha_к t} + A_0 e^{-\alpha_к t}) \cos\omega_р t =$$

$$= -A_0(1 - 2e^{-\alpha_к t}) \cos\omega_р t.$$

Из-за инерционности контура скачок фазы входного сигнала приводит к изменению амплитуды выходного сигнала. В момент времени $t_0 = 0{,}69/\alpha_к$, когда $e^{-\alpha_к t_0} = 1/2$, огибающая обращается в нуль. Чем меньше $\alpha_к$ (или чем больше добротность контура), тем больше t_0, т. е. тем протяженнее процесс установления колебания с новой фазой.

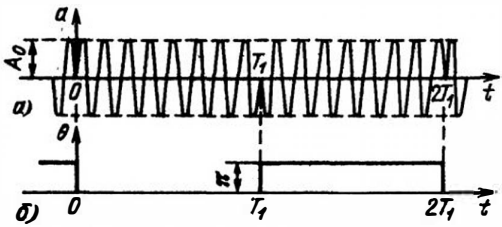


Рис. 6.21. Фазоманнпулированное колебание (*а*) и изменение фазы (*б*)

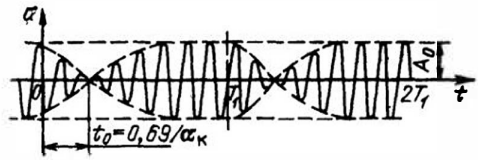


Рис. 6.22. Возникновение паразитной АМ в резонансном контуре при скачкообразном изменении фазы входной ЭДС

В более сложных колебательных цепях, а также при наличии расстройки между частотами ω_0 и $\omega_р$ картина несколько усложняется: помимо возникновения паразитного изменения огибающей нарушается и характер изменения фазы. Вместо скачкообразного изменения получается плавный переход фазы от первоначального значения к новому. При этом способ определения структуры выходного сигнала остается прежним, только $a_1(t)$ и $a_2(t)$ в выражении для $s_{вых}(t)$ будут представлять собой колебания с несовпадающими частотами. Вычислив модуль и аргумент суммарного колебания, нетрудно найти огибающую и фазу выходного сигнала.

6.10. ПРОХОЖДЕНИЕ ЧАСТОТНО-МАНИПУЛИРОВАННОГО КОЛЕБАНИЯ ЧЕРЕЗ ИЗБИРАТЕЛЬНУЮ ЦЕПЬ

Пусть сигнал на входе избирательной цепи имеет вид колебания, изображенного на рис. 6.23, *а*. В некоторые моменты времени частота скачком изменяется от ω_1 до ω_2 или от ω_2 до ω_1 при постоянной амплитуде и непрерывной фазе в моменты скачков частоты. Последнее допущение продиктовано желанием выяснить влияние на параметры выходного сигнала одной лишь манипуляции частоты, без наложения манипуляции фазы (рассмотренной в предыдущем параграфе).

Совместим начало отсчета времени с моментом изменения частоты от ω_1 до ω_2 (рис. 6.23, *б*) и положим, как и в § 6.9, что к моменту $t = 0$ все процессы, связанные с предыдущим скачком частоты, уже закончены. Таким образом, при $t < 0$ выходной сигнал представляет собой гармоническое колебание с частотой ω_1 и постоянной амплитудой A_0.

На первый взгляд может показаться, что изменение скачком одной лишь частоты входного сигнала при постоянстве амплитуды и отсутствии скачка фазы не должно сопровождаться переходными процессами. В действительности это не так, поскольку в цепях, запасающих энергию, переход от одной частоты к другой неизбежно связан с изменением запаса энергии.

Основная идея, на которой базируется дальнейшее рассмотрение, заключается в том, что мгновенное изменение частоты внешней ЭДС эквивалентно выключению старой ЭДС с частотой ω_1 и включению в тот же момент новой ЭДС с частотой ω_2. Аналогичный прием был использован в § 6.9 для скачка фазы входного сигнала, однако в данном случае дело несколько осложняется несовпадением частот различных слагаемых.

Итак, результирующее колебание на выходе линейной цепи при $t > 0$

$$a_{вых}(t) = a_1(t) + a_2(t), \tag{6.55}$$

где $a_1(t)$ — свободное колебание, связанное с выключением в момент $t = 0$ старой ЭДС (частоты ω_1); $a_2(t)$ — нарастающее колебание, обусловленное включением новой ЭДС (частоты ω_2).

Рассмотрим одиночный колебательный контур при съеме выходного напряжения с емкости (рис. 6.24). Резонансную частоту контура $\omega_р$ приравняем частоте ω_0, а скачок частоты $2\Delta\omega$ (см. рис. 6.23, *б*) будем считать симметричным относительно ω_0:

$$\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega = \omega_р - \Delta\omega, \quad \omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega = \omega_р + \Delta\omega.$$

Тогда свободное колебание $a_1(t)$ в соответствии с (6.47) можно записать в форме

$$a_1(t) = \frac{QE_0}{\sqrt{1+(\Delta\omega)^2\tau_к^2}} e^{-t/\tau_к} \sin(\omega_р t - \varphi_1), \quad t \geqslant 0,$$

где множитель Q соответствует K_{max}, косинус заменен синусом ввиду съема напряжения с емкости, входящей в последовательный контур, а $\varphi_1 = \operatorname{arctg}(\omega_1 - \omega_р)\tau_к$. Поскольку $\omega_1 < \omega_р$, то $\varphi_1 = -\operatorname{arctg}\Delta\omega\tau_к$ и

$$a_1(t) = \frac{QE_0}{\sqrt{1+(\Delta\omega)^2\tau_к^2}} e^{-t/\tau_к} \sin(\omega_р t + \varphi), \quad t \geqslant 0$$

(здесь использовано обозначение $\varphi = \operatorname{arctg}\Delta\omega\tau_к$).

В результате аналогичных рассуждений колебание $a_2(t)$ по аналогии с (6.45) можно представить в виде

$$a_2(t) = \frac{QE_0}{\sqrt{1+(\Delta\omega)^2\tau_к^2}} [\sin(\omega_2 t - \varphi) - e^{-t/\tau_к} \sin(\omega_р t - \varphi)], \quad t \geqslant 0. \quad (6.56)$$

В данном случае φ входит со знаком минус, так как на частоте $\omega_2 > \omega_р$ ток в контуре отстает по фазе относительно ЭДС.

После подстановки в (6.56) $\omega_2 = \omega_р + \Delta\omega$ выражение (6.55) приводится к виду

$$a_{вых}(t) = \frac{QE_0}{\sqrt{1+(\Delta\omega)^2\tau_к^2}} \{\cos(\Delta\omega t - \varphi)\sin\omega_р t +$$

$$+ [\sin(\Delta\omega t - \varphi) + 2\sin\varphi e^{-t/\tau_к}]\cos\omega_р t\} = A_{вых}(t)\sin[\omega_р t + \xi(t)].$$

Огибающая $A_{вых}(t)$ и переменная часть фазы $\xi(t)$ выходного сигнала определяются выражениями

$$A_{вых}(t) = \frac{QE_0}{\sqrt{1+(\Delta\omega)^2\tau_к^2}} \sqrt{1 + 4e^{-t/\tau_к}\sin\varphi\sin(\Delta\omega t - \varphi) + 4e^{-2t/\tau_к}\sin^2\varphi},$$

$$\xi(t) = \operatorname{arctg}\frac{\sin(\Delta\omega t - \varphi) + 2e^{-t/\tau_к}\sin\varphi}{\cos(\Delta\omega t - \varphi)}.$$

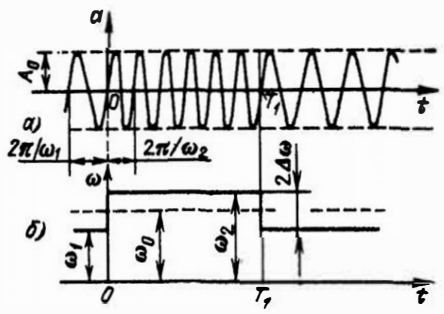
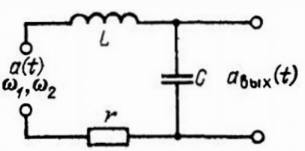


Рис. 6.23. Частотно-манипулированное колебание (*а*) и характер изменения частоты (*б*)

Рис. 6.24. Колебательный контур, возбуждаемый частотно-манипулированным колебанием



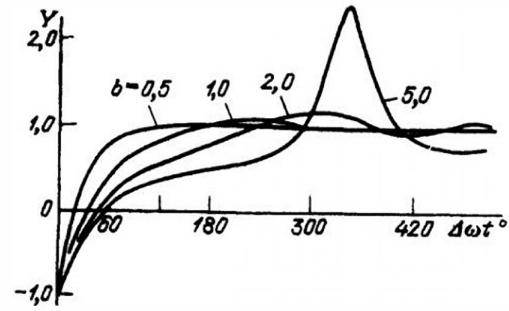


Рис. 6.25. Установление частоты колебания в контуре при скачкообразном изменении частоты воздействия в зависимости от параметра $b = \Delta\omega/\alpha_к$.

Основной интерес в данном случае представляет закон изменения частоты выходного колебания

$$\omega(t) = \omega_р + \frac{d\xi(t)}{dt} = \omega_р + \Delta\omega(t).$$

Выполнив дифференцирование, после некоторых несложных выкладок[1] можно прийти к следующему результату:

$$Y = \frac{\Delta\omega(t)}{\Delta\omega} = \frac{1 - 2e^{-\Delta\omega t/b}\cos\Delta\omega t}{1 + 4e^{-\Delta\omega t/b}\sin\psi\left[\sin(\Delta\omega t - \psi) + e^{-\Delta\omega t/b}\sin\psi\right]},$$

где $b = \Delta\omega/\alpha_к$.

Графики $Y(\Delta\omega t)$ для нескольких значений параметра b построены на рис. 6.25. Заметим, что полоса пропускания контура, определяемая по ослаблению сигнала до $1/\sqrt{2}$ от максимального значения, равна $2\alpha_к = \omega_р/Q$. Следовательно, параметр b есть не что иное, как отношение полного скачка частоты сигнала $2\Delta\omega$ к полосе пропускания $2\alpha_к$.

Из рис. 6.25 видно, что при $b \leqslant 0{,}5$, т. е. когда $\Delta\omega/\alpha_к \leqslant 0{,}5$, процесс установления частоты практически не отличается от процесса установления амплитуды при внезапном включении ЭДС. Заметное расхождение наступает при $b > 0{,}5$.

6.11. ПРОХОЖДЕНИЕ ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННОГО КОЛЕБАНИЯ ЧЕРЕЗ ИЗБИРАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

В § 6.8 было показано, что при гармонической АМ передача колебания через контур, точно настроенный на несущую частоту, не сопровождается изменением формы огибающей, имеет место лишь ослабление глубины модуляции.

При ЧМ неравномерность амплитудно-частотной и кривизна фазо-частотной характеристик контура оказывают более сложное влияние на параметры выходного колебания. Даже при гармонической модуляции частоты спектр колебания обычно содержит очень большое число пар боковых частот. Нарушение нормальных амплитудных и фазовых соотношений между отдельными парами боковых частот приводит к искажению закона модуляции даже при полной симметрии характеристик цепи относительно несущей частоты колебания.

При ЧМ влияние цепи может сказаться:

в искажении закона изменения мгновенной частоты и мгновенной фазы колебания;

в изменении амплитуды полезного частотного отклонения в зависимости от частоты модуляции Ω;

в возникновении паразитной АМ.

[1] Подробные выкладки см. в предыдущем издании настоящей книги. Там же рассматриваются амплитудные изменения выходного колебания при скачкообразном изменении частоты ЭДС на входе контура.

При детектировании колебаний с помощью частотного детектора напряжение на выходе приемника пропорционально изменению мгновенной частоты колебания. Поэтому искажение закона изменения мгновенной частоты в колебательных контурах передатчика и приемника приводит к *нелинейным искажениям сигнала*, проявляющимся на выходе детектора в виде добавочных напряжений с частотами, кратными частоте модуляции Ω.

Второе из отмеченных выше изменений параметров частотно-модулированного колебания приводит к неравномерности АЧХ радиолинии с ЧМ и, следовательно, к *частотным* (линейным) искажениям сигнала.

Рассмотрим воздействие ЭДС, частота которой изменяется по закону

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_д \cos\Omega t, \tag{6.57}$$

на резонансную колебательную цепь. Амплитуду ЭДС считаем строго постоянной, так что ЭДС можно представить выражением [см. (3.23)]

$$e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + m\sin\Omega t).$$

Комплексный коэффициент передачи цепи обозначим через

$$\mathbf{K}(i\omega) = K(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)}.$$

Примерный вид модуля $K(\omega)$ и фазы $\varphi(\omega)$ для обычной резонансной цепи изображен на рис. 6.26, *а*. Так как перед $\varphi(\omega)$ выбран знак плюс, то фазовая характеристика $\varphi(\omega)$ имеет отрицательный наклон в полосе прозрачности цепи. Частотный спектр и график изменения мгновенной частоты $\omega(t)$ входной ЭДС показаны на рис. 6.26, *б* и *в*. Колебательные цепи обычно настраиваются на среднюю частоту модулированного колебания, поэтому рис. 6.26 и дальнейшее рассмотрение относятся к случаю $\omega_р = \omega_0$.

Для нахождения колебания на выходе цепи в принципе можно воспользоваться тем же методом, что и в случае АМ (см. § 6.8). При этом необходимо учесть изменение амплитуд и фаз для каждой из пар боковых частот ЭДС в соответствии с кривыми $K(\omega)$ и $\varphi(\omega)$. Однако подобный вполне точный метод пригоден лишь при очень малых индексах модуляции, т. е. если состав спектра ЧМ колебания мало отличается от состава спектра АМ колебания.

В практике чаще всего приходится встречаться с модуляцией, характеризующейся столь большим числом спектральных составляющих в используемой полосе частот, что применение спектрального метода сопряжено с большими, иногда непреодолимыми трудностями вычисления. В таких случаях приходится прибегать к приближенным методам, позволяющим, хотя и не вполне точно, находить колебание на выходе цепи по заданному закону изменения мгновенной частоты ЭДС на входе и по заданным ФЧХ цепи без разложения ЭДС в спектр.

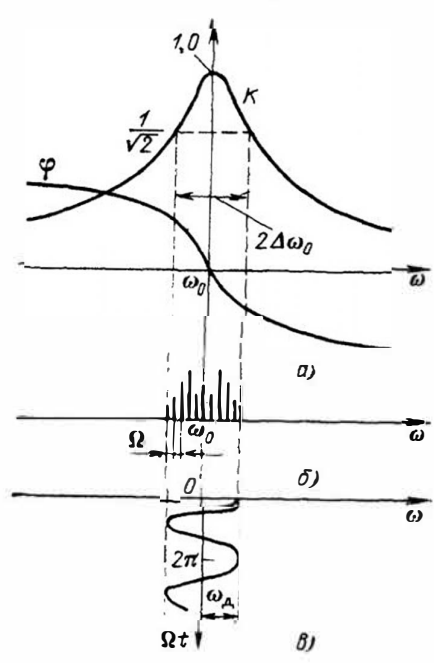


Рис. 6.26. Передаточная функция цепи (*а*), спектр ЧМ колебания (*б*) и график мгновенной частоты (*в*) этого колебания

Эти методы, называемые методами мгновенной частоты, основаны на допущении *медленности* изменения частоты. Частота модуляции считается настолько малой, что амплитуду и фазу колебания на выходе цепи в каждый момент времени можно без большой погрешности определить по частотной и фазовой характеристикам цепи так же, как и в стационарном режиме. Таким образом, принимается, что установление стационарных колебаний на выходе происходит почти одновременно с изменением частоты на входе цепи.

Эти предпосылки тем ближе к истине, чем больше период модуляции $2\pi/\Omega$ и чем меньше постоянная времени цепи $\tau_к$. Так как последняя обратно пропорциональна полосе пропускания цепи $2\Delta\omega_0$, то одним из условий применимости метода мгновенной частоты является неравенство $\Omega/\Delta\omega_0 \ll 1$.

При одной и той же частоте Ω скорость изменения мгновенной частоты входной ЭДС зависит от амплитуды частотного отклонения $\omega_д$, поэтому соблюдения только этого неравенства еще недостаточно. Должны быть наложены ограничения и на отношение $\omega_д\ \Delta\omega_0$.

Более подробное рассмотрение показывает, что если $\omega_д/\Delta\omega_0$ меньше единицы или близко к ней, то метод мгновенной частоты обеспечивает вполне достаточную для практики точность.

При выполнении указанных условий напряжение на выходе цепи можно определить с помощью выражения

$$u_{вых}(t) = E_0 \operatorname{Re}\left[e^{i\psi(t)} K(i\omega)\right] = E_0 K(\omega) \operatorname{Re}\left\{e^{i[\psi(t)+\varphi(\omega)]}\right\},$$

где $\psi(t) = \omega_0 t + m \sin \Omega t$ — полная фаза ЭДС на входе цепи (см. § 3.4); $\varphi(\omega)$ — аргумент коэффициента передачи цепи.

Из этого выражения видно, что амплитуда выходного напряжения изменяется по закону

$$U_{вых}(t) = E_0 K(\omega) = E_0 K(\omega_0 + \omega_д \cos \Omega t),$$

а мгновенная частота — по закону

$$\omega_{вых}(t) = \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Так как первый член в правой части этого выражения представляет собой мгновенную частоту входной ЭДС $\omega(t)$, то $\xi(t) = d\varphi/dt$ характеризует влияние рассматриваемой цепи на частоту выходного колебания. При выполнении оговоренного выше условия медленности модуляции ξ, как правило, мало по сравнению с $\omega_д$. Итак,

$$\omega_{вых}(t) = \omega(t) + \xi(t). \qquad (6.58)$$

Если известно уравнение ФЧХ $\varphi(\omega)$, то, подставляя вместо аргумента ω мгновенную частоту $\omega(t) = \omega_0 + \omega_д \cos \Omega t$ и дифференцируя по t, получаем общее выражение для $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \frac{d}{dt}\left[\varphi(\omega_0 + \omega_д \cos \Omega t)\right]. \qquad (6.59)$$

При периодической модуляции частоты $\xi(t)$ также является периодической функцией времени и может быть разложена в ряд Фурье. Так как при настройке цепи на среднюю частоту ω_0 ФЧХ обычно антисимметрична относительно ω_0, то ряд Фурье содержит одни лишь нечетные гармоники: Ω, 3Ω, 5Ω, ... Учитывая, наконец, что при изменении частоты по закону (6.57) производная φ, т. е. $\xi(t)$, является нечетной функцией времени, приходим к выводу, что ряд Фурье содержит одни лишь синусоидальные члены:

$$\xi(t) = \mathscr{E}_1 \sin \Omega t - \mathscr{E}_3 \sin 3\Omega t - \ldots,$$

где $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_3$, ... — амплитуды гармоник функции $\xi(t)$.

Подставляя $\xi(t)$ в (6.58), получаем

$$\omega_{вых}(t) \approx \omega_0 + \omega_д \cos \Omega t + \mathscr{E}_1 \sin \Omega t + \mathscr{E}_3 \sin 3\Omega t + \ldots \approx \omega_0 + \sqrt{\omega_д^2 + \mathscr{E}_1^2} \times$$

$$\times \cos(\Omega t - \gamma) + \mathscr{E}_3 \sin 3\Omega t + \ldots \approx \omega_0 + \omega_д \cos(\Omega t - \gamma) + \mathscr{E}_3 \sin 3\Omega t + \ldots \qquad (6.60)$$

Слагаемое $\mathscr{E}_1^2$ под знаком радикала можно отбросить как величину высшего порядка малости по сравнению с $\omega_д^2$.

Сопоставление выражений (6.57) и (6.60) позволяет сделать вывод, что влияние цепи на выходное колебание заключается в запаздывании фазы сообщения на угол γ, определяемый выражением

$$\gamma = \operatorname{arctg}(\mathscr{E}_1/\omega_д), \tag{6.61}$$

и в возникновении нечетных гармоник в законе изменения мгновенной частоты. Как отмечалось выше, наибольшее значение обычно имеет последнее обстоятельство.

Поясним применение метода мгновенной частоты на примере одиночного колебательного контура.

Подразумевая под $\mathbf{K}(i\omega)$ отношение комплексной амплитуды напряжения на конденсаторе к амплитуде ЭДС, включенной последовательно в контур, получаем

$$\mathbf{K}(i\omega) = \frac{1/i\omega C}{r[1 + i(\omega - \omega_0)\tau_к]}.$$

Учитывая, что $\omega - \omega_0 = \omega_д \cos \Omega t$ и пренебрегая изменением ω в числителе, так как $\omega_д$ обычно мала по сравнению с ω_0, можем записать

$$\mathbf{K}(i\omega) \approx \frac{Q}{i(1 + i\omega_д \tau_к \cos \Omega t)} = \frac{Q}{\sqrt{1 + (\omega_д \tau_к \cos \Omega t)^2}} e^{i\varphi},$$

где

$$\varphi = -\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(\omega_д \tau_к \cos \Omega t)\right].$$

На основании соотношения (6.59) находим

$$\xi(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Omega \omega_д \tau_к \sin \Omega t}{1 + \omega_д^2 \tau_к^2 \cos^2 \Omega t}. \tag{6.62}$$

Применяя (2.24), находим

$$\mathscr{E}_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi(t) \sin \Omega t \, d(\Omega t),$$

$$\mathscr{E}_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi(t) \sin 3\Omega t \, d(\Omega t).$$

Произведя интегрирование (см. (2.553.3), (2.554.2) и (3.644.3) в [7]), получим следующие окончательные формулы для амплитуд первой и третьей гармоник функции $\xi(t)$:

$$\mathscr{E}_1 = \frac{2}{m\tau_к}\left(\sqrt{1 + \omega_д^2 \tau_к^2} - 1\right), \quad \mathscr{E}_3 = \frac{2}{m\tau_к} \frac{\left(1 - \sqrt{1 + \omega_д^2 \tau_к^2}\right)^3}{\omega_д^2 \tau_к^2}. \tag{6.63}$$

Здесь $m = \omega_д/\Omega$.

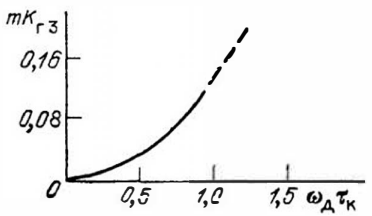


Рис. 6.27. Зависимость коэффициента гармоник от девиации $\omega_д$ при заданной постоянной времени контура $\tau_к$

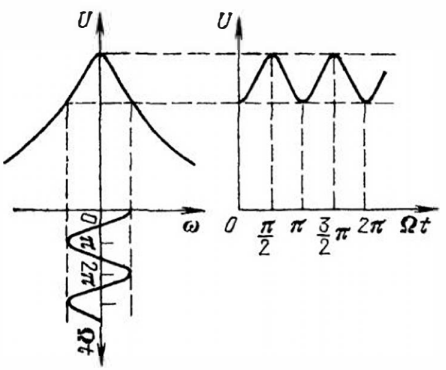


Рис. 6.28. Возникновение паразитной АМ при модуляции частоты

Далее по формуле (6.61) находим фазовый сдвиг для сообщения

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{\mathscr{E}_1}{\omega_д} = \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{m\omega_д\tau_к}\left(\sqrt{1+\omega_д^2\tau_к^2}-1\right)\right]. \qquad (6.64)$$

Теперь нетрудно определить коэффициент гармоник по частоте 3Ω на выходе частотного детектора. Для этого нужно разделить амплитуду $\mathscr{E}_3$ третьей гармоники функции ξ на амплитуду $\omega_д$ основной частоты Ω [см. (6.63)]:

$$K_{г3} = \frac{\mathscr{E}_3}{\omega_д} = \frac{2}{m}\left|\frac{1-\sqrt{1+\omega_д^2\tau_к^2}}{\omega_д\tau_к}\right|^3. \qquad (6.65)$$

График зависимости $mK_{г3}(\omega_д\tau_к)$ изображен на рис. 6.27. При $\omega_д\tau_к \ll 1$ формулы (6.64) и (6.65) упрощаются:

$$\gamma \approx \Omega\tau_к, \quad K_{г3} \approx (\omega_д\tau_к)^3/4m.$$

При $\omega_д\tau_к \to 1$ (но $m \gg 1$), т. е. при девиации, почти равной полосе пропускания контура, формулы (6.64) и (6.65) дают

$$\gamma = 0{,}8/m, \quad K_{г3} = 0{,}13/m.$$

Итак, в условиях, когда метод мгновенной частоты применим, предельные искажения в одиночном контуре не превышают долей процента.

Нетрудно найти изменения амплитуды выходного колебания. Для этого можно воспользоваться резонансной кривой контура и произвести построение, показанное на рис. 6.28. Видно, что основная частота изменения огибающей амплитуд U вдвое превышает частоту модуляции Ω.

Глава 7. ПРОХОЖДЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

7.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Пусть на входе линейного четырехполюсника (рис. 7.1) с передаточной функцией $\mathbf{K}(i\omega)$ и импульсной характеристикой $g(t)$ действует случайный процесс $s(t)$ с заданными статистическими характеристиками; требуется найти статистические характеристики процесса $s_{вых}(t)$ на выходе четырехполюсника.

В гл. 4 были рассмотрены основные характеристики случайного процесса: распределение вероятностей; корреляционная функция; спектральная плотность мощности.

Определение последних двух характеристик является наиболее простой задачей. Иначе обстоит дело с определением закона распределения случайного процесса на выходе линейной цепи. В общем случае при произвольном распределении процесса на входе отыскание распределения на выходе инерционной цепи представляет собой весьма сложную задачу.

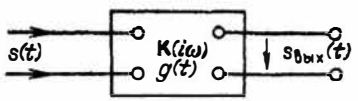


Рис. 7.1. Линейный четырехполюсник с постоянными параметрами

Лишь при нормальном распределении входного процесса задача упрощается, так как *при любых линейных операциях с гауссовским процессом* (усилении, фильтра-

ции, дифференцировании, интегрировании и т. д.) распределение остается нормальным, изменяются лишь функции $R(\tau)$ и $W(\omega)$. Поэтому, если задана плотность вероятности входного процесса (с нулевым средним)

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_s} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right),$$

то плотность вероятности на выходе линейной цепи

$$p(s_{\text{вых}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{s\,\text{вых}}} \exp\left(-\frac{s_{\text{вых}}^2}{2\sigma_{s\,\text{вых}}^2}\right). \tag{7.1}$$

Дисперсия $D_{s\,\text{вых}} = \sigma_{s\,\text{вых}}^2$ легко определяется по спектру или по корреляционной функции. Таким образом, анализ передачи гауссовских процессов через линейные цепи по существу сводится к спектральному (или корреляционному) анализу.

Последующие четыре параграфа посвящены преобразованию только спектра и корреляционной функции случайного процесса. Это рассмотрение справедливо при любом законе распределения вероятностей. Вопрос же о преобразовании закона распределения при негауссовских входных процессах рассматривается в § 7.6—7.7.

7.2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ И КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ВЫХОДЕ ЦЕПИ

Содержание данного параграфа ограничено рассмотрением стационарных случайных процессов.

Спектральную плотность входного процесса обозначим $W_s(\omega)$. Задача нахождения $W_{s\,\text{вых}}(\omega)$ легко решается с помощью рассуждений, аналогичных использованным при выводе выражения (4.31). Умножив спектральную плотность $\mathbf{X}_{kT}(\omega)$ «усеченной» реализации процесса $x_k(t)$ на передаточную функцию фильтра $\mathbf{K}(i\omega)$, получим спектральную плотность этой же реализации на выходе

$$\mathbf{X}_{kT\,\text{вых}}(\omega) = \mathbf{X}_{kT}(\omega)\,\mathbf{K}(i\omega).$$

Энергию рассматриваемого отрезка реализации можно определить с помощью равенства Парсеваля

$$\mathcal{Э}_{kT\,\text{вых}} = \int_{-T/2}^{T/2} x_{kT\,\text{вых}}^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2\,|\mathbf{K}(i\omega)|^2\,d\omega.$$

Тогда по аналогии с выражением (4.34) получаем

$$W_{s\,\text{вых}}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{|\mathbf{X}_T(\omega)|^2}{T} = W_s(\omega)\,K^2(\omega). \tag{7.2}$$

Корреляционная функция случайного процесса на выходе фильтра определяется с помощью выражения (4.39′):

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_{s\,\text{вых}}(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega)\,K^2(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega. \tag{7.3}$$

Соотношения между характеристиками случайных процессов на входе и выходе цепи можно вывести также и на основе заданной импульсной характеристики цепи.

Действительно, поскольку спектральной функции $W_s(\omega)$ соответствует корреляционная функция

$$R_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega, \tag{7.4}$$

а спектральной функции $K^2(\omega)$ —

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega, \tag{7.5}$$

т. е. корреляционная функция импульсной характеристики $g(t)$ [см., например, (2.136), в которой нужно $S^2(\omega)$ заменить на $K^2(\omega)$], то произведению спектральных функций $W_s(\omega)$ и $K^2(\omega)$ соответствует свертка функций $R_s(\tau)$ и $R_g(\tau)$ [см. (2.64)]

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_s(x)\, R_g(\tau - x)\, dx. \tag{7.6}$$

Таким образом, по заданным корреляционным функциям $R_s(\tau)$ и $R_g(\tau)$ определяется корреляционная функция на выходе $R_{s\,\text{вых}}(\tau)$, после чего находится энергетический спектр

$$W_{s\,\text{вых}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{s\,\text{вых}}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau. \tag{7.7}$$

Особый интерес представляет случай, когда процесс на входе является белым шумом. В этом случае $W_{s\,\text{вых}}(\omega) = W_0 = \text{const}$ и в соответствии с (7.3) и (7.5)

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau) = W_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = W_0 R_g(\tau). \tag{7.7'}$$

Выражение (7.7′) можно применять и в тех случаях, когда энергетический спектр $W_s(\omega)$ равномерен лишь в полосе прозрачности цепи.

Итак, ни спектральный, ни корреляционный анализ прохождения стационарного случайного процесса через линейную цепь с постоянными параметрами не связан с какими-либо трудностями.

7.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ СОБСТВЕННЫХ ШУМОВ В РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЯХ

При анализе передачи сигналов по радиоэлектронным цепям наряду с неизбежными искажениями формы сигналов необходимо учитывать также и собственные шумы цепи. Эти шумы, накладываясь на сигнал, ограничивают информационную емкость последнего. Проблема шумов особенно актуальна при усилении слабых сигналов.

В радиоэлектронных устройствах имеются два основных источника шумов: дискретная структура тока в усилительных элементах (транзисторы, электронные лампы и т. д.) и тепловое движение свободных электронов в проводниках электрической цепи.

Рассмотрим первый источник на примере дробового эффекта, присущего электронному току в усилительных приборах. Этот ток представляет собой

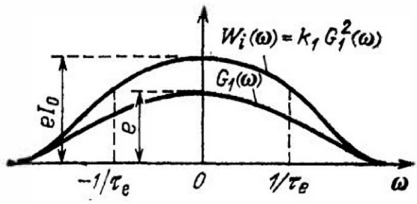


Рис. 7.2. Спектральная плотность $G_1(\omega)$ одиночного импульса и энергетический спектр $W_i(\omega)$ случайного процесса

совокупность импульсов, каждый из которых обусловлен переносом заряда одного электрона. Полный ток, являющийся суммой очень большого числа перекрывающихся, расположенных случайным образом на оси времени импульсов, представляет собой стационарный эргодический случайный процесс, для которого справедлива центральная предельная теорема [1]. Поэтому распределение электронного тока можно считать нормальным с плотностью вероятности

$$p(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i} \exp\left[-\frac{(i-I_0)^2}{2\sigma_i^2}\right]. \tag{7.8}$$

Постоянную составляющую тока I_0 и среднюю мощность флуктуационной составляющей σ_i^2 можно определить с помощью следующих рассуждений.

Пусть среднее за 1 с число импульсов тока равно k_1. Так как каждый импульс переносит заряд одного электрона e, то полное количество электричества, переносимое в среднем за 1 с, равно $k_1 e$. Это и есть постоянная составляющая тока. Таким образом,

$$I_0 = k_1 e.$$

Введем в рассмотрение спектральную плотность $\mathbf{G}_1(\omega)$ одиночного импульса тока $i_e(t - t_k)$, обусловленного переносом заряда e одного электрона (t_k — момент вылета электрона). Независимо от формы этого импульса значение $G_1(\omega)$ при $\omega = 0$ равно площади импульса [см. (2.55)]:

$$G_1(0) = \int_{-\infty}^{\infty} i_e(t - t_k)\,dt = e. \tag{7.9}$$

Длительность τ_e импульса $i_e(t)$ зависит от геометрии электронного прибора, от напряженности электрического поля в междуэлектродных промежутках и т. д. Ширину спектра импульса в грубом приближении можно приравнять $2/\tau_e$. Таким образом, модуль спектральной плотности импульса $i_e(t - t_k)$ можно представить в виде графика, показанного на рис. 7.2. Максимальная ордината $\sim e$.

Энергия одного импульса по формуле Парсеваля

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1^2(\omega)\,d\omega,$$

а суммарная энергия k_1 импульсов за 1 с, т. е. средняя мощность процесса (при сопротивлении 1 Ом),

$$\overline{i^2(t)} = k_1 \mathcal{E}_1 + I_0^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_1 G_1^2(\omega)\,d\omega + I_0^2 = \sigma_i^2 + I_0^2. \tag{7.10}$$

[1] См. § 4.2, п. 3.

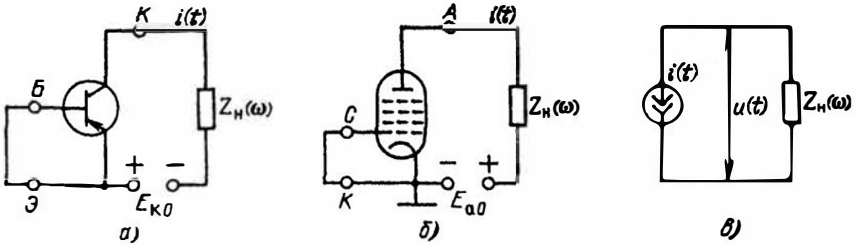


Рис. 7.3. Транзисторный (*а*) и ламповый (*б*) усилители и единая схема замещения для флуктуационного тока (*в*)

Первое слагаемое в правой части (7.10) определяет мощность флуктуационной составляющей тока, второе слагаемое — мощность постоянной составляющей I_0.

Из выражения (7.10) вытекает, что энергетический спектр флуктуационной составляющей электронного тока совпадает по форме со спектральной плотностью энергии $G_1^2(\omega)$ отдельных импульсов, образующих случайный процесс

$$W_i(\omega) = k_1 G_1^2(\omega). \tag{7.11}$$

Примерный вид $W_i(\omega)$ представлен на рис. 7.2.

Учитывая, что $k_1 = I_0/e$, а также то, что в пределах полосы частот $\sim 2/\tau_e$ имеет место равенство (7.9), получаем[1]

$$W_i(\omega) \approx eI_0, \quad 0 < |\omega| < 1/\tau_e. \tag{7.12}$$

Таким образом, приходим к выводу, что в указанных пределах дробовой шум можно считать белым шумом.

Выражения (7.8) и (7.12) определяют основные статистические характеристики дробового тока.

Теперь нетрудно выявить статистические характеристики напряжения шума на выходе цепи, содержащей «шумящий» элемент. На рис. 7.3, *а* и *б* изображены схемы транзисторного и лампового усилителей, а на рис. 7.3, *в* — единая схема замещения для флуктуационного тока $i(t)$. Входные зажимы база — эмиттер (соответственно сетка — катод) соединены накоротко, чтобы подчеркнуть отсутствие внешнего воздействия на усилитель. В качестве источника шума в схеме замещения показан генератор тока $i(t)$, статистические характеристики которого $p(i)$ и $W_i(\omega)$ были определены выше.

Напряжение шума $u(t)$, создаваемое на линейном нагрузочном элементе $Z_н(\omega)$, распределено, как и ток $i(t)$, по нормальному закону

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right). \tag{7.13}$$

Спектральная плотность случайного процесса $u(t)$ определяется соотношением

$$W_u = W_i(\omega) Z_н^2(\omega) \tag{7.14}$$

[ср. с (7.2); в данном случае вместо безразмерной передаточной функции $K(\omega)$ фигурирует сопротивление $Z_н(\omega)$].

Применяя к (7.14) преобразование (4.39), можно определить корреляционную функцию напряжения шума на выходе усилителя, а также величину σ_u, т. е. среднеквадратическое напряжение шума.

[1] В технической литературе также распространена формула $W_i(\omega) = 2eI_0$, при выводе которой среднюю мощность σ_i^2 относят только к положительным частотам.

Рассмотрим механизм формирования собственного шума в резистивном и резонансном усилителях.

В резистивном усилителе сопротивление $Z_н(i\omega)$ определим для схемы на рис. 5.10, *а* по формулам

$$Z_н(i\omega) = \frac{R(1/i\omega C_0)}{R + 1/i\omega C_0}, \quad Z_н^2(\omega) = \frac{R^2}{1 + (\omega C_0 R)^2}. \tag{7.15}$$

Постоянная времени цепи RC_0 во много раз больше длительности импульса τ_e; соответственно полоса пропускания цепи RC_0, примыкающая к нулевой частоте, во много раз уже, чем ширина спектра $W_i(\omega)$, показанного на рис. 7.2. Поэтому при определении воздействия на цепь дробового шума его можно рассматривать как белый шум со спектром $W_i(\omega) = eI_0$. Тогда по формуле (7.14)

$$W_u(\omega) = eI_0 R^2/[1 + (\omega C_0 R)^2] \tag{7.16}$$

и по формуле (4.39′)

$$R_u(\tau) = eI_0 R^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{1 + (\omega C_0 R)^2} d\omega = \frac{eI_0 R^2}{(RC_0)^2} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos\omega\tau}{(1/RC_0)^2 + \omega^2} d\omega.$$

Входящий в правую часть интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\omega\tau}{(1/RC_0)^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} RC_0 \exp\left(-\frac{|\tau|}{RC_0}\right).$$

Таким образом,

$$R_u(\tau) = \frac{eI_0 R}{2C_0} \exp\left(-\frac{|\tau|}{RC_0}\right). \tag{7.17}$$

При $\tau = 0$ это выражение определяет дисперсию напряжения шума σ_u^2 и среднеквадратическое напряжение шума σ_u:

$$\sigma_u^2 = R_u(0) = \frac{eI_0 R}{2C_0}, \quad \sigma_u = \sqrt{\frac{eI_0 R}{2C_0}}. \tag{7.18}$$

Нормированная корреляционная функция шума

$$r_u(\tau) = \exp(-|\tau|/RC_0). \tag{7.19}$$

Графики спектра $W_u(\omega)$ и функции $r_u(\tau)$ изображены на рис. 7.4 и 7.5.

Интервал корреляции напряжения шума в данном примере определяется величиной $|\tau|/RC_0 \approx 1$. Нетрудно пояснить смысл полученного результа-

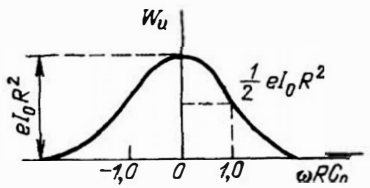


Рис. 7.4. Спектр шумового напряжения на выходе резистивного усилителя

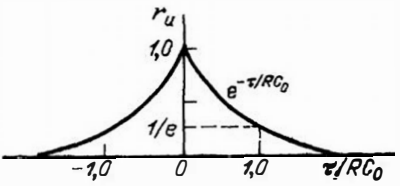


Рис. 7.5. Нормированная корреляционная функция шума, соответствующая спектру $W_u(\omega)$ (рис. 7.4)

та. Напряжение шума на нагрузке образуется совокупностью беспорядочно следующих импульсов тока, создаваемых отдельными электронами. Каждый из этих импульсов создает импульс напряжения, длительность которого определяется постоянной времени нагрузки. При наложении большого числа импульсов относительная скорость изменения суммарного напряжения шума $u(t)$ должна быть того же порядка, что и скорость изменения отдельных импульсов. Поэтому для независимости напряжений, отсчитываемых в моменты t и $t+\tau$, величина τ должна быть не менее длительности импульсов, образующих шум.

Для количественной оценки напряжения шума, создаваемого дробовым эффектом, приведем следующий пример, характерный для апериодического усилителя: постоянный ток $I_0 = 10$ мА, сопротивление нагрузки $R = 5$ кОм, емкость $C_0 \approx 50$ пФ.

Применяя формулу (7.18), находим среднеквадратическое напряжение шума на выходе усилителя

$$\sigma_u \approx \sqrt{\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10\cdot 10^{-3}\cdot 5\cdot 10^{3}}{2\cdot 50\cdot 10^{-12}}} = 2{,}8\cdot 10^{-4}\ \text{В} = 0{,}28\ \text{мВ}.$$

Определенное таким образом напряжение можно условно рассматривать как результат приложения некоторого напряжения шума ко входу усилителя. При коэффициенте усиления $K_у$ эквивалентное напряжение шума на входе следует приравнять величине $u_{ск} = \sigma_u/K_у$. При коэффициенте усиления $K_у \approx 100$ получаем $u_{ск} \approx 3$ мкВ. Это значение и определяет нижний порог сигнала, который еще имеет смысл усиливать данным усилителем.

Аналогичным образом можно рассмотреть формирование шума в колебательной цепи резонансного усилителя, схема которого изображена на рис. 5.13.

По аналогии с выражением (7.14) определим спектр

$$W_u(\omega) = W_i(\omega)\, Z^2_{эк}(\omega) = eI_0\, Z^2_{эк}(\omega), \tag{7.20}$$

где

$$\mathbf{Z}_{эк}(i\omega) = \frac{Z_{эк\,р}}{1+ia_{эк}} \approx \frac{R_ш}{1+i\dfrac{2(\omega-\omega_р)}{\omega_р}Q_{эк}},$$

а $Z_{эк\,р} = R_ш$ — сопротивление контура (шунтированного резистором $R_ш$) при резонансе. Отсюда квадрат модуля сопротивления нагрузки

$$Z^2_{эк}(\omega) = R^2_ш/[1+(\omega-\omega_р)^2\tau^2_к], \tag{7.21}$$

где $\tau_к = 2Q_{эк}/\omega_р$ — постоянная времени контура.

Таким образом,

$$W_u(\omega) = eI_0 R^2_ш/[1+(\omega-\omega_р)^2\tau^2_к]. \tag{7.22}$$

График спектра $W_u(\omega)$ изображен на рис. 7.6.

Выражение (4.39′) для корреляционной функции в данном случае принимает следующий вид:

$$R_u(\tau) = eI_0 R^2_ш \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\tau}}{1+(\omega-\omega_р)^2\tau^2_к}\,d\omega = eI_0 R^2_ш \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega\tau}{1+(\omega-\omega_р)^2\tau^2_к}\,d\omega.$$

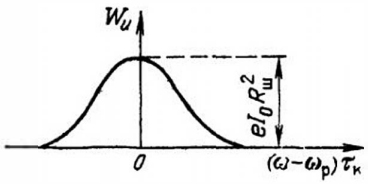


Рис. 7.6. Спектр шумового напряжения на выходе резонансного усилителя

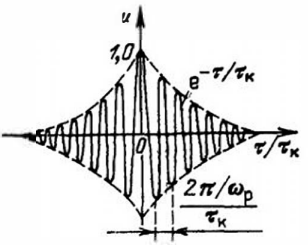


Рис. 7.7. Нормированная корреляционная функция, соответствующая спектру $W_u(\omega)$ (рис. 7.6)

Переходя к новой переменной $\omega_1 = \omega - \omega_р$, получаем

$$R_u(\tau) = \frac{eI_0 R_ш^2}{\pi} \int\limits_{-\omega_р}^{\infty} \frac{\cos(\omega_1+\omega_р)\tau}{1+\omega_1^2\tau_к^2}\, d\omega_1 =$$

$$= \frac{eI_0 R_ш^2}{\pi}\left[\cos\omega_р\tau \int\limits_{-\omega_р}^{\infty} \frac{\cos\omega_1\tau}{1+\omega_1^2\tau_к^2}\, d\omega_1 - \sin\omega_р\tau \int\limits_{-\omega_р}^{\infty} \frac{\sin\omega_1\tau}{1+\omega_1^2\tau_к^2}\, d\omega_1\right].$$

Заметим, что при достаточно большой добротности контура выполняется условие

$$\omega_р\tau_к = \omega_р(2Q_{эк}/\omega_р) = 2Q_{эк} \gg 1.$$

Поэтому нижний предел интегралов $-\omega_р$ можно заменить на $-\infty$. Второй интеграл обращается при этом в нуль вследствие нечетности подынтегральной функции относительно переменной интегрирования ω_1. Первый же интеграл вследствие четности подынтегральной функции приводится к виду

$$\int\limits_{-\omega_р}^{\infty} \frac{\cos\omega_1\tau}{1+\omega_1^2\tau_к^2}\, d\omega_1 \approx \frac{2}{\tau_к^2}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos\omega_1\tau}{1/\tau_к^2+\omega_1^2}\, d\omega_1.$$

Аналогичный интеграл был вычислен при выводе формулы (7.17). Используя этот результат, получаем

$$R_u(\tau) = \frac{eI_0 R_ш^2}{\pi}\cos\omega_р\tau\,\frac{2}{\tau_к^2}\,\frac{\pi\tau_к}{2}\,e^{-|\tau|/\tau_к} =$$

$$= \frac{eI_0 R_ш^2}{\tau_к} e^{-|\tau|/\tau_к}\cos\omega_р\tau = eI_0 R_ш^2\alpha_к e^{-\alpha_к|\tau|}\cos\omega_р\tau. \qquad (7.23)$$

Здесь через $\alpha_к = 1/\tau_к$ обозначено затухание контура. Учитывая, что при шунтировании контура сопротивлением $R_ш$ коэффициент затухания $\alpha_к = 1/2R_ш C$, записываем формулу (7.23) в следующей форме:

$$R_u(\tau) = \frac{eI_0 R_ш}{2C} e^{-\alpha_к|\tau|}\cos\omega_р\tau. \qquad (7.23')$$

Из формул (7.23), (7.23′) вытекает, во-первых, что средний квадрат напряжения шума на контуре

$$\sigma_u^2 = R_u(0) = eI_0 R_ш^2\alpha_к = eI_0 R_ш/2C \qquad (7.24)$$

и среднеквадратическое напряжение шума $\sigma_u = \sqrt{eI_0R_ш/2C}$; во-вторых, нормированная корреляционная функция определяется выражением

$$r_u(\tau) = e^{-\alpha_к|\tau|}\cos\omega_р\tau = e^{-|\tau|/\tau_к}\cos\omega_р\tau. \qquad (7.25)$$

График функции $r_u(\tau)$ показан на рис. 7.7. Интервал корреляции в рассматриваемом случае определяется ходом огибающей функции $r_u(\tau)$, т. е. множителем $e^{-|\tau|/\tau_к}$ в выражении (7.25).

Пересчет напряжения шумов ко входу усилителя, как и для апериодического усилителя, можно сделать по формуле $u_{ск} = \sigma_u/K_у$, в которой под $K_у$ следует подразумевать коэффициент усиления на резонансной частоте.

Напряжение шума, выделяемое на высокодобротном колебательном контуре, показано на рис. 4.17. Приведенные в § 4.6 характеристики узкополосного случайного процесса могут быть полностью отнесены к дробовому шуму в резонансном усилителе.

Нужно иметь в виду, что изложенный в данном параграфе материал дает представление лишь о методе анализа характеристик собственных шумов, формируемых избирательной цепью усилителя. Механизм образования шумов зависит от ряда физических и конструктивных особенностей усилительных (активных) элементов, которые здесь не рассматриваются.

В заключение укажем, что приведенные выше соотношения можно использовать также при анализе теплового шума в избирательных цепях. Необходимо лишь спектр такого шума определять по формуле, известной из физики,

$$W_u(\omega) = 2kTR, \qquad (7.26)$$

где R — сопротивление резистора, генерирующего шум; $k = 1{,}38 \times \times 10^{-23}$ Вт · с/град — постоянная Больцмана; T — асболютная температура.

Тепловой шум является *белым* шумом.

Как и в выражении (7.12), $W_u(\omega)$ здесь определено для положительных и отрицательных частот. При отнесении мощности шума только к положительным частотам коэффициент 2 следует заменить на 4.

7.4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть задан стационарный эргодический случайный процесс $s(t)$ со спектром $W_s(\omega)$ и корреляционной функцией $R_s(\tau)$; требуется найти аналогичные характеристики для производной $\dot{s}(t)$. Не останавливаясь здесь на рассмотрении всех условий дифференцируемости случайной функции, ограничимся основным требованием: энергетический спектр $W_s(\omega)$ при $\omega \to \infty$ должен убывать быстрее, чем $1/\omega^2$, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 W_s(\omega)\, d\omega < \infty. \qquad (7.27)$$

Это условие выполняется для большинства практических задач, так как спектр $W_s(\omega)$ формируется физической цепью, передаточная функция которой при $\omega \to \infty$ убывает быстрее, чем $1/\omega$ (а квадрат модуля уменьшается быстрее, чем $1/\omega^2$). Условию (7.27) не отвечает белый шум с бесконечно широким спектром, однако обычно рассматривается шум с ограниченным спектром.

Считая условие (7.27) выполненным, рассмотрим прохождение случайного сигнала $s(t)$ через идеальную дифференцирующую цепь, передаточная функция которой $\mathbf{K}(i\omega) = i\omega\tau_0$ [см. (6.17)].

Применяя выражения (7.2), (7.3), можем написать

$$W_{s\,\text{вых}}(\omega) = K^2(\omega)\, W_s(\omega) = \tau_0^2\, \omega^2\, W_s(\omega), \tag{7.28}$$

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau) = \tau_0^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2\, W_s(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega. \tag{7.29}$$

Дисперсия процесса на выходе устройства

$$D_{s\,\text{вых}} = \sigma^2_{\text{вых}} = \frac{\tau_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2\, W_s(\omega)\, d\omega. \tag{7.30}$$

Рассмотрим следующий пример. Пусть спектр процесса на входе дифференцирующего устройства равномерен в полосе частот $-f_1 \leqslant f \leqslant f_1$:

$$W_s(\omega) = \begin{cases} W_0 & \text{при } |\omega| \leqslant 2\pi f_1 = \Delta\omega_1, \\ 0 & \text{при } |\omega| > 2\pi f_1 = \Delta\omega_1. \end{cases}$$

Корреляционная функция подобного процесса [см. (4.41)]

$$R_s(\tau) = W_0\, 2f_1\, (\sin \Delta\omega_1 \tau / \Delta\omega_1 \tau),$$

а дисперсия

$$D_s = \sigma_s^2 = R_s(0) = W_0\, 2f_1. \tag{7.31}$$

Нормированная корреляционная функция

$$r_s(\tau) = (\sin \Delta\omega_1\tau)/\Delta\omega_1\tau. \tag{7.32}$$

После дифференцирования получаем $W_{s\,\text{вых}}(\omega) = \tau_0^2\, \omega^2\, W_0$ и

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau) = \tau_0^2\, W_0\, \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta\omega_1} \omega^2 \cos \omega\tau d\omega = \frac{\tau_0^2\, W_0}{\pi} \frac{1}{\tau^3} \{2\, \Delta\omega_1\tau \cos \Delta\omega_1 \tau +$$

$$+ [(\Delta\omega_1\tau)^2 - 2] \sin \Delta\omega_1\tau\}.$$

Домножив числитель и знаменатель на $(\Delta\omega_1)^3$ и учитывая, что

$$W_0\, \Delta\omega_1 = W_0 2\pi f_1 = \pi\sigma_s^2,$$

приводим предыдущее выражение к виду

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau) = (\Delta\omega_1\, \tau_0)^2\, \sigma_s^2\, y(\Delta\omega_1\, \tau), \tag{7.33}$$

где $y(\Delta\omega_1\, \tau) = (\Delta\omega_1\, \tau)^{-3} \{2\Delta\omega_1\tau \cos \Delta\omega_1\, \tau + [(\Delta\omega_1\, \tau)^2 - 2] \sin \Delta\omega_1\, \tau\}$.

При $\tau \to 0$ получается неопределенность вида 0/0.
Применив правило Лопиталя, получим $y(0) = 1/3$. Тогда

$$R_{s\,\text{вых}}(0) = \sigma^2_{\text{вых}} = (\Delta\omega_1\, \tau_0)^2\, \sigma_s^2\ y(0) = \sigma_s^2\, \tau_0^2\, (\Delta\omega_1)^2/3. \tag{7.33'}$$

Сопоставляя (7.33') с выражением (4.83'), в котором $\Delta\omega_0$ следует заменить на $\Delta\omega_1$, а $r_0(\tau)$ на $r_s(\tau)$, приходим к окончательному результату

$$R_{s\,\text{вых}}(0) = -\sigma_s^2\, \tau_0^2\, r_s''(0). \tag{7.34}$$

В § 7.6 будет показано, что выражение (7.33') справедливо для производной любого стационарного случайного процесса (при $\mathbf{K}(i\omega) = i\,\omega\,\tau_0$).

Графики функций $W_s(\omega)$ и $W_{s\,вых}(\omega)$, а также функций $r_s(\tau)$ и $r_{s\,вых}(\tau)$ изображены на рис. 7.8, *а* и *б*; параметр $\Delta\omega_1\tau_0 = 1$. Из рисунка видно, что дифференцирование приводит к ослаблению нижних частот исходного процесса. Относительное возрастание высших частот приводит к более четко выраженной осцилляции корреляционной функции (см. рис. 7.8, *б*).

Рассмотрим теперь прохождение того же случайного сигнала через реальное дифференцирующее устройство в виде *RC*-цепи (см. рис. 6.7). Квадрат передаточной функции дифференцирующей цепи в соответствии с (6.19)

$$K^2(\omega) = \omega^2\tau_0^2/(1+\omega^2\tau_0^2),\ \tau_0 = RC.$$

Таким образом, энергетический спектр на выходе цепи

$$W_{s\,вых}(\omega) = \frac{\omega^2\tau_0^2}{1+\omega^2\tau_0^2}\,W_0 = \frac{(\Delta\omega_1\tau_0)^2(\omega/\Delta\omega_1)^2}{1+(\Delta\omega_1\tau_0)^2(\omega/\Delta\omega_1)^2}\,W_0. \qquad (7.35)$$

График $W_{s\,вых}(\omega)$ для $\Delta\omega_1\tau_0 = 1$ представлен на рис. 7.8, *а* штриховой линией.

Корреляционная функция

$$R_{s\,вых}(\tau) = \tau_0^2\,W_0\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\Delta\omega_1}\frac{\omega^2\cos\omega\tau}{1+\omega^2\tau_0^2}\,d\omega,$$

$$\sigma^2_{вых} = R_{s\,вых}(0) = \tau_0^2\,W_0\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\Delta\omega_1}\frac{\omega^2}{1+\omega^2\tau_0^2}\,d\omega =$$

$$= \frac{W_0}{\tau_0}\,\frac{1}{\pi}\,[\Delta\omega_1\tau_0 - \operatorname{arctg}(\Delta\omega_1\tau_0)]. \qquad (7.36)$$

Результат вычисления нормированной корреляционной функции $r_{s\,вых}(\tau) = R_{s\,вых}(\tau)/\sigma^2_{вых}$ представлен на рис. 7.8, *б* штриховой линией (для $\Delta\omega_1\tau_0 = 1$).

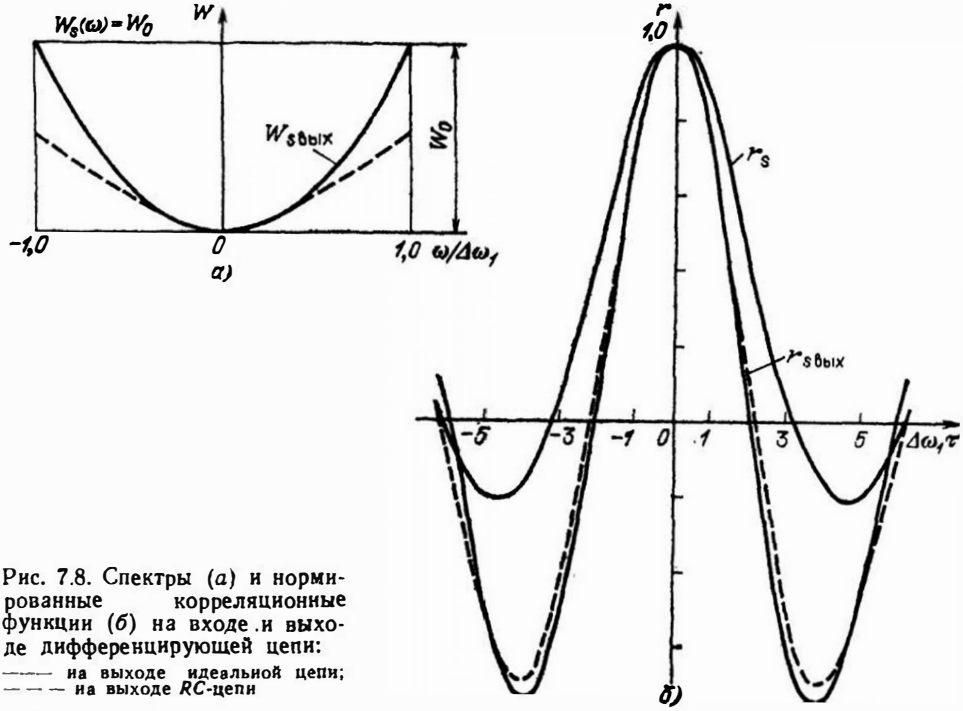


Рис. 7.8. Спектры (*а*) и нормированные корреляционные функции (*б*) на входе и выходе дифференцирующей цепи:
——— на выходе идеальной цепи;
– – – на выходе *RC*-цепи

Можно считать, что при $\Delta\omega_1\tau_0 \ll 1$ физическая RC-цепь осуществляет дифференцирование рассматриваемого случайного процесса, близкое к точному дифференцированию.

7.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Для выявления некоторых особенностей интегрирования случайной функции рассмотрим сначала прохождение стационарного случайного процесса через физическую интегрирующую RC-цепь (см. рис. 6.8).

Пусть на входе этой цепи начиная с момента $t = -\infty$ действует случайная функция $s(t)$ со спектром $W_s(\omega)$ и корреляционной функцией $R_s(\omega)$. Считая процесс на выходе установившимся, можно определить $W_{s\,\text{вых}}(\omega)$ и $R_{s\,\text{вых}}(\tau)$ с помощью выражений (7.2) и (7.3), подставив в них [см. (6.20)]

$$K^2(\omega) = 1/[1 + (\omega\tau_0)^2].$$

Таким образом,

$$W_{s\,\text{вых}}(\omega) = K^2(\omega)\, W_s(\omega) = W_s(\omega)/(1+\omega^2\tau_0^2), \tag{7.37}$$

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{W_s(\omega)\cos\omega\tau}{1+\omega^2\tau_0^2}\, d\omega. \tag{7.38}$$

Рассмотрим два частных случая: $\overline{s(t)} = 0$ и $\overline{s(t)} \neq 0$. В первом случае спектр $W_s(\omega)$ не содержит слагаемого с δ-функцией [см. (4.35)—(4.37)]; полагая $W_s(\omega) = W_0 = \text{const}$ (белый шум), получаем корреляционную функцию

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau) = \frac{W_0}{\tau_0^2}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos\omega\tau}{1/\tau_0^2+\omega^2}\, d\omega = \frac{W_0}{2\tau_0}\, e^{-|\tau|/\tau_0} \tag{7.39}$$

и дисперсию

$$\sigma^2_{\text{вых}} = W_0/2\tau_0 = W_0/2RC. \tag{7.40}$$

Во втором случае (при $\overline{s(t)} \neq 0$), когда в соответствии с (4.35) спектр

$$W_s(\omega) = [\overline{s(t)}]^2\, 2\pi\delta(\omega) + W_{\sim}(\omega),$$

причем $W_{\sim}(\omega) = W_0 = \text{const}$ (как и в предыдущем случае), корреляционная функция и дисперсия будут

$$R_{s\,\text{вых}}(\tau) = |\overline{s(t)}|^2\, 2\pi\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\,\frac{\cos\omega\tau}{1+\tau_0^2\omega^2}\, d\omega +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{W_{\sim}(\omega)\cos\omega\tau}{1+\tau_0^2\omega^2}\, d\omega = |\overline{s(t)}|^2 + \frac{W_0}{2\tau_0}\, e^{-|\tau|/\tau_0}, \tag{7.41}$$

$$\sigma^2_{\text{вых}} = W_0/2\tau_0 = W_0/2RC. \tag{7.42}$$

Из приведенных соотношений видно, что в установившемся режиме процесс на выходе физической интегрирующей цепи является стационарным, как и на входе.

Иначе обстоит дело при точном математическом интегрировании, которому соответствует нереализуемая передаточная функция

$$\mathbf{K}(i\omega) = 1/i\omega\tau_0$$

[см. (6.18)].

Условие интегрируемости случайного процесса при этом принимает следующий вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_s(\omega)}{\omega^2} d\omega < \infty. \tag{7.43}$$

Если условие дифференцируемости случайной функции (7.27) накладывало требование достаточно быстрого убывания $W_s(\omega)$ при $\omega \to \infty$, то при интегрировании аналогичное требование относится к поведению $W_s(\omega)$ при $\omega \to 0$.

Интегрирование стационарного процесса $s(t)$ с $W_s(0) \neq 0$ приводит к нестационарному процессу с неограниченно возрастающей дисперсией.

Если $\overline{s(t)} \neq 0$, то математическое ожидание процесса на выходе также неограниченно возрастает.

Следует иметь в виду, что идеальное интегрирующее устройство можно рассматривать как фильтр с бесконечно малой полосой пропускания. Процесс установления в таком фильтре длится бесконечно долго. Поэтому статистические характеристики интеграла случайного процесса существенно зависят от пределов, т. е. от длительности интегрирования.

7.6. ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ВЫХОДЕ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Как отмечалось в § 7.1, при негауссовском случайном процессе на входе отыскание закона распределения на выходе инерционной цепи является сложной задачей, не имеющей прямого решения. Существуют лишь приближенные методы решения, связанные с большими вычислительными трудностями.

Один из таких методов основан на использовании характеристических функций случайного процесса и известных соотношений между характеристической функцией и моментами распределения процесса.

В теории вероятностей под характеристической функцией $\theta_x(\eta)$ случайной величины x или характеристической функцией данного распределения $p(x)$ подразумевается среднее значение функции $e^{i\eta x}$, т. е.

$$\theta_x(\eta) = M(e^{i\eta x}) \tag{7.44}$$

(здесь η — вещественная переменная).

При заданной плотности вероятности $p(x)$ среднее значение величины $e^{i\eta x}$ можно определить с помощью выражения

$$\theta_x(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x} p(x)\, dx. \tag{7.45}$$

Правая часть этого выражения есть не что иное, как преобразование Фурье функции $p(x)$. Следовательно, если известна характеристическая

функция $\theta_x(\eta)$ какой-либо случайной величины x, то плотность вероятности $p(x)$ можно найти с помощью обратного по отношению к (7.45) преобразования Фурье

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_x(\eta)\, e^{-i\eta x}\, d\eta. \tag{7.46}$$

В частности, для нормального закона распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

характеристическая функция в соответствии с (7.45)

$$\theta_x(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) \exp(i\eta x)\, dx.$$

С помощью преобразований, аналогичных (2.75) и (2.77), получаем[1]

$$\theta_x(\eta) = \exp(-\sigma_x^2 \eta^2/2). \tag{7.47}$$

Таким образом, при нормальном распределении график характеристической функции относительно η имеет такую же форму, как и график плотности вероятности относительно x. Поэтому о степени приближения распределения какой-либо случайной величины к нормальному можно судить по тому, насколько характеристическая функция рассматриваемой величины приближается к функции, определяемой выражением (7.47).

Характеристическая функция $\theta_x(\eta)$ полностью определяется моментами случайного процесса и может быть представлена рядом

$$\theta_x(\eta) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_{xk}}{k!} (i\eta)^k, \tag{7.48}$$

где моменты k-го порядка определяются (см. (4.3) для $k = 1$) выражением

$$m_{xk} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)\, dx. \tag{7.49}$$

Знание моментов распределения позволяет найти характеристическую функцию $\theta_x(\eta)$, а по ней и функцию распределения.

Вычисление по формуле (7.48) оказывается неприемлемо сложным для практики. Обычно довольствуются решением более простой задачи о преобразовании лишь нескольких моментных функций в линейной системе, которые дают косвенное представление об одномерной плотности вероятности случайного процесса на выходе. Поясним это на примере простого линейного преобразования — дифференцирования случайного процесса $x(t)$. Найдем

---

[1] В общем случае, когда среднее значение случайной величины не равно нулю и

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right],$$

характеристическая функция

$$\theta_x(\eta) = \exp(i\bar{x}\eta - \sigma_x^2 \eta^2/2)$$

(см., например, [13]).

первые две моментные функции случайного процесса $y(t) = dx(t)/dt$, т. е. процесса на выходе дифференцирующего устройства.

Математическое ожидание процесса $y(t)$

$$M[y(t)] = M[dx/dt] = M\left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right].$$

Операции осреднения и перехода к пределу перестановочны, поэтому можно написать

$$M[y(t)] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M[x(t+\Delta t)] - M[x(t)]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_{x1}(t+\Delta t) - m_{x1}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{dm_{x1}(t)}{dt}.$$

Следовательно, при дифференцировании случайной функции ее моментная функция первого порядка также подвергается дифференцированию. Очевидно, что для стационарного случайного процесса первая моментная функция производной равна нулю.

Повторяя аналогичные рассуждения для моментной функции второго порядка процесса $y(t)$, можно получить [при условии стационарности процесса $x(t)$]

$$M\left[\frac{dx(t_1)}{dt_1} \frac{dx(t_2)}{dt_2}\right] = -\frac{d^2 m_{x2}(\tau)}{d\tau^2} = -\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2}, \tag{7.50}$$

где $\tau = |t_2 - t_1|$.

При $\tau = 0$

$$M[y^2(t)] = -\sigma_x^2 r_x''(0). \tag{7.51}$$

К этому результату, совпадающему с (7.34'), можно прийти более простым способом на основе спектральной плотности мощности процесса $x(t)$ и передаточной функции цепи $\mathbf{K}(i\omega) = i\omega$ (для момента второго порядка).

Для более сложных цепей, осуществляющих различные линейные преобразования случайного процесса, широко распространен способ, основанный на стохастических дифференциальных уравнениях, и некоторые другие методы [14].

Приведем теперь пример задачи, когда использование характеристических функций оказывается весьма эффективным способом.

Пусть требуется найти плотность вероятности суммы некоторого числа взаимно независимых слагаемых $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Характеристическая функция суммы имеет следующий вид:

$$\theta(\eta) = M[e^{i\eta\lambda}] = M\left[e^{i\eta(x_1 + x_2 + \cdots + x_N)}\right] = M[e^{i\eta x_1}]\, M[e^{i\eta x_2}] \ldots M\left[e^{i\eta x_N}\right] =$$

$$= \theta_{x1}(\eta)\, \theta_{x2}(\eta) \ldots \theta_{xN}(\eta), \tag{7.52}$$

т. е. характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

Для частного случая, когда все слагаемые имеют одинаковые распределения и, следовательно, одинаковые характеристические функции

$$\theta_N(\eta) = [\theta_1(\eta)]^N. \tag{7.53}$$

Используем выражения (7.45), (7.46) для определения плотности вероятности суммы нескольких гармонических колебаний со случайными фазами. Амплитуды колебаний одинаковы и равны $A_0 = 1/N$.

Основываясь на плотности вероятности гармонического колебания (4.25), находим характеристическую функцию

$$\theta_1(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{e^{i\eta x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{7.54}$$

Подставляя $e^{i\eta x} = \cos\eta x + i\sin\eta x$ и учитывая, что $\sin\eta x/\sqrt{1-x^2}$ является нечетной функцией x, получаем (см. 3.753.2 в [28])

$$\theta_1(\eta) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{\cos\eta x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = J_0(\eta), \tag{7.55}$$

где J_0 — бесселева функция первого рода нулевого порядка.

Для отсчета, взятого из суммы N гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами $1/N$, но со случайными взаимно независимыми фазами, характеристическая функция в соответствии с (7.53) будет

$$\theta_N(\eta) = \left[J_0\left(\eta/\sqrt{N}\right)\right]^N. \tag{7.56}$$

Амплитуда каждой из синусоид приравнена $1/\sqrt{N}$ для того, чтобы дисперсия суммы, равная $0{,}5N\,(1/\sqrt{N})^2$, оставалась при увеличении числа синусоид неизменной.

На рис. 7.9 изображены характеристические функции для различных значений N. При $N \geqslant 4$ функция $\theta_N(\eta)$ быстро приближается к предельной кривой $N \to \infty$, соответствующей нормальному распределению суммы.

Для отыскания плотности вероятности суммы N гармонических колебаний необходимо в соответствии с выражением (7.46) вычислить интеграл

$$p_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\theta_N(\eta)\,e^{-i\eta x}\,d\eta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[J_0\left(\frac{\eta}{\sqrt{N}}\right)\right]^N\cos\eta x\,d\eta. \tag{7.57}$$

При $N = 1$ получается исходное выражение $p(x)$ для одной синусоиды [формула (4.25)], а при $N = 3$, 4 функции $p_N(x)$ имеют вид, показанный на рис. 7.10. Сплошной линией изображена функция $p_N(x)$ при нормальном распределении $(N \to \infty)$.

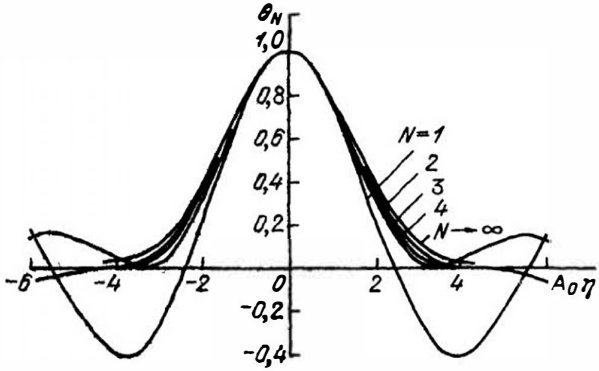


Рис. 7.9. Характеристические функции для суммы N гармонических колебаний со случайными фазами

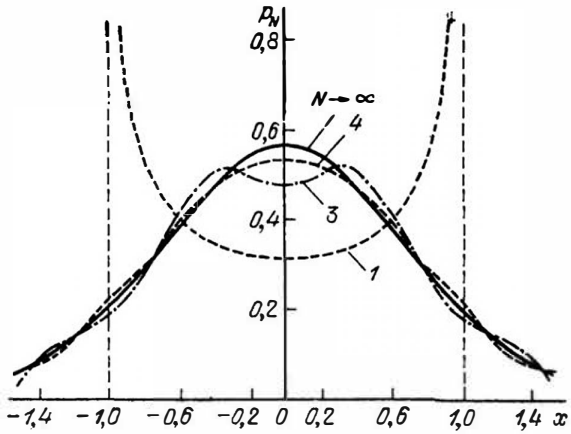


Рис. 7.10. Плотность вероятности суммы N гармонических колебаний со случайными фазами (рис. 7.11)

Полученные результаты показывают, что при суммировании хотя бы пяти-шести гармонических колебаний со случайными и взаимно независимыми фазами получается стационарный случайный процесс, близкий к гауссовскому.

Это справедливо для значений $|x| < \sqrt{N}$ (при $A_0 = 1$). При бóльших значениях $|x|$ $p_N(x) = 0$, в то время как при нормальном распределении $p(x)$ отлично от нуля. Таким образом, при конечном числе слагаемых N на «хвостах» кривой распределения неизбежно расхождение между $p_N(x)$ и $p_\infty(x)$.

7.7. НОРМАЛИЗАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В УЗКОПОЛОСНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Пусть на входе линейной цепи (с постоянными параметрами) действует стационарный случайный процесс с распределением, отличным от нормального. Если интервал корреляции этого процесса меньше постоянной времени цепи (т. е. ширина энергетического спектра больше полосы пропускания цепи), то распределение случайного процесса на выходе приближается к нормальному. Эффект нормализации проявляется тем сильнее, чем у́же полоса пропускания цепи. Поясним это положение на двух примерах.

Сначала рассмотрим воздействие на высокодобротный колебательный контур последовательности коротких, неперекрывающихся, случайным образом расположенных на оси времени импульсов (рис. 7.11), причем постоянная времени контура $\tau_к$ велика по сравнению со средней величиной интервалов между импульсами. Напряжение на контуре в какой-либо момент времени t_1 является суммой свободных колебаний, вызванных предыдущими импульсами и не успевших полностью затухнуть к рассматриваемому моменту. Чем у́же полоса пропускания цепи, тем длительнее свободные колебания и, следовательно, тем большее число соизмеримых по величине и некоррелированных слагаемых принимает участие в образовании результирующего напряжения в момент t_1. В соответствии с центральной предельной теоремой эти предпосылки достаточны для приближения распределения к нормальному.

При спектральном подходе эффект нормализации можно объяснить следующим образом. Спектр колебания в контуре суммируется из спектров отдельных импульсов входной последовательности. Внутри каждого из этих парциальных спектров фазы спектральных составляющих полностью кор-

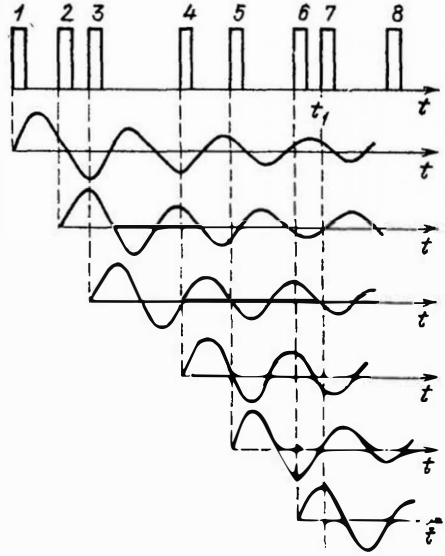


Рис. 7.11. Отклики колебательной цепи на отдельные импульсы хаотической последовательности

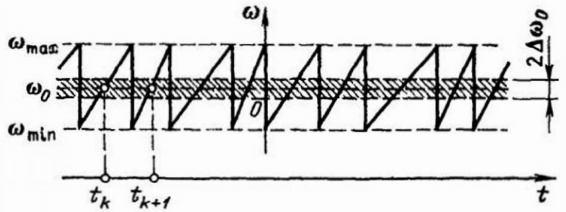


Рис. 7.12. Изменение частоты колебания по пилообразному закону со случайным периодом

релированы, а между фазами составляющих из различных спектров никакой корреляции нет (из-за случайной расстановки импульсов на оси времени). Чем уже полоса прозрачности контура, тем меньшую роль играет корреляция фаз в парциальных спектрах.

Приведем другой пример, поясняющий явление нормализации в узкополосной цепи. Пусть на контур воздействует непрерывное колебание с постоянной амплитудой и с частотой, модулированной по пилообразному закону со случайным периодом (рис. 7.12). При каждом пробеге частоты через полосу прозрачности контура $2\Delta\omega_0$ в последнем возникает свободное колебание, амплитуда которого обратно пропорциональна наклону «пилы». Так как моменты пересечения полосы прозрачности расположены на оси времени случайным образом, то и свободные колебания образуют импульсную последовательность со случайными интервалами (t_k, t_{k+1}).

При медленном качании частоты, когда интервалы велики по сравнению с постоянной времени контура $\tau_к$, свободные колебания не перекрываются. Предположим, что $\tau_к$ велико по сравнению со средним значением интервалов $T_{ср}$. Тогда в любой момент времени будет накладываться много колебаний со случайными и взаимно независимыми фазами и амплитудами. При этом входное колебание, закон распределения которого определяется формулой (4.25) (изменение мгновенной частоты не отражается на одномерном законе распределения высокочастотного колебания с постоянной амплитудой), преобразуется в случайную функцию с распределением, близким к нормальному. Нормализация будет тем полнее, чем больше $\tau_к$ по сравнению с $T_{ср}$.

Учитывая, что для одиночного контура имеет место соотношение $\Delta\omega_0\tau_к = 1$, а средняя частота «пилы» $F_{ср} = 1/T_{ср}$, условие нормализации можно записать в форме неравенства $F_{ср} \gg \Delta\omega_0$.

В широкополосных линейных цепях при некоторых условиях может иметь место эффект, обратный описанному выше эффекту нормализации: распределение процесса на выходе цепи может отличаться от нормального распределения больше, чем на входе. Можно привести простой пример подобного эффекта.

Пусть на вход дифференцирующего устройства подается совокупность относительно длинных импульсов, имеющая распределение, близкое к нормальному. В результате дифференцирования каждый из импульсов превращается на выходе в пару очень коротких импульсов, соответствующих фронтам входного импульса. Число взаимно перекрывающихся импуль-

сов на выходе уменьшается, благодаря чему приближение к нормальному закону на выходе оказывается худшим, чем на входе. Подобный эффект иногда называют «денормализацией» процесса.

Следует подчеркнуть, что отмеченный эффект не противоречит тому, что в любой линейной цепи гауссовский процесс сохраняет нормальный закон распределения. Если в приведенном выше примере среднее число импульсов в единицу времени довести до бесконечности (что необходимо для получения строго нормального распределения), то при дифференцировании, которое можно осуществить в физически реализуемой цепи, процесс будет гауссовским также и на выходе цепи.

Глава 8. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ И МЕТОДЫ ИХ АНАЛИЗА

8.1. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Основные радиотехнические преобразования осуществляются с помощью либо нелинейных цепей, либо линейных цепей с переменными параметрами. Однако последние реализуются тоже с помощью нелинейных элементов (например, емкость $p-n$-перехода в полупроводниковом диоде), а некоторые параметрические цепи сами работают в существенно нелинейном режиме (например, параметрический генератор). Приведем примеры некоторых нелинейных элементов.

Следует различать р е з и с т и в н ы е (сопротивления) и р е а к т и в н ы е (индуктивности, емкости) нелинейные элементы.

Для радиотехнических цепей и устройств наиболее характерными и распространенными резистивными нелинейными элементами являются полупроводниковые, ламповые и любые другие приборы, используемые для усиления или преобразования сигналов и имеющие нелинейную вольт-амперную характеристику. Важным параметром резистивного нелинейного элемента является крутизна его характеристики.

Различают два следующих определения крутизны характеристики: а) в рассматриваемой рабочей точке при слабом сигнале (дифференциальная

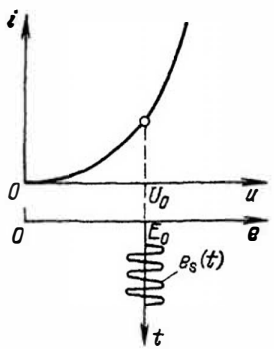


Рис. 8.1. Линейный режим работы элемента с нелинейной вольт-амперной характеристикой

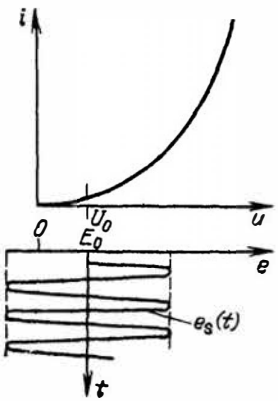


Рис. 8.2. Нелинейный режим работы элемента с той же вольт-амперной характеристикой, что и на рис. 8.1

крутизна) и б) при сильном гармоническом колебании (средняя крутизна).

С первым определением крутизны, соответствующим линейному режиму работы прибора (рис. 8.1), мы имели дело в гл. 5, где эта крутизна определялась выражением [см. (5.30), (5.33)] вида

$$S = a_1 = \left(\frac{di}{du}\right)_{u=U_0}, \qquad (8.1)$$

а напряжение U_0 приравнивалось $U_{БЭ0}$ (для транзистора).

Второе определение крутизны соответствует существенно нелинейному режиму работы устройства (рис. 8.2) и может быть дано лишь при учете формы вольт-амперной характеристики нелинейного элемента в широких пределах, зависящих от амплитуды входного сигнала (это будет сделано в § 8.5).

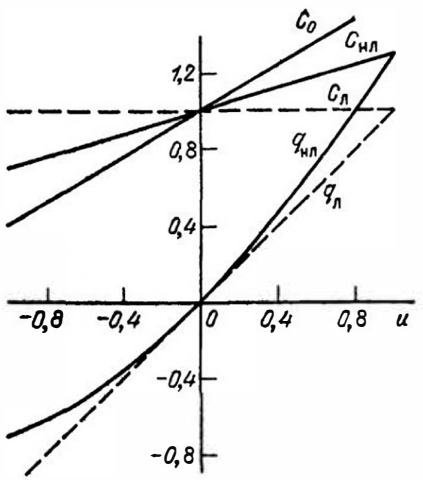


Рис. 8.3. Вольт-кулонная и вольт-фарадная характеристики линейной и нелинейной емкостей

Примером нелинейной емкости может служить любое устройство с нелинейной вольт-кулонной характеристикой $q(u)$.

На рис. 8.3 изображены вольт-кулонная $q_{нл}(u)$ и вольт-фарадная характеристики $C_{нл} = q_{нл}(u)/u$ нелинейной емкости и аналогичные характеристики $q_л(u)$ и $C_л = q_л(u)/u = \text{const}$ для линейной емкости. Вольт-кулонная характеристика нелинейной емкости в рассматриваемом примере была задана выражением $q_{нл}(u) = b_1 u + b_2 u^2$ при $b_1 = 1$ Кл/В и $b_2 = 0{,}3$ Кл/В^2. В дальнейшем нелинейная емкость будет обозначаться $C(u)$.

Если приложенное к емкости $C(u)$ напряжение изменяется во времени, то ток через емкость можно определить с помощью одного из двух эквивалентных выражений

$$i(t) = \frac{dq(u)}{dt} = \frac{dq(u)}{du}\,\frac{du}{dt}, \qquad (8.2)$$

$$i(t) = \frac{d[C(u)\,u]}{dt} = u\,\frac{dC(u)}{dt} + C(u)\,\frac{du}{dt} = \left[u\,\frac{dC(u)}{du} + C(u)\right]\frac{du}{dt}. \qquad (8.3)$$

Если напряжение $u = U_0 + e$, где U_0 — напряжение в рабочей точке, а e — изменение напряжения, причем $|e| \ll U_0$, то емкость можно представить в виде

$$C_0 \approx \frac{dq_{нл}(u)}{du}\bigg|_{u=U_0}. \qquad (8.4)$$

Определенную таким образом емкость иногда называют дифференциальной.

Параметр C_0 определяется крутизной вольт-кулонной характеристики $q_{нл}(u)$. Показанная на рис. 8.3 зависимость C_0 от u определялась по формуле

$$C_0 = b_1 + 2b_2 u\big|_{u=U_0} = 1 + 2 \cdot 0{,}3 U_0.$$

Наконец, катушка с ферромагнитным сердечником, обтекаемая сильным током, доводящим сердечник до магнитного насыщения, является примером нелинейной индуктивности $L(i)$.

Соотношение между током i и напряжением u_L на индуктивности следует из исходного выражения для потокосцепления

$$\Phi(i) = L(i)\, i. \tag{8.5}$$

Очевидно,

$$u_L(t) = \frac{d\Phi(i)}{dt} = \frac{dL(i)}{di}\frac{di}{dt}\, i + L(i)\frac{di}{dt} = \left[i\frac{dL(i)}{di} + L(i)\right]\frac{di}{dt}. \tag{8.6}$$

Если задано напряжение $u_L(t)$ на индуктивности, то, очевидно,

$$\int u_L(t)\, dt = \Phi(t) = L(i)\, i(t)$$

и, как и в случае линейной индуктивности,

$$i(t) = \frac{1}{L(i)}\int u_L(t)\, dt.$$

Под дифференциальной индуктивностью подразумевается величина

$$L_0 \approx \left.\frac{d\Phi(i)}{di}\right|_{i=I_0}. \tag{8.7}$$

Понятиями «дифференциальные сопротивление, емкость и индуктивность» широко пользуются при рассмотрении воздействия относительно слабых сигналов на нелинейные элементы. При этом нелинейность элемента проявляется лишь в том, что R_0, C_0 и L_0 зависят от управляющего напряжения (или тока), определяющего положение рабочей точки на нелинейной характеристике. По отношению же к *слабому сигналу* подобный элемент является *линейным устройством с переменным параметром* (если управляющее напряжение изменяется во времени).

Свойства таких элементов рассматриваются в гл. 10.

8.2. АППРОКСИМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для анализа и расчета нелинейных цепей необходимо задать вольт-амперные или иные аналогичные характеристики нелинейных элементов в аналитической форме. Реальные характеристики обычно имеют сложный вид, что затрудняет точное их описание с помощью достаточно простого аналитического выражения.

Широкое распространение получили способы представления характеристик относительно простыми функциями, лишь приближенно отображающими истинные характеристики. Замена истинной характеристики приближенно представляющей ее функцией называется аппроксимацией характеристики.

Оптимальный выбор способа аппроксимации зависит от вида нелинейной характеристики, а также от режима работы нелинейного элемента. Одним из наиболее распространенных способов является аппроксимация степенным полиномом.

Запишем аппроксимирующий степенной полином в форме

$$i(u) = i(U_0) + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + a_3(u - U_0)^3 + \ldots \tag{8.8}$$

Если под нелинейным элементом подразумевается транзистор, то i — ток коллектора, а u — напряжение, например, между базой и эмиттером. Для вакуумного триода или пентода u — напряжение между управляющей сеткой и катодом, а i — анодный ток и т. д.

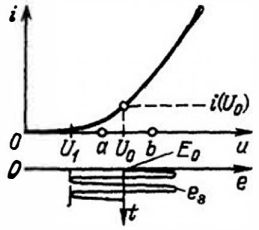


Рис. 8.4. Положение рабочей точки и пределы использования вольт-амперной характеристики ($а$, $в$), при которых применима аппроксимация полиномом второй степени

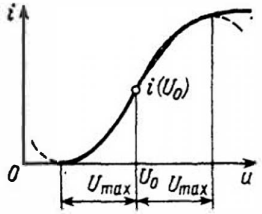


Рис. 8.5. Характеристика, для аппроксимации которой требуется полином третьей степени

Коэффициенты a_1, a_2, a_3, ... определяются выражениями

$$a_1 = \left(\frac{di}{du}\right)_{u=U_0},\quad a_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 i}{du^2}\right)_{u=U_0},\quad a_3 = \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3 i}{du^3}\right)_{u=U_0}. \tag{8.9}$$

Нетрудно видеть, что a_1 представляет собой крутизну характеристики в точке $u = U_0$, a_2 — первую производную крутизны (с коэффициентом 1/2!), a_3 — вторую производную крутизны (с коэффициентом 1/3!) и т. д.

При заданной форме вольт-амперной характеристики коэффициенты a_1, a_2, a_3, ... существенно зависят от U_0, т. е. от положения рабочей точки на характеристике.

Рассмотрим некоторые типичные и важные для практики случаи.

1. Рабочая точка расположена на начальном участке характеристики, имеющем вид квадратичной параболы (рис. 8.4). Предполагается, что подводимое к нелинейному элементу напряжение сигнала e_s, накладываясь на постоянное напряжение $E_0 = U_0$, не выходит за точку U_1, т. е. за начало характеристики.

Выражение (8.8) в данном случае можно записать в виде полинома второй степени

$$i(U_0 + e_s) = i(U_0) + a_1 e_s + a_2 e_s^2. \tag{8.10}$$

Коэффициент a_1, определяемый выражением (8.9), представляет собой крутизну характеристики (8.1) и поэтому в дальнейшем обозначается символом S.

Коэффициент a_2 определяется из условия, что при $e_s = U_1 - U_0$ ток $i = 0$, откуда вытекает уравнение

$$i(U_0) + S(U_1 - U_0) + a_2(U_1 - U_0)^2 = 0.$$

Таким образом,

$$a_2 = -[i(U_0) + S(U_1 - U_0)]/(U_1 - U_0)^2. \tag{8.11}$$

2. Рабочая точка является точкой перегиба характеристики, показанной на рис. 8.5. В точке перегиба кривой $i = f(u)$ все производные четного порядка равны нулю. Поэтому коэффициенты при четных степенях в выражении (8.8) обращаются в нуль и его можно записать в форме

$$i(u) = i(U_0) + a_1(u - U_0) + a_3(u - U_0)^3 + a_5(u - U_0)^5 + \ldots \tag{8.12}$$

Для упрощения анализа часто ограничиваются полиномом всего лишь третьей степени без квадратичного члена (неполным полиномом третьей сте-

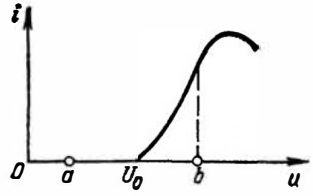


Рис. 8.6. Характеристика, для аппроксимации которой требуется полином высокой степени

пени). Заменяя, как и в п. 1, $u - U_0$ на напряжение сигнала e_s, получаем

$$i(U_0 + e_s) = i(U_0) + a_1 e_s + a_3 e_s^3. \qquad (8.13)$$

Соответствующая этой аппроксимации характеристика показана на рис. 8.5 штриховой линией. Напряжение U_{max}, соответствующее экстремумам аппроксимирующей функции и отсчитываемое от $u = U_0$, иногда называют напряжением насыщения. Заданием этого напряжения, а также a_1 (крутизны S в точке U_0) однозначно определяют коэффициент a_3 в выражении (8.13).

Действительно, в точке $U_0 + U_{max}$, т. е. при амплитуде входного сигнала, равной U_{max}, выполняется тождество

$$\left(\frac{di}{de_s}\right)_{e_s = U_{max}} = a_1 + 3a_3 U_{max}^2 = 0,$$

откуда

$$a_3 = -a_1/3U_{max}^2 = -S/3U_{max}^2 < 0. \qquad (8.14)$$

Отметим, что аппроксимацией (8.13) допустимо пользоваться, когда напряжение сигнала не выходит за пределы $\pm U_{max}$.

3. Рабочая точка находится на нижнем сгибе характеристики, изображенной на рис. 8.6. Если изменение напряжения настолько велико, что используется участок, обозначенный на оси абсцисс буквами *a*, *b*, то для удовлетворительной аппроксимации требуется полином пятой и более высокой степени. При этом анализ усложняется и применение степенного полинома для практических расчетов оказывается неэффективным.

При очень больших амплитудах сигнала часто удобнее заменять реальную характеристику идеализированной, линейно-ломаной, составленной из отрезков прямых линий. Такое представление характеристики называется кусочно-линейной аппроксимацией. Некоторые примеры кусочно-линейной аппроксимации изображены на рис. 8.7. Рис. 8.7, *а* соответствует случаю, когда используются нижний сгиб и линейная часть характеристики (участок *a*—*c*); рис. 8.7, *б* — когда сигнал захватывает нижний и верхний сгибы (участок *a*—*d*), а рис. 8.7, *в* — когда сигнал достигает также и падающего участка характеристики (участок *a*—*f*). Следует особо подчеркнуть, что *замена реальной нелинейной характеристики линейными отрезками не означает линеаризации цепи*. Например, несмотря на то, что на участке *b*—*c* (рис. 8.7, *а*) характеристика линейна, по отношению к сигналу, захватывающему область изменения *a*—*c*, система в целом является существенно нелинейной.

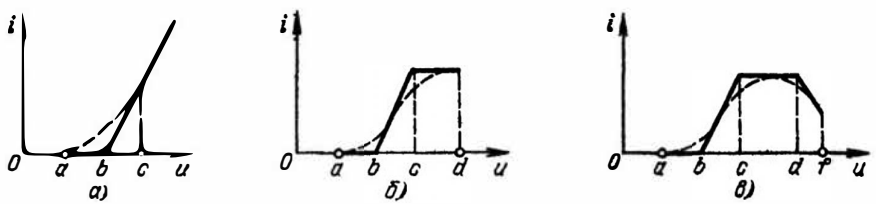


Рис. 8.7. Примеры кусочно-линейной аппроксимации характеристики при различных пределах ее использования

Кусочно-линейная аппроксимация особенно проста и удобна для исследований и расчетов, когда основное значение имеет нижний сгиб характеристики, т. е. когда можно ограничиваться двумя прямыми (рис. 8.7, *а*). При более сложной форме используемого участка характеристики число аппроксимирующих отрезков растет и кусочно-линейная аппроксимация теряет свои преимущества. В подобных случаях иногда для аппроксимации применяются различные трансцендентные функции, например гиперболический тангенс, экспоненциальные функции и некоторые другие.

Описанные выше приемы аппроксимации применимы и к соответствующим характеристикам р е а к т и в н ы х нелинейных элементов.

8.3. ВОЗДЕЙСТВИЕ УЗКОПОЛОСНОГО РАДИОСИГНАЛА НА БЕЗЫНЕРЦИОННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Под безынерционным нелинейным элементом подразумевается любой электронный прибор с нелинейной вольт-амперной характеристикой при использовании его в диапазоне частот, на которых можно пренебречь влиянием паразитных параметров (внутренних емкостей и индуктивностей).

Рассмотрим режим работы, представленный на рис. 8.8, при котором напряжение сигнала $e_s(t)$ не выходит за пределы точки U_1 и вольт-амперная характеристика $i(u)$ удовлетворительно аппроксимируется степенным полиномом (8.8).

Сигнал $e_s(t)$ зададим сначала в форме гармонического колебания $e_s(t) = E\cos(\omega_1 t + \theta_1) = E\cos\psi_1(t)$. Результаты анализа затем будут распространены на некоторые *узкополосные* радиосигналы.

Подставив в (8.8) $u - U_0 = e_s(t)$, получим

$$i(t) = i(U_0) + a_1 E\cos\psi_1(t) + a_2 E^2\cos^2\psi_1(t) + a_3 E^3\cos^3\psi_1(t) + \ldots \quad (8.15)$$

Форма тока $i(t)$ показана на рис. 8.8.

С помощью тригонометрических соотношений

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x,\ \cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x,\ \cos^4 x =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x,\ \cos^5 x = \frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{16}\cos 3x +$$

$$+ \frac{1}{16}\cos 5x \text{ и т.д.}$$

выражение (8.15) приводим к виду

$$i(t) = \left[i(U_0) + \frac{1}{2}a_2 E^2 + \frac{3}{8}a_4 E^4 + \ldots\right] + \left(a_1 E + \frac{3}{4}a_3 E^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{8}a_5 E^5 + \ldots\right)\cos\psi_1(t) + \left(\frac{1}{2}a_2 E^2 + \frac{1}{2}a_4 E^4 + \ldots\right)\cos 2\psi_1(t) +$$

$$+ \left(\frac{1}{4}a_3 E^3 + \frac{5}{16}a_5 E^5 + \ldots\right)\cos 3\psi_1(t) + \left(\frac{1}{8}a_4 E^4 + \ldots\right)\cos 4\psi_1(t) +$$

$$+ \left(\frac{1}{16}a_5 E^5 + \ldots\right)\cos 5\psi_1(t) + \ldots = I_0 + I_1\cos\psi_1(t) + I_2\cos 2\psi_1(t) +$$

$$+ I_3\cos 3\psi_1(t) + \ldots \quad (8.16)$$

Из этого выражения видны следующие проявления нелинейности вольт-амперной характеристики при гармоническом воздействии:

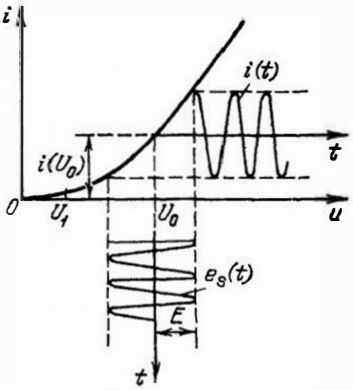


Рис. 8.8. Слабонелинейный режим работы усилительного прибора

ток покоя $i\,(U_0)$ получает приращение, обусловленное коэффициентами a_2, a_4, ... при четных степенях полинома (8.8):

$$I_0 = i\,(U_0) + \frac{1}{2}\,a_2\,E^2 + \frac{3}{8}\,a_4\,E^4 + \ldots; \tag{8.17}$$

амплитуда I_1 гармоники основной частоты ω_1 связана с амплитудой возбуждения E нелинейным соотношением, обусловленным нечетными степенями полинома (8.8):

$$I_1 = a_1\,E + \frac{3}{4}\,a_3\,E^3 + \ldots; \tag{8.18}$$

ток $i\,(t)$ содержит высшие гармоники с частотами $n\omega_1$, кратными частоте воздействия ω_1. Гармоники с частотами $2\omega_1, 4\omega_1, \ldots$ обусловлены четными степенями, а гармоники с частотами $3\omega_1, 5\omega_1, \ldots$ — нечетными степенями полинома (8.8).

Очевидны также следующие положения:

наивысший порядок гармоник совпадает со степенью k полинома, аппроксимирующего характеристику нелинейного элемента;

полная фаза n-й гармоники $\psi_n\,(t) = n\omega_1 t + n\theta_1$.

Выражения (8.15)—(8.18) полностью сохраняют свою структуру при замене постоянной начальной фазы θ_1 модулированной фазой $\theta_1\,(t) = \theta_{1\max} \times \times s\,(t)$. Из этого следует, что сформулированные выше положения можно распространить также и на воздействие частотно-модулированного сигнала на безынерционный нелинейный элемент (при постоянной амплитуде). Необходимо лишь каждую из гармоник тока с амплитудой I_n трактовать как несущее колебание, модулированное по углу. Это объясняется тем, что при угловой модуляции амплитуда колебания, несмотря на возникновение спектра боковых частот, остается неизменной.

Для первой (основной) гармоники индекс угловой модуляции совпадает с $\theta_{1\max} = m_1$, а для высших гармоник индекс $n\theta_{1\max} = nm_1$. Соответственно но в n раз увеличивается и девиация частоты.

Сказанное иллюстрируется рис. 8.9. Частота модуляции $\Omega \ll \omega_1$. С увеличением номера гармоники ширина спектра боковых частот возрастает, но, как отмечалось выше, амплитуда суммарного колебания остается равной I_n.

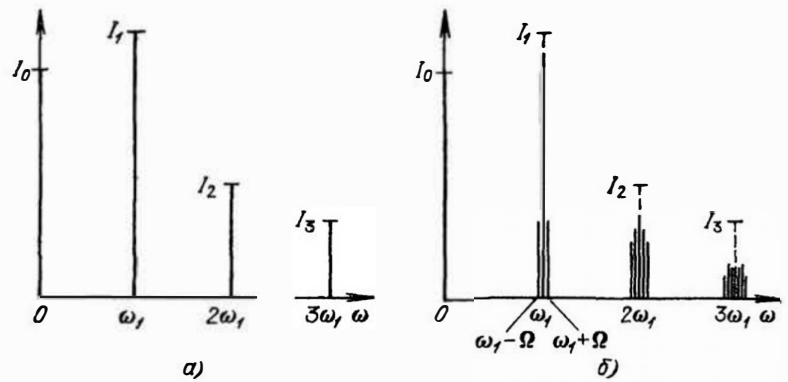


Рис. 8.9. Спектр тока при гармоническом воздействии на резистивный элемент (*а*) и то же при частотной модуляции (*б*)

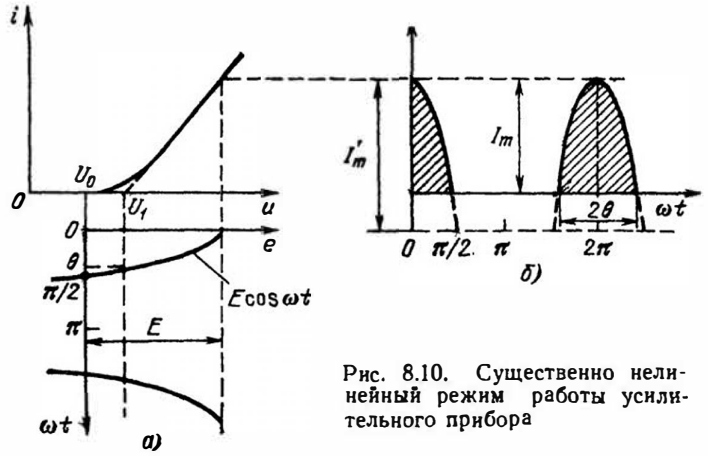


Рис. 8.10. Существенно нелинейный режим работы усилительного прибора

Для амплитудно-модулированного колебания, когда $E = E(t)$, нелинейность характеристики может коренным образом исказить форму передаваемого сигнала. Этот вопрос рассматривается в § 8.5, 8.7.

Рассмотрим теперь работу нелинейного элемента в режиме существенно более нелинейном (рис. 8.10, *а*), получаемом при сдвиге рабочей точки U_0 влево и соответствующем увеличении амплитуды возбуждающего напряжения E. В данном случае целесообразно применить кусочно-линейную аппроксимацию вольт-амперной характеристики (см. § 8.2, комментарий к рис. 8.7, *а*).

При гармоническом возбуждении ток $i(t)$ приобретает импульсную форму (рис. 8.10, *б*). Угол θ, соответствующий изменению тока от максимального значения I_m до нуля, получил название угла отсечки тока. Длительность импульсов тока равна 2θ (см. рис. 8.10, *б*). Из рис. 8.10, *а* очевидно следующее выражение:

$$\cos\theta = (U_1 - U_0)/E. \tag{8.19}$$

Амплитуда тока

$$I_m = a_1[E - (U_1 - U_0)] = a_1 E(1 - \cos\theta), \tag{8.20}$$

где a_1 — крутизна линейной части вольт-амперной характеристики [см. (8.9)].

При гармоническом возбуждении нелинейного элемента форма импульса тока в пределах $-\theta < \omega t < \theta$ близка к отсеченной косинусоиде и, если пренебречь кривизной вольт-амперной характеристики на нижнем сгибе (см. рис. 8.10, *а*), мгновенное значение тока можно выразить уравнением

$$i(t) = I'_m(\cos\omega t - \cos\theta), \quad -\theta < \omega t < \theta. \tag{8.21}$$

Символом I'_m обозначена амплитуда импульса, которая получилась бы при $\theta = \pi/2$.

Так как амплитуда реального импульса I'_m соответствует моменту $\omega t = 0$, имеет место соотношение

$$I_m = i(0) = I'_m(1 - \cos\theta),$$

откуда

$$I'_m = I_m/(1 - \cos\theta).$$

Подставив это выражение в (8.21), получим окончательно

$$i(t) = \frac{I_m}{1-\cos\theta}(\cos\omega t - \cos\theta), \quad -\theta < \omega t < \theta. \tag{8.22}$$

Основываясь на этом выражении, нетрудно определить коэффициенты ряда Фурье для периодической последовательности импульсов, представленной на рис. 8.11. Вследствие четности функции $i(t)$ относительно t [см. (8.22)] ряд содержит одни лишь косинусоидальные члены. Применяя формулы (2.24) и (2.32), находим

$$I_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta} i(t)\,d(\omega t) = \frac{I_m}{\pi(1-\cos\theta)}\int_{0}^{\theta}(\cos\omega t - \cos\theta)\,d(\omega t) =$$

$$= I_m \frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\pi(1-\cos\theta)}, \tag{8.23}$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta} i(t)\cos\omega t\,d(\omega t) = \frac{2I_m}{\pi(1-\cos\theta)}\int_{0}^{\theta}(\cos\omega t - \cos\theta)\cos\omega t\,d(\omega t) =$$

$$= I_m \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\pi(1-\cos\theta)}. \tag{8.24}$$

Аналогично можно получить общее выражение для амплитуды n-й гармоники

$$I_n = I_m \frac{2(\sin\theta\cos\theta - n\cos n\theta\sin\theta)}{\pi n(n^2-1)(1-\cos\theta)}. \tag{8.25}$$

Отношения

$$\alpha_0(\theta) = \frac{I_0}{I_m} = \frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\pi(1-\cos\theta)},$$

$$\alpha_1(\theta) = \frac{I_1}{I_m} = \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\pi(1-\cos\theta)},$$

$$\alpha_2(\theta) = I_2/I_m, \tag{8.26}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_n(\theta) = I_n/I_m$$

называются коэффициентами соответственно постоянной составляющей, первой гармоники и т. д. (функции Берга).

Графики коэффициентов α_0, α_1, α_2, ..., а также отношения $\gamma_1 = \alpha_1/\alpha_0$ при изменении угла отсечки от $\theta = 0$ до $\theta = 180°$ показаны на рис. 8.12. При $\theta = 0$ ток вообще равен нулю (нелинейный элемент заперт на протяжении всего периода); при $\theta = 180°$ отсечка тока отсутствует и режим работы становится линейным.

Из рассмотрения графиков функций $\alpha_n(\theta)$ можно вывести важное заключение: при работе с углом отсечки меньше 180° отношение амплитуды первой гармоники I_1 к постоянной составляющей I_0 больше единицы. Видно, что с уменьшением θ отношение

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{I_1}{I_0} = \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\sin\theta - \theta\cos\theta} \tag{8.27}$$

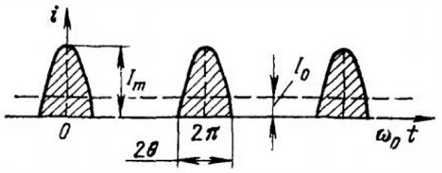


Рис. 8.11. Импульсный ток, соответствующий режиму, представленному на рис. 8.10

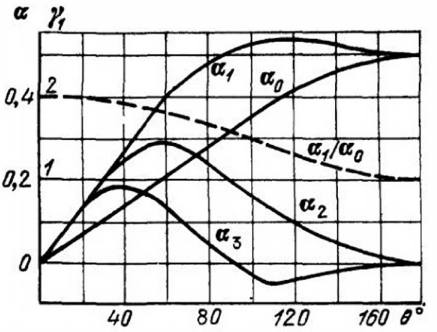


Рис. 8.12. Коэффициенты разложения импульсного тока в ряд Фурье в зависимости от угла отсечки θ →

растет. Кроме того, с повышением номера гармоники максимумы функций $\alpha_n(\theta)$ перемещаются в область малых значений θ. Все эти обстоятельства существенно влияют на выбор режима работы нелинейного элемента при усилении колебаний, умножении частоты и при некоторых других преобразованиях, которые изучаются в последующих параграфах данной главы.

8.4. ВОЗДЕЙСТВИЕ БИГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ НА НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗИСТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Представим колебание в виде суммы

$$e_s(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + E_2 \cos(\omega_2 t - \theta_2) = E_1 \cos\psi_1(t) + E_2 \cos\psi_2(t). \quad (8.28)$$

Подстановка (8.28) в ряд (8.8) приводит к следующим результатам: для линейного члена ряда

$$a_1 e_s(t) = a_1 E_1 \cos\psi_1(t) + a_2 E_2 \cos\psi_2(t); \quad (8.29)$$

для квадратичного члена ряда

$$a_2 e_s^2(t) = a_2 [E_1 \cos\psi_1(t) + E_2 \cos\psi_2(t)]^2 = a_2 E_1^2 \cos^2\psi_1(t) + a_2 E_2^2 \times$$
$$\times \cos^2\psi_2(t) + 2a_2 E_1 E_2 \cos\psi_1(t) \cos\psi_2(t) = {}^1/_2 a_2 (E_1^2 + E_2^2) + {}^1/_2 a_2 E_1^2 \times$$
$$\times \cos 2(\omega_1 t + \theta_1) + {}^1/_2 a_2 E_2^2 \cos 2(\omega_2 t + \theta_2) + a_2 E_1 E_2 \{\cos[(\omega_1 + \omega_2) t +$$
$$+ (\theta_1 + \theta_2)] + \cos[(\omega_1 - \omega_2) t + (\theta_1 - \theta_2)]\}. \quad (8.30)$$

Первое слагаемое, не зависящее от времени, определяет приращение *постоянного* тока. Слагаемые с частотами $2\omega_1$ и $2\omega_2$ представляют собой *вторые гармоники* от соответствующих компонентов входного сигнала. Слагаемые же с частотами $\omega_1 + \omega_2$ и $\omega_1 - \omega_2$ представляют *комбинационные* колебания.

Частоты, образуемые квадратичным слагаемым $a_2 e_s^2(t)$, можно записать в форме

$$\omega = m\omega_1 \pm n\omega_2,$$

где коэффициенты m и n могут принимать следующие значения:

$m = 0,\ n = 0 \to \omega = 0,$

$m = 2,\ n = 0 \to \omega = 2\omega_1,$ } гармоники второго порядка;

$m = 0,\ n = 2 \to \omega = 2\omega_2,$ }

$m = 1,\ n = 1 \rightarrow \omega = \omega_1 \pm \omega_2$ — комбинационные частоты второго порядка.

Проделав преобразование, аналогичное (8.30), над кубическим слагаемым $a_3 e_s^3(t)$, убедимся, что это слагаемое вносит в спектр частоты $\omega = m\omega_1 \pm n\omega_2$ при следующих значениях m и n:

$$\left.\begin{aligned} m = 1,\ n = 0 &\rightarrow \omega = \omega_1, \\ m = 0,\ n = 1 &\rightarrow \omega = \omega_2, \end{aligned}\right\}$$ гармоники первого порядка;

$$\left.\begin{aligned} m = 3,\ n = 0 &\rightarrow \omega = 3\omega_1, \\ m = 0,\ n = 3 &\rightarrow \omega = 3\omega_2, \end{aligned}\right\}$$ гармоники третьего порядка;

$$\left.\begin{aligned} m = 1,\ n = 2 &\rightarrow \omega = \omega_1 \pm 2\omega_2, \\ m = 2,\ n = 1 &\rightarrow \omega = 2\omega_1 \pm \omega_2. \end{aligned}\right\}$$ комбинационные частоты третьего порядка.

Приведенных выражений достаточно для установления закономерности образования частот гармоник и комбинационных колебаний при бигармоническом воздействии на нелинейный элемент:

слагаемые ряда (8.8) четной степени привносят в спектр тока гармоники четных порядков [как и в случае воздействия одного гармонического колебания (см. § 8.3)], и, кроме того, комбинационные частоты четных порядков;

слагаемые ряда (8.8) нечетной степени привносят гармоники и комбинационные колебания нечетных порядков.

Из предыдущих выражений видно, что число $p = m + n$ определяет *порядок колебаний*, причем максимально возможный порядок $p_{max} = k$, где k — степень полинома, аппроксимирующего нелинейную характеристику.

Содержание предыдущего и настоящего параграфов показывает, что нелинейная цепь преобразует спектр входного сигнала: возникают гармоники на кратных частотах и различные комбинационные колебания.

Принцип работы ряда радиотехнических устройств основан на использовании тех или иных составляющих спектра тока на выходе безынерционного нелинейного элемента. Обобщенную структурную схему подобных устройств можно представить в виде сочетания нелинейной цепи и линейного фильтра.

На рис. 8.13 изображена схема, соответствующая «развязанным» нелинейному и линейному элементам, когда отсутствует обратная реакция выходного сигнала на ток в нелинейной цепи. На схеме, показанной на рис. 8.14, ток в нелинейной цепи $i_{нл}(t)$ зависит как от входного сигнала $e(t)$, так и от напряжения $u_{вых}(t)$. Нелинейная функция $f(e)$, описывающая характеристику нелинейного элемента, зависит от его устройства и от режима работы. Через $Z(\omega)$ обозначено сопротивление (комплексное) линейной частотно-избирательной цепи. Структура этой цепи, частотная характеристика и полоса пропускания выбираются в зависимости от назначения устройства.

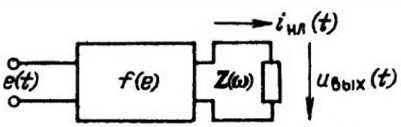


Рис. 8.13. Нелинейный четырехполюсник и избирательная цепь для выделения полезных составляющих спектра

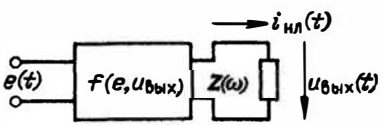


Рис. 8.14. То же, что на рис. 8.13, при наличии обратной реакции

8.5. НЕЛИНЕЙНОЕ РЕЗОНАНСНОЕ УСИЛЕНИЕ

В предыдущих главах линейные усилители трактовались как усилители слабых сигналов, при которых амплитуда переменной составляющей тока I_1 в активном элементе (например, в цепи коллектора транзистора) составляет небольшую долю от постоянного тока I_0, отбираемого от источника питания усилителя. При этом коэффициент полезного действия (КПД), определяемый как отношение мощности выходного сигнала к мощности, потребляемой от источника энергии, весьма мал. (В резонансных усилителях, применяемых в радиоприемных устройствах, отношение I_1/I_0 настолько мало, что вопрос о КПД вообще не принимается во внимание.)

При значительной требуемой мощности сигнала вопрос о КПД усилителя приобретает первостепенное значение, особенно в технике радиопередающих устройств. Повысить отношение I_1/I_0 можно переводом усилителя в режим работы с отсечкой тока, т. е. в нелинейный режим. При этом, естественно, должна быть сохранена структура усиливаемого сигнала.

Рассмотрим сначала гармонический сигнал на входе усилителя. Схема нелинейного резонансного усилителя не отличается от схемы, рассмотренной в гл. 5 (рис. 5.13). Основное отличие — в режиме работы усилительного прибора. Сдвигом рабочей точки на вольт-амперной характеристике влево и увеличением амплитуды входного колебания устанавливается режим работы с отсечкой тока — коллекторного $i_к(t)$ в транзисторном усилителе или анодного $i_а(t)$ в ламповом. Подобный режим представлен на рис. 8.10, *а*.

В дальнейшем рассматриваются особенности нелинейного режима, характерные для любого типа усилителя. Ток $i(t)$ в выходной цепи усилителя при работе с отсечкой имеет импульсную форму (см. рис. 8.11) и содержит наряду с постоянной составляющей и полезной первой гармоникой ряд высших гармоник, которые должны быть подавлены (отфильтрованы). Эту задачу решает параллельный колебательный контур, настроенный на частоту ω_0 входного колебания. При резонансе токов эквивалентное сопротивление параллельного контура $\dot{Z}_{эк\,р}$ между точками *1—2* (см. рис. 5.13) очень велико и является сопротивлением нагрузки усилителя. По отношению же к высшим гармоникам тока $i(t)$ контур, обладающий достаточно большой добротностью Q, можно рассматривать как короткое замыкание. В результате, несмотря на искаженную импульсную форму тока $i(t)$, на нагрузочном контуре, как и в линейном усилителе, выделяется напряжение, очень близкое к гармоническому.

Установим соотношения между напряжениями и токами основной частоты ω_0 в нелинейном усилителе.

В первом приближении, если не учитывать обратной реакции выходного напряжения на ток I_1, т. е. исходить из обобщенной схемы на рис. 8.13, *а*, можно воспользоваться формулой (8.20), которая с учетом (8.26) приводит к выражению

$$I_m = a_1 E\,(1 - \cos\theta) = I_1/\alpha_1(\theta),$$

откуда

$$I_1 = \alpha_1(\theta)\, I_m = \alpha_1(\theta)\,(1 - \cos\theta)\, a_1 E. \tag{8.31}$$

Напомним, что в соответствии с выражением (8.9) коэффициент $a_1 = S$ имеет смысл крутизны вольт-амперной характеристики на линейном участке.

Таким образом,

$$I_1 = \alpha_1(\theta)\,(1 - \cos\theta)\, SE. \tag{8.31'}$$

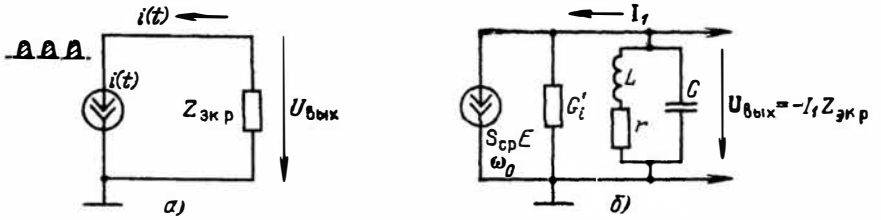


Рис. 8.15. Общая схема замещения выходной цепи усилителя:
а) в режиме с отсечкой тока; *б)* для 1-й гармоники импульсного тока

Схема замещения выходной цепи усилителя представлена на рис. 8.15, *а*. Активный элемент замещается генератором импульсного тока, однако напряжение на резонансном контуре создается только первой гармоникой тока и поэтому определяется выражением

$$u_к(t) = -I_1 Z_{эк\,р} \cos \omega_0 t = U_{вых} \cos \omega_0 t \tag{8.32}$$

(знак минус связан с выбранным на схеме рис. 8.15 направлением тока и отсчетом потенциалов относительно заземленной точки схемы).

Разделив выражение (8.31) на E, получим параметр

$$S_{ср} = I_1/E = a_1(1 - \cos\theta)\alpha_1(\theta) = S(1 - \cos\theta)\alpha_1(\theta), \tag{8.33}$$

который можно трактовать как *среднюю крутизну* характеристики для первой гармоники.

Таким образом,

$$I_1 = S_{ср} E. \tag{8.34}$$

В отличие от дифференциальной крутизны $S = a_1$, которая определяется в точке и поэтому при работе на нелинейном участке характеристики зависит от рассматриваемого момента времени, параметр $S_{ср}$, выраженный через отношение амплитуд тока и напряжения, является как бы усредненным по всему периоду колебания. Понятие средней крутизны имеет смысл, если обеспечивается синусоидальность напряжения на нагрузке (несмотря на сложную форму тока $i(t)$).

При учете влияния выходного напряжения на ток $i(t)$ выражение (8.34) должно быть заменено более точным, аналогичным выражению (5.29):

$$I_1 = S_{ср} E - U_{вых} G_i' = S_{ср} E - U_{вых}/R_i'. \tag{8.34'}$$

Здесь

$$G_i' = 1/R_i' = G_i \alpha_i(\theta)(1 - \cos\theta) \tag{8.35}$$

представляет собой внутреннюю проводимость нелинейного элемента, *приведенную к току первой гармоники*.

Подставляя в (8.34') $I_1 = U_{вых}/Z_{эк\,р}$ и учитывая (8.32), нетрудно получить следующее выражение для коэффициента усиления при работе с отсечкой тока:

$$K_E = \frac{U_{вых}}{E_1} = -\frac{S_{ср} Z_{эк\,р}}{1 + Z_{эк\,р}/R_i'}. \tag{8.36}$$

При $Z_{эк\,р}/R_i' \ll 1$ можно пользоваться приближенной формулой

$$K_E \approx -S_{ср} Z_{эк\,р}. \tag{8.36'}$$

На основании выражения (8.34′) схему замещения выходной цепи усилителя можно привести к виду, представленному на рис. 8.15, *б*, где $U_{вых} = -I_1 Z_{эк\ р}$ обозначает амплитуду напряжения на выходе.

От аналогичной схемы замещения линейного усилителя (см. рис. 5.17, *б*) эта схема отличается тем, что в ней $S_{ср}$ и G_i' являются функциями угла отсечки θ и, следовательно, амплитуды входного напряжения E.

При $\theta = 0$ усилительный прибор полностью заперт и $S_{ср} = 0$. При $\theta = 90°$, когда ток имеет форму полуволновых импульсов, $S_{ср} = {}^1/_2 a_1$, а при $\theta = 180°$ (линейный режим) средняя крутизна $S_{ср}$ стремится к $S = a_1$.

То обстоятельство, что при изменении амплитуды колебаний изменяются параметры $S_{ср}$ и G_i' и, следовательно, нарушается пропорциональность между амплитудами на входе и выходе, заставляет трактовать цепь как нелинейную. Но сохранение формы колебания (гармонического) позволяет трактовать цепь как линейную (при фиксированной амплитуде).

Такой подход к анализу нелинейных устройств получил название к в а з и л и н е й н о г о м е т о д а.

Оценим КПД нелинейного резонансного усилителя. Мощность, выделяемая переменной составляющей тока в колебательном контуре (и расходуемая в сопротивлении r, учитывающем мощность, передаваемую в нагрузку), $P_\sim = {}^1/_2 I_1 U_{вых}$, а мощность, потребляемая от источника постоянного тока, $P_0 = I_0 E_0$. Следовательно,

$$\text{КПД} = \frac{P_\sim}{P_0} = \frac{1}{2}\frac{I_1}{I_0}\frac{U_{вых}}{E_0} = \frac{1}{2}\gamma_1\frac{U_{вых}}{E_0}.$$

Амплитуда напряжения на контуре $U_{вых}$ может быть доведена до значения, близкого к E_0, а отношение токов $I_1/I_0 = \gamma_1$ зависит от угла отсечки θ.

Из графиков на рис. 8.12 следует, что для повышения коэффициента $\gamma_1 = I_1/I_0$ выгодно уменьшать угол отсечки θ. При этом, однако, уменьшается I_1 (при заданной амплитуде импульса I_m), что ведет к уменьшению мощности $P_\sim$ (мощность P_0 уменьшается быстрее, чем $P_\sim$). Поэтому в тех случаях, когда важно максимизировать мощность $P_\sim$, угол отсечки θ доводят до $\sim 120°$, при котором коэффициент $\alpha_1(\theta)$ достигает максимума, мирясь при этом с некоторым снижением КПД.

Такой подход оправдан при постоянной амплитуде входного сигнала. В случае же усиления амплитудно-модулированного колебания выбор угла отсечки должен быть подчинен требованию обеспечения линейной зависимости тока I_1 от амплитуды $E(t)$ входного радиосигнала. Это условие обеспечивается при $\theta = 90°$.

Из рис. 8.10 следует, что при $U_0 = U_1$ изменение амплитуды входного напряжения E приводит лишь к пропорциональному изменению амплитуды импульса тока при сохранении формы импульса. Таким образом, при работе с отсечкой $\theta = 90°$ средняя крутизна не зависит от амплитуды входного сигнала и всегда равна $0{,}5S$. При этом коэффициент первой гармоники $\alpha_1 = I_1/I_m = 0{,}5$ [см. (8.24)], т. е. амплитуда первой гармоники равна половине амплитуды импульса.

При $\theta = 90°$, $\gamma_1 = \pi/2$ и $U_{вых} \approx E_0$ $\text{КПД} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \approx 78\ \%$. (Это максимальный КПД, соответствующий пиковой амплитуде входного колебания; в режиме же несущего колебания КПД снижается до $1/(1+M)$ от максимального значения; M — коэффициент модуляции усиливаемого колебания.)

При угловой модуляции высокочастотного колебания нелинейность режима усиления не оказывает влияния на структуру радиосигнала при любом угле отсечки и любой форме вольт-амперной характеристики (см. § 8.3).

8.6. УМНОЖЕНИЕ ЧАСТОТЫ

Наличие в составе импульсного тока ряда гармоник с частотами, кратными основной частоте возбуждения, позволяет использовать усилитель, работающий с отсечкой тока, в качестве умножителя частоты. Для этого не требуются какие-либо изменения в схеме резонансного усилителя, достаточно лишь нагрузочный колебательный контур настроить на частоту выделяемой гармоники и установить наиболее выгодный для подчеркивания полезной гармоники режим работы активного элемента. Из графиков, изображенных на рис. 8.12, видно, что для удвоения частоты выгодно работать с углом отсечки, близким к 60°, при котором коэффициент второй гармоники проходит через максимум, для утроения частоты — с углом отсечки 40° и т. д.

Если контур настроен на частоту $n\omega_0$, $n = 2, 3, \ldots$, то гармоники тока порядков $n - 1$ и более низких пройдут преимущественно через индуктивную ветвь, а гармоники порядков $n + 1$ и более высоких — через емкостную ветвь контура. При достаточно высокой добротности напряжение на контуре от всех гармоник, за исключением n-й, очень мало. Поэтому напряжение на контуре близко к гармоническому с частотой $n\omega_0$.

Следует иметь в виду, что для полного использования мощности электронного прибора уменьшение угла отсечки должно осуществляться при поддержании амплитуды импульса неизменной. Для этого одновременно с изменением смещения $|U_0|$ нужно увеличивать амплитуду переменного напряжения на входе E. На рис. 8.16 углу $\theta = 90°$ соответствует смещение U_{01}, углу $\theta = 60°$ — смещение U_{02} и т. д.; амплитуды E_1, E_2, ... выбраны такими, что I_m остается неизменной. Можно поэтому считать, что для умножителя частоты характерен режим работы с большими амплитудами входного напряжения.

Это обстоятельство наряду с уменьшением полезной мощности при повышении порядка умножения из-за убывания коэффициентов α_n (см. рис. 8.12) существенно ухудшает энергетические соотношения в умножителях.

Схема замещения умножителя частоты внешне не отличается от схемы замещения нелинейного усилителя (см. рис. 8.15, *б*). Следует лишь по аналогии с выражением (8.33) под средней крутизной подразумевать

$$S_{ср} = I_n/E = S\,(1 - \cos\theta)\,\alpha_n, \qquad (8.37)$$

где коэффициент n-й гармоники α_n определяется формулой (8.26).

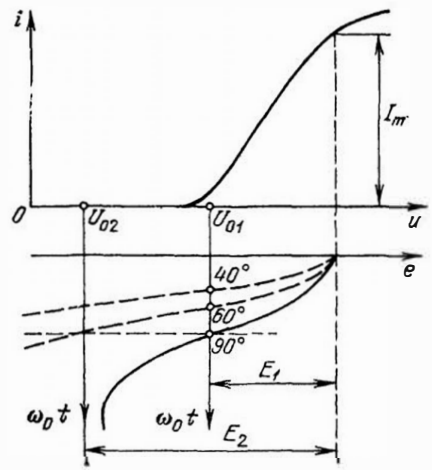
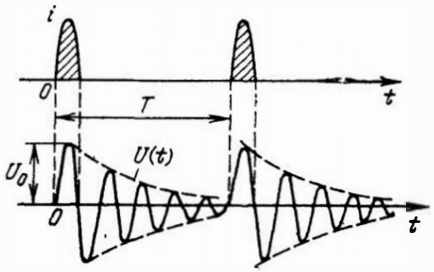


Рис. 8.16. К выбору угла отсечки в умножителе частоты при различных коэффициентах умножения

Рис. 8.17. Напряжение на выходе умножителя частоты при недостаточно высокой добротности резонансной цепи



Соответственно и внутреннее сопротивление электронного прибора, приведенное к используемой гармонике,

$$R_i' = R_i/\alpha_n (1 - \cos\theta). \qquad (8.38)$$

Умножение частоты широко применяется в радиопередающих устройствах с кварцевой стабилизацией частоты задающего генератора. Частота этого генератора выбирается относительно невысокой, в 4—12 раз меньшей рабочей частоты передатчика, благодаря чему создаются благоприятные условия для использования пьезоэлектрического эффекта кварцевой пластинки. Умножение частоты осуществляется в последующих каскадах передатчика на малой мощности. Чаще всего применяется удвоение, реже утроение частоты в одном каскаде.

Умножение частоты широко используется также в ряде измерительных устройств, когда требуется получить сетку частот, кратных какой-либо одной определенной частоте, рассматриваемой в качестве опорной. В подобных устройствах используется электронный прибор, работающий с очень малым углом отсечки. Подавая на вход достаточно большое переменное напряжение (при большом смещении), можно получить ток в виде последовательности весьма острых импульсов. Такой ток богат гармониками, образующими очень широкий линейчатый спектр. При воздействии этого спектра на контур напряжение на последнем может сильно отличаться от синусоидального, так как в полосу прозрачности контура попадает ряд гармоник. В подобных случаях напряжение на контуре часто удобно определять исходя не из спектрального представления импульсного тока, а из рассмотрения свободных колебаний, возбуждаемых каждым из импульсов тока в отдельности (рис. 8.17). В промежутке T между двумя импульсами тока амплитуда напряжения на контуре убывает по закону

$$U(t) = U_0 e^{-\alpha t} = U_0 e^{-\omega_{св} t/2Q},$$

где $\omega_{св}$ — частота свободных колебаний в контуре; Q — добротность.

Если к началу следующего импульса колебание, вызванное предыдущим импульсом, не успевает полностью затухнуть, необходимо учитывать наложение свободных колебаний. При расчете и проектировании умножителя частоты приходится учитывать деформацию импульсов тока, обусловленную нелинейностью внутренних сопротивлений усилительного прибора. Эта деформация проявляется в приборах полупроводникового типа.

Умножение частоты возможно также и с помощью реактивных нелинейных элементов, например варакторов. Этот вопрос рассматривается в § 8.15.

8.7. АМПЛИТУДНОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ

В радиотехнике часто возникает необходимость устранить нежелательные изменения амплитуды высокочастотного колебания, возникающие из-за накладки помех на радиосигнал, при передаче частотно-модулированных колебаний через избирательные цепи и т. д.

Для этого широко используются амплитудные ограничители, представляющие собой сочетание нелинейного элемента и избирательной нагрузки. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента должна иметь четко выраженную горизонтальную часть, а полоса пропускания избирательной цепи должна быть не шире той, которая требуется для передачи информации, содержащейся в частоте (или фазе) ограничиваемого колебания. В качестве амплитудного ограничителя может быть использован, в частности, обычный нелинейный резонансный усилитель, рассмотренный в § 8.5, в режиме работы, показанном на рис. 8.18.

Пусть к ограничителю подводится колебание вида

$$e\ (t) = E(t)\ \cos\ [\omega_0 t + \theta\ (t)], \tag{8.39}$$

причем изменение огибающей $E\ (t)$ является нежелательным, паразитным фактором. Если это изменение не выходит за пределы горизонтального участка характеристики $i = f\ (u)$, как это показано на рис. 8.18, то импульсы тока имеют одинаковую амплитуду, независимо от $E\ (t)$. Несколько изменяется лишь ширина вершины импульсов. Поэтому можно в первом приближении считать, что амплитуда первой гармоники, а следовательно, и амплитуда напряжения на колебательном контуре являются в некотором интервале изменения амплитуды $E\ (t)$ *постоянными* величинами.

Характеристику ограничителя с избирательной нагрузкой, обеспечивающей отфильтровывание высших гармоник, можно представить в виде, изображенном на рис. 8.19. Через $E_{пор}$ обозначено пороговое значение амплитуды входного напряжения, начиная с которого обеспечивается полное ограничение на уровне U_0.

При $E\ (t) > E_{пор}$ амплитуда на выходе почти не изменяется. Фаза же первой гармоники тока и соответственно выходного напряжения совпадает с фазой напряжения на входе ограничителя.

Поэтому для выходного напряжения можно написать следующее выражение:

$$u_{вых}\ (t) \approx U_0 \cos\ [\omega_0\ t + \theta\ (t)]. \tag{8.40}$$

Амплитуда выходного напряжения U_0 определяется параметрами нелинейного элемента и избирательной нагрузки. Для схемы, изображенной на рис. 8.15, *б*, $U_0 = I_1 Z_{эк\ р}$, где I_1 — амплитуда первой гармоники, определяемая с учетом уплощения вершины импульса, а $Z_{эк\ р}$ — эквивалентное резонансное сопротивление контура.

Для ряда практических задач особый интерес представляет воздействие на амплитудный ограничитель двух сигналов с близкими частотами.

Пусть, например, определяемое выражением (8.39) напряжение $e\ (t)$ является суммой двух гармонических колебаний:

$$e\ (t) = E_1 \cos\ \omega_1 t + E_2 \cos\ \omega_2 t, \quad E_2 < E_1. \tag{8.41}$$

Каждое из этих напряжений, действуя отдельно, создает на выходе ограничителя простое гармоническое колебание с частотой ω_1 (или ω_2) и с

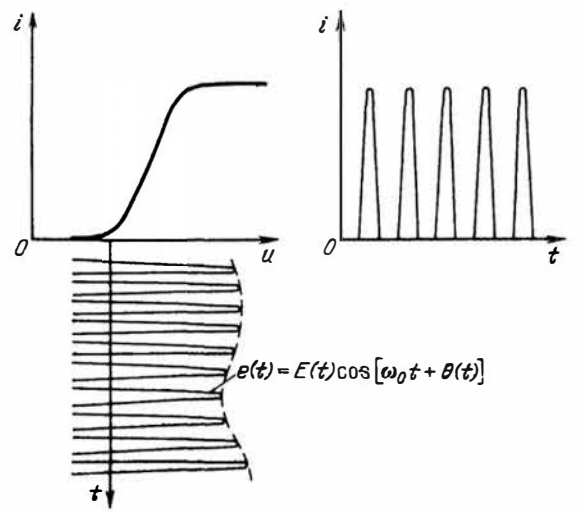
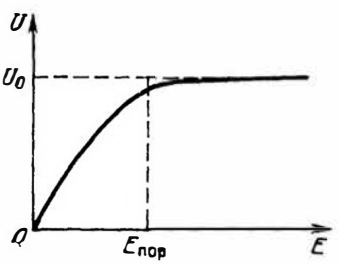


Рис. 8.18. Режим работы ограничителя амплитуды

Рис. 8.19. Характеристика резонансного ограничителя



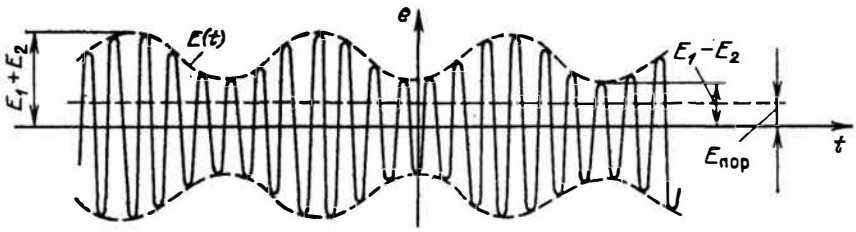


Рис. 8.20. Бигармоническое напряжение на входе амплитудного ограничителя

амплитудой U_0. Иная картина получается при одновременном воздействии на ограничитель двух гармонических напряжений. Для определения напряжения на выходе ограничителя входное колебание необходимо привести к виду выражения (8.39).

Для этого обозначим $\Omega = \omega_2 - \omega_1$ и сделаем в (8.41) следующую подстановку:

$$\cos \omega_2 t = \cos (\omega_1 + \Omega)\, t = \cos \Omega t \cos \omega_1 t - \sin \Omega t \sin \omega_1 t.$$

Тогда

$$e(t) = E_1 \cos \omega_1 t + E_2 (\cos \Omega t \cos \omega_1 t - \sin \Omega t \sin \omega_1 t) = (E_1 + E_2 \cos \Omega t) \cos \omega_1 t - E_2 \sin \Omega t \sin \omega_1 t.$$

Рассматривая множители при $\cos \omega_1 t$ и $\sin \omega_1 t$ как медленно меняющиеся функции времени (поскольку $\Omega \ll \omega_1$), представим последнее выражение в несколько иной форме

$$e(t) = \sqrt{(E_1 + E_2 \cos \Omega t)^2 + E_2^2 \sin^2 \Omega t} \cos [\omega_1 t + \theta(t)] = E(t) \cos [\omega_1 t + \theta(t)], \tag{8.42}$$

где огибающая результирующего напряжения $E(t)$ определяется выражением

$$E(t) = E_1 \sqrt{1 + (2E_2/E_1) \cos \Omega t + (E_2/E_1)^2}, \tag{8.43}$$

а фаза

$$\theta(t) = \operatorname{arctg} \frac{(E_2/E_1) \sin \Omega t}{1 + (E_2/E_1) \cos \Omega t}. \tag{8.44}$$

Суммарное напряжение на входе ограничителя показано на рис. 8.20, а векторная диаграмма напряжений — на рис. 8.21.

Огибающая $E(t)$ имеет максимальное значение, равное $E_1 + E_2$ (при $\cos \Omega t = 1$), и минимальное, равное $E_1 - E_2$ (при $\cos \Omega t = -1$).

Допустим, что $E_1 - E_2 > E_{\text{пор}}$, так что условие ограничения выполняется для всех значений, которые может принимать амплитуда входного напряжения $E(t)$ (см. рис. 8.20). Тогда напряжение на выходе по аналогии с (8.40) можно записать в виде

$$u_{\text{вых}}(t) = U_0 \cos [\omega_1 t + \theta(t)]. \tag{8.45}$$

Получается фазомодулированное колебание, которое в отличие от входного напряжения $e(t)$ может иметь широкий спектр.

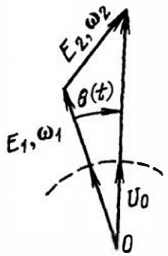


Рис. 8.21. К определению параметров колебания на выходе амплитудного ограничителя

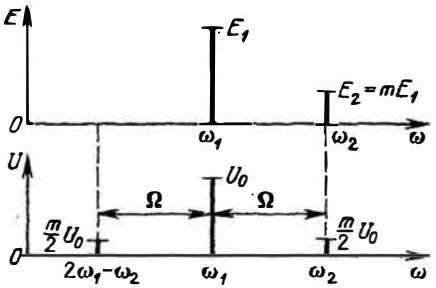


Рис. 8.22. Спектры колебаний на входе и выходе резонансного ограничителя при бигармоническом воздействии

Для определения амплитуд отдельных составляющих этого спектра можно воспользоваться теорией частотно-модулированных колебаний, изложенной в гл. 3.

Не приводя здесь подробного анализа, облегчаем задачу, допустив, что $E_2 \ll E_1$. При этом выражение (8.44) упрощается:

$$\theta(t) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{E_2}{E_1}\sin\Omega t\right) \approx \frac{E_2}{E_1}\sin\Omega t,$$

напряжение на выходе

$$u_{\text{вых}}(t) \approx U_0 \cos(\omega_1 t + m\sin\Omega t). \tag{8.46}$$

Здесь использовано обозначение

$$m = E_2/E_1 \ll 1, \tag{8.47}$$

которое подчеркивает, что отношение амплитуд E_2/E_1 имеет в данном случае смысл индекса фазовой модуляции (см. § 3.4).

Выражение (8.46) полностью совпадает с (3.25′), из чего следует, что спектр выходного напряжения при $E_2/E_1 \ll 1$ состоит из трех составляющих с частотами ω_1, $\omega_1 + \Omega = \omega_2$ и $\omega_1 - \Omega = 2\omega_1 - \omega_2$ (см. рис. 3.15, *а*). Первые две частоты присутствуют на входе ограничителя, а третья ($2\omega_1 - \omega_2$) является продуктом взаимодействия входных колебаний в нелинейном элементе. Соотношение спектров на входе и выходе ограничителя при $E_2/E_1 \ll 1$ показано на рис. 8.22 (без учета знака минус перед спектральной составляющей $2\omega_1 - \omega_2$). Частота $2\omega_1 - \omega_2$ является «зеркальной» по отношению к частоте ω_2.

Колебания с частотами $\omega_1 \pm \Omega$ представляют собой помеху на выходе ограничителя, а колебание с частотой ω_1 — полезный сигнал. Суммарная мощность помехи $2\frac{m^2}{4}\left(\frac{U_0^2}{2}\right) = m^2U_0^2/4$, а полезного сигнала $U_0^2/2$, следовательно, отношение сигнал-помеха равно $2/m^2$. На входе ограничителя аналогичное отношение равно $1/m^2$. Таким образом, слабое колебание подавляется более сильным.

В заключение следует отметить, что приведенные выше рассуждения справедливы и для $\omega_2 < \omega_1$; необходимо лишь на рис. 8.22 поменять местами зеркальные частоты.

8.8. НЕЛИНЕЙНАЯ ЦЕПЬ С ФИЛЬТРАЦИЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА (ВЫПРЯМЛЕНИЕ)

Рассмотрим нелинейную цепь, изображенную на рис. 8.23. К последовательному соединению нелинейного элемента VD (диода) с простейшим RC-фильтром приложена гармоническая ЭДС $e(t) = E\cos\omega_0 t$; требуется найти токи в ветвях и напряжение $u_{вых}$ на выходе схемы (в стационарном режиме). Такая задача характерна для однополупериодного выпрямления переменного тока, амплитудного детектирования (в отсутствие модуляции) и многих других радиотехнических процессов. Напряжение на выходе $u_{вых}(t)$ представляет собой пульсирующую около среднего значения U_0 кривую (рис. 8.24, *а*). Это напряжение является отрицательным по отношению к диоду. Поэтому ток через диод возможен только в течение отрезков периода, когда положительная полуволна ЭДС превышает напряжение $u_{вых}(t)$. Иными словами, ток через диод имеет форму импульсов, показанных на рис. 8.24, *б*. В промежутках между импульсами тока, когда происходит разряд конденсатора C через резистор R, напряжение $u_{вых}(t)$ убывает. В промежутке $t_1 < t < t_2$ конденсатор подзаряжается импульсом тока и $u_{вых}(t)$ растет. Если постоянная времени RC-цепи велика по сравнению с периодом $T = 2\pi/\omega_0$, то амплитуда пульсаций напряжения $u_{вых}$ мала и в первом приближении можно считать $u_{вых} \approx U_0$. Учитывая, что по отношению к диоду напряжение на нагрузке отрицательно, рассмотрим построение, показанное на рис. 8.25. В левой части этого рисунка сплошной линией изображена истинная вольт-амперная характеристика диода в координатах i, u, а штриховой линией — аппроксимирующая ее линейная функция. Диаграмма входной ЭДС $e(t) = E\cos\omega_0 t$ построена относительно вертикальной оси $\omega_0 t$, смещенной на U_0 влево от точки $u = 0$. В правой части рис. 8.25 изображены импульсы тока, длительность которых равна 2θ.

От построения на рис. 8.10 последнее отличается отсутствием фиксированного постоянного напряжения. Следует обратить особое внимание на то, что постоянное напряжение U_0, создаваемое на нагрузочном резисторе R постоянной составляющей тока I_0, зависит от амплитуды E входного колебания. Из этого, в частности, вытекает, что *угол отсечки* θ *не может быть более* 90°.

Для установления связи между амплитудой входного напряжения E и выпрямленным напряжением U_0 при заданных параметрах цепи воспользуемся результатами спектрального анализа импульсного тока, проведенного в § 8.3.

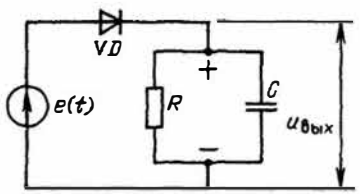


Рис. 8.23. Однополупериодный выпрямитель

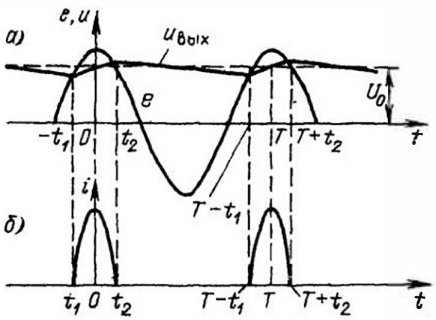


Рис. 8.24. Напряжения на входе и выходе однополупериодного выпрямителя (*а*) и ток в цепи диода (*б*) →

Сначала допустим, что угол отсечки тока θ известен. Тогда можно составить следующие соотношения:

$$I_0 = \alpha_0(\theta)\, I_m, \tag{8.48}$$

$$\cos\theta = U_0/E. \tag{8.49}$$

Последнее соотношение вытекает непосредственно из рис. 8.25. Далее, при заданном внутреннем сопротивлении диода R_i очевидно равенство

$$I_m = (E - U_0)/R_i = E\,(1 - U_0/E)/R_i. \tag{8.50}$$

Подставив в это выражение (8.48) и (8.49), получим

$$\frac{I_0}{\alpha_0(\theta)} = \frac{E\,(1-\cos\theta)}{R_i} = \frac{U_0}{\cos\theta}\,\frac{(1-\cos\theta)}{R_i},$$

откуда

$$\frac{I_0}{U_0} = \frac{1}{R} = \frac{\alpha_0(1-\cos\theta)}{\cos\theta}\,\frac{1}{R_i} \tag{8.51}$$

и окончательно, учитывая первое равенство (8.26), имеем

$$\frac{R_i}{R} = \frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\pi\cos\theta} = \frac{\operatorname{tg}\theta - \theta}{\pi}. \tag{8.52}$$

Итак, задание внутреннего сопротивления диода R_i и сопротивления нагрузки R однозначно определяет угол отсечки θ. При этом предполагается, что емкость C, шунтирующая сопротивление R, отвечает условию

$$1/\omega_0 C \ll R, \tag{8.53}$$

или, что то же самое, постоянная времени RC велика по сравнению с периодом T_0, так как только в этом случае напряжение на выходе можно считать близким к постоянному.

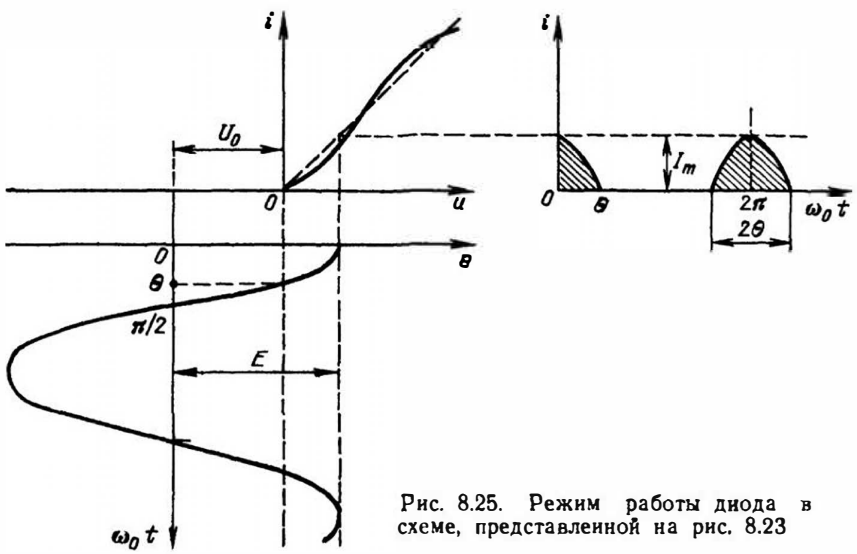


Рис. 8.25. Режим работы диода в схеме, представленной на рис. 8.23

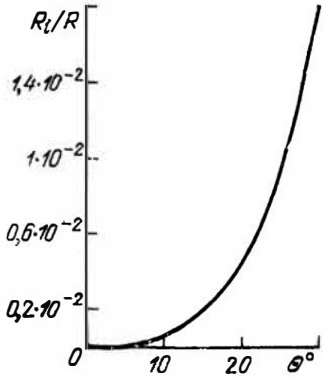


Рис. 8.26.

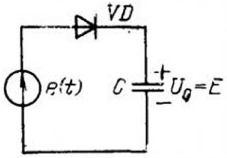


Рис. 8.27.

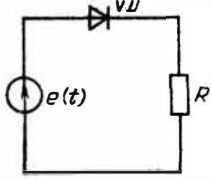


Рис. 8.28.

Рис. 8.26. Характеристика R_i/R в зависимости от угла отсечки θ

Рис. 8.27. Схема замещения выпрямителя в режиме холостого хода ($R\to\infty$; $\theta\to0$)

Рис. 8.28. Схема замещения выпрямителя при $R\ll R_i$, $\theta\to90°$

Уравнение (8.52), связывающее угол отсечки θ с отношением R_i/R, является трансцендентным. Поэтому θ удобно определять по графику, представляющему собой зависимость отношения R_i/R от θ (рис. 8.26). Рассмотрим два предельных случая: 1) $\theta = 0$ и 2) $\theta = 90°$. Первый случай получается при $R_i/R \to 0$, т. е. при бесконечно большом сопротивлении нагрузки R, когда схема детектора вырождается в схему, представленную на рис. 8.27. При этом выпрямленное напряжение на C достигает наибольшего возможного значения $U_0 = E$ и ток через диод в установившемся режиме, когда закончен процесс зарядки конденсатора, равен нулю. Таким образом, случай $\theta = 0$ соответствует режиму холостого хода. Второй случай ($\theta = 90°$) соответствует режиму короткого замыкания нагрузки ($R \to 0$). При этом вся ЭДС оказывается приложенной к диоду и ток последнего принимает форму полуволновых импульсов (усеченных в верхней части, если E больше, чем напряжение насыщения диода).

Если действие емкости не учитывать, что допустимо при малых R, приходим к схеме, представленной на рис. 8.28. Напряжение на резисторе R совпадает в этом случае по форме с током i.

Итак, для получения на выходе выпрямленного напряжения, близкого к амплитуде ЭДС E, угол отсечки должен быть малым, а отношение R/R_i большим. При $\theta \leqslant 10 - 20°$ отношение $U_0/E = \cos\theta$ близко к единице. Для получения такого режима требуется сопротивление нагрузки $R \approx \approx 100\,R_i$. После того как найдено R, требуемую емкость конденсатора C можно определить в соответствии с условием (8.53).

В заключение отметим, что условие (8.53) может быть истолковано на основе спектрального подхода. При $1/\omega_0 C \ll R$ все гармоники импульсного тока протекающего через диод, замыкаются в основном через конденсатор, не создавая на нем заметного падения напряжения (по сравнению с $U_0 = I_0 R$). В результате получается распределение тока, представленное на рис. 8.29. Показанный в нижней части рисунка ток, полученный вычитанием постоянной составляющей I_0 из полного тока диода $i(t)$, является суммой всех гармоник этого тока.

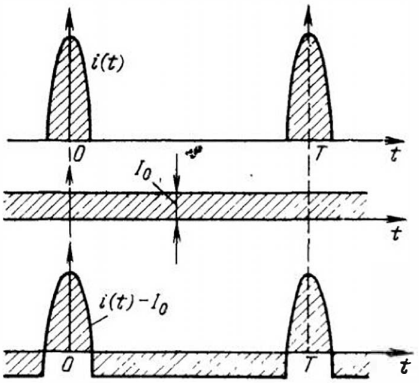


Рис. 8.29. Импульсный ток в цепи диода и его составляющие

8.9. АМПЛИТУДНОЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЕ

Детектирование колебаний заключается в выделении сигнала, который в неявной форме содержится в модулированном высокочастотном колебании. Детектирование является процессом, обратным процессу модуляции. В тех случаях когда требуется подчеркнуть это, наряду с термином «детектирование» (обнаружение) применяют термин «демодуляция». Соответственно основным видам модуляции различают амплитудное, частотное и фазовое детектирование. Последние два вида детектирования из-за тесной связи между частотой и фазой колебаний часто осуществляются мало различающимися устройствами.

На вход детектора подается модулированное колебание, содержащее только высокочастотные составляющие: несущее колебание и колебания боковых частот. На выходе же выделяется напряжение с низкочастотным спектром передаваемого сообщения. Следовательно, детектирование сопровождается трансформацией частотного спектра и не может быть осуществлено без применения нелинейных цепей или линейных цепей с переменными параметрами. В качестве нелинейных элементов в настоящее время чаще всего применяются полупроводниковые диоды.

Принцип действия амплитудного детектора в отсутствие модуляции был изложен в предыдущем параграфе при рассмотрении выпрямления. Теперь предстоит рассмотреть некоторые явления в детекторе при модулированном колебании, а также особенности детектирования слабых и сильных сигналов. Обратимся сначала к последнему вопросу. Допустим, что амплитуда колебания на входе детектора настолько мала, что обусловленные этим колебанием изменения тока укладываются на относительно небольшом участке нижнего сгиба характеристики диода или любого другого нелинейного элемента (рис. 8.30).

В соответствии с выражением (8.10) ток через диод

$$i(t) = i(U_0) + a_1 e(t) + a_2 e^2(t),$$

где $e(t) = E(t)\cos\omega_0 t$ — мгновенное значение высокочастотного сигнала, амплитуда которого $E(t)$ модулирована по закону передаваемого сообщения (начальную фазу для краткости опустим, так как на работу амплитудного детектора фаза не влияет). Таким образом,

$$i(t) = i(U_0) + a_1 E(t)\cos\omega_0 t + a_2 E^2(t)\cos^2\omega_0 t = i_0 + a_1 E(t)\cos\omega_0 t + \tfrac{1}{2} a_2 E^2(t)\cos 2\omega_0 t + \tfrac{1}{2} a_2 E^2(t). \quad (8.54)$$

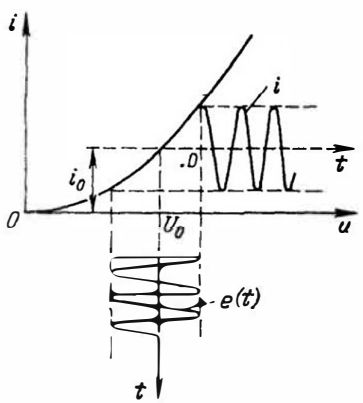


Рис. 8.30. Режим работы квадратичного детектора

Высокочастотные составляющие ω_0 и $2\omega_0$ отфильтровываются в цепи нагрузки. Информация содержится в последнем, низкочастотном, слагаемом

$$i_{нч} = \tfrac{1}{2} a_2 E^2(t). \quad (8.55)$$

Так как эта составляющая пропорциональна квадрату амплитуды входного напряжения, то *при малых амплитудах детектирование является квадратичным*. Это положение является общим, справедливым для любых типов нелинейных элементов, используемых для детектирования.

То обстоятельство, что напряжение $u_{вых}(t)$ на нагрузке, являющейся линейной цепью, пропорционально $i_{нч}$ и, следовательно,

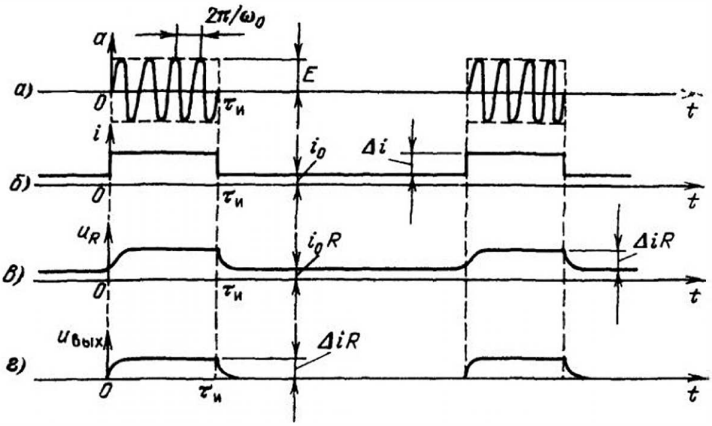


Рис. 8.31. Напряжение на входе квадратичного детектора (*а*) постоянная составляющая тока в цепи диода (*б*), напряжение на резисторе R (*в*) и приращение напряжения, обусловленное действием входного сигнала (*г*)

квадрату амплитуды входного сигнала $E(t)$, не является препятствием к правильному воспроизведению формы импульсных (прямоугольных) сигналов. Пусть, например, напряжение на входе детектора имеет характер высокочастотных импульсов с прямоугольной огибающей (рис. 8.31, *а*). В интервалах между импульсами среднее значение тока диода (рис. 8.31, *б*) совпадает с током покоя i_0, а при наличии импульсов отличается на величину

$$\Delta i = {}^1{}_2\, a_2 E^2,$$

где E — амплитуда высокочастотного напряжения, неизменная в пределах длительности импульса $\tau_и$.

Напряжение $u_R(t)$ на нагрузке детектора показано на рис. 8.31, *в*. В те отрезки времени, когда процесс заряда или разряда конденсатора C закончен, напряжение на нагрузке равно i_0R (в интервале между импульсами) или $(i_0 + \Delta i)R$ (при наличии сигнала). На рис. 8.31, *г* показано отдельно приращение напряжения, создаваемое сигналом. Для отделения этого приращения от постоянного напряжения i_0R можно использовать разделительную цепь, составленную из конденсатора и резистора.

Представленное на рис. 8.31, *г* выходное напряжение $u_{вых}(t)$ по форме мало отличается от огибающей высокочастотного напряжения, действующего на входе детектора. Таким образом, убеждаемся, что квадратичный закон детектирования не препятствует воспроизведению формы прямоугольных импульсов. Нелинейность характеристики детектирования в данном случае проявляется лишь в том, что *амплитуда импульса на выходе детектора пропорциональна квадрату амплитуды высокочастотного напряжения на входе детектора.*

Иначе обстоит дело при квадратичном детектировании колебаний, огибающая которых является непрерывной функцией времени, как это имеет место, например, при передаче речи, музыки и т. д. Для упрощения рассуждений рассмотрим тональную модуляцию. Подставив в выражение (8.55)

$$E(t) = E_0(1 + M\sin\Omega t),$$

получим

$$i_{нч} = \frac{a_2}{2} E_0^2 (1 + M\sin\Omega t)^2 = \frac{a_2}{2} E_0^2 (1 + 2M\sin\Omega t + M^2\sin^2\Omega t) =$$

$$= \frac{a_2}{2} E_0^2 \left(1 + \frac{M^2}{2} + 2M\sin\Omega t - \frac{M^2}{2}\cos 2\Omega t\right).$$

Рис. 8.32. Режим детектирования АМ колебания при больших амплитудах («линейное» детектирование)

Заметим, что в отсутствие модуляции ($M = 0$), т. е. когда на детектор действует одно лишь колебание несущей частоты, приращение тока равно $(a_2/2)\,E_0^2$. Таким образом, при возникновении тональной модуляции среднее значение тока получает постоянное по величине относительное приращение, равное $M^2/2$. Переменная часть тока содержит следующие два слагаемых:

а) полезное, воспроизводящее сигнал $2M\sin\Omega t$, б) вредное, являющееся второй гармоникой сигнала $(M^2/2)\cos 2\Omega t$.

Отсюда следует, что коэффициент гармоник, равный в данном случае отношению амплитуды второй гармоники к амплитуде первой,

$$K_{г2} = 0{,}5M^2/2M = M/4.$$

При 100 %-ной модуляции

$$K_{г2} = 0{,}25 = 25\ \%.$$

При одновременной модуляции двумя частотами Ω_1 и Ω_2 в выходном напряжении детектора наряду с гармониками $2\Omega_1$ и $2\Omega_2$ возникают еще комбинационные частоты вида $\Omega_1 + \Omega_2$ и $\Omega_1 - \Omega_2$ с амплитудами, пропорциональными произведению парциальных коэффициентов модуляции M_1 и M_2. Этот результат нетрудно получить, если в выражение (8.54) подставить

$$E(t) = E_0(1 + M_1\sin\Omega_1 t + M_2\sin\Omega_2 t).$$

При передаче сложных сигналов, содержащих большое число частот, гармоники и комбинационные частоты оказывают при глубокой модуляции очень сильное влияние на разборчивость и тембр сигнала. Поэтому применение квадратичного детектирования нецелесообразно в тех случаях, когда требуется неискаженное воспроизведение сигналов (речь, музыка и т. д.)

Рассмотрим детектирование сильных сигналов. Как и ранее, применим диодный детектор. Не изменяя схемы, представленной на рис. 8.23, допустим, что амплитуда входного сигнала достаточно велика, а R и C выбраны таким образом, что угол отсечки тока очень мал и выпрямленное напряжение на R почти не отличается от амплитуды $E(t)$ входного сигнала. Подобный режим для постоянной амплитуды (выпрямление) был рассмотрен в § 8.8. При модуляции же получается режим работы диода, изображенный на рис. 8.32. Напряжение смещения, создаваемое постоянной составляющей тока, изменяется пропорционально амплитуде входного сигнала. Но изменяющееся напряжение смещения диода есть не что иное, как выходное напряжение детектора. На рис. 8.33, *а* совмещены входное (высокочастотное) и выходное (выпрямленное) напряжения (зубчатая линия). Так как при достаточно большой (по сравнению с периодом высокой частоты $T = 2\pi/\omega_н$) постоянной времени RC зубцы практически отсутствуют, напряжение на выходе воспроизводит огибающую амплитуд входного напряжения, т. е. передаваемое сообщение.

Таким образом, связь между выходным напряжением (выпрямленным) $u_{вых}(t)$ и огибающей входной ЭДС $E(t)$ получается почти линейной.

В этом смысле детектор, работающий в режиме больших амплитуд и с нагрузкой, обеспечивающей близкое совпадение напряжений $u_{вых}(t)$ и $E(t)$, называется линейным детектором. При этом не следует, конечно, упускать из виду, что детектор, работающий с отсечкой тока, является *сугубо нелинейным устройством*. Эта нелинейность обусловлена формой характеристики не только в области $u > 0$ (где характеристика может быть близка к линейной), но и на протяжении всей области действующих на диоде напряжений. При работе с отсечкой характеристика диода представляет собой ломаную линию, состоящую из участка оси абсцисс (при $u < 0$) и наклонной линии (при $u > 0$), с изломом вблизи точки $u = 0$.

Режим модуляции накладывает на выбор элементов нагрузки детектора дополнительные ограничения. Необходимо, чтобы постоянная времени цепи нагрузки была мала по сравнению с периодом модуляции. В противном случае изменение выпрямленного напряжения на нагрузке может отставать от изменения огибающей входной ЭДС. Подобный режим представлен на рис. 8.33, *б*. На участке *а—б* из-за чрезмерно большой инерционности RC-цепи напряжение $u_{вых}$ отстает в своем росте от огибающей ЭДС. В точке *б*, где $u_{вых}$ и амплитуда модулированной ЭДС уравниваются, ток через диод и рост $u_{вых}$ прекращаются. На участке *б—в* источник ЭДС и диод не оказывают никакого влияния на нагрузочную цепь и в последней происходит разряд C через резистор R. Таким образом, на участке *б—в* напряжение изменяется по экспоненте. Получается *нелинейное искажение сигнала*. Так как эти искажения обусловлены тесным взаимодействием нелинейного элемента (диод) с линейной цепью (RC) степень нелинейных искажений зависит не только от параметров цепи и глубины модуляции, но также и от частоты модуляции. Эти искажения возрастают с повышением частоты, а также глубины модуляции входной ЭДС. Для устранения рассматриваемых искажений необходимо, чтобы $RC \ll 2\pi/\Omega$. Однако для сглаживания высокочастотных пульсаций требуется выполнение неравенства $RC \gg 2\pi/\omega_0$ [см. (8.53)]. Совмещая эти два условия, получаем неравенства

$$2\pi/\omega_0 \ll RC \ll 2\pi/\Omega. \qquad (8.56)$$

Обычно частоты ω_0 и Ω сильно различаются ($\Omega \ll \omega_0$) и условия (8.56) выполняются.

При импульсной модуляции огибающей в правой части неравенства (8.56) вместо периода модуляции $2\pi/\Omega$ следует подставлять длительность

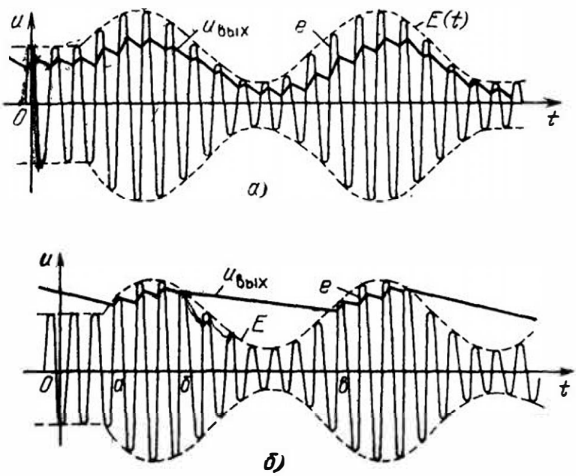


Рис. 8.33. Диаграммы входного и выходного напряжений в «линейном» детекторе при правильном (*а*) и неправильном (*б*) выборе элементов нагрузочной цепи RC

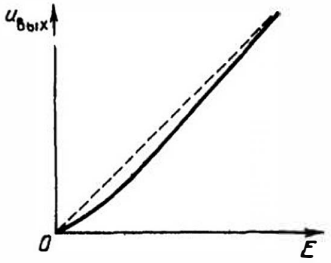


Рис. 8.34. Характеристика детектирования АМ колебания

импульса. При этом предполагается, что интервалы между импульсами велики по сравнению с длительностью импульса. При очень коротких импульсах, длительность которых всего лишь в несколько раз превышает период $T_0 = 2\pi/\omega_0$ («высокочастотный голод»), возникают трудности в разделении огибающей и высокочастотного заполнения.

Выяснив механизм выделения огибающей модулированного колебания, рассмотрим характеристику детектирования, т. е. зависимость $u_{вых}(t)$ от амплитуды $E(t)$ высокочастотного колебания.

В отсутствие модуляции, когда режим работы детектора ничем не отличается от выпрямления высокочастотного колебания с постоянной амплитудой E, соотношение между $u_{вых}$ и E определяется выражением (8.49), т. е. $U_0 = E\cos\theta = \text{const}$. В § 8.8 отмечалось, что угол отсечки θ в выпрямителе весьма мал, так что U_0/E мало отличается от единицы.

В режиме модуляции соотношение между $u_{вых}(t)$ и $E(t)$ не остается постоянным. При модуляции вверх угол отсечки еще более уменьшается и напряжение $u_{вых}(t) \to E(t)$. При модуляции вниз расхождение между $u_{вых}(t)$ и $E(t)$, наоборот, возрастает. При глубине модуляции близкой к 100 %, когда амплитуда $E(t)$ уменьшается почти до нуля (участок *а—б* на рис. 8.32), выпрямление происходит на нижнем сгибе вольт-амперной характеристики. На этом участке характеристика близка к параболе и детектирование является квадратичным. В результате характеристика детектирования принимает вид, представленный на рис. 8.34 (сплошная линия). *При малых амплитудах она квадратична, при больших — линейна.* Чем больше амплитуда входного колебания, соответствующая пику модуляции, тем меньшую роль играет отклонение характеристики детектирования от прямой линии (штриховой) вблизи нуля.

В заключение рассмотрим вопрос о входном сопротивлении диодного детектора, т. е. о сопротивлении последовательной цепи диод — нагрузка (RC). Этот вопрос имеет существенное значение для определения затухания, вносимого детектором в колебательный контур источника напряжения (рис. 8.35, *а*). Ограничимся случаем $R \gg R_i$, когда угол θ настолько мал, что можно считать $\cos\theta \approx 1$ и $E \approx U_0$.

Мощность, забираемая детектором от источника, равна $EI_1/2$, где I_1 — амплитуда первой гармоники тока через диод. Мощность же, выделяемая на сопротивлении нагрузки, равна $U_0 I_0$. При $R \gg R_i$ практически вся мощность, потребляемая детектором, выделяется на R. Поэтому можно приближенно считать

$$EI_1/2 \approx U_0 I_0.$$

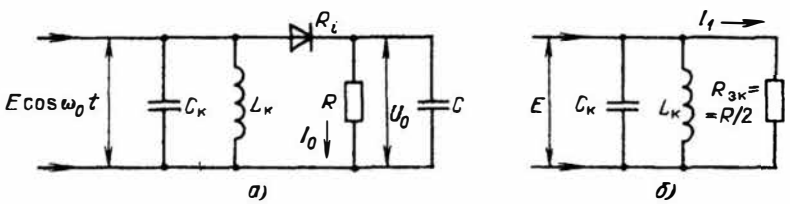


Рис. 8.35. Подключение диодного детектора к колебательному контуру усилителя (*а*) и схема замещения детектора (*б*), позволяющая определить входное сопротивление последнего при частоте ω_0

Поделив левую и правую части на E^2, получим

$$I_1/2E \approx (U_0/E)\,(I_0/E),$$

но

$$U_0/E \approx 1,\ I_0/E = 1/R,\ \text{а}\ I_1/E = 1/R_{эк},$$

где $R_{эк}$ — искомое входное сопротивление детектора.
Отсюда находим

$$R_{эк} \approx 0{,}5R. \tag{8.57}$$

Схема замещения цепи детектора для частоты ω_0 первой гармоники I_1 показана на рис. 8.35, *б*.

Основные принципы амплитудного детектирования с помощью диода можно распространить на любые другие нелинейные элементы, обладающие односторонней проводимостью (вентильным свойством).

8.10. ЧАСТОТНОЕ И ФАЗОВОЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЕ

Входной радиосигнал представим в виде

$$e(t) = E(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)].$$

Для снятия нежелательной АМ обязательно применение амплитудного ограничения. Тогда на входе собственно частотного детектора (ЧД) напряжение будет

$$e(t) = E_0 \cos[\omega_0 t + \theta(t)],\ E_0 = \text{const}. \tag{8.58}$$

Напряжение на выходе ЧД должно воспроизводить закон изменения мгновенной частоты радиосигнала. Поэтому для идеального ЧД получаем следующие функциональные соотношения:

$$u_{вых}(t) = S_{чд}\ d\theta/dt = S_{чд}\,\Delta\omega(t), \tag{8.59}$$

или

$$u_{вых}(t) = S_{чд}\,\Delta f(t), \tag{8.60}$$

где $S_{чд} = \text{const}$ — крутизна характеристики детектора, выраженная в вольтах на единицу угловой частоты [формула (8.59)] или в вольтах на герц [формула (8.60)].

Предполагается, что $\Delta f(t)$, а следовательно, и $u_{вых}(t)$ являются «медленными» функциями времени. Для выделения сообщения из ЧМ колебания, спектр которого состоит только из высокочастотных составляющих (несущая частота и боковые частоты модуляции), необходимо *нелинейное устройство*. Следовательно, частотный детектор обязательно должен включать в себя нелинейный элемент. Однако в этом случае в отличие от амплитудного детектора для образования частот сообщения одного лишь нелинейного элемента недостаточно. В § 8.3 было показано, что при воздействии ЧМ колебания на *безынерционный* нелинейный элемент в спектре тока не возникают составляющие с частотой модуляции. Иными словами, нелинейность такого устройства, как диод, проявляется лишь при изменении действующего на него напряжения, а не при изменении частоты или в общем случае скорости изменения фазы сигнала.

Поэтому для осуществления частотного детектирования требуются дополнительные преобразования. Большое распространение получили, например, частотные детекторы, представляющие собой сочетание двух узлов: 1) избирательной линейной цепи, преобразующей частотную модуляцию в амплитудную; 2) амплитудного детектора.

В качестве линейной цепи можно использовать любую электрическую цепь, обладающую неравномерной частотной характеристикой: цепи *RL*,

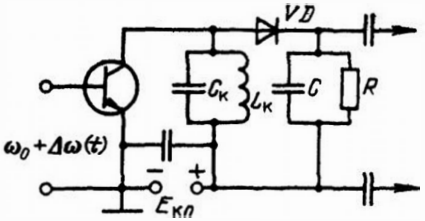


Рис. 8.36. Одноконтурный частотный детектор

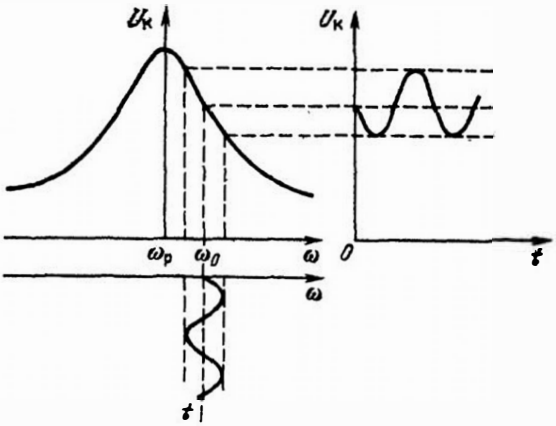


Рис. 8.37. К объяснению работы детектора, представленного на рис. 8.36

RC, фильтры, колебательные контуры и т. д. В высокочастотной технике большое распространение получили колебательные цепи.

Схема частотного детектора, содержащего простой колебательный контур, представлена на рис. 8.36. Если резонансная частота контура $\omega_р$ отличается от средней частоты модулированного колебания ω_0, то изменение амплитуды напряжения на контуре $U_к$ повторяет в известных пределах изменение частоты входного напряжения (рис. 8.37).

Изменение амплитуды $U_к$ высокочастотного напряжения с помощью диода *VD* преобразуется в низкочастотное напряжение, которое выделяется на апериодической нагрузке *RC*. Отметим попутно, что при точной настройке контура на частоту $\omega_р = \omega_0$ сигнал искажается: частота изменения огибающей получается вдвое выше частоты полезной модуляции. В исходном режиме, т. е. при отсутствии модуляции, рабочая точка должна устанавливаться на скате резонансной кривой.

Недостатком рассмотренной схемы является необходимость настройки контура на частоту, отличную от частоты немодулированного колебания. Кроме того, резонансная кривая одиночного колебательного контура имеет весьма ограниченный линейный участок на скате.

На рис. 8.38 представлена схема частотного детектора, широко распространенная в приемниках частотно-модулированных колебаний, а также в устройствах для автоматической подстройки частоты генераторов. Она содержит колебательную цепь в виде двух индуктивно связанных контуров, настроенных на частоту ω_0. Напряжение высокой частоты $\omega_0 \pm \Delta\omega$ подается на базу транзистора, а продетектированное напряжение u_Ω выделяется на резисторах R_1 и R_2. Катушка индуктивности $L_{др}$ (дроссель) преграждает путь току высокой частоты. Принцип действия данного детектора поясняется эквивалентной схемой и векторной диаграммой, представленными на рис. 8.39 и 8.40.

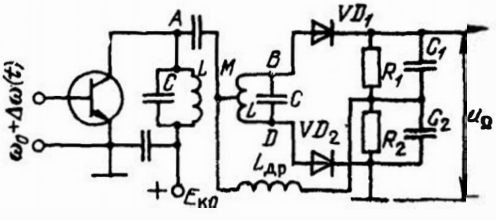


Рис. 8.38. Двухконтурный частотный детектор

Пусть $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ — напряжения на первом и втором контурах, $\mathbf{U}_3$ и $\mathbf{U}_4$ — напряжения в точках *B* и *D* относительно эмиттера (земли). Заметим, что $\mathbf{U}_3$ и $\mathbf{U}_4$ представляют собой амплитуды высокочастотных напряжений, приложенных соответственно к диодам VD_1 и VD_2. В отсутствие модуляции,

когда частота входного напряжения совпадает с резонансными частотами контуров, напряжение $\mathbf{U}_2$ на индуктивности второго контура сдвинуто по фазе на 90° относительно резонансного напряжения $\mathbf{U}_{1p}$.

Действительно, при индуктивной связи двух одинаковых контуров

$$\mathbf{I}_2 = \frac{(M/L)\,\mathbf{U}_{1p}}{Z_2}, \quad \mathbf{U}_2 = \mathbf{I}_2\, i\omega L = \frac{M}{L}\,\frac{i\omega L}{Z_2}\,\mathbf{U}_{1p}. \tag{8.61}$$

Так как при $\omega = \omega_0 = \omega_p$ $Z_2 = r_2$, а $\omega_0 L/r_2 = Q_2$, получаем

$$\mathbf{U}_2 = i\,(M/L)\,Q_2\,\mathbf{U}_{1p}, \tag{8.62}$$

т. е. $\mathbf{U}_2$ опережает $\mathbf{U}_1$ на 90°.

Определим напряжения $\mathbf{U}_3$ и $\mathbf{U}_4$. Учитывая, что на схеме замещения (см. рис. 8.39) средняя точка второго контура присоединена по высокой частоте непосредственно к точке A и, следовательно, напряжение $\mathbf{U}_3$ является суммой напряжения $\mathbf{U}_1$ и половины напряжения $\mathbf{U}_2$, получаем

$$\mathbf{U}_3 = \mathbf{U}_{1p} + \frac{\mathbf{U}_2}{2} = \mathbf{U}_{1p} + i\,\frac{M}{L}\,Q_2\,\frac{\mathbf{U}_{1p}}{2} = \mathbf{U}_{1p}\left(1 + i\,\frac{M}{L}\,\frac{Q_2}{2}\right). \tag{8.63}$$

Аналогично для $\mathbf{U}_4$ можем написать

$$\mathbf{U}_4 = \mathbf{U}_{1p}\left(1 - i\,\frac{M}{L}\,\frac{Q_2}{2}\right). \tag{8.64}$$

Модули напряжений $\mathbf{U}_3$ и $\mathbf{U}_4$ одинаковы и равны

$$U_3 = U_4 = U_{1p}\sqrt{1 + \left(\frac{M}{L}\,\frac{Q_2}{2}\right)^2}, \tag{8.65}$$

а фазы симметричны относительно фазы напряжения $\mathbf{U}_{1p}$. Соответствующая этому случаю векторная диаграмма представлена на рис. 8.40, *а*. Так как выпрямленные напряжения U_{01} и U_{02}, действующие на резисторах R_1 и R_2, пропорциональны амплитудам U_3 и U_4, то результирующее напряжение на выходе детектора, равное разности U_{01} и U_{02}, при резонансной частоте будет равно нулю.

Рассмотрим векторную диаграмму напряжений при расстройке. Пусть частота на входе детектора отклонится от резонансной частоты ω_0 на $\Delta\omega$, причем $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$. Тогда вектор DB, соответствующий напряжению $\mathbf{U}_2$ (см. рис. 8.40, *б*), повернется относительно своего резонансного положения на угол φ_2, который определяется выражением

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\left[(2\Delta\omega/\omega_0)\,Q_2\right] = \operatorname{arctg} a_2. \tag{8.66}$$

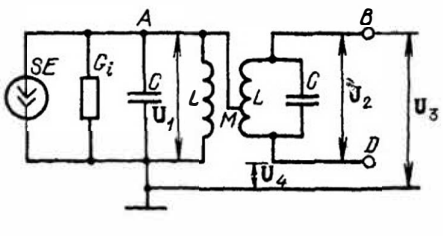


Рис. 8.39. Схема замещения избирательной цепи частотного детектора (к рис. 8.38)

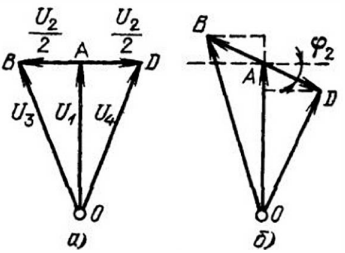


Рис. 8.40. Векторная диаграмма напряжений (к рис. 8.39)

Вместо выражений (8.63) и (8.64) получим

$$\mathbf{U}_3 = \mathbf{U}_1\left[1 + \frac{i\,(M/2L)\,Q_2}{1+ia_2}\right],\quad \mathbf{U}_4 = \mathbf{U}_1\left[1 - \frac{i\,(M/2L)\,Q_2}{1+ia_2}\right].$$

Первый и второй контуры обычно берутся идентичными, поэтому отношение $M/L = k$ является коэффициентом связи контуров. Кроме того, считаем $Q_1 = Q_2 = Q$, $a_1 = a_2 = a$.

Вводя обозначение $\beta = (M/L)\,Q = kQ$ и переходя к модулям, получаем

$$U_3 = \frac{U_1}{2}\frac{\sqrt{4+(\beta+2a)^2}}{\sqrt{1+a^2}},\quad U_4 = \frac{U_1}{2}\frac{\sqrt{4+(\beta-2a)^2}}{\sqrt{1+a^2}}.$$

При определении напряжения на выходе частотного детектора необходимо учитывать, что в процессе частотной модуляции изменяются сопротивления, вносимые из второго контура в первый. Поэтому при неизменной амплитуде тока (промежуточной частоты) в цепи коллектора напряжение U_1 изменяется по закону

$$U_1 = U_{1p}\sqrt{1+a^2}/\sqrt{(1+\beta^2-a^2)^2+4a^2}, \qquad (8.67)$$

где U_{1p} — резонансное значение напряжения U_1.

Наконец, выпрямленные напряжения на выходах двух амплитудных детекторов (см. рис. 8.38) зависят от угла отсечки θ. Практически можно исходить из условия $\cos\theta \to 1$.

С учетом дифференциального включения нагрузок, окончательное выражение для напряжения звуковой частоты на выходе частотного детектора приводится к виду

$$\frac{u_\Omega}{U_{1p}} = \frac{\sqrt{4+(\beta+2a)^2} - \sqrt{4+(\beta-2a)^2}}{2\sqrt{(1+\beta^2-a^2)+4a^2}} = \psi(a). \qquad (8.68)$$

Зависимость $\psi(a)$ для различных значений параметра β представлена на рис. 8.41. Умножая ординаты этих характеристик на U_{1p}, а абсциссы на $f_0/2Q$, получаем характеристику частотного детектора в виде зависимости u_Ω в вольтах от Δf в герцах.

При выборе параметров контуров и величины связи основным требованием является обеспечение линейности характеристики частотного детектора и максимально возможной ее крутизны. С этой точки зрения наиболее

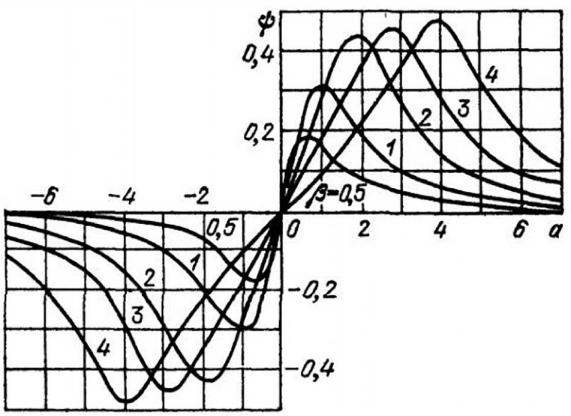


Рис. 8.41. Семейство характеристик двухконтурного частотного детектора:
$a = (2Q/f_0)\Delta f$; $\beta = (M/L)Q$

предпочтительным является параметр связи $\beta = 1$ при использовании характеристики $\psi(a)$ на участке $|a| \leqslant 0{,}5$—$0{,}8$. При этом максимальное значение $\psi(a)$ достигает приблизительно 0,25.

В качестве примера сопоставим приведенные данные с параметрами частотного детектора, используемого в звуковом канале телевизионного приемника. Детектор включен на выходе усилителя промежуточной частоты ($f_0 = 6{,}5$ МГц, полоса пропускания $2\Delta f_0 \approx 250$ кГц) и рассчитан на девиацию частоты $f_д = 75$ кГц. Можно поэтому считать, что $Q \approx f_0/2\Delta f_0 \approx 26$ и максимальное значение обобщенной расстройки (на пиках ЧМ)

$$a_{max} = \frac{2Q}{f_0} f_д = \frac{2 \cdot 26}{6{,}5 \cdot 10^6} 75 \cdot 10^3 \approx 0{,}6,$$

а максимальное значение $\psi(a) \approx 0{,}25$.

Напряжение частоты f_0 на входе частотного детектора обычно близко к 1 В (с учетом амплитудного ограничения). Следовательно, амплитуда напряжения звуковой частоты на выходе частотного детектора $U_Ω = U_{1p} \times \psi(a_{max}) \approx 0{,}25$ В. Таким образом, крутизна характеристики детектора $S_{чд} \approx 0{,}25/75 \approx 3$ мВ/кГц.

Из проведенного рассмотрения видно, что в схеме, представленной на рис. 8.38, осуществляются следующие преобразования: 1) девиация частоты входного колебания преобразуется в девиацию фазы напряжения U_2; 2) девиация фазы напряжения U_2 (относительно фазы U_1) преобразуется в амплитудную модуляцию напряжений, приложенных к диодам; 3) амплитудное детектирование.

В последнее время стали применяться частотные детекторы, в которых преобразование девиации $\Delta\omega(t)$ в девиацию фазы (при сохранении постоянства амплитуды) осуществляется в одиночном контуре, более простом, чем система связанных контуров в схеме на рис. 8.38. Затем ЧМ колебание, сдвинутое по фазе на угол $\varphi_2 = \varphi_2[\Delta\omega(t)]$, а также исходное ЧМ колебание преобразуются в меандровые напряжения, поступающие на схему совпадения (перемножитель). В результате на выходе перемножителя, называемого «детектором произведения», получаются прямоугольные импульсы, длительность которых изменяется пропорционально углу φ_2, а следовательно, и девиации ЧМ колебания.

Дальнейшая миниатюризация ЧД достигается при использовании опорного гетеродина в виде мультивибратора, вырабатывающего стабильное меандровое колебание, с которым исходное ЧМ колебание, также преобразованное в меандр, сравнивается в фазовом детекторе (перемножителе). В результате достигается такой же эффект, что и в описанном выше ЧД, но без колебательного контура. Таким образом, полностью исключаются катушки индуктивности и открывается возможность перехода на интегральные микросхемы.

Рассмотрим теперь принцип работы фазового детектора. Пусть фаза высокочастотного колебания, подлежащего детектированию, изменяется по закону $\theta(t)$. Если такое колебание подать на обычный частотный детектор, реагирующий на изменение мгновенной частоты колебания, то напряжение на выходе детектора

$$u_{вых}(t) = S_{чд} \Delta\omega(t) = S_{чд} \frac{d\theta(t)}{dt}, \qquad (8.69)$$

т. е. выходное напряжение будет пропорционально производной фазы входного колебания. Отсюда видно, что для осуществления фазового детектирования можно использовать обычный частотный детектор. Необходимо лишь дополнить его корректирующей цепью, осуществляющей интегрирование

выходного напряжения, т. е. цепью с частотной характеристикой вида $\dot{K}(i\omega) = 1/i\omega\tau_0$. Простейшие интегрирующие устройства описаны в § 6.5. Подобный прием используется при детектировании колебаний с медленно меняющейся фазой, т. е. когда производная фазы конечна (например, при передаче речи). В случае же скачкообразного изменения фазы, а также при необходимости сравнения фазы принимаемого колебания с фазой опорного (эталонного) колебания применяются специальные фазовые детекторы, в которых выходное напряжение пропорционально огибающей напряжения, получаемого при суммировании колебаний со сравниваемыми фазами. Подобные устройства рассматриваются в специальных курсах.

8.11. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ СИГНАЛА

В радиотехнике часто требуется осуществить сдвиг спектра сигнала по оси частот на определенное постоянное значение при сохранении структуры сигнала. Такой сдвиг называется *преобразованием частоты*.

Для выяснения сути процесса преобразования частоты вернемся к вопросу о воздействии на нелинейный элемент двух напряжений, кратко рассмотренному в § 8.4. Однако в данном случае только одно из колебаний, именно то, которое создается вспомогательным генератором (гетеродином), будем считать гармоническим. Под вторым же колебанием будем подразумевать сигнал, подлежащий преобразованию, который может представлять собой любой сложный, но узкополосный процесс.

Таким образом, на нелинейный элемент воздействуют два напряжения: от гетеродина

$$e_г = E_г \cos(\omega_г t + \theta_г), \tag{8.70}$$

от источника сигнала

$$e_s = E_s(t) \cos\left[\int \omega_s(t)\, dt + \theta_s\right]. \tag{8.71}$$

Амплитуда $E_г$, частота $\omega_г$ и начальная фаза $\theta_г$ гетеродинного колебания — постоянные величины. Амплитуда же $E_s(t)$ и мгновенная частота $\omega_s(t)$ сигнала могут быть модулированными, т. е. могут являться медленными функциями времени (узкополосный процесс). Начальная фаза сигнала θ_s — постоянная величина.

Задачей преобразования частоты является получение суммарной или разностной частоты $\omega_s \pm \omega_г$. Как вытекает из выражения (8.30), для этого необходимо использовать квадратичную нелинейность.

В качестве нелинейного элемента возьмем, как и в § 8.9, диод, однако характеристику его для более полного выявления продуктов взаимодействия сигнала и гетеродинного колебания аппроксимируем полиномом четвертой степени (а не второй, как в § 8.4):

$$\begin{aligned} i &= i_0 + a_1(e_s + e_г) + a_2(e_s + e_г)^2 + a_3(e_s + e_г)^3 + a_4(e_s + e_г)^4 = \\ &= i_0 + a_1 e_s + a_1 e_г + a_2 e_s^2 + \boxed{2a_2 e_s e_г} + a_2 e_г^2 + a_3 e_s^3 + \boxed{3a_3 e_s^2 e_г} + \\ &+ \boxed{3a_3 e_s e_г^2} + a_3 e_г^3 + a_4 e_s^4 + \boxed{6a_1 e_s^2 e_г^2} + \boxed{4a_4 e_s e_г^3} + \boxed{4a_4 e_s^3 e_г} + a_4 e_г^4. \end{aligned} \tag{8.72}$$

Слагаемые, содержащие различные степени только e_s или только $e_г$, интереса не представляют. С точки зрения преобразования (сдвига) частоты основное значение имеют члены, представляющие собой произведения

вида $e_s^n e_r^m$. В правой части выражения (8.72) обведены рамками. Подставляя в эти произведения (8.70) и (8.71) и отбрасывая все составляющие, частоты которых не являются суммой $\omega_s + \omega_r$ или разностью $\omega_s - \omega_r$, после несложных тригонометрических выкладок приходим к следующему окончательному результату:

$$i_{\omega_s \pm \omega_r}(t) = a_2 E_s(t) E_r \left\{\cos\left|\left(\int \omega_s(t)\,dt + \omega_r t\right) + \theta_s + \theta_r\right| + \right.$$

$$+ \cos\left|\left(\int \omega_s(t)\,dt - \omega_r t\right) + \theta_s - \theta_r\right| + \frac{3}{2} a_4 E_s(t) E_r \left|E_s^2(t) + \right.$$

$$\left. + E_r^2\right|\left\{\cos\left|\left(\int \omega_s(t)\,dt + \omega_r t\right) + \theta_s + \theta_r\right| + \cos\left|\left(\int \omega_s(t)\,dt - \omega_r t\right) + \theta_s - \theta_r\right|\right\}. \tag{8.73}$$

Из этого результата видно, что интересующие нас частоты $\omega_s \pm \omega_r$, возникают лишь благодаря четным степеням полинома, аппроксимирующего характеристику нелинейного элемента. Однако один лишь квадратичный член полинома (с коэффициентом a_2) образует составляющие, аплитуды которых *пропорциональны только первой степени* $E_s(t)$. Более высокие четные степени (четвертая, шестая и т. д.) нарушают эту пропорциональность, так как амплитуды привносимых ими колебаний содержат также степени $E_s(t)$ выше первой.

Отсюда видно, что амплитуды E_s и E_r должны выбираться с таким расчетом, чтобы в разложении (8.72) преобладающее значение имели слагаемые не выше второй степени. Для этого требуется выполнение неравенств

$$E_s^2 \ll a_2/(^3/_2 a_4),\ E_r^2 \ll a_2/(^3/_2 a_4).$$

Тогда выражение (8.73) переходит в следующее:

$$i_{\omega_s \pm \omega_r}(t) \approx a_2 E_s(t) E_r \left\{\cos\left|\left(\int \omega_s(t)\,dt + \omega_r t\right) + \theta_s + \theta_r\right| + \right.$$

$$\left. + \cos\left|\left(\int \omega_s(t)\,dt - \omega_r t\right) + \theta_s - \theta_r\right|\right\}. \tag{8.74}$$

В радиоприемных и многих других устройствах, в которых задача преобразования частоты тесно связана с задачей усиления сигнала, обычно $E_s \ll E_r$.

Первое слагаемое в фигурных скобках с частотой $\omega_s(t) + \omega_r$ (производная от аргумента косинуса) соответствует сдвигу спектра сигнала в область высоких частот, а второе с частотой $\omega_s(t) - \omega_r$ — в область низких частот. Для выделения одной из этих частот — разностной или суммарной — нужно применять соответствующую нагрузку на выходе преобразователя. Пусть, например, частоты ω_s и ω_r очень близки и требуется выделить низкую частоту, расположенную около нуля. Такая задача часто встречается в измерительной технике (метод «нулевых биений»). В этом случае нагрузка должна быть такой же, как при амплитудном детектировании, т. е. состоять из параллельного соединения R и C, обеспечивающего отфильтровывание (подавление) высоких частот ω_s и ω_r и выделение разностной частоты $|\omega_s - \omega_r|$. Если разностная частота $|\omega_s - \omega_r|$ лежит в диапазоне высоких частот, то для ее выделения следует применить резонансную колебательную цепь (рис. 8.42). Если полезной, подлежащей выделению является суммарная частота $\omega_s + \omega_r$, то контур соответственно должен быть настроен на частоту $\omega_p = \omega_s + \omega_r$.

Обычно полоса пропускания колебательной цепи, являющейся нагрузкой преобразователя, рассчитана на ширину спектра модулированного колебания. При этом все составляющие тока с частотами, близкими к $|\omega_s \pm \omega_r|$, проходят через контур равномерно и структура сигнала на выходе

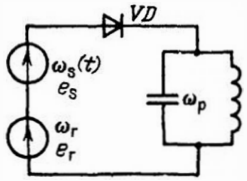


Рис. 8.42. Схема замещения преобразователя частоты

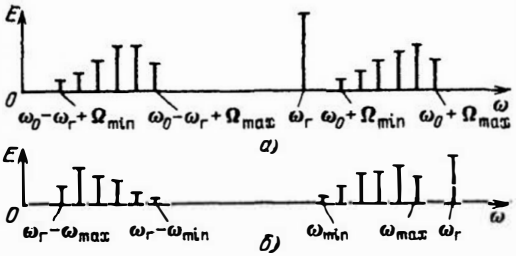


Рис. 8.43. Спектр сигнала на входе и выходе преобразователя:
а) при $\omega_s > \omega_r$; *б*) при $\omega_s < \omega_r$

совпадает со структурой сигнала на входе. Единственное отличие заключается в том, что частота на выходе равна $\omega_s(t) + \omega_r$ или $\omega_s(t) - \omega_r$, смотря по тому какова резонансная частота нагрузочной цепи.

Итак, при преобразовании частоты законы изменения амплитуды $E_s(t)$, частоты $\omega_s(t)$ и фазы $\int \omega_s(t)\,dt$ входного колебания переносятся на выходное колебание. В этом смысле рассматриваемое преобразование сигнала является *линейным*, а устройство — линейным преобразователем или «смесителем».

В заключение следует отметить, что при выделении разностной частоты структура сигнала сохраняется лишь в том случае, когда $\omega_s(t) > \omega_r$. Если же $\omega_s(t) < \omega_r$, то спектр сигнала «переворачивается».

На рис. 8.43, *а* изображена спектральная диаграмма сигнала на входе и выходе преобразователя для случая, когда все частоты, входящие в спектр входного колебания, выше частоты гетеродина ω_r. Преобразованный спектр, сдвинутый на величину ω_r влево, имеет такую же структуру, что и исходный спектр. В преобразованном спектре при $\omega_r > \omega_s(t)$ (рис. 8.43, *б*) ω_{max} и ω_{min} меняются местами.

При преобразовании частоты обычного АМ колебания, спектр которого состоит из двух симметричных относительно ω_0 боковых полос, переворачивание спектра внешне никак не проявляется; просто верхняя и нижняя боковые полосы меняются местами. Преобразование же ЧМ колебания, мгновенная частота которого $\omega_s = \omega_0 + \Delta\omega(t)$, при $\omega_r > \omega_s(t)$ приводит к изменению мгновенной частоты выходного сигнала по закону $|\omega_s(t) - \omega_r| = \omega_r - \omega_0 - \Delta\omega(t)$, т. е. к изменению знака перед отклонением частоты $\Delta\omega(t)$.

Из приведенных примеров ясно, что переворачивание спектра при преобразовании частоты необходимо принимать во внимание только в тех случаях, когда спектр сигнала несимметричен относительно своей центральной частоты (при ЧМ асимметрия заключается в том, что знаки перед нижними боковыми частотами $\omega_0 - n\Omega$ при нечетных n отрицательны, см. § 36).

При преобразовании частоты сигнала с несимметричным спектром для сохранения структуры спектра частота гетеродина должна быть ниже частот сигнала.

8.12. СИНХРОННОЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЕ

Рассмотрим особый вид преобразования, который получается при частоте гетеродина, равной частоте сигнала. Полагая в выражении (8.74) $\omega_s = \omega_r$ и рассматривая сначала немодулированное входное колебание ($E_s = E_0$), получаем

$$i(t) = a_2 E_0 E_r [\cos(2\omega_s t + \theta_s + \theta_r) + \cos(\theta_s - \theta_r)]. \qquad (8.75)$$

Как видим, в частном случае $\omega_г = \omega_s$ колебание с нижней комбинационной частотой вырождается в постоянный ток

$$i_0 = a_2 E_г \cos(\theta_s - \theta_г) E_0. \tag{8.76}$$

При $\theta_s - \theta_г = 0$ или π ток $|i_0|$ достигает максимума, при $\theta_s - \theta_г = \pi/2$ ток $i_0 = 0$.

При включении на выходе преобразователя фильтра нижних частот колебание с частотой $2\omega_s$ подавляется и на выходе фильтра остается одно лишь постоянное напряжение, пропорциональное току i_0.

При наличии АМ, когда $e_s(t) = E_s(t) \cos(\omega_s t + \theta_s)$, колебание на выходе будет пропорционально току:

$$i_\Omega(t) = a_2 E_г \cos(\theta_s - \theta_г) E_s(t), \tag{8.77}$$

т. е. будет совпадать по форме с законом модуляции аплитуды высокочастотного колебания $e_s(t)$.

Иными словами, на выходе преобразователя выделяется передаваемое сообщение, причем по отношению к входному колебанию при $E_s(t) \ll E_г$ обработка по существу является *линейной*.

Основным преимуществом такого способа обработки, называемого синхронным детектированием, является повышенная избирательность радиоприема слабых сигналов на фоне шума (устраняется взаимодействие сигнала с помехой в нелинейном устройстве, каковым является обычный амплитудный детектор).

Следует, однако, отметить, что реализация принципа синхронного детектирования связана со значительными трудностями, так как обеспечение синхронизма частоты гетеродина с частотой принимаемого сигнала является сложной задачей, особенно при приеме слабых сигналов на фоне помех.

8.13. ПОЛУЧЕНИЕ АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В § 8.4 указывалось, что при воздействии на нелинейный резистивный элемент с квадратичной характеристикой двух гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2, отвечающими условию $\omega_1 \ll \omega_2$, в спектре тока среди других спектральных составляющих можно выделить три частоты ω_2, $\omega_2 + \omega_1$ и $\omega_2 - \omega_1$, образующие спектр АМ колебания.

В генераторах и передатчиках серьезным требованием является получение большой мощности колебания при хорошем КПД. Ясно, что квадратичный режим работы нелинейного элемента этому требованию не отвечает. Для улучшения энергетических показателей модуляции резистивный нелинейный элемент должен работать в существенно нелинейном режиме, с отсечкой тока. Поэтому модуляция амплитуды высокочастотного колебания сводится к воздействию модулирующим напряжением на *нелинейный резонансный усилитель*. Структурная схема устройства для получения АМ колебаний представлена на рис. 8.44.

На вход нелинейного резонансного усилителя, работающего с отсечкой тока, подается несущее колебание с частотой ω_0 от независимого источника (автогенератора). Модулирующее колебание (сообщение) $s(t)$, спектр которого расположен в области частот, низких по сравнению с ω_0, изменяет положение рабочей точки на вольт-амперной характеристике нелинейного элемента и в результате изменяется амплитуда на выходе.

Одна из возможных схем подачи модулирующего колебания $s(t)$ на резонансный (транзисторный) усилитель показана на рис. 8.45. Конденсатор $C_б$

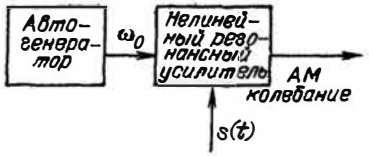


Рис. 8.44. Структурная схема устройства для получения АМ колебания

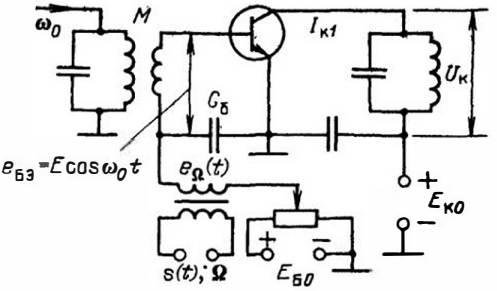


Рис. 8.45. Принципиальная схема к рис. 8.44

в цепи база — эмиттер защищает низкочастотную цепь от токов высокой частоты.

Режим работы нелинейного усилителя при модуляции поясняется рис. 8.46, *а*, построенным для тональной АМ ($s(t)$ — гармоническая функция с частотой Ω).

Так как ток коллектора $i_к = \beta i_б$, то амплитуда напряжения на колебательном контуре, создаваемого первой гармоникой коллекторного тока,

$$U_к = I_{к1} Z_{экр} = \beta I_{б1} Z_{экр}.$$

От рассмотренного в § 8.3 рис. 8.10 отличие заключается в зависимости амплитуды импульсов тока I_m (рис. 8.46, *б*) от модулирующего напряжения $e_\Omega(t)$. Это приводит к изменению амплитуды первой гармоники коллекторного тока и, следовательно, к изменению амплитуды напряжения на колебательном контуре усилителя. Модулированный по амплитуде ток основной частоты ω_0 показан на рис. 8.46, *в*. Штриховой линией обозначено изменение $I_{к1}$ — амплитуды первой гармоники тока.

При правильном выборе амплитуды модулирующего напряжения изменение амплитуды импульсов ΔI_m относительно исходного значения I_{m0} связано с e_Ω линейным соотношением

$$\Delta I_m = k_{ам}\, e_\Omega,$$

где $k_{ам}$ — постоянный коэффициент.

Поэтому огибающая импульсов изменяется по закону

$$I_m = I_{m0} + k_{ам}\, e_\Omega(t),$$

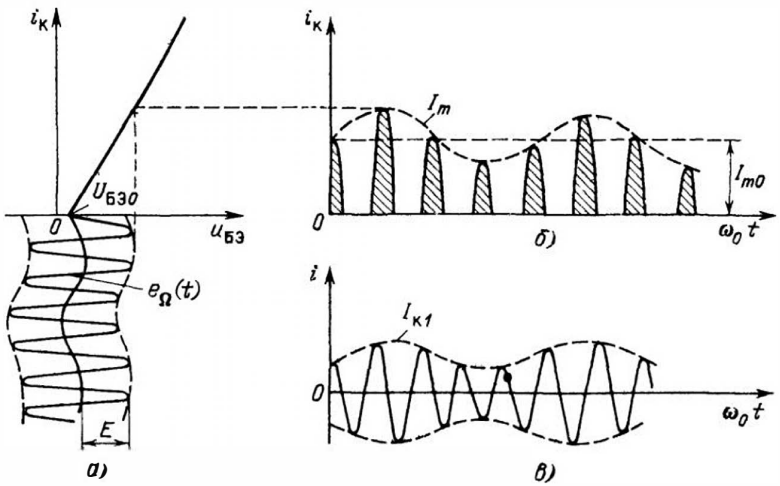


Рис. 8.46. Режим работы нелинейного резонансного усилителя при АМ

а амплитуда первой гармоники коллекторного тока — по закону

$$I_{к1} = \alpha_1(\theta)\, I_m = \alpha_1(\theta)\,[I_{m0} + k_{ам}\, e_\Omega(t)].$$

Так как изменение $e_\Omega(t)$ во времени (при постоянной амплитуде E высокочастотного колебания) сопровождается изменением угла отсечки θ и соответственно коэффициента $\alpha_1(\theta)$, то форма функции $I_{к1}(t)$ отличается от формы $e_\Omega(t)$. Отсюда видно, что при модуляции смещением неизбежны искажения передаваемого сообщения. Искажения могут быть достаточно малыми при правильном выборе пределов изменения угла отсечки и работе с не слишком глубокой АМ (40—50 %).

8.14. РЕЗОНАНС В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЕМКОСТЬЮ

Широкое распространение получили электронные способы управления резонансной частотой колебательной системы с помощью варикапа, подключаемого к основной емкости контура.

Рассмотрим некоторые особенности резонансных явлений в контуре, у которого r и L линейные (и постоянные) элементы, а $C = C(u_C)$ — нелинейная, зависящая от напряжения емкость. В контур включен источник гармонической ЭДС $e(t) = E\cos\omega t$; амплитуда E поддерживается неизменной, а частота ω медленно изменяется, как это обычно делается при снятии резонансной характеристики контура.

Исходим из дифференциального уравнения

$$L\frac{di}{dt} + ri + u_C = E\cos\omega t. \tag{8.78}$$

Переходя от тока i к заряду q и учитывая, что $i = dq/dt$, а напряжение на емкости $u_C = q/C(u_C)$, переписываем уравнение (8.78) в форме

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC(u_C)}\,q = \frac{E}{L}\cos\omega t.$$

Заметим, что нелинейная емкость $C(u_C)$ является функцией и q. Поэтому слагаемое $\frac{1}{LC(u_C)}\,q$ можно представить в виде нелинейной функции $f(q)$, а дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\alpha\frac{dq}{dt} + f(q) = \frac{E}{L}\cos\omega t, \tag{8.79}$$

где $\alpha = r/2L$.

В отсутствие нелинейности функция $f(q)$ должна обращаться в $\frac{1}{LC_0}\,q = \omega_0^2\, q$, где $C_0 = 1/\omega_0^2 L$. Поэтому функцию $f(q)$ удобно аппроксимировать выражением

$$f(q) = \omega_0^2\, q + b_3\, q^3, \tag{8.80}$$

где b_3 — параметр, учитывающий нелинейность вольт-кулонной характеристики конденсатора при больших амплитудах.

Выбор такой аппроксимации, значительно упрощающей анализ нелинейного уравнения, не снижает существенно общности выводов (по крайней мере, качественных).

Подставляя (8.80) в (8.79), приходим к уравнению

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\alpha\frac{dq}{dt} + \omega_0^2\, q + b_3\, q^3 = \frac{E}{L}\cos\omega t. \tag{8.81}$$

Нас интересует амплитуда заряда $q(t)$ при заданной частоте ω *в установившемся режиме*. Поэтому задача сводится к отысканию периодического решения уравнения (8.81). Следует, однако, иметь в виду, что благодаря нелинейному характеру этого уравнения возможны периодические решения как с частотой внешней силы ω, так и с частотами $n\omega$ (гармоники) или ω/n (субгармоники); n — любое целое положительное число.

Если затухание контура α мало (добротность велика), а резонансная частота ω_0 близка к частоте внешней силы, то в первом приближении решение уравнения (8.81) можно искать в виде гармонического колебания

$$q(t) = A\cos(\omega t - \varphi), \tag{8.82}$$

где A и φ — подлежащие определению амплитуда и фаза (постоянные) заряда.

Подстановка (8.82) в (8.81) приводит к следующим двум уравнениям:

$$(-\omega^2 A + \omega_0^2 A + {}^3/_4 b_3 A^3)\cos\varphi + 2\alpha\omega A\sin\varphi = E/L, \tag{8.83}$$

$$(-\omega^2 A + \omega_0^2 A + {}^3/_4 b_3 A^3)\sin\varphi - 2\alpha\omega A\cos\varphi = 0. \tag{8.84}$$

Слагаемое с частотой 3ω было отброшено вследствие высокой избирательности контура.

Исключая далее из уравнений (8.83), (8.84) фазу [поскольку нас интересует зависимость $A(\omega)$], приходим к выражению

$$(-\omega^2 A + \omega_0^2 A + {}^3/_4 b_3 A^3)^2 + 4\alpha^2\omega^2 A^2 = E^2/L^2. \tag{8.85}$$

содержащему искомую зависимость между амплитудой A и частотой ω при заданных ω_0, α и E.

Прямое решение этого уравнения относительно A затруднительно, так как искомая амплитуда входит в него в шестой степени. Поэтому можно поступить следующим образом: задаваясь амплитудой A, находим соответствующую частоту внешней силы ω, после чего строим график функции $A(\omega)$, откладывая ω на оси абсцисс, а A на оси ординат.

Имея в виду такую последовательность вычислений, решаем уравнение (8.85) относительно ω^2:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - (2\alpha^2 + {}^3/_4 b_3 A^2) \pm \sqrt{E^2/A^2 L^2 - 4\alpha^2\omega_0^2 + 2\alpha^2(2\alpha^2 - {}^3/_2 b_3 A^2)}. \tag{8.86}$$

Заметим, что при $b_3 \to 0$, а также при очень малых A, т. е. когда нелинейность контура не проявляется, уравнение (8.85) приводит к обычному решению для амплитуды A:

$$A = E/(L\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}). \tag{8.87}$$

С увеличением $|b_3|$ характер резонансных кривых $A(\omega)$ изменяется. В зависимости от амплитуды внешней ЭДС E уравнение (8.86) определяет семейство кривых, изображенных на рис. 8.47. Амплитудные кривые «запрокидываются», и тем сильнее, чем больше E.

Это явление можно объяснить изменением среднего значения нелинейной емкости в зависимости от A. Действительно, из аппроксимации (8.80) вытекает следующее выражение:

$$C(u_C) = \frac{1/L}{\omega_0^2 + b_3 q^2} = C_0 \Big/ \left(1 + \frac{b_3 q^2}{\omega_0^2}\right).$$

Подставив (8.82), получим (при $\varphi = 0$ и $|b_3| A^2/\omega_0^2 \ll 1$)

$$C(u_C) \approx C_0\left(1 - \frac{b_3 A^2}{\omega_0^2}\cos^2\omega t\right).$$

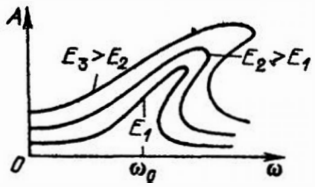


Рис. 8.47. Резонансные кривые контура с нелинейной емкостью (при $b_3 > 0$)

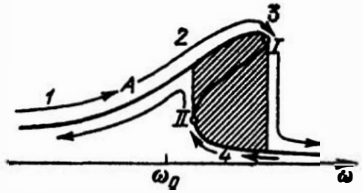


Рис. 8.48. Двузначность АЧХ колебательного контура с нелинейной емкостью

В результате усреднения правой части по времени

$$\overline{C(u_C)} = C_0\left(1 - \frac{b_3 A^2}{2\omega_0^2}\right).$$

С увеличением A средняя емкость уменьшается (при $b_3 > 0$) и соответственно увеличивается резонансная частота контура. При постепенном повышении частоты ЭДС, при приближении ω к ω_0 (участок *1—2* на рис. 8.48) из-за увеличения A резонансная частота «уходит» от ω, чем и объясняется сдвиг максимума вправо. В точке *1*, в которой касательная к кривой $A(\omega)$ вертикальна, $A(\omega)$ скачком переходит на нижнюю ветвь кривой. При понижении частоты ω наблюдается аналогичная картина, только в обратном порядке: скачок в сторону увеличения амплитуды наблюдается в точке II после монотонного изменения амплитуды на участке *4*.

Таким образом, в области $\omega > \omega_0$ (для $b > 0$) имеется участок *2—3*, на котором функция $A(\omega)$ двузначна. Это указывает на существование неустойчивости одного из состояний системы. Явление, подобное описанному, имеет место и при других формах нелинейной зависимости $C(u_C)$. Различие, лишь в количественных соотношениях.

Для варикапа $b_3 < 0$ и $C(u_C) > C_0$. Поэтому резонансные кривые в отличие от рис. 8.47 наклонены в сторону нижних частот. Если контур настроен на частоту, близкую к $\omega_0 = \omega/n$, где n — целое число, то создаются условия, благоприятные для выделения субгармоник. Подобный прием иногда используется для осуществления деления частоты.

В тех случаях, когда требуется по возможности точно определить амплитуду и фазу периодического решения нелинейного уравнения (8.82) с учетом гармоник и субгармоник, применяются различные методы анализа, основанные на принципе последовательного приближения.

8.15. ВОЗДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА НА НЕЛИНЕЙНУЮ ЕМКОСТЬ. УМНОЖИТЕЛЬ ЧАСТОТЫ НА ВАРАКТОРЕ

Некоторые преобразования сигналов, рассмотренные в § 8.3—8.6, можно осуществить с помощью *реактивных нелинейных* элементов, например основанных на нелинейной емкости p—n-перехода полупроводникового диода. Общее название *подобных приборов* — в а р и к а п. *Варикап, предназначенный для работы* в диапазоне СВЧ, называют в а р а к т о р о м. Он выделяет значительную мощность в режиме умножения частоты.

При гармоническом воздействии $e(t)$ в цепи с емкостью $C_{нл}$ возникает ток $i_{нл}(t)$, содержащий гармоники с частотами $n\omega_1$, что позволяет осуществлять умножение частоты.

Метод анализа спектра тока $i_{нл}(t)$ аналогичен методу, использованному в § 8.3. В данном случае в основу анализа можно положить нелинейную вольт-кулонную характеристику варактора

$$q = q_0 + b_1 e + b_2 e^2 + \ldots + b_k e^k, \tag{8.88}$$

где $b_1 = C_0$ определяется выражением (8.4);

$$b_2 = \frac{1}{2!}(d^2 q/de^2),\ b_3 = \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3 q}{de^3}\right), \ldots \tag{8.89}$$

Применяя выражение (8.2) к ряду (8.88), находим ток через нелинейную емкость

$$i_{нл}(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{de}\frac{de}{dt} = b_1 \frac{de}{dt} + 2b_2 e \frac{de}{dt} +$$

$$+ 3b_3 e^2 \frac{de}{dt} + \ldots + kb_k e^{k-1} \frac{de}{dt}. \tag{8.90}$$

Рассмотрим структуру первых трех слагаемых этого ряда при $e(t) = E\cos(\omega_1 t + \theta_1) = E\cos\psi_1(t)$.

Первое слагаемое

$$b_1 \frac{de}{dt} = -C_0 \omega_1 E \sin\psi_1(t) = -C_0 \omega_1 E \sin(\omega_1 t + \theta_1)$$

соответствует току частоты ω_1 через обычную линейную емкость C_0.

Второе слагаемое

$$2b_2 e \frac{de}{dt} = 2b_2 E\cos\psi_1(t)\,[-\omega_1 E \sin\psi_1(t)] = -b_2 \omega_1 E^2 \sin(2\omega_1 t + 2\theta_1) \tag{8.91}$$

вносит в спектр тока $i_{нл}(t)$ составляющую с частотой $2\omega_1$ и амплитудой $I_{\omega 2} = b_2 \omega_1 E^2$.

Третье слагаемое

$$3b_3 e^2 \frac{de}{dt} = -3b_3 E^2 \cos^2\psi_1(t)\,[-\omega_1 E \sin\psi_1(t)]$$

приводится к виду

$$-\frac{3b_3 \omega_1 E^3}{4}[\sin(\omega_1 t + \theta_1) - \sin(3\omega_1 t + 3\theta_1)]. \tag{8.92}$$

Из приведенных соотношений видна закономерность образования спектра тока $i_{нл}(t)$ при гармоническом воздействии. Как и для цепи с безынерционным резистивным элементом, слагаемые ряда (8.90) с четными степенями привносят четные гармоники, а слагаемые с нечетными степенями — нечетные гармоники. Наивысший порядок гармоник равен степени полинома k, аппроксимирующего вольт-кулонную характеристику. Постоянная составляющая в спектре тока отсутствует.

Функциональная схема умножителя частоты на варакторе представлена на рис. 8.49, *а*. Сопротивление полупроводникового материала и активная проводимость, шунтирующая нелинейную емкость варактора, этой схемой не учитываются.

Для частоты n-й гармоники тока $i_{пл}(t)$ сопротивление нагрузки равно R, а для всех остальных частот сопротивление можно считать пренебрежимо малым (при достаточно высокой добротности контура).

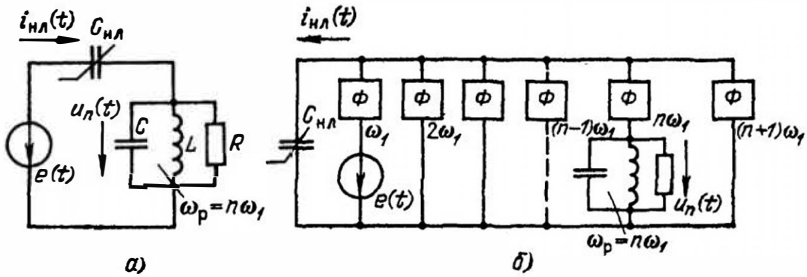


Рис. 8.49. Умножение частоты с помощью варактора:
а) последовательная, *б*) параллельная схемы замещения

Напряжение на контуре в соответствии с (8.91), (8.92) можно записать в форме

$$u_n(t) = I_n R \sin(n\omega_1 t + n\theta_1) = U_n \sin(n\omega_1 t + n\theta_1), \tag{8.93}$$

где I_n — амплитуда n-й гармоники тока $i_{нл}(t)$.

Введение нагрузочного контура, поглощающего мощность, изменяет структуру спектра тока $i_{нл}(t)$, определяемого в холостом режиме выражением (8.90). Для определения структуры спектра в режиме нагрузки необходимо учесть взаимодействие на нелинейной емкости двух напряжений: $e(t)$ и $u_n(t)$. С этой целью в исходном выражении (8.90) $e(t)$ должно быть дополнено слагаемым $u_n(t)$. Выполнив затем преобразования, аналогичные (8.91), (8.92), найдем все спектральные составляющие тока $i_{нл}(t)$.

Для дальнейшего анализа последовательную схему замещения (см. рис. 8.49, *а*) целесообразно преобразовать в параллельную схему (см. рис. 8.49, *б*). В параллельной схеме замещения для каждой из спектральных составляющих тока $i_{нл}(t)$ предусмотрена отдельная ветвь с фильтром, пропускающим (без ослабления) только одну из гармоник. Напряжение генератора $e(t)$, как и в схеме рис. 8.49, *а*, оказывается приложенным непосредственно к $C_{нл}$, а токи с частотами $2\omega_1$, $3\omega_1$, ..., обусловленные нелинейностью $C_{нл}$, замыкаются во внешней цепи, не создавая никакой нагрузки для генератора с частотой ω_1. Исключение составляет лишь ветвь, содержащая нагрузочный контур. Падение напряжения, создаваемое n-й гармоникой тока на контуре, прикладывается к $C_{нл}$ последовательно с $e(t)$.

Проиллюстрируем определение спектральных составляющих тока и энергетических соотношений в схеме умножителя на примере удвоения частоты. Для выявления принципиальной стороны вопроса облегчим задачу допущением, что вольт-кулонная характеристика варактора в пределах используемого участка удовлетворительно аппроксимируется полиномом второй степени. Тогда амплитуда тока второй гармоники I_2 определяется лишь квадратичным членом ряда (8.88).

Подставив в (8.91) вместо $e(t)$ сумму $e(t) + u_n(t) = E\cos\psi_1(t) + U_2 \times \sin\psi_2(t)$, после несложных тригонометрических преобразований получим

$$2b_2[e(t)+u_n(t)][e'(t)+u_n'(t)] = -b_2\omega_1 E^2 \sin(2\omega_1 t + 2\theta_1) +$$
$$+ b_2\omega_1 EU_2 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + 3b_2\omega_1 EU_2 \cos(3\omega_1 t + 3\theta_1) -$$
$$-2b_2\omega_1 U_2^2 \sin(4\omega_1 t + 4\theta_1). \tag{8.94}$$

Токи с частотами $3\omega_1$ и $4\omega_1$, замыкающиеся через «пустые» ветви схемы замещения, не выделяют мощности и могут не приниматься во внимание.

Первое слагаемое в правой части (8.94), совпадающее с (8.91), определяет ток в ветви, содержащей нагрузочный контур с резонансной частотой $\omega_p = 2\omega_1$. Амплитуда этого тока

$$I_{\omega 2} = b_2\, \omega_1\, E^2, \tag{8.95}$$

а мощность, выделяемая в сопротивлении R,

$$P_{\omega 2} = \frac{I_{\omega 2}^2\, R}{2} = \frac{b_2^2\, \omega_1^2}{2} E^4 R. \tag{8.96}$$

Второе слагаемое в правой части (8.94) определяет ток основной частоты ω_1, нагружающий генератор $e(t)$. Амплитуда этого тока с учетом (8.95)

$$I_{\omega 1} = b_2\, \omega_1\, EU_2 = b_2\, \omega_1\, EI_{\omega 2}\, R = b_2^2\, \omega_1^2\, E^3\, R. \tag{8.97}$$

Следовательно, мощность, отбираемая от генератора $e(t)$,

$$P_{\omega 1} = \frac{I_{\omega 1}\, E}{2} = \frac{b_2^2\, \omega_1^2\, E^4}{2} R. \tag{8.98}$$

Сопоставление выражений (8.96) и (8.98) показывает, что $P_{\omega 1} = P_{\omega 2}$.

Легко убедиться, что при увеличении амплитуды E входного колебания и связанном с этим возрастанием влияния членов ряда (8.88) с более высокими степенями структура спектра тока $i_{нл}(t)$ усложнится, но соотношение между $P_{\omega 1}$ и $P_{\omega 2}$ останется прежним.

В равенстве $P_{\omega 1} = P_{\omega n}$ заключается принципиальное отличие умножителя частоты с энергоемким элементом $C_{нл}$ от безынерционного умножителя на транзисторе, рассмотренного в § 8.6. В транзисторном умножителе источник входного сигнала с частотой ω_1 лишь управляет током коллектора, энергия же колебания с частотой $n\omega_1$ поставляется источником постоянного тока в цепи коллектора. В варакторном умножителе единственным источником энергии является генератор частоты ω_1, который поставляет энергию в нелинейную емкость $C_{нл}$, играющую роль накопителя, откуда энергия «перекачивается» в колебание с частотой $n\omega_1$. При пренебрежении потерями в варакторе КПД умножителя равен единице. В реальном устройстве с учетом потерь в сопротивлении самого варактора и в согласующих цепях КПД достигает 60—70 %.

Различные варианты построения варакторных СВЧ умножителей частоты, а также различные режимы их работы изучаются в курсе «Радиопередающие устройства».

8.16. ВОЗДЕЙСТВИЕ ДВУХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НА ЦЕПЬ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЭНЕРГОЕМКИМ ЭЛЕМЕНТОМ

Рассмотрим энергетические соотношения в цепи, содержащей нелинейную емкость и колебательный контур, при входном воздействии в виде

$$e_1(t) + e_0(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + E_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0).$$

Взаимодействие $e_1(t)$ и $e_0(t)$ в нелинейной емкости $C_{нл}$ создает ток $i_{нл}(t)$, спектр которого, как и при резистивном нелинейном элементе, содержит частоты вида $m\omega_1 \pm n\omega_0$ (кроме постоянной составляющей).

В данном параграфе нас будет интересовать выделение разностной комбинационной частоты $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1$ при $\omega_0 > \omega_1$. Для выделения указанной частоты в схему включен колебательный контур с резонансной частотой

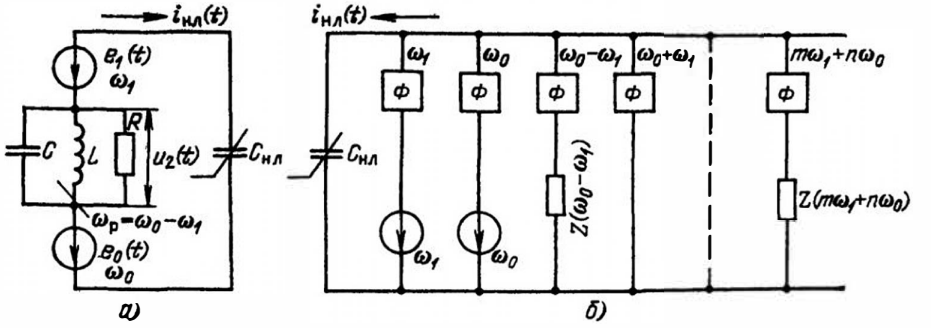


Рис. 8.50. Бигармоническое воздействие на цепь с нелинейной емкостью:
а) последовательная, *б)* параллельная схемы замещения

$\omega_p = \omega_0 - \omega_1$. Последовательная схема замещения цепи представлена на рис. 8.50, *а*, а параллельная — на рис. 8.50, *б*.

При достаточно высокой добротности на контуре создается падение напряжения

$$u_2(t) = U_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) = I_2 z_2(\omega_2) \cos(\omega_2 t + \theta_2), \qquad (8.99)$$

где амплитуды тока I_2 и напряжения U_2, а также фаза θ_2 подлежат определению.

Результирующее напряжение, приложенное к $C_{нл}$,

$$e(t) = e_0(t) + e_1(t) + e_2(t) = E_0 \cos\psi_0(t) + E_1 \cos\psi_1(t) + E_2 \times \cos\psi_2(t), \qquad (8.100)$$

где $e_2(t) = -u_2(t)$ имеет смысл ЭДС, компенсирующей падение напряжения $u_2(t)$. Подставив (8.100) в выражение (8.90), придем к следующему результату:

$$i_{нл}(t) = -b_1[\omega_0 E_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0) + \omega_1 E_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + \omega_2 E_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)] - b_2\{\omega_0 E_1 E_2 \sin[\omega_0 t + (\theta_1 + \theta_2)] + \omega_1 E_0 E_2 \sin[\omega_1 t + (\theta_0 - \theta_2)] + \omega_2 E_0 E_1 \sin[\omega_2 t + (\theta_0 - \theta_1)]\}. \qquad (8.101)$$

При выводе этого выражения токи с частотами, отличными от ω_0, ω_1, и $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1$, которые замыкаются через пустые ветви (не содержащие нагрузочного контура), были опущены.

Первые три тока (слагаемые с коэффициентом b_1), сдвинутые по фазе на 90° относительно соответствующих напряжений $e_1(t)$, $e_2(t)$ и $e_0(t)$, не создают расхода энергии (как и в обычном линейном конденсаторе без потерь).

Токи же частот ω_1, ω_2 и ω_0, обусловленные нелинейностью вольт-кулонной характеристики реактивного элемента, создают мощности $P_{\omega 1}$, $P_{\omega 2}$ и $P_{\omega 0}$, которые нетрудно определить следующими[1] выражениями:

---

[1] При прохождении тока $i_{\omega 2}(t) = -b_2 \omega_2 E_0 E_1 \sin[\omega_2 t + (\theta_0 - \theta_1)]$, определяемого последним слагаемым выражения (8.101), через контур $z_2(\omega_2)$ получается падение напряжения $u_2(t) = -b_2 \omega_2 E_0 E_1 z_2(\omega_2) \sin[\omega_2 t + (\theta_0 - \theta_1) + \varphi_z]$.

Сопоставление этого выражения с (8.99) приводит к равенству $\theta_2 = \theta_0 - \theta_1 - \pi/2 + \varphi_z$, откуда вытекают следующие формулы для токов:

$$i_{\omega 1}(t) = -b_2 \omega_1 E_0 E_2 \cos(\omega_1 t + \theta_1 - \varphi_z),$$

$$i_{\omega 2}(t) = -b_2 \omega_2 E_0 E_1 \cos(\omega_2 t + \theta_2 - \varphi_z),$$

$$i_{\omega 0}(t) = b_2 \omega_0 E_1 E_2 \cos(\omega_0 t + \theta_0 + \varphi_z).$$

Все три тока сдвинуты относительно соответствующих ЭДС $e_1(t)$, $e_2(t)$ и $e_0(t)$ на угол φ_z, что и определяет средние мощности.

$$P_{\omega_1} = -{}^1/_2\, b_2\, \omega_1\, E_1\, E_2\, E_0 \cos\varphi_z,\quad P_{\omega_2} = -{}^1/_2\, b_2\, \omega_2\, E_1\, E_2\, E_0 \cos\varphi_z,$$

$$P_{\omega 0} = {}^1/_2\, b_2\, \omega_0\, E_1\, E_2\, E_0 \cos\varphi_z. \tag{8.102}$$

В этих выражениях φ_z — аргумент комплексного сопротивления $\mathbf{Z}_2\,(i\omega_2)$. При малых расстройках контура $\cos\varphi_z$ близок е единице.

Смысл отрицательных мощностей $P_{\omega 1}$ и $P_{\omega 2}$ заключается в том, что соответствующие источники на частотах ω_1 и ω_2 не отдают, а потребляют энергию. Положительное же значение $P_{\omega 0}$ указывает на то, что источник $e_0\,(t)$ отдает энергию во внешнюю цепь.

Суммарная мощность, выделяемая в нелинейном реактивном элементе,

$$P_{\omega 0} + P_{\omega 1} + P_{\omega 2} = {}^1/_2\, b_2\, (\omega_0 - \omega_1 - \omega_2)\, E_1\, E_2\, E_0 \cos\varphi_z = 0, \tag{8.103}$$

поскольку $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$. Этот результат находится в полном соответствии с принятым допущением отсутствия потерь в емкости.

Итак, в цепи, содержащей энергоемкий нелинейный элемент, возможна перекачка энергии от одного генератора к другому. Это указывает на возможность осуществления пребразования частоты сигнала одновременно с «накачкой» энергией от вспомогательного генератора.

Из выражений (8.102) вытекают следующие пропорции:

$$\frac{P_{\omega 1}}{\omega_1} = \frac{P_{\omega 2}}{\omega_2} = -\frac{P_{\omega 0}}{\omega_0}. \tag{8.104}$$

8.17. ТЕОРЕМА МЭНЛИ—РОУ

Важные соотношения (8.104), выведенные для квадратичной вольт-кулонной характеристики, можно распространить и на более сильную нелинейность, когда в спектре тока, протекающего через нелинейную емкость $C_{нл}$, существует большее число составляющих с частотами вида $\omega_{m,n} = m\omega_1 + n\omega_0$ (m и n — целые числа, которые в отличие от § 8.4 могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. При этом сохраняется условие $|m| + |n| \leqslant k$, где k — степень полинома, аппроксимирующего нелинейную характеристику).

Известна теорема Мэнли—Роу, устанавливающая энергетические соотношения в спектре колебания в цепи, содержащей реактивную нелинейность (емкость или индуктивность) при произвольном порядке нелинейности и произвольном числе генераторов.

Модель цепи, используемая при выводе теоремы Мэнли—Роу, представлена на рис. 8.50, *б* (для двух генераторов). Число параллельных ветвей равно числу составляющих в спектре тока, протекающего через $C_{нл}$. Каждая ветвь содержит идеальный фильтр, пропускающий только колебание с соответствующей частотой. Идеальный фильтр можно представлять в виде последовательного соединения элементов L и C, отвечающих условию $1/\sqrt{LC} = m\omega_1 + n\omega_0$. «Пустые» ветви, не содержащие сопротивлений Z, замыкают накоротко внешнюю цепь конденсатора $C_{нл}$ для токов соответствующей частоты. Таким образом, на $C_{нл}$ воздействуют помимо напряжений генераторов только напряжения, создаваемые токами комбинационных частот в соответствующих нагруженных ветвях.

Замечаем, что при включении Z только в одну ветвь, соответствующую частоте $\omega_0 - \omega_1 = \omega_2$ (при $m = -1$, $n = 1$), получается модель цепи, эквивалентная ранее рассмотренной последовательной схеме с двумя генераторами и одним сопротивлением $Z_2\,(i\omega_2)$ (см. рис. 8.50, *а*).

Прежде чем давать общую формулировку теоремы, выведем уравнения Мэнли—Роу для случая, когда нагружена всего лишь одна ветвь, содержащая фильтр, пропускающий частоту $f_{m,n} = mf_1 + nf_0$.

Основываясь на законе сохранения энергии, исходим из условия, что сумма средних мощностей, поступающих в элемент $C_{нл}$ и отбираемых от него, равна нулю (конденсатор $C_{нл}$ свободен от потерь):

$$P_0 + P_1 + P_{m,n} = 0. \tag{8.105}$$

Приведенное ранее выражение (8.103) иллюстрирует это равенство.

Выразим мощности P_0, P_1 и P_m через энергию, выделяемую за один период соответственно T_0, T_1 и $T_{m,n}$:

$$P_0 = \frac{\mathcal{Э}_0}{T_0} = \mathcal{Э}_0 f_0, \quad P_1 = \frac{\mathcal{Э}_1}{T_1} = \mathcal{Э}_1 f_1 \text{ и } P_{m,n} = \frac{\mathcal{Э}_{m,n}}{T_{m,n}} = \mathcal{Э}_{m,n}(mf_1 + nf_0).$$

Тогда равенство (8.105) можно записать в форме

$$\mathcal{Э}_0 f_0 + \mathcal{Э}_1 f_1 + \mathcal{Э}_{m,n}(mf_1 + nf_0) = f_1(\mathcal{Э}_1 + m\mathcal{Э}_{m,n}) + f_0(\mathcal{Э}_0 + n\mathcal{Э}_{m,n}) = 0.$$

Поскольку частоты f_1 и f_0 могут принимать любые значения, то это равенство возможно, только если каждое слагаемое равно нулю по отдельности:

$$\mathcal{Э}_1 + m\mathcal{Э}_{m,n} = 0, \quad \mathcal{Э}_0 + n\mathcal{Э}_{m,n} = 0.$$

Переходя от энергии к мощности, получаем

$$\frac{P_1}{f_1} + \frac{mP_{m,n}}{mf_1 + nf_0} = \frac{P_1}{\omega_1} + \frac{mP_{m,n}}{m\omega_1 + n\omega_0} = 0,$$

$$\frac{P_0}{f_0} + \frac{nP_{m,n}}{mf_1 + nf_0} = \frac{P_0}{\omega_0} + \frac{nP_{m,n}}{m\omega_1 + n\omega_0} = 0.$$

В общем случае при произвольном числе нагруженных ветвей приведенные уравнения должны быть просуммированы по всем возможным при заданной нелинейности значениям m и n, что приводит к общей формулировке теоремы Мэнли—Роу:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{mP_{m,n}}{m\omega_1 + n\omega_0} = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{nP_{m,n}}{m\omega_1 + n\omega_0} = 0, \tag{8.106}$$

где ω_1 и ω_0 — частоты генераторов, возбуждающих систему; $P_{m,n}$ — мощность колебания частоты $m\omega_1 + n\omega_0$; целые числа m и n определяют порядок комбинационного колебания.

Выражения (8.106) можно распространить на любые реактивности — емкостные и индуктивные — при условии отсутствия гистерезиса.

При рассмотрении систем с нелинейностью второго порядка вычисление сумм в (8.106) не связано с какими-либо трудностями.

Поясним применение выражений (8.106) на примере рассмотренной ранее цепи (см. рис. 8.50, *а*), возбуждаемой двумя генераторами на частотах ω_1 и ω_0. Кроме этих частот на пассивном элементе Z_2 (ω_2) создается одно комбинационное колебание с резонансной частотой $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1$.

В соответствии с обозначениями выражений (8.106) частоту ω_1 следует рассматривать как значение знаменателя $m\omega_1 + n\omega_0$ при $m = 1$ и $n = 0$, а мощность на этой частоте $P_{\omega_1} = P_{1,0}$. Частоте ω_0 соответствуют индексы суммирования $m = 0$, $n = 1$ и мощность $P_{\omega_0} = P_{0,1}$. Наконец, частоте $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1$ соответствуют индексы $m = -1$, $n = 1$ и мощность $P_{\omega_2} = P_{\omega_0 - \omega_1} = P_{-1,1}$.

Тогда внутреняя сумма в первом равенстве (8.106) дает

$$\sum_{n=-1}^{1} \frac{mP_{m,n}}{m\omega_1 + n\omega_0} = \frac{mP_{m,-1}}{m\omega_1 - \omega_0} + \frac{mP_{m,0}}{m\omega_1 + 0\cdot\omega_0} + \frac{mP_{m,1}}{m\omega_1 + \omega_0} =$$

$$= \frac{mP_{m,-1}}{m\omega_1 - \omega_0} + \frac{P_{m,0}}{\omega_1} + \frac{mP_{m,1}}{m\omega_1 + \omega_0}.$$

Суммируя полученное выражение по m, получаем первое равенство (8.106)

$$\sum_{m=0}^{1} \left(\frac{mP_{m,-1}}{m\omega_1 - \omega_0} + \frac{P_{m\,0}}{\omega_1} + \frac{mP_{m,1}}{m\omega_1 + \omega_0} \right) = \left(0 + \frac{P_{0,0}}{\omega_1} + 0 \right) +$$

$$+ \left(\frac{P_{1,-1}}{\omega_1 - \omega_0} + \frac{P_{1,0}}{\omega_1} + \frac{P_{1,1}}{\omega_1 + \omega_0} \right) = \frac{P_{1,-1}}{\omega_1 - \omega_0} + \frac{P_{1,0}}{\omega_1} = 0.$$

(Слагаемые, содержащие $P_{0,0}$ и $P_{1,1}$ отброшены.) Таким образом,

$$P_{\omega_0 - \omega_1}/[-(\omega_0 - \omega_1)] + P_{\omega_0}/\omega_1 = 0$$

или

$$P_{\omega_0 - \omega_1}/(\omega_0 - \omega_1) = P_{\omega_2}/\omega_2 = P_{\omega_1}/\omega_1.$$

Аналогичным образом второе равенство в (8.106) дает

$$P_{\omega_2}/\omega_2 = -P_{\omega_0}/\omega_0.$$

Итак, получаем пропорции

$$P_{\omega_1}/\omega_1 = P_{\omega_2}/\omega_2 = -P_{\omega_0}/\omega_0,$$

совпадающие с выражением (8.104).

Из проведенного анализа видно, что с помощью нелинейной емкости можно осуществить преобразование спектра, сопровождающееся перекачкой энергии из одного источника в другой. Так, если ω_1 — частота принимаемого сигнала, а ω_0 — частота гетеродина, то можно выделить комбинационную частоту $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1$ с одновременным усилением мощности колебания на этой частоте. Напомним, что при использовании резистивного нелинейного элемента преобразование частоты сигнала (см. § 8.11) не сопровождается перекачкой энергии от гетеродина.

Приведенные выше соотношения будут использованы в § 10.7 при анализе работы параметрического усилителя.

8.18. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ ПО ЗАДАННОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

В предыдущих параграфах настоящей главы изучалось воздействие сигналов на нелинейные элементы — безынерционные или энергоемкие — с последующим выделением полезных спектральных составляющих с помощью избирательной линейной цепи (см. функциональные схемы на рис. 8.13 и 8.14). В ряде задач желательно проведение прямого анализа, основанного на интегрировании уравнения цепи, содержащей нелинейный элемент.

Математическое уравнение, описывающее систему, моделируется на ЭВМ — аналоговой или цифровой. Сначала строится аналоговая структурная схема моделирования. Дискретизацией сигнала и дифференциального

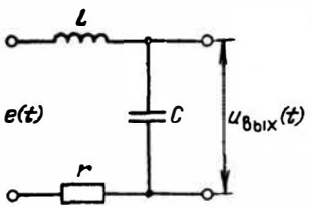


Рис. 8.51. Линейный четырехполюсник

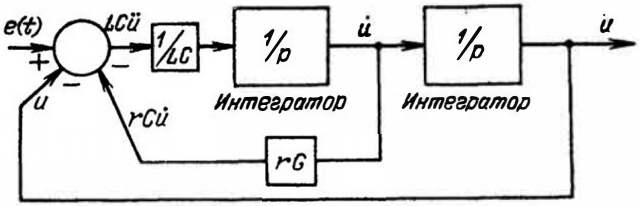


Рис. 8.52. Структурная схема моделирования уравнения (8.109)

уравнения системы результаты аналогового моделирования нетрудно затем преобразовать в алгоритм моделирования на цифровой ЭВМ.

Моделирование дифференциального уравнения проиллюстрируем сначала на примере линейной цепи, показанной на рис. 8.51. Напряжение (в операторной форме) на выходе цепи

$$U(p) = E(p)\frac{1/Cp}{Lp + r + 1/Cp} = \frac{E(p)}{LCp^2 + rCp + 1}.$$

Перепишем это выражение в форме

$$E(p) = LCp^2 U(p) + rCpU(p) + U(p). \tag{8.107}$$

Учитывая, что умножение $U(p)$ на p эквивалентно дифференцированию $u(t)$, а умножение на p^2 эквивалентно двухкратному дифференцированию, приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$e(t) = LC\frac{d^2u(t)}{dt^2} + rC\frac{du(t)}{dt} + u(t) = LC\ddot{u} + rC\dot{u} + u. \tag{8.108}$$

Решим это уравнение относительно наивысшей производной:

$$LC\ddot{u} = e - rC\dot{u} - u. \tag{8.109}$$

Уравнению (8.109) соответствует схема на рис. 8.52. Основными элементами этой схемы являются интеграторы на операционных усилителях, сумматоры и умножители на число. Выходы интеграторов $\dot{u}$ и u характеризуют состояние системы в рассматриваемый момент времени t с учетом начальных условий, т. е. состояния в момент времени t_0, а также с учетом действия входного сигнала на интервале от t_0 до t. В этом смысле выходы интеграторов $\dot{u}$ и u называют переменными состояния, а основанный на них способ интегрирования дифференциальных уравнений называют методом переменных состояния[1] (МПС).

По существу, представленное на рис. 8.52 устройство, основанное на применении интеграторов, решает заданное дифференциальное уравнение (8.108) и определяет реакцию цепи (см. рис. 8.51) на воздействие $e(t)$.

Принцип построения схемы, описанный выше, можно применить и для моделирования нелинейной системы. В качестве иллюстрации построим

[1] Этот метод получил особенно широкое распространение при анализе линейных систем со многими входами и выходами, когда эффективно применение матричного исчисления и векторного анализа для операций с большим числом переменных, входящих в исследуемые задачи [8].

В данном случае нас будет интересовать применение МПС к нелинейным задачам. [См. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления: Пер. с англ. — М.: Наука, 1970.]

схему, соответствующую нелинейному дифференциальному уравнению (8.81), которое запишем в форме

$$\ddot{q} = \frac{E}{L}\cos\omega t - 2\alpha\dot{q} - \omega_0^2 q + b_3 q^3. \qquad (8.110)$$

Схема представлена на рис. 8.53. Дополнительно к двум интеграторам и сумматору потребовался функциональный блок, осуществляющий операцию возведения в куб функции $q(t)$.

Определение реакции нелинейных цепей на заданное воздействие решением дифференциального уравнения требует, как правило, больших вычислительных затрат. Задача упрощается, если рассматриваемая нелинейная система допускает дискретное представление процессов, происходящих в отдельных ее элементах, как линейных, так и нелинейных. Такое положение имеет место, в частности, если нелинейные элементы являются *безынерционными*. В подобных случаях открывается путь к эффективному цифровому моделированию.

Покажем это на примере моделирования простого амплитудного детектора (см. рис. 8.24). Вольт-амперную характеристику диода представим в виде нелинейной функции

$$i_д = f(u_д) = f(e - u_{вых}), \qquad (8.111)$$

где $u_д = e - u_{вых}$ — напряжение, действующее на диоде.

Соотношение между токами в линейной части схемы определяется выражениями

$$i_R(t) + i_C(t) = i_д(t),\ i_R(t) = \frac{u_{вых}(t)}{R},\ i_C(t) = C\frac{du_{вых}(t)}{dt},$$

откуда вытекает следующее нелинейное уравнение:

$$C\frac{du_{вых}(t)}{dt} + \frac{1}{R}u_{вых}(t) = f[e(t) - u_{вых}(t)]$$

или

$$C\dot{u}_{вых} = f(e - u_{вых}) - \frac{1}{R}u_{вых}. \qquad (8.112)$$

Это уравнение моделируется аналоговой структурной схемой, представленной на рис. 8.54. На выходе сумматора I образуется разность $e - u_{вых}$, которая после нелинейного преобразования в диоде дает ток $i_д$, т. е. первое слагаемое в правой части (8.112).

Нелинейное безынерционное преобразование (8.111) легко реализуется в ЭВМ. Функция $f(u_д)$ может быть задана либо в виде таблицы (например, по экспериментальным данным), либо аналитически. В первом случае таблица должна храниться в памяти ЭВМ, во втором случае вычисление значений $i_д$ производится по программе, соответствующей аналитическому выражению.

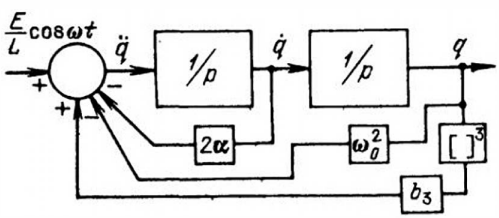


Рис. 8.53. Структурная схема моделирования уравнения (8.112)

Переходя к дискретному моделированию, задаем шаг T исходя из наивысшей частоты в спектре входного сигнала $e(t)$, руководствуясь правилами, изложенными в § 2.17.

Таким образом, входящие в уравнение (8.112) величины $e(t)$,

$u_{вых}(t)$ и $i_д(t)$ должны быть заменены соответственно, на $e(mT)$, $u_{вых}(mT)$ и $i_д(mT)$.

Для перехода от дифференциального уравнения (8.112) к эквивалентному ему разностному уравнению воспользуемся соответствием

$$\frac{du_{вых}(t)}{dt} \to \frac{u_{вых}(mT) - u_{вых}(mT-T)}{T}, \qquad (8.113)$$

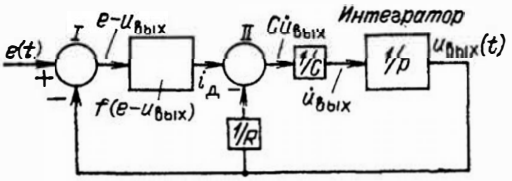


Рис. 8.54. Структурная схема моделирования уравнения (8.112)

которое имеет смысл при условии достаточной малости T.

Тогда уравнение (8.112) принимает вид

$$\frac{C}{T}[u_{вых}(mT) - u_{вых}(mT-T)] = f[e(mT) - u_{вых}(mT)] -$$

$$- \frac{1}{R} u_{вых}(mT)$$

или

$$u_{вых}(mT) = \frac{T}{\tau+T} Rf[e(mT) - u_{вых}(mT)] + \frac{\tau}{\tau+T} u_{вых}(mT-T) =$$

$$= a_0 Rf[e(mT) - u_{вых}(mT)] + b_1 u_{вых}(mT-T), \qquad (8.114)$$

где $\tau = RC$[1]; $a_0 = T/(\tau + T)$; $b_1 = \tau/(\tau + T)$.

Уравнению (8.114) соответствует схема, представленная на рис. 8.55, *а*, а общая аналоговая схема (см. рис. 8.54) после перехода к дискретной обработке принимает вид, показанный на рис. 8.55, *б*.

Из сопоставления аналоговой и дискретной схем следует, что звено с задержкой T в кольце обратной связи для разностного уравнения аналогично интегратору для дифференциального уравнения. Характеристики и свойства подобных устройств обсуждаются в § 12.8.

Моделирование рассматриваемой цепи целесообразно в тех случаях, когда аналитическое решение затруднительно или даже невозможно. Подобная ситуация имеет место, например, при детектировании относительно коротких радиоимпульсов, когда в пределах длительности импульса укладывается всего лишь несколько периодов высокочастотного заполнения и условие (8.56) оказывается невыполнимым (см. § 8.9).

Пусть, например, средняя частота заполнения $f_0 = 1/T_0 = 465$ кГц (промежуточная частота в обычном радиоприемнике), а длительность им-

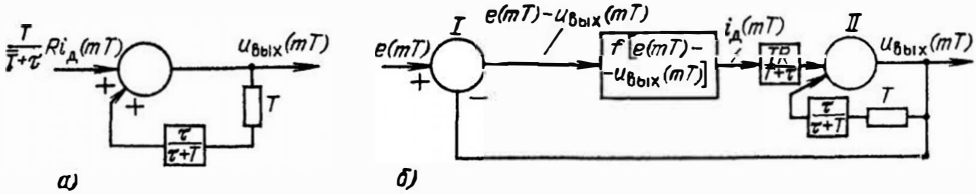


Рис. 8.55. Дискретный вариант схемы, представленной на рис. 8.54

[1] Постоянная времени $\tau = RC$, как правило, значительно больше периода высокочастотного заполнения входного сигнала $e(t)$, так что спектр выходного напряжения $u_{вых}(t)$ много у́же спектра сигнала $e(t)$. Следовательно, при значении T, обеспечивающем сохранение информации, которая содержится как в $e(t)$, так и в $f[e(t)]$, наверняка выполняется (8.113).

пульса $\tau_и = 10$ мкс. Постоянная времени нагрузки детектора RC приравнена длительности импульса: $\tau = \tau_и$.

Режим детектирования близок квадратичному (отсечка тока отсутствует), так что спектр тока $i_д$ приблизительно вдвое шире спектра входного сигнала $e(t)$. Шаг дискретизации зададим $T = T_0/8 = 0{,}25$ мкс (восемь отсчетов на один период $T_0 = 2$ мкс).

При указанных данных параметр $\tau/T = 10/0{,}25 = 40$ и коэффициенты a_0 и b_1 в выражении (8.114) будут:

$$a_0 = T/(\tau + T) \approx 0{,}025, \quad b_1 = \tau/(\tau + T) = 0{,}975.$$

Вычисление на ЭВМ по алгоритму (8.114) позволяет выявить форму сигнала на выходе детектора при любой форме огибающей импульса на входе, а также при любом законе угловой модуляции заполнения импульса.

Глава 9. ГЕНЕРИРОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

9.1. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА

Любой автогенератор представляет собой нелинейное устройство, преобразующее энергию питания в энергию колебаний. Независимо от схемы и назначения автогенератор должен иметь источник питания, усилитель и цепь обратной связи. Из приведенных в гл. 5 сведений следует, что обратная связь должна быть положительной.

Настоящая глава в основном посвящена изучению явлений в автогенераторах, используемых для получения высокочастотных гармонических колебаний. В качестве усилительных элементов в подобных генераторах используются транзисторы, электронные лампы и другие аналогичные приборы, а в качестве цепей нагрузки — колебательные цепи с сосредоточенными или распределенными параметрами.

Автогенератор, находящийся в стационарном режиме, представляет собой обычный нелинейный усилитель, для возбуждения которого используются колебания, вырабатываемые в самом генераторе; колебания с выхода усилителя подаются на его вход по цепи обратной связи. Если амплитуда и фаза возбуждения отвечают определенным условиям, то в энергетическом отношении автогенератор ведет себя так же, как и генератор с внешним возбуждением. Однако генератор с самовозбуждением имеет существенные особенности. Частота и амплитуда *автоколебания* в стационарном режиме определяются только параметрами самого генератора, между тем как в генераторе с внешним возбуждением частота и амплитуда колебаний навязываются возбудителем. Кроме того, в случае самовозбуждения большое значение имеет механизм возникновения колебаний при запуске автогенератора.

Все эти особенности можно выявить, рассматривая поведение автогенератора в процессе нарастания колебаний от момента запуска до полного установления стационарного состояния. Можно наметить следующую картину. В момент запуска в колебательной цепи автогенератора возникают свободные колебания, обусловленные включением источников питания, замыканием цепей, электрическими флуктуациями и т. д. Благодаря положительной обратной связи эти первоначальные колебания усиливаются, причем на первом

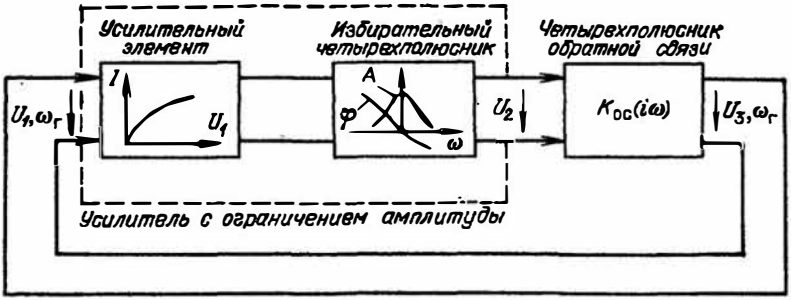


Рис. 9.1. Структурная схема автогенератора

этапе, пока амплитуда мала, усиление практически линейно и цепь можно рассматривать как линейную. Энергетически процесс нарастания амплитуд объясняется тем, что за один период колебания усилитель передает в нагрузку энергию, большую той, которая расходуется в ней за это время. С ростом амплитуд начинает проявляться нелинейность устройства (кривизна вольт-амперной характеристики усилительного элемента) и усиление уменьшается. Нарастание амплитуд прекращается, когда усиление уменьшается до уровня, при котором только компенсируется затухание колебаний в нагрузке. При этом энергия, отдаваемая усилителем за один период, оказывается равной энергии, расходуемой за это же время в нагрузке.

Таким образом, на последнем этапе установления колебаний основную роль играет нелинейность цепи, без учета которой нельзя определить параметры стационарного режима автогенератора.

Любой автогенератор высокочастотных колебаний в стационарном режиме можно представить в виде схемы, показанной на рис. 9.1 ($\omega_г$ обозначает частоту генерации). На этой схеме автогенератор изображен в виде сочетания трех четырехполюсников: одного нелинейного, безынерционного, и двух линейных. Нелинейный четырехполюсник соответствует усилительному элементу (транзистор, туннельный диод и т. д.), первый из линейных четырехполюсников — колебательной цепи автогенератора, а второй — цепи обратной связи. Подобное представление автогенератора справедливо для систем с *внешней обратной связью*.

В § 9.8 будут рассмотрены примеры автогенераторов, механизм работы которых приводит к *внутренней обратной связи*, требующей несколько иной трактовки обобщенной схемы.

Усилительный элемент совместно с избирательным четырехполюсником, обеспечивающим фильтрацию (подавление) высших гармоник, представляет собой обычный нелинейный усилитель, развивающий на выходе гармоническое напряжение. В общем случае усиление зависит как от частоты $\omega_г$ (из-за избирательности четырехполюсника), так и от амплитуды U_1 (из-за нелинейности усилительного элемента). Коэффициент усиления этого устройства обозначим через $\mathbf{K}_у\ (i\omega_г, U_1)$. Очевидно, что

$$\mathbf{K}_у\,(i\omega_г, U_1) = \mathbf{U}_2/\mathbf{U}_1. \tag{9.1}$$

При фиксированной частоте $\omega_г$ $\mathbf{K}_у$ является функцией только амплитуды U_1.

Коэффициент передачи линейного четырехполюсника обратной связи, который в дальнейшем будем называть просто коэффициентом обратной связи, можно выразить через амплитуды $\mathbf{U}_3$ и $\mathbf{U}_2$:

$$\mathbf{K}_{ос}\,(i\omega) = \mathbf{U}_3/\mathbf{U}_2.$$

Но напряжение $\mathbf{U}_2$, снимаемое с выхода четырехполюсника обратной связи, есть одновременно напряжение $\mathbf{U}_1$, действующее на входе усилителя. Следовательно,

$$\mathbf{K}_{oc}(i\omega) = \mathbf{U}_1/\mathbf{U}_2. \qquad (9.1')$$

Сравнивая это выражение с (9.1), приходим к выводу, что в стационарном режиме автогенератора (когда только и можно пользоваться методом комплексных амплитуд) коэффициенты $\mathbf{K}_y(i\omega_г, U_1)$ и $\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$ являются взаимно обратными величинами:

$$\mathbf{K}_y(i\omega_г, \mathbf{U}_1)\,\mathbf{K}_{oc}(i\omega_г) = 1.$$

Представим комплексные функции $\mathbf{K}_y(i\omega_г, U_1)$ и $\mathbf{K}_{oc}(i\omega_г)$ в форме

$$\mathbf{K}_y(i\omega_г, U_1) = K_y(\omega_г, U_1)\,e^{i\varphi_y(\omega_г)},\quad \mathbf{K}_{oc}(i\omega_г) = K_{oc}(\omega_г)\,e^{i\varphi_{oc}(\omega_г)}.$$

Тогда последнее равенство распадается на два условия:

$$K_y(\omega_г, U_1)\,K_{oc}(\omega_г) = 1, \qquad (9.2)$$

$$\varphi_y(\omega_г) + \varphi_{oc}(\omega_г) = 2\pi n. \qquad (9.3)$$

Условие (9.2) называют *условием баланса амплитуд*: из него следует, что в стационарном режиме полное усиление на генерируемой частоте при обходе кольца обратной связи равно единице.

Так как коэффициент передачи линейного четырехполюсника K_{oc} не зависит от амплитуды колебаний, то выражение (9.2) можно использовать для определения установившейся амплитуды колебания при заданном K_{oc}. Именно когда K_y, уменьшаясь с ростом амплитуды (из-за нелинейности вольт-амперной характеристики усилительного элемента), достигает значения $1/K_{oc}$, дальнейший рост амплитуды, как указывалось ранее, прекращается. Это поясняется рис. 9.2. Стационарная амплитуда $U_{1ст}$ определяется как абсцисса точки пересечения графика K_y с горизонталью, проведенной на уровне $1/K_{oc}$. Кроме того, выражение (9.2) можно использовать для определения коэффициента обратной связи, требуемого для поддержания определенной амплитуды $U_{1ст}$ при заданной функции $K_y(U_1)$.

Условие (9.3) называют *условием баланса фаз*. Из него следует, что в стационарном режиме автоколебаний полный фазовый сдвиг при обходе кольца ОС равен (или кратен) 2π. Условие баланса фаз позволяет определить частоту генерируемых колебаний $\omega_г$.

Для установления перечисленных общих свойств автогенератора нам не требовалось уточнять ни тип усилительного элемента, ни вид схемы автогенератора. Это объясняется тем, что мы ограничились рассмотрением *стационарного* режима автогенератора. Для выяснения же механизма возникновения колебаний, а также механизма установления стационарного режима необходимо исходить из конкретного электронного прибора и конкретной схемы автогенератора.

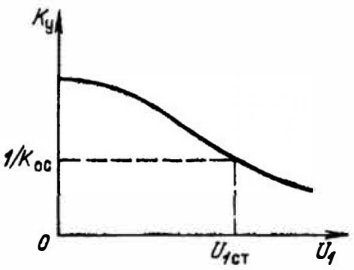


Рис. 9.2. К определению стационарной амплитуды автоколебания

Отметим одно важное требование, предъявляемое к автогенератору, предназначенному для устройств передачи информации: вырабатываемое им колебание должно быть строго монохроматическим (в отсутствие модуляции). Любое нарушение монохроматичности, проявляющееся в паразитном изменении

амплитуды, частоты или фазы колебания, может служить причиной возникновения помех в канале радиосвязи. Требование монохроматичности включает в себя также и требование стабильности частоты автоколебания.

9.2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОЛЕБАНИЯ В АВТОГЕНЕРАТОРЕ

Механизм возникновения и нарастания колебания удобнее всего рассмотреть с помощью схемы лампового автогенератора (рис. 9.3, *а*).

Допустим, что запуск автогенератора осуществляется включением в момент $t = 0$ постоянного напряжения E_{a0}. Бросок анодного тока i_a (0) (рис. 9.3, *б*) возбуждает в контуре $L_к$, $C_к$ свободное колебание, параметры которого определяются параметрами контура, лампы и обратной связи. На начальном этапе запуска, пока амплитуда колебания мала, представленную на рис. 9.3, *а* цепь можно рассматривать как линейную. Составим для этой цепи дифференциальное уравнение, учитывающее лишь переменные составляющие токов и напряжений.

Колебательное напряжение на контуре $u_{ак}$ и токи i_C, i_R, i_L (см. рис. 9.3, *а*) связаны между собой очевидными соотношениями

$$i_a = i_C + i_R + i_L, \tag{9.4}$$

$$i_C = C_к \frac{du_{ак}}{dt}, \quad i_R = \frac{u_{ак}}{R}, \quad i_L = \frac{1}{L_к}\int u_{ак}\,dt. \tag{9.5}$$

В качестве искомой функции выберем, например, напряжение на контуре $u_{ак}$. Подставляя (9.5) в уравнение (9.4), получаем

$$i_a = C_к \frac{du_{ак}}{dt} + \frac{1}{R}u_{ак} + \frac{1}{L_к}\int u_{ак}\,dt. \tag{9.6}$$

Теперь необходимо ток i_a выразить через напряжения, действующие на электродах лампы. В линейном режиме для этого можно использовать выражение вида (5.40)

$$i_a = Su_{ск} - u_{ак}/R_i. \tag{9.7}$$

В рассматриваемой схеме напряжение $u_{ск}$ является напряжением обратной связи, причем $u_{ск} \approx u_{ос} = (M/L_к)\,u_{ак}$, следовательно,

$$i_a = (SM/L_к - 1/R_i)\,u_{ак}. \tag{9.7'}$$

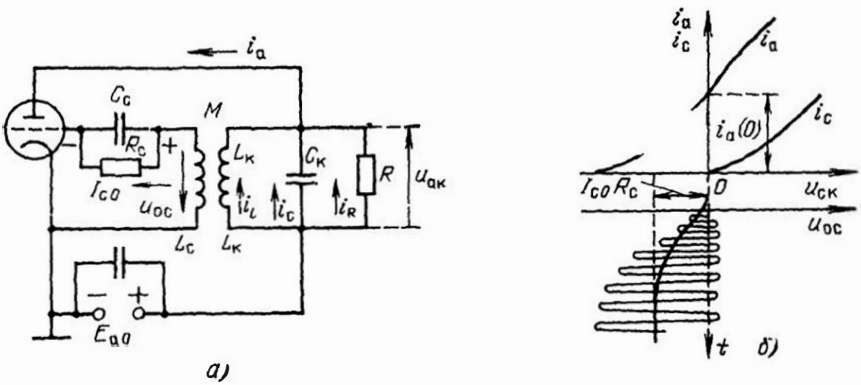


Рис. 9.3. Одноконтурный ламповый автогенератор (*а*) и режим работы при запуске (*б*)

Приравнивая правые части уравнений (9.6)и(9.7′), после группировки слагаемых получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 u_{ак}}{dt^2} + \frac{1}{C_к}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_i} - \frac{SM}{L_к}\right)\frac{du_{ак}}{dt} + \frac{1}{L_к C_к} u_{ак} = 0. \qquad (9.8)$$

Величина $(-SM/L_к)$ в коэффициенте при первой производной имеет смысл *отрицательной проводимости*, шунтирующей колебательный контур. Эта проводимость обусловлена усилителем с положительной обратной связью.

Вводя обозначение

$$\alpha_{эк} = \frac{1}{2C_к}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_i} - \frac{SM}{L_к}\right), \qquad (9.9)$$

записываеваем (9.8) в виде

$$\frac{d^2 u_{ак}}{dt^2} + 2\alpha_{эк}\frac{du_{ак}}{dt} + \frac{1}{L_к C_к} u_{ак} = 0. \qquad (9.8')$$

Общее решение уравнения (9.8′) имеет вид

$$u_{ак}(t) = U_{ак}(0)\, e^{-\alpha_{эк} t} \cos(\omega_{св} t + \theta_0), \qquad (9.10)$$

где амплитуда $U_{ак}(0)$ и фаза θ_0 — постоянные величины, зависящие от начальных условий, а частота свободного колебания

$$\omega_{св} = \sqrt{1/LC - \alpha_{эк}^2}. \qquad (9.11)$$

Предполагается заведомо колебательный режим, когда

$$1/L_к C_к > \alpha_{эк}^2.$$

Характер изменения амплитуды свободного колебания (9.10) зависит от знака $\alpha_{эк}$, т. е. от знака коэффициента при первой производной в уравнении (9.8). Если $\alpha_{эк} > 0$, то колебание затухает (рис. 9.4, *а*), если $\alpha_{эк} < 0$, то амплитуда колебания растет (рис. 9.4, *б*).

Учитывая выражение (9.9), приходим к следующему условию возникновения и нарастания колебания:

$$\alpha_{эк} = \frac{1}{2C_к}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_i} - \frac{SM}{L_к}\right) < 0$$

или

$$SM/L_к > 1/R + 1/R_i. \qquad (9.12)$$

Выполнение этих неравенств обеспечивает рост амплитуды колебания при сколь угодно малых начальных значениях амплитуды.

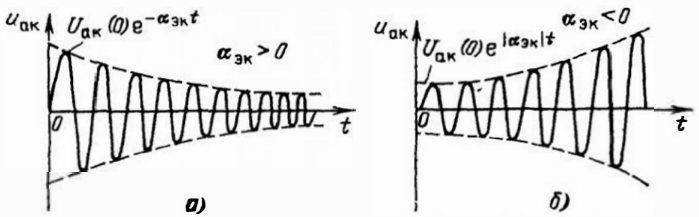


Рис. 9.4. Изменение амплитуды свободного колебания в зависимости от знака затухания

Неравенству (9.12) можно придать бо́льшую наглядность, если переписать его в форме

$$\frac{M}{L_к} > \frac{1}{S}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_i}\right).$$

Учитывая, что отношение $M/L_к$, равное отношению напряжения $u_{ос}$ к напряжению $u_{ак}$, является коэффициентом обратной связи $K_{ос}$, а также что $1/SR_i = D$, получаем

$$K_{ос} > 1/SR + D. \qquad (9.13)$$

Это неравенство является основным *условием самовозбуждения автогенератора*. Оно позволяет легко объяснить влияние основных параметров усилительного прибора и схемы на возникновение колебаний. Чем больше крутизна вольт-амперной характеристики S, тем меньше требуемое значение $K_{ос}$, т. е. тем легче возникают автоколебания. Увеличение же параметра D, отображающего обратную реакцию анодного напряжения на входную цепь, наоборот, требует увеличения $K_{ос}$. Очевидно также, что уменьшение нагрузочного сопротивления требует увеличения обратной связи.

Заметим, что правая часть неравенства (9.13).

$$\frac{1}{SR} + D = \frac{1 + R/R_i}{SR}$$

есть не что иное, как величина, обратная коэффициенту усиления в линейном режиме [см. (5.37)].

Таким образом, неравенство (9.13) можно записать еще и в такой форме:

$$K_{ос} > 1/K_у. \qquad (9.13')$$

К полученному результату можно также прийти, рассматривая автогенератор на начальном этапе запуска как линейный усилитель с положительной обратной связью. При $K_{ос}K_у > 1$ такой усилитель является *неустойчивой* цепью (см. § 5.10).

В процессе нарастания амплитуды колебания коэффициент $K_у$ уменьшается из-за отрицательного напряжения смещения $U_{с0} = R_с I_{с0}$, создаваемого постоянной составляющей тока сетки $I_{с0}$ на резисторе $R_с$ (см. рис. 9.3, *а*). Явления в цепи сетки полностью совпадают с явлениями в однополупериодном выпрямителе (см. § 8.8), в котором роль диода играет промежуток сетка—катод лампы, а нагрузки — цепь $R_с C_с$. При постоянной времени $R_с C_с$, намного превышающей период высокочастотного колебания $u_{ос}(t)$, выпрямленное напряжение растет пропорционально амплитуде напряжения обратной связи $u_{ос}(t)$. В результате рабочая точка на характеристике лампы с ростом амплитуды колебания постепенно смещается влево, что приводит к отсечке анодного тока и уменьшению крутизны $S_{ср}$ (см. § 8.5).

Стационарный режим автоколебаний наступает, когда неравенство (9.13′) обращается в равенство.

Таким образом, цепь $R_с C_с$ автоматически обеспечивает изменение напряжения смещения, благодаря чему удается сочетать благоприятные для запуска условия ($U_{ск0} = 0$) с выгодным энергетическим режимом работы генератора (отсечка анодного тока) в стационарном режиме.

Неравенство $K_{ос} > 1/K_у$ можно рассматривать как условие самовозбуждения автогенератора любого типа. Однако механизм ограничения амплитуды колебания зависит от особенностей усилительного прибора. Так, в транзисторном автогенераторе с общим эмиттером (рис. 9.5, *а*) рабочая точка на вольт-амперной характеристике в момент запуска расположена не в начале координат, а при положительном значении $U_{бэ0}$ (рис. 9.5, *б*). Это не-

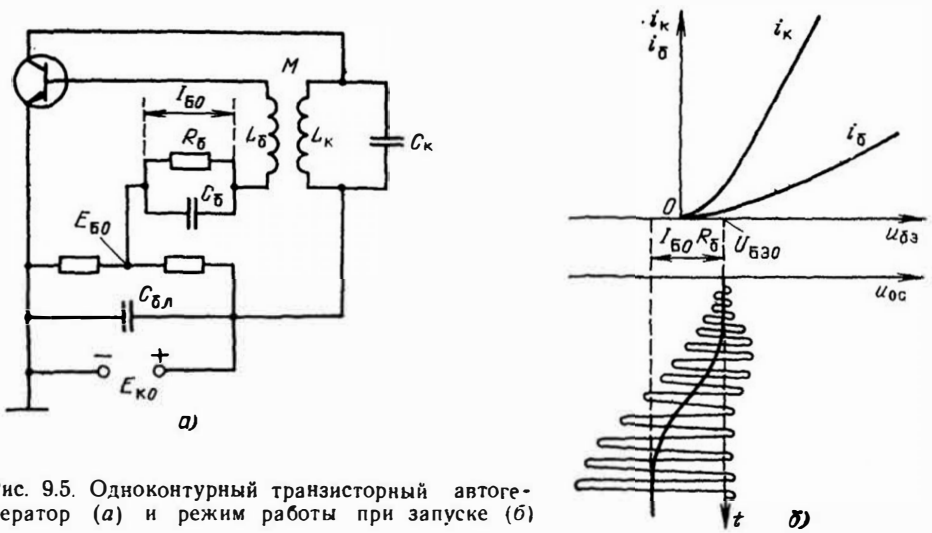


Рис. 9.5. Одноконтурный транзисторный автогенератор (*а*) и режим работы при запуске (*б*)

обходимо ввиду того, что в транзисторе токи коллектора и базы связаны соотношением $i_к = \beta i_б$ и требование достаточно большой крутизны характеристики (для облегчения условия самовозбуждения) заставляет располагать рабочую точку на линейном участке характеристики $i_б$ ($u_{бэ}$). Поэтому на начальном этапе запуска нарастание амплитуды колебания не сопровождается увеличением напряжения смещения (отрицательного). Рабочая точка сдвигается влево лишь при заходе амплитуды колебания на нижний сгиб характеристики, когда проявляется эффект выпрямления напряжения $u_{ос}$ (t) в цепи база—эмиттер.

В схеме на рис. 9.5, *а* в отличие от схемы на рис. 9.3, *а* показан независимый источник постоянного напряжения $E_{б0}$, включенный последовательно с цепью $R_б$, $C_б$ автоматического смещения.

В транзисторных автогенераторах напряжения $E_{б0}$ и $E_{к0}$ обычно подают от общего источника.

9.3. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ АВТОГЕНЕРАТОРА

Выяснив условия возникновения колебаний, определим амплитуду и частоту автоколебания в стационарном режиме. Для определения амплитуды можно воспользоваться соотношением (9.2), пригодным для любого автогенератора. Неравенство (9.13) обращается в равенство (9.2) только при уменьшении средней крутизны $S_{ср}$ до значения, отвечающего условию

$$K_{ос} = 1/S_{ср} R + D \text{ или } S_{ср} = 1/(K_{ос} - D) R. \qquad (9.14)$$

Так как $S_{ср}$ зависит от амплитуды колебания, второе равенство (9.14) позволяет найти стационарную амплитуду. Более наглядно определение стационарной амплитуды, основанное на методе *колебательной характеристики* $I_{кнт}(E_{вх})$, где $I_{кнт}$ — амплитуда тока в колебательном контуре усилителя, получающегося из автогенератора при устранении обратной связи.

Задавая на входе усилителя амплитуду $E_{вх}$ высокочастотного колебания с частотой $\omega \approx \omega_р = 1/\sqrt{L_к C_к}$, находят (расчетом или экспериментально) амплитуду тока в контуре $I_{кнт}$. Типичный вид колебательной характери-

стики показан на рис. 9.6 (кривая I). При малых амплитудах $E_{вх}$ эта характеристика линейна, так как рабочая точка по условию расположена на линейном участке вольт-амперной характеристики. Ограничение колебательной характеристики усилителя при больших амплитудах $E_{вх}$ обусловлено ростом напряжения смещения (при использовании цепи автоматического смещения, см. предыдущий параграф).

Для определения амплитуды тока, которая установилась бы в автогенераторе (после введения обратной связи), необходимо найти зависимость между $I_{кнт}$ и напряжением $U_{ос}$. Так как $U_{ос} = I_{кнт} X_{св}$, где $X_{св}$ — сопротивление связи, то $I_{кнт} = U_{ос}/X_{св}$. Эта зависимость, определяемая линейной цепью автогенератора, показана на рис. 9.6 в виде линии II, наклоненной к оси абцисс под углом $\gamma = \operatorname{arctg}(1/x_{св})$. Эта линия называется л и н и е й о б р а т н о й с в я з и.

Ордината точки пересечения линий I и II определяет стационарную амплитуду тока $I_{кнг\ ст}$, а абсцисса — стационарную амплитуду напряжения $U_{ос\ ст}$. Действительно, в точке пересечения значение тока $I_{кнт}$ в контуре усилительного прибора (линия I) как раз совпадает со значением тока (линия II), необходимым для создания исходного напряжения $U_{ос}$.

С увеличением связи наклон линии II уменьшается и стационарная амплитуда тока растет. При очень сильной обратной связи $I_{кнт\ ст}$ может даже уменьшиться из-за спада колебательной характеристики усилителя, связанного с заходом в область насыщения вольт-амперной характеристики усилительного прибора. Такой режим получается при связи, соответствующей линии OA (см. рис. 9.6).

Нетрудно показать, что точка C пересечения линий I и II является *устойчивой*. Это означает, что при случайных отклонениях амплитуды тока от стационарного значения автогенератор возвращается в исходное состояние. Это свойство автогенератора поясняется рис. 9.7. Допустим, что амплитуда тока в контуре увеличивалась на ΔI. Это вызовет увеличение напряжения обратной связи на $\Delta U_{ос}$. Но при напряжении на входе $U_{ос\ ст} + \Delta U_{ос}$ усилительный прибор способен поддерживать в контуре лишь ток $I'_{кнт}$, меньший тока $I_{кнт\ ст} + \Delta I$. Следовательно, ток в контуре не может удержаться на уровне $I_{кнт\ ст} + \Delta I$ и должен убывать, т. е. возвращаться к исходному значению $I_{кнт\ ст}$. То же будет и при случайном уменьшении тока в контуре.

Определим частоту автоколебаний. В первом приближении эта частота совпадает с резонансной частотой контура $L_к C_к$, шунтированного внутренним сопротивлением электронного прибора и резистором R. При линейном рассмотрении (на начальном этапе нарастания амплитуды) влияние указанных факторов учитывалось параметром $\alpha_{эк}$, входящим в формулу (9.11).

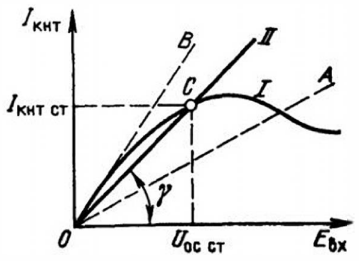


Рис. 9.6. Колебательная характеристика нелинейного усилителя с автоматическим смещением

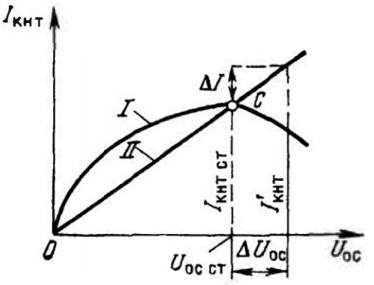


Рис. 9.7. К доказательству устойчивости стационарного режима автогенератора

В стационарном режиме, когда внутреннее сопротивление электронного прибора R_i', приведенное к току первой гармоники, зависит от угла отсечки (см. § 8.4), частота генерации несколько отличается от $\omega_р$. Эту поправку к частоте приходится учитывать при оценке нестабильности частоты, обусловленной влиянием непостоянства режима работы усилительного прибора. Однако при выполнении расчетов частоту автоколебаний обычно считают совпадающей с резонансной частотой колебательного контура.

Имеются, однако, еще и другие факторы, которые влияют на частоту генератора существеннее, чем R_i'. Для выявления этих факторов рассмотрим фазовые соотношения в замкнутом кольце обратной связи автогенератора. Сумма всех фазовых сдвигов в кольце должна равняться $n2\pi$, где n — целое число [см. (9.3)].

Для простого одноконтурного автогенератора это условие можно записать в форме

$$\varphi_у + \varphi_{ос} = 2\pi, \tag{9.15}$$

где $\varphi_у$ — аргумент комплексного коэффициента усиления $\mathbf{K}_у$; $\varphi_{ос}$ — аргумент комплексного коэффициента обратной связи $\mathbf{K}_{ос}$.

Исходя из уравнения для коэффициента усиления

$$\mathbf{K}_у \approx -\mathbf{S}_{ср} Z_{экв}(i\omega), \tag{9.16}$$

где $\mathbf{S}_{ср}$ — в общем случае комплексная крутизна, получаем для $\varphi_у$ следующее выражение:

$$\varphi_у = \varphi_S + \varphi_z + \pi. \tag{9.17}$$

Здесь φ_s — аргумент $\mathbf{S}_{ср}$; φ_z — аргумент сопротивления параллельного колебательного контура. Слагаемое π учитывает знак минус в правой части (9.16).

Итак, уравнение баланса фаз (9.16) для одноконтурного генератора принимает вид

$$\varphi_S + \varphi_z + \varphi_{ос} + \pi = 2\pi. \tag{9.18}$$

или

$$\varphi_S + \varphi_z + \varphi_{ос} = \pi. \tag{9.19}$$

Из условия (9.19) следует, что все факторы, влияющие на фазовые сдвиги в отдельных звеньях автогенератора, влияют и на частоту генерируемых колебаний. Так, включение фазосдвигающей цепи в четырехполюсник обратной связи сдвигает частоту генерации относительно резонансной частоты колебательной цепи автогенератора. Работа подобного автогенератора, в котором в качестве фазосдвигающего устройства используется линия задержки, рассматривается в § 9.10.

В практике часто приходится считаться с влиянием и угла φ_s на частоту автоколебаний. Во всех предыдущих параграфах данной главы, а также гл. 8 средняя крутизна характеристики усилительного прибора считалась действительной величиной ($\varphi_s = 0$). Между тем следует отметить по крайней мере два фактора, придающих средней крутизне комплексный характер: неполное отфильтровывание высших гармоник импульсного тока, инерция электронов.

Механизм влияния токов высших гармоник на частоту генерации заключается в следующем. При прохождении через колебательную цепь эти токи создают некоторое, хотя и очень малое, падение напряжения, благодаря чему результирующее напряжение на колебательном контуре, а следовательно, и на выходе цепи обратной связи становится негармоническим. Это приводит к тому, что положительная полуволна возбуждающего напряжения,

определяющая форму импульса тока, деформируется, становясь несимметричной относительно своего максимального значения. Асимметрия объясняется тем, что для высших гармоник тока колебательная цепь представляет собой почти чисто реактивное, а для первой гармоники — активное сопротивления; добавочные напряжения от высших гармоник имеют начальную фазу 90° (при нулевой начальной фазе напряжения от первой гармоники).

Асимметрия импульса электронного тока, в свою очередь, приводит к некоторому сдвигу фазы первой гармоники тока относительно первой гармоники возбуждающего напряжения. В результате отношение I_1 к E_1, т. е. средняя крутизна $S_{ср}$, становится комплексной величиной. Ясно, что чем выше добротность колебательной цепи, тем ближе напряжения к гармоническим и тем слабее влияние высших гармоник на частоту генерации.

В автогенераторах с обычными колебательными контурами относительная поправка к частоте, обусловленная влиянием высших гармоник, порядка 10^{-4}—10^{-5}.

Инерция электронов существенно влияет только в автогенераторах, работающих на очень высоких частотах, когда время пролета электроном междуэлектродных промежутков оказывается соизмеримым с периодом колебания. В результате получается значительный фазовый сдвиг между первой гармоникой тока и напряжением на входе электронного прибора, который следует учитывать при построении цепи обратной связи.

9.4. МЯГКИЙ И ЖЕСТКИЙ РЕЖИМЫ САМОВОЗБУЖДЕНИЯ

Вернемся к рис. 9.6 и выясним поведение автогенератора при изменении коэффициента обратной связи. При ослаблении связи наклон линии II растет, и при некотором критическом значении $K_{ос}$, обращающем неравенство (9.13) в равенство возникновение колебаний невозможно. Линия связи, соответствующая критической обратной связи, занимает положение OB.

Если в автогенераторе с индуктивной обратной связью и колебательной характеристикой, показанной на рис. 9.6, плавно увеличивать M, то начиная с критического значения $M_{кр}$ амплитуда стационарного колебания будет плавно возрастать, как показано на рис. 9.8. Такой режим самовозбуждения называется м я г к и м. Из сказанного следует, что для получения мягкого режима необходимо, чтобы колебательная характеристика выходила из нулевой точки и имела достаточно большой наклон в области малых амплитуд. Все эти требования выполняются при использовании автоматического смещения.

При использовании принудительного (внешнего) смещения колебательная характеристика принимает вид, показанный на рис. 9.9. Для возникнове-

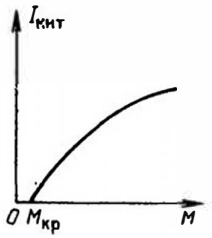


Рис. 9.8. Зависимость стационарной амплитуды от обратной связи при мягком режиме

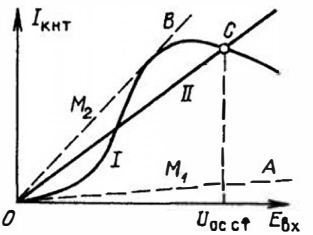


Рис. 9.9. Колебательная характеристика, соответствующая жесткому режиму

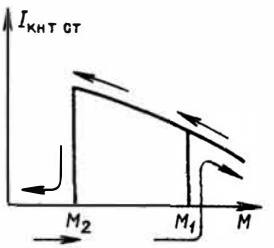


Рис. 9.10. Зависимость стационарной амплитуды от обратной связи при жестком режиме

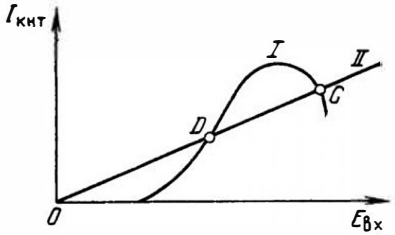


Рис. 9.11. К вопросу об устойчивости генерации при жестком режиме

ния колебаний в данном случае требуется очень сильная обратная связь (линия OA, взаимоиндукция M_1). После того как колебания установились, связь можно ослабить до значения M_2, при котором линия связи занимает положение OB. При дальнейшем ослаблении связи колебания срываются. Для восстановления колебаний M нужно увеличить до значения M_1, соответствующего линии связи OA. Такой режим самовозбуждения называется ж е с т к и м.

Зависимость стационарной амплитуды $I_{кнт\,ст}$ от M при жестком режиме показана на рис. 9.10, причем стрелками обозначено направление изменения M.

Если принудительное напряжение смещения настолько велико, что колебательная характеристика начинается не с нуля (рис. 9.11), то никакое увеличение обратной связи не способно вызвать автоколебания. Если же вызвать колебания с помощью внешнего воздействия, то при достаточно сильной обратной связи колебания могут существовать и после прекращения воздействия. Из двух точек пересечения линий I и II точка C является устойчивой, а точка D — неустойчивой (имеется в виду динамическая устойчивость, т. е. устойчивость генерации). Это означает, что при небольших случайных отклонениях амплитуды тока в контуре около точки C система возвращается в исходное состояние, сколь же угодно малое отклонение амплитуды в районе точки D прогрессивно возрастает и переводит амплитуду $I_{кнт}$ либо в устойчивую точку C, либо в точку 0 (соответствующую статической устойчивости). Доказательство неустойчивости точки D аналогично доказательству устойчивости точки C, приведенному в предыдущем параграфе.

9.5. ПРИМЕРЫ СХЕМ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

На рис. 9.12—9.14 представлены три разновидности схем одноконтурных автогенераторов, различающихся лишь цепями обратной связи. Схема с индуктивной (трансформаторной) обратной связью (рис. 9.12) уже рассматривалась в § 9.2 (см. рис. 9.3, *а*). Схему с кондуктивной (автотрансформаторной) обратной связью (рис. 9.13) и схему с емкостной обратной связью (рис. 9.14) часто называют трехточечными: усилительный прибор подключается к трем точкам контура *к*, *э* и *б*.

В схемах на рис. 9.12 и 9.13 емкости $C_{бл}$ блокировочных конденсаторов обычно настолько велики, что по высокой частоте точку *э* практически можно считать соединенной с эмиттером накоротко. Так как эмиттеры заземлены, то точки *э* являются точками нулевого потенциала.

Избирательный четырехполюсник и четырехполюсник обратной связи, показанные на рис. 9.1, в рассматриваемых простейших генераторах совмещены в одном колебательном контуре. Входными зажимами этого четырехполюсника являются точки *к* и *э*, к которым подключены коллектор и эмиттер а выходными — точки *б* и *э* подключения базы и эмиттера. Таким образом, показанные на рис. 9.12—9.14 схемы можно заменить одной схемой (рис. 9.15). Источники энергии на этой схеме не показаны.

В рассматриваемых простейших схемах частота генерации близка к резонансной частоте контура. На этой частоте падение напряжения на контуре $\mathbf{U}_{кэ}$ совпадает (или почти совпадает) по фазе с током $\mathbf{I}_{к1}$, а последний — с напряжением $\mathbf{U}_{бэ}$. Замечаем, что напряжение $\mathbf{U}_{кэ}$ направлено, как и ток $\mathbf{I}_{к1}$

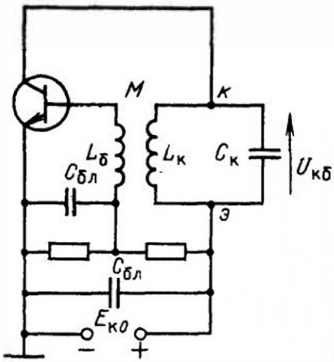


Рис. 9.12. Автогенератор с трансформаторной обратной связью

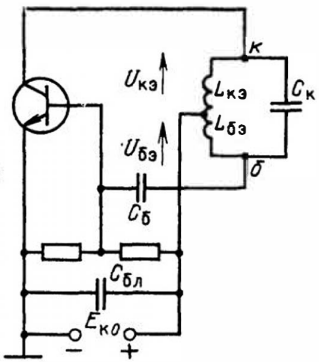


Рис. 9.13. Автогенератор с автотрансформаторной обратной связью

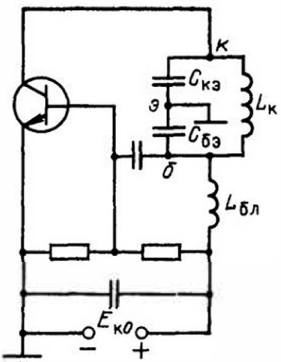


Рис. 9.14. Автогенератор с емкостной обратной связью

во внешней цепи, от эмиттера к коллектору. Если напряжение на выходе четырехполюсника обратной связи будет в фазе с $\mathbf{U}_{кэ}$, то оно окажется в противофазе с исходным напряжением $\mathbf{U}_{бэ}$. Из этого следует, что аргумент коэффициента обратной связи $\mathbf{K}_{ос}(i\omega)$, т. е. фазовый сдвиг в четырехполюснике обратной связи, должен быть близок к 180°. К этому результату можно также прийти с помощью следующих рассуждений: одноконтурный резонансный усилитель поворачивает фазу усиливаемого колебания на 180°, следовательно, для поддержания автоколебания напряжение, подаваемое по цепи обратной связи с выхода на вход, должно получить дополнительный сдвиг на 180°. Нетрудно проследить, как обеспечивается это требование в схемах на рис. 9.12 и 9.13: в схеме с трансформаторной обратной связью (см. рис. 9.12) сдвиг фазы на 180° получается при правильном подключении катушки $L_б$ к зажимам база—эмиттер. Модуль коэффициента обратной связи

$$K_{ос} = M/L_к. \tag{9.20}$$

В автотрансформаторной схеме (см. рис. 9.13) требуемая фазировка достигается съемом напряжения обратной связи с катушки индуктивности $L_{бэ}$, входящей в емкостную ветвь контура. При резонансе токи в индуктивной и емкостной ветвях контура равны по амплитуде и противоположны по направлению. Следовательно, индуктивности $L_{кэ}$ и $L_{бэ}$ обтекаются одним и тем же контурным током и образуют делитель напряжений. По отношению к эмиттеру, подключенному к промежуточной точке контура, напряжения, снимаемые с катушек $L_{кэ}$ и $L_{бэ}$, находятся в противофазе.

Модуль коэффициента обратной связи

$$K_{ос} = L_{бэ}/L_{кэ}. \tag{9.21}$$

Резонансная частота колебательного контура в автогенераторе с кондуктивной трехточечной схемой

$$\omega_р = 1/\sqrt{(L_{кэ} + L_{бэ})\,C_к}. \tag{9.22}$$

Наконец, для схемы с емкостной обратной связью (см. рис. 9.14)

$$K_{ос} = C_{кэ}/C_{бэ}, \tag{9.23}$$

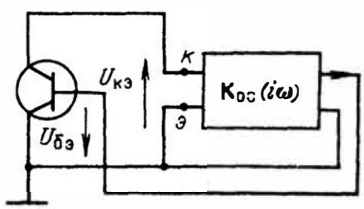


Рис. 9.15. Схема замещения одноконтурного автогенератора

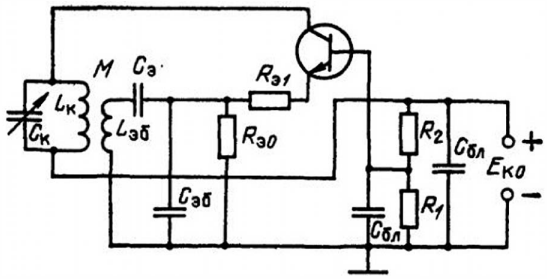


Рис. 9.16. Автогенератор на транзисторе с общей базой

а резонансная частота контура

$$\omega_р = 1/\sqrt{L_к C_{эк}}, \qquad (9.24)$$

где

$$C_{эк} = C_{кэ} C_{бэ}/(C_{кэ} + C_{бэ}). \qquad (9.25)$$

При рассмотрении всех перечисленных схем не учитывались паразитные параметры — межэлектронные емкости, индуктивности вводов, фазовый сдвиг коллекторного тока из-за влияния инерции электронов и т. д. Поэтому коэффициент обратной связи в одноконтурных автогенераторах оказался независимым от частоты. Этот вывод справедлив при относительно невысоких частотах. С повышением рабочей частоты схема замещения автогенератора усложняется и коэффициент обратной связи должен рассматриваться с учетом перечисленных факторов. Частотная зависимость $\mathbf{K}_{ос}(i\omega)$ особенно сильно выражена для транзисторных автогенераторов, работающих на частотах, близких к граничной частоте транзистора. Аргумент φ_s комплексной крутизны $\mathbf{S}_{ср}$ (см. § 8.3) достигает в этих генераторах 90° и более. Аргумент $\varphi_{ос}$ цепи обратной связи отличается при этом от 180°.

На высоких частотах большое распространение получили транзисторные автогенераторы, работающие по схеме с ОБ и обладающие конструктивными преимуществами по сравнению со схемой с ОЭ. Типичная схема гетеродинов радиоприемников представлена на рис. 9.16. Резистор $R_{э0}$ автосмещения включен в цепь эмиттера.

9.6. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ АВТОГЕНЕРАТОРА

В предыдущих параграфах данной главы изучались условия возникновения колебаний и определялась устойчивость стационарного режима автогенератора. Необходимо рассмотреть весь процесс установления автоколебаний: от включения до установления стационарного режима. Это важно для ряда приложений, когда приходится иметь дело с формированием коротких радиоимпульсов (например, в импульсных радиосистемах). Для полного описания работы автогенератора, охватывающего все стадии процесса установления, необходимо отказаться от условия малости амплитуд, лежащего в основе линейного дифференциального уравнения (9.8′).

Использованное при составлении этого уравнения линейное соотношение (9.7), которое можно привести к виду

$$i_а = S(u_{ск} - Du_{ак}), \qquad (9.26)$$

необходимо заменить нелинейной функцией

$$i_а = \psi(u_{ск} - Du_{ак}), \qquad (9.27)$$

определяющей ток $i_а$ при любых значениях $u_{ск}$ и $u_{ак}$.

Запишем аргумент нелинейной функции ψ в форме

$$u_{ск} - Du_{ак} = (u_{ск}/u_{ак} - D)\,u_{ак} = (K_{ос} - D)\,u_{ак} = K'_{ос}(u_{ак}), \qquad (9.28)$$

где $K'_{ос} = K_{ос} - D$.

Тогда

$$i_a = \psi(u_{ск} - u_{ак}) = \psi(K'_{ос}\, u_{ак}). \tag{9.29}$$

Подстановка (9.5) и (9.29) в (9.4) приводит к уравнению

$$C\frac{du_{ак}}{dt} + \frac{1}{R}u_{ак} + \frac{1}{LC}\int u_{ак}\,dt = \psi(K'_{ос}\,u_{ак}). \tag{9.30}$$

Дифференцируя (9.30) по t, получаем

$$\frac{d^2u_{ак}}{dt^2} + \frac{1}{CR}\frac{du_{ак}}{dt} + \frac{1}{LC}u_{ак} = \frac{1}{C}\frac{d\psi(K_{ос}\,u_{ак})}{dt} \tag{9.31}$$

или

$$\frac{d^2u_{ак}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left[\frac{u_{ак}}{CR} - \frac{1}{C}\psi(K'_{ос}\,u_{ак})\right] + \frac{1}{LC}u_{ак} = 0. \tag{9.32}$$

Как и следовало ожидать, получилось нелинейное уравнение. Дальнейший путь заключается в подстановке в уравнение (9.32) какой-либо подходящей аппроксимации функции $\psi(K'_{ос}u_{ак})$.

Наиболее удобной является аппроксимация с помощью степенного полинома. Чтобы не слишком усложнять задачу, обычно исходят из неполного полинома третьей степени [см. (8.13)]

$$i_a = \psi(K'_{ос}\,u_{ак}) = a_1K'_{ос}\,u_{ак} + a_3(K'_{ос}\,u_{ак})^3 = a_1K'_{ос}\,u_{ак} - \\ -|a_3|(K'_{ос}\,u_{ак})^3. \tag{9.33}$$

Входящее в выражение (8.13) слагаемое $i\,(U_0)$ опущено, так как оно не влияет на поведение функции $u_{ак}$. Знак минус перед кубическим членом взят в соответствии с формулой (8.14).

Аппроксимация (9.33) пригодна при фиксированном положении рабочей точки на вольт-амперной характеристике (в точке перегиба, см. рис. 8.5). Следовательно, при этом не учитывается изменение напряжения смещения U_0 в процессе нарастания амплитуды колебания (при автоматическом смещении). Тем не менее, как показывает опыт, аппроксимация (9.33) все же позволяет выявить основные черты процесса установления колебаний в генераторе, работающем в мягком режиме.

Подставляя (9.33) в (8.32), получаем

$$\frac{d^2u_{ак}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R} - K'_{ос}a_1\right)u_{ак} + |a_3|\,K'^3_{ос}\,u^3_{ак}\right] + \frac{1}{LC}u_{ак} = 0.$$

или

$$\frac{d^2u_{ак}}{dt^2} - (2|\alpha_{эк}| - \gamma_{эк}u^2_{ак})\frac{du_{ак}}{dt} + \omega_0^2u_{ак} = 0, \tag{9.34}$$

где использованы обозначения

$$2\alpha_{эк} = (1/R - K'_{ос}a_1)/C;\quad \gamma_{эк} = 3|a_3|\,K'^3_{ос}/C;\quad \omega_0^2 = 1/LC. \tag{9.35}$$

Заметим, что в самовозбуждающемся генераторе $\alpha_{эк} < 0$ (см. § 9.2). Разделив (9.34) на ω_0^2 и введя малый параметр

$$\varepsilon = 2|\alpha_{эк}|/\omega_0, \tag{9.36}$$

получим

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2u_{ак}}{dt^2} - \varepsilon\left(1 - \frac{\gamma_{эк}}{2|\alpha_{эк}|}u^2_{ак}\right)\frac{1}{\omega_0}\frac{du_{ак}}{dt} + u_{ак} = 0.$$

Переходя, наконец, к безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$ и к безразмерному напряжению

$$u = u_{ак} \sqrt{\gamma_{эк}/2\,|\alpha_{эк}|}, \tag{9.37}$$

получаем уравнение, известное под названием уравнения Ван дер Поля:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} - \varepsilon (1 - u^2) \frac{du}{d\tau} + u = 0. \tag{9.38}$$

При малых напряжениях, когда $u^2 \ll 1$, уравнение (9.38) переходит в линейное уравнение, совпадающее с (9.8′). С увеличением напряжения u все сильнее проявляется нелинейность устройства, обусловленная величиной u^2.

Методов, позволяющих получить точное решение нелинейного уравнения (9.38), не существует. Имеется, однако, возможность получения очень простого приближенного решения, обеспечивающего вполне достаточную для практики точность при использовании высокодобротного колебательного контура. Известно, что для существенного изменения амплитуды и, следовательно, запасенной в таком контуре энергии требуется время, измеряемое значительным числом периодов колебания. Поэтому можно исходить из допущения о *медленном изменении* амплитуды при запуске генератора. Это дает основание отыскивать решение нелинейного уравнения (9.38) в форме высокочастотного колебания

$$u(\tau) = U(\tau) \cos \tau. \tag{9.39}$$

Итак, для отыскания приближенного решения уравнения (9.38) остается найти только функцию $U(\tau)$, т. е. огибающую амплитуд колебания. Частота колебания просто приравнивается $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, а начальная фаза, которая в решении (9.39) опущена, может быть принята любой в зависимости от начальных условий запуска генератора[1].

После подстановки (9.39) в (9.38) делается ряд упрощений, основанных на отбрасывании слагаемых высших порядков малости. Во-первых, условие медленности функции $U(t)$ позволяет пренебречь второй производной этой функции. Во-вторых, высокая избирательность контура позволяет пренебречь слагаемыми вида $\cos 3\tau = \cos 3\omega_0 t$, получающимися при возведении в куб $\cos \tau$. В результате имеем следующее уравнение для квадрата огибающей $U(\tau)$:

$$\frac{dU^2}{d\tau} - \varepsilon \left(U^2 - \frac{U^4}{4} \right) = 0. \tag{9.40}$$

Стационарная амплитуда $U_{ст}$ определяется сразу, достаточно приравнять нулю производную от U^2. Таким образом,

$$U_{ст}^2 - U_{ст}^4/4 = 0, \tag{9.41}$$

откуда $U_{ст} = 2$.

Решив уравнение (9.40) и совершив переход от τ и u к первоначальным переменным t и $u_{ак}$, придем к окончательному выражению для мгновенного значения напряжения:

$$u_{ак}(t) = \frac{U_{ак\,ст}}{\sqrt{1 + (U_{ак\,ст}^2/U_{ак}^2(0) - 1)\, e^{-2|\alpha_{эк}|t}}} \cos(\omega_0 t + \theta_0), \tag{9.42}$$

[1] В действительности фаза, а следовательно, и частота колебания в процессе установления являются функцией времени. Для определения поправки к частоте необходимо находить второе или даже более высокие приближения.

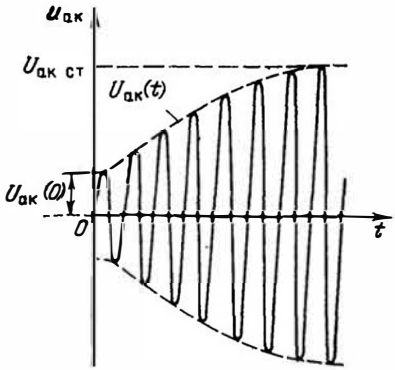


Рис. 9.17. Процесс установления колебаний в автогенераторе

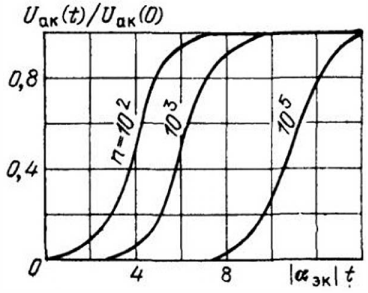


Рис. 9.18. Нарастание огибающей автоколебания при различных начальных условиях

где $U_{ак}(0)$ и θ_0 — начальные амплитуда и фаза напряжения на контуре, зависящие от условий запуска автогенератора.

Как правило, $U_{ак\ ст}/U_{ак}(0) \gg 1$. Поэтому при малых значениях $2_{эк}\ |\alpha|$ знаменатель

$$\sqrt{1+\left(\frac{U^2_{ак\ ст}}{U^2_{ак}(0)}-1\right)e^{-2|\alpha_{эк}|t}} \approx \frac{U_{ак\ ст}}{U_{ак}(0)}\,e^{-|\alpha_{эк}|t}$$

и выражение (9.42) принимает вид

$$u_{ак}(t) \approx U_{ак}(0)\,e^{|\alpha_{эк}|t}\cos(\omega_0 t+\theta_0), \tag{9.43}$$

совпадающий с видом выражения (9.10), выведенного для *линейного* режима (при малых амплитудах).

При $t \to \infty$ (стационарный режим) выражение (9.42) переходит в

$$u_{ак}(t) = U_{ак\ ст}\cos(\omega_0 t+\theta_0). \tag{9.44}$$

Ограничение амплитуд, обусловленное введением кубического члена в аппроксимацию вольт-амперной характеристики (9.33), иллюстрируется рис. 9.17.

Характер изменения огибающей $U_{ак}(t)/U_{ак\ ст}$ при нескольких значениях параметра $n = U_{ак\ ст}/U_{ак}(0)$ показан на рис. 9.18.

Из выражения (9.42) и рис. 9.18 видно, что время установления стационарной амплитуды существенно зависит от начальной амплитуды, т. е. от начальных условий запуска. Это имеет важное значение для генераторов, работающих в импульсном режиме.

В заключение отметим, что для удовлетворительного описания процесса установления колебаний при жестком режиме самовозбуждения требуется использование полинома (8.8) с учетом по крайней мере еще и пятой степени.

9.7. МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Под фазовой плоскостью подразумевается плоскость, каждая точка которой однозначно определяет состояние (фазу) системы. Так как плоскость обладает двумя измерениями, то ясно, что метод фазовой плоскости применим к анализу систем, описываемых дифференциальным уравнением второго порядка. Состояние механической системы полностью определяется заданием

координаты (перемещение) и скорости движения. Для электрической системы должны быть заданы две аналогичные переменные, например заряд емкости (или напряжение) и ток. Основным достоинством метода фазовой плоскости является пригодность его для анализа как линейных, так и нелинейных систем. Некоторые важные свойства нелинейных систем, которые невозможно или затруднительно исследовать аналитически, поддаются истолкованию и качественному исследованию с помощью графоаналитического построения на фазовой плоскости.

Суть этого метода проще всего объяснить на примере линейной системы (обычного колебательного контура), описываемой уравнением

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{9.45}$$

в которой под x можно подразумевать, например, заряд конденсатора.

Уравнение (9.45) может быть записано в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = y, \quad \ddot{x} = \frac{dy}{dt} = -(2\alpha y + \omega_0^2 x). \tag{9.46}$$

Таким образом, если x — заряд то y — ток в контуре.

Разделив второе из этих уравнений на первое, получим уравнение не содержащее в явной форме время t:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\alpha y + \omega_0^2 x}{y}. \tag{9.47}$$

Входящие в уравнение (9.47) две переменные x и $y = x$ можно рассматривать как координаты *изображающей* (или *представляющей*) точки на плоскости x, y. Тогда уравнение (9.47) является дифференциальным уравнением движения изображающей точки на фазовой плоскости x, y. Если найти решение уравнения (9.47) $y = f(x, A)$, где A — произвольная постоянная, определяемая начальными условиями x_0, y_0, то получим семейство кривых, являющихся интегральными по отношению к исходному уравнению (9.45). Функцию $y = f(x, A)$ иногда называют первым интегралом уравнения (9.45), так как $y = x$.

На фазовой плоскости решение $y = f(x, A)$ образует семейство ф а з о в ы х т р а е к т о р и й изображающей точки, соответствующих различным фиксированным значениям A, т. е. различным начальным условиям x_0, y_0. Так как при заданных начальных условиях уравнение (9.45), и соответственно (9.47) имеют единственное решение, то каждой паре координат x, y отвечает одна, и только одна, интегральная кривая. Иными словами, вся фазовая плоскость покрыта семейством непересекающихся интегральных кривых (фазовых траекторий). Исключение из этого правила составляют точки, соответствующие состоянию равновесия системы — устойчивого или неустойчивого. В случае линейного уравнения фазовая траектория легко определяется с помощью уравнения типа (9.47). В более сложном случае нелинейного уравнения это построение выполняется с помощью м е т о д а и з о к л и н. Термин «изоклина» эквивалентен понятию «кривая равного наклона». Изоклина представляет собой геометрическое место точек фазовой плоскости, в которых фазовые траектории имеют касательные с заданным (фиксированным) угловым коэффициентом k.

В частности, в уравнении (9.47) левая часть есть угловой коэффициент k. Приравнивая эту часть заданному значению k, получаем

$$k = -(2\alpha y + \omega_0^2 x)/y,$$

откуда приходим к следующему уравнению изоклин:

$$y = -\frac{\omega_0^2}{2\alpha + k} x. \tag{9.48}$$

При постоянных значениях k это уравнение определяет пучок прямых, проходящих через начало координат.

Можно отметить следующие свойства фазовых траекторий:

а) в верхней полуплоскости ($y > 0$) изображающая точка движется только вправо, а в нижней — только влево. Действительно, поскольку $y = dx/dt$, а время t только возрастает, то положительность y означает возрастание и абсциссы x. Соответственно, если $y < 0$ (нижняя полуплоскость), то изменение x должно быть отрицательным, т. е. изображающая точка движется влево (рис. 9.19):

б) интегральные кривые пересекают ось абсцисс ($y = 0$) только под прямым углом. Действительно, из уравнения (9.47), представляющего собой уравнение углового коэффициента касательной к интегральной кривой в точке x, y, следует, что при $y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\infty \quad (+\infty \text{ при } x < 0 \text{ и } -\infty \text{ при } x > 0).$$

Основываясь на указанных свойствах фазовых траекторий, можно построить фазовые портреты системы, описываемой уравнением (9.45), при различных соотношениях между α и ω_0.

Предварительно полезно выяснить, нет ли среди семейства изоклин, определяемых выражением (9.48), такой прямой, которая является одновременно и интегральной кривой исходного уравнения (9.45), Такая прямая (если она имеется) должна удовлетворять уравнению (9.48) и, кроме того, условию $y = kx + C$. Отбрасывая постоянную C, приходим к двум условиям

$$y = -\frac{\omega_0^2}{2\alpha + k} x \text{ и } y = kx,$$

из которых вытекает равенство $k = -\omega_0^2/(2\alpha + k)$ и формула

$$k_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \tag{9.49}$$

Но k не может быть комплексной или мнимой величиной. Следовательно, искомая изоклина существует только при $\alpha > \omega_0$, т. е. в случае апериодического контура; при этом в пучке изоклин, определяемых выражением (9.48), имеются две интегральные кривые (рис. 9.20):

$y = k_1 x$ — прямая C, $y = k_2 x$ — прямая D.

Кроме того, известна изоклина горизонтальных касательных, соответствующая $k = 0$ [см. (9.48).

$$y = -\frac{\omega_0^2}{2\alpha} x \text{ — прямая } A \text{ на рис. 9.20.} \tag{9.50}$$

Эти прямые, образующие «каркас» фазового портрета, в сочетании с условиями непересекаемости фазовых траекторий полностью определяют структуру фазового портрета, изображенного на рис. 9.20. Главной особенностью этого портрета является то, что при любых начальных условиях изображающая точка движется к началу координат. Таким образом, в рассматриваемом случае ($\alpha/\omega_0 > 1$) точка $x = 0$, $y = 0$ является точкой устойчивого равновесия системы. Эта точка называется особой точкой типа устойчивого узла.

Обратимся к случаю $0 < \alpha/\omega_0 < 1$ (колебательная система с затуханием).

В соответствии с условием (9.49) изоклины C и D отсутствуют. Каркас фазового портрета определяется только прямой A и условием пересечения оси x под прямыми углами. При $\alpha/\omega_0 > 0$ угловой коэффициент этой прямой в соответствии с уравнением (9.50) отрицателен. Соответствующий этому случаю фазовый портрет, представляющий собой скручивающуюся к началу координат спираль, изображен на рис. 9.21. Из любого начального положения изображающая точка с течением времени приближается к началу координат, являющемуся точкой устойчивого равновесия. Эта точка называется особой точкой типа у с т о й ч и в о г о ф о к у с а.

Рассмотрим случай $-1 < \alpha/\omega_0 < 0$ (колебательная система с инкрементом). Фазовый портрет отличается от показанного на рис. 9.21 лишь тем, что спираль раскручивается и изображающая точка удаляется от начала координат. Точка $x = 0$, $y = 0$ является особой точкой типа н е у с т о й ч и в о г о ф о к у с а.

Применительно к рассматриваемому в следующем параграфе фазовому портрету автогенератора особый интерес приобретает случай $\alpha = 0$, когда уравнение (9.45) вырождается в уравнение гармонического колебания

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{9.51}$$

решение которого, как известно, имеет вид

$$x = Q \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad y = \dot{x} = \omega_0 Q \cos(\omega_0 t + \varphi). \tag{9.52}$$

Здесь Q — амплитуда заряда конденсатора контура.

Уравнение фазовой траектории (9.47) при $\alpha = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{y}$$

— уравнение с разделяющимися переменными, которое легко интегрируется:

$$ydy + \omega_0^2 xdx = 0, \quad y^2 + \omega_0^2 x^2 = \text{cosnt} = C. \tag{9.53}$$

Подставляя вместо x и y выражения (9.52), получаем

$$\omega_0^2 Q^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0^2 Q^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0^2 Q^2 = C.$$

Разделив обе части уравнения (9.54) на C, придем к выражению

$$y^2/\omega_0^2 Q^2 + x^2/Q^2 = 1, \tag{9.54}$$

представляющему собой уравнение эллипса с горизонтальной полуосью Q и вертикальной полуосью $\omega_0 Q$ (рис. 9.22).

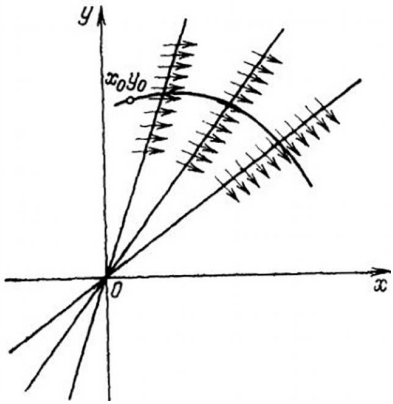


Рис. 9.19. К построению фазового портрета по методу изоклин

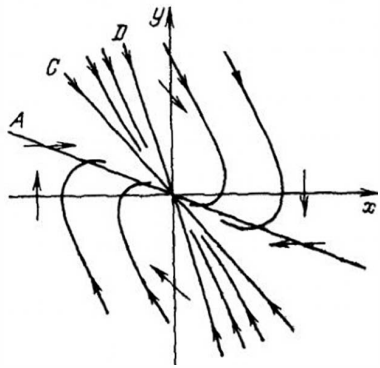


Рис. 9.20. Фазовый портрет апериодической системы при $\alpha/\omega_0 > 1$

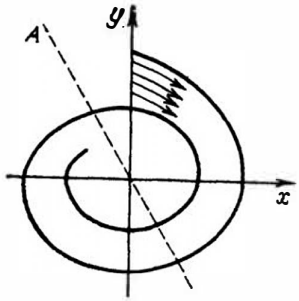


Рис. 9.21. Фазовый портрет системы с затуханием при $0<\alpha/\omega_0<1$

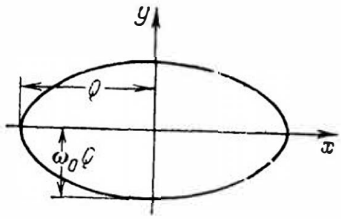


Рис. 9.22. Фазовый портрет системы, описываемой уравнением (9.54) при $\alpha=0$

Итак, при $\alpha = 0$ фазовые траектории представляют собой семейство эллипсов с общим центром в начале координат, причем размеры осей эллипса определяются амплитудой гармонического колебания, т. е. в конечном счете энергией, запасенной в системе. Эта энергия может быть выражена в виде $0{,}5CQ^2$ (максимальная энергия в емкости) или в виде $(L/2)\ (\omega_0 Q)^2$ (в индуктивности). Так как потери отсутствуют, то запас энергии остается неизменным («консервативная» система) и каждому значению запаса энергии соответствует свой эллипс.

9.8. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ АВТОГЕНЕРАТОРА

Итак, гармоническому движению системы соответствует замкнутая фазовая траектория на фазовой плоскости (эллипс). В более общем случае сложного периодического движения (не обязательно гармонического) фазовая траектория может иметь сложную форму, но она обязательно является замкнутой.

Автоколебательной системе с устойчивым стационарным состоянием на фазовой плоскости соответствует замкнутая кривая, к которой приближаются соседние фазовые траектории. Для выявления формы этой замкнутой интегральной кривой, а также характера этого приближения рассмотрим на фазовой плоскости всю картину установления автоколебаний, от запуска генератора до установления стационарного состояния.

В начале процесса система является линейной и описывается уравнением (9.8′), совпадающим с уравнением (9.45). Для удобства вместо (9.9′) будем исходить из уравнения

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} - \varepsilon\frac{du}{d\tau} + u = 0, \tag{9.55}$$

получающегося из нелинейного уравнения (9.38) при замене $u_{ак}$ на u и пренебрежении величиной u^2 по сравнению с единицей. Напомним, что в этом уравнении $\varepsilon = 2\alpha_{эк}/\omega_0$, а $\tau = \omega_0 t$.

Так как при выполнении условия самовозбуждения ε положительно [см. (9.36)], соответствующая начальному этапу фазовая траектория имеет вид раскручивающейся логарифмической спирали (особая точка типа неустойчивого фокуса).

Когда с ростом амплитуды колебаний начинает проявляться нелинейность системы, увеличение радиуса спирали замедляется и в пределе (теоретически при $t \to \infty$) фазовая траектория превращается в окружность с радиусом $U_{ст}$, равным стационарной амплитуде колебания.

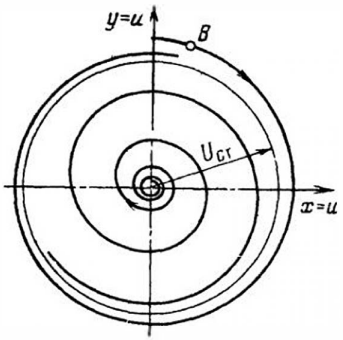


Рис. 9.23. Фазовый портрет автоколебания при мягком режиме возбуждения

Если начальное положение изображающей точки задать вне окружности радиуса $U_{ст}$ (точка B на рис. 9.23), то движение изображающей точки будет происходить по скручивающейся спирали (так как при $U > U_{ст}$ ε отрицательно) до перехода на окружность радиуса $U_{ст}$.

В силу устойчивости стационарного состояния автогенератора (в данном случае с мягким самовозбуждением) при любых начальных условиях изображающая точка переходит на окружность радиуса $U_{ст}$.

Изолированная замкнутая кривая на фазовой плоскости, к которой с возрастанием t приближаются (по спирали) с внутренней и внешней стороны соседние фазовые траектории, называется предельным циклом. Устойчивость предельного цикла носит название орбитной или орбитальной устойчивости.

Легко представить себе, что в случае автогенератора с жестким режимом самовозбуждения к предельному циклу будут стягиваться только фазовые траектории, радиус которых больше некоторого критического значения, соответствующего амплитуде в точке D на рис. 9.11. Если начальные условия запуска автогенератора таковы, что начальная амплитуда меньше этого значения U_{min}, то изображающая точка на фазовой плоскости будет двигаться по скручивающейся спирали, постепенно приближаясь к началу координат, являющемуся в данном случае точкой устойчивого фокуса (рис. 9.24).

Допустим, что после установления стационарного режима в колебательный контур автогенератора каким-либо образом была введена дополнительнай энергия, в результате чего амплитуда и фаза колебания получили мгновенные приращения: первая на величину ΔU, а вторая на угол φ_0. Отклонение изображающей точки от предельного цикла, соответствующее этому возмущению, выразится в переходе на спираль с радиусом $U_{ст} + \Delta U$ и в изменение фазы колебания на φ_0 (рис. 9.25).

Через некоторое время изображающая точка перейдет по скручивающейся спирали (штриховая линия на рис. 9.25) на предельный цикл, соответствующий стационарной амплитуде. Фазовый же сдвиг φ_0 не компенсируется, так как в автогенераторе отсутствуют факторы, которые фиксировали бы начальную фазу колебания.

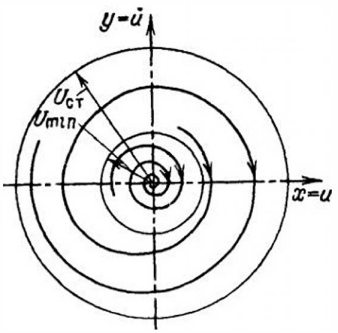


Рис. 9.24. Фазовый портрет автоколебания при жестком режиме возбуждения

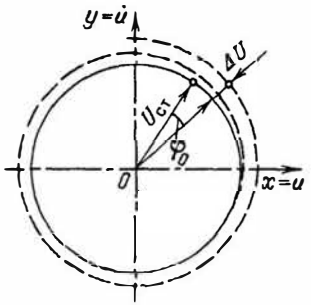


Рис. 9.25. К вопросу об орбитальной устойчивости предельного цикла

В заключение отметим, что предельный цикл имеет форму круга при строго гармонической форме генерируемых колебаний. В действительности эта форма искажается наложением высших гармоник. В автогенераторах, близких к консервативным (с высокодобротной колебательной системой), влиянием гармоник можно пренебречь. В случае же генераторов релаксационного типа предельный цикл может иметь весьма сложную форму (например, близкую к прямоугольной).

Как отмечалось в предыдущем параграфе, для нелинейных систем фазовые траектории строятся с помощью графоаналитических методов (например, метода изоклин).

9.9. АВТОГЕНЕРАТОРЫ С ВНУТРЕННЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

При рассмотрении механизма возникновения колебаний в автогенераторе (см. § 9.2) мы встретились с понятием отрицательного сопротивления, вносимого в колебательный контур при надлежащем выборе фазы обратной связи. При этом в соответствии с обобщенной схемой автоколебательной системы (см. рис. 9.1) имелась в виду внешняя обратная связь.

Существуют, однако, некоторые электронные приборы, которые позволяют получить отрицательное сопротивление за счет падающих участков вольт-амперной характеристики без введения в схему специальных элементов обратной связи. К таким приборам относятся, например, туннельный диод и обычные тетроды и пентоды при соответствующем подборе напряжений на электродах.

На рис. 9.26 показана вольт-амперная характеристика туннельного диода, представляющая зависимость прямого тока диода от положительного напряжения смещения. На падающем участке *а—б* дифференциальное сопротивление диода отрицательно:

$$R_{\sim} = du/di_{д} = \operatorname{ctg} \gamma,$$

где γ — угол наклона касательной к кривой $i_{д} = f(u)$ в рабочей точке U_0.

При подключении электронного прибора с подобной вольт-амперной характеристикой к колебательной цепи можно осуществить генерацию высокочастотных колебаний. При этом получается автогенератор с внутренней обратной связью.

На рис. 9.27 изображена схема генератора на туннельном диоде. В качестве емкости контура в генераторах СВЧ обычно используется собственная емкость диода C_0. Блокировочные дроссель $L_{бл}$ и конденсатор $C_{бл}$ ($C_{бл} \gg C_0$) защищают цепь постоянного тока от тока высокой частоты; $r_к$ — сопротивление потерь в кристалле и в элементах контура.

Схема замещения контура, шунтированного отрицательным сопротивлением R_{-}, изображена на рис. 9.28. По отношению к этому сопротивлению

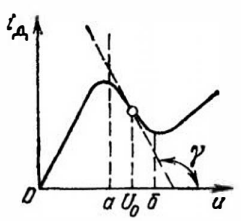


Рис. 9.26. Вольт-амперная характеристика туннельного диода

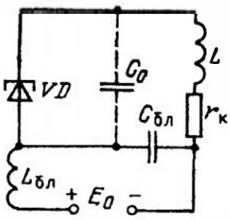


Рис. 9.27. Автогенератор на туннельном диоде

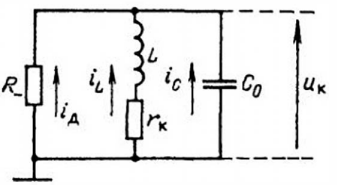


Рис. 9.28. Схема замещения автогенератора на туннельном диоде

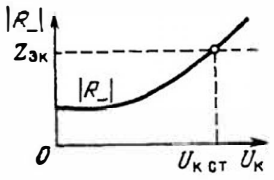


Рис. 9.29. К определению стационарной амплитуды автоколебания в генераторе с внутренней обратной связью

напряжение $u_к$, действующее на колебательном контуре, рассматривается как ЭДС, так что ток через диод $i_д = -u_к/R_-$.

Колебательное напряжение на контуре $u_к$ и токи i_L, i_C, $i_д$ связаны между собой соотношениями

$$i_д = i_L + i_C, \quad i_C = C\frac{du_к}{dt}, \quad u_к = r_к i_L + L\frac{di_L}{dt}. \tag{9.56}$$

В качестве искомой функции выберем, например, ток i_L в индуктивной ветви контура. Исключая из первого уравнения (9.56) $i_C(t)$ с помощью второго и третьего уравнений, получаем

$$i_д = i_L + r_к C\frac{di_L}{dt} + LC\frac{d^2 i_L}{dt}.$$

Однако

$$i_д = -\frac{1}{R_-}u_к = -\frac{1}{R_-}\left(r_к i_L + L\frac{di_L}{dt}\right).$$

Приравнивая правые части приведенных выражений, после группировки слагаемых получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{r_к}{L} + \frac{1}{CR_-}\right)\frac{di_L}{dt} + \frac{1 + r_к/R_-}{LC} i_L = 0.$$

Для того чтобы амплитуда колебаний нарастала, коэффициент при первой производной должен быть отрицательным. Отсюда получается условие возникновения колебаний

$$\frac{r_к}{L} - \frac{1}{C}\left|\frac{1}{R_-}\right| < 0$$

или

$$|R_-| < \frac{L}{r_к C} = Z_{эк\,р} = \rho Q = \frac{Q}{\omega_р C}, \tag{9.57}$$

где $|R_-|$ — абсолютная величина отрицательного сопротивления; $Z_{эк\,р}$ — эквивалентное резонансное сопротивление контура; Q — добротность; $\rho = \sqrt{L/C}$ — характеристическое сопротивление контура.

Когда сопротивление $|R_-|$, зависящее от амплитуды колебания (при переходе на нелинейную часть характеристики), увеличится до

$$|R_-(U_к)| = Z_{эк\,р},$$

в автогенераторе установится стационарная амплитуда колебаний. Режим устойчив, если в точке пересечения горизонтали $Z_{эк\,р}$ кривая $|R_-(U_к)|$ имеет положительный наклон (рис. 9.29). Все, что в предыдущих параграфах было сказано о характере нелинейной зависимости средней крутизны от амплитуды управляющего напряжения, в данном случае можно распространить на характер зависимости величины, обратной $|R_-|$, от напряжения $U_к$.

Преимуществом туннельного диода является весьма малое по абсолютной величине отрицательное сопротивление (~ 10—100 Ом). Несмотря на относительно большую собственную емкость диода (несколько десятков пикофарад), условие самовозбуждения (9.57) выполняется в весьма широком диапазоне частот, вплоть до СВЧ. Так, при добротности контура $Q = 50$, собственной емкости диода $C_0 = 50$ пФ и $|R_-| = 50$ Ом предельная частота генерации $f_{max} \approx Q/2\pi |R_-| C_0 \approx 3 \cdot 10^9$ Гц $=$ 3000 МГц.

9.10. АВТОГЕНЕРАТОР С ЛИНИЕЙ ЗАДЕРЖКИ В ЦЕПИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Пусть имеется автогенератор с избирательной нагрузкой и линией задержки в кольце обратной связи. Подобный генератор можно представить в виде обобщенной схемы (рис. 9.30), аналогичной схеме на рис. 9.1. Рассматривая линию задержки как идеальный четырехполюсник с передаточной функцией $e^{-i\omega T}$, можно представить линейную часть схемы, состоящую из колебательного контура и линии задержки T, в виде одного четырехполюсника обратной связи с передаточной функцией

$$\mathbf{K}_{oc}|i(\omega - \omega_p)| \cdot K_к(\omega - \omega_p) e^{i\varphi_к} e^{-i\omega T} \cdot K_{oc} e^{i\varphi_\Sigma},$$

где $K_к$ — модуль передаточной функции колебательного контура с резонансной частотой ω_p; $\varphi_к$ — ФЧХ контура. В полосе прозрачности контура можно считать, что $\varphi_к \approx -(\omega - \omega_p)\tau_к$, где $\tau_к$ — постоянная времени контура.

Введение в схему линии задержки не изменяет модуля передаточной функции, но существенно влияет на результирующую ФЧХ

$$\varphi_\Sigma = -(\omega - \omega_p)\tau_к - \omega T.$$

При достаточно большой задержке T наклон результирующей ФЧХ определяется в основном слагаемым ωT, причем может оказаться, что в полосе прозрачности колебательной цепи изменение φ_Σ достигает большого значения, превышающего несколько полных оборотов 2π. Подобный случай изображен на рис. 9.31, на котором ω_{-2}, ω_{-1}, ω_1, ω_2, ... — частоты, лежащие в полосе прозрачности контура, при которых ординаты ФЧХ φ_Σ равны $n2\pi$, где n — целое число. Так как при указанных частотах выполняется баланс фаз и амплитуд (см. § 9.3), каждая из них может являться частотой автогенерации. Введение в кольцо обратной связи достаточно большой задержки придает системе *многочастотный характер*. Роль колебательного контура при этом сводится лишь к ограничению числа частот, на которых обеспечивается усиление, необходимое для автогенерации.

Возникает вопрос, могут ли одновременно устойчиво существовать несколько автоколебаний с различными частотами. Это зависит от таких факто-

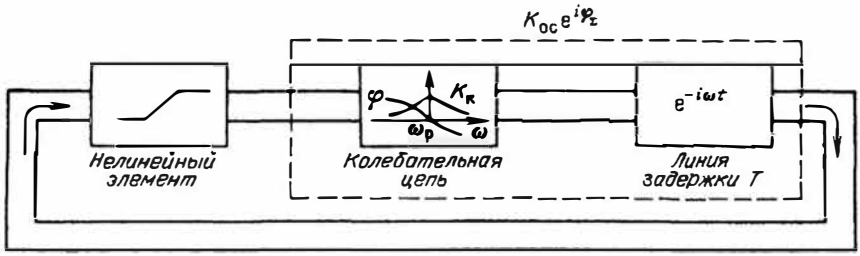


Рис. 9.30. Автогенератор с линией задержки в цепи обратной связи

ров, как число частот в полосе прозрачности контура, при которых выполняется фазовый баланс, форма АЧХ избирательной нагрузки, режим самовозбуждения (мягкий или жесткий), и некоторых других.

Рассмотрим сначала случай, когда в полосе прозрачности одиночного колебательного контура имеется всего лишь две частоты, на которых возможна генерация: ω_1 и ω_2. Это означает, что в полосе $2\Delta\omega_0 = 2/\tau_к$ ($\tau_к$ – постоянная времени контура) набег фазы в линии задержки T близок к 2π, т. е. $2\Delta\omega_0 T \approx 2\pi$ или $T \approx \pi/\Delta\omega_0 \approx \pi\tau_к$.

Примерное расположение ω_1 и ω_2 на оси частот показано на рис. 9.32. Через E_1 и E_2 обозначены амплитуды колебаний с указанными частотами в какой-то момент времени после запуска генератора с мягким режимом возбуждения. При циклическом обходе замкнутого кольца обратной связи при каждом прохождении через нелинейный элемент соотношение между амплитудами E_1 и E_2 будет изменяться в пользу E_1. С аналогичной ситуацией мы имели дело при рассмотрении подавления слабого сигнала в амплитудном ограничителе в § 8.7. В итоге колебание с частотой ω_2 полностью подавляется и в системе остается всего лишь одно колебание с частотой ω_1, для которого начальные условия при запуске более благоприятны.

Иначе обстоит дело в автогенераторе с жестким режимом самовозбуждения, когда при запуске для установления автоколебаний требуется внешний источник колебаний. В зависимости от выбора запускающей частоты в генераторе может быть установлен стационарный режим на любой из частот ω_1 или ω_2. Отсюда видно, что «жесткий» автогенератор с запаздывающей обратной связью можно использовать как устройство, запоминающее одну из нескольких частот, подаваемых в момент запуска.

Вернемся к автогенератору с мягким режимом самовозбуждения и допустим, что в полосе прозрачности колебательной цепи имеется значительное число частот возможной генерации. Та ккак эти частоты расположены на оси ω эквидистантно (рис. 9.33), то можно допустить существование совокупности колебаний с частотами ω_1, ω_2, ω_3, ... при амплитудных и фазовых соотношениях, характерных для угловой модуляции. Подобное сложное колебание с постоянной амплитудой проходит через нелинейность (амплитудный ограничитель) без изменения соотношения между отдельными составляющими спектра. Это означает, что нелинейная часть автогенератора не препятствует одновременной генерации сетки частот. Этого, однако, еще недостаточно для устойчивой генерации. Необходимо, чтобы передаточная функция избирательной цепи обеспечивала сохранение внутриспектральных соотношений. Амплитудно-частотная характеристика избирательной цепи, представленная на рис. 9.33, не отвечает этому требованию. Более подробное

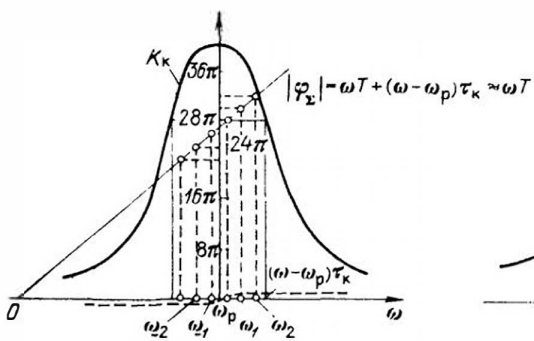


Рис. 9.31. Расположение возможных частот генерации при введении задержки в цепь обратной связи

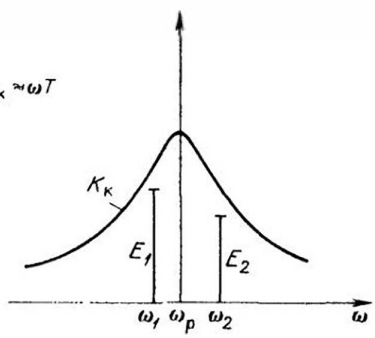


Рис. 9.32. К вопросу о подавлении слабого колебания в автогенераторе с задержкой в цепи обратной связи

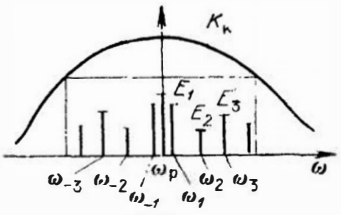


Рис. 9.33. Форма АЧХ избирательной цепи, неблагоприятная для одновременного генерирования нескольких частот

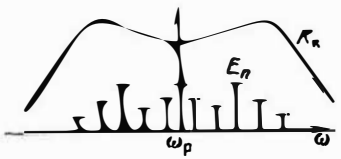


Рис. 9.34. Форма АЧХ избирательной цепи, допускающей устойчивую генерацию нескольких частот одновременно

рассмотрение[1] показывает, что для устойчивой генерации спектра частот АЧХ колебательной системы должна иметь неравномерность типа седловины (рис. 9.34).

Генератор с запаздывающей обратной связью обладает некоторыми другими интересными свойствами, обусловленными большой крутизной ФЧХ, например повышенной стабильностью генерируемой частоты.

9.11. *RC*-ГЕНЕРАТОРЫ

Генераторы с колебательным *LC*-контуром эффективны для получения высокочастотных колебаний. Для генерирования же низких (звуковых частот) они неудобны из-за конструктивных недостатков (колебательный контур получается слишком громоздким и трудно перестраиваемым). В связи с этим для получения гармонических колебаний в диапазоне от нескольких герц до нескольких десятков килогерц широко распространены, особенно в измерительной технике, *RC*-генераторы.

Один из возможных вариантов схемы *RC*-генератора представлен на рис. 9.35. Отличие *RC*-генератора от *LC*-генератора заключается в том, что вместо усилителя с колебательным контуром здесь применен резистивный усилитель, а обратная связь осуществляется при помощи специального четырехполюсника, составленного из резисторов и конденсаторов.

Схема на рис. 9.35 соответствует усилителю с фазовым сдвигом напряжения $\mathbf{U}_2$ на 180° относительно $\mathbf{U}_1$ (например, однокаскадному транзисторному усилителю с ОЭ). Для генерации на заданной частоте необходимо, чтобы сумма фазовых сдвигов при обходе замкнутого кольца обратной связи равнялась 2π и, кроме того, чтобы коэффициент усиления $K_у$ являлся величиной, обратной $K_{ос}$ [см. (9.3)]. Следовательно, обведенный на рис. 9.35 штриховой линией четырехполюсник обратной связи должен обеспечивать дополнительный фазовый сдвиг на 180°.

Нетрудно выявить требования, предъявляемые к элементам этого четырехполюсника. Придерживаясь обозначений рис. 9.35, составляем систему уравнений

$$(R + 1/i\omega C)\mathbf{I}_1 - (1/i\omega C) \times \times \mathbf{I}_2 = \mathbf{U}_2, \quad -(1/i\omega C)\mathbf{I}_1 + (R + 2/i\omega C)\mathbf{I}_2 - (1/i\omega C)\mathbf{I}_3 = 0, \quad -(1/i\omega C)\mathbf{I}_2 + (R + 2/i\omega C)\mathbf{I}_3 = 0.$$

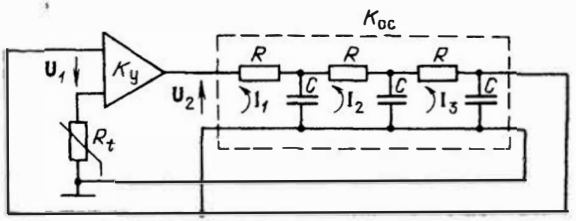


Рис. 9.35. Однокаскадный вариант *RC*-генератора

[1] См.: Гоноровский И. С. К вопросу об установлении автоколебаний в высокочастотном генераторе с запаздывающей обратной связью. — Радиотехника, 1958, № 5.

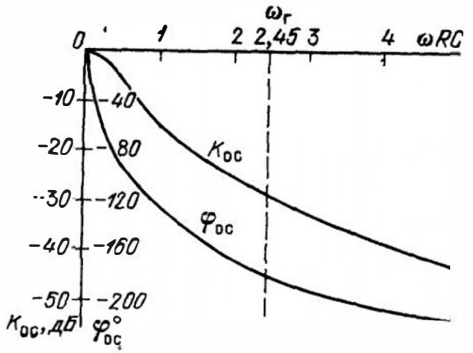


Рис. 9.36. Амплитудно- и фазо-частотная характеристики четырехполюсника обратной связи в схеме на рис. 9.35

Решая эту систему, находим

$$\mathbf{I}_3 = \frac{-\mathbf{U}_2 i\omega C}{|5(\omega RC)^2 - 1| + i[(\omega RC)^3 - 6\omega RC]}.$$

Так как напряжение на выходе четырехполюсника обратной связи (отсчитываемое по направлению тока $\mathbf{I}_3$) равно $\mathbf{I}_3/i\omega C$, то коэффициент обратной связи

$$\mathbf{K}_{oc}(i\omega) = \frac{\mathbf{I}_3/i\omega C}{\mathbf{U}_2} = -\frac{1}{|5(\omega RC)^2 - 1| + i[(\omega RC)^3 - 6\omega RC]} = K_{oc}\, e^{i\varphi_{oc}(\omega)}. \qquad (9.58)$$

Аргумент и модуль функции $\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$ представлены на рис. 9.36.

Из выражения (9.58) следует, что фазовый сдвиг 180° получается при частоте, отвечающей условию

$$\omega RC\,|(\omega RC)^2 - 6| = 0.$$

Следовательно, генерация возможна на частоте

$$\omega_r = \sqrt{6}\cdot RC.$$

Между модулем и аргументом передаточной функции рассматриваемого четырехполюсника существует однозначная связь. Подставляя найденное значение ω_r в выражение (9.58), находим модуль

$$K_{oc}(\omega_r) = \frac{1}{|5(\omega_r RC)^2 - 1|} = \frac{1}{29}.$$

Итак, произведение RC определяет частоту генерации и одновременно коэффициент обратной связи. Это означает, что показанный на рис. 9.35 усилитель должен обеспечивать усиление

$$K_y \geqslant 1/K_{oc} = 29.$$

При разбиении произведения RC на множители имеется значительная свобода, облегчающая выбор удобных величин R и C. Необходимо лишь обеспечивать условие $R \gg R_н$, где $R_н$ — резистор нагрузки усилителя, так как только при этом условии усиление K_y не зависит от R.

Ступенчатое изменение частоты генератора в широком диапазоне осуществляется с помощью набора переключаемых резисторов и конденсаторов, а плавная настройка в каждом из поддиапазонов — с помощью конденсаторов переменной емкости.

На рис. 9.37 изображена схема иного варианта RC-генератора, в котором необходимый для генерации баланс фаз обеспечивается в самом усилителе, например, применением двух каскадов, каждый из которых поворачивает фазу на 180°. Назначение же вспомогательной цепи r_1, C_1, r_2, C_2 заключается в том, чтобы по возможности сузить полосу частот, в которой обеспечивается баланс фаз.

Для определения соотношений между r_1, C_1, r_2, C_2 исходим из передаточной функции четырехполюсника обратной связи:

$$\mathbf{K}_{oc}(i\omega) = \frac{\dfrac{r_2/i\omega C_2}{r_2 + 1/i\omega C_2}}{(r_1 + 1/i\omega C_1) + \dfrac{r_2/i\omega C_2}{r_2 + 1/i\omega C_2}} = \frac{1}{1 + r_1/r_2 + C_2/C_1 + i(\omega C_2 r_1 - 1/\omega C_1 r_2)}. \quad (9.59)$$

В данном случае частота, на которой возможна генерация, определяется условием

$$\omega_г C_2 r_1 - 1/\omega_г C_1 r_2 = 0,$$

откуда

$$\omega_г = 1/\sqrt{r_1 C_1 r_2 C_2} = 1/\sqrt{\tau_1 \tau_2},$$

где τ_1 и τ_2 — постоянные времени цепей соответственно $r_1 C_1$ и $r_2 C_2$.

Обычно применяются одинаковые резисторы ($r_1 = r_2$) и конденсаторы ($C_1 = C_2$). При этом $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, частота генерации $\omega_г = 1/\tau$ и выражение (9.59) принимает вид

$$\mathbf{K}_{oc}(i\omega) = \frac{1}{3 + i(\omega/\omega_г - \omega_г/\omega)} = K_{oc}(\omega)\, e^{i\varphi_{oc}(\omega)},$$

где

$$K_{oc}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + (\omega/\omega_г - \omega_г/\omega)^2}}; \quad \varphi_{oc}(\omega) = -\operatorname{arctg}(1/3)(\omega/\omega_г - \omega_г/\omega).$$

Графики модуля и аргумента функции $\mathbf{K}_{oc}(i\omega)$ при выбранных параметрах представлены на рис. 9.38. Существенно, что на любой частоте генерации $K_{oc}(\omega_г) = 1/3 = \text{const}$. Независимость K_{oc} от частоты $\omega_г$, обеспечивающая неизменность режима работы генератора во всем частотном диапазоне, подтверждает целесообразность выбора $r_1 = r_2$, $C_1 = C_2$. При $C_1 = C_2$ упрощается, кроме того, конструкция спаренного конденсатора переменной емкости, используемого для плавной перестройки генератора.

Преимуществом рассматриваемой схемы перед схемой, показанной на рис. 9.35, является также меньшее число перестраиваемых элементов.

Существуют и другие разновидности схем RC-генераторов, однако приведенных примеров достаточно для уяснения принципа построения автогенераторов с апериодическими цепями нагрузки и обратной связи.

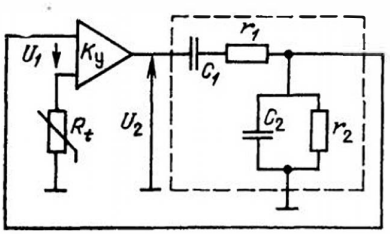


Рис. 9.37. Двухкаскадный вариант RC-генератора

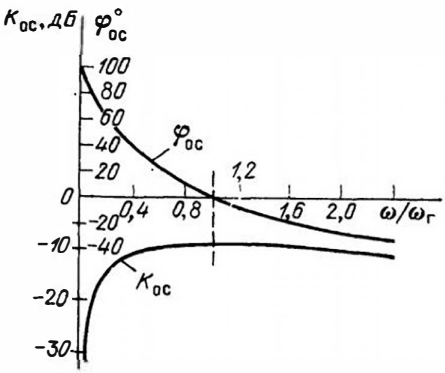


Рис. 9.38. Амплитудно- и фазо-частотная характеристики четырехполюсника обратной связи в схеме на рис. 9.37

К качеству конденсаторов и резисторов, входящих в четырехполюсник обратной связи любого RC-генератора, необходимо предъявлять жесткие требования, так как нестабильность R или C при изменении температуры приводит к изменению частоты генератора. Конденсаторы должны иметь высокое сопротивление изоляции (малую утечку), так как в противном случае в области очень низких частот шунтирующее действие утечки будет влиять на фазовые соотношения в четырехполюснике.

Остановимся на некоторых особенностях механизма ограничения амплитуды автоколебания в RC-генераторе. Этот вопрос тесно связан с вопросом о форме генерируемых колебаний.

В рассмотренных ранее LC-автогенераторах ограничение обусловлено уменьшением крутизны $S_{\text{ср}}$ при увеличении амплитуды колебаний; стационарный режим наступает, когда коэффициент усиления уменьшается до значения $K_{\text{у}} = 1/K_{\text{ос}}$. Однако в данном случае нельзя допускать установления значительной амплитуды, так как это неизбежно приведет к искажению формы генерируемых колебаний за счет появления гармоник тока. В отличие от генераторов с колебательным контуром в RC-генераторах отсутствует достаточно сильная фильтрация высших гармоник. Таким образом, получается противоречие между требованием неискаженной формы колебаний (малые амплитуды) и требованием надежного ограничения (большие амплитуды). Для устранения этого противоречия в RC-генераторы обычно вводят инерционную нелинейность в виде терморезистора, сопротивление которого изменяется в зависимости от степени нагрева проходящим через него током. В качестве терморезистора может быть использована обыкновенная лампа накаливания.

Включение терморезистора показано на рис. 9.35 и 9.37. Подразумевается, что обратная связь, обусловленная введением в схему R_t, отрицательна. Например, в транзисторном усилителе с ОЭ резистор R_t включается в цепь эмиттера.

Отрицательная обратная связь (по току) частично компенсирует положительную обратную связь, осуществляемую с помощью четырехполюсника $\mathbf{K}_{\text{ос}}(i\omega)$. Действительно, в рассматриваемом примере напряжение, создаваемое на R_t переменной составляющей коллекторного тока, направлено от эмиттера к заземленной шине, а напряжение положительной обратной связи — от базы к этой шине (см. рис. 9.35). Следовательно, результирующая разность потенциалов база — эмиттер является разностью между вторым и первым напряжениями. Коэффициент обратной связи $K'_{\text{ос}}$, понимаемый как отношение результирующего напряжения база — эмиттер к напряжению коллектор — эмиттер, зависит от R_t. При увеличении амплитуды колебания и соответственно тока через терморезистор его сопротивление R_t увеличивается и $K'_{\text{ос}}$ уменьшается. При уменьшении амплитуды колебания, наоборот, R_t уменьшается и $K'_{\text{ос}}$ возрастает.

Таким образом, ограничение обусловлено не уменьшением средней крутизны $S_{\text{ср}}$ и коэффициента усиления $K_{\text{у}}$ при увеличении амплитуды колебания, а уменьшением $K'_{\text{ос}}$. Стационарный режим устанавливается, когда наступает равенство $K'_{\text{ос}} = 1/K_{\text{у}}$. Получается автоматическое регулирование амплитуды колебания на определенном уровне, зависящем в основном от нелинейности характеристики термосопротивления. Так как при изменении тока R_t из-за тепловой инерции изменяется относительно медленно, то в пределах одного периода генерируемых колебаний R_t практически постоянно. Это означает, что изменение R_t не вносит нелинейных искажений и не нарушает синусоидальной формы колебаний. Аналогично действие R_t в схеме, показанной на рис. 9.37.

RC-генератор является маломощным. Для получения значительной мощности *RC*-генератор обычно дополняют одной или двумя ступенями усиления.

9.12. ДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЭДС НА ЦЕПИ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ. РЕГЕНЕРАЦИЯ

В радиотехнике под регенерацией подразумевается компенсация потерь в колебательной цепи с помощью положительной обратной связи. Явление регенерации можно использовать для усиления колебаний. Схема регенеративного усилителя, изображенная на рис. 9.39, не отличается от схемы автогенератора. Однако в регенеративном усилителе обратная связь не доводится до значения, соответствующего порогу генерации. При этом получается лишь частичная компенсация потерь в контуре и действие обратной связи сводится только к повышению добротности регенерированного контура.

В схеме на рис. 9.39 усиливаемое колебание с амплитудой E и частотой ω вводится в колебательный контур L, C, r, а обратная связь осуществляется с помощью катушки $L_к$, обтекаемой переменной составляющей коллекторного тока $I_к$ и индуктивно связанной с катушкой контура L. Нетрудно выявить влияние параметров транзистора и обратной связи на эквивалентные параметры колебательного контура. Рассмотрим сначала более простой случай малых амплитуд, когда используется небольшой участок характеристики транзистора и средняя крутизна $S_{ср}$ может быть приравнена крутизне S.

При гармонической ЭДС на входе с комплексной амплитудой $\mathbf{E}$ и частотой ω амплитуду тока в контуре (в стационарном режиме) можно определить с помощью следующего выражения:

$$\mathbf{I} = (\mathbf{E} + \mathbf{U}_{ос})/[r + i(\omega L - 1/\omega C)], \tag{9.60}$$

где $\mathbf{U}_{ос}$ — комплексная амплитуда напряжения обратной связи, вводимого в контур. Так как цепь предполагается линейной (при малых амплитудах), то это напряжение совпадает по частоте с ЭДС $\mathbf{E}$ и может отличаться от последней лишь фазой.

Очевидно, что

$$\mathbf{U}_{ос} = i\omega M \mathbf{I}_к,$$

а амплитуда переменной составляющей коллекторного тока $\mathbf{I}_к$, если пренебречь реакцией выходной цепи,

$$\mathbf{I}_к = S\mathbf{U}_C = S\mathbf{I}/i\omega C,$$

где $\mathbf{U}_C$ — амплитуда напряжения на конденсаторе контура.

Таким образом, можно написать

$$\mathbf{U}_{ос} = i\omega M S \mathbf{I}/i\omega C = MS\mathbf{I}/C.$$

Подставляя это выражение в уравнение (9.60) и решая его относительно $\mathbf{I}$, получаем

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{r - MS/C + i(\omega L - 1/\omega C)}. \tag{9.61}$$

Как и следовало ожидать (см. § 9.2), влияние положительной обратной связи сво-

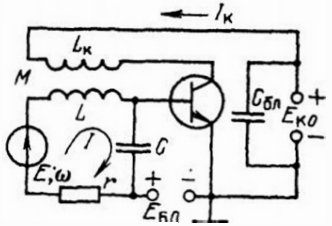


Рис. 9.39. Регенеративный усилитель

дится к уменьшению сопротивления потерь в контуре на величину отрицательного сопротивления

$$r_{\text{отр}} = MS/C. \tag{9.62}$$

Таким образом, эквивалентное активное сопротивление регенерированного контура

$$r_{\text{эк}} = r - r_{\text{отр}} = r - MS/C,$$

а добротность

$$Q_{\text{эк}} = \frac{\rho}{r_{\text{эк}}} = \frac{\rho}{(r - MS/C)} = \frac{\rho/r}{1 - \dfrac{MS/C}{r}}.$$

Отношение

$$Q_{\text{эк}}/Q_0 = 1 \Big/ \left(1 - \frac{MS/C}{r}\right) = 1 \Big/ \left(1 - \frac{r_{\text{отр}}}{r}\right),$$

где $Q_0 = \rho/r$ — добротность нерегенерированного контура, можно рассматривать как усиление схемы на резонансной частоте $\omega = \omega_p$, когда $\omega L - 1/\omega C = 0$.

Увеличением M можно добиться существенного увеличения $Q_{\text{эк}}$ и, следовательно, повышения усиления. Следует, однако, иметь в виду, что увеличение $Q_{\text{эк}}$ при заданной и неизменной резонансной частоте контура ω_p приводит к сужению полосы пропускания контура. Кроме того, возникает проблема устойчивости цепи. При

$$\frac{r_{\text{отр}}}{r} = \frac{MS}{Cr} \to 1$$

цепь теряет устойчивость, а при $MS/Cr > 1$ возникают автоколебания, т. е. усилитель превращается в генератор.

Иначе обстоит дело при больших амплитудах напряжения на входе усилителя. Увеличение амплитуды на зажимах база — эмиттер приводит к уменьшению средней крутизны $S_{\text{ср}}$ и в соответствии с (9.62) к уменьшению $r_{\text{отр}}$. Зависимость $S_{\text{ср}}$ и $r_{\text{отр}}$ от амплитуды приводит к нелинейным искажениям усиливаемого сигнала.

Подставляя $S_{\text{ср}}$ вместо S в выражение (9.61), получаем

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{r - MS_{\text{ср}}/C + i(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{\mathbf{E}}{r_{\text{эк}} + i(\omega L - 1/\omega C)}, \tag{9.61'}$$

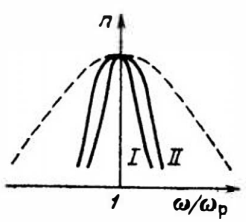


Рис. 9.40. Резонансные характеристики регенеративного контура:
I — при малых; *II* — при больших амплитудах; штриховая линия — в отсутствие регенерации

а при резонансе

$$I_{\max} = E/r_{\text{эк}}, \tag{9.61''}$$

где $r_{\text{эк}} = r - MS_{\text{ср}}/C.$ (9.63)

Из выражения (9.61′) следует, что при усилении АМ сигнала, когда $E = E(t)$, амплитуда тока $I(t)$ будет изменяться по закону, отличному от закона модуляции $E(t)$ (из-за зависимости $S_{\text{ср}}$ от амплитуды колебания). Возникает нелинейное искажение усиливаемого сигнала, сопровождающееся образованием новых частот.

Нелинейный характер рассматриваемой цепи (при больших амплитудах E) влияет также и на форму резонансной характеристики регенерирован-

ного контура. Действительно, при отклонении частоты входного сигнала ω от резонансной частоты $\omega_р$ возрастает реактивное сопротивление $x = \omega L - 1/\omega C$ в (9.61′), что приводит к уменьшению амплитуды тока I. Но уменьшение I в свою очередь приводит к уменьшению и $r_{эк}$ из-за возрастания $S_{ср}$ [см. (9.63)], что в некоторой степени компенсирует влияние возрастания x. В результате резонансная характеристика в верхней части уплощается, и тем сильнее, чем больше амплитуда внешней ЭДС, действующей на контур. При значительных расстройках преобладающее влияние на амплитуду оказывает реактивное сопротивление и резонансная характеристика быстро спадает почти до нуля (рис. 9.40).

Из всего сказанного следует, что регенерацию можно эффективно использовать только для усиления слабых сигналов.

С явлением регенерации часто приходится встречаться в радиотехнике. Иногда регенерация возникает в усилительных устройствах из-за наличия паразитных обратных связей, что может приводить к искажению сигналов.

9.13. ДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЭДС НА АВТОГЕНЕРАТОР. ЗАХВАТЫВАНИЕ ЧАСТОТЫ

Поведение автогенератора, находящегося под действием внешней силы, существенно зависит от амплитуды и частоты этой силы.

Если амплитуда возбуждения очень мала по сравнению с амплитудой автоколебания и одновременно частота ω значительно отличается от частоты $\omega_г = \omega_р$ свободного автогенератора ($\omega_р$ — резонансная частота контура автогенератора), то действие внешней ЭДС сводится к эффекту модуляции, который проявляется в изменении фазы и амплитуды автоколебания по весьма сложному закону. С приближением частоты ω к $\omega_р$ картина меняется. Частота генерации $\omega_г$ «подтягивается» к частоте ω внешней ЭДС, и при некотором значении $\Delta\omega = \omega - \omega_р$, зависящем от соотношения амплитуд, автогенератор начинает работать точно на частоте $\omega_г = \omega$ без каких-либо признаков модуляции. Частота генератора оказывается «захваченной» частотой вынуждающей силы.

Явление захватывания частоты используется в ряде радиотехнических устройств, когда требуется осуществить принудительную синхронизацию автогенератора с помощью маломощного источника колебаний. В некоторых случаях, например при наличии паразитных связей между двумя автогенераторами, захватывание возникает произвольно и препятствует независимой их работе на близких частотах.

Рассмотрим механизм явления захватывания частоты в простейшем одноконтурном автогенераторе с трансформаторной обратной связью при последовательном включении внешнего источника ЭДС в цепь база — эмиттер (рис. 9.41). Следует подчеркнуть, что такая схема выбрана только для определенности рассуждений. С точки зрения установления общих соотношений вид схемы автогенератора и способ введения вынуждающей ЭДС принципиального значения не имеют. Частоту генерации (в отсутствие внешней ЭДС) приравняем резонансной частоте контура $\omega_р = 1/\sqrt{LC}$.

Рассмотрим сначала баланс фаз в автогенераторе, находящемся под действием внешней ЭДС $e(t) = E\cos(\omega t + \theta_0)$, в предположении, что имеет место стационарный режим захватывания, т. е. генерируемая частота $\omega_г$ равна частоте ω, отличной от резонансной частоты контура $\omega_р$. При этом амплитуду E будем считать настолько малой, что все основные параметры автоколебания — амплитуда первой гармоники коллекторного тока I_1, амплитуда напряжения на контуре $U_к$ и амплитуда напряжения обратной связи $U_{ос}$ — останутся такими же, как и в отсутствие внешнего воздействия.

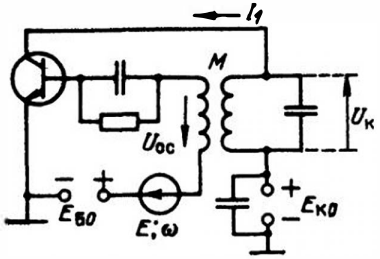


Рис. 9.41. Автогенератор с синхронизирующим источником ЭДС в цепи база — эмиттер

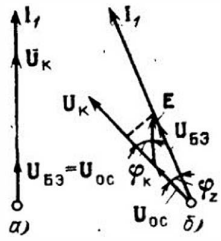


Рис. 9.42. Векторные диаграммы напряжений и тока в автогенераторе:
а) без внешнего воздействия; *б*) в режиме захватывания частоты

Иными словами, влияние внешнего воздействия проявляется только в изменении фазовых соотношений в автогенераторе.

До включения источника внешней ЭДС эти соотношения характеризуются векторной диаграммой, показанной на рис. 9.42, *а*. Ток $\mathbf{I}_1$ — в фазе с напряжением $\mathbf{U}_{бэ} = \mathbf{U}_{ос}$, а напряжение $\mathbf{U}_к$ в фазе с током $\mathbf{I}_1$ (напряжение на контуре отсчитывается от эмиттера к коллектору).

Исходная фаза тока $\mathbf{I}_1$ выбрана произвольно, так как в автогенераторе фаза автоколебания зависит от начальных условий запуска. После включения внешней ЭДС $e(t) = E\cos\omega t$ (начальная фаза θ_0 приравнена нулю) и установления стационарного режима диаграмма примет вид, показанный на рис. 9.42, *б*. При построении этой диаграммы учтены следующие условия:

а) между током $\mathbf{I}_1$ и напряжением $\mathbf{U}_к$ имеется фазовый сдвиг φ_z, зависящий от расстройки контура по отношению к генерируемой частоте ω. Принимая для определенности, что $\omega < \omega_р$, приходим к выводу, что вектор $\mathbf{U}_к$ должен опережать вектор $\mathbf{I}_1$ на угол

$$\varphi_z = \operatorname{arctg}\left[\frac{2|\omega-\omega_р|Q}{\omega_р}\right], \tag{9.64}$$

где Q — добротность контура;

б) ток $\mathbf{I}_1$ находится в фазе с результирующим напряжением $\mathbf{U}_{бэ}$;

в) напряжение обратной связи $\mathbf{U}_{ос}$, связанное с напряжением контура $\mathbf{U}_к$ соотношением $\mathbf{U}_{ос} = M\mathbf{U}_к/L$, не зависит от частоты. Поэтому направления векторов $\mathbf{U}_{ос}$ и $\mathbf{U}_к$ совпадают.

Из диаграммы видно, что нарушение фазового баланса автогенератора в коллекторной цепи на угол φ_z (в сторону опережения) из-за расстройки колебательного контура (при $\omega < \omega_р$) компенсируется тем, что в цепи база — эмиттер результирующее напряжение $\mathbf{U}_{бэ}$ сдвинуто на угол φ_z в сторону отставания относительно $\mathbf{U}_{ос}$.

Когда $\omega > \omega_р$, фазовый сдвиг в коллекторной цепи является запаздывающим, а в цепи база — эмиттер — опережающим.

Из условий б) и в), а также непосредственно из диаграммы [1] на рис. 9.42, *б* вытекает следующее равенство:

$$\sin\varphi_z = E\sin\varphi_к / U_{бэ}, \tag{9.65}$$

где $\varphi_к$ — фазовый сдвиг между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{U}_к$.

[1] Эту диаграмму удобно строить исходя из произвольно выбранного положения вектора $\mathbf{I}_1$, после чего вся диаграмма должна быть повернута на угол, при котором положение вектора $\mathbf{E}$ соответствует заданной начальной фазе θ_0 внешней ЭДС.

Итак, если режим захватывания действительно существует, то одновременно выполняются равенства (9.64) и (9.65).

Используя оговоренное условие малости E по сравнению с $U_{ос}$, можно считать $U_{бэ} \approx U_{ос}$,

$$\sin\psi_z \approx \psi_z \approx (E/U_{бэ})\sin\varphi_к \approx (E/U_{ос})\sin\varphi_к.$$

Малость угла ψ_z позволяет также и в выражении (9.64) заменить тангенс его аргументом:

$$\operatorname{tg}\psi_z \approx \psi_z = 2(\omega - \omega_р)Q/\omega_р.$$

Приравнивая правые части последних двух выражений, приходим к следующему соотношению:

$$2(\omega - \omega_р)/\omega_р = (E/U_{ос})\sin\varphi_к(1/Q). \qquad (9.66)$$

Из этого соотношения следует, что при заданной разности частот ω и $\omega_р$ фазовый сдвиг напряжения $U_к$ относительно синхронизирующего колебания

$$\varphi_к = \arcsin\left[\frac{2(\omega-\omega_р)Q/\omega_р}{E/U_{ос}}\right]. \qquad (9.67)$$

Соотношения (9.66) и (9.67) имеют смысл при условии, что абсолютная величина расстройки $|\omega - \omega_р|$ не превышает некоторого предельного значения, при котором $|\sin\varphi_к| = 1$. Из физических соображений очевидно, что это предельное значение $|\omega - \omega_р|_{max}$ соответствует границам полосы захватывания. Подставляя в уравнение (9.66) $\sin\varphi_к = \pm 1$, находим полную относительную ширину полосы захватывания

$$\frac{2\Delta\omega_{max}}{\omega_р} = \frac{2|\omega-\omega_р|_{max}}{\omega_р} \approx \left(\frac{E}{U_{ос}}\right)\left(\frac{1}{Q}\right) = \left(\frac{E}{U_{ос}}\right)d. \qquad (9.68)$$

Итак, полоса захватывания пропорциональна отношению амплитуды внешней ЭДС к амплитуде колебаний свободного автогенератора и затуханию контура $d = 1/Q$.

В тех случаях, когда внешняя ЭДС вводится непосредственно в колебательный контур автогенератора, выражению для полосы захватывания можно придать несколько иной вид. Рассмотрим в качестве примера схему генератора с контуром в цепи база — эмиттер (рис. 9.43). Схема эквивалентного контура, в котором действие обратной связи учтено генератором ЭДС $U_{ос}$, изображена на рис. 9.44. В отсутствие постороннего воздействия амплитуда $U_{бэ}$ связана с $U_{ос}$ соотношением $U_{бэ} = U_{ос}Q$.

Подставляя это соотношение в формулу (9.68), получаем

$$2\Delta\omega_{max}/\omega_р \approx E/U_{бэ}. \qquad (9.69)$$

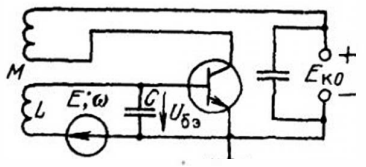


Рис. 9.43. Включение синхронизирующего источника ЭДС в колебательный контур автогенератора

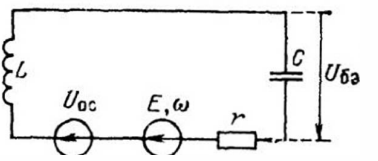


Рис. 9.44. Схема замещения контура к рис. 9.43

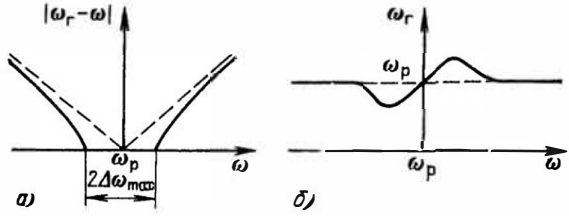


Рис. 9.45. Зависимости $|\omega_г - \omega|$ (*а*) и генерируемой частоты $\omega_г$ (*б*) от частоты синхронизирующего источника

Аналогично можно показать, что при введении вынуждающей ЭДС в коллекторный колебательный контур получится соотношение

$$2\Delta\omega_{max}/\omega_р \approx E/U_к, \quad (9.70)$$

где $U_к$ — амплитуда напряжения на контуре свободного автогенератора.

Нетрудно заметить, что отсутствие в формулах (9.69) и (9.70) величины Q объясняется тем, что внешнее воздействие оценивается ЭДС, вводимой последовательно в контур, а режим свободного автогенератора — напряжением, действующим на реактивном элементе контура. Если же оба напряжения определять одинаково: либо на реактивном элементе, либо как ЭДС, вводимую в контур последовательно, то независимо от схемы полосы захватывания будут определяться выражением вида (9.68).

Связь между генерируемой частотой $\omega_г$ и частотой ω вынуждающей ЭДС иллюстрируется рис. 9.45. Штриховая линия на рис. 9.45, *а* соответствует свободному генератору, когда $\omega_г = \omega_р = \text{const}$. При введении в генератор источника внешней ЭДС частота $\omega_г$ «подтягивается» к частоте ω и сплошная линия $|\omega_г - \omega|$ отрывается от штриховой $|\omega_р - \omega|$. Отрезок оси абсцисс, на котором $|\omega_г - \omega| = 0$ и, следовательно, частота генератора совпадает с частотой ω, и есть полоса захвата.

График зависимости генерируемой частоты $\omega_г$ от частоты ω вынуждающей ЭДС представлен (в ином масштабе частот) на рис. 9.45, *б*.

9.14. УГЛОВАЯ МОДУЛЯЦИЯ В АВТОГЕНЕРАТОРЕ

В автогенераторах, работающих на частотах не выше нескольких десятков мегагерц, широко используются методы угловой модуляции, основанные на прямом изменении резонансной частоты колебательной цепи генератора изменением емкости или индуктивности контура. Так как резонансная частота колебательного контура непосредственно определяет частоту генерации, то под угловой модуляцией в автогенераторе будем подразумевать *частотную*.

Существует ряд способов управления резонансной частотой колебательной цепи: электронные, электромагнитные и др. Выбор того или иного способа зависит от основных параметров модуляции: относительного изменения частоты $\Delta\omega/\omega_р$ и скорости изменения частоты. Последний параметр характеризуется спектром модулирующего сигнала. При медленной модуляции (низкие частоты) широко применяются такие способы, как изменение индуктивности катушки изменением тока, подмагничивающего сердечник катушки, и др. Если спектр сообщения содержит относительно высокие частоты, то приходится прибегать к безынерционным способам управления емкостью или индуктивностью контура.

Широко распространенным способом электронного управления резонансной частотой колебательного контура является подключение к контуру варикапа — полупроводникового диода (p — n-переход), емкость которого зависит от напряжения, приложенного в направлении запирания перехода. Упрощенная схема автогенератора с варикапом изображена на рис. 9.46, *а*. Разделительный конденсатор $C_р$ преграждает путь в контур постоянному то-

ку от источника ЭДС E_0, используемого для установления рабочей точки на вольт-фарадной характеристике варикапа. Конденсатор $C_р$ необходим также для устранения короткого замыкания источника модулирующего сигнала $e_\Omega(t)$ на относительно небольшую индуктивность $L_к$ контура. Блокировочный дроссель $L_{др}$ преграждает путь высокочастотному току от автогенератора в источник ЭДС $e_\Omega(t)$.

На схеме замещения колебательной цепи автогенератора (рис. 9.46,*б*) C_0 обозначает среднюю емкость варикапа [в отсутствие модулирующего напряжения $e_\Omega(t)$], а $\Delta C(t)$ — вариацию емкости, пропорциональную напряжению $e_\Omega(t)$. Сопротивление перехода обозначено R, а объемное сопротивление толщи полупроводника r.

При заданных значениях средней частоты ω_0 и частотного отклонения $\Delta\omega$ требуемое изменение емкости ΔC нетрудно найти с помощью очевидных соотношений

$$\omega_0 = 1/\sqrt{L_к C_{к0}},\quad \omega_0 + \Delta\omega = \frac{1}{\sqrt{L_к (C_{к0} + \Delta C)}} = \frac{1}{\sqrt{L_к C_{к0}}\sqrt{1 + \Delta C/C_{к0}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \Delta C/C_{к0}}},$$

где $C_{к0} = C_к + C_0$ — средняя емкость контура.

Разделив последнее выражение на ω_0, получим

$$1 + \Delta\omega/\omega_0 = 1/\sqrt{1 + \Delta C/C_{к0}},$$

откуда

$$\frac{\Delta C}{C_{к0}} = -\frac{2\Delta\omega/\omega_0 + (\Delta\omega/\omega_0)^2}{(1 + \Delta\omega/\omega_0)^2}. \qquad (9.71)$$

В общем случае требуемое относительное изменение емкости связано с заданным относительным изменением частоты нелинейной зависимостью (9.71). Однако необходимость использования этого соотношения возникает лишь при очень глубокой частотной модуляции. В ряде применений ЧМ относительное изменение частоты весьма невелико. Например, при передаче речи и музыки на УКВ величина $\Delta\omega/\omega_0$ не превышает нескольких долей процента. В подобных случаях выражение (9.71) можно упростить, если пренебрегать величиной $\Delta\omega/\omega_0$ по сравнению с единицей:

$$\Delta C/C \approx -2\Delta\omega/\omega_0.$$

Таким образом, при малых относительных изменениях $\Delta\omega$ и ΔC связаны линейными соотношениями и для получения линейной ЧМ емкость нужно изменять по закону функции $e_\Omega(t)$.

Недостатком варикапа как частотного модулятора является зависимость сопротивления перехода R (см. рис. 9.46, *б*) от амплитуды внешнего напряжения. При относительно глубокой ЧМ, требующей значительных амплитуд модулирующего напряжения, эта зависимость приводит к существенному изменению вносимого в контур автогенератора затухания и в конечном счете к паразитной АМ.

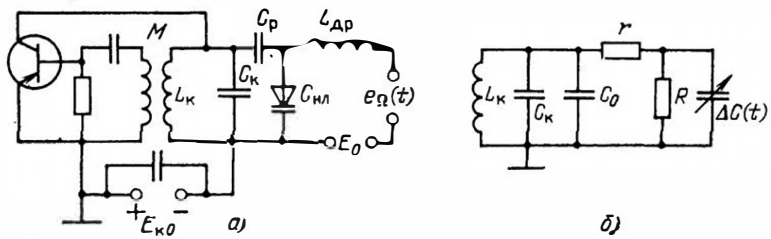


Рис. 9.46. Автогенератор с ЧМ при помощи варикапа (*а*) и схема замещения колебательной цепи (*б*)

10.1. ОБЩИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПЕЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Электрические цепи, в которых хотя бы один из параметров изменяется по какому-либо заданному закону, называются параметрическими. Предполагается, что изменение (модуляция) параметра или параметров осуществляется электронным способом при помощи управляющего колебания.

Приведем простые примеры электронных способов вариации параметров цепи. Рассмотрим зависимость крутизны вольт-амперной характеристики активного элемента $i\ (u)$ от управляющего колебания $e_y\ (t)$, наложенного на постоянное напряжение E_0 (см. рис. 10.1, *а*). Эту зависимость можно записать в виде

$$S\ (e_y) = \left(\frac{di}{du}\right)_{u = E_0 + e_y}. \tag{10.1}$$

Выражение (10.1) определяет дифференциальную крутизну характеристики в точке $E_0 + e_y$. Если в пределах изменения e_y характеристику можно аппроксимировать полиномом второй степени

$$i = i\,(E_0) + a_1\,(u - E_0) + a_2\,(u - E_0)^2,\ (a_1 > 0,\ a_2 > 0),$$

то выражение (10.1) приводится к виду

$$S\ (e_y) = a_1 + 2a_2\,e_y = S_0 + 2a_2\,e_y, \tag{10.2}$$

где $S_0 = a_1$ — дифференциальная крутизна в точке A (рис. 10.1, *а*). Зависимость крутизны от управляющего напряжения изображена на рис. 10.1, *а* в виде наклонной прямой линии.

Пусть $e_y = E_y \cos \omega_y t$. Тогда крутизну можно записать в виде функции времени

$$S\ (t) = a_1 + 2a_2\,E_y \cos \omega_y\,t = a_1 \left(1 + \frac{2a_2}{a_1} E_y \cos \omega_y\,t\right) =$$

$$= S_0\,(1 + m \cos \omega_y\,t), \tag{10.3}$$

где $m = 2a_2E_y/a_1$ — глубина «модуляции» параметра S. Соответствующим выбором E_0 и E_y можно обеспечить условие $m < 1$.

По отношению к слабому сигналу $e_s\ (t)$, наложенному на управляющее напряжение $e_y\ (t)$, рассматриваемое устройство можно трактовать как линейное с переменным параметром $S\ (t)$, управляемым по закону (10.3). Существенной особенностью дифференциальной крутизны (а также дифференциального сопротивления) является то, что этот параметр может принимать отрицательное значение. Для этого нужно, чтобы вольт-амперная характеристика на некотором участке имела отрицательный наклон (окрестность точки B на рис. 10.1, *а*.

Аналогично можно истолковать принцип электронного управления емкостью. Пусть к нелинейной емкости приложены два колебания: сильное, которое назовем управляющим, и слабое — сигнальное. Воспользуемся аппроксимацией вольт-кулонной характеристики нелинейного конденсатора полиномом второй степени, как это было сделано в § 8.1 и 8.15:

$$q = q_0 + b_1\,(u - E_0) + b_2\,(u - E_0)^2,\ b_1 > 0,\ b_2 > 0.$$

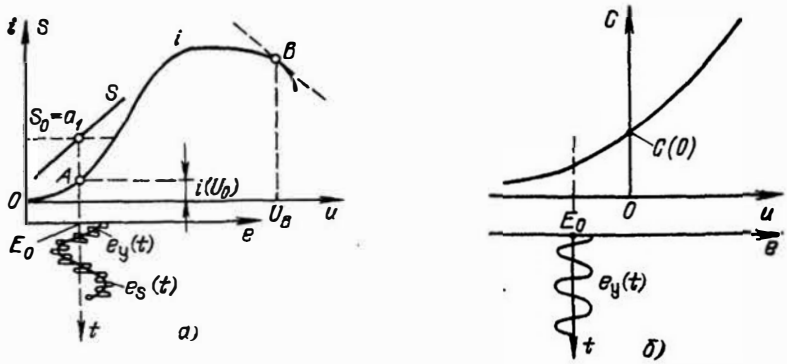


Рис. 10.1. Электронное управление крутизной вольт-амперной характеристики резистивного активного элемента (*а*) и вольт-фарадной характеристики варикапа (*б*)

Тогда дифференциальную емкость по аналогии с (10.2) можно определить выражением

$$C(e_y) = \frac{dq}{du}\bigg|_{u=E_0+e_y} = b_1 + 2b_2 e_y,$$

где $b_1 = C_0$ — дифференциальная емкость в точке $u = E_0$ [см. (8.4)], а

$$b_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2q}{du^2}\bigg|_{u=E_0} = \frac{1}{2!}\frac{dC}{du}\bigg|_{u=E_0}.$$

Если управляющее напряжение является гармоническим колебанием $e_y = E_y \cos \omega_y t$, то можно написать

$$C(t) = C_0 (1 + m \cos \omega_y t), \tag{10.4}$$

где $m = 2b_2 E_y / b_1$ — глубина модуляции емкости.

После такого преобразования можно говорить о воздействии *одного лишь сигнала* $e_s(t)$ на периодически изменяющуюся во времени *линейную* емкость $C(t)$, так как влияние управляющего колебания учтено заменой нелинейной емкости линейной параметрической емкостью.

При использовании в качестве управляемого элемента барьерной емкости p — n -перехода можно исходить из вольт-фарадной характеристики, представленной на рис. 10.1, *б*. При $u < 0$ эта характеристика хорошо аппроксимируется формулой

$$C(u) = C(0)\sqrt{\varphi_к/(|u| + \varphi_к)}, \tag{10.5}$$

где $\varphi_к > 0$ — контактная разность потенциалов, зависящая от кристалла, примесей и т. д.; u — внешнее (обратное) напряжение.

Подставляя в (10.5) $|u| = |E_0| + E_y \cos \omega_y t$ (при $E_y < |E_0|$), получаем

$$C(t) = C(0)\sqrt{\frac{\varphi_к}{\varphi_к + |E_0| + E_y \cos \omega_y t}} = C(0)\sqrt{\frac{\varphi_к}{\varphi_к + |E_0|}} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{E_y}{\varphi_к + |E_0|}\cos \omega_y t}}.$$

При $E_y/(\varphi_к + |E_0|) \ll 1$ последнее выражение можно записать в форме

$$C(t) \approx \frac{C_0}{1 + \dfrac{E_y}{2(\varphi_к + |E_0|)} \cos \omega_y t} = \frac{C_0}{1 + m \cos \omega_y t}, \qquad (10.5')$$

где $C_0 = C(0)\sqrt{\varphi_к/(\varphi_к + |E_0|)}$ — дифференциальная емкость в точке $u = E_0$; $m = E_y/2(\varphi_к + |E_0|)$ — глубина модуляции емкости.

При $m \ll 1$ выражение (10.5′) можно записать в форме

$$C(t) \approx C_0 (1 - m \cos \omega_y t), \qquad (10.5'')$$

совпадающей с (10.4).

Выражение, аналогичное (10.5″), можно составить и для параметрической индуктивности $L(t)$, управляемой током.

При установлении соотношений между зарядом, током и напряжением на параметрической емкости следует исходить из очевидных выражений

$$q(t) = C(t) u_C(t), \qquad (10.6)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C(t) \frac{du_C}{dt} + u_C(t) \frac{dC}{dt}, \qquad (10.7)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C(t)} q(t) = \frac{1}{C(t)} \int i(t)\, dt. \qquad (10.8)$$

Для параметрической индуктивности $L(t)$ имеют место следующие соотношения, связывающие потокосцепление Φ, напряжение u_L и ток i:

$$\Phi(t) = L(t) i(t), \qquad (10.9)$$

$$u_L(t) = \frac{d\Phi}{dt} = L(t) \frac{di}{dt} + i(t) \frac{dL}{dt}, \qquad (10.10)$$

$$i(t) = \frac{1}{L(t)} \Phi(t) = \frac{1}{L(t)} \int u_L(t)\, dt. \qquad (10.11)$$

Следует подчеркнуть, что в выражениях (10.6) — (10.11) $C(t)$ и $L(t)$ рассматриваются как *линейные* емкость и индуктивность.

Отметим принципиальное отличие реактивных элементов от резистивных: *дифференциальные емкость* и *индуктивность не могут быть отрицательными* [1]. Физически это объясняется тем, что увеличение напряжения на емкости не может вызывать уменьшение зарядов, а увеличение тока через индуктивность не может приводить к уменьшению потокосцепления. Иными словами, энергия, запасаемая в электрическом поле конденсатора или в магнитном поле катушки, не может быть отрицательной.

В дальнейшем изложении элементы с изменяющимися во времени параметрами $R(t)$, $C(t)$ и $L(t)$ будут рассматриваться как линейные; к ним применим принцип суперпозиции. Термины «дифференциальное сопротивление», «дифференциальная емкость или индуктивность» частот будут опускаться.

Цепи с переменными параметрами играют очень большую роль в радиотехнике и электронике.

Можно говорить о двух принципиально различных видах изменения параметров:

[1] Имеются в виду обычные элементы. С помощью же усилительных схем с обратной связью можно имитировать отрицательные C и L.

1) управляемое изменение для осуществления различных преобразований сигналов (модуляции, преобразования частоты, параметрического усиления и т. д.);

2) неуправляемое изменение, обусловленное различными физическими явлениями при передаче сигналов в свободном пространстве, например, изменяющейся во времени задержкой сигнала, колебанием затухания волн при их распространении, изменением фазовых соотношений при многолучевом распространении радиоволн, изменением сигналов во времени из-за флуктуации параметров тракта и т. д.

Влияние изменений параметров второго вида, носящих обычно статистический характер, будет рассмотрено в гл. 11. В настоящей главе изучаются явления при принудительном изменении во времени одного из параметров линейной цепи (апериодической или колебательной). В основном имеется в виду изменение параметра по гармоническому закону.

10.2. ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В гл. 6 рассматривалась передача различных сигналов через линейные цепи с постоянными параметрами. Связь между входным и выходным сигналами в таких цепях определялась с помощью передаточной функции $\mathbf{K}(i\omega)$ (спектральный метод) или с помощью импульсной характеристики $g(t)$ (метод интеграла наложения).

Аналогичные соотношения можно составить и для линейных цепей с переменными параметрами. Очевидно, что в подобных цепях характер зависимости между входным и выходным сигналами в процессе передачи изменяется. Иными словами, передаточная функция цепи зависит не только от ω, но и от времени; импульсная характеристика также зависит от двух переменных: от интервала $t - x$ между моментом приложения единичного импульса x и моментом наблюдения выходного сигнала t (как и для цепи с постоянными параметрами) и, кроме того, от положения интервала $t - x$ на оси времени. Поэтому для цепи с переменными параметрами импульсную характеристику следует записывать в общей форме $g(t, x)$.

Если на входе четырехполюсника с импульсной характеристикой $g(t, x)$ действует произвольный сигнал $s(t)$ (рис. 10.2), то, основываясь на принципе суперпозиции, выходной сигнал по аналогии с выражением (6.11) можно определить с помощью выражения

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-x)\, g(t, x)\, dx. \tag{10.12}$$

Постараемся теперь ввести передаточную функцию $\mathbf{K}(i\omega, t)$ для цепи с переменными параметрами. Для этого представим функцию $s(t - x)$ в виде интеграла Фурье:

$$s(t-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega)\, e^{i\omega(t-x)}\, d\omega, \tag{10.13}$$

где $\mathbf{S}(\omega)$ — спектральная плотность сигнала $s(t)$.

Тогда выражение (10.13) переходит в следующее:

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega)\, e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} g(t, x)\, e^{-i\omega x}\, dx\, d\omega.$$

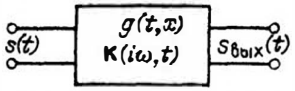


Рис. 10.2. Параметрический четырехполюсник

Обозначив внутренний интеграл через $\mathbf{K}(i\omega, t)$, перепишем последнее выражение следующим образом:

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega)\, \mathbf{K}(i\omega,\ t)\, e^{i\omega t} d\omega. \quad (10.14)$$

Из (10.14) следует, что функцию $\mathbf{K}(i\omega,\ t)$, определяемую выражением

$$\mathbf{K}(i\omega,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t,\ x)\, e^{-i\omega x} dx, \quad (10.15)$$

можно рассматривать как *передаточную функцию линейной цепи* с *переменными параметрами*.

Применение общего выражения (10.15) к цепям с произвольным изменением параметров во времени обычно оказывается слишком сложным из-за трудности нахождения импульсной характеристики $g(t, x)$. Задача существенно упрощается в случае *периодического* изменения параметра цепи. Определение функции $\mathbf{K}(i\omega,\ t)$, периодической во времени, рассматривается в § 10.4.

10.3. ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Для определения импульсной характеристики $g(t, x)$ непосредственно по заданным параметрам цепи без обращения к передаточной функции $\mathbf{K}(i\omega, t)$ необходимо использовать дифференциальное уравнение цепи.

Рассмотрим простую цепь, описываемую уравнением первого порядка

$$a_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + a_0(t)\, y(t) = f(t). \quad (10.16)$$

По определению импульсная характеристика является откликом цепи на единичный импульс $\delta(t - x)$, подаваемый на вход в момент $t = x$ (см. § 10.2). Из этого определения следует, что если в правой части уравнения (10.16) функцию $f(t)$ заменить на $\delta(t - x)$, то в левой части $y(t)$ можно заменить на $g(t, x)$.

Таким образом, приходим к уравнению

$$a_1(t) \frac{dg(t,\ x)}{dt} + a_0(t)\, g(t,\ x) = \delta(t - x). \quad (10.17)$$

Так как правая часть этого уравнения равна нулю всюду, кроме точки $t = x$, функцию $g(t, x)$ можно искать в виде решения однородного уравнения (с нулевой правой частью)

$$a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)\, y = 0,\ a_0 \neq 0, \quad (10.18)$$

при начальных условиях, вытекающих из уравнения (10.17), а также из условия, что к моменту приложения импульса $\delta(t - x)$ в цепи отсутствуют токи и напряжения («пустая» цепь).

В (10.18) переменные разделяются:

$$\frac{dy}{y} + \frac{a_0(t)}{a_1(t)} dt = \frac{dy}{y} + P(t)\, dt = 0;$$

откуда

$$y = \varphi e^{-\int P(t)\,dt}, \tag{10.19}$$

где $P(t) = a_0(t)/a_1(t)$, а

$$\varphi = y|_{t=x} = g(t, x)|_{t=x} \tag{10.20}$$

представляет собой значение импульсной характеристики в момент $t = x$.

Для определения φ вернемся к исходному уравнению (10.17), из которого видно, что в точке $t = x$ функция $g(t)$ должна совершать скачок на величину $1/a_1(x)$ (рис. 10.3). Только при этом условии первое слагаемое в уравнении (10.17), т. е. $a_1(t)\,dg/dt$, может образовать дельта-функцию $\delta(t - x)$.

Так как при $t < x$ $g(t, x) = 0$, то в момент $t = x$

$$g(t, x)|_{t=x} = 1/a_1(x). \tag{10.21}$$

Заменяя в выражении (10.19) неопределенный интеграл определенным с переменным верхним пределом, получаем

$$g(t, x) = \varphi(x) \exp\left(-\int_x^t P(u)\,du\right) = \frac{1}{a_1(x)} \exp\left(-\int_x^t \frac{a_0(u)}{a_1(u)}\,du\right). \tag{10.22}$$

Для ясности переменная интегрирования вместо t обозначена буквой u.

Используем выражение (10.22) для цепи (рис. 10.4), представляющей собой последовательное соединение резистора с переменным сопротивлением

$$r(t) = r_0/(1 + m \sin \Omega t) \tag{10.23}$$

и с постоянной емкостью C_0. Под $\delta(t - x)$ подразумевается импульс ЭДС, а в качестве определяемой функции $g(t, x)$ выберем заряд конденсатора $q(t)$.

Тогда уравнение цепи в соответствии с (10.17) и (10.23) можно записать в форме

$$\frac{r_0}{1 + m \sin \Omega t} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C_0} q = \delta(t - x). \tag{10.24}$$

Подставляя в (10.22)

$$a_1(t) = r_0/(1 + m \sin \Omega t),\ a_0(t) = 1/C_0,,$$

получаем

$$q(t, x) = \frac{1 + m \sin \Omega t}{r_0} \exp\left[-\int_x^t \frac{1 + m \sin \Omega u}{r_0 C_0}\,du\right] =$$

$$= \frac{1 + m \sin \Omega t}{r_0} \exp\left[-\frac{t - x}{r_0 C_0} + \frac{m}{r C_0 \Omega}(\cos \Omega t - \cos \Omega x)\right]. \tag{10.25}$$

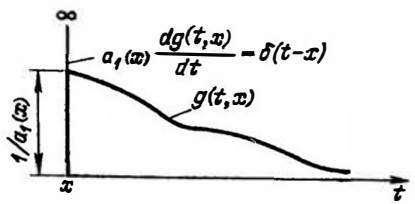


Рис. 10.3. Импульсная характеристика цепи, описываемой уравнением (10.17)

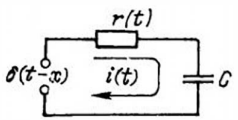


Рис. 10.4. Пример простой параметрической цепи

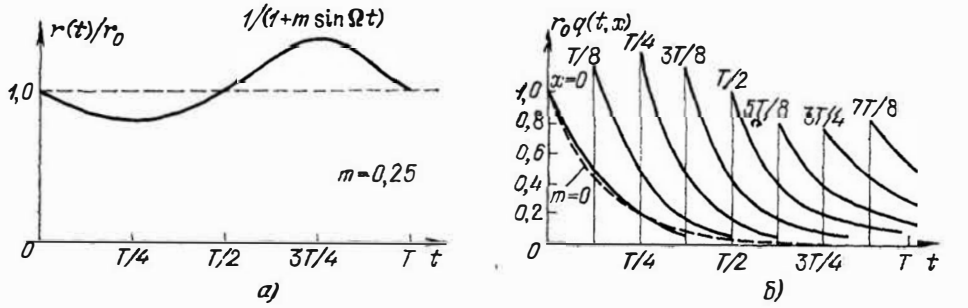


Рис. 10.5. К определению импульсной характеристики цепи, представленной на рис. 10.4

Продифференцировав это выражение по t, можно найти ток $i(t)$. В момент $t = x$, когда $q(t, x)$ образует скачок, равный $1/r(t)$, ток будет $(1/r(t)) \times \delta(t - x)$. Напряжение на емкости можно определить делением выражения (10.25) на C_0.

Из выражения (10.25) видно, как вариация сопротивления по закону (10.23) влияет на характер разряда: в аргументе экспоненты кроме $-(t-x)/r_0C_0$ (как и при постоянном сопротивлении r_0) появляется периодическое слагаемое $(m/r_0C_0\,\Omega)(\cos \Omega t - \cos \Omega x)$.

Закон изменения $r(t)/r_0$ показан на рис. 10.5, *а*, график функции $r_0q(t, x)$ при $r_0C_0\Omega = 1$ и $m = 0{,}25$ — на рис. 10.5, *б*.

Штриховой линией показана зависимость $\exp[-(t - x)/r_0C_0]$, соответствующая импульсной характеристике при постоянном сопротивлении r_0 $(m = 0)$ и $x = 0$.

Для более сложных цепей, описываемых дифференциальным уравнением n-го порядка $(n \geqslant 2)$, задача определения импульсной характеристики усложняется.

10.4. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЦЕПИ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПАРАМЕТРОМ

Наряду с выражением (10.15) можно дать еще одно определение передаточной функции $K(i\omega, t)$, которое в некоторых задачах позволяет избежать обращения к импульсной характеристике. С этой целью используем выражение (10.14) для случая, когда входной сигнал является гармоническим колебанием $s(t) = \cos \omega_0 t$, а соответствующий ему аналитический сигнал $z(t) = e^{i\omega_0 t}$.

Спектральная плотность этого сигнала $\mathbf{Z}(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ [см. (2.98) и (3.87)]. Подставляя $Z(\omega)$ вместо $\mathbf{S}(\omega)$ в формулу (10.14), получаем

$$z_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty 2\pi\delta(\omega - \omega_0)\,\mathbf{K}(i\omega, t)\,e^{i\omega t}\,d\omega = \mathbf{K}(i\omega_0, t)\,e^{i\omega_0 t},$$

откуда, опуская индекс нуль при ω, находим

$$\mathbf{K}(i\omega, t) = z_{\text{вых}}(t)/e^{i\omega t}. \qquad (10.26)$$

Под $z_{вых}(t)$ в данном выражении следует подразумевать аналитический сигнал на выходе цепи при гармоническом воздействии $e^{i\omega t}$ на входе.

Определение (10.26) особенно эффективно, если передаточная функция $K(i\omega, t)$ изменяется во времени по периодическому закону. При периоде $T = 2\pi/\Omega$ функцию $\mathbf{K}(i\omega, t)$ можно представить в виде ряда Фурье:

$$\mathbf{K}(i\omega, t) = \mathbf{K}_0(i\omega) + K_1(i\omega)\cos(\Omega t - \xi_1) + \mathbf{K}_2(i\omega)\cos(2\Omega t + \xi_2) + \ldots, \quad (10.27)$$

где $\mathbf{K}_0(i\omega)$, $\mathbf{K}_1(i\omega), \ldots,$ — не зависящие от времени коэффициенты, в общем случае комплексные, которые можно истолковать как передаточные функции некоторых четырехполюсников с *постоянными* параметрами. Произведение $\mathbf{K}_n(i\omega)\cos(n\Omega t + \xi_n)$ можно рассматривать как передаточную функцию каскадного соединения двух четырехполюсников: одного с передаточной функцией $\mathbf{K}_n(i\omega)$ не зависящей от времени, и второго с передаточной функцией $\cos(n\Omega t + \xi_n)$, изменяющейся во времени, но не зависящей от частоты ω входного сигнала.

Основываясь на выражении (10.27), любую параметрическую цепь с периодически изменяющимися параметрами можно представить в виде эквивалентной схемы, изображенной на рис. 10.6.

В соответствии с (10.26), при входном сигнале $s(t) = \cos\omega t$, $z(t) = e^{i\omega t}$, сигнал на выходе будет

$$z_{вых}(t) = \mathbf{K}(i\omega, t)\, e^{i\omega t} = \mathbf{K}_0(i\omega)\, e^{i\omega t} + \mathbf{K}_1(i\omega)\, e^{i\omega t}\cos(\Omega t + \xi_1) + \\ + \mathbf{K}_2(i\omega)\, e^{i\omega t}\cos(2\Omega t + \xi_2) + \ldots = K_0(\omega)\, e^{i(\omega t + \varphi_0)} + K_1(\omega)\, e^{i(\omega t + \varphi_1)} \times \\ \times \cos(\Omega t + \xi_1) + K_2(\omega)\, e^{i(\omega t + \varphi_2)}\cos(2\Omega t + \xi_2) + \ldots \quad (10.28)$$

Здесь φ_0, φ_1, $\varphi_2, \ldots$ — ФЧХ четырехполюсников $\mathbf{K}_0(i\omega)$, $\mathbf{K}_1(i\omega)$, $\mathbf{K}_2(i\omega), \ldots$

Переходя к вещественному сигналу на выходе, получаем

$$s_{вых}(t) = \mathrm{Re}\, z_{вых}(t) = K_0(\omega)\cos(\omega t + \varphi_0) + K_1(\omega)\cos(\omega t + \varphi_1)\cos(\Omega t + \xi_1) + \\ + K_2(\omega)\cos(\omega t + \varphi_2)\cos(2\Omega t + \xi_2) + \ldots = K_0(\omega)\cos(\omega t + \varphi_0) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} K_n(\omega)\{\cos[(\omega + n\Omega)t + \varphi_n + \xi_n] + \cos[(\omega - n\Omega)t + \varphi_n - \xi_n]\}. \quad (10.29)$$

Этот результат указывает на следующее свойство цепи с переменными параметрами: при изменении передаточной функции по любому сложному, но периодическому закону с основной частотой Ω гармонический входной сигнал с частотой ω образует на выходе цепи спектр, содержащий частоты ω, $\omega \pm \Omega$, $\omega \pm 2\Omega$ и т. д.

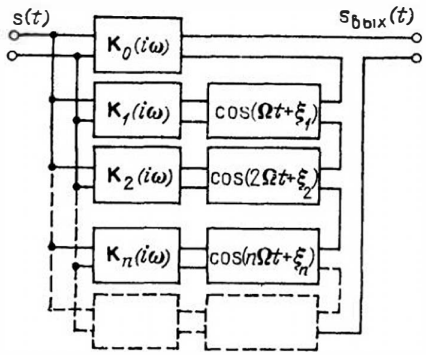
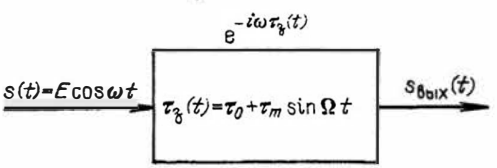


Рис. 10.6. Схема замещения линейной цепи при периодическом изменении параметров

←

Рис. 10.7. К определению сигнала на выходе параметрической линии задержки



Если на вход цепи подается сложный сигнал, то все сказанное выше относится к каждой частоте ω входного спектра. Само собой разумеется, что в линейной параметрической цепи никакого взаимодействия между отдельными компонентами входного спектра не существует (принцип суперпозиции) и на выходе цепи не возникает частот вида $n\omega_1 \pm m\omega_2$, где ω_1 и ω_2 — различные частоты входного сигнала.

Поясним применение формул (10.26)—(10.29) на примере передаточной функции линии задержки

$$K(i\omega,\ t) = e^{-i\omega\tau_з(t)} \tag{10.30}$$

при изменении $\tau_з(t)$ по периодическому закону

$$\tau_з(t) = \tau_0 + \tau_m \sin \Omega t,\ \Omega \ll \omega, \tag{10.31}$$

и при входном сигнале $s(t) = E\cos\omega t$ [соответственно $z(t) = Ee^{i\omega t}$] (рис. 10.7).

Основываясь на (10.26), определяем аналитический сигнал на выходе

$$z_{вых}(t) = Ee^{i\omega t} K(i\omega,\ t) = Ee^{i\omega(t-\tau_0-\tau_m \sin \Omega t)}, \tag{10.32}$$

откуда следует

$$s_{вых}(t) = \operatorname{Re} z_{вых}(t) = E\cos[\omega(t-\tau_0) - \omega\tau_m \sin \Omega t]. \tag{10.33}$$

Получилось фазомодулированное колебание с индексом модуляции $m = \omega\tau_m$ и со спектром, аналогичным выражению (3.31). Таким образом, коэффициенты ряда Фурье для функции $K(i\omega,\ t)$ в данном примере совпадают с бесселевыми функциями $J_n(\omega\tau_m)$ (см. § 3.6).

10.5. ПРИНЦИП ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УСИЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

В § 10.1 было показано, что по отношению к сигналу, малому по сравнению с управляющим колебанием, нелинейная емкость вместе с генератором накачки может быть замещена линейной, изменяющейся во времени емкостью. Отвлекаясь от способа осуществления модуляции емкости (или индуктивности), можно говорить об обмене энергией между источником сигнала и энергоемким параметрическим элементом.

Наглядным примером обмена энергией при изменении емкости является хорошо известная модель с механическим раздвижением пластин заряженного конденсатора. Пондеромоторная сила электрического поля конденсатора стремится сблизить пластины (независимо от полярности напряжения); следовательно, для их раздвижения, т. е. для уменьшения емкости, необходимо произвести работу, которая увеличивает запас энергии конденсатора. При сближении пластин, наоборот, часть энергии поля конденсатора преобразуется в механическую энергию.

Рассмотрим конденсатор (варикап), емкость которого $C(t)$ с помощью управляющего напряжения изменяется по скачкообразному закону, представленному на рис. 10.8. Допустим, что подобный конденсатор включен в высокодобротный контур, возбуждаемый сигналом $e(t) = E\cos\omega t$, частота которого ω совпадает с резонансной частотой контура $\omega_p = 1/\sqrt{LC_0}$ [C_0 — среднее значение $C(t)$], а последняя вдвое меньше частоты изменения $C(t)$.

Напряжение на конденсаторе $u_C(t)$, близкое к гармоническому, показано на нижней части рис. 10.8. Фаза изменения $C(t)$ подобрана с таким расчетом, чтобы уменьшение емкости происходило в моменты перехода $u_C(t)$

через амплитудные значения, а увеличение — в моменты прохождения через нуль. В моменты спада $C(t)$ напряжение $u_C(t)$ получает приращение (см. рис. 10.8), поскольку заряд конденсатора не может мгновенно измениться.

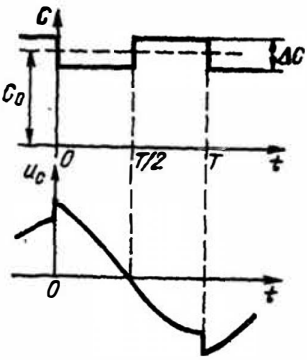


Рис. 10.8. Увеличение амплитуды напряжения на конденсаторе в моменты скачкообразного уменьшения емкости

Это означает, что энергия электрического поля в конденсаторе периодически получает приращение, а это эквивалентно увеличению средней мощности сигнала.

Если прирост энергии, обусловленный одним скачком (вниз) емкости $C(t)$, не превышает расхода энергии за время T, то параметрическая цепь устойчива, в противном случае возникает параметрическое возбуждение колебаний. Таким образом, *регулируя относительную величину* $\Delta C/C_0$, *т. е. глубину модуляции параметра* C, *можно осуществить как параметрическое усиление сигнала, так и параметрическую генерацию.*

Реализация скачкообразного изменения $C(t)$ связана с техническими трудностями и в практике не применяется. Значительно проще модулировать емкость по гармоническому закону. Необходимо лишь соблюдать основной принцип: уменьшать емкость в области максимальных значений заряда (напряжения) конденсатора и увеличивать в области минимальных значений.

Дополнительная мощность сигнала поставляется («накачивается») генератором напряжения, управляющего значением $C(t)$. В связи с этим его часто называют генератором накачки, а управляющее колебание — напряжением накачки.

Управляющее колебание наряду с обозначением $e_у(t) = E_у \cos(\omega_у t + \gamma)$ в дальнейшем часто будет записываться в форме $e_н(t) = E_н \cos \times (\omega_н t + \gamma)$.

Способ получения периодически изменяющейся емкости поясняется схемой на рис. 10.9, *а*. К нелинейной емкости $C_{нл}$ подводится управляющее напряжение накачки $e_н = E_н \cos(\omega_н t + \gamma)$, наложенное на постоянное напряжение E_0. Фильтр Φ_1 преграждает путь току частоты $\omega_н$ в цепь источника сигнала, а фильтр Φ_2 — току частоты сигнала ω (и близких к ω частот) в цепь накачки.

Наложим условие $E \ll E_н$. Тогда, как указано в § 10.1, можно пренебречь изменением емкости под действием сигнала и считать, что закон изменения емкости определяется одним лишь управляющим напряжением. Основываясь на формуле (10.5″), примем

$$C(t) \approx C_0[1 - m\cos(\omega_н t + \gamma)] = C_0 - \Delta C \cos(\omega_н t + \gamma), \quad m \ll 1, \qquad (10.34)$$

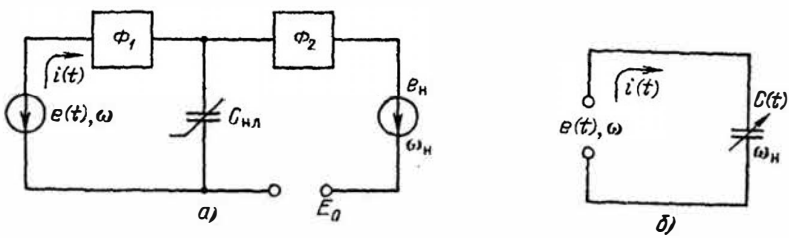


Рис. 10.9. Воздействие на нелинейную емкость напряжений накачки и сигнала (*а*) и схема замещения для слабого сигнала (*б*)

где

$$\Delta C = mC_0; \tag{10.35}$$

γ — начальная фаза.

На рис. 10.9, *б* представлена эквивалентная *линейная* параметрическая схема, на которой цепь накачки не показана.

Определим полный ток через емкость $C(t)$ с помощью общего выражения (10.7):

$$i(t) = [C_0 - \Delta C \cos(\Delta_н t + \gamma)][-\omega E \sin \omega t] + E \cos \omega t \omega_н \Delta C \sin(\omega_н t + \gamma) =$$
$$= -\omega C_0 E \sin \omega t + {}^1/_2 (\omega_н + \omega) \Delta C E \sin[(\omega_н + \omega) t + \gamma] +$$
$$+ {}^1/_2 (\omega_н - \omega) \Delta C E \sin[(\omega_н - \omega) t + \gamma]. \tag{10.36}$$

Частота $\omega_н + \omega \approx 3\omega$ в полосу прозрачности фильтра Φ_1 не попадает; следовательно, ток в цепи источника сигнала является суммой двух токов: на частоте ω и на комбинационной частоте $\omega_н - \omega$, близкой к ω (поскольку, $\omega_н \approx 2\omega$). Первый из этих токов, сдвинутый по фазе относительно $e(t) = E \cos \omega t$ на угол 90°, не может создавать активную проводимость — ни положительную, ни отрицательную. С точки зрения получения эффекта усиления интерес представляет комбинационное колебание разностной частоты $\omega_н - \omega$, особенно в частном случае $\omega_н = 2\omega$. При этом ток на частоте ω

$$i_{\omega_н - \omega}(t) = i_\omega(t) = +{}^1/_2 (\omega_н - \omega) \Delta C E \sin[(\omega_н - \omega) t + \gamma] = +{}^1/_2 \omega \Delta C E \times$$
$$\times \sin(\omega t + \gamma) = {}^1/_2 \omega \Delta C E \cos[\omega t + \gamma - \pi/2]. \tag{10.37}$$

Амплитуда этого тока $I_\omega = {}^1/_2 \omega \Delta C E$.

При ЭДС источника $e(t) = E \cos \omega t$ и токе $i_\omega(t)$, определяемом выражением (10.37), отдаваемая источником мощность

$$P_\omega = \frac{E I_\omega}{2} \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \omega \Delta C \frac{E^2}{2} \sin \gamma = G_{эк} \frac{E^2}{2},$$

где символом

$$G_{эк} = \frac{\omega \Delta C}{2} \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{m \omega C_0}{2} \sin \gamma \tag{10.38}$$

обозначена эквивалентная активная проводимость, учитывающая расход мощности источника сигнала.

Таким образом, приходим к схеме замещения (рис. 10.10, *б*), соответствующей параметрической цепи, показанной на рис. 10.10, *а*. Комбинационная частота $\omega_н + \omega = 3\omega$ в этой схеме не учитывается, а частота $\omega_н - \omega$ совпадает с частотой ω. В результате по отношению к источнику сигнала параметрическая схема (см. рис. 10.10, *а*) приводится к схеме постоянными параметрами. Периодическое изменение $C(t)$ с частотой $\omega_н = 2\omega$ приводит лишь к появлению активной проводимости $G_{эк}$, шунтирующей постоянную емкость C_0.

Рассмотрим три следующих характерных режима: $\gamma = 0$, $\pi/2$ и $-\pi/2$ (рис. 10.11). В первом случае ($\gamma = 0$) $C(t)$ модулируется таким образом, что

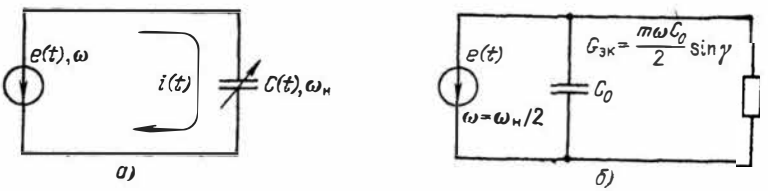


Рис. 10.10. Параметрическая емкостная цепь (*а*) и схема замещения для сигнала с частотой, вдвое меньшей частоты накачки (*б*)

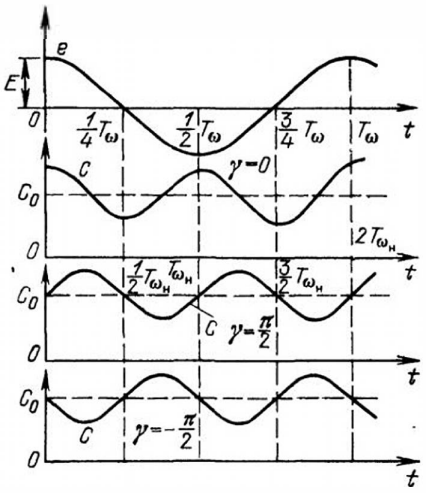


Рис. 10.11. Напряжение на емкости и законы ее изменения при различных начальных фазах

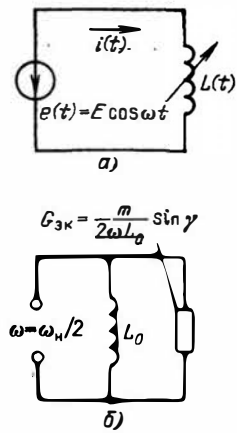


Рис. 10.12. Параметрическая индуктивная цепь (*а*) и схема замещения сигнала с частотой, вдвое меньшей частоты накачки (*б*)

изменение запаса энергии в емкости за период колебания $T_{\omega н} = 2\pi/\omega_н$ (а также за период $T_\omega = 2\pi/\omega$) равно нулю. При этом $G_{эк} = 0$.

Во втором случае ($\gamma = \pi/2$) максимальная скорость нарастания $C(t)$ имеет место в моменты, когда напряжение проходит через максимумы; при этом часть энергии, запасенной в емкости, переходит в устройство, изменяющее емкость. По отношению к источнику ЭДС это равносильно шунтированию постоянной емкости C_0 положительной активной проводимостью $G_{эк} = (m/2)\,\omega C_0$.

Наконец, в третьем случае, при $\gamma = -\pi/2$, когда $C(t)$ убывает в области $e(t) = E$ и нарастает в области $e(t) = 0$, активная проводимость отрицательна: $G_{эк} = -(m/2)\,\omega C_0$.

Этот результат согласуется с результатами приведенного выше качественного рассмотрения принципа параметрического усиления. Отрицательная проводимость $G_{эк}$ учитывает приток энергии от генератора накачки в цепь, содержащую $C(t)$. В данном примере с электронно-управляемой емкостью прирост энергии, запасаемой в емкости, происходит за счет работы, совершаемой генератором накачки при уменьшении емкости (преодоление сил электрического поля при движении электронов и дырок через потенциальный барьер в области запирающего слоя).

Результаты, аналогичные полученным выше для $C(t)$, нетрудно вывести также и для периодически изменяющейся индуктивности $L(t)$.

Исходя из схемы рис. 10.12, *а* при изменении индуктивности по закону

$$L(t) = L_0[1 + m\cos(\omega_н t + \gamma)] \qquad (10.39)$$

находим ток с помощью соотношения (10.11) (при $m \ll 1$)

$$i(t) = \frac{1}{L(t)}\int e(t)\,dt = \frac{1}{\omega L_0[1 + m\cos(\omega_н t + \gamma)]}\,E\sin\omega t \approx$$

$$\approx \frac{E}{\omega L_0}[1 - m\cos(\omega_н t + \gamma)]\sin\omega t = E\left\{\frac{1}{\omega L_0}\sin\omega t - \right.$$

$$\left. - \frac{m}{2\omega L_0}\sin[(\omega + \omega_н)t + \gamma] - \frac{m}{2\omega L_0}\sin[(\omega - \omega_н)t - \gamma]\right\}.$$

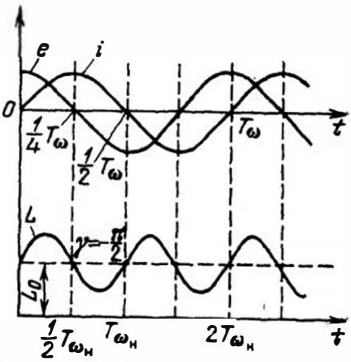


Рис. 10.13. Напряжение и ток в катушке, индуктивность которой убывает при наибольших значениях тока

При $\omega_н = 2\omega$ ток на частоте ω

$$i_\omega(t) = E\frac{1}{\omega L_0}\sin\omega t + E\frac{m}{2\omega L_0}\sin(\omega t + \gamma) = E\frac{1}{\omega L_0}\sin\omega t + E\frac{m}{2\omega L_0}\cos\times$$

$$\times\left[\omega t - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\right].$$

Первое слагаемое никак не влияет на расход мощности, а второе, сдвинутое относительно ЭДС сигнала на угол $\pi/2 - \gamma$, определяет расход мощности

$$P_\omega = \frac{m}{2\omega L_0}\frac{E^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \frac{m}{2\omega L_0}\frac{E^2}{2}\sin\gamma = G_{эк}\frac{E^2}{2},$$

где

$$G_{эк} = \frac{m}{2\omega L_0}\sin\gamma$$

— эквивалентная активная проводимость.

Таким образом, при $\omega_н = 2\omega$ получается схема замещения, изображенная на рис. 10.12, *б*. Фазовые соотношения между $e(t) = E\cos\omega t$, $i(t) = (E/\omega L_0)\sin\omega t$ и индуктивностью $L(t)$, изменяющейся по закону (10.39), видны из рис. 10.13, построенного для $\gamma = -\pi/2$. В данном случае проводимость $G_{эк}$ отрицательна ($-m/2\omega L_0$), если при прохождении тока $i(t)$ через амплитудные значения $L(t)$ убывает, а при прохождении его через нуль $L(t)$ возрастает. Энергия вводится в цепь за счет работы, совершаемой устройством накачки при уменьшении индуктивности, обтекаемой током (преодоление сил магнитного поля, стремящихся сблизить витки и увеличить индуктивность катушки).

10.6. ОДНОКОНТУРНЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ УСИЛИТЕЛЬ

Из предыдущего параграфа следует, что введением в колебательный контур переменной емкости или индуктивности можно при соответствующем законе изменения параметра осуществлять усиление колебаний. Простейшая схема одноконтурного параметрического усилителя с переменной емкостью изображена на рис. 10.14, *а*. Нелинейная емкость $C_{нл}$ находится под воздействием двух напряжений: сигнального с частотой ω и накачки с частотой $\omega_н$.

Разделительные конденсаторы $C_р$ защищают генератор накачки и источник сигнала от постоянного напряжения E_0, используемого для установления рабочей точки на вольт-фарадной характеристике варикапа. Блокировочный дроссель $L_{бл}$ преграждает путь в цепь источника E_0 токам высокой частоты ω и $\omega_н$.

Рассмотрим сначала режим работы усилителя при точном соблюдении условия $\omega = \omega_н/2$. В этом, так называемом синхронном режиме комбинационная частота $\omega_н - \omega$ совпадает с частотой ω, так что в контуре существует ток только на частоте ω. Схема замещения для синхронного режима

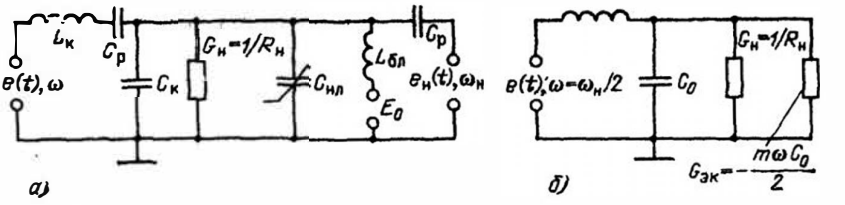


Рис. 10.14. Одноконтурный параметрический усилитель (*а*) и схема замещения (*б*)

представлена на рис. 10.14, *б* для случая $\gamma = -\pi/2$, соответствующего отрицательной вещественной проводимости $G_{эк}$. Символом C_0 обозначена сумма емкости конденсатора контура $C_к$ и средней емкости варикапа (соответствующей постоянному напряжению E_0).

Для упрощения анализа источник ЭДС сигнала $e(t)$, включенный в контур последовательно, заменен на рис. 10.15 генератором тока, подключенным параллельно контуру и шунтированным внутренней проводимостью G. Проводимость нагрузки $G_н$ включает в себя также проводимость, учитывающую потери мощности в элементах контура. Шунтирование проводимости нагрузки $G_н$ отрицательной проводимостью $G_{эк} = (\omega\Delta C/2) \times \sin\gamma = -\omega\Delta C/2 = -m\,\omega\,C_0/2$ уменьшает суммарную проводимость и таким образом повышает добротность контура. Получается эффект усиления.

Составим выражение для коэффициента усиления в виде отношения мощности сигнала на выходе усилителя к максимальной мощности, которую можно получить при отсутствии параметрической модуляции. Как известно, максимум мощности, выделяемой в проводимости нагрузки (при отсутствии усиления), достигается при $G_н = G_i$. При этом мощность сигнала

$$P_s = \frac{1}{2}\frac{I^2}{4G_н} = \frac{1}{2}\frac{I^2}{4G_i}$$

(I — амплитуда тока генератора).

При подключении дополнительной проводимости $G_{эк}$ напряжение на выходе будет $E = I/(G_i + G_н + G_{эк}) = I/(2G_н + G_{эк})$, а мощность, выделяемая в проводимости нагрузки,

$$P_s' = \frac{1}{2}E(EG_н) = \frac{1}{2}G_н E^2 = \frac{1}{2}G_н\frac{I^2}{(2G_н + G_{эк})^2} = \frac{1}{2}\frac{I^2}{4G_н}\frac{1}{(1 + G_{эк}/2G_н)^2}.$$

Отсюда коэффициент усиления мощности

$$K_P = P_s'/P_s = 1/(1 + G_{эк}/2G_н)^2. \qquad (10.40)$$

Напомним, что $G_{эк}$ — *отрицательная* величина.

Из этого выражения непосредственно вытекает условие устойчивости параметрического усилителя (в синхронном режиме)

$$|G_{эк}| < 2G_н \text{ или } m\omega C_0/2 < 2G_н, \qquad (10.41)$$

откуда критическое значение коэффициента параметрической модуляции

$$m_{кр} = 2(2G_н/\omega C_0) = 2/Q_{эк}, \qquad (10.42)$$

где $Q_{эк}$ — добротность контура с учетом G_i и $G_н = G_i$.

Заметим, что при $G_{эк} = -G_н$, т. е. когда параметрическая модуляция

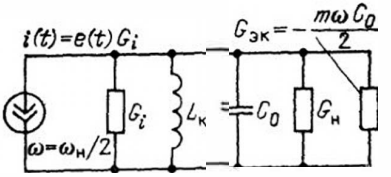


Рис. 10.15. Одноконтурный параметрический усилитель (к схеме на рис. 10.14, *а*)

компенсирует потери только в $G_н$, усиление по мощности равно всего лишь четырем.

На практике при усилении реального сигнала, фаза которого не известна, а частота может изменяться в некоторой полосе, соблюдение условий синхронного режима невозможно. Пусть частота сигнала ω будет не точно $\omega_н/2$, а $\omega = \omega_н/2 + \Omega$, где Ω — небольшое отклонение, не выходящее из полосы прозрачности колебательного контура. Тогда комбинационная частота будет $\omega_н - \omega = \omega_н = (\omega_н/2 + \Omega) = \omega_н/2 - \Omega$. При этом в полосе пропускания контура оказываются два колебания: одно с частотой $\omega_н/2 + \Omega$ (полезный сигнал) и другое с частотой $\omega_н/2 - \Omega$ (комбинационная частота).

Соотношение между амплитудами указанных двух колебаний зависит от глубины модуляции емкости m и величины Ω. Подробный анализ, который здесь не приводится, показывает, что при значениях m, близких к критическому [см. (10.42), и относительно малой расстройке Ω амплитуды обоих колебаний примерно одинаковы. Возникают биения и связанные с этим последствия (пульсация амплитуды и изменения фазы результирующего колебания). Можно, правда, показать, что даже при расхождении частот ω и $\omega_н/2$ средняя за период биений мощность колебаний больше, чем при отсутствии параметрического воздействия, т. е. что и в этом, так называемом *бигармоническом*, режиме имеет место усиление сигнала. Однако подобный режим работы усилителя не всегда приемлем.

От недостатков, присущих одноконтурному параметрическому усилителю, свободна схема, рассматриваемая в следующем параграфе.

10.7. ДВУХКОНТУРНЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ УСИЛИТЕЛЬ

Принципиальная схема двухчастотного или, как его часто называют, двухконтурного усилителя изображена на рис. 10.16. Первый, сигнальный, контур настраивается на центральную частоту спектра сигнала (резонансная частота $\omega_{р1} \approx \omega_1$), а второй, «холостой», контур — на частоту $\omega_{р2}$, достаточно сильно отличающуюся от $\omega_{р1}$.

Частота накачки выбирается из условия

$$\omega_н = \omega_{р1} + \omega_{р2}. \qquad (10.43)$$

При выборе частоты $\omega_{р2}$ исходят из условия, что частота сигнала ω_1 находится вне полосы прозрачности вспомогательного контура. Но комбинационная частота $\omega_2 = \omega_н - \omega_1$ должна находиться вне рабочей полосы сигнального контура.

При выполнении этих условий на сигнальном контуре будет существовать лишь одно напряжение частоты ω_1, а на вспомогательном контуре — частоты ω_2. Считая амплитуды E_1 и E_2 этих напряжений малыми по сравнению с $E_н$, можно заменить нелинейную емкость $C_{нл}$, совместно с генератором накачки, *линейной* параметрической емкостью $C(t)$, изменяющейся с частотой $\omega_н$, как это было сделано в § 10.5. Тогда под воздействием напряжения

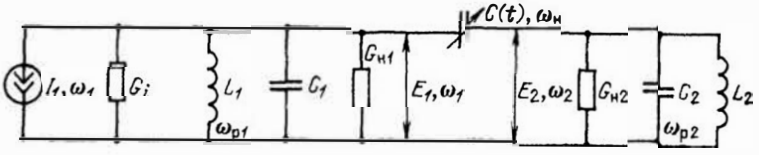


Рис. 10.16. Двухчастотный параметрический усилитель

сигнала $e_1(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1)$ в цепи переменной емкости $C(t) = C_0 - \Delta C \cos(\omega_н t + \theta_н)$ возникает (помимо других составляющих, не представляющих в данном случае интереса) ток

$$i_{\omega_н - \omega_1}(t) = i_{\omega_2}(t) = {}^1/_2 (\omega_н - \omega_1) \Delta C E_1 \sin[(\omega_н t + \theta_н) - (\omega_1 t + \theta_1)] =$$

$$= {}^1/_2 \omega_2 \Delta C E_1 \sin[\omega_2 t + (\theta_н - \theta_1)] = I_{\omega_2} \sin[\omega_2 t + (\theta_н - \theta_1)] \qquad (10.44)$$

[см. 10.36)]. Здесь $I_{\omega_2} = {}^1/_2 \omega_2 \Delta C E_1$.

На сопротивлении холостого контура $Z_2(i\omega_2) = Z_2(\omega_2) e^{i\varphi_2}$ ток $i_{\omega_2}(t)$ создает падение напряжения

$$I_{\omega_2} Z_2(\omega_2) \sin(\omega_2 t + \theta_н - \theta_1 + \varphi_2) = {}^1/_2 \omega_2 \Delta C Z_2(\omega_2) E_1 \times$$

$$\times \sin(\omega_2 t + \theta_н - \theta_1 + \varphi_2).$$

Эквивалентную ЭДС, воздействующую на емкость $C(t)$, запишем, как и в § 8.16 [см. (8.99)], в форме

$$e_2(t) = E_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) = -{}^1/_2 \omega_2 \Delta C Z_2(\omega_2) E_1 \sin(\omega_2 t + \theta_н - \theta_1 + \varphi_2) =$$

$$= E_2 \cos[\omega_2 t + \theta_н - \theta_1 + \varphi_2 + \pi/2],$$

где $E_2 = {}^1/_2 \omega_2 \Delta C Z_2(\omega_2) E_1$.

Комбинационный ток $i_{\omega_н - \omega_2}(t)$, обусловленный этой ЭДС, по аналогии с выражением (10.44) будет

$$i_{\omega_н - \omega_2}(t) = i_{\omega_1}(t) = {}^1/_2 (\omega_н - \omega_2) \Delta C E_2 \sin[(\omega_н - \omega_2) t + \theta_н -$$

$$-(\theta_н - \theta_1 + \varphi_2 + \pi/2)] = {}^1/_2 \omega_1 \Delta C E_2 \sin(\omega_1 t + \theta_1 - \varphi_2 - \pi/2) =$$

$$= -{}^1/_2 \omega_1 \Delta C E_2 \cos(\omega_1 t + \theta_1 - \varphi_2). \qquad (10.45)$$

Заметим, что фаза накачки $\theta_н$ и частота $\omega_н$ в выражении (10.45) отсутствуют.

С учетом приведенного выше соотношения для E_2 последнее равенство можно записать в форме

$$i_{\omega_1}(t) = -(\Delta C/2)^2 \omega_1 \omega_2 Z_2(\omega_2) E_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1 - \varphi_2).$$

Как видим, по отношению к сигнальному контуру нелинейная емкость $C_{н\,л}$ вместе с генератором накачки и холостым контуром может быть замещена проводимостью, учитывающей найденный ток $i_{\omega_1}(t)$.

Комплексная амплитуда этого тока

$$\mathbf{I}_{\omega_1} = -(\Delta C/2)^2 \omega_1 \omega_2 Z_2(\omega_2) e^{-i\varphi_2} E_1 e^{i\theta_1}.$$

Комплексная амплитуда напряжения $e_1(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1)$ на сигнальном контуре $\mathbf{E}_1 = E_1 e^{i\theta_1}$. Следовательно, проводимость, шунтирующая сигнальный контур, будет

$$G_{эк}(i\omega_1) = \frac{\mathbf{I}_{\omega_1}}{\mathbf{E}_1} = -\left(\frac{\Delta C}{2}\right)^2 \omega_1 \omega_2 Z_2(\omega_2) e^{-i\varphi_2} =$$

$$= -\left(\frac{\Delta C}{2}\right)^2 \omega_1 \omega_2 Z_2^*(i\omega_2) = -\left(\frac{mC_0}{2}\right)^2 \omega_1 \omega_2 Z_2^*(i\omega_2), \qquad (10.46)$$

где $Z_2^*(i\omega_2) = Z_2(\omega_2) e^{-i\varphi_2}$ — функция комплексно-сопряженная функции $Z_2(i\omega_2)$.

Для резонанса, когда $\omega_1 = \omega_{p1}$ и, следовательно, $\omega_2 = \omega_{p2}$, сопротивление вспомогательного контура будет $R_{н2} = 1/G_{н2}$ и формула (10.46) принимает вид

$$G_{эк}(\omega_{p1}) = -(mC_0/2)^2 \omega_1 \omega_2 R_{н2}. \qquad (10.47)$$

На схеме замещения, представленной на рис. 10.17, элементы, расположенные слева от штриховой линии, соответствуют сигнальному контуру усилителя, а справа — нелинейной емкости вместе со вспомогательным контуром. Полученная схема по существу совпадает со схемой одноконтурного усилителя (см. рис. 10.15). Различие лишь в способе определения эквивалентной отрицательной проводимости.

Подробности, связанные с определением комбинационных колебаний $i_{\omega_н-\omega_1}(t)$ и $i_{\omega_н-\omega_2}(t)$, приведены с целью привлечения внимания к следующим преимуществам двухконтурного усилителя:

а) эквивалентная отрицательная проводимость, а следовательно, и усиление мощности *не зависят от фазы напряжения накачки*;

б) *не требуется* соблюдение определенного соотношения между частотами ω_1 и $\omega_н$.

Оба эти свойства двухконтурного усилителя объясняются тем, что полная фаза комбинационного тока $i_{\omega_н-\omega_2}$ в выражении (10.45), определяющая характер эквивалентной проводимости $G_{эк}$, по существу является разностью фаз напряжений накачки $e_н(t)$ и $e_2(t)$. Первая из них имеет вид $(\omega_н t + \theta_н)$, а вторая $(\omega_2 t + \theta_н - \theta_1)$ (без учета $\varphi_г$ и $\pi/2$). При образовании разности $\theta_н$ выпадает, а разностная частота $\omega_н - \omega_2$ в любом случае совпадает с частотой сигнала (поскольку $\omega_2 = \omega_н - \omega_1$).

Коэффициент усиления двухконтурного усилителя при резонансной частоте ($\omega_1 = \omega_{р1}$) можно определить из выражения, аналогичного формуле (10.40):

$$K_P = 1/(1 + G_{эк}/2G_{н1})^2, \qquad (10.48)$$

где $G_{эк}$ вычисляется по формуле (10.46), а $G_{н1}$ — проводимость нагрузки сигнального контура.

При отклонении частоты сигнала ω_1 от резонансной частоты $\omega_{р1}$ и соответственно частоты ω_2 от $\omega_{р2}$ модуль сопротивления $Z(i\omega_2)$ уменьшается, что приводит к уменьшению модуля $G_{эк}$ и, следовательно, коэффициента усиления мощности.

Основываясь на выражении (10.46), можно вычислить АЧХ и полосу пропускания двухконтурного усилителя.

Условие устойчивости усилителя в данном случае можно записать в форме

$$|G_{эк}| = (mC_0/2)^2 \omega_1 \omega_2 R_{н2} < 2G_{н1}$$

или

$$m < 2\sqrt{2}\sqrt{G_н/R_{н2}\,\omega_1\,\omega_2\,C_0^2}.$$

Рассмотрим энергетический баланс в двухчастотном усилителе в зависимости от соотношения частот ω_1 и ω_2. Пусть заданы частота ω_1 и мощность P_s сигнала на входе усилителя. Так как с повышением вспомогательной частоты ω_2 модуль отрицательной величины $G_{эк}$ увеличивается [см. (10.46)], то и K_P также растет [см. (10.48)]. Мощность сигнала на выходе усилителя $P_{\omega_1} = K_P P_s$.

Для определения требуемой мощности генератора накачки $P\omega_н$, а также мощности P_{ω_2}, выделяемой во вспомогательном контуре, воспользуемся теоремой Мэнли-Роу. На основании выражения (7.104′) можно записать следующие соотношения:

$$P_{\omega_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} P_{\omega_1}, \quad P_{\omega_н} = \frac{\omega_н}{\omega_1} P_{\omega_1} = P_{\omega_1} + P_{\omega_2}.$$

(Знак минус в последнем выражении опущен, так как очевидно, что эта мощность отбирается от генератора накачки.) Соотношение мощностей P_s, P_{ω_1}, P_{ω_2} и $P_{\omega_н}$ иллюстрируется рис. 10.18. Из этого рисунка видно, что при $\omega_2 > \omega_1$ на вспомогательном контуре выделяется мощность, бóльшая, чем на сигнальном. Таким образом, хотя с повышением частоты ω_2 мощность $P\omega_1$ и растет, распределение мощности, отбираемой от генератора накачки, изменяется в пользу частоты ω_2. Несмотря на это, часто работают в режиме $\omega_2 > \omega_1$, так как при усилении слабого сигнала основное значение имеет не степень использования мощности $P_{\omega_н}$, а отношение мощности P_{ω_1} к P_s т. е. $K_р$.

Для иллюстрации количественных соотношений в двухчастотном параметрическом усилителе приведем следующий пример.

Пусть требуется осуществить усиление сигнала на частоте $f_1 = 30$ МГц при ширине спектра $2\Delta f_0 = 100$ кГц.

Исходные данные первого (сигнального) контура: характеристическое сопротивление $\rho_1 = 100$ Ом; внутреннее сопротивление источника сигнала, шунтирующее контур, $R_i = 5$ кОм; сопротивление нагрузки $R_{н1} = 5$ кОм.

Исходные данные второго (холостого) контура: резонансная частота $f_{р2} = 60$ МГц; характеристическое сопротивление $\rho_2 = 50$ Ом; сопротивление нагрузки $R_{н2} = 5$ кОм.

Прежде чем вычислять требуемую вариацию емкости варикапа, найдем предельную величину проводимости $G_{эк}$, которую можно подключать к сигнальному контуру при заданной ширине спектра сигнала $2\Delta f_0$.

Максимальная добротность сигнального контура (при шунтировании отрицательной проводимостью), очевидно, не должна превышать

$$Q_1 \leqslant f_1/2\Delta f_0 = 30 \cdot 10^6/100 \cdot 10^3 = 300.$$

При $\rho_1 = 100$ Ом результирующая проводимость, шунтирующая первый контур, должна быть не менее

$$G_i + G_{н1} + G_{эк} \geqslant 1/\rho_1 Q_1,$$

откуда

$$G_{эк} \geqslant 1/\rho_1 Q_1 - (G_i + G_{н1}) = 1/\rho_1 Q_1 - 2G_{н1} = -367 \cdot 10^{-6} \text{ См}.$$

Подставляя значения $G_{эк}$, ω_1, ω_2 и $R_{н2}$ в формулу (10.47), находим

$$mC_0/2 = \Delta C/2 = \sqrt{|G_{эк}|/\omega_1 \omega_2 R_{н2}} \approx 3 \cdot 10^{-12} \text{ Ф},$$

откуда

$$\Delta C = 6 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 6 \text{ пФ}.$$

Требуемое значение ΔC можно реализовать с помощью обычного варикапа. Существующие в настоящее время варикапы допускают, например, изменение емкости до 30 пФ.

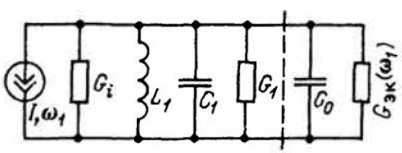


Рис. 10.17. Схема замещения двухконтурного параметрического усилителя

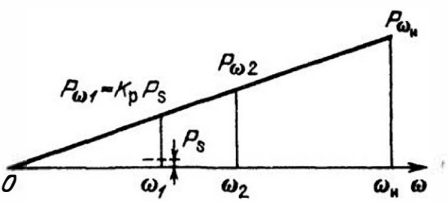


Рис. 10.18. Соотношение мощностей на различных частотах в двухконтурном параметрическом усилителе

Коэффициент усиления мощности вычислим по формуле (10.48):

$$K_P = 1 \Big/ \left(1 - \frac{367 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 200 \cdot 10^{-6}}\right)^2 \approx 147.$$

В заключение отметим основные преимущества и недостатки параметрического усилителя.

Важным преимуществом параметрического усилителя является относительно низкий уровень шумов по сравнению с транзисторными или ламповыми усилителями. В § 7.3 отмечалось, что главным источником шумов в транзисторном и ламповом усилителях является дробовой эффект, обусловленный хаотическим переносом дискретных зарядов электронов и дырок (в транзисторе). В параметрическом усилителе аналогичный эффект имеет место в приборе, осуществляющем модуляцию параметра. Например, изменение емкости варикапа происходит за счет перемещений электронов и дырок. Однако интенсивность потока носителей электричества в варикапе во много раз меньше, чем в транзисторе или лампе. В последних интенсивность потока определяет непосредственно мощность полезного сигнала, выделяемого в цепи нагрузки, а в варикапе — всего лишь эффект модуляции параметра. Ослабление влияния дробового эффекта столь значительно, что в параметрическом усилителе уровень шумов определяется в основном тепловыми шумами. В связи с этим часто применяют охлаждение параметрического диода до 5 ... 10 К.

Недостатком параметрического усилителя является сложность развязки цепей накачки и сигнала.

В схеме, представленной на рисунке 10.14, *а*, характерной для параметрических усилителей метрового диапазона, развязка осуществляется с помощью разделительных конденсаторов и блокировочных дросселей. В диапазоне СВЧ, на которых особенно широко применяются параметрические усилители, приходится прибегать к весьма сложным конструкциям, сочетающим в одном узле двухчастотную колебательную цепь в виде полых резонаторов, варикап *и* специальные элементы развязки (циркулятор, направленный ответвитель, поглотитель, заградительный фильтр). Эти вопросы рассматриваются в специальных курсах.

10.8. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Из материала предыдущих параграфов следует, что параметрический усилитель, в котором глубина модуляции m нелинейной емкости или индуктивности доводится до значения, превышающего некоторое критическое $m_{кр}$, превращается в генератор. Подобные генераторы называются п а р а м е т р о н а м и. Простейший параметрон представляет собой колебательный контур, один из элементов которого — нелинейная емкость или индуктивность — подвергается периодическому изменению во времени с помощью генератора накачки.

Можно наметить следующую картину возникновения и нарастания колебания в параметрическом генераторе. Пусть закон изменения емкости варикапа определяется выражением

$$C(t) = C_0/(1 + m \sin \omega_н t), \qquad (10.49)$$

где частота накачки $\omega_н = 2\omega_р$; $\omega_р$ — резонансная частота колебательного контура.

Если $m > m_{кр}$ (неустойчивая система) при запуске генератора накачки в контуре возникает колебание с частотой $\omega_р = \omega_н/2$ и начальной фазой 0 или π (по отношению к фазе накачки).

При отсутствии внешнего воздействия, т. е. в режиме свободного колебания, фаза (0 или π), а также амплитуда возникающего колебания являются случайными величинами, зависящими от фазы и амплитуды шумового напряжения $e_ш(t)$ в контуре.

Для выявления процесса нарастания амплитуды колебания обратимся к рассмотрению свойств простого колебательного контура, емкость которого изменяется по закону (10.49) при $L = \text{const}$ и $r = \text{const}$.

В режиме свободного колебания дифференциальное уравнение для тока в контуре будет

$$L\frac{di(t)}{dt} + ri(t) + \frac{1}{C(t)}\int i(t)\,dt = 0.$$

Переходя от тока i к заряду q и учитывая выражение (10.49), получаем

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{(1+m\sin\omega_н t)}{LC_0}q = 0. \tag{10.50}$$

Величина $1/LC_0 = \omega_р^2$ определяет резонансную частоту контура в отсутствие модуляции емкости, т. е. при $m = 0$.

Таким образом, уравнение (10.50) можно записать в форме

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\alpha_к\frac{dq}{dt} + \omega_р^2(1+m\sin\omega_н t)q = 0, \tag{10.51}$$

где $\alpha_к = r/2L$.

Основываясь на допущении высокой добротности контура ($Q = \omega_р/2\alpha_к \gg 1$), мы вправе искать решение уравнения (10.51) в виде колебания с частотой $\omega_р$ и медленно меняющейся амплитудой

$$q(t) = A_0 e^{\mu t}\cos(\omega_р t + \xi), \tag{10.52}$$

где μ — показатель, зависящий от параметров контура и модуляции емкости.

Заметим, что при $Q \gg 1$ можно, как и для контура с постоянной емкостью, считать

$$q(t) = C_0 e_C(t) = C_0 E_{C_0} e^{\mu t}\cos(\omega_р t + \xi). \tag{10.52'}$$

Подстановкой (10.52') в (10.51) можно определить как μ, так и начальную фазу ξ, однако задачу можно еще более упростить, поскольку нас интересует режим заведомой неустойчивости решения $q(t)$, при котором собственное колебание в контуре возрастает за счет энергии, отбираемой от генератора накачки. Это возможно, если напряжение $e_c(t)$ на емкости сфазировано относительно функции $C(t)$ так, как это показано на рис. 10.19; начальная фаза может быть либо $\xi = 0$ (сплошная линия), либо $\xi = \pi$.

Подставив в (10.51) $q = A_0 e^{\mu t}\cos\omega_р t$, после несложных преобразований придем к следующему результату:

$$\mu = \frac{m}{4}\omega_р - \alpha_к, \tag{10.53}$$

и

$$q(t) = A_0 e^{(m\omega_р/4 - \alpha_к)t}\cos\omega_р t. \tag{10.54}$$

Для нарастания амплитуды должно выполняться условие

$$m\omega_p/4 > \alpha_к \text{ или } m > 4\alpha_к/\omega_p = 2/Q = 2d.$$

Этот результат совпадает с определением критического значения m в § 10.6 [см. (10.42)].

Механизм ограничения амплитуды при параметрическом возбуждении обусловлен заходом амплитуды колебаний на нелинейные участки характеристик емкости или индуктивности. При этом изменяются средние значения $C(t)$ или $L(t)$, а следовательно, и средняя резонансная частота контура. Расстройка контура относительно частоты $\omega_н/2$ ухудшает условия преобразования энергии накачки и приводит к ограничению амплитуды.

В настоящее время принцип параметрического возбуждения колебаний используется в специальных генераторах (параметронах), применяемых в различных устройствах для обработки дискретной информации. Это объясняется главной особенностью параметрического возбуждения — двузначностью фазы генерируемых колебаний. Так как установление фазы φ или $\varphi + \pi$ зависит от начальных условий, то, задавая в момент запуска генератора начальную фазу с помощью сигнала, можно получить одно из двух устойчивых состояний генератора, соответствующих двум знакам двоичного кода (например, фазе φ условно приписывается нуль, а фазе $\varphi + \pi$ — единица).

В емкостном параметроне (рис. 10.20, *а*) в качестве переменной емкости используются два полупроводниковых диода, а индуктивностью контура служит первичная обмотка высокочастотного трансформатора. Напряжение накачки $e_н(t)$ с частотой $\omega_н$, вдвое превышающей резонансную частоту контура, подается на диоды синфазно, благодаря чему емкости диодов уменьшаются или увеличиваются одновременно и вместе с тем исключается прохождение частоты $\omega_н$ на выход. Благодаря симметрии устраняется также прохождение колебаний частоты $\omega_н/2$, возбуждаемых в контуре, в цепь накачки. Положение рабочей точки на характеристиках p — n — переходов задается постоянным напряжением смещения.

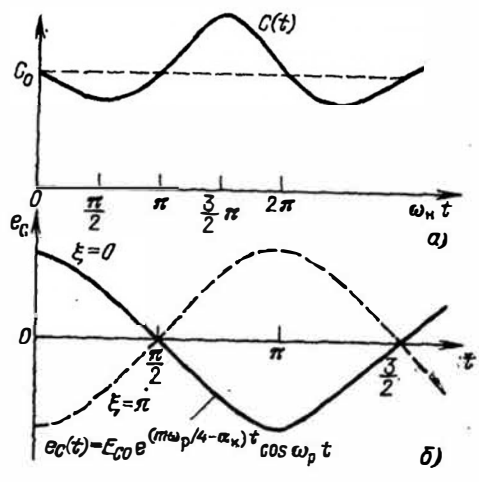


Рис. 10.19. Модуляция емкости и возможные фазы генерируемого колебания (0 — сплошная, π — штриховая линии)

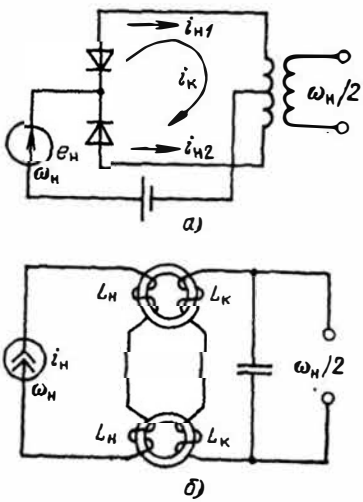


Рис. 10.20. Емкостной (*а*) и индуктивный (*б*) параметроны

В индуктивном параметроне (рис. 10.20, *б*) контур состоит из постоянной емкости и катушек $L_к$, насаженных на ферритовые сердечники, магнитная проницаемость которых периодически изменяется при пропускании тока накачки $i_н(t)$ через катушки $L_н$. Исходное положение рабочей точки на характеристике нелинейной индуктивности задается постоянным током, пропускаемым через катушки $L_н$. Встречное включение катушек $L_н$ на двух сердечниках устраняет прямое прохождение колебаний частоты $\omega_н$ на выход, а также колебаний частоты $\omega_н/2$ из контура в цепь накачки.

Следует отметить, что к параметрону термин «генератор» или «генерирование» может быть применен лишь условно. В отличие от любой электронной автоколебательной системы или генератора с посторонним возбуждением, в которых осуществляется преобразование энергии источника постоянного тока в энергию колебаний, в параметроне первичным источником энергии является генератор накачки. Назначение параметрона, используемого в качестве реле с двумя устойчивыми состояниями, не в получении колебаний, а в «запоминании» фазы сигнала.

В связи с таким информационным назначением параметрона основное значение приобретает его быстродействие, от которого зависит и быстродействие устройства, работающего на параметронах. Необходимо по возможности повысить скорость нарастания амплитуды при каждом запуске параметрона.

Так как в соответствии с формулами (10.52) и (10.53) амплитуда напряжения на контуре нарастает по закону

$$E(t) = E_{C_0} e^{(m\omega_р/4 - \alpha_к)t},$$

где через E_{C_0} обозначена начальная амплитуда (т. е. амплитуда сигнала, фазу которого требуется запомнить), то время, необходимое для достижения стационарной амплитуды $E_{ст}$, можно определить выражением

$$\ln \frac{E_{ст}}{E_{C_0}} = \left(\frac{m\omega_р}{4} - \alpha_к\right) t_{max} = (m - 2d)\,\frac{\omega_р\, t_{max}}{4},$$

откуда

$$t_{max} = \left(\ln \frac{E_{ст}}{D_{C_0}}\right) \Big/ (m - 2d)\,\frac{\pi}{2} f_р.$$

Приведем следующий пример. Пусть на частоте $f_р = 36$ МГц (промежуточная частота приемника СВЧ) при добротности колебательного контура $Q \approx 50$ ($d = 0{,}02$) требуется обеспечить отношение $E_{ст}/E_{C_0} \approx 10^6$ (амплитуда запускающего радиоимпульса ~ 1 мкВ, стационарная амплитуда ~ 1 В).

Средняя емкость контура, включая варикап, $\sim$15 пФ, $\Delta C \approx 2$ пФ, так что коэффициент модуляции емкости

$$m = \Delta C/C_0 \approx 0{,}13.$$

Находим

$$t_{max} \approx \ln 10^6 \Big/ \left[(0{,}13 - 2 \cdot 0{,}02)\,\frac{\pi}{2} \cdot 36 \cdot 10^6\right] \approx 2{,}7 \text{ мкс}.$$

Это соответствует примерно 194 периодам напряжения накачки (при $f_н = 2f_р = 72$ МГц).

Возможности увеличения параметра m и амплитуды E_{C_0} весьма ограничены. Поэтому основным путем увеличения быстродействия является повышение частоты $f_р$.

В настоящее время непрерывно повышаются рабочие частоты параметронов и разрабатываются новые электронные и иные приборы, позволяющие осуществлять параметроны в диапазоне СВЧ.

Приведенные в данном параграфе соображения ограничены случаем возбуждения колебания с частотой $f_р = f_н/2$. Более детальный анализ явлений в контуре с периодической (гармонической) накачкой, основанный на теории дифференциального уравнения Матье[1], указывает на возможность возбуждения также колебаний с частотами $f = (n/2) f_н$, $n = 1, 2, 3 \ldots$.

10.9. СОПОСТАВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СИГНАЛОВ

Некоторые из нелинейных преобразований, рассмотренных в гл. 8, можно трактовать и как параметрические. Например, преобразование частоты, основанное на взаимодействии сигнала и гетеродинного колебания в нелинейном резистивном элементе (см. § 8.11), можно рассматривать как преобразование слабого сигнала в линейном элементе с переменным параметром — крутизной вольт-амперной характеристики, управляемой гетеродинным колебанием. То же относится к синхронному детектированию (см. § 8.12).

В § 8.13 рассматривался способ получения АМ колебания, основанный на изменении амплитуды импульсов тока в сугубо нелинейном резонансном усилителе, работающем с отсечкой тока. Однако изменение амплитуды импульсов при неизменной амплитуде напряжения на входе есть не что иное, как изменение средней крутизны $S_{ср}$ вольт-амперной характеристики усилителя, а следовательно, и изменение коэффициента усиления. По существу, описанный способ модуляции сводится к пропусканию несущего колебания через параметрический четырехполюсник. Таким образом, если отвлечься от способа управления одним из параметров цепи, то модуляцию можно трактовать как *параметрический процесс*.

Однако некоторые параметрические преобразования сигнала можно также трактовать как нелинейные. Так, параметрическое усиление сигнала с с помощью варикапа можно трактовать как результаты взаимодействия слабого сигнала с напряжением накачки в *нелинейной* емкости. Подобный подход с использованием соотношений, вытекающих из теоремы Мэнли—Роу, был применен в § 8.17.

Из приведенных примеров видна условность деления электронных цепей на нелинейные и параметрические (линейные). При взаимодействии в нелинейных цепях слабых сигналов с сильным управляющим колебанием обычно целесообразно говорить о *параметрическом* преобразовании слабого сигнала. При взаимодействии в тех же цепях сигналов с соизмеримыми уровнями более адекватна нелинейная трактовка.

Примерами строго линейных параметрических систем являются радиоэлектронные цепи, в которых элементы управляются электромеханическим способом (например, конденсатор переменной емкости или вариометр, вращаемые мотором, мембрана в электродинамическом микрофоне).

[1] См. предыдущее издание настоящей книги.

Глава 11. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

11.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При анализе помехоустойчивости радиосистем особенно часто приходится рассматривать линейную сумму полезного сигнала $s(t)$ и шумовой помехи $n(t)$

$$y(t) = s(t) + n(t). \tag{11.1}$$

В этом случае помеха называется аддитивной, а $y(t)$ — аддитивной смесью сигнала и шума. Примерами аддитивной помехи являются рассмотренные в гл. 7 дробовый и тепловой шумы, возникающие в электронных приборах и электрических цепях независимо от действующих в них сигналов.

Однако при передаче сигнала по реальному каналу связи помимо аддитивной помехи есть и другие факторы, которые искажают сигнал, например паразитные изменения во времени параметров цепей или любых других элементов канала связи. В самом простом случае, когда эти изменения имеют характер АМ, сигнал на выходе канала связи можно представить в виде

$$s_{\text{вых}}(t) = K(t)\, s(t) + n(t).$$

В этом выражении $n(t)$, как и в (11.1), — аддитивная помеха, а $K(t)$ — коэффициент, характеризующий мультипликативную помеху. В реальных условиях механизм образования мультипликативной помехи более сложен и не всегда может быть сведен к простому перемножению помехи и сигнала. Несмотря на это, под мультипликативной помехой обычно подразумевают помеху, являющуюся результатом нежелательного изменения параметров линейной системы, через которую передается сигнал.

В последующих параграфах данной главы сначала изучается воздействие гауссовского, в основном узкополосного шума на нелинейные устройства: амплитудный и частотный детекторы, нелинейный усилитель и амплитудный ограничитель. Затем в § 11.8, 11.9 рассматриваются воздействие случайных процессов на параметрические цепи и влияние мультипликативной помехи на передачу сигналов.

11.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В БЕЗЫНЕРЦИОННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Реальное нелинейное устройство представляет собой сочетание нелинейных безынерционных элементов с линейными инерционными электрическими цепями. Это очень усложняет определение статистических характеристик сигнала и шума на выходе всего устройства. Для линейных цепей просто определить корреляционную (или спектральную) функцию, но очень сложно — закон распределения. В нелинейных же, но безынерционных элементах, наоборот, основная трудность состоит в нахождении корреляционной функции. Поэтому общих методов анализа преобразования случайных процессов в нелинейных устройствах не существует. Приходится ограничиваться некоторыми частными задачами, представляющими практический

интерес и поддающимися решению, а также прибегать к различным идеализациям характеристик изучаемой модели устройства.

Пусть на нелинейный элемент действует случайное колебание (напряжение, ток) с заданной плотностью вероятности $p(x)$. Требуется найти плотность вероятности $p(y)$ выходной величины y. Связь между y и x определяется нелинейной зависимостью $y = f(x)$, имеющей смысл, например, вольт-амперной характеристики электронного, полупроводникового или иного активного элемента.

Если $f(x)$ определяет однозначное соответствие между x и y в каждый рассматриваемый момент независимо от значений x в предыдущие моменты времени (безынерционный элемент), то плотность вероятности $p(y)$ находится из очевидного соотношения

$$p(y)\,dy = p(x)\,dx, \tag{11.2}$$

откуда с учетом неотрицательности $p(x)$ и $p(y)$

$$p(y) = p(x)/|dy/dx|. \tag{11.3}$$

Если обратная функция $x = \varphi(y)$ неоднозначна, то

$$p(y) = \left[\frac{p(x)}{|dy/dx|}\right]_{x=x_1} + \left[\frac{p(x)}{|dy/dx|}\right]_{x=x_2} + \ldots, \tag{11.4}$$

где x_1, x_2,... — значения входной величины x, соответствующие рассматриваемому значению y.

Если характеристика $y = f(x)$ постоянна на некотором интервале изменения x, то выражение (11.3) следует дополнить слагаемым с дельта-функцией, учитывающим интегральную вероятность пребывания x ниже (или выше) определенного уровня.

Нахождение $p(y)$ проще всего пояснить на практических примерах. Здесь мы ограничимся случаем, когда $p(x)$ соответствует нормальному распределению.

1. Воздействие гауссовского случайного процесса $x(t)$ на элемент с симметричной квадратичной характеристикой (рис. 11.1). Показанную на рис. 11.1 вольт-амперную характеристику можно реализовать, например, с помощью двухтактного включения двух диодов с квадратичными характеристиками (рис. 11.2).

При полярности напряжения, обозначенной на рис. 11.2, ток, равный a_2x^2, проходит через диод VD_1, при противоположной полярности — через диод VD_2.

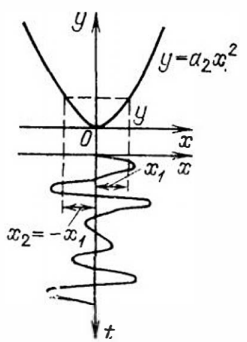


Рис. 11.1. Воздействие случайного процесса на нелинейный элемент с квадратичной характеристикой

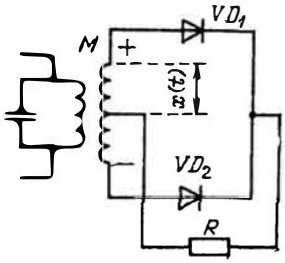


Рис. 11.2. Двухтактное включение диодов

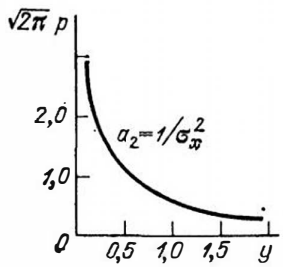


Рис. 11.3. Плотность вероятности тока в цепи с квадратичной вольт-амперной характеристикой при воздействии гауссовского случайного процесса

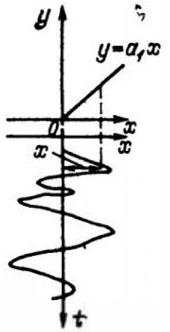


Рис. 11.4. Воздействие гауссовского процесса на однополупериодный детектор

Полагая $y = a_2x^2$, $dy/dx = 2a_2x$ и учитывая, что какому-либо фиксированному значению y соответствуют два значения x, а именно $x_1 = +\sqrt{y/a_2}$ и $x_2 = -\sqrt{y/a_2}$, по формуле (11.4) находим

$$p(y) = \begin{cases} p\left(+\sqrt{y/a_2}\right)/2a_2\sqrt{y/a_2} + p\left(-\sqrt{y/a_2}\right)/2a_2\sqrt{y/a_2} & \text{при } y \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases} \quad (11.5)$$

Подставляя $x_{1,2}^2 = y/a_2$ в выражение для плотности вероятности $p(x)$:

$$p(x_{1,2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-x_{1,2}^2/2\sigma_x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-y/2a_2\sigma_x^2}$$

получаем окончательно

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\sqrt{a_2}} \dfrac{e^{-y/2a_2\sigma_x^2}}{\sqrt{y}} & \text{при } y \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases} \quad (11.6)$$

График этого распределения изображен на рис. 11.3.

2. Воздействие гауссовского процесса на однополупериодный детектор с линейно-ломаной характеристикой (рис. 11.4).

В данном случае

$$y = \begin{cases} a_1 x & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что в соответствии с (11.3)

$$p(y) = \frac{p(x = y/a_1)}{a_1} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,a_1\,\sigma_x} e^{-y^2/2\sigma_x^2 a_1^2} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Особое внимание следует обратить на поведение функции $p(y)$ в точке $y = 0$. Так как $y = 0$ при любых отрицательных значениях x, то вероятность $P(y = 0)$ равна вероятности того, что $x \leqslant 0$. Но вероятность $P(x \leqslant 0) = 1/2$. Отсюда вытекает, что плотность вероятности $p(y = 0) = \infty$.

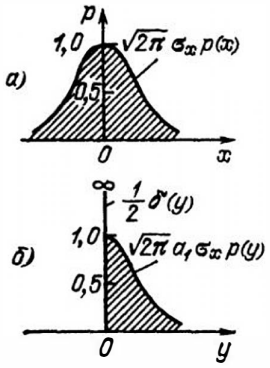


Рис. 11.5. Плотность вероятности случайного процесса на входе (*а*) и выходе (*б*) однополупериодного детектора

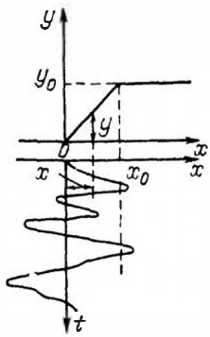


Рис. 11.6. Воздействие гауссовского процесса на ограничитель

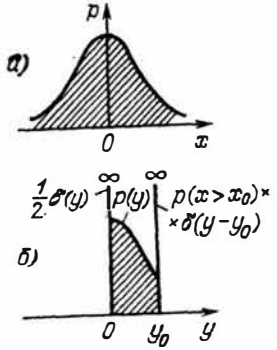


Рис. 11.7. Плотность вероятности случайного процесса на входе (*а*) и выходе (*б*) ограничителя

Это обстоятельство можно учесть, записав выражение для $p(y)$ в форме

$$p(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\delta(y)+\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,a_1\sigma_x}e^{-y^2/2a_1^2\sigma_x^2} & \text{при } y\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } y<0.\end{cases} \tag{11.7}$$

Слагаемое $^1/_2\,\delta(y)$ равно нулю всюду, кроме точки $y=0$, где оно обращается в бесконечность. При интегрировании же по y это слагаемое дает 1/2. Графики $p(x)$ и $p(y)$ изображены на рис. 11.5.

3. Воздействие гауссовского процесса на ограничитель (рис. 11.6).

По аналогии с предыдущим случаем нетрудно составить выражение

$$p(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\delta(y)+\dfrac{1}{a_1\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}e^{-y^2/2a_1^2\sigma_x^2}+\\ +P(x>x_0)\,\delta(y-y_0) & \text{при } 0\leqslant y\leqslant y_0,\\ 0 & \text{при } y<0 \text{ и } y>y_0.\end{cases} \tag{11.8}$$

Графики распределения x и y изображены на рис. 11.7. Приведенных примеров достаточно для уяснения метода определения плотности вероятности случайной величины на выходе нелинейного безынерционного элемента с любой вольт-амперной характеристикой. Простота этого метода обусловлена тем, что не учитывается влияние выходных цепей (инерционных) на работу рассматриваемого нелинейного элемента.

11.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СПЕКТРА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В БЕЗЫНЕРЦИОННОМ НЕЛИНЕЙНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

Прямое определение энергетического спектра выходного процесса по известному спектру на входе нелинейного элемента не представляется возможным. Единственный путь — это определение корреляционной функции с последующим применением преобразования Фурье.

Если на входе нелинейного элемента с характеристикой $y = f(x)$ действует стационарный процесс $x(t)$, то ковариационная функция на выходе может быть представлена в форме

$$K_y(\tau) = M(y_t\, y_{t+\tau}) = M[f(x_t)\, f(x_{t+\tau})], \tag{11.9}$$

где x_t и $x_{t+\tau}$ — значения $x(t)$ в моменты времени t и $t+\tau$; y_t и $y_{t+\tau}$ — соответствующие им значения y на выходе нелинейного элемента.

Для усреднения произведения $f(x_t)\, f(x_{t+\tau})$ должна быть известна двумерная плотность вероятности входного процесса $p(x_t, x_{t+\tau})$. Если эта плотность вероятности известна, то ковариационную функцию можно представить в виде следующего выражения:

$$K_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)\, f(x_2)\, p(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2, \tag{11.10}$$

где для удобства записи через x_1 и x_2 обозначены соответственно x_t, $x_{t+\tau}$.

Этот интеграл удается вычислить далеко не во всех практически важных задачах. В связи с этим часто приходится прибегать к различным обходным способам, один из которых будет приведен далее.

В качестве примера задачи, достаточно интересной для практики и доступной для решения прямым методом, рассмотрим воздействие стационарного гауссовского процесса $x(t)$ на нелинейный элемент с квадратичной характеристикой $y = a_2 x^2$ (см. § 11.2, п.1).

Двумерная плотность вероятности процесса $x(t)$ равна [1]

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-r^2}} \exp\left[-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2r x_1 x_2}{2\sigma_x^2 (1-r^2)} \right], \tag{11.11}$$

где r — коэффициент корреляции величин x_1 и x_2, т. е. $r = r_x(\tau)$.

Подставив выражение (11.11), а также $f(x) = a_2 x^2$ в (11.10), получим

$$K_y(\tau) = \frac{a_2^2}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 x_2^2 \exp\left[-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2r x_1 x_2}{2\sigma_x^2 (1-r^2)} \right] dx_1\, dx_2 =$$

$$= \frac{a_2^2}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \exp\left[-\frac{x_1^2}{2\sigma_x^2 (1-r^2)} \right] \times$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 \exp\left[-\frac{x_2^2 - 2r x_1 x_2}{2\sigma_x^2 (1-r^2)} \right] dx_2 \right\} dx_1. \tag{11.12}$$

Интеграл в фигурных скобках легко вычислить, дополнив выражение $x_2^2 - 2r x_1 x_2$ до квадрата разности $x_2^2 - 2r x_1 x_2 = (x_2 - r x_1)^2 - r^2 x_1^2$ и заменив переменную $x_2 - r x_1 = z$:

$$\exp\left[\frac{r^2 x_1^2}{2\sigma_x^2 (1-r^2)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} (z^2 + 2r x_1 z + r^2 x_1^2)\, e^{-z^2/2\sigma_x^2 (1-r^2)}\, dz =$$

$$= \exp\left[\frac{r^2 x_1^2}{2\sigma_x^2 (1-r^2)} \right] \left[\sqrt{2\pi}\, \sigma_x^3 (1-r^2)^{3/2} + 0 + \sqrt{2\pi}\, \sigma_x \sqrt{1-r^2}\, r^2 x_1^2 \right].$$

[1] См., например, [13, 14].

Подставляя этот результат в (11.12), получаем

$$K_y(\tau) = \frac{a_2^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\left[\sigma_x^2(1-r^2)\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1^2\, e^{-x_1^2/2\sigma_x^2}\,dx_1 + \right.$$

$$\left. + r^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1^4\, e^{-x_1^2/2\sigma_x^2}\,dx_1\right].$$

Далее определяем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1^2\, e^{-x_1^2/2\sigma_x^2}\,dx_1 = \sqrt{2\pi}\,\sigma_x^3,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1^4\, e^{-x_1^2/2\sigma_x^2}\,dx_1 = \sqrt{2\pi}\,3\sigma_x^5.$$

Таким образом,

$$K_y(\tau) = a_2^2\,\sigma_x^4\,[(1-r^2)+3r^2] = a_2^2\,\sigma_x^4 + 2a_2^2\,\sigma_x^4\,r_x^2(\tau) =$$

$$= a_2^2\,\sigma_x^4 + 2a_2^2\,R_x^2(\tau). \qquad (11.13)$$

Здесь использовано известное соотношение $r_x(\tau) = R_x(\tau)/\sigma_x^2$ [при $M(x) = 0$].

Особый интерес представляет воздействие узкополосного случайного процесса на нелинейный элемент (задача детектирования).

Представляя корреляционную функцию узкополосного процесса в форме (4.76) и учитывая, что

$$R_x^2(\tau) = \sigma_x^4\, r_0^2(\tau)\,[{}^1/_2 + {}^1/_2\cos 2\omega_0\tau], \qquad (11.14)$$

где r_0 — огибающая корреляционной функции узкополосного процесса, записываем выражение (1.13) в окончательном виде

$$K_y(\tau) = a_2^2\,\sigma_x^4 + a_2^2\,\sigma_x^4\,r_0^2(\tau) + a_2^2\,\sigma_x^4\,r_0^2(\tau)\cos 2\omega_0\tau. \qquad (11.15)$$

Применяя затем преобразование Фурье, получаем общее выражение для спектра процесса на выходе квадратичного элемента (при гауссовском процессе на входе)

$$W_y(\omega) = a_2^2\,\sigma_x^4\,2\pi\delta(\omega) + a_2^2\,\sigma_x^4\int\limits_{-\infty}^{\infty} r_0^2(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau +$$

$$+ a_2^2\,\sigma_x^4\int\limits_{-\infty}^{\infty} r_0^2(\tau)\cos(2\omega_0\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau = W_{y0}(\omega) + W_{нч}(\omega) + W_{вч}(\omega). \qquad (11.16)$$

Первое слагаемое (дискретное) соответствует постоянной составляющей выходного колебания, второе — низкочастотной флуктуационной составляющей (спектр которой примыкает к нулевой частоте) и третье — высокочастотной флуктуационной составляющей со спектром, группирующимся вблизи частоты $2\omega_0$.

11.4. ВОЗДЕЙСТВИЕ УЗКОПОЛОСНОГО ШУМА НА АМПЛИТУДНЫЙ ДЕТЕКТОР

Амплитудный детектор, содержащий диод и фильтр нижних частот (*RC*-цепь), представляет собой сочетание безынерционного нелинейного элемента с инерционной линейной цепью.

Расчленим рассматриваемое устройство на две самостоятельные части: 1) нелинейный элемент; 2) фильтр нижних частот.

Изложенные в предыдущих параграфах методы, а также некоторые другие специальные приемы позволяют в принципе найти закон распределения и корреляционную функцию шума сначала на выходе нелинейного элемента (диода), а затем и на выходе фильтра. В общем случае эти исследования требуют весьма громоздких вычислений. Задачу можно значительно облегчить, если использовать некоторые упрощения, вытекающие из принципа работы реальных устройств.

Рассмотрим сначала «линейное» детектирование, т. е. детектирование высокочастотного колебания с достаточно большими амплитудами. В данном случае под таким колебанием подразумевается гауссовский шум (в отсутствие сигнала), сформированный избирательными цепями на входе детектора. Как и при детектировании полезного амплитудно-модулированного колебания можно считать, что напряжение на выходе линейного детектора воспроизводит огибающую амплитуд высокочастотного колебания, в данном случае огибающую шума. Поэтому при линейном детектировании нет необходимости рассматривать отдельно статистические характеристики тока диода и напряжения на выходе RC-цепи. Напряжение $u_{вых}(t)$, развиваемое на этой цепи, можно приравнять огибающей шума на входе детектора $U(t)$ (т. е. считать, что коэффициент передачи детектора равен единице). При таком подходе статистические характеристики шума на выходе детектора полностью совпадают с приведенными в § 4.6 характеристиками огибающей $A(t)$. Таким образом приходим к выводу, что напряжение шума на выходе линейного детектора обладает рэлеевским распределением

$$p(u_{вых}) = p(A) = \frac{u_{вых}}{\sigma_x^2} e^{-u_{вых}^2/2\sigma_x^2}, \quad 0 < u_{вых} < \infty. \tag{11.17}$$

По формулам (4.71), (4.72) находим:
среднее значение (постоянная составляющая) шумового напряжения

$$U_0 = M[u_{вых}(t)] = M[A(t)] = \sqrt{\pi/2}\,\sigma_x = 1{,}26\sigma_x, \tag{11.18}$$

средний квадрат напряжения

$$M[u_{вых}^2(t)] = 2\sigma_x^2. \tag{11.19}$$

Отсюда следует, что дисперсия шума на выходе линейного детектора

$$\sigma_{вых}^2 = M(u_{вых}^2) - U_0^2 = 2\sigma_x^2 - \frac{\pi}{2}\sigma_x^2 = 0{,}43\sigma_x^2. \tag{11.20}$$

Итак, основные параметры шума на выходе — постоянная составляющая U_0 и дисперсия $\sigma_{вых}^2$ — просто выражаются через дисперсию σ_x^2 высокочастотного шума, действующего на входе детектора.

Корреляционную функцию и энергетический спектр выходного шума нетрудно вычислить по формулам (4.77), (4.78).

В качестве примера рассмотрим воздействие на линейный детектор шума $x(t)$, спектр которого определяется выражением

$$W_x(\omega) = N_0 [e^{-\alpha(\omega-\omega_0)^2} + e^{-\alpha(\omega+\omega_0)^2}], \tag{11.21}$$

а корреляционная функция в соответствии с (4.39) и с учетом [31, см. формулы (3.896.3) и (3.896.4)]

$$R_x(\tau) = N_0 \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(\omega-\omega_0)^2} e^{i\omega\tau}\, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(\omega+\omega_0)^2} e^{i\omega\tau}\, d\omega\right] =$$

$$= \frac{N_0}{\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\tau^2/4\alpha} \cos\omega_0\tau = \sigma_x^2 e^{-\tau^2/4\alpha} \cos\omega_0\tau. \qquad (11.22)$$

Тогда

$$r_0(\tau) = e^{-\tau^2/4\alpha} \qquad (11.23)$$

и в соответствии с (4.78)

$$W_{вых}(\Omega) = \frac{\pi\sigma_x^2}{2}\left[2\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2/2\alpha} e^{-\Omega\tau}\, d\tau\right] =$$

$$= \frac{\pi\sigma_x^2}{2}\left[2\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{4}\sqrt{2\pi\alpha}\, e^{-\alpha\Omega^2/2}\right]. \qquad (11.24)$$

Слагаемое с дельта-функцией соответствует постоянной составляющей напряжения на выходе детектора.

График $W_{вых}(\Omega)$ изображен на рис. 11.8, *б*. Ширина этого спектра в $\sqrt{2}$ раз больше ширины спектра $W_x(\omega)$ на входе детектора (рис. 11.8, *а*).

Линейный амплитудный детектор воспроизводит огибающую узкополосного колебания независимо от особенностей структуры его спектра. Полученный результат свидетельствует о том, что огибающая каждой из реализаций рассматриваемого шума (на входе детектора) обладает спектром более широким, чем частотная полоса самой реализации. На первый взгляд это может показаться странным, поскольку известно, что для модулированного колебания ширина спектра огибающей либо совпадает с шириной спектра самого колебания (при АМ), либо у́же его (при ЧМ). Это кажущееся противоречие легко устраняется, если принять во внимание полную корреляцию между колебаниями нижних и верхних боковых частот при модуляции. Достаточно нарушить, например, симметрию амплитуд или фаз боковых частот при АМ, чтобы сумма трех колебаний с частотами ω_0, $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$ представляла собой колебание, огибающая которого содержит помимо частоты Ω еще и частоты 2Ω, 3Ω и т. д. В этом случае амплитудный детектор выделит на выходе колебание, спектр которого будет шире, чем полоса частот высокочастотного колебания на входе. В спектре же шума нет никакой корреляции (и тем более симметрии) между спектральными составляющими, частоты которых расположены слева и справа от центральной частоты ω_0. Естественно, что огибающая каждой из реализаций шума обладает спектром более широким, чем модулированное колебание с той же шириной спектра. Соответственно увеличивается и средняя ширина спектра огибающей шума, т. е. спектр огибающей.

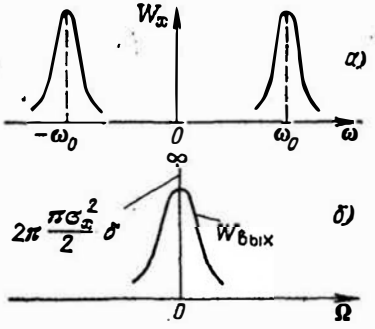


Рис. 11.8. Энергетический спектр случайного процеса на входе (*а*) и выходе (*б*) амплитудного детектора

Рассмотрим теперь воздействие гауссовского шума на квадратичный детектор. В данном случае напряжение на выходе детектора с учетом отфильтровывания вы-

сокочастотной составляющей шума по аналогии с выражением (8.55) можно представить в форме

$$u_{\text{вых}}(t) = KA^2(t)/2, \tag{11.25}$$

где K — коэффициент, учитывающий параметр вольт-амперной характеристики диода a_2 и сопротивление нагрузки на выходе детектора.

Применяя формулу (11.3), в которой под $p(x)$ следует подразумевать плотность вероятности огибающей $A(t)$, находим закон распределения шумового напряжения на выходе квадратичного детектора

$$p(u_{\text{вых}}) = p\left(K\frac{A^2}{2}\right) = \frac{p(A)}{\left|\frac{du_{\text{вых}}}{dA}\right|} = \frac{A}{\sigma_x^2}\,e^{-A^2/2\sigma_x^2}\,\frac{1}{KA} = \frac{1}{K\sigma_x^2}\,e^{-u_{\text{вых}}/K\sigma_x^2}. \tag{11.26}$$

Итак, при воздействии на квадратичный детектор с фильтром нижних частот узкополосного гауссовского процесса шум на выходе всего устройства имеет *экспоненциальное* распределение.

Вычислим среднее значение выходного напряжения

$$M[u_{\text{вых}}(t)] = \int_0^\infty u_{\text{вых}}\,p(u_{\text{вых}})\,du_{\text{вых}} =$$

$$= \frac{1}{K\sigma_x^2}\int_0^\infty u_{\text{вых}}\,e^{-u_{\text{вых}}/K\sigma_x^2}\,du_{\text{вых}} = K\sigma_x^2, \tag{11.27}$$

а также средний квадрат напряжения

$$M[u_{\text{вых}}^2(t)] = \int_0^\infty u_{\text{вых}}^2\,p(u_{\text{вых}})\,du_{\text{вых}} =$$

$$= \frac{1}{K\sigma_x^2}\int_0^\infty u_{\text{вых}}^2\,e^{-u_{\text{вых}}/K\sigma_x^2}\,du_{\text{вых}} = 2K^2\sigma_x^4. \tag{11.28}$$

Отсюда следует, что дисперсия шума на выходе

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = M[u_{\text{вых}}^2(t)] - \{M[u_{\text{вых}}(t)]\}^2 = 2K^2\sigma_x^4 - K^2\sigma_x^4 = K^2\sigma_x^4. \tag{11.29}$$

Для полного описания свойств шума на выходе квадратичного детектора остается вычислить его корреляционную функцию и энергетический спектр. Это можно выполнить с помощью формул (11.15), (11.16). Второе слагаемое в выражении (11.15) определяет искомую корреляционную функцию, а второе слагаемое в выражении (11.16) — соответствующий этой функции спектр.

При $r_0(\tau) = e^{-\tau^2/4\alpha}$ (см. предыдущий пример) получаем

$$W_{\text{вых}}(\Omega) = W_{y0}(\Omega) + W_{\text{нч}}(\Omega) = a_2^2\sigma_x^4\left[2\pi\delta(\Omega) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2/2\alpha}\times\right.$$

$$\left.\times\, e^{-i\Omega\tau}\,d\tau\right] = a_2^2\sigma_x^4\left[2\pi\delta(\Omega) + \sqrt{2\pi\alpha}\,e^{-\alpha\Omega^2/2}\right]. \tag{11.30}$$

Графики функций $W_x(\omega)$ и $W_{\text{вых}}(\Omega)$ по форме совпадают с графиками на рис. 11.8. Они отличаются только масштабом по оси ординат из-за различия в постоянных коэффициентах [$a_2^2\sigma_x^4$ вместо $\pi\sigma_x^2/2$ перед квадратными скобками в (11.24) и единица вместо 1/4 перед вторым слагаемым].

11.5. СОВМЕСТНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА И ГАУССОВСКОГО ШУМА НА АМПЛИТУДНЫЙ ДЕТЕКТОР

При наложении узкополосного шума $x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)]$ на сигнал $s(t) = E\cos\omega_0 t$ суммарное колебание

$$u(t) = s(t) + x(t) = E\cos\omega_0 t + A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)] =$$
$$= [E + A(t)\cos\theta]\cos\omega_0 t - A(t)\sin\theta(t)\sin\omega_0 t = U(t)\cos[\omega_0 t + \xi(t)]. \quad (11.31)$$

Огибающая $U(t)$ и фаза $\xi(t)$ по аналогии с (8.43) и (8.44) определяются выражениями

$$U(t) = \sqrt{E^2 + A^2(t) + 2EA(t)\cos\theta(t)}. \quad (11.32)$$

$$\xi(t) = \operatorname{arctg}\frac{A(t)\sin\theta(t)}{E + A(t)\cos\theta(t)}. \quad (11.33)$$

При анализе воздействия колебания на амплитудный детектор статистическими характеристиками фазы $\xi(t)$ можно не интересоваться (этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе применительно к частотному детектору). Основное значение имеет плотность вероятности $p(U)$ огибающей U, определяемая по формуле [13,14]

$$p(U) = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-(U^2+E^2)/2\sigma_x^2} I_0\left(\frac{E}{\sigma_x}\frac{U}{\sigma_x}\right), \quad (11.34)$$

где I_0 — бесселева функция комплексного аргумента (модифицированная).

Определяемая формулой (11.34) функция называется *обобщенной функцией* Рэлея. Графики функции $p(U)$ для нескольких значений E/σ_x приведены на рис. 11.9. При $E/\sigma_x = 0$ (отсутствие сигнала) выражение (11.34) переходит в (4.70). В другом крайнем случае, когда амплитуда сигнала E очень велика по сравнению с σ_x, кривая $p(U)$ близка к гауссовской кривой с дисперсией σ_x^2 и средним значением, равным E.

Рассмотрим сначала линейное детектирование. Будем считать, что напряжение на выходе детектора совпадает с огибающей амплитуд высокочастотного напряжения на входе. Тогда, основываясь на формуле (11.34), находим постоянную составляющую напряжения на выходе детектора

$$U_0 = M(U) = \int_0^\infty Up(U)\,dU = \frac{1}{\sigma_x^2} e^{-E^2/2\sigma_x^2} \int_0^\infty U^2 e^{-U^2/2\sigma_x^2} I_0\left(\frac{E}{\sigma_x}\frac{U}{\sigma_x}\right) dU.$$

и средний квадрат напряжения

$$M[U^2(t)] = \int_0^\infty U^2 p(U)\,dU = \frac{1}{\sigma_x^2} e^{-E^2/2\sigma_x^2} \int_0^\infty U^3 e^{-U^2/2\sigma_x^2} \times$$
$$\times I_0\left(\frac{E}{\sigma_x}\frac{U}{\sigma_x}\right) dU.$$

После вычисления интегралов [16] получаем следующие выражения:

$$U_0 = \sigma_x\sqrt{\pi/2}\{I_0(E^2/4\sigma_x^2) + E^2/2\sigma_x^2[I_0(E^2/4\sigma_x^2) + I_1(E^2/4\sigma_x^2)]\} e^{-E^2/4\sigma_x^2} =$$
$$= \sigma_x\sqrt{\pi/2}\{I_0(h^2/2) + h^2[I_0(h^2/2) + I_1(h^2/2)]\} e^{-h^2/2}, \quad (11.35)$$

где

$$h^2 = E^2/2\sigma_x^2;\ M\,[U^2(t)] = 2\sigma_x^2 + E^2. \tag{11.36}$$

Из последнего выражения вытекает равенство

$$\sigma_{вых}^2 = M\,[U^2(t)] - U_0^2 = 2\sigma_x^2 + E^2 - U_0^2. \tag{11.37}$$

Ранее было показано, что в отсутствие сигнала ($E = 0$) постоянная составляющая шума на выходе линейного детектора равна $\sqrt{\pi/2}\ \sigma_x$ [см. (11.18)].

Приращение постоянной составляющей $U_0 - \sqrt{\pi/2}\sigma_x$, где U_0 определяется выражением (11.35), и есть полезный сигнал.

Следовательно, отношение мощности сигнала к мощности помехи на выходе линейного детектора

$$(С/П)_{вых} = (U_0 - \sqrt{\pi/2}\sigma_x)^2/(2\sigma_x^2 + E^2 - U_0^2). \tag{11.38}$$

Рассмотрим предельные случаи $h^2 \ll 1$ (слабый сигнал) и $h^2 \gg 1$ (сильный сигнал).

1. $h^2 \ll 1$, $I_0(h^2/2) \approx 1$, $I_1(h^2/2) \approx h^2/4$, $e^{-h^2/2} \approx 1 - h^2/2$.

Выражение (11.35) упрощается:

$$U_0 \approx \sqrt{\pi/2}\ \sigma_x \{1 + h^2(1 + h^2/4)\}\, e^{-h^2/2} \approx \sqrt{\pi/2}\ \sigma_x (1 + h^2/2).$$

При этом приращение постоянной составляющей

$$U_0 = \sqrt{\pi/2}\ \sigma_x \approx \sqrt{\pi/2}\ \sigma_x h^2/2,$$

а дисперсия в соответствии с (11.36)

$$\sigma_{вых}^2 = 2\sigma_x^2 + E^2 - \frac{\pi}{2}\sigma_x^2 (1 + h^2/2)^2 \approx \sigma_x^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом,

$$\left(\frac{С}{П}\right)_{вых} = \left(\frac{\pi}{2}\sigma_x^2 \frac{h^4}{4}\right) \Big/ (2 - \pi/2)\,\sigma_x^2 = dh^4 = d\left(\frac{С}{П}\right)_{вх}^2, \tag{11.39}$$

где d — постоянный коэффициент, близкий к единице.

Выражение (11.39) показывает, что в амплитудном детекторе имеет место *подавление слабого сигнала сильной помехой.*

Например, при $(С/П)_{вх} = 0{,}1$ $(С/П)_{вых} \approx 0{,}01$.

Рассматриваемый вопрос имеет важное значение для проблемы обнаружения сигналов на фоне сильной помехи.

2. $h^2 \gg 1$, функции $I_0(h^2/2)$ и $I_1(h^2/2)$ можно определять выражениями

$$I_0\left(\frac{h^2}{2}\right) \approx \frac{e^{h^2/2}}{\sqrt{\pi}\,h}\left(1 + \frac{1}{4h^2}\right),\ I_1\left(\frac{h^2}{2}\right) \approx \frac{e^{h^2/2}}{\sqrt{\pi}\,h}\left(1 - \frac{3}{4h^2}\right).$$

Выражение (11.35) при указанных приближениях приводится к виду

$$U_0 \approx \sqrt{2}\,\sigma_x h\,(1 + 1/4h^2) = E\,(1 + 1/4h^2) \approx E.$$

Как и следовало ожидать при $E \gg \sigma_x$ постоянная составляющая выходного напряжения U_0 почти совпадает[1] с E.

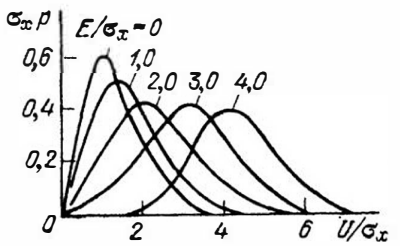


Рис. 11.9. Рэлеевская плотность вероятности (обобщенная)

[1] См., например, кривую $E/\sigma_x = 4$ на рис. 11.9 и комментарий к рисунку на с. 338.

При вычислении же дисперсии $\sigma^2_{вых}$ необходимо учитывать слагаемое $1/4h^2$ в выражении

$$U_0^2 = E^2 (1 + 1/4h^2)^2 \approx E^2 (1 + 1/2h^2) = E^2 + \sigma_x^2.$$

Таким образом,

$$\sigma^2_{вых} = 2\sigma_x^2 + E^2 - (E^2 + \sigma_x^2) = \sigma_x^2$$

и отношение сигнал-помеха на выходе

$$(С/П)_{вых} \approx U_0^2/\sigma^2_{вых} \approx E^2/\sigma_x^2 = 2\,(С/П)_{вх}. \qquad (11.40)$$

Проведем аналогичное рассмотрение для квадратичного детектирования. Заменяя в формуле (11.25) $A\,(t)$ на $U\,(t)$, получаем напряжение на выходе квадратичного детектора

$$u_{вых}\,(t) = K\,[E^2/2 + A^2\,(t)/2 + EA\,(t)\cos\theta\,(t)]. \qquad (11.41)$$

Усредняя это выражение по времени и учитывая, что $\overline{A^2\,(t)} = 2\sigma^2_x$ и $\overline{A\,(t)\cos\theta\,(t)} = 0$ (как и среднее значение $\overline{x\,(t) = A\,(t)\cos[\omega_0 t + \theta\,(t)]}$, получаем постоянную составляющую напряжения на выходе квадратичного детектора

$$\overline{u_{вых}\,(t)} = K\,(E^2/2 + \sigma_x^2) = U_{ос} + U_{оп}. \qquad (11.42)$$

Слагаемое $U_{оп} = K\sigma_x^2$ определяет постоянную составляющую, обусловленную помехой [см. (11.27)] в отсутствие сигнала. Слагаемое же $U_{ос} = KE^2/2$, представляющее собой приращение постоянной составляющей под действием гармонического напряжения сигнала, можно рассматривать как полезный сигнал на выходе детектора.

Возводя выражение (11.41) в квадрат, получаем

$$u^2_{вых}\,(t) = K^2\left[\frac{E^2}{2} + \frac{A^2\,(t)}{2} + EA\,(t)\cos\theta\,(t)\right]^2 = K^2\left[\frac{E^4}{4} + \frac{A^4\,(t)}{4} + \right.$$

$$+ E^2\,A^2\,(t)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\,(t)\right) + \frac{E^2\,A^2\,(t)}{2} + E^3\,A\,(t)\cos\theta\,(t) +$$

$$\left. + A^3\,(t)\,E\cos\theta\,(t)\right]. \qquad (11.43)$$

Слагаемые с $\cos\theta\,(t)$ и $\cos 2\theta\,(t)$ при усреднении обращаются в нуль. Поэтому средняя мощность на выходе [1]

$$\overline{u^2_{вых}\,(t)} = K^2\left[\frac{E^4}{4} + \frac{1}{4}\,\overline{A^4\,(t)} + E^2\,\overline{A^2\,(t)}\right] = K^2\left(\frac{E^4}{4} + 2\sigma_x^4 + 2E^2\sigma_x^2\right).$$

Вычитая из этого выражения $(\overline{u_{вых}})^2$, находим дисперсию шума на выходе квадратичного детектора

$$\sigma^2_{вых} = K^2\,(E^4/4 + 2\sigma_x^4 + 2E^2\,\sigma_x^2) - K^2\,(E^4/4 + E^2\sigma_x^2 + \sigma_x^4) =$$

$$= K^2\,(E^2\,\sigma_x^2 + \sigma_x^4). \qquad (11.44)$$

---

[1] При усреднении $A^4\,(t)$

$$M\,[A^4\,(t)] = \int_0^\infty A^4\,p\,(A)\,dA = 8\sigma_x^4.$$

Вследствие эргодичности рассматриваемого процесса в данном параграфе не делается различия между усреднением по множеству и по времени.

При $E = 0$ это выражение переходит в (11.29). Составим теперь отношение сигнал-помеха на выходе детектора (по мощности)

$$\left(\frac{С}{П}\right)_{вых} = \frac{U_{ос}^2}{\sigma_{вых}^2} = \frac{K^2 (E^4/4)}{K^2 (E^2 \sigma_x^2 + \sigma_x^4)} = \frac{(E^2/2\sigma_x^2)^2}{1 + 2E^2/2\sigma_x^2}. \quad (11.45)$$

Но $E^2/2\sigma_x^2$ есть отношение сигнал-помеха (по мощности) на входе детектора. Таким образом, при значениях $(С/П)_{вх} \ll 1$ (т. е. при $E^2/2 \ll \sigma_x^2$)

$$(С/П)_{вых} \approx (С/П)_{вх}^2, \quad (11.46)$$

а при больших значениях $(С/П)_{вх}$, т. е. при $E^2/2 \gg \sigma_x^2$,

$$(С/П)_{вых} \approx {}^1/_2 (С/П)_{вх}. \quad (11.47)$$

Так, при $E^2/2\sigma_x^2 = 1/10$ отношение $(С/П_{вых}) = 1/120$ [(11.45)], а при $E^2/2\sigma_x^2 \geqslant 4$ отношение $(С/П)_{вых}$ близко к половине отношения сигнала к помехе на входе.

На основании формулы (11.45) можно сделать следующее важное заключение: при *слабом* (относительно помехи) *сигнале* в квадратичном детекторе имеет место *подавление сигнала*, а при *сильном сигнале отношение* сигнал-помеха *пропорционально отношению сигнала к помехе на входе.*

Сопоставим результаты, полученные для квадратичного и линейного детектирования. Сравнение формул (11.46) и (11.39) показывает, что при слабом сигнале и сильной помехе линейный и квадратичный детекторы ведут себя одинаково: отношение сигнал-помеха на выходе пропорционально квадрату отношения сигнал-помеха на входе. Таким образом, *и в линейном детекторе имеет место подавление слабого сигнала.* Анализ показывает, что это свойство присуще детекторам и с любыми другими вольт-амперными характеристиками.

Однако при $E \gg \sigma_x$ отношение сигнал-помеха на выходе квадратичного детектора в 4 раза (по мощности) меньше, чем у линейного [ср. (11.47) и (11.40)]. Это объясняется тем, что при квадратичном детектировании сильный сигнал выносит помеху на участок характеристики с повышенной крутизной, что приводит к относительному увеличению помехи. Действительно, пусть огибающая амплитуд входного напряжения, равная 1 В, получила приращение в результате наложения помехи $a \ll 1$. Тогда напряжение на выходе квадратичного детектора в соответствии с (11.25) увеличится от $K/2$ до $(K/2)(1 + a)^2 \approx (K/2)(1 + 2a)$, т. е. относительное приращение (помехи) будет $2a$, а при линейном детектировании это приращение будет всего лишь a. Переходя от напряжения к мощности, получаем проигрыш в 4 раза.

Хотя проведенное рассмотрение относится к гармоническому (немодулированному) сигналу, полученные выводы можно полностью распространить на обработку прямоугольных импульсных радиосигналов на фоне помех, когда импульс на выходе детектора есть приращение постоянной составляющей выпрямленного напряжения в промежутке времени, равном длительности импульса.

Наличие амплитудной модуляции сигнала, которую можно рассматривать как *медленное* изменение постоянной составляющей напряжения на выходе детектора, также не оказывает существенного влияния на сравнительную оценку $(С/П)_{вых}$ при квадратичном и линейном детектировании.

Следует, наконец, отметить, что все полученные в этом параграфе результаты не зависят от соотношения между несущей частотой сигнала ω_0 и мгновенной частотой помехи $\omega_0 + \theta$. Из этого следует, что наложение пара-

зитной частотной или фазовой модуляции на сигнал (при постоянной амплитуде) не оказывает влияния на отношение сигнал-помеха на выходе детектора. Это положение согласуется с основными свойствами амплитудного детектора, установленными в гл. 8.

11.6. СОВМЕСТНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА И ГАУССОВСКОГО ШУМА НА ЧАСТОТНЫЙ ДЕТЕКТОР

Основываясь на рассмотренном в § 8.10 принципе работы частотного детектора, в дальнейшем будем исходить из структурной схемы, показанной на рис. 11.10. Сигнал $s(t)$ на входе резонансного амплитудного ограничителя представляет собой частотно-модулированное колебание (имеется в виду тональная модуляция частоты)

$$s(t) = A_s \cos\left(\omega_0 t + \frac{\omega_д}{\Omega} \sin \Omega t\right), \tag{11.48}$$

а помеха — гауссовский процесс со спектром $W_x(\omega) = W_0$, равномерным в полосе пропускания фильтра промежуточной частоты (имеется в виду супергетеродинный приемник).

Полосу пропускания этого фильтра $2\Delta\omega_0$ можно приравнять удвоенной девиации частоты, т. е. $\Delta\omega_0 = \omega_д$. Фильтр нижних частот на выходе детектора должен обладать полосой прозрачности от 0 до Ω_{max}, где Ω_{max} — наивысшая частота модуляции. Помеху, действующую на входе ограничителя, запишем, как и в предыдущем параграфе, в виде $x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]$.

При анализе совместного действия $s(t)$ и $x(t)$ на частотный детектор облегчим задачу, рассматривая раздельно два режима: 1) при отсутствии полезной ЧМ, когда на входе детектора действует чисто гармоническое колебание $s(t) = A_s \cos \omega_0 t$ и шум $x(t)$; 2) при наличии ЧМ. Будем считать, что во втором режиме помеха на выходе детектора остается такой же, что и в первом.

Итак, в отсутствие модуляции суммарное колебание на входе ограничителя [см. (11.31)]

$$s(t) + x(t) = A_s \cos \omega_0 t + A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] = U(t) \cos[\omega_0 t + \xi(t)], \tag{11.49}$$

где $U(t)$ и $\xi(t)$ определяются выражениями (11.32) и (11.33).

Обозначив порог ограничения $U_{пор}$, придем к следующему выражению для колебания на выходе ограничителя, колебательный контур которого настроен на частоту ω_0:

$$u_{вых}(t) = U_{пор} \cos[\omega_0 t + \xi(t)] \tag{11.50}$$

[ср. с (8.45)].

Напряжение на выходе частотного детектора, пропорциональное производной фазы $\xi(t)$, в отсутствие полезной модуляции является помехой. Таким образом,

$$x_{вых}(t) = S_{чд} \dot{\xi}(t), \tag{11.51}$$

где $S_{чд}$ — крутизна характеристики частотного детектора (см. § 8.10). Как видим, интенсивность и структура помехи $x_{вых}(t)$ на выходе частотного

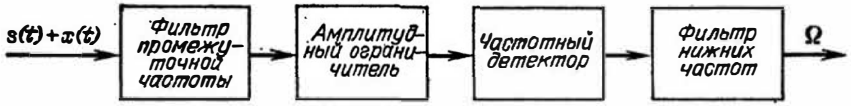


Рис. 11.10. Структурная схема частотного детектора

детектора полностью определяются статистическими характеристиками производной фазы $\xi(t)$.

Общее выражение для фазы при любых соотношениях между $A(t)$ и $A_s(t)$ имеет вид (11.33). Однако в реальных условиях приема частотно-модулированных колебаний обеспечивается значительное превышение сигнала над помехой. Обычно $A_s^2/2\sigma_x^2 \gg 1$. (Как и в предыдущем параграфе, σ_x^2 — средняя мощность помехи на входе детектора.) Поэтому выражение (11.33) для фазы можно упростить:

$$\xi(t) \approx \operatorname{arctg}\left[\frac{A(t)\sin\theta(t)}{A_s}\right] \approx \frac{A(t)}{A_s}\sin\theta(t). \tag{11.52}$$

Статистические характеристики случайной функции $\xi(t) = [A(t)/A_s]\sin\theta(t)$ совпадают с характеристиками, найденными в п. 1 § 4.6 для квадратурных слагаемых узкополосного процесса. Там было показано, что функция $A(t)\sin\theta(t)$ обладает нормальным законом распределения и спектром $2W_x(\omega_0+\Omega)$ [см. (4.64)]. Таким образом,

$$W_\xi(\Omega) = 2W_x(\omega_0+\Omega)/A_s^2. \tag{11.53}$$

При дифференцировании гауссовского случайного процесса распределение остается нормальным (см. § 7.1). Следовательно, $\dot{\xi}(t)$, т. е. мгновенное значение частотного отклонения, также обладает нормальным распределением.

Итак, при $E^2/2\sigma_x^2$ *шум на выходе частотного детектора (как и на входе) является гауссовским процессом.*

Остается определить спектр процесса $\dot{\xi}(t)$. Для этого достаточно умножить $W_\xi(\Omega)$ на Ω^2 (см. § 7.3). Таким образом,

$$W_{\dot{\xi}}(\Omega) = \Omega^2 W_\xi(\Omega) = \frac{2\Omega^2}{A_s^2} W_x(\omega_0+\Omega), \tag{11.54}$$

а спектр помехи на выходе частотного детектора в соответствии с выражением (11.51)

$$W_{\text{вых}}(\Omega) = S_{\text{чд}}^2 W_{\dot{\xi}}(\Omega) = \frac{2S_{\text{чд}}^2\,\Omega^2}{A_s^2} W_x(\omega_0+\Omega). \tag{11.55}$$

Наконец, корреляционная функция помехи на выходе фильтра нижних частот (с полосой пропускания Ω_{max})

$$R_{\text{вых}}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} W_{\text{вых}}(\Omega)\, e^{i\Omega\tau}\, d\Omega =$$

$$= \frac{2S_{\text{чд}}^2}{2\pi A_s^2}\int_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} \Omega^2 W_x(\omega_0+\Omega)\, e^{i\Omega\tau}\, d\Omega, \tag{11.56}$$

и дисперсия, т. е. средняя мощность помехи,

$$\sigma^2_{\text{вых}} = R_{\text{вых}}(0) = \frac{S^2_{\text{чд}}}{\pi A_s^2} \int\limits_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} \Omega^2 W_x(\omega_0 + \Omega)\, d\Omega. \qquad (11.57)$$

Рассмотрим теперь режим ЧМ, при котором напряжение на выходе частотного детектора пропорционально девиации частоты. При тональной ЧМ

$$U_s = S_{\text{чд}}\, \omega_{\text{д}}. \qquad (11.58)$$

Итак, мощность сигнала на выходе (без учета влияния помехи) $U_s^2/2 = {}^1/_2\, S^2_{\text{чд}}\, \omega^2_{\text{д}}$, а мощность помехи (без учета модуляции) определяется выражением (11.57). Следовательно, отношение сигнал — помеха на выходе

$$\left(\frac{\text{С}}{\text{П}}\right)^{\text{чм}}_{\text{вых}} = \frac{U_s^2/2}{\sigma^2_{\text{вых}}} = \frac{\omega^2_{\text{д}} A_s^2}{\frac{2}{\pi} \int\limits_{-\Omega_{\max}}^{\Omega_{\max}} \Omega^2 W_x(\omega_0 + \Omega)\, d\Omega}. \qquad (11.59)$$

Проиллюстрируем выражение (11.59) следующим примером. Пусть помеха на входе детектора является белым шумом со спектром $W_x(\omega) = W_0 = \text{const}$. Тогда интеграл в (11.59) равен $2\Omega^3_{\max} W_0/3$ и выражение (11.59) легко приводится к виду

$$\left(\frac{\text{С}}{\text{П}}\right)^{\text{чм}}_{\text{вых}} = \frac{(A_s^2/2)\, 3\omega^2_{\text{д}}}{(1/\pi)\, 2\Omega^3_{\max} W_0} = 3\, \frac{A_s^2/2}{W_0\, 2\,(2F_{\max})} \left(\frac{\omega_{\text{д}}}{\Omega_{\max}}\right)^2.$$

Но $A_s^2/2$ есть мощность сигнала на входе, а $W_0 2\,(2F_{\max})$ есть не что иное, как σ_x^2, т. е. мощность шума в двух полосах $2\Delta f_0 = 2F_{\max}$ (одна в области $\omega > 0$, вторая в области $\omega < 0$).

Таким образом, окончательно

$$\left(\frac{\text{С}}{\text{П}}\right)^{\text{чм}}_{\text{вых}} = 3 \left(\frac{\omega_{\text{д}}}{\Omega_{\max}}\right)^2 \left(\frac{\text{С}}{\text{П}}\right)_{\text{вх}}. \qquad (11.60)$$

Увеличивая отношение $\omega_{\text{д}}/\Omega_{\max}$, т. е. индекс угловой модуляции, можно получить большой выигрыш в отношении сигнал—помеха по сравнению с системами с АМ. Подобный способ получил широкое распространение в системах радиовещания на УКВ, а также в каналах звукового сопровождения телевидения.

Следует подчеркнуть, что преимущества широкополосной частотной модуляции сохраняются, пока помеха на входе детектора слабее сигнала и пока обеспечивается полное ограничение амплитуды колебания на входе детектора. В тех случаях, когда помеха сильнее сигнала, имеет место подавление сигнала.

Напомним, что при представлении суммы сигнала и помехи в пространстве сигналов (см. § 4.9) без учета способа осуществления приема было установлено, что расширение спектра сигнала (увеличение базы) повышает потенциальные возможности различения сигналов на фоне помехи.

Приведенное в данном параграфе рассмотрение конкретной схемы обработки широкополосного сигнала на фоне шумовой помехи хорошо согласуется с этим выводом. Совпадают также требования достаточного превышения сигнала над помехой на входе приемника.

11.7. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА И ГАУССОВСКОГО ШУМА В АМПЛИТУДНОМ ОГРАНИЧИТЕЛЕ С РЕЗОНАНСНОЙ НАГРУЗКОЙ

В отличие от предыдущих двух параграфов рассматривается сочетание нелинейного элемента (НЭ) с резонансным контуром, в полосу прозрачности которого попадает как гармонический сигнал $s(t) = E \cos \omega_0 t$, так и узкополосный шум $x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]$.

Продукты взаимодействия в НЭ сигнала с шумом, спектральный состав которых оказывается вне указанной полосы, могут не приниматься во внимание. Основной интерес в данном случае представляет вопрос о влиянии НЭ на соотношение между мощностью полезного сигнала и мощностью шума на выходе ограничителя в полосе частот, примыкающей к резонансной частоте ω_0.

Для осуществления жесткого ограничения характеристике НЭ стараются придавать форму, близкую к представленной на рис. 11.11 (идеальное ограничение). В этом случае

$$i(u) = \begin{cases} a & \text{при } u > 0, \\ 0 & \text{при } u \leqslant 0. \end{cases} \tag{11.61}$$

При воздействии одного лишь гармонического сигнала ток приобретает форму меандра с амплитудой импульсов a. При этом амплитуда первой гармоники тока, воздействующей на нагрузочный контур, равна $2\,a/\pi$ [см. (2.33)] и мощность сигнала на выходе ограничителя пропорциональна величине $P_s = {}^1/_2\,(2a/\pi)^2$.

При воздействии одного лишь шума $x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)]$ с нормальным законом распределения ток $i(t)$ также имеет форму, близкую к меандру с амплитудой a, но со случайной длительностью импульсов τ, флуктуирующей относительно среднего значения $\tau_0 = 1/2f_0$, где f_0 — центральная частота спектра шума. Отличие тока от меандра заключается лишь в том, что моменты перехода через нуль являются случайными. Средняя мощность при таком токе в резонансной нагрузке не отличается от приведенной выше величины ${}^1/_2\,(2a/\pi)^2$.

Таким образом, средняя мощность сигнала на выходе ограничителя не зависит от отношения сигнал-помеха на входе. При отсутствии полезного сигнала ($E = 0$) вся мощность $P_\Sigma = {}^1/_2\,(2a/\pi)^2$ сосредоточена в узкополосном шуме. При отсутствии шума эта же мощность сосредоточена в сигнале, причем амплитуда A_0 достигает в этом режиме максимально возможного значения $A_{0max} = 2a/\pi$.

При одновременном воздействии $s(t)$ и $x(t)$ амплитуда определяется выражением (см. [16])

$$A_0 = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} E\,e^{-E^2/4\sigma_x^2}\left[I_0\left(\frac{E^2}{4\sigma_x^2}\right) + I_1\left(\frac{E^2}{4\sigma_x^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}} h\,e^{-h^2/2}\left[I_0\left(\frac{h^2}{2}\right) + I_1\left(\frac{h^2}{2}\right)\right], \tag{11.62}$$

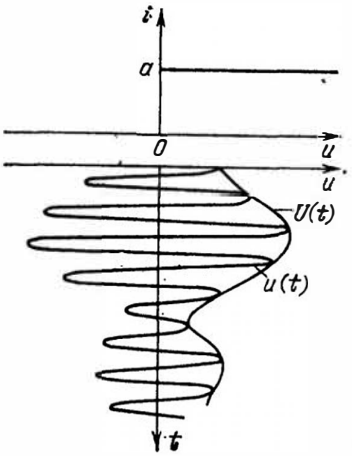
где $h^2 = E^2/2\sigma_x^2$, как и в выражении (11.36), есть отношение сигнал-помеха на входе устройства.

Составим отношение сигнал-помеха на выходе ограничителя. Основываясь на условии постоянства суммарной мощности $P_\Sigma = {}^1/_2\,(2\,a/\pi)^2$, получаем

$$\left(\frac{\text{С}}{\text{П}}\right)_{\text{вых}} = \frac{A_0^2/2}{P_\Sigma - A_0^2/2} = \frac{\pi h^2\,e^{-h^2}\,[I_0(h^2/2) + I_1(h^2/2)]^2}{4 - \pi h^2\,e^{-h^2}\,[I_0(h^2/2) + I_1(h^2/2)]^2}. \tag{11.63}$$

Учитывая, наконец, что $h^2 = (\text{С}/\text{П})_{\text{вх}}$, приходим к следующему соотношению:

$$y(h^2) = \frac{(\text{С}/\text{П})_{\text{вых}}}{(\text{С}/\text{П})_{\text{вх}}} = \frac{\pi\,[e^{-h^2/2}\,I_0(h^2/2) + e^{-h^2/2}\,I_1(h^2/2)]^2}{4 - \pi h^2\,[e^{-h^2/2}\,I_0(h^2/2) + e^{-h^2/2}\,I_1(h^2/2)]^2}. \tag{11.64}$$



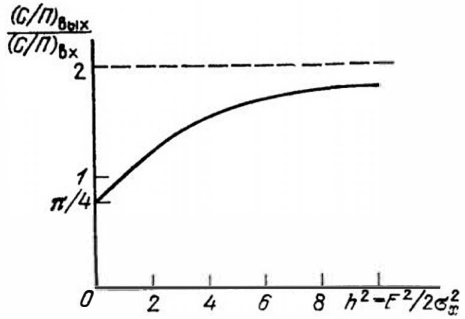


Рис. 11.12. Изменение соотношения между мощностью сигнала и мощностью шума в резонансном ограничителе

← Рис. 11.11. Жесткое ограничение узкополосного случайного процесса

График функции $y\,(h^2)$ представлен на рис. 11.12.

При слабом входном сигнале ($h^2 \ll 1$) функция $y\,(h^2) \approx \pi/4$, а при сильном сигнале ($h^2 \gg 1$) эта функция стремится к 2.

Отметим, что удвоение отношения сигнал-помеха при сильном сигнале совпадает с аналогичным эффектом подавления слабого колебания более сильным при ограничении суммы двух гармонических колебаний (см. § 8.7).

Из равенства $y\,(h^2) \approx \pi/4$ (при $h^2 \ll 1$) вытекает, что в отличие от детектирования АМ колебания (см. § 11. 5) в резонансном ограничителе практически отсутствует эффект подавления слабого сигнала сильной помехой.

Это свойство «идеального» ограничителя проявляется при симметричном распределении шума относительно нулевого значения (проведенное выше рассмотрение относится к нормальному закону).

11.8. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И СПЕКТР СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В ЛИНЕЙНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Пусть передаточная функция линейной параметрической цепи является вещественной функцией времени и не зависит от частоты. В § 10.2 было показано, что подобная передаточная функция характеризует цепь, в которой имеет место АМ.

Обозначим передаточную функцию через $K\,(t)$ (аргумент $i\omega$ опущен), причем функция $K\,(t)$ может представлять собой как детерминированный, так и случайный процесс. Входной сигнал $s\,(t)$ также может быть либо детерминированным, либо случайным процессом (с нулевым средним).

Составим выражение для ковариационной функции выходного сигнала $s_{\text{вых}}\,(t)$

$$K_{s_{\text{вых}}}(t, \tau) = M\,[s_{\text{вых}}(t)\, s_{\text{вых}}(t+\tau)] = M\,[K(t)\, K(t+\tau)\, s(t)\, s(t+\tau)]. \tag{11.65}$$

Нас интересует случай, когда передаточная функция $K\,(t)$ не зависит от входного сигнала $s\,(t)$. Тогда среднее значение произведения в (11.65) равно произведению средних значений соответствующих сомножителей, т.е.

$$K_{s_{\text{вых}}}(t, \tau) = M\,[K(t)\, K(t+\tau)]\, M\,[s(t)\, s(t+\tau)] = K_K(t, \tau)\, R_s(t, \tau), \tag{11.66}$$

где $R_s(t, \tau)$ — корреляционная функция входного сигнала, а

$$K_K(t, \tau) = M[K(t) K(t+\tau)] \tag{11.67}$$

— *ковариационная функция цепи* с коэффициентом передачи $K(t)$.

Из выражения (11.66) вытекает важное свойство линейной цепи с переменными параметрами: *корреляционная функция выходного сигнала равна произведению корреляционных функций входного сигнала* $R_s(t, \tau)$ и *цепи* $K_K(t, \tau)$.

Для нестационарных процессов корреляционные функции в (11.66). (11.67) зависят не только от временно́го сдвига, но и от времени t. Этими характеристиками не всегда удобно пользоваться. Далее в примерах используются функции $R(\tau)$, получаемые усреднением $R(t, \tau)$ по t [см. (4.89)].

Применяя преобразование Фурье к усредненной по времени функции $R_{\text{вых}}(\tau)$, получаем также усредненный спектр выходного сигнала

$$W_{\text{вых}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\text{вых}}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau. \tag{11.68}$$

Проиллюстрируем использование соотношений (11.65)—(11.68) на примерах.

1. Гармонический сигнал $s(t) = \cos \omega_0 t$ действует на входе линейной цепи с передаточной функцией

$$K(t) = K_0 + \Delta K(t), \tag{11.69}$$

где K_0 — среднее значение коэффициента усиления цепи; $\Delta K(t)$ — флуктуация коэффициента усиления, представляющая собой нормально распределенный стационарный случайный процесс с дисперсией σ_K^2.

Для полной характеристики изменения во времени передаточной функции цепи должны быть заданы либо коварнационная функция $K_K(\tau)$, либо спектр $W_K(\omega)$ случайного процесса $K(t)$.

Очевидно, что постоянной составляющей K_0 соответствует спектр $K_{K0}(\omega) = 2\pi K_0^2 \delta(\omega)$[1]. Спектр второго слагаемого, т. е. $\Delta K(t)$, зададим в форме

$$W_{\Delta K}(\omega) = 2c/(a^2 + \omega^2),$$

где a и c — постоянные величины.

Таким образом, спектр суммы $K_0 + \Delta K(t)$

$$W_K(\omega) = 2\pi K_0^2 \delta(\omega) + 2c/(a^2 + \omega^2). \tag{11.70}$$

Заданному спектру $W_K(\omega)$ соответствует коварнационная функция

$$K_K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_K(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi K_0^2 \delta(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2c}{a^2 + \omega^2} e^{i\omega\tau}\, d\omega = K_0^2 + \frac{c}{a} e^{-a|\tau|}. \tag{11.71}$$

Найдем корреляционную функцию и спектр мощности сигнала на выходе цепи.

Имея в виду соотношения (11.66) и (11.71), а также учитывая, что корреляционная функция сигнала $s(t) = \cos \omega_0 t$ равна

$$R_s(\tau) = {}^1/_2 \cos \omega_0 \tau,$$

---

[1] Действительно, для постоянной составляющей K_0 корреляционная функция равна K_0^2. Следовательно, по формуле (11.68) энергетический спектр

$$W_{K0}(\omega) = K_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\, d\tau = 2\pi K_0^2\, \delta(\omega)$$

получаем

$$K_{s_{\text{вых}}}(\tau) = K_K R_s(\tau) = \frac{1}{2}\left(K_0^2 + \frac{c}{a} e^{-a|\tau|}\right)\cos\omega_0 \tau. \qquad (11.72)$$

Находим теперь энергетический спектр с помощью выражения (11.68):

$$W_{\text{вых}}(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(K_0^2 + \frac{c}{a} e^{-a|\tau|}\right)\cos\omega_0 \tau e^{-i\omega\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{4} K_0^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega_0)\tau} d\tau\right] +$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{c}{a}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|\tau|} e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|\tau|} e^{-i(\omega+\omega_0)\tau} d\tau\right].$$

Первые два интеграла дают дельта-функции $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ и $2\pi\delta(\omega + \omega_0)$. Последние же два интеграла дают соответственно $2a/[a^2 + (\omega - \omega_0)^2]$ и $2a/[a^2 + (\omega + \omega_0)^2]$.

Таким образом, окончательно

$$W_{\text{вых}}(\omega) = \frac{\pi}{2} K_0^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{c}{2}\left[\frac{1}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2}\right]. \qquad (11.73)$$

Функция $W_{\text{вых}}(\omega)$ изображена на рис. 11.13. Монохроматической составляющей выходного сигнала соответствуют две дискретные спектральные линии, а шумовой составляющей, обусловленной флуктуациями усиления $\Delta K(t)$,— сплошной спектр (на рис. 11.13 заштрихован). Этот спектр состоит из комбинационных частот, располагающихся симметрично относительно частоты сигнала ω_0 (в области отрицательных ω симметрично относительно — ω_0.).

2. Гауссовский случайный процесс $s(t)$ с нулевым средним и со спектром (рис. 11.14)

$$W_s(\omega) = 2d/(b^2 + \omega^2), \qquad (11.74)$$

группирующимся вблизи нулевой частоты, действует на входе цепи с передаточной функцией

$$K(t) = K_0(1 + M\cos\Omega t), \quad M < 1. \qquad (11.75)$$

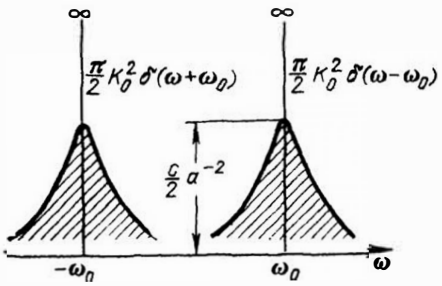


Рис. 11.13. Спектр на выходе параметрической цепи со случайной передаточной функцией при гармоническом воздействии

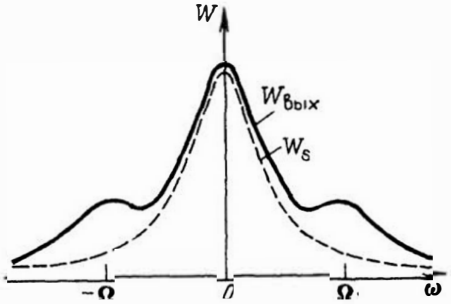


Рис. 11.14. Спектр на выходе параметрической цепи с передаточной функцией, изменяющейся по гармоническому закону, при воздействии гауссовского процесса

Находим корреляционную функцию входного сигнала

$$R_s(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2d}{b^2+\omega^2}e^{i\omega\tau}d\omega=\frac{d}{b}e^{-b|\tau|} \tag{11.76}$$

и ковариационную функцию цепи

$$K_K(\tau)=K_0^2+{}^1/_2M^2K_0^2\cos\Omega\tau. \tag{11.77}$$

Тогда в соответствии с (11.66) корреляционная функция выходного сигнала

$$R_{вых}(\tau)=K_K(\tau)\,R_s(\tau)=\frac{d}{b}\left(K_0^2+\frac{1}{2}M^2K_0^2\cos\Omega\tau\right)e^{-b|\tau|} \tag{11.78}$$

и спектр

$$W_{вых}(\omega)=\frac{a}{b}K_0^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-b|\tau|}e^{-i\omega\tau}d\tau+\frac{dM^2K_0^2}{2b}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-b|\tau|}\cos\Omega\tau e^{-i\omega\tau}d\tau=$$

$$=K_0^2\frac{2d}{b^2+\omega^2}+K_0^2M^2d\left[\frac{1}{b^2+(\omega-\Omega)^2}+\frac{1}{b^2+(\omega+\Omega)^2}\right]. \tag{11.79}$$

Функция $W_{вых}(\omega)$ изображена на рис. 11.14.

3. Нормально распределенный случайный процесс $s(t)$ действует на входе цепи, передаточная функция $K(t)$ которой является также случайным процессом с нормальным распределением.

Спектры процессов $s(t)$ и $K(t)$ зададим в форме $W_s(\omega)=2d/(b^2+\omega^2)$ — как в примере 2, $W_K(\omega)=2\pi K_0^2\delta(\omega)+2c/(a^2+\omega^2)$ — как в примере 1.

Корреляционные функции входного сигнала и рассматриваемой цепи соответственно

$$R_s(\tau)=\frac{d}{b}e^{-b|\tau|},\quad K_K(\tau)=K_0^2+\frac{c}{a}e^{-a|\tau|}.$$

Находим корреляционную функцию выходного сигнала

$$R_{вых}(\tau)=K_K(\tau)\,R_s(\tau)=\frac{d}{b}K_0^2e^{-b|\tau|}+\frac{cd}{ab}e^{-(a+b)|\tau|} \tag{11.80}$$

и спектр

$$W_{вых}(\omega)=K_0^2\frac{2d}{b^2+\omega^2}+\frac{cd}{ab}\cdot\frac{2(a+b)}{[(a+b)^2+\omega^2]}. \tag{11.81}$$

Первое слагаемое в правой части соответствует сигналу на выходе цепи с передаточной функцией K_0 (в отсутствие мультипликативной помехи), а второе слагаемое соответствует мультипликативной помехе. Значение этого слагаемого пропорционально произведению параметра d, характеризующего интенсивность сигнала, и параметра c, который определяет дисперсию флуктуации передаточной функции цепи σ_K^2.

11.9. ВЛИЯНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ПОМЕХИ НА ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИГНАЛА

Рассмотренные в предыдущем параграфе характеристики случайного сигнала — корреляционная и спектральная — не являются исчерпывающими. Для прикладных задач большой интерес представляет определение плотности вероятности $p(s_{вых})$.

В общем случае, когда передаточная функция цепи $K(i, \omega t)$ является функцией двух переменных — частоты и времени, отыскать $p(s_{вых})$ при произвольном законе распределения входного сигнала весьма затруднительно. Задача значительно упрощается при мультипликативной помехе типа АМ, когда передаточная функция $K(t)$ зависит только от одной переменной — времени t.

Имея в виду это условие, рассмотрим следующие три характерные ситуации:

1) $s(t)$ — случайный, $K(t)$ — детерминированный процессы;

2) $s(t)$ — детерминированный, $K(t)$ — случайный процессы;

3) $s(t)$ и $K(t)$ — случайные процессы.

Ситуации 1) и 2) приводят к задаче нахождения закона распределения произведения $s(t)\,K(t)$, в котором один из сомножителей является случайной, а другой — детерминированной величиной. Если случайный процесс стационарный, задача легко решается. Из теории случайных функций известно, что при умножении случайной функции $x(t)$ (стационарный процесс) с дифференциальным законом распределения $p(x)$, с нулевым средним и дисперсией σ_x^2 на детерминированную функцию времени $y(t)$ получается нестационарный процесс $x(t)\,y(t)$ с прежним законом распределения, но с дисперсией $\sigma^2_{\text{вых}} = \sigma_x^2\, y^2(t)$.

В частности, если входной сигнал $s(t)$ — стационарный гауссовский процесс с дисперсией σ_s^2, а передаточная функция системы $K(t)$ — детерминированная (случай 1), то выходной сигнал сохраняет нормальное распределение, однако каждому фиксированному моменту времени соответствует своя дисперсия $\sigma^2_{\text{вых}} = \sigma_s^2\, K^2(t)$.

При детерминированном сигнале $s(t)$ и случайной функции $K(t)$ (случай 2), если последнюю можно представить в форме $K(t) = K_0 + \Delta K(t)$, выходной сигнал целесообразно записать в виде

$$s_{\text{вых}}(t) = K(t)\,s(t) = K_0\,s(t) + \Delta K(t)\,s(t) = s_{\text{вых дет}}(t) + s_{\text{вых сл}}(t). \quad (11.82)$$

Первое слагаемое в правой части характеризует полезный выходной сигнал (детерминированный), а второе — мультипликативную помеху (случайную). Закон распределения этого слагаемого такой же, как у случайного процесса $\Delta K(t)$, но с дисперсией $\sigma_K^2\, s^2(t)$ (при $\overline{\Delta K(t)} = 0$).

Рассмотрим случай 3). Пусть оба процесса $s(t)$ и $K(t)$ стационарные, с плотностями вероятности соответственно $p(s)$ и $p(K)$. Задача заключается в нахождении плотности вероятности случайного процесса $s_{\text{вых}}(t)$, являющегося произведением $s(t)$ и $K(t)$.

Из теории вероятностей известно, что если взаимно независимым случайным величинам x и y соответствуют плотности вероятности $p(x)$ и $p(y)$, то произведению $z = xy$ соответствует плотность вероятности $p(z)$, определяемая выражением

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, p\left(\frac{z}{x}\right) \frac{dx}{|x|}. \quad (11.83)$$

Подразумевая под x входной сигнал $s(t)$, под y передаточную функцию $K(t)$, а под z произведение $s_{\text{вых}}(t) = s(t)\,K(t)$, получаем выражение для определения плотности вероятности выходного сигнала $s_{\text{вых}}$.

Проиллюстрируем применение (11.83) на примере передачи гармонического сигнала $s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta)$, в котором начальная фаза θ является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$, через линейную цепь с передаточной функцией $K(t)$, флуктуирующей относительно среднего значения K_0 по нормальному закону.

Таким образом, соответствующие плотности вероятности

$$p(s) = \frac{1}{\pi\sqrt{A_0^2 - s^2}}, \quad -A_0 < s < A_0,$$

$$p(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_K}\, e^{-(K-K_0)^2/2\sigma_K^2}, \quad -\infty < K < \infty.$$

Подставляя эти выражения в (11.83) и приравнивая $x = s$, а $z/x = y = s_{вых}/s = K$, приходим к следующему общему выражению для плотности вероятности выходного сигнала:

$$p(s_{вых}) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}\,\sigma_K} \int_{-A_0}^{A_0} \frac{\exp\left[-\dfrac{(s_{вых}/s - K_0)^2}{2\sigma_K^2}\right]}{\sqrt{A_0^2 - s^2}} \frac{ds}{|s|}.$$

Следует подчеркнуть, что найденный закон распределения характеризует *мгновенное значение* выходного сигнала.

Для практики часто основной интерес представляет распределение огибающей выходного сигнала. Представляя выходной сигнал в форме

$$s_{вых}(t) = s(t)\,K(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta)\,[K_0 + \Delta K(t)] = A(t)\cos(\omega_0 t + \theta),$$

где $A(t) = A_0[K_0 + \Delta K(t)]$ — огибающая, приходим к очевидному заключению, что случайная фаза θ не влияет на распределение огибающей. Последнее совпадает с распределением функции $K(t)$, т. е. является нормальным, со средним значением A_0K_0 и с дисперсией $A_0^2\sigma_K^2$.

Глава 12. ДИСКРЕТНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

12.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Последние годы характеризуются быстрым развитием дискретных систем управления и систем передачи информации, в которых широко применяется математическое моделирование процессов фильтрации, основанное на использовании ЭВМ. Это новое направление оказывает большое влияние на развитие теории и техники цепей и сигналов.

Цифровые фильтры имеют ряд преимуществ. Основные из них — надежность в работе и стабильность характеристик, недостижимые в аналоговых фильтрах — обусловлены преобразованием континуального сигнала в двоичное число, представленное стандартными сигналами (импульсами и паузами). Некоторые другие важные преимущества будут отмечены в дальнейшем после более детального рассмотрения основных характеристик цифрового фильтра.

Общее представление о принципе цифровой обработки континуального сигнала можно получить из схемы, изображенной на рис. 12.1, на котором даны эпюры колебаний в различных точках схемы. Входной сигнал $s(t)$ подвергается сначала дискретизации по времени с помощью электронного ключа (ЭК), работающего с шагом T. Процедура дискретизации описана в § 2.16. Сигнал $s_T(t)$ на выходе ЭК имеет вид последовательности равноотстоящих коротких импульсов, являющихся выборками (отсчетами) сигнала $s(t)$. Предполагается, что при выборе шага T обеспечивается сохранение информации, содержащейся в континуальном сигнале $s(t)$.

Каждый отсчет запоминается в интегрирующей RC-цепи на время, необходимое для срабатывания аналого-цифрового преобразователя (АЦП). Это время должно быть не больше шага T. В результате на выходе RC-цепи получается ступенчатое колебание $s_T \cdot (t)$. В АЦП каждый отсчет квантуется по уровню и преобразуется в кодовое слово — двоичное число, составленное из r разрядов, каждый из которых представлен нулем или единицей (паузой или стандартным импульсом).

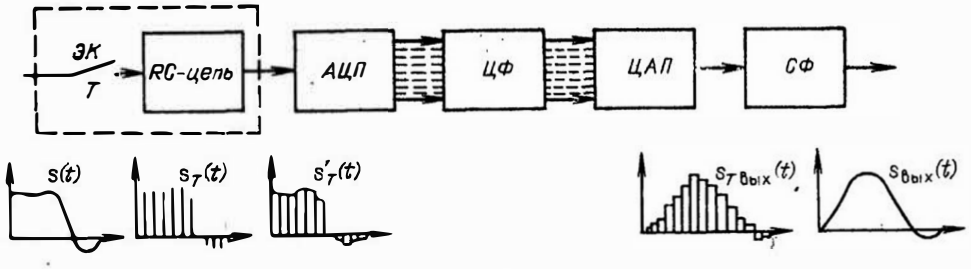


Рис. 12.1. Функциональная схема цифрового фильтра

Квантование заключается в том, что отсчет измеряется и ему присваивается один уровень из общего числа возможных. Это число равно 2^r. Например, при $r = 10$ получается $2^{10} = 1024$ уровня. Каждому разряду соответствует своя шина, так что на выходе АЦП закодированный цифровой отсчет представлен в виде комбинации из бинарных чисел (пауз и импульсов), возникающих на r выходных шинах одновременно (параллельный код). Максимально возможному значению отсчета соответствует кодовое слово, составленное из r импульсов, нулевому значению отсчета — слово из r пауз. Точность представления отсчета тем выше, чем длиннее кодовое слово, т. е. чем больше в нем бинарных чисел.

Последовательность закодированных цифрами отсчетов поступает в цифровой фильтр (ЦФ), представляющий собой вычислительное устройство, в котором над кодовыми словами производятся определенные математические операции (сложение, умножение, а также задержка во времени), соответствующие заданному алгоритму. В результате этих операций на выходе ЦФ возникают новые кодовые слова, соответствующие профильтрованному сигналу.

В цифро-аналоговом преобразователе (ЦАП) каждое кодовое слово приводит в действие группу электронных ключей, которые управляют суммированием эталонных напряжений, соответствующих каждому из разрядов. В результате на выходе ЦАП воспроизводятся отсчеты в аналоговой форме. Такое декодирование является процессом, обратным происходящему в АЦП.

Напряжение на выходе ЦАП $s_{T\,вых}(t)$ имеет ступенчатую форму, причем высота каждой ступени равна отсчету выходного сигнала в соответствующий момент времени.

Под выходным дискретизованным сигналом $s_{T\,вых}(t)$ в дальнейшем будет подразумеваться последовательность «тонких» импульсов, амплитуды которых равны высотам соответствующих ступеней.

Наконец, в четырехполюснике, который можно назвать синтезирующим фильтром (СФ), осуществляется преобразование дискретной последовательности в континуальный выходной сигнал $s_{вых}(t)$.

Очевидно, что перечисленные выше преобразования, производимые над каждым отсчетом входного сигнала, должны выполняться за время, меньшее шага T. Кроме того, должна обеспечиваться строгая синхронность управления электронными ключами, используемыми для осуществления поразрядного сложения, вычитания и других операций над кодовыми словами. Все это приводит к необходимости применения сложной системы синхронизации вспомогательных импульсных последовательностей, с помощью которых на каждом шаге T обеспечиваются стирание старой информации в двоичных элементах (например, в триггерах) и ввод в них новой информации.

Задача решается формированием указанных последовательностей из единого гармонического колебания с частотой $1/T$, получаемого от опорного генератора. В связи с тем, что T является основным параметром цифрового

фильтра, особое внимание уделяется повышению стабильности частоты этого генератора. Применение интегральных микро схем позволяет с успехом решать перечисленные выше сложные задачи.

Следует отметить, что при рассмотрении принципа действия схемы, представленной на рис. 12.1, преобразования аналог — цифра и цифра — аналог не имеют решающего значения. Можно исходить из допущения, что в ЦФ вводятся неквантованные отсчеты (в аналоговой форме), над которыми и совершаются математические операции (существуют дискретные системы аналогового типа, в которых не используется цифровое кодирование). В связи с этим в последующих параграфах рассматривается принцип действия дискретных систем сначала без учета АЦП и ЦАП. Оценка же погрешности, связанной с квантованием отсчетов, дается в § 12.9.

12.2. ПРИНЦИП ДИСКРЕТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Дискретный сигнал на входе цифрового фильтра представляет собой последовательность из N отсчетов $s(kT)$, $k = 0,1, \ldots, N-1$, взятых с интервалом T из континуального сигнала $s(t)$. На выходе фильтра в результате определенных операций возникает последовательность чисел $s_{\text{вых}}(kT)$.

Рассмотрим сначала наиболее простой алгоритм работы цифрового фильтра, при котором число $s_{\text{вых}}(mT)$ в момент $t = mT$ зависит только от $s(mT)$ и предшествующих ему входных чисел:

$$s_{\text{вых}}(mT) = a_0 s(mT) + a_1 s(mT - T) + a_2 s(mT - 2T) + \ldots + a_H s(mT - HT). \tag{12.1}$$

Коэффициенты a_i («весовые коэффициенты» фильтра) — действительные постоянные числа; H — максимальное число запоминаемых чисел.

Начиная с момента $t = 0$ выходные числа в моменты $t = 0, T, 2T, \ldots$ будут определяться выражениями

$$s_{\text{вых}}(0) = a_0 s(0),$$
$$s_{\text{вых}}(T) = a_0 s(T) + a_1 s(0),$$
$$s_{\text{вых}}(2T) = a_0 s(2T) + a_1 s(T) + a_2 s(0),$$
$$\ldots$$
$$s_{\text{вых}}(mT) = a_0 s(mT) + a_1 s[(m-1)T] + a_2 s[(m-2)T] + \ldots + a_H s[(m-H)T].$$

Приведенные соотношения обобщаются выражением

$$s_{\text{вых}}(mT) = \sum_{k=0}^{m} a_k s[(m-k)T], \quad m \leqslant H. \tag{12.2}$$

Алгоритм (12.2) реализуется схемой, представленной на рис. 12.2, на котором T означает элемент памяти, иногда для краткости называемый задержкой. Величина задержки совпадает с темпом поступления отсчетов сигнала. Из общего описания цифрового фильтра, приведенного в предыдущем параграфе, ясно, что эффект задержки достигается вводом и выводом чисел из двоичных элементов (триггеров) синхронно с работой электронного ключа.

Непосредственно из схемы на рис. 12.2 вытекает, что при подаче на вход фильтра отсчета $s(0) = 1$ (единичный импульс) на выходе сумматора возникает последовательность чисел, имеющая смысл *импульсной характеристики* цифрового фильтра (рис. 12.3). В дальнейшем импульсная характеристика будет обозначаться через $g(kT)$.

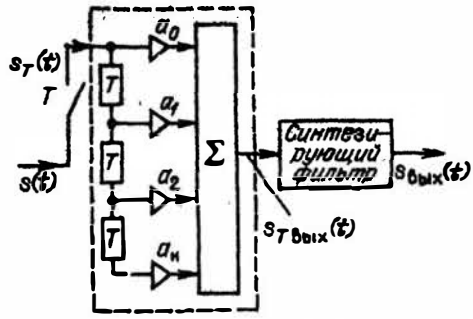
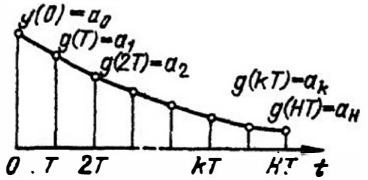


Рис. 12.2. Дискретный фильтр

Рис. 12.3. Импульсная характеристика дискретного фильтра



Для схемы на рис. 12.2 числа $g(kT)$ совпадают с весовыми коэффициентами фильтра a_k.

Запишем выражение (12.2) в форме

$$s_{вых}(mT) = \sum_{k=0}^{m} s[(m-k)T]\, g(kT) = \sum_{k=0}^{m} s(kT)\, g[(m-k)T]. \qquad (12.3)$$

Выражение (12.3) является дискретным эквивалентом интегральной свертки (см. § 6.3), используемой при анализе прохождения континуальных сигналов в аналоговых цепях.

Представленную на рис. 12.3 импульсную характеристику $g_T(t)$ можно трактовать как результат дискретизации с шагом T континуальной импульсной характеристики соответствующего аналогового фильтра. Сигнал, выделяемый на выходе синтезирующего фильтра в схеме на рис. 12.2, совпадает с сигналом на выходе указанного аналогового фильтра.

Представленный на рис. 12.2 фильтр иногда называют трансверсальным (поперечным). Возможности фильтра значительно расширяются при введении цепей обратной связи (рис. 12.4).

При наличии обратных связей значение сигнала на выходе сумматора в любой момент времени mT зависит не только от H отсчетов *входного* сигнала, но и от некоторого количества отсчетов *выходного сигнала в предшествующие моменты*. Подобные фильтры называются рекурсивными. Для такого фильтра разностное уравнение (12.1) следует заменить более общим уравнением, учитывающим обратные связи с весовыми коэффициентами b_1, b_2, ..., b_M:

$$s_{вых}(mT) = a_0 s(mT) + a_1 s(mT-T) + a_2 s(mT-2T) + \ldots + a_H s(mT-HT) + b_1 s_{вых}(mT-T) + b_2 s_{вых}(mT-2T) + \ldots + b_M s_{вых}(mT-MT). \qquad (12.4)$$

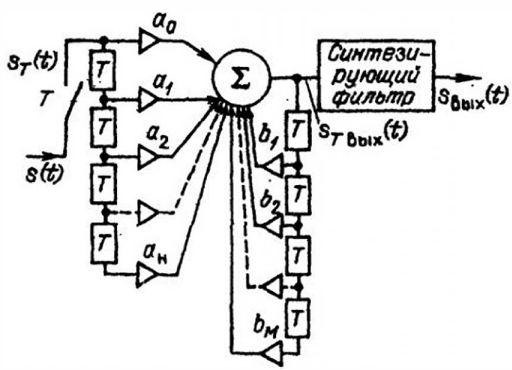


Рис. 12.4. Цифровой фильтр с обратными связями

Принципиальное различие между трансверсальным и рекурсивным фильтрами заключается в свойствах их импульсных характеристик. В первом случае импульсная характеристика содержит конечное число отсчетов (не превышающее H), а во втором благодаря обратной связи число отсчетов теоретически бесконечно велико. В связи с этим трансверсальные фильтры иногда называют КИХ-фильтрами, а рекурсивные — БИХ-фильтрами.

12.3. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

Дискретный сигнал, действующий на входе цифрового фильтра, удобно представлять в форме, аналогичной (2.122), но с учетом начального условия $s(kT) = 0$ при $k < 0$:

$$s_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\,\delta(t - kT).$$

Соответственно изображение по Лапласу будет [см. (2.125)]

$$L[s_T(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\,e^{-pkT}. \tag{12.5}$$

Нетрудно составить аналогичное выражение для дискретного сигнала на выходе фильтра.

В случае трансверсального фильтра результирующий сигнал на выходе сумматора можно записать в виде суммы

$$s_{T\text{вых}}(t) = a_0 s_T(t) + a_1 s_T(t - T) + \ldots + a_H s_T(t - HT).$$

Применив к этому выражению преобразование Лапласа, с учетом теоремы смещения получим

$$L[s_{T\text{вых}}] = S_{T\text{вых}}(p) = S_T(p) \sum_{k=0}^{H} a_k\,e^{-pkT}.$$

Передаточную функцию цифрового фильтра в общем виде определим отношением

$$K_T(p) = S_{T\text{вых}}(p)/S_T(p). \tag{12.6}$$

Для трансверсального фильтра это отношение будет

$$K_T(p) = a_0 + a_1 e^{-pT} + a_2 e^{-p2T} + \ldots + a_H e^{-pHT}. \tag{12.7}$$

Заметим, что выражение (12.7) можно также получить, применив преобразование Лапласа непосредственно к импульсной характеристике $g(kT)$, представив ее в форме

$$g_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\delta(t - kT).$$

Действительно,

$$L[g_T(t)] = a_0 + a_1 e^{-pT} + a_2 e^{-p2T} + \ldots + a_H e^{-pHT} = K_T(p). \tag{12.8}$$

Итак, импульсная характеристика и передаточная функция цифрового фильтра, как и в случае аналогового фильтра, связаны между собой преобразованиями Лапласа и Фурье.

Подставив в (12.7) $p = i\omega$, получим передаточную функцию на оси частот

$$K_T(i\omega) = \sum_{k=0}^{H} a_k\,e^{-ik\omega T}. \tag{12.9}$$

Сопоставление выражений (12.9) и (2.124) показывает, что передаточная функция цифрового фильтра $K_T(i\omega)$, как и спектры $S_T(\omega)$, $S_{T\text{вых}}(\omega)$, имеют периодическую структуру с периодом (на оси частот), равным $2\pi/T$.

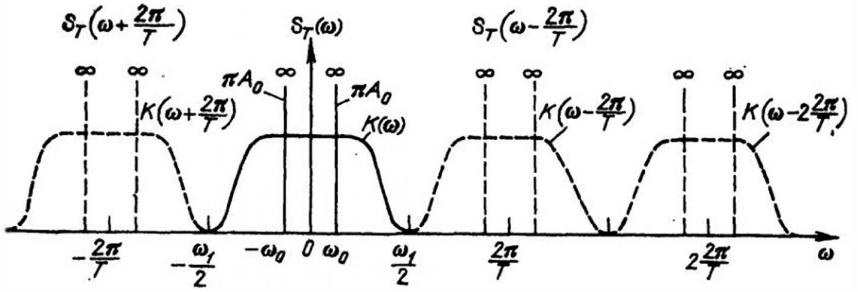


Рис. 12.5. Амплитудно-частотная характеристика дискретного фильтра

Следовательно, передаточную функцию дискретного фильтра наряду с с (12.9) можно записать также в форме

$$\mathbf{K}_T(i\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_{\text{ан}}\left[i\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)\right], \tag{12.10}$$

где $\mathbf{K}_{\text{ан}}(i\omega)$ — передаточная функция аналогового фильтра, обладающего импульсной характеристикой $g(t)$, которая соответствует дискретной характеристике $g_T(t)$ (см. замечание в конце предыдущего параграфа).

Выражение (12.10) аналогично выражению (2.123). Если шаг T мал по сравнению с протяженностью функции $g(t)$ или, что то же самое, частота повторения $\omega_1 = 2\pi/T$ больше полосы прозрачности фильтра, то частотные характеристики, соответствующие разным значениям n, не перекрываются. В этом случае на центральном участке — $\omega_1/2 < \omega < \omega_1/2$, т. е. при $n = 0$, характеристики $\mathbf{K}_T(i\omega)$ и $\mathbf{K}_{\text{ан}}(i\omega)$ полностью совпадают. Это иллюстрируется рис. 12.5. для дискретного фильтра нижних частот при воздействии гармонического колебания $s(t) = A_0 \cos \omega_0 t$ со спектральной плотностью $\pi A_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$ [см. (2.98)]. Сплошными линиями показан спектр до дискретизации, а штриховыми — периодическое продолжение этого спектра.

Амплитудно-частотная характеристика фильтра в центральном интервале показана также сплошной линией. После обратного преобразования дискретного сигнала $s_{T\text{вых}}(t)$ в континуальный сигнал $s_{\text{вых}}(t)$ (с помощью СФ, см. рис. 12.2) только этот частотный интервал и определяет спектральный состав выходного сигнала.

Следует подчеркнуть важность этого заключения. По существу оно означает, что определение передаточной функции дискретного фильтра как отношения $S_{T\text{вых}}(\omega)/S_T(\omega)$ можно распространить и на отношение $S_{\text{вых}}(\omega)/S(\omega)$. Иными словами, выражение (12.6) можно трактовать как передаточную функцию дискретного фильтра в целом с учетом как процесса дискретизации сигнала $s(t)$ на входе, так и восстановления континуальной формы $s_{\text{вых}}(t)$ на выходе устройства.

Определим теперь передаточную функцию рекурсивного цифрового фильтра. Повторяя рассуждения, приведшие к формуле (12.7), и учитывая разностное уравнение (12.4), приходим к следующему уравнению:

$$s_{T\text{вых}}(t) = a_0 s_T(t) + a_1 s_T(t-T) + a_2 s_T(t-2T) + \ldots +$$

$$+ a_H s_T(t-HT) + b_1 s_{T\text{вых}}(t-T) + b_2 s_{T\text{вых}}(t-2T) + \ldots +$$

$$+ b_M s_{T\text{вых}}(t-MT).$$

Применив к этому уравнению преобразование Лапласа, получим

$$S_{T\text{вых}}(p) = S_T(p)(a_0 + a_1 e^{-pT} + a_2 e^{-p2T} + \ldots + a_H e^{-pHT}) + \\ + S_{T\text{вых}}(p)(b_1 e^{-pT} + b_2 e^{-p2T} + \ldots + b_M e^{-pMT}),$$

откуда следует, что

$$K_T(p) = \frac{a_0 + a_1 e^{-pT} + a_2 e^{-p2T} + \ldots + a_H e^{-pHT}}{1 - b_1 e^{-pT} - b_2 e^{-p2T} - \ldots - b_M e^{-pMT}}. \qquad (12.11)$$

Здесь H — число суммируемых предшествующих *входных*, а M — предшествующих *выходных* отсчетов.

Полученную функцию можно трактовать как передаточную функцию каскадного соединения двух фильтров: одного с передаточной функцией

$$\alpha_T(p) = \sum_{k=0}^{H} a_k e^{-pkT}$$

и второго с передаточной функцией

$$\beta_T(p) = \left[1 - \sum_{k=1}^{M} b_k e^{-pkT}\right]^{-1}.$$

Таким образом,

$$K_T(p) = \alpha_T(p)\,\beta_T(p).$$

Перейдя от переменной p к $i\omega$, запишем передаточную функцию рекурсивного фильтра

$$K_T(i\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{H} a_k e^{-i\omega kT}}{1 - \sum_{k=1}^{M} b_k e^{-i\omega kT}} = \alpha_T(i\omega)\,\beta_T(i\omega). \qquad (12.12)$$

Такому представлению соответствует каноническая схема на рис. 12.6. Каждый элемент памяти T в этой схеме используется как для цепи прямой связи (с весовым коэффициентом $a_к$), так и для цепи обратной связи (с весовым коэффициентом $b_к$). Поэтому общее число элементов памяти T вдвое меньше, чем в схеме на рис. 12.4. Легко убедиться, что разностные уравнения (12.4) справедливы и для канонической схемы.

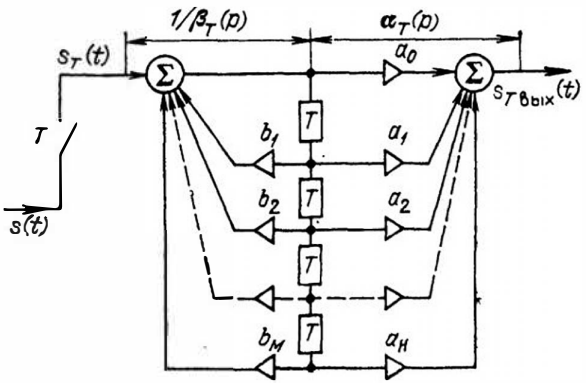


Рис. 12.6. Каноническая схема цифрового рекурсивного фильтра

12.4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ

В § 2.17 было показано, что спектральная плотность $S_T(\omega)$ дискретизованного по времени сигнала $s(t)$ имеет периодическую структуру с периодом на оси частот $\omega_1 = 2\pi/T$ (рис. 12.7, *б*). Как и спектр $S(\omega)$ исходного (континуального) сигнала (рис. 12.7, *а*), $S_T(\omega)$ — *сплошной спектр*. Между тем для осуществления цифровой обработки требуется дискретизация сигнала не только во временной, но и в частотной области. Это означает, что сплошной спектр $S_T(\omega)$ должен быть представлен совокупностью своих значений $S_T(n\Delta\omega)$ на дискретных частотах $\omega = n\Delta\omega$. Подобный спектр, показанный на рис. 12.7, *в*, получается из сплошного спектра $S_T(\omega)$ при периодическом повторении последовательности $\{s(kT)\}$ с периодом $T_c = NT$. В соответствии с § 2.7 интервал между соседними спектральными линиями $\Delta\omega = 2\pi/T_c = 2\pi/NT$.

Обращаясь к выражению (2.124)

$$S_T(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\, e^{-i\omega kT}$$

и подставляя $\omega = n\Delta\omega$, получаем следующее соотношение:

$$S_T(n\Delta\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} s(kT)\, e^{i\Delta\omega nkT} = \sum_{k=0}^{N-1} s(kT)\, e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, \pm 1, \ldots, \pm N/2$$

(при четном N).

Полученное выражение называется дискретным преобразованием Фурье (ДПФ).

Аргументы $n\Delta\omega$ и kT обычно обозначаются просто n и k. Поэтому ДПФ можно записывать в форме

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)\, e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, \pm 1, \ldots, \pm N/2. \qquad (12.13)$$

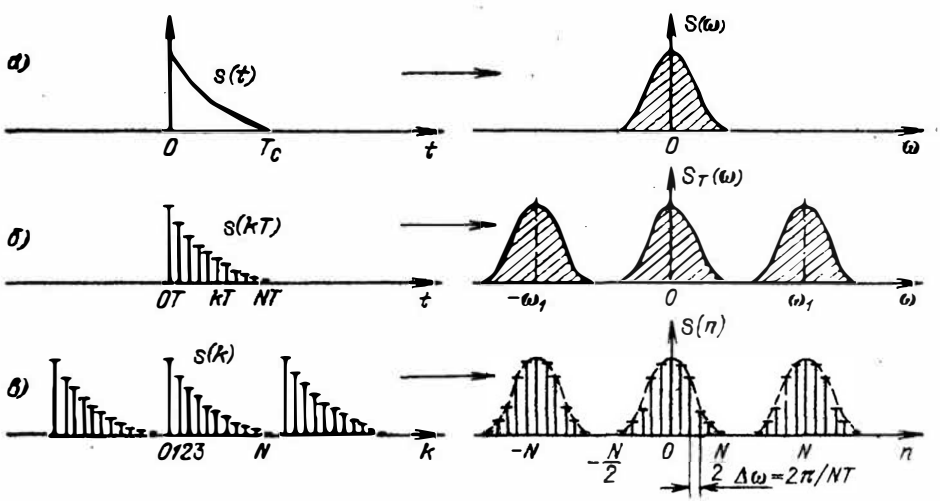


Рис. 12.7. Дискретизация сигнала по времени и по спектру:
а) континуальный сигнал $s(t)$ и его спектр $S(\omega)$; *б*) дискретизованный сигнал $s_T(t)$ и его спектр (сплошной); *в*) периодическая последовательность $\{s(k)\}$ с периодом N и ДПФ $\{S(n)\}$

Выражение (12.13) можно трактовать как алгоритм вычисления спектральных коэффициентов $\{S(n)\}$ по заданным временным отсчетам $\{s(k)\}$.

При четном N и действительном $s(k)$

$$S(N/2+l) = S^*(N/2-l),$$
$$l = 0, 1, \ldots, N/2,$$

где $S^*(n)$ — величина, комплексно-сопряженная $S(n)$.

Действительно, подставляя в $S(n)$ $n = N/2 + l$ и учитывая, что N является периодом, получаем

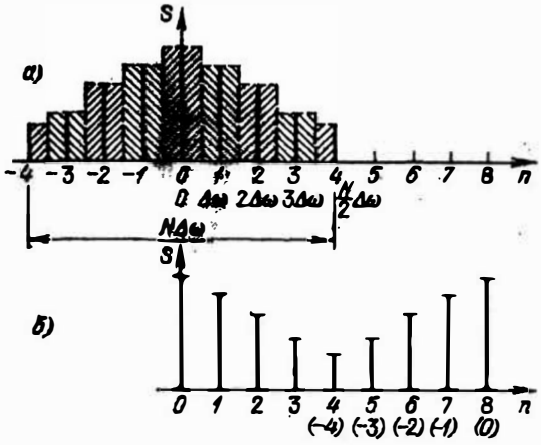


Рис. 12.8. Нумерация спектральных коэффициентов при четном N

$$S\left(\frac{N}{2}+l\right) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)\, e^{-i\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}+l\right)k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} s(k)\, e^{+i\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}-l\right)k} = S^*\left(\frac{N}{2}-l\right), \quad l = 0, 1, \ldots, N/2,$$

что и требовалось доказать.

Из последнего равенства, в частности, следует, что при $l = 0$ $S(N/2) = S^*(N/2)$, т. е. что $S(N/2)$ — всегда действительное число. Это справедливо и для $S(0)$.

На основе доказанных свойств ДПФ картину образования периодической структуры спектра можно пояснить построением, показанным на рис. 12.8 (для $N = 8$). Амплитудный спектр исходного континуального сигнала представлен на рис. 12.8, *а*. Весь диапазон разбит на N равных интервалов $\Delta\omega$. Отсчетные точки на оси частот расположены в середине каждого из интервалов. На рис. 12.8, *б* представлено периодическое продолжение спектра. В точке $n = N/2 = 4$ $S(4) = S(-4)$ — действительное число, в точке $n = 5 = N/2 + 1$ спектральная плотность $S(5) = S^*(3)$, а по модулю $|S(5)| = |S^*(3)|$ и т. д. При $n = 8 = N$ начинается новый период последовательности $S(n)$. Очевидно, что в пределах одного периода выражение (12.13) можно записывать в форме

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)\, e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (12.14)$$

Именно в такой форме в дальнейшем будет записываться ДПФ последовательности N временных отсчетов.

Введем понятие *обратного дискретного преобразования Фурье* (ОДПФ). Используя дуальность прямого и обратного преобразований Фурье, можно, основываясь на выражении (12.14), записать

$$s(k) = C \sum_{n=0}^{N-1} S(n)\, e^{i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Для определения постоянного коэффициента C подставим в последнее выражение $S(n)$ из (12.14):

$$s(k) = C \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} s(m) e^{-i \frac{2\pi}{N} nm} \right] e^{i \frac{2\pi}{N} nk} =$$

$$= C \sum_{m=0}^{N-1} s(m) \sum_{n=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{N} n(k-m)}$$

При $m = k$ внутренняя сумма обращается в N, а при любом другом значении m — в нуль (как сумма векторов, концы которых делят окружность единичного радиуса на равные дуги). Следовательно, в правой части остается одно слагаемое $Cs(k)N$, из чего вытекает равенство $C = 1/N$. Таким образом, ОДПФ принимает следующую форму:

$$s(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{i \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{12.15}$$

Вне интервала $0 \leqslant k \leqslant N-1$ ОДПФ определяет периодическое продолжение исходной последовательности $s(k)$, показанное на рис. 12.7, *в* (левая часть).

Итак, дискретизованному сигналу $\{s(kT)\}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, соответствует *сплошной* спектр $S_T(\omega)$ с периодической структурой (рис. 12.7, *б*). Дискретизованному же спектру $S(n)$ соответствует периодическая последовательность сигналов $\{s(kT)\}$, повторяемых с периодом N (рис. 12.7, *в*).

Некоторые из свойств непрерывных преобразований Фурье, рассмотренных в § 2.8, нетрудно сформулировать также и для ДПФ.

1. Линейность преобразования. Спектр суммы (разности) дискретных сигналов равен сумме (разности) их спектров.

2. Сдвиг дискретного сигнала во времени. Повторяя рассуждения, приведшие к выражению (2.57), нетрудно показать, что если сигналу $s(t)$, представленному совокупностью отсчетов $s(kT)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, соответствует ДПФ $S(n\Delta\omega)$, то сигналу $s(t - mT)$, где m — целое число, соответствует ДПФ $e^{-i \frac{2\pi}{N} nm} S(n\Delta\omega)$. Иными словами, сдвиг последовательности отсчетов на m интервалов приводит лишь к изменению фазо-частотной характеристики ДПФ на величину $\frac{2\pi}{N} nm$ (теорема запаздывания).

3. Теорема свертки. Если ДПФ $S(n\Delta\omega)$ соответствует дискретному сигналу $s_T(t) = \sum_{k=0}^{N_s-1} s(kT)\delta(t - kT)$, а ДПФ $G(n\Delta\omega)$ — сигналу $g_T(t) = \sum_{k=0}^{N_g-1} g(kT)\delta(t - kT)$, то произведению $S(n\Delta\omega)G(n\Delta\omega)$ соответствует сигнал (линейная свертка)

$$y(mT) = \sum_{k=0}^{N-1} s[(m-k)T]\, g(kT), \quad N \geqslant N_s + N_g. \tag{12.16}$$

При $N < N_s + N_g$ получается так называемая круговая свертка.

Вывод выражения (12.16) аналогичен выводу (2.64) [см. также (12.3)].

12.5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ И ЦЕПЕЙ

При математическом описании дискретных последовательностей, а также дискретных цепей большую роль играет функция e^{pT}. Изображения по Лапласу временных процессов, а также передаточные функции цепей, в в которые входит e^{pT}, оказываются трансцендентными функциями p, что существенно затрудняет анализ. Его можно упростить при переходе к новой переменной z, связанной с p соотношением

$$z = e^{pT}, \quad p = \frac{1}{T} \ln z. \tag{12.17}$$

При такой замене указанные функции от p преобразуются в рациональные функции от переменной z, благодаря чему упрощается представление их на плоскости z.

Преобразование плоскости $p = \sigma + i\omega$ в плоскость $z = x + iy$ можно осуществлять с помощью следующих соотношений, связывающих координаты σ_1, ω_1 какой-либо точки p_1 на плоскости p с координатами x_1, y_1 соответствующей точки z_1 на плоскости z (рис. 12.9):

$$z_1 = x_1 + iy_1 = e^{(\sigma_1 + i\omega_1)T}, \quad x_1 = e^{\sigma_1 T} \cos \omega_1 T, \quad y_1 = e^{\sigma_1 T} \sin \omega_1 T, \tag{12.18}$$

В полярных координатах на плоскости z

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\sigma_1 T}, \quad \varphi_1 = \arg z_1 = \omega_1 T + m2\pi, \tag{12.19}$$

где m — любое целое число.

На рис. 12.10 представлены отображения некоторых характерных точек и областей из p-плоскости на z-плоскость. Точка $p = 0$ переходит в точку $z = 1$ на вещественной оси z-плоскости. При движении точки p-плоскости вдоль оси $i\omega$ (т. е. при $\sigma = 0$) соответствующая ей точка z-плоскости описывает окружность единичного радиуса. Один полный оборот радиуса-вектора соответствует изменению частоты ω в интервале $\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_1 + 2\pi/T$.

При движении точки p_1 вдоль оси $i\omega$ в пределах от $-i\infty$ до $i\infty$ точка z_1 описывает бесконечно большое число окружностей. Таким образом, взаимно-однозначное отображение p на z существует только для

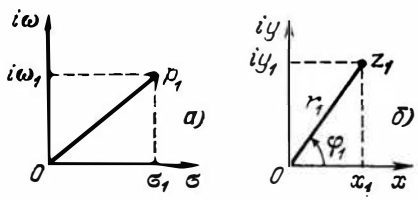


Рис. 12.9. Соотношение между координатами точки на p-плоскости ($а$) и z-плоскости ($б$)

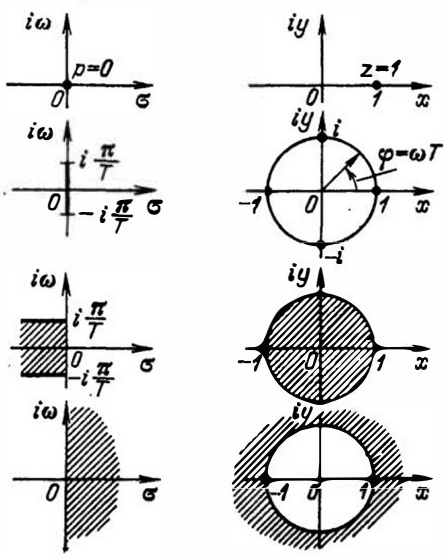


Рис. 12.10. Отображение точек и областей из p-плоскости на z-плоскость

полосы p-плоскости между $\pm \pi/T$. Внутри этой полосы левая полуплоскость отображается внутрь единичного круга. Все параллельные полосы такой же ширины соответствуют этому же кругу. Правая полуплоскость p преобразуется во всю z-плоскость, исключая единичный круг.

12.6. z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Основываясь на приведенном в § 2.17 преобразования Лапласа дискретного сигнала [см. (2.125)] и полагая $e^{pT} = z$, получаем выражение

$$\widehat{S}(z) = S_T(p)\Big|_{p=\frac{1}{T}\ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\, z^{-k}, \tag{12.20}$$

называемое прямым z-преобразованием (односторонним).

Комплексная функция $\widehat{S}(z)$ определена только для области z, в которой степенной ряд (12.20) сходится.

Условие сходимости: $|s(k)| < cr_0^k$ при любых $k \geqslant 0$, где $c > 0$ — постоянное действительное число, а $r_0 > 0$ также действительное число, являющееся радиусом сходимости, зависящим от свойств последовательности $\{s(k)\}$, $k = 0,1, \ldots, \infty$. Поскольку (12.20) определяет ряд по отрицательным степеням z, область сходимости включает в себя всю z-плоскость, за исключением круга радиуса r_0, т. е. данный ряд сходится при $r_0 < |z| < \infty$.

В случае ограниченной последовательности $\{s(k)\}$, $k = 0,1, \ldots, N-1$, в которой только конечное число членов отлично от нуля, для сходимости ряда требуется, чтобы $|z(k)| < \infty$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$. При этом z может принимать все значения за исключением $z = 0$.

Найдем функцию $\widehat{S}(z)$ и радиус сходимости для некоторых простых временных функций $s_T(t)$.

1. Последовательность отсчетов из сигнала $s(t) = 1$, $t \geqslant 0$. В этом случае $s(kT) = 1$, $k = 0,1, 2, \ldots, \infty$, и в соответствии с (12.20)

$$\widehat{S}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}. \tag{12.21}$$

Нуль функции $\widehat{S}(z)$ в точке $z_0 = 0$, полюс в точке $z_п = 1$. Радиус сходимости $r_0 = 1$; функция сходится при $|z| > 1$.

2. Последовательность отсчетов из сигнала $s(t) = e^{-\alpha t}$, $t \geqslant 0$. В этом случае $s(kT) = e^{-\alpha kT}$ и

$$\widehat{S}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha kT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\alpha T} z^{-1})^k = \frac{1}{1-e^{-\alpha T} z^{-1}} =$$

$$= \frac{z}{z-e^{-\alpha T}}. \tag{12.22}$$

Нуль $z_0 = 0$, полюс $z_п = e^{-\alpha T}$; $r_0 = e^{-\alpha T}$, $|z| > e^{-\alpha T}$.

3. Последовательность отсчетов из сигнала $s(t) = a^{\alpha t}$, $t \geqslant 0$, $a < 1$. В этом случае $s(kT) = a^{\alpha kT}$ и

$$\widehat{S}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{\alpha kT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{\alpha T} z^{-1})^k = \frac{1}{1-a^{\alpha T} z^{-1}} = \frac{1}{z-a^{\alpha T}}. \tag{12.23}$$

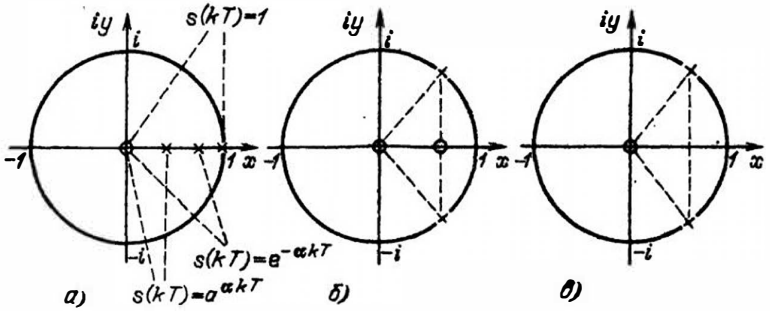


Рис. 12.11. Положение нулей и полюсов на z-плоскости для:
а) $s(kT)=1$, $e^{-\alpha kT}$ и $e^{\alpha kT}$; б) $s(kT)=\cos\omega_0 kT$; в) $s(kT)=\sin\omega_0 kT$

Нуль $z_0=0$, полюс $z_п=a^{\alpha T}$, $r_0=a^{\alpha T}$, $|z|>e^{-\alpha T}$.

4. Последовательность отсчетов из сигнала $s(t)=\cos\omega_0 t$, $t\geqslant 0$. В этом случае $s(kT)=\frac{1}{2}e^{i\omega_0 kT}+\frac{1}{2}e^{-i\omega_0 kT}$ и

$$\widehat{S}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\cos\omega_0 kT\cdot z^{-k}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{i\omega_0 T}z^{-1})^k+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-i\omega_0 T}z^{-1})^k=\frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{i\omega_0 T}z^{-1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-i\omega_0 T}z^{-1}}=$$

$$=\frac{z^2}{2}\frac{(1-e^{-i\omega_0 T}z^{-1})+(1-e^{i\omega_0 T}z^{-1})}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}=\frac{z(z-\cos\omega_0 T)}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}. \qquad (12.24)$$

Нули $z_{01}=0$, $z_{02}=\cos\omega_0 T$, полюсы $z_{п1,2}=\cos\omega_0 T\pm i\sin\omega_0 T$, $|z_п|=1$; $r_0=1$, $|z|>1$.

5. Последовательность отсчетов из сигнала $s(t)=\sin\omega_0 t$, $t\geqslant 0$. В этом случае $s(kT)=\frac{1}{2i}e^{i\omega_0 kT}-\frac{1}{2i}e^{-i\omega_0 kT}$ и

$$\widehat{S}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sin\omega_0 kT\cdot z^{-k}=\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{i\omega_0 T}z^{-1})^k-$$

$$-\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{i\omega_0 T}z^{-1})^k=\frac{z\sin\omega_0 T}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}. \qquad (12.25)$$

Нуль $z_0=0$, полюсы $z_{п1,2}=\cos\omega_0 T\pm i\sin\omega_0 T$; $|z_п|=1$; $r_0=1$, $|z|>1$.

Положение нулей и полюсов для приведенных выше пяти сигналов показано на рис. 12.11.

Отыскание оригинала, т. е. функции $s_T(t)$, по заданному изображению $\widehat{S}(z)$ производится с помощью обратного z-преобразования, которое получается подстановкой $e^{pT}=z$ в обратное преобразо-

вание Лапласа. Основываясь на выражении (2.127) и подставив в него $S_T(p) = \widehat{S}(z)$, $e^{pkT} = z^k$ и $dp = dz/Tz$, получим

$$s(kT) = T\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=e^{cT}} \widehat{S}(z)\, z^k \frac{dz}{Tz} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=e^{cT}} \widehat{S}(z)\, z^{(k-1)}\, dz. \qquad (12.26)$$

Интегрирование ведется по окружности радиуса $r = e^{cT}$, в которую преобразуется прямая $\sigma = c$ из плоскости $p = \sigma + i\omega$. Постоянная c определяется из условия, что все полюсы подынтегральной функции находятся внутри круга радиуса $r = e^{cT}$. Обход контура — в положительном направлении (против часовой стрелки). Изменению частоты от $-\pi/T$ до π/T соответствует один обход окружности.

В рассмотренных выше примерах функций $\widehat{S}(z)$, обладающих полюсами на окружности единичного радиуса [при $s(kT) = 1$, $\cos\omega_0 kT$ и $\sin\omega_0 kT$], постоянная $c > 0$ может быть сколь угодно малой. Поэтому контур интегрирования можно свести к окружности радиуса $r = 1$ с обходом полюсов *вне круга*, подобно тому, как на плоскости $p = \sigma + i\omega$ интегрирование ведется по оси $i\omega$ с обходом полюсов, лежащих на этой оси, *справа*.

С учетом этого условия выражение (12.26) можно записать в форме

$$s(kT) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1} \widehat{S}(z)\, z^{(k-1)}\, dz. \qquad (12.27)$$

Интегрирование по окружности $r > 1$ из дальнейшего рассмотрения исключается, поскольку положение полюсов функции $\widehat{S}(z)$ вне круга $r = 1$ соответствует неограниченно возрастающим временным последовательностям, не имеющим физического смысла.

Заметим, что при интегрировании по окружности $|z| = 1$ имеет место равенство $z = e^{i\omega T}$, что позволяет с помощью соотношения $dz = iTe^{i\omega T}\, d\omega$ привести выражение (12.27) к виду

$$s(kT) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \widehat{S}(e^{i\omega T})\, e^{i\omega kT}\, d(\omega T). \qquad (12.28)$$

Сопоставим z-преобразование с ДПФ для последовательности $s(kT)$, $k = 0,1, \ldots, N-1$. Для этого воспользуемся выражением (12.20) для значений функции $S(z)$ в точках $z = e^{in\Delta\omega T} = e^{i\frac{2\pi n}{N}}$:

$$\widehat{S}\left(e^{i\frac{2\pi}{N}n}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} s(kT)\, e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (12.29)$$

Правая часть этого выражения полностью совпадает с выражением (12.14), из чего следует, что спектральные коэффициенты $S(n)$, т. е. ДПФ последовательности $\{s(k)\}$, $k = 0,1, \ldots, N-1$, равны значениям z-преобразования этой последовательности в N точках, равномерно распределенных по единичной окружности.

Поскольку при использовании метода z-преобразования имеется в виду однократный обход единичной окружности, то обратное z-преобразование по формуле (12.28) обеспечивает *однозначное* определение элементов конечной последовательности $\{s(k)\}$, $k = 0,1, \ldots, N-1$.

Напомним, что обратное ДПФ по формуле (12.15) приводит к периодической последовательности $\{s(k)\}$ с периодом N даже при конечной исходной последовательности $\{s(k)\}$

12.7. z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДИСКРЕТНЫХ ЦЕПЕЙ

Применим z-преобразование к передаточной функции дискретной цепи. Подстановка $e^{pT} = z$ в выражение (12.11) дает

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = \frac{\widehat{\mathbf{S}}_{\text{вых}}(z)}{\widehat{\mathbf{S}}(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{H} a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{M} b_k z^{-k}}. \tag{12.30}$$

Из этого выражения видно, что передаточная функция дискретного фильтра является дробно-рациональной. По заданному выражению (12.30) легко составить разностное уравнение вида (12.4), определяющее алгоритм преобразования входной импульсной последовательности в выходную. Для этого каждому из слагаемых вида $s[(m-k)T]$ в уравнении (12.4) достаточно приписать коэффициент a_k при степени z^{-k} в числителе, а слагаемым вида $s_{\text{вых}}[(m-k)T]$ — коэффициент b_k при степени z^{-k} в знаменателе выражения (12.30). Соответственно по заданному разностному уравнению можно составить выражение (12.30).

Следует, однако, отметить, что не всякая дробно-рациональная функция может быть реализована в виде передаточной функции фильтра. Пусть, например, передаточная функция задана в виде отношения полиномов по положительным степеням

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = \frac{a_0 z^H + a_1 z^{H-1} + \ldots + a_H}{b_0 z^M - b_1 z^{M-1} - \ldots - b_M}. \tag{12.31}$$

Разделив числитель и знаменатель на $b_0 z^M$, приведем это выражение к виду

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = \frac{\frac{a_0}{b_0} z^{H-M} + \frac{a_1}{b_0} z^{H-M-1} + \ldots + \frac{a_H}{b_0} z^M}{1 - \frac{b_1}{b_0} z^{-1} - \ldots - \frac{b_M}{b_0} z^{-M}}.$$

Если $H > M$, то первое слагаемое в числителе (с положительной степенью z) образует в уравнении (12.4) слагаемое вида $(a_0/b_0)\, s[(m+k)T]$, где $k = H - M > 0$, соответствующее импульсу $s(m+k)$, опережающему во времени входной импульс $s(m)$, что, конечно, невозможно. Отсюда следует, что фильтр осуществим при условии, что *степень знаменателя* в (12.31) *больше или равна степени числителя*.

С учетом этих замечаний запишем передаточную функцию в следующих эквивалентных формах (при $b_0 = 1$):

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_M z^{-H}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \ldots - b_M z^{-M}} =$$

$$= \frac{z^{M-H}\left(a_0 z^H + a_1 z^{H-1} + a_2 z^{H-2} + \ldots + a_M\right)}{z^M - b_1 z^{M-1} - b_2 z^{M-2} - \ldots - b_M}; \tag{12.32}$$

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = a_0 z^{M-H} \frac{(z - z_{01})(z - z_{02}) \ldots (z - z_{0H})}{(z - z_{\text{п}1})(z - z_{\text{п}2}) \ldots (z - z_{\text{п}M})}. \tag{12.33}$$

В выражении (12.32) коэффициенты a_k и b_k следует подставлять с теми же знаками, с которыми они входят в (12.4).

В выражении (12.33) z_{0n} — нули, а $z_{пn}$ — полюсы передаточной функции; z_{0n} и $z_{пn}$ могут быть либо действительными, либо комплексными числами. В первом случае они расположены на действительной оси, а во втором образуют комплексно-сопряженные пары.

Нули могут быть расположены в любой точке плоскости z, полюсы же — только *внутри круга единичного радиуса*. Это условие вытекает из требования устойчивости цепи; при рассмотрении поведения передаточной функции на плоскости p условие устойчивости требует расположения полюсов в левой полуплоскости. Как отмечалось выше, левая полуплоскость p отображается внутрь единичного круга на плоскости z.

Для перехода от функции $\widehat{K}(z)$ к функции $K_T(i\omega)$ следует, как это вытекает из (12.18), приравнять $z = e^{i\omega T}$ ($\sigma = 0$).

Таким образом,

$$K_T(i\omega) = \frac{a_0 + a_1 e^{-i\omega T} + a_2 e^{-i2\omega T} - \ldots + a_H e^{-iH\omega T}}{1 - b_1 e^{-i\omega T} - b_2 e^{-i2\omega T} - \ldots - b_M e^{-iM\omega T}} =$$

$$= a_0 z^{M-H} \frac{(e^{i\omega T} - z_{01})(e^{i\omega T} - z_{02}) \ldots (e^{i\omega T} - z_{0H})}{(e^{i\omega T} - z_{п1})(e^{i\omega T} - z_{п2}) \ldots (e^{i\omega T} - z_{пM})}. \qquad (12.34)$$

Для определения АЧХ цепи в диапазоне $(0, 2\pi/T)$ следует вычислить модуль выражения (12.34) при изменении ωT от 0 до 2π, т. е. при одном обходе окружности единичного радиуса на z-плоскости. При последующих обходах окружности АЧХ периодически повторяется.

Модули разностей $e^{i\omega T} - z_{0k}$ и $e^{i\omega T} - z_{пk}$ являются расстояниями от точки на окружности, соответствующей углу ωT, до нуля z_{0k} или полюса $z_{пk}$. Обозначив эти расстояния через R_{0k} и $R_{пk}$, получаем для АЧХ формулу

$$K_T(\omega) = a_0 \frac{R_{01} R_{02} \ldots R_{0H}}{R_{п1} R_{п2} \ldots R_{пM}}, \qquad (12.35)$$

удобную для графических вычислений.

Вычисления особенно упрощаются при построении АЧХ в логарифмическом масштабе:

$$K_T(\omega)_{дБ} = 20 \left[\lg a_0 + \sum_{k=1}^{H} \lg R_{0k} - \sum_{k=1}^{M} \lg R_{пк} \right]. \qquad (12.36)$$

Если заданы нули и полюсы передаточной функции, то коэффициенты a_k и b_k легко определяются с помощью известных из алгебры соотношений. Значительно более сложной (при $M > 2$) задачей является определение нулей и полюсов по заданным коэффициентам a_k и b_k.

Передаточная функция $\widehat{K}(z)$ и импульсная характеристика $g(kT)$ связаны между собой парой z-преобразований, вытекающих непосредственно из выражений (12.30) и (12.27) при замене в них s (kT) на $g(kT)$ и $\widehat{S}(z)$ на $\widehat{K}(z)$:

$$\widehat{K}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) z^{-k}, \qquad (12.37)$$

$$g(kT) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \widehat{K}(z) z^{(k-1)} dz. \qquad (12.38)$$

На окружности единичного радиуса ($z = e^{i\omega T}$), выражение (12.37) переходит в

$$\widehat{K}(e^{i\omega T}) = K_T(i\omega T) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)\, e^{-i\frac{2\pi}{N}\omega kT} \qquad (12.39)$$

12.8. ПРИМЕРЫ АНАЛИЗА ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

1. ТРАНСВЕРСАЛЬНЫЙ ФИЛЬТР ПЕРВОГО ПОРЯДКА (рис. 12.12)

Разностное уравнение подобного фильтра в соответствии с выражениями (12.1) имеет вид

$$s_{вых}(mT) = a_0 s(mT) - a_1 s[(m-1)T], \qquad (12.40)$$

а импульсная характеристика представляет собой пару импульсов:

$$g_T(t) = g(0)\,\delta(t) + g(T)\,\delta(t-T) =$$
$$= a_0\delta(t) + a_1\,\delta(t-T). \qquad (12.41)$$

Передаточная функция в соответствии с (12.9) принимает вид

$$K_T(p) = a_0 + a_1 e^{-pT}, \qquad (12.42)$$

а при представлении на z-плоскости

$$\widehat{K}(z) = a_0 + a_1 z^{-1} = (a_0 z + a_1)/z. \qquad (12.42')$$

Масштабный коэффициент a_0 можно без ограничения общности приравнять единице.

На z-плоскости функция $\widehat{K}(z)$ обращается в нуль в точке $z_0 = -a_1$ (рис. 12.13, *а*).

Для определения АЧХ фильтра подставим в (12.42) $z^{-1} = e^{-i\omega T} = \cos\omega T - i\sin\omega T$ и найдем модуль функции $\widehat{K}(e^{i\omega T})$:

$$\text{АЧХ} = \left|\widehat{K}(e^{i\omega T})\right| = |1 + a_1 e^{-i\omega T}| = |1 + a_1\cos\omega T - ia_1\sin\omega T| =$$
$$= \sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1\cos\omega T}. \qquad (12.43)$$

Результаты вычислений АЧХ для $a_1 = 0{,}5$ и 1 представлены графически на рис. 12.13, *б*. Аналогичные построения для $a_1 < 0$ представлены на рис. 12.14.

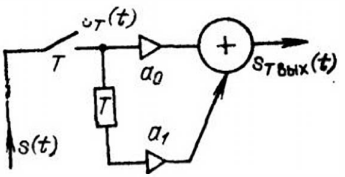


Рис. 12.12. Трансверсальный фильтр первого порядка

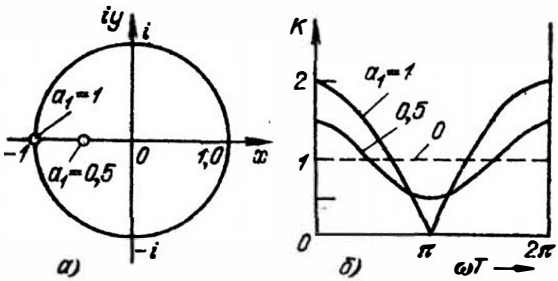


Рис. 12.13. Расположение нулей передаточной функции (*а*) и АЧХ (*б*) фильтра, представленного на рис. 12.12, при положительных коэффициентах a_1

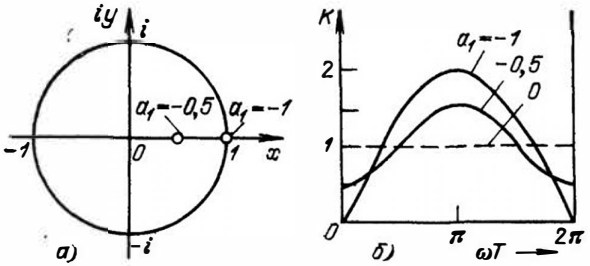


Рис. 12.14. То же, что на рис. 12.13, при отрицательных коэфициентах a_1

Фазо-частотная характеристика фильтра

$$\varphi(\omega T) = -\operatorname{arctg}\frac{a_1 \sin \omega T}{1 + a_1 \cos \omega T}. \qquad (12.44)$$

Вне частотного интервала $0 \leqslant \omega T \leqslant 2\pi$ характеристики должны быть продолжены периодически. Из рис. 12.13, *б* и 12.14, *б* видно, что при $a_1 = 1$ фильтр можно использовать для подавления колебаний с частотами, близкими к $\omega T = \pi$, а при $a_1 = -1$ — близкими к $\omega T = 0$ и 2π.

Подобные фильтры часто называют гребенчатыми режекторными фильтрами.

Заметим, что при $a_1 = -1$ фазо-частотная характеристика линейна:

$$\varphi(\omega T) = \pi/2 - \omega T/2, \quad 0 \leqslant \omega T \leqslant 2\pi. \qquad (12.44')$$

2. РЕКУРСИВНЫЙ ФИЛЬТР ПЕРВОГО ПОРЯДКА (рис. 12.15)

Разностное уравнение в данном случае имеет вид

$$s_{вых}(mT) = s(mT) + b_1 s_{вых}[(m-1)T], \qquad (12.45)$$

а импульсная характеристика

$$g_T(t) = \delta(t) + b_1 \delta(t-T) + b_1^2 \delta(t-2T) + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_1^k \delta(t - kT), \quad g(kT) = b_1^k. \qquad (12.46)$$

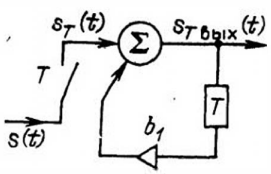
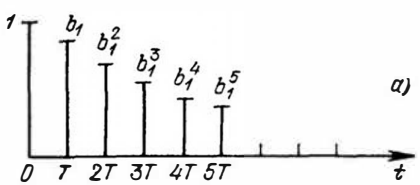


Рис. 12.15. Рекурсивный фильтр первого порядка



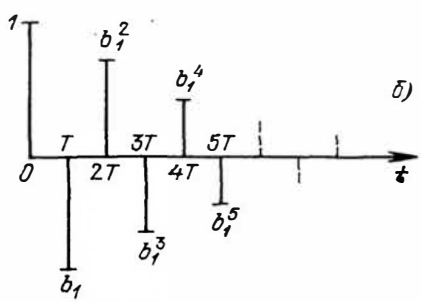


Рис. 12.16. Импульсная характеристика рекурсивного фильтра первого порядка при положительном (*а*) и отрицательном (*б*) коэффициентах b_1

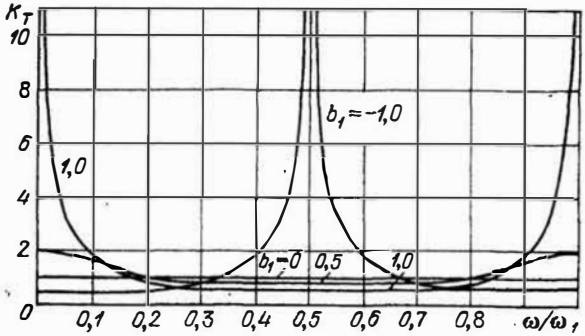


Рис. 12.17. Амплитудно-частотные характеристики рекурсивного фильтра (рис. 12.13)

Это выражение получается последовательным обходом кольца обратной связи.

Импульсная характеристика при $b_1 > 0$ показана на рис. 12.16, *а*, при $b_1 < 0$ — на рис. 12.16, *б*.

При любом знаке b_1 для устойчивости цепи должно выполняться условие $|b_1| < 1$ [см. пояснения к (12.33)].

Передаточная функция определяется по формуле (12.30):

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = \frac{1}{1 - b_1 z^{-1}} = \frac{z}{z - b_1}. \qquad (12.47)$$

Эту же функцию можно представить в форме геометрической прогрессии

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = 1 + b_1 z^{-1} + b_1^2 z^{-2} + \ldots, \qquad (12.47')$$

которую можно также получить, применив преобразование Лапласа к выражению (12.46) с последующей подстановкой $e^{-i\omega kT} = z^{-k}$.

На z-плоскости функция $\widehat{\mathbf{K}}(z)$ имеет один полюс в точке $z_{\text{п}} = b_1$.

Амплитудно-частотная характеристика рассматриваемого фильтра

$$\text{АЧХ} = \left|\widehat{\mathbf{K}}(e^{i\omega T})\right| = \left|\frac{1}{1 - b_1 e^{-i\omega T}}\right| = \frac{1}{|1 - b_1(\cos\omega T - i\sin\omega T)|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + b_1^2 - 2b_1\cos\omega T}} \qquad (12.48)$$

существенно зависит от знака весового коэффициента b_1. Форма АЧХ при нескольких значениях $|b_1|$ показана на рис. 12.17. При $b_1 > 0$ получается гребенчатый фильтр, выделяющий частоты $\omega T = 0, 2\pi/T, 4\pi/T, \ldots$, а при $b_1 < 0$ — частоты $\omega T = \pi, 3\pi, 5\pi$ и т.д. С приближением $|b_1|$ к единице полоса прозрачности фильтра уменьшается, а усиление резко возрастает.

Фазо-частотная характеристика рассматриваемого фильтра

$$\varphi(\omega T) = -\operatorname{arctg}\frac{b_1\sin\omega T}{1 - b_1\cos\omega T}. \qquad (12.49)$$

Сопоставим выражение (12.47) с (12.22). Видно, что (12.47) есть z-преобразование экспоненты, отвечающей условию $e^{-\alpha T} = b_1$. Следовательно, выражение (12.46) можно записать в форме

$$g_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha kT}\delta(t - kT) = e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t - kT). \qquad (12.50)$$

Но это выражение есть не что иное, как результат дискретизации экспоненты $e^{-\alpha T}$ с шагом T [см. (2.122)]. Таким образом, приходим к заключению, что

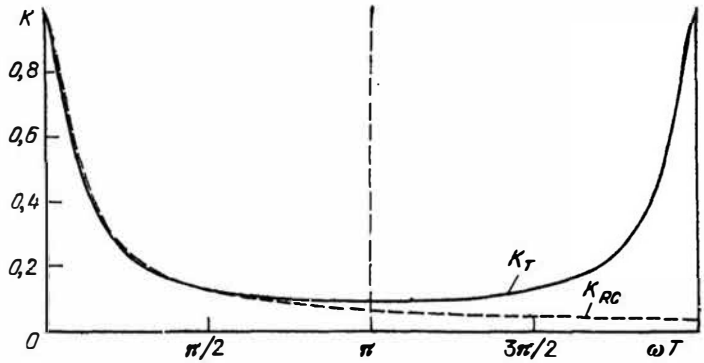


Рис. 12.18. Амплитудно-частотные характеристики цифровой (сплошная линия) и аналоговой (штриховая) RC-цепей при $RC/T=5$

дискретная импульсная характеристика $g_T(t)$ цепи, представленной на рис. 12.15, совпадает с последовательностью отсчетов импульсной характеристики $g(t)$ аналоговой цепи (например RC-цепи), постоянная времени которой $1/\alpha = RC$ отвечает условию

$$e^{-\alpha T} = b_1 = e^{-T/RC} \text{ или } RC = T/\ln(1/b_1).$$

При этом, однако, АЧХ цепей существенно различны. Для дискретной цепи АЧХ определяется формулой (12.48), а для аналоговой RC-цепи — выражением

$$K_{RC}(\omega RC) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(RC/T)^2(\omega T)^2}}.$$

На рис. 12.18 АЧХ дискретной цепи (нормированная по максимальному значению) сравнивается с АЧХ аналоговой RC-цепи при $RC/T = 5$ (чему соответствует $b_1 \approx 0{,}83$). На участке $0 < \omega T < \pi$ обе кривые почти совпадают (при $RC \gg T$), а на участке $\pi < \omega T < 2\pi$ ход АЧХ K_T обусловлен периодической структурой дискретного фильтра.

3. ТРАНСВЕРСАЛЬНЫЙ ФИЛЬТР ВТОРОГО ПОРЯДКА (рис. 12.19)

Разностное уравнение фильтра [см. (12.1)] имеет вид

$$s_{вых}(mT) = a_0 s(mT) + a_1 s[(m-1)T] + a_2 s[(m-2)T],$$

а импульсная характеристика

$$g_T(t) = a_0\delta(t) + a_1\delta(t-T) + a_2\delta(t-2T).$$

Передаточная функция в соответствии с (12.9)

$$\widehat{K}(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = (a_0 z^2 + a_1 z + a_2)/z^2. \qquad (12.51)$$

Как и в предыдущих примерах, положим $a_0 = 1$. Функция $\widehat{K}(z)$ имеет нули в точках

$$z_{01,02} = -\frac{1}{2}a_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}a_1^2 - a_2}.$$

Двухкратный полюс, расположенный в точке $z_п = 0$, не влияет на поведение передаточной функции на z-плоскости.

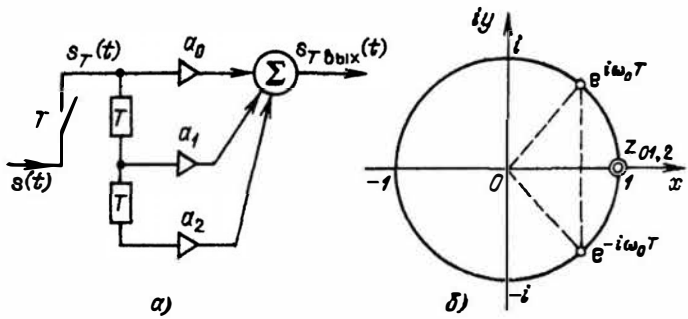


Рис. 12.19. Трансверсальный фильтр второго порядка (*а*) и положение нулей на z-плоскости (*б*)

Особый интерес представляет случай $a_2 = 1$ и $|a_1| < 2$, когда

$$z_{01,\,02} = -\frac{a_1}{2} \sqrt{\frac{1}{4}a_1^2 - 1} = -\frac{a_1}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{4}}.$$

Модуль этого выражения равен единице, так что комплексно-сопряженные нули z_{01} и z_{02} лежат на окружности единичного радиуса (рис. 12.19, *б*).

Амплитудно-частотная характеристика подобного фильтра легко определяется из выражения (12.51) при подстановке $a_0 = a_2 = 1$ и $z^{-1} = e^{-i\omega T}$:

$$\left|\widehat{K}(e^{i\omega T})\right| = |1 + a_1 e^{-i\omega T} + e^{-i2\omega T}| \qquad (12.52)$$

Домножив правую часть этого выражения на $|e^{i\omega T}| = 1$, получим

$$АЧХ = |e^{i\omega T} + a_1 + e^{-i\omega T}| = |2\cos\omega T + a_1|. \qquad (12.52')$$

Изменением коэффициента a_1 можно перемещать нули z_{01} и z_{02} по окружности единичного радиуса, что равносильно перемещению нулей на оси частот.

В частности, при $a_1 = -2$ получается двухкратный нуль в точке $z = 1$. При этом АЧХ принимает следующий вид:

$$АЧХ = 2|\cos\omega T - 1| = 4\sin^2(\omega T/2). \qquad (12.53)$$

График этой функции, представленный на рис. 12.20 сплошной линией, соответствует широко распространенному в практике режекторному фильтру второго порядка с бесконечно большим затуханием на частоте $\omega T = 0$ ($e^{i\omega T} = 1$).

При $a_1 = -\sqrt{2}$ нули $z = (1/\sqrt{2}) \times (1 \pm i) = e^{\pm i\omega_0 T}$, $\omega_0 T = 45°$ (см. рис. 12.19, *б*). Соответствующая АЧХ изображена на рис. 12.20 (штриховая линия).

Сопоставим выражение (12.52) в частном случае $a_1 = -2$

$$\left|\widehat{K}(e^{i\omega T})\right| = |1 - 2e^{-i\omega T} + e^{-i2\omega T}|$$

с аналогичным выражением (12.43) при $a_1 = -1$

$$\left|\widehat{K}(e^{i\omega T})\right| = |1 - e^{-i\omega T}|.$$

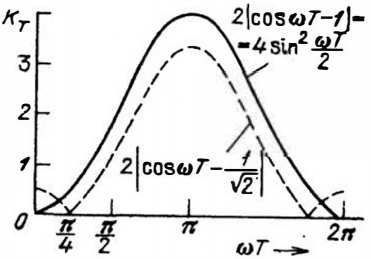


Рис. 12.20. Амплитудно-частотная характеристика фильтра (рис. 12.19, *а*) при $a_0 = 1$, $a_2 = 1$ и $a_1 = -2$

Очевидно, что режекторный фильтр второго порядка можно реализовать каскадным соединением двух фильтров первого порядка.

Очевидно также, что ФЧХ подобного фильтра линейна и может быть получена удвоением правой части формулы (12.44′).

4. РЕКУРСИВНЫЙ ФИЛЬТР ВТОРОГО ПОРЯДКА (РИС. 12.21)

Передаточную функцию запишем сначала в форме

$$\widehat{K}(z) = 1/-(1b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}) = z^2/(z^2 - b_1 z - b_2) = z^2/(z - z_{п1})(z - z_{п2}), \quad (12.54)$$

соответствующей случаю $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, когда нули передаточной функции (в данном саучае двухкратный нуль) имеются только в точке $z = 0$, т. е. в центре окружности единичного радиуса.

Корни уравнения $z^2 - b_1 z - b_2 = 0$ (полюсы)

$$z_{п1,2} = b_1/2 \pm \sqrt{b_1^2/4 + b_2}. \quad (12.55)$$

При $b_2 < 0$ и, кроме того, $|b_2| > b_1^2/4$ полюсы $z_{п1}$ и $z_{п2}$ — комплексно-сопряженные числа:

$$z_{п1} = b_1/2 + i\sqrt{|b_2| - b_1^2/4},\ z_{п2} = z_{п1}^*.$$

В этом случае

$$(z - z_{п1})(z - z_{п2}) = z^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z_{п1,2})\,z + |z_{01,2}|^2,$$

откуда вытекают следующие соотношения между коэффициентами полинома в (12.54) и полюсами:

$$b_1 = 2\,\mathrm{Re}\,(z_{п1,2}),\ b_2 = -|z_{п1,2}|^2.$$

Представив $z_{п1,2}$ в форме

$$z_{п1,2} = |z_{п1,2}|\,e^{\pm i\omega_п T} = re^{\pm i\varphi_п}, \quad (12.56)$$

где $r = |z_{п1,2}|$ — расстояние полюса от начала координат, а $\varphi_п = \omega_п T$ — азимут полюса (рис. 12.22), получим

$$b_1 = 2r\cos\omega_п T,\ b_2 = -r^2. \quad (12.57)$$

Для определения АЧХ рассматриваемой цепи подставим в (12.54) $z = e^{i\omega T}$ и возьмем модуль

$$\left|\widehat{K}(e^{i\omega T})\right| = K_T(\omega) = 1/\left|(e^{i\omega T} - re^{i\omega_п T})(e^{i\omega T} - re^{-i\omega_п T})\right|. \quad (12.58)$$

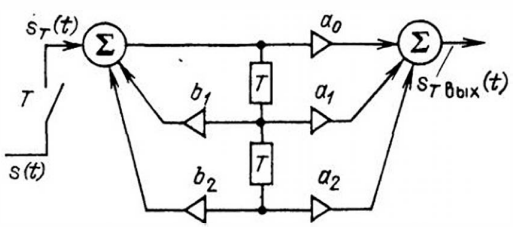


Рис. 12.21. Рекурсивный цифровой фильтр второго порядка

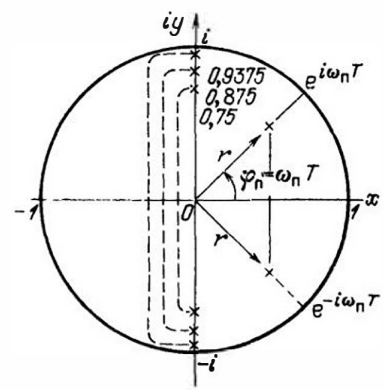


Рис. 12.22. Положение полюсов цифрового фильтра на z-плоскости

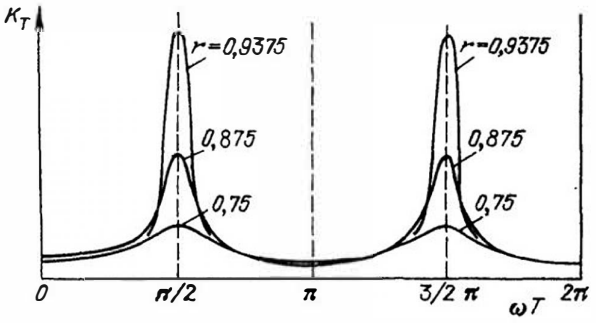


Рис. 12.23. Амплитудно-частотные характеристики рекурсивного фильтра второго порядка (рис. 12.21) при $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$

При заданном положении полюсов (т. е. при заданных r и $\omega_п T$) АЧХ удобно строить по формуле (12.38), измеряя $R_{п1}$ и $R_{п2}$ по чертежу. В данном случае для упрощения вычислений используем формулу (12.58) для частного случая $\omega_п T = 90°$. При этом выражение (12.58) легко приводится к виду

$$K_T(\omega) = 1/\sqrt{1 + 2r^2 \cos 2\omega T + r^4}. \qquad (12.59)$$

Графики функции $K_T(\omega)$ для $r = 0{,}75$; 0,875 и 0,9375 представлены на рис. 12.23. С приближением r к единице рассматриваемая цепь приближается к резонатору с весьма высокой добротностью. При этом, однако, возникает опасность потери устойчивости.

Рассмотрим передаточную функцию второго порядка более общего вида, соответствующую схеме на рис. 12.21:

$$\widehat{K}(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = a_0 \frac{(z - z_{01})(z - z_{02})}{(z - z_{п1})(z - z_{п2})} = \alpha_T(z)\,\beta_T(z). \qquad (12.60)$$

Как указывалось в §12.5 [см. формулу (12.12) и пояснение к ней], фильтр с передаточной функцией (12.60) можно трактовать как каскадное соединение нерекурсивного фильтра [с передаточной функцией $\alpha_T(z)$] и рекурсивного [с передаточной функцией $\beta_T(z)$]. Такое сочетание можно использовать, в частности, в режекторном фильтре, рассмотренном в п.1 и дополненном обратными связями для выравнивания АЧХ в полосе прозрачности фильтра.

На рис. 12.24 показаны график функции $|\alpha_T(\omega T)|$, перенесенный с рис. 12.20 (при $a_0 = a_2 = 1$, $a_1 = -2$), график функции $|\beta_T(\omega T)|$ при коэффициентах $b_1 = 0{,}21875$ и $b_2 = 0{,}4375$, а также результирующая АЧХ.

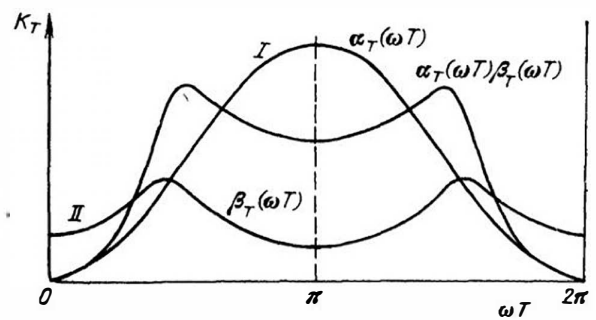


Рис. 12.24. Амплитудно-частотные характеристики рекурсивного звена с прямыми связями (I), звена с обратными связями (II) и цифрового фильтра в целом

12.9. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ВЕСОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Переход от действительных весовых коэффициентов к комплексным придает фильтрам новые свойства, важные для обработки *комплексных* сигналов.

Для выяснения сути дела обратимся к простому рекурсивному фильтру первого порядка с передаточной функцией (12.47) и подставим в это выражение вместо b_1 комплексный коэффициент $\dot{b}_1 = b_x + ib_y = re^{i\omega_п T}$:

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = 1/(1 - \dot{b}_1 z^{-1}) = 1/(1 - z_п z^{-1}) = z/(z - z_п), \qquad (12.61)$$

где $z_п = \dot{b}_1 = re^{i\omega_п T}$ — единственный полюс, который может быть расположен в любой точке внутри единичного круга $r < 1$ (условие устойчивости). Угол $\omega_п T$ может быть любым в интервале от $-\pi$ до π.

Сигнал на входе фильтра зададим в виде последовательности отсчетов $\{\dot{s}(m)\}$, взятых из соответствующего комплексного континуального сигнала $\dot{s}(t) = s_c(t) + is_s(t)$.

Схема замещения рассматриваемого фильтра показана на рис. 12.25,*а*. Для построения развернутой схемы исходим из разностного уравнения (см. § 12.8, п. 2)

$$\dot{s}_{вых}(m) = \dot{s}(m) + \dot{b}_1 \dot{s}_{вых}(m-1).$$

Подставляя $\dot{b}_1 = b_x + ib_y$ и $\dot{s}(m) = s_c(m) + is_s(m)$, приходим к алгоритму

$$s_{c\,вых}(m) + is_{s\,вых}(m) = s_c(m) + b_x s_{c\,вых}(m-1) - b_y s_{s\,вых}(m-1) + \\ + i\,[s_s(m) + b_y s_{c\,вых}(m-1) + b_x s_{s\,вых}(m-1)].$$

Этот алгоритм реализуется схемой, представленной на рис. 12.25, *б*.

Обратимся теперь к выражению (12.61) и подставим $z = e^{i\omega T}$, а также $z_п = re^{i\omega_п T}$. В результате получим

$$\widehat{\mathbf{K}}(e^{i\omega T}) = \frac{1}{1 - re^{i\omega_п T} e^{-i\omega T}} = \frac{1}{1 - re^{-i(\omega - \omega_п)T}},$$

откуда следует простое выражение для АЧХ фильтра

$$\left|\widehat{\mathbf{K}}(e^{i\omega T})\right| = 1/\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \omega_п)T}$$

[ср. с (12.48)].

Максимальное значение АЧХ $= 1/(1 - r)$ соответствует частоте $\omega = \omega_п$. Существенно, что при заданном r значение максимума АЧХ не зависит от резонансной частоты $\omega_п T$.

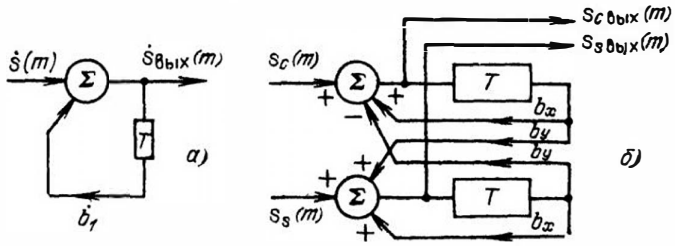


Рис. 12.25. Рекурсивная схема первого порядка с комплексным весовым коэффициентом b_1

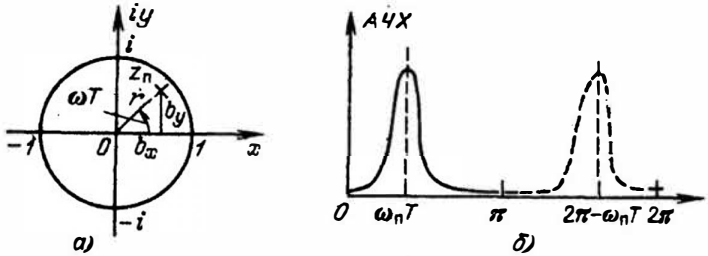


Рис. 12.26. Положение полюса функции $K(e^{i\omega T})$ и АЧХ фильтра, показанного на рис. 12.25

График АЧХ при показанном на рис. 12.26, *а* положении полюса $z_п$, соответствующем $\omega > 0$, представлен на рис. 12.26, *б*. При изменении знака перед b_x, т. е. при положении полюса ниже оси x, полоса прозрачности фильтра будет в диапазоне $\omega < 0$ или, что то же самое, в диапазоне $\pi \leqslant \omega T \leqslant 2\pi$ (на рис. 12.26, *б* АЧХ обозначена штриховой линией).

Итак, однополюсный резонатор, т. е. рекурсивный фильтр первого порядка с комплексным коэффициентом $\dot{b}_1$, позволяет осуществить фильтр, реагирующий либо только на положительную, либо только на отрицательную частоту. С понятием колебания *отрицательной частоты* как с физическим процессом мы встретимся в § 13.9 при рассмотрении квадратурной обработки сигнала.

Обратимся к рассмотрению цифрового *трансверсального* фильтра первого порядка с комплексным весовым коэффициентом.

В п. 1 § 12.8 было показано, что трансверсальный фильтр первого порядка (см. рис. 12.12) с действительным весовым коэффициентом a_1 позволяет осуществить режекцию (подавление) колебаний на частотах $\omega T = 0$ и $\omega T = 2\pi$ (при $a_1 = -1$, см. рис. 12.14, *б*) или на частоте $\omega T = \pi$ (при $a_1 = 1$, см. рис. 12.13, *б*).

Найдем характеристики аналогичного фильтра при комплексном весовом коэффициенте $\dot{a}_1 = a_x + ia_y$ (рис. 12.27, *а*).

Передаточная функция фильтра

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = 1 + \dot{a}_1 z^{-1} \tag{12.62}$$

имеет нуль в точке $z_0 = -\dot{a}_1$, а разностное уравнение

$$\dot{s}_{вых}(m) = \dot{s}(m) + \dot{a}_1 \dot{s}(m-1).$$

Подставив $\dot{s}(m) = s_c(m) + is_s(m)$ и $\dot{a}_1 = a_x + ia_y$, придем к следующему результату:

$$s_{c\,вых}(m) + is_{s\,вых}(m) = s_c(m) + a_x s_c(m-1) - a_y s_s(m-1) + i[s_s(m) +$$

$$+ a_x s_s(m-1) + a_y s_c(m-1)].$$

Соответствующая этому алгоритму развернутая схема представлена на рис. 12.27, *б*.

Для определения АЧХ фильтра подставим в (12.62) $z = e^{i\omega T}$ и $\dot{a}_1 = a_x + ia_y = -e^{i\omega_0 T}$, где ω_0 — частота, на которой должно обеспечиваться подавление колебания. Иными словами, нуль передаточной функции z_0 должен находиться на окружности $|z| = 1$.

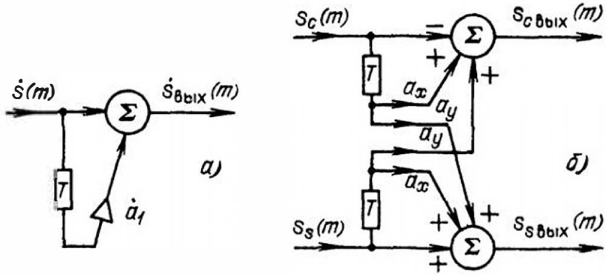


Рис. 12.27. Трансверсальный фильтр первого порядка с комплексным коэффициентом $\dot{a}_1$

Тогда

$$\widehat{\mathbf{K}}(e^{i\omega T}) = 1 - e^{i\omega_0 T} e^{-i\omega T} = 1 - \cos(\omega - \omega_0) T + i \sin(\omega - \omega_0) T$$

и АЧХ фильтра

$$\left|\widehat{\mathbf{K}}(e^{i\omega T})\right| = 2 \left| \sin \frac{(\omega - \omega_0) T}{2} \right|.$$

Задавая весовые коэффициенты соотношениями $a_x = -\cos \omega_0 T$, $a_y = -\sin \omega_0 T$, можно перемещать нуль АЧХ во всем частотном диапазоне от 0 до 2π.

12.10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АНАЛОГ—ЦИФРА. ШУМЫ КВАНТОВАНИЯ

В предыдущих параграфах при изучении дискретных фильтров вопрос о неизбежной погрешности преобразования входного сигнала из аналоговой формы в цифровую не рассматривался. Погрешность возникает при квантовании сигнала на конечное, ограниченное число уровней. Чтобы выявить характер этой погрешности, вернемся к структурной схеме на рис. 12.1 и выделим из нее два устройства: АЦП и ЦАП.

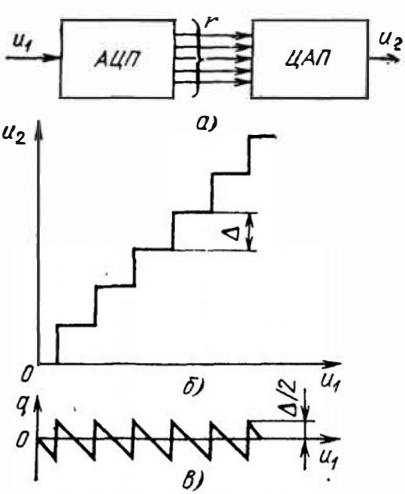


Рис. 12.28. Преобразование А—Ц и Ц—А (а), характеристика квантования (б) и ошибка квантования (в)

Рассмотрим сначала совместную работу этих устройств без учета цифрового фильтра при подаче на вход АЦП постоянного напряжения различного уровня u_1 (рис. 12.28, *а*). Основным параметром АЦП является число разрядов, используемых для кодирования входного напряжения. При двоичном коде число разрядов определяется числом двоичных элементов (например, триггеров), каждый из которых может находиться в одном из двух состояний: с нулевым или ненулевым напряжением на выходе. Одному из этих состояний условно приписывается нуль, а другому — единица. При числе двоичных элементов r на выходе АЦП получается комбинация (кодовое число) из r символов, каждый

из которых может принимать одно из двух значений (нуль или единица).

Как указывалось в § 12.1, число возможных различных комбинаций $L = 2^r$ и определяет число дискретных уровней, на которое может быть разбит диапазон изменения входного напряжения.

В ЦАП осуществляется обратное преобразование. Каждой комбинации нулей и единиц, поступающих на вход ЦАП, соответствует определенный дискретный уровень выходного напряжения. В результате при равномерном шаге квантования Δ зависимость u_2 от u_1 приобретает вид ломаной линии, показанной на рис. 12.28, *б*.

Устройство, представленное на рис. 12.28, *а* и обладающее подобной характеристикой, должно рассматриваться как нелинейное, а разность $u_2 - u_1 = q$ — как ошибка, погрешность квантования. Видно, что наибольшая ошибка, по абсолютной величине не превышающая $\Delta/2$, с возрастанием u_1 остается неизменной (рис. 12.28, *в*).

Продолжим это рассмотрение для гармонического входного колебания $s(t)$ (рис. 12.29, *а*). Колебание $s_{вых}(t)$ приобретает ступенчатую форму, отличающуюся от входного колебания $s(t)$ (на рис. 12.29, *б*, показанного тонкой линией), а ошибка квантования принимает вид функции

$$q(t) = s_{вых}(t) - s(t),$$

представленной на рис. 12.29, *в*.

При изменении в широких пределах амплитуды и частоты гармонического колебания $s(t)$ изменяется только частота следования зубцов: форма их остается близкой к треугольной при неизменной амплитуде $\Delta/2$. Функцию $q(t)$ можно назвать помехой или ш у м о м к в а н т о в а н и я. Нетрудно вычислить среднюю мощность шума квантования. При допущении треугольной формы зубцов (рис. 12.29, *в*) с амплитудой $\Delta/2$ средняя за длительность одного зубца мощность равна $(1/3)(\Delta/2)^2 = \Delta^2/12$. Так как эта величина не

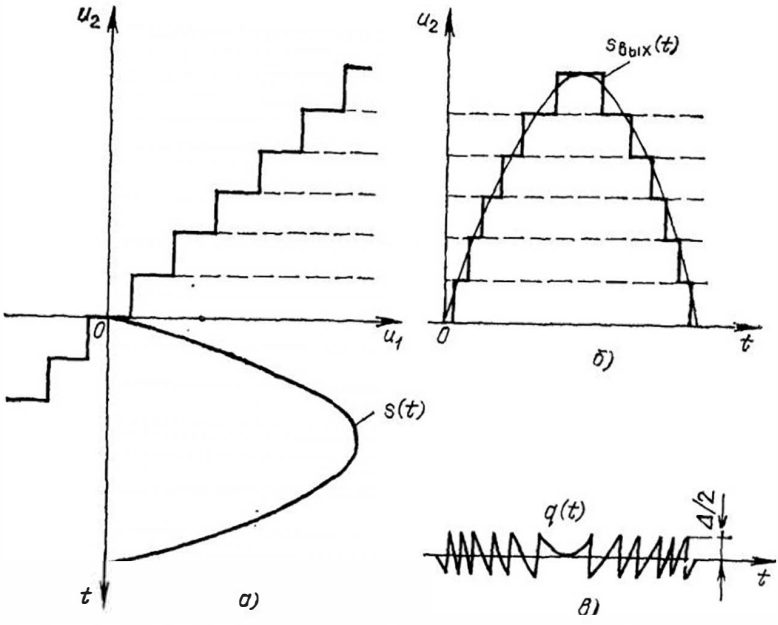


Рис. 12.29. Сигнал на входе (*а*) и выходе (*б*) квантующего устройства; помеха квантования (*в*)

зависит от длительности зубца, можно считать, что средняя мощность шума квантования

$$P_q = \Delta^2/12. \tag{12.63}$$

Этот результат, выведенный для гармонического сигнала, можно распространить и на любой другой сигнал, в том числе и случайный. Отличие лишь в том, что функция $q(t)$ будет случайным процессом из-за случайной длительности зубцов.

Нетрудно вычислить и отношение сигнал -помеха при квантовании. При высоте ступени Δ и общем числе ступеней, укладывающихся в пределах характеристики АЦП, равном L, амплитуда гармонического сигнала не должна превышать величины $L\Delta/2$, а средняя мощность сигнала — величины $1/2\times$ $\times (L\Delta/2)^2$ (во избежание ограничения сигнала). Следовательно, отношение сигнал-помеха при квантовании гармонического колебания

$$P_s/P_q \leqslant 3L^2/2.$$

Так как число уровней L связано с числом двоичных разрядов r соотношением $L = 2^r$, то последнее выражение можно представить в форме

$$P_s/P_q = (3/2)\,2^{2r}. \tag{12.64}$$

Это соотношение можно рассматривать как частный случай общего выражения

$$P_s/P_q = 3\cdot 2^{2r}/K_{\text{пф}}^2, \tag{12.65}$$

где $K_{\text{пф}}$ — пик фактор сигнала, т. е. отношение максимального значения к среднеквадратическому.

При гармоническом колебании $K_{\text{пф}} = \sqrt{2}$, что и приводит к выражению (12.64); при случайном сигнале с нормальным законом распределения $K_{\text{пф}}$ может быть принят 2,5—3 (см. § 4.2, п.3); В этом случае $P_s/P_q \approx 2^{2r}/3$, а среднеквадратическое напряжение сигнала не должно превышать $\sim L\Delta/6$. Физический смысл выражения (12.65) очевиден: с увеличением числа разрядов r очень быстро возрастает число дискретных уровней, приходящихся на заданный диапазон изменения $s(t)$, и, следовательно, снижается перепад Δ двух соседних уровней.

При грубой оценке превышения сигнала над шумом квантования исходят из соотношения $P_s/P_q \approx 2^{2r}$ или, в децибелах,

$$D_{\text{дБ}} = (P_s/P_q)_{\text{дБ}} = 10\lg 2^{2r} = 10\cdot 2r\lg 2 \approx 6r. \tag{12.66}$$

В современных АЦП число разрядов достигает десяти и более. При этом величина $D_{\text{дб}}$, характеризующая динамический дапазон АЦП, равна примерно 60 дБ (6 дБ на один разряд) [1].

Другой важной характеристикой шума квантования является его спектральная характеристика. При гармоническом колебании на входе АЦП помеха квантования является периодической функцией времени.Спектр ее является линейчатым, содержащим только частоты, кратные частоте входного колебания. Из-за зубчатой формы функции $q(t)$ (см. рис. 12.29, *в*) спектр шума богат высшими гармониками.

При входном воздействии типа случайного процесса с дисперсией σ_s^2 и со среднеквадратической шириной спектра $f_{s\,\text{ск}}$ статистические характеристика шума квантования зависят не только от характеристик исходного процесса $s(t)$, но и от соотношения между σ_s и Δ. В частности, при $\sigma_s \gg \Delta$

[1] При пикфакторе $K_{\text{пф}} \approx 3$ [(см. 12.65)] $D_{\text{дБ}}$ уменьшается до 5,5 дБ на один разряд.

ширина $f_{q\,ск}$ спектра шума квантования $W_q(\omega)$ во много раз больше ширины $f_{s\,ск}$ спектра процесса $s(t)$.

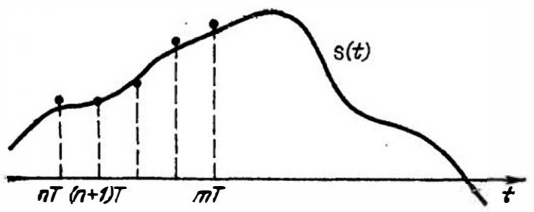


Рис. 12.30. К определению ошибки квантования

Введем в рассмотрение дискретизацию входного сигнала. На рис. 12.30 представлены одна из реализаций случайного сигнала $s(t)$ и совокупность выборок, взятых с шагом T. В АЦП каждая выборка преобразуется в цифровой код, как это было описано в §12.1 и в начале данного параграфа для постоянного напряжения.

Как это очевидно из предыдущих рассуждений, преобразование осуществляется с ошибкой, заключенной в пределах $\pm\,\Delta/2$. Если выборки берутся из случайного сигнала, а изменение функции $s(t)$ за время T превышает Δ или тем более несколько Δ, то ошибки в различные отсчетные моменты времени nT и $(n+1)\,T$ можно считать взаимно независимыми и равновероятными. Дисперсия случайной величины q, равновероятной в интервале $(-\Delta/2,\ \Delta/2)$, равна $(1/3)\,(\Delta/2)^2$ (см. § 4.2, п. 1). Этот результат совпадает с выражением (12.62), полученным усреднением мощности шума квантования по времени. Сделанные выше допущения равносильны утверждению, что дискретная последовательность ошибок $q\,(nT)$ соответствует выборкам из некоррелированного шума, т. е. шума с равномерным спектром. Этот спектр, как отмечалось выше, во много раз шире спектра исходного случайного процесса $s(t)$. В связи с этим шум квантования обычно рассматривают как белый шум, аддитивный по отношению к $s(t)$. Так как квантование осуществляется на входе цифрового фильтра, то шум квантования можно трактовать как собственный шум цифрового фильтра (отнесенный к его входу).

Определим спектр шума квантования. Пусть полная ширина спектра шума квантования в отсутствие дискретизации равна $f_{q\,ск}$. При дискретизации шума квантования с шагом $T = 1/f_1$ результирующий спектр является суммой парциальных спектров, сдвинутых один относительно другого на $\omega_1 = 2\pi/T$ (см. § 2.17, рис. 2.35). Особенностью рассматриваемого случая является то, что $f_{q\,ск} \gg 1/T = f_1$, так что имеет место многократное перекрытие спектров.

В пределах частотного интервала $(0,\ f_1)$ мощность каждого отдельного спектра $(\Delta^2/12)\ f_1/f_{q\,ск}$. Но число перекрывающих спектров равно $f_{q\,ск}/f_1$. Результирующая мощность шума квантования в полосе $(0, f_1)$ будет $\Delta^2/12$. Можно поэтому считать, что в указанном частотном интервале спектр равномерен (белый шум) и равен

$$W_q(\omega) = (\Delta^2/12)\,(1/f_1),\ 0 < f < f_1. \tag{12.67}$$

При АЧХ цифрового фильтра $K_T(\omega)$ спектр шума квантования на выходе фильтра

$$W_{q\,вых}(\omega) = (1/12)\,(\Delta^2/f_1)\,K_T^2(\omega),\ -\omega_1/2 < \omega < \omega_1/2, \tag{12.68}$$

а средняя мощность (дисперсия)

$$\sigma^2_{q\,вых} = \frac{1}{12}\,\frac{\Delta^2}{f_1}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega_1/2}^{\omega_1/2} K_T^2(\omega)\,d\omega. \tag{12.69}$$

Для иллюстрации количественной стороны вопроса определим основные параметры шума квантования на выходе режекторного фильтра второго порядка, рассмотренного в п. 3 § 12.8, при следующих данных: число разря-

дов квантования $r = 8$; раствор характеристики АЦП 10 В; шаг дискретизации $T = 1/f_1 = 1$ мс; $f_1 = 1000$ Гц.

Шаг квантования Δ найдем, разделив 10 В на число уровней:

$$L = 2^r = 2^8 = 256, \quad \Delta = 10/256 \approx 0{,}04 \text{ В} = 40 \text{ мВ}.$$

Дисперсия шума на входе

$$\sigma_q^2 \approx \Delta^2/12 = (4 \cdot 10^{-2})^2/12 \approx 1{,}3 \cdot 10^{-4} \text{ В}^2, \quad \sigma_q \approx 1{,}1 \cdot 10^{-2} \text{ В} = 11 \text{ мВ}.$$

Основываясь на АЧХ $K_T(\omega) = 4 \sin^2(\omega T/2)$ [см. (12.53)], находим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1/2}^{\omega_1/2} K_T^2(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1/2}^{\omega_1/2} 16 \sin^4 \frac{\omega T}{2}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} 16 \cdot 2 \left(\frac{2}{T}\right) \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\, dx = \frac{2 \cdot 3}{T}.$$

Применяя формулу (12.69), получаем

$$\sigma_{q\,\text{вых}}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \frac{1}{f_1} \frac{6}{T} = \frac{\Delta^2}{2}, \quad \sigma_{q\,\text{вых}} = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \approx 26 \text{ мВ}.$$

Итак, уровень собственных шумов квантования на выходе рассматриваемого фильтра равен 26 мВ.

Форма спектра этого шума повторяет форму квадрата АЧХ:

$$W_{q\,\text{вых}}(\omega) \approx \frac{\Delta^2}{12} 16 \sin^4 \frac{\omega T}{2} \approx 2 \cdot 10^{-6} \sin^4 \frac{\omega T}{2} \text{ В}^2/\text{Гц}.$$

В заключение укажем на требования, предъявляемые к АЦП в зависимости от скорости изменения входного сигнала $s(t)$. Длительность выборки τ_0 задается малой, чтобы изменение $s(t)$ за время τ_0 было пренебрежимо мало. Во всяком случае, это изменение должно быть меньше Δ. В современных АЦП τ_0 уменьшают до единиц наносекунд.

В § 12.1 указывалось, что электронный ключ, с помощью которого берутся из сигнала $s(t)$ выборки, имеет RC-цепь для запоминания уровня выборки на время, необходимое для срабатывания АЦП. В быстродействующих АЦП это время составляет десятки наносекунд.

12.11. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЦИФРА—АНАЛОГ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОНТИНУАЛЬНОГО СИГНАЛА

Обратное преобразование сигнала из цифровой в континуальную форму [1] производится с помощью двух устройств: 1) ЦАП; 2) синтезирующего фильтра (см. схему на рис. 12.1).

В ЦАП имеются набор источников фиксированных напряжений, соответствующих каждому из r разрядов, и устройство для синхронного подключения (или отключения) этих напряжений к сумматору в зависимости от поступающих из АЦП символов (имеется в виду схема на рис. 12.28, *а*). Напряжение на выходе ЦАП максимальное, когда со всех элементов поступают единицы. Пусть, например, число разрядов $r = 4$ и, следовательно, число ди-

[1] В ряде применений цифровой фильтрации не требуется обратного перехода от цифрового сигнала к аналоговому. Так, в радиолокационных системах с цифровой обработкой сигнала последний вводится в ЭВМ непосредственно в цифровой форме.

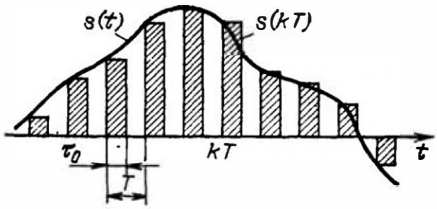


Рис. 12.31. Выборки в виде прямоугольных импульсов

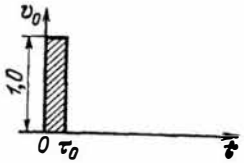


Рис 12.32. Тактовый импульс

скретных уровней $L = 2^4 = 16$, а максимальное напряжение сигнала условно равно 1 В. Тогда цена самого младшего разряда 1/16 В, следующего за ним 1/8 В, затем 1/4 и 1/2 В. При кодовом слове, поступающем от АЦП в виде 0,1111, напряжение на выходе ЦАП будет $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 15/16$ В (максимальное значение), а при слове 0,0001 1/16 (минимальное значение). Кодовому слову 0,0010 соответствует напряжение 2/16 В, слову 0,1000 1/2 В и т. д.

Указанные напряжения поддерживаются на выходе ЦАП в течение времени $\tau_0 < T$, а иногда вплоть до поступления новой кодовой группы ($\tau_0 = T$). В результате при фильтрации сигнала $s(t)$ на выходе ЦАП появляется напряжение в виде импульсной последовательности, представленной на рис. 12.31 (при $\tau_0 < T$). Амплитуды прямоугольных импульсов равны соответствующим отсчетам, поступающим (в закодированном виде) от АЦП.

Спектр такой последовательности имеет сложную структуру. Фильтр на выходе ЦАП с полосой пропускания, меньшей или равной частоте $f_1/2$ (где $f_1 = 1/T$ — частота повторения импульсов), выделяет основной частотный интервал, в котором содержится вся информация о сигнале $s(t)$ (спектр которого должен быть не шире $f_m = f_1/2$). На этом и заканчивается процедура восстановления континуальной формы профильтрованного сигнала. Следует, однако, иметь в виду, что спектр последовательности «толстых» импульсов, показанных на рис. 12.31, может существенно отличаться от спектра, найденного в § 2.17 для тонких импульсов (теоретически δ-функция).

В данном случае импульсную последовательность (см. рис. 12.28) нельзя трактовать просто как произведение континуального сигнала $s(t)$ на тактовую последовательность прямоугольных импульсов. Каждый из прямоугольных импульсов с амплитудой $s(kT)$ можно представить в виде свертки прямоугольного импульса $\upsilon_0(t)$, показанного на рис. 12.32, с функцией $s(kT)\,\delta(t - kT)$.

Действительно,

$$s(kT) \int_{-\infty}^{\infty} \upsilon_0(t-\tau)\,\delta(\tau - kT)\,d\tau = s(kT)\,\upsilon_0(t-kT) =$$

$$= \begin{cases} s(kT) & \text{при } kT < t < kT + \tau_0, \\ 0 & \text{при } t < kT \text{ и } t > kT + \tau_0. \end{cases}$$

Таким образом, всю последовательность импульсов на выходе ЦАП (в отсутствие ЦФ для схемы, показанной на рис. 12.28, *а*) можно записать в виде

$$s_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT) \int_{-\infty}^{\infty} \upsilon_0(t-\tau)\,\delta(\tau - kT)\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \upsilon_0(t-\tau) \left[\sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\,\delta(\tau - kT) \right] d\tau. \qquad (12.70)$$

Получилась свертка двух функций: $v_0(t)$ и $s_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\delta(t - kT)$. Первой соответствует спектральная плотность [см. (2.69) и рис. 2.15)]

$$V_0(\omega) = \tau_0 \frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{(\omega\tau_0/2)} e^{-i\omega\tau_0/2},$$

а функции $\sum_{k=0}^{\infty} s(kT)\,\delta(\tau - kT)$ — спектральная плотность [см. (2.123)]

$$S_T(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right).$$

Следовательно, временной свертке (12.170) соответствует спектральная плотность, равная произведению [см. (2.64)]

$$S'_T(\omega) = \left[\tau_0 \frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{(\omega\tau_0/2)} e^{-i\omega\tau_0/2}\right]\left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)\right] =$$

$$= \frac{\tau_0}{T} \frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{(\omega\tau_0/2)} e^{-i\omega\tau_0/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right). \qquad (12.71)$$

Множитель

$$K_{\text{цап}}\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right) = \frac{\tau_0}{T} \frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{(\omega\tau_0/2)} e^{-i\frac{\omega\tau_0}{2}} \qquad (12.72)$$

можно рассматривать как передаточную функцию преобразователя цифра-аналог. Таким образом, АЧХ преобразователя.

$$K_{\text{цап}}(\omega\tau_0/2) = \frac{\tau_0}{T}\left|\frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{\omega\tau_0/2}\right|. \qquad (12.72')$$

Графики $K_{\text{цап}}$ для значений $\tau_0 < T$ и $\tau_0 = T$ показаны на рис. 12.33 штрихпунктиром, а графики $S'_T(\omega)$ — сплошной линией. Штриховыми линиями показаны истинные спектры сигнала $s(t)$, которые получились бы при бесконечно тонких выборках.

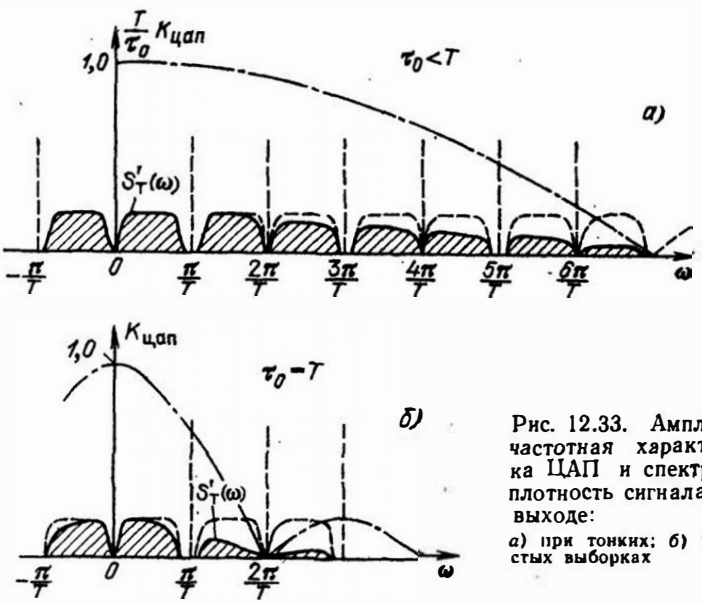


Рис. 12.33. Амплитудно-частотная характеристика ЦАП и спектральная плотность сигнала на его выходе:

а) при тонких; *б)* при толстых выборках

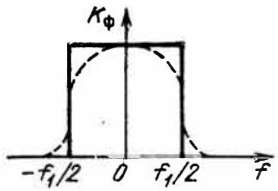


Рис. 12.34. Амплитудно-частотная характеристика синтезирующего фильтра: идеального (сплошная линия) и реального (штриховая линия)

Видно, что утолщение импульсов приводит к деформации спектра обрабатываемого сигнала, причем эта деформация выражена сильнее для высших частот сигнала.

Остановимся в заключение на требованиях к АЧХ синтезирующего фильтра $K_\Phi(\omega)$. Идеальная характеристика показана на рис. 12.34 сплошной линией. Если спектр полезного сигнала значительно уже частотного интервала ($-f_1/2$, $f_1/2$), то требования к крутизне скатов характеристики могут быть ослаблены (см. штриховую линию на рис. 12.34).

12.12. БЫСТРОДЕЙСТВИЕ АРИФМЕТИЧЕСКОГО УСТРОЙСТВА ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

Структурная схема любого цифрового фильтра содержит элементы памяти T, сумматоры и перемножители. Совокупность этих элементов образует арифметическое устройство фильтра. (Коммутирующие устройства, необходимые для синхронной записи и считывания двоичных символов в элементах памяти, и другие вспомогательные цепи здесь не рассматриваются.)

Элементы памяти T представляют собой набор двоичных элементов, число которых равно числу разрядов r.

Перемножители, реализующие весовые коэффициенты a_0, a_1, a_2, ..., и b_1, b_2,..., работают по принципу поразрядного перемножения всех разрядов входного числа на каждый из разрядов числа, представляющего весовой коэффициент, и последующего суммирования частных произведений. Число двоичных разрядов $r_{a,b}$, используемых для представления весового коэффициента, зависит от требуемой точности вычислений. В больших ЭВМ $r_{a,b}$ достигает 32 и более разрядов, в цифровых фильтрах можно ограничиться 4—16 разрядами. Если входной сигнал $s(t)$ представлен r разрядами, то для полного сохранения содержащейся в нем информации произведение $s(t)\,a_k$ требует $r + r_a$ разрядов, а произведение $s(t)\,b_k$ соответственно $r + r_b$ разрядов. На это число разрядов должны быть рассчитаны все последующие элементы цифрового тракта. Для уменьшения объема аппаратуры обычно идут на округление произведения путем отсекания младших разрядов. Это приводит к ошибке, которую называют ш у м о м о к р у г л е н и я.

Статистические свойства шума округления в основном совпадают со свойствами шума квантования; дисперсия шума округления приравнивается величине $\Delta_{a,b}^2/12$, где $\Delta_{a,b}$ — перепад уровней, соответствующий отбрасываемому разряду произведения.

Одной из важнейших характеристик арифметического устройства цифрового фильтра является его быстродействие, определяемое числом операций, которые необходимо произвести за время T, и длительностью одной операции. Последняя не может быть меньше времени срабатывания двоичных элементов (триггеров). Быстрое и непрерывное развитие микроэлектронной техники с каждым годом сокращает инерционность электронных приборов, используемых в вычислительной технике. В современных приборах время срабатывания составляет единицы наносекунд.

Определим число операций, которое необходимо совершить за время T при обработке сигнала по заданному алгоритму. В качестве исходного ал-

горитма возьмем свертку, определяемую выражением (12.3). Из этого выражения видно, что для определения одной n-й выборки выходного сигнала требуется совершить n операций перемножения и столько же операций сложения. При числе выборок в обрабатываемой реализации сигнала $N \gg 1$ общее число операций умножения $(N/2)\, N = N^2/2$ (столько же операций сложения).

Как уже отмечалось выше, операция умножения осуществляется многократным сложением, причем число элементарных сложений определяется числом разрядов сомножителей. При длительности одной операции сложения τ_1 и числе разрядов r общая длительность обработки N выборок $T_{\text{обр}} = (N^2/2)\,(r+1)\tau_1$. В тех случаях, когда требуется обработка «в реальном времени», т. е. по ходу поступления сигнала $s(t)$, $T_{\text{обр}}$ не должно превышать длительности обрабатываемой реализации $T_c = NT$. Отсюда получается условие

$$\frac{N^2}{2}(r+1)\tau_1 \leqslant T_c = NT \quad \text{или} \quad T \geqslant \frac{N}{2}(r+1)\tau_1.$$

Подставляя в это неравенство $T = 1/2\, f_m$, приходим к следующей грубой оценке наивысшей допустимой частоты сигнала:

$$f_m \leqslant 1/N(r+1)\tau_1.$$

В частности, при $N = 1000$, $r = 10$ и $\tau_1 = 1$ нс

$$f_m \leqslant 1/10^3 \cdot 11 \cdot 10^{-9} \approx 10^6 \text{ Гц}.$$

При обработке более коротких сигналов, например с базой $N = 50$, частота может быть доведена до 2 МГц.

Как видим, применение цифровых фильтров, работающих в режиме последовательного анализа, ограничивается в настоящее время обработкой относительно низкочастотных сигналов.

В § 12.13 будет рассмотрен один из возможных способов повышения быстродействия цифровой обработки.

При переходе к параллельному анализу с помощью нескольких каналов ценой усложнения и удорожания аппаратуры быстродействие можно существенно повысить. В принципе быстродействие можно довести до величины, близкой к τ_1, т. е. $f_m \leqslant 1/\tau_1$

Главной особенностью цифрового фильтра является то, что его характеристики — амплитудно- и фазо-частотная — определяются всего лишь весовыми коэффициентами в прямых и обратных связях и шагом дискретизации T. Это позволяет строить фильтры с характеристиками, реализация которых с помощью обычных фильтров на индуктивностях и емкостях весьма затруднительна или даже вовсе невозможна.

Применением кварцованных источников колебания тактовой частоты можно обеспечить очень высокую стабильность частотных характеристик. Цифровые фильтры надежны в работе, не требуют подстройки и нечувствительны к температурным и иным условиям эксплуатации. Простота осуществления устройств памяти при использовании цифровых сигналов делает цифровые фильтры незаменимыми при обработке, требующей задержку сигнала во времени. Наконец, следует отметить удобство сопряжения цифровых фильтров с ЭВМ.

Благодаря всем этим преимуществам цифровые фильтры, несмотря на сложность схемы и необходимость синхронизации управления электронными ключами, находят все большее распространение.

12.13. АЛГОРИТМ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ВО ВРЕМЕННО́Й И ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТЯХ

Рассмотренные в предыдущих параграфах данной главы простейшие трансверсальные и рекурсивные цифровые фильтры находят широкое применение при обработке относительно коротких дискретных последовательностей. При сложных сигналах с базой N, достигающей десятков, сотен и даже тысяч, структура фильтра усложняется и возникает проблема сокращения вычислительных затрат.

Как и в аналоговой технике, в зависимости от способа задания фильтра — импульсной характеристикой $\{g(k)\}$ или передаточной функцией $\mathbf{K}_T(i\omega)$ — возможны два подхода: во временно́й, или в частотной области.

Временно́й подход основан на вычислении дискретной свертки

$$s_{\text{вых}}(k) = \sum_{m=0}^{k} s(m-k)\, g(m), \quad k=0, 1, \ldots, N-1, \tag{12.73}$$

где $N = N_s + N_g$, N_s и N_g — числа отсчетов входного сигнала и импульсной характеристики.

Частотный (спектральный) подход основан на вычислении ДПФ

$$\mathbf{S}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n=0, 1, \ldots, N-1, \tag{12.74}$$

с последующим применением ОДПФ

$$s_{\text{вых}}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{S}(n)\, \mathbf{K}_T(in)\, e^{i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k=0, 1, \ldots, N-1. \tag{12.75}$$

Дискретная передаточная функция $\mathbf{K}_T(in)$ определяется выражением (12.39) при подстановке $\omega T = n\Delta\omega T \to n$.

Функциональная схема определения $s_{\text{вых}}(k)$ представлена на рис. 12.35.

Хотя число отсчетов N_s во входной последовательности сигнала на N_g меньше, чем N, используется N-точечное ДПФ, т. е. предусматривается N_g нулевых отсчетов. При этом число спектральных коэффициентов на выходе ДПФ, а следовательно, и временны́х отсчетов на выходе ОДПФ будет $N = N_s + N_g$, как и при использовании алгоритма свертки по выражению (12.73). Тем самым устраняются искажения сигнала из-за перекрытия последовательностей во времени. (Последовательности $\{s_{\text{вых}}(k)\}$ циклически повторяются с периодом $N_s = N_s + N_g$).

Очевидно, что вычисления по алгоритму рис. 12.35 дают результат, эквивалентный вычислению свертки сигнала $\{s(k)\}$ с импульсной характеристикой $\{g(k)\}$ по формуле (12.73).

Первый этап, т. е. вычисление ДПФ, представляет собой спектральный анализ входного сигнала и во многих практических задачах имеет самостоятельное значение. При больших значениях N вычисление ДПФ требует очень большого числа арифметических операций. Из формулы (12.74) следует, что для определения одного спектрального коэффициента $\mathbf{S}(n)$ требуется N умножений $s(k)$ на комплексное число и N сложений, а на все N коэффици-

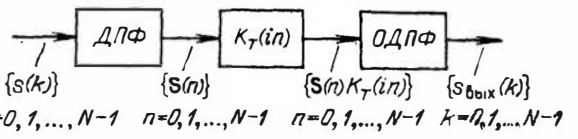


Рис. 12.35. Структурная схема цифровой фильтрации в частотной области

ентов требуется N^2 умножений и столько же сложений. Так, при $N = 2^{10} = 1024$ требуется $\sim 10^6$ умножений и сложений.

При использовании алгоритма свертки (12.73) требуется приблизительно столько же арифметических операций. Это обстоятельство долгое время препятствовало применению цифровой техники к обработке сложных сигналов. Существенный сдвиг в этой области произошел благодаря открытию нового алгоритма, известного под названием «быстрое преобразование Фурье» (БПФ). В связи с широким внедрением БПФ в цифровую обработку алгоритм свертки применяется в основном при фильтрации малобазовых сигналов.

12.14. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Суть этого алгоритма заключается в многократном членении заданной последовательности временны́х отсчетов на более короткие последовательности. Поясним достигаемый при этом выигрыш на примере одного первого разбиения.

Пусть задана последовательность отсчетов $\{s(k)\}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, причем число N является степенью двойки, т. е. $N = 2^r$, где r — целое число. Разобьем эту последовательность на две подпоследовательности, как показано на рис. 12.36. Для первой из них, составленной из четно пронумерованных отсчетов $s(2k) = s_{\mathrm{I}}(k)$ (рис. 12.36, *б*), выражение, аналогичное (12.14), должно быть записано в форме

$$\sum_{k=0}^{N-1} s(k)\, W_N^{kn} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s(2k)\, W_N^{2kn} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s_{\mathrm{I}}(k)\, W_N^{2kn},\ n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}-1. \tag{12.76}$$

Здесь и в дальнейшем используется обозначение $W_N = e^{-i2\pi/N}$. Для второй (нечетной) подпоследовательности, составленной из отсчетов $s(2k+1) = s_{\mathrm{II}}(k)$ (рис. 12.36, *в*), ДПФ можно записать в форме

$$\sum_{k=0}^{N-1} s(k)\, W_N^{kn} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s(2k+1)\, W_N^{(2k+1)n} = \sum_{k=0}^{N-1} s_{\mathrm{II}}(k)\, W_N^{(2k+1)n} =$$

$$= W_N^n \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s_{\mathrm{II}}(k)\, W_N^{2kn},\ n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}-1. \tag{12.77}$$

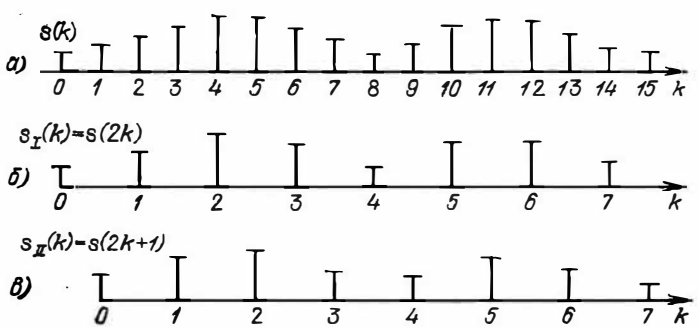


Рис. 12.36. Разбиение последовательности $\{s(k)\}$, $k=0, 1, \ldots, N-1$, на две последовательности: четных и нечетных отсчетов

С учетом равенств

$$W_N^2 = (e^{-i2\pi/N})^2 = e^{-i\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}, \quad W_N^{2kn} = W_{N/2}^{kn} \quad (12.78)$$

правые части выражений (12.76), (12.77) можно привести к виду

$$\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s_I(k)\, W_{N/2}^{kn} = S_I(n), \quad W_N^n \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s_{II}(k)\, W_{N/2}^{kn} = W_N^n S_{II}(n). \quad (12.79)$$

В этих выражениях $S_I(n)$ и $S_{II}(n)$ представляют собой ДПФ соответственно четной и нечетной подпоследовательностей.

Заменой W_N^{2kn} на $W_{N/2}^{kn}$ учитывается, что шаг дискретизации в $\{s_I(k)\}$ и $\{s_{II}(k)\}$ вдвое больше, чем в исходной последовательности $\{s(k)\}$.

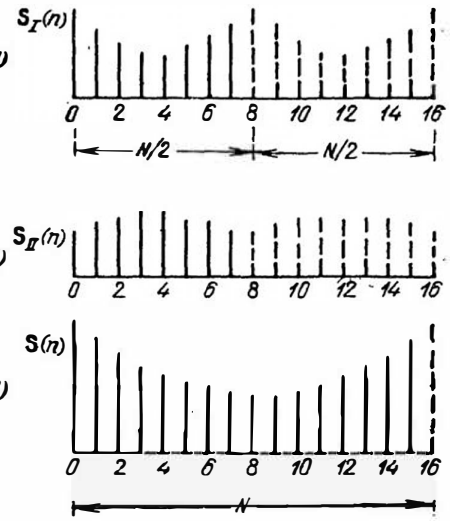


Рис. 12.37. Спектры ДПФ последовательностей четных отсчетов (*а*), нечетных отсчетов (*б*) и исходной последовательности (*в*)

Фазовый множитель $W_N^n = e^{-i\frac{2\pi}{N}n}$ перед второй суммой учитывает задержку последовательности $\{s_{II}(k)\}$ на один интервал относительно последовательности $\{s_I(k)\}$ (см. рис. 12.36).

На рис. 12.37, *а* и *б* представлен примерный вид спектров $S_I(n)$ и $S_{II}(n)$. В соответствии с числом временных отсчетов $N/2$ число спектральных коэффициентов также равно $N/2$ ($n = 0,1, \ldots, N/2 - 1$). Штриховыми линиями на рисунках показано периодическое продолжение спектра на участок $N/2 \leqslant n \leqslant N - 1$.

Результирующее ДПФ $S(n)$ исходной последовательности $\{s(k)\}$ можно выразить через $S_I(n)$ и $S_{II}(n)$.

В диапазоне $n = 0,1, \ldots, N/2 - 1$ имеет место очевидное соотношение

$$S(n) = S_I(n) + W_N^n S_{II}(n).$$

В диапазоне $n = N/2, N/2 + 1, \ldots, N - 1$ можно, основываясь на периодичности $S_I(n)$ и $S_{II}(n)$ (с периодом $N/2$), исходить из равенств

$$S_I(n) = S_I(n - N/2), \quad S_{II}(n) = S_{II}(n - N/2). \quad (12.79)$$

Кроме того, необходимо учитывать перемену знака перед фазовым множителем при $n \geqslant N/2$:

$$W_N^n = W_N^{N/2+n-N/2} = W_N^{N/2} W_N^{n-N/2} = -W_N^{n-N/2},$$

поскольку $W_N^{N/2} = e^{-i\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = e^{-i\pi} = -1$.

В результате приходим к следующему выражению для ДПФ всей последовательности:

$$S(n) = \begin{cases} S_I(n) + W_N^n S_{II}(n), & 0 \leqslant n \leqslant N/2 - 1, \\ S_I(n - N/2) - W_N^{n-N/2} S_{II}(n - N/2), & N/2 \leqslant n \leqslant N - 1. \end{cases} \quad (12.80)$$

Спектр $S(n)$ содержит N спектральных отсчетов на интервале одного периода (на оси n), как это представлено на рис. 12.37, *в*.

Заметим, что $S_I(n - N/2)$ и $S_{II}(n - N/2)$ совпадают с соответствующими значениями $S_I(n)$ и $S_{II}(n)$.

Выяснив структуру спектров $S_I(n)$ и $S_{II}(n)$, подсчитаем число операций умножения, требующихся для получения N спектральных коэффициентов при использовании алгоритма (12.80). Для вычисления функций $S_I(n)$ и $S_{II}(n)$ требуется $(N/2)^2$ умножений отсчетов $s(k)$ на комплексные коэффициенты W_N^n. Кроме того, требуется N умножений $S_{II}(n)$ на коэффициент W_N^n. Всего требуется $2(N/2)^2 + N$ умножений, т. е. почти вдвое меньше, чем при использовании алгоритма (12.73).

Разбиением каждой подпоследовательности можно осуществить дальнейшее уменьшение объема вычислений. Разбиение следует продолжать вплоть до получения простейших, двухэлементных последовательностей. Определив ДПФ указанных простейших пар отсчетов, можно найти ДПФ четырехэлементных, восьмиэлементных и т. д. последовательностей. При объединении ДПФ двух подпоследовательностей можно руководствоваться алгоритмом (12.80), подставляя в него соответствующие значения N и n.

В основе алгоритма (12.80) лежит операция сложение-вычитание с умножением одного из слагаемых на коэффициент W_N^n. Указанную операцию, являющуюся базовой для БПФ, можно представить в виде графа, изображенного на рис. 12.38, *а* (так называемая бабочка).

При обозначениях (12.80) базовая операция принимает вид, показанный на рис. 12.38, *б*. Основанный на этой базовой операции сигнальный граф объединения двух ДПФ представлен на рис. 12.38, *в*.

Проиллюстрируем описанный способ построения полного графа БПФ от двухточечных до N-точечных ДПФ на примере $N = 8$.

После первого разбиения последовательности $\{s(k)\}$ получаются две четырехэлементные последовательности $\{s_I\}$ и $\{s_{II}\}$, показанные в левой части рис. 12.39. В первой из них четными считаются $s_I(0) = s(0)$ и $s_I(2) = s(4)$, а нечетными $s_I(1) = s(2)$ и $s_I(3) = s_I(6)$. Поэтому последовательность $\{s_I\}$ распадается на две пары: $a(0)$, $a(1)$ и $b(0)$, $b(1)$ [т. е. $s(0)$, $s(4)$ и $s(2)$, $s(6)$].

Аналогично последовательность $\{s_{II}\}$ распадается на две пары: $c(0)$, $c(1)$ и $d(0)$, $d(1)$.

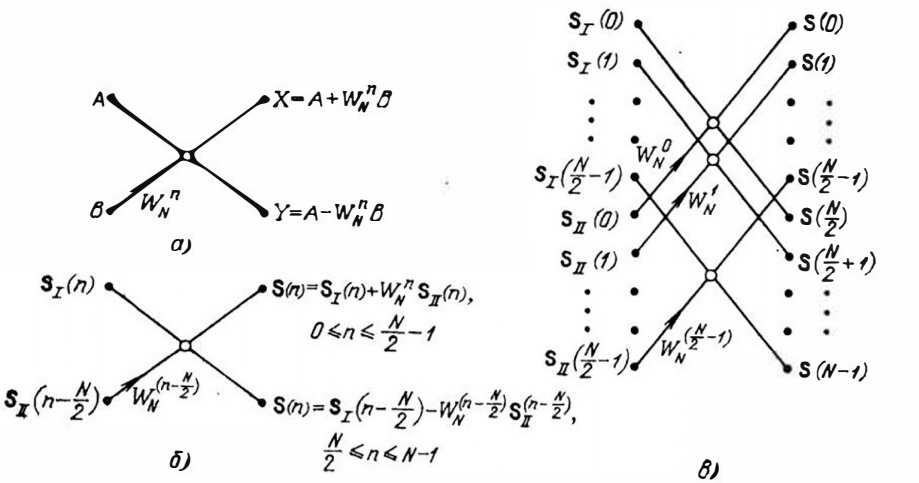


Рис. 12.38. Базовые операции, используемые в алгоритме БПФ

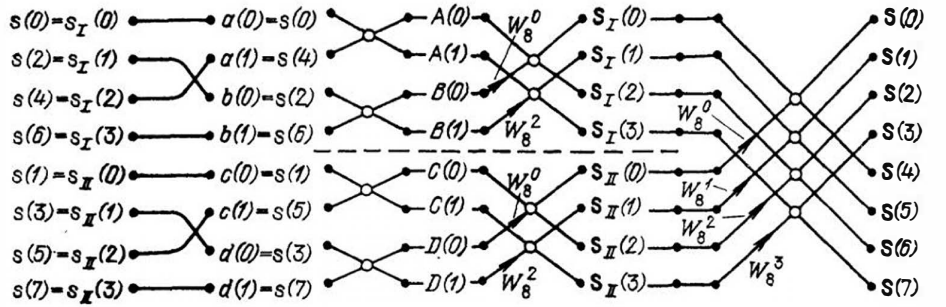


Рис. 12.39. Сигнальный граф БПФ при $N=8$

Определим ДПФ двухэлементных последовательностей. Для пары a (0), a (1)

$$A(n) = \sum_{k=0}^{1} a(k)\, W_{N/4}^{kn},\ n=0,\ 1,$$

откуда

$$A(0) = a(0) + a(1)\, W_{N/4}^{0} = a(0) + a(1),\ A(1) = a(0) + a(1)\, W_{N/4}^{1} =$$

$$= a(0) + a(1)\, W_8^4 = a(0) - a(1).$$

Как видим, для вычисления A (0) и A (1) не требуется умножений. Нужно лишь образовать сумму a (0) + a (1) и разность a (0) — a (1), т. е. s (0) + s (4) и s (0) — s (4).

На рис. 12.39 для операции сложение-вычитание использована символика, совпадающая с операцией «бабочка» при $W_N^0 = 1$: верхний вывод соответствует сумме, а нижний — разности.

Аналогичным образом на рис. 12.39 обозначены ДПФ остальных пар: b (0), b (1), c (0), c (1), и d (0), d (1).

Следующий шаг объединение ДПФ A (n) и B (n). Число спектральных коэффициентов в суммарном ДПФ равно 4: n = 0, 1, 2 и 3.

По аналогии с (12.80) можем написать

$$S_I(n) = \begin{cases} A(n) + W_4^n B(n),\ n=0,\ 1, \\ A(n-2) - W_4^{(n-2)} B(n-2),\ n=2,\ 3. \end{cases}$$

Учитывая, что $W_4^n = W_8^{2n}$, переписываем последнее выражение в форме

$$S_I(n) = \begin{cases} A(n) + W_8^{2n} B(n),\ n=0,\ 1, \\ A(n-2) - W_8^{2(n-2)} B(n-2),\ n=2,\ 3. \end{cases}$$

Итак,

$$S_I(0) = A(0) + W_8^0 B(0),\ S_I(1) = A(1) + W_8^2 B(1),$$

$$S_I(2) = A(0) - W_8^0 B(0),\ S_I(3) = A(0) - W_8^2 B(1).$$

Аналогичные выражения нетрудно составить для ДПФ S_{II} (n), объединяющего ДПФ C (n) и D (n).

см. Базовые операции для S_I (n) и S_{II} (n) одинаковы (см. рис. 12.39).

Для определения ДПФ всей последовательности из восьми отсчетов нужно воспользоваться выражением (12.80) и графом, представленным на рис. 12.38, *в* при N = 8.

Базовые операции, соответствующие приведенным соотношениям, показаны в правой части графа на рис. 12.39.

Выяснив структуру сигнального графа БПФ, подсчитаем суммарное число операций умножения. При достаточно больших значениях N на каждом этапе вычислений (при каждом разбиении последовательности на две более короткие) требуется порядка N умножений. При числе разбиений $\log_2 N$ общее число операций равно примерно $N \log_2 N$ (приближенность связана с тем, что умножение на W_N^0, $W_N^{N/2}$, $W_N^{N/4}$ и $W_N^{3N/4}$ сводится просто к сложениям и вычитаниям комплексных чисел).

Итак, при использовании алгоритма БПФ для вычисления ДПФ N-точечной последовательности требуется примерно $N \log_2 N$ операций умноже-

```
0001          SUBROUTINE FFT(NN,X,IN)
      C       ***************************************
      C       ПРОГРАММА ВЫПОЛНЕНИЯ БПФ
      C       X-КОМПЛЕКСНЫЙ МАССИВ ПРЕОБРАЗУЕМЫХ ОТСЧЕТОВ
      C       NN-ЧИСЛО ПРЕОБРАЗУЕМЫХ ОТСЧЕТОВ, РАВНОЕ ЦЕЛОЙ
      C       СТЕПЕНИ ДВОЙКИ, НЕ ПРЕВЫШАЮЩЕЕ 512
      C       IN=0 ДЛЯ ПРЯМОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
      C       IN=1 ДЛЯ ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
      C       ***************************************
0002          COMPLEX X(512),W,T
0003          IT=0
0004          IR=NN
0005       10 IR=IR/2
0006          IF(IR.EQ.0) GO TO 20
0007          IT=IT+1
0008          GO TO 10
0009       20 CONTINUE
0010          SI=-1.
0011          IF(IN.EQ.1) SI=1.
0012          NX2=NN
0013          DO 50 ITT=1,IT
0014          NX=NX2
0015          NX2=NX/2
0016          WP=3.141592/FLOAT(NX2)
0017          DO 40 M=1,NX2
0018          ARG=FLOAT(M-1)*WP
0019          W=CMPLX(COS(ARG),SI*SIN(ARG))
0020          DO 40 MX=NX,NN,NX
0021          J1=MX-NX+M
0022          J2=J1+NX2
0023          T=X(J1)-X(J2)
0024          X(J1)=X(J1)+X(J2)
0025       40 X(J2)=T*W
0026       50 CONTINUE
0027          N2=NN/2
0028          N1=NN-1
0029          J=1
0030          DO 65 I=1,N1
0031          IF(I.GE.J) GO TO 55
0032          T=X(J)
0033          X(J)=X(I)
0034          X(I)=T
0035       55 K=NN/2
0036       60 IF(K.GE.J) GO TO 65
0037          J=J-K
0038          K=K/2
0039          GO TO 60
0040       65 J=J+K
0041          IF (IN.EQ.1) GO TO 75
0042          DO 70 I=1,NN
0043       70 X(I)=X(I)/FLOAT(NN)
0044       75 CONTINUE
0045          RETURN
0046          END
```

ния. Ранее было показано, что при прямом вычислении ДПФ по выражению (12.73) требуется N^2 умножений. Следовательно, алгоритм БПФ уменьшает число операций в $N^2/N \log_2 N$. При $N = 1024$ ($r = 10$) $\log_2 N = 10$ и $N/\log_2 N \approx 100$. Столь большое сокращение числа операций резко уменьшает объем аппаратуры и повышает быстродействие цифровых устройств. Из рассмотрения графа следует, что экономия достигается благодаря объединению всех слагаемых, подлежащих умножению на однаковые множители.

К обоснованию алгоритма БПФ можно также прийти, используя метод факторизации матрицы, описывающей дискретное преобразование (12.73) [21].

Для большей наглядности все предыдущее рассмотрение проводилось в предположении действительного (вещественного) сигнала. Однако результаты можно распространить и на комплексный сигнал.

На с. 390 приведена программа вычисления прямого и обратного преобразований Фурье как для действительного, так и комплексного сигнала с базой до 512.

Существует большое разнообразие вариантов построения схем БПФ.

12.15. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НА БАЗЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Обратимся к выражению (12.13) для ДПФ

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N/2,$$

и к рис. 12.40, иллюстрирующему преобразование исходного сигнала $s(t)$, начиная с его дискретизации с шагом T до выделения спектральных коэффициентов $S(n)$ на выходе устройства, осуществляющего ДПФ. Это устройство обозначено на рис. 12.40 в виде «черного ящика» ДПФ (БПФ) без раскрытия его внутренней структуры.

Если шаг T выбран достаточно малым для сохранения содержащейся в сигнале $s(t)$ информации, то и совокупность N спектральных коэффициентов $S(n)$ дает полную информацию о всем спектре $S(\omega)$ континуального сигнала $s(t)$. На рис. 12.40 функция $S(\omega)$ обозначена штриховой линией в виде огибающей дискретного спектра $S(n)$ в пределах центрального участка диапазона частот от $\omega = -\pi/T$ до $\omega = \pi/T$ или, что то же, от $\omega T = 0$ до $\omega T = 2\pi$ (соответственно от $n = 0$ до $n = N - 1$, см. нижнюю часть рис. 12.40).

С этой точки зрения устройство, осуществляющее ДПФ, можно трактовать как а н а л и з а т о р с п е к т р а, представляющий собой набор из N узкополосных фильтров, каждый из которых пропускает одну дискретную частоту $n\Delta\omega$.

Поскольку в образовании любого из спектральных коэффициентов $S(n)$ *участвуют все временные отсчеты* $s(k)$, то информацию о спектре сигнала $s(t)$ можно получить не ранее чем после ввода в устройство БПФ всех N отсчетов $s(k)$. В этом смысле ДПФ не отличается от обычного преобразования Фурье, определяемого выражением

$$S(\omega) = \int_0^{T_c} s(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \quad t \geqslant T_c.$$

Нетрудно выявить АЧХ любого из N упомянутых выше фильтров, образующих анализатор спектра. С этой целью зададим испытательный сиг-

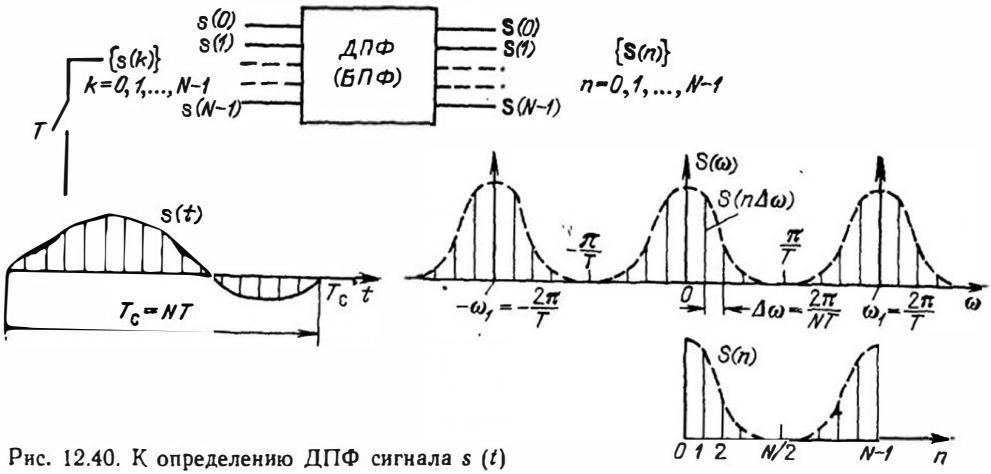


Рис. 12.40. К определению ДПФ сигнала $s\,(t)$

нал на входе анализатора в виде гармонического колебания с частотой ω, не превышающей π/T, что вытекает из теоремы отсчетов (см. § 2.16).

Для упрощения выкладок удобно исходить из *комплексного* испытательного сигнала, заданного в одной из двух форм (при $-\infty < t < \infty$):

$$\dot{s}\,(t) = \cos \omega t + i \sin \omega t = e^{i\omega t}, \tag{12.81}$$

$$\dot{s}\,(t) = \cos \omega t - i \sin \omega t = e^{-i\omega t}. \tag{12.82}$$

Поддерживая неизменной амплитуду (1 В) входного сигнала, проследим за изменением спектрального коэффициента $S\,(n)$ в зависимости от ω.

После дискретизации $\dot{s}\,(t)$ с шагом T получим временны́е отсчеты вида

$$\dot{s}\,(k) = e^{i\omega kT}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

или

$$\dot{s}\,(k) = e^{-i\omega kT}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где $N = T_c/T$.

Рассмотрим сначала случай $\dot{s}\,(t) = e^{i\omega t}$, когда выражение (12.13) принимает форму

$$S\,(n, \omega T) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\omega kT} e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\left(\omega T - \frac{2\pi}{N}n\right)}$$

$$n = 0, 1, \ldots, N/2, \quad 0 \leqslant \omega T \leqslant \pi. \tag{12.83}$$

При отрицательных значениях n коэффициенты $S\,(n, \omega T)$ равны нулю, поскольку спектральная плотность аналитического сигнала $e^{i\omega t}$ отлична от нуля только в области частот $\omega > 0$ [см. § 3.10 и формулу (3.87)].

Новое обозначение $S\,(n, \omega T)$ имеет тот же смысл, что и $S\,(n)$, т. е. это спектральный коэффициент на *фиксированной частоте* $n\,\Delta\omega$, однако модуль и аргумент этого комплексного коэффициента зависят от частоты ω исходного сигнала $s\,(t)$, из которого взяты N временны́х отсчетов.

Введем обозначение $x = \omega T - \frac{2\pi}{N} n$ и запишем (12.83) в форме

$$S\,(n, \omega T) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{N-1} \cos kx + i \sum_{k=0}^{N-1} \sin kx.$$

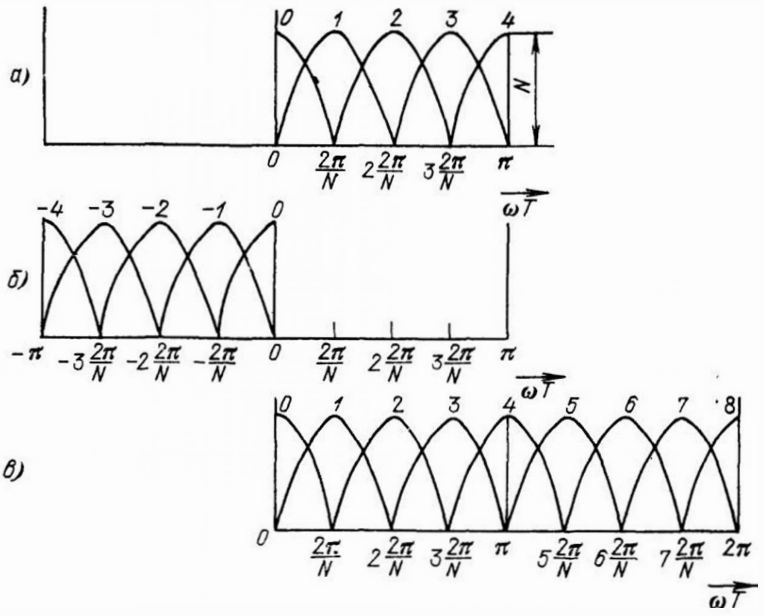


Рис. 12.41. Частотные характеристики устройства БПФ:

а) при входном сигнале $e^{i\omega t}$, $0 \leqslant \omega T < \pi$; *б)* то же при $-\pi < \omega T < 0$; *в)* то же при $0 \leqslant \omega T < 2\pi$

Используя известные формулы для суммы косинусов или синусов кратных дуг

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos kx = \frac{\cos \frac{(N-1)\,x}{2} \sin \frac{Nx}{2}}{\sin x/2}, \quad \sum_{k=0}^{N-1} \sin kx = \frac{\sin \frac{(N-1)\,x}{2} \sin \frac{Nx}{2}}{\sin x/2},$$

приведем (12.83) к виду

$$S(n, \omega T) = \begin{cases} \dfrac{\sin \frac{N}{2}\left(\omega T - \frac{2\pi}{N} n\right)}{\sin \frac{1}{2}\left(\omega T - \frac{2\pi}{N} n\right)} e^{i \frac{(N-1)}{2}\left(\omega T - \frac{2\pi}{N} n\right)}, & n = 0, 1, \ldots, N/2, \\ 0 & N/2 < n \leqslant N-1. \end{cases} \tag{12.84}$$

Ранее отмечалось, что информация о $S(n, \omega T)$ получается к моменту $t = T_c = (N-1)\,T$, когда входной сигнал $s(t)$ принимает значение $e^{i\omega (N-1)T}$. Поэтому *передаточную функцию* n-го частотного канала анализатора спектра логично трактовать как отношение

$$\frac{S(n, \omega T)}{e^{i(N-1)\omega T}} = \frac{\sin \frac{N}{2}\left(\omega T - \frac{2\pi}{N} n\right)}{\sin \frac{1}{2}\left(\omega T - \frac{2\pi}{N} n\right)} e^{-i \frac{(N-1)}{2}\left(\omega T + \frac{2\pi}{N} n\right)}$$

$$0 \leqslant \omega T \leqslant \pi, \quad n = 0, 1, \ldots, N/2. \tag{12.85}$$

При задании испытательного сигнала в форме $s(t) = e^{-i\omega t}$ передаточная функция определяется выражением, комплексно-сопряженным по отношению к (12.85):

$$\frac{S(n, \omega T)}{e^{-i(N-1)\omega T}} = \frac{\sin\frac{N}{2}\left(\omega T - \frac{2\pi}{N} n\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\omega T - \frac{2\pi}{N} n\right)} e^{i\frac{(N-1)}{2}\left(\omega T + \frac{2\pi}{N} n\right)}$$

$$-\pi \leqslant \omega T \leqslant 0, \quad n = 0, -1, \ldots, -N/2. \qquad (12.86)$$

Графики передаточных функций, построенные по формулам (12.85), (12.86) для $N = 8$ (без учета фазовых множителей), представлены на рис. 12.41, *а* и *б*. Поскольку вне интервала характеристики повторяются, эти графики можно объединить, как это показано на рис. 12.41, *в*. (Представлены только главные лепестки).

Итак, на комплексный сигнал $e^{i\omega t}$ откликаются только частотные каналы анализатора с номерами $0 \leqslant n \leqslant N/2$, а на сигнал $e^{-i\omega t}$ — только каналы с номерами $N/2 < n < N - 1$. Это означает, что при анализе спектра комплексных сигналов с помощью БПФ можно определить не только абсолютное значение ω, но и знак частоты. Это важное свойство будет проиллюстрировано в § 13.9 на примере квадратурной обработки сигналов.

При подаче на вход БПФ последовательности $\{s(k)\}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, взятой из сигнала в виде постоянного напряжения ($\omega = 0$), на выходе БПФ спектральный коэффициент $S(0,0)$ равен N, а все остальные равны нулю; при частоте исходного (комплексного) сигнала $\omega = \frac{2\pi}{N}\frac{1}{T}$, один-единственный коэффициент $S\left(1, \frac{2\pi}{N}\right)$ равен N, а все остальные равны нулю и т. д.

Соотношение между входными и выходными сигналами для БПФ-8 иллюстрируются рис. 12.42.

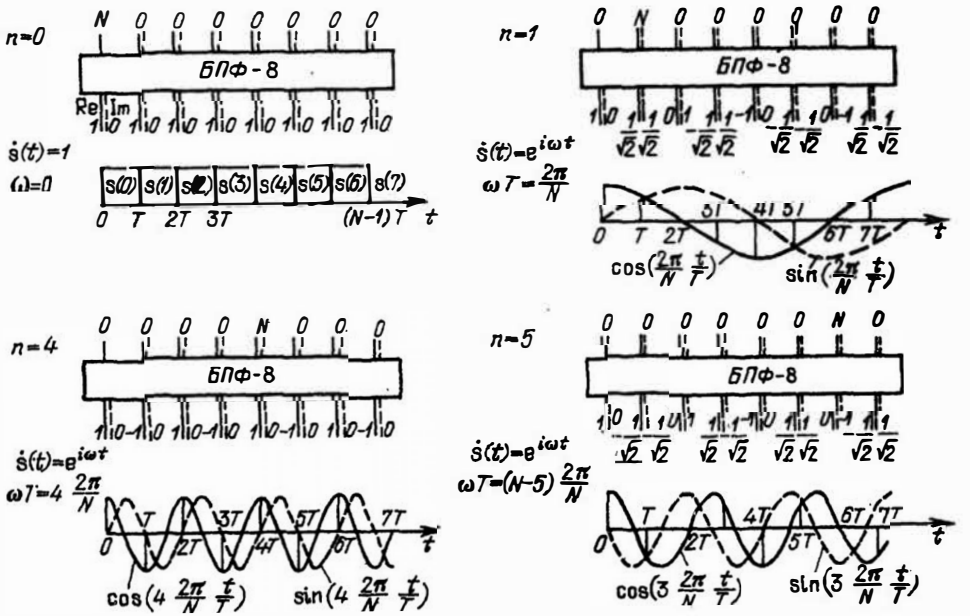


Рис. 12.42. Отклик анализатора спектра на комплексный сигнал при различных значениях $\omega T = n2\pi/T$, $n = 0$, 1, 4 и 5:
——— действительная, — — — — мнимая части сигналов

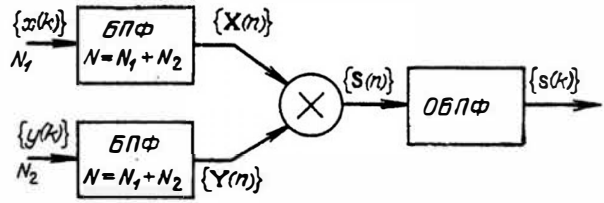


Рис. 12.43. Алгоритм вычисления свертки двух сигналов, основанный на использовании БПФ [$\mathbf{S}(n)$ обозначает произведение $\mathbf{X}(n)\,\mathbf{Y}(n)$]

Основываясь на выражении (12.83), а также (12.85), (12.86), нетрудно найти отклик рассматриваемого устройства на испытательный сигнал $s(t) = \cos \omega t$, $-\infty < t < \infty$. Представив этот сигнал в виде суммы двух комплексных сигналов

$$s(t) = {}^1/_2\, e^{i\omega t} + {}^1/_2\, e^{-i\omega t},$$

придем к выходному сигналу в виде двух комплексно-сопряженных спектральных коэффициентов $S(n, \omega T)$ и $S(N - n, 2\pi - \omega T)$, расположенных симметрично относительно точки π на оси ωT.

12.16. ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В УСТРОЙСТВАХ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Вернемся к структурной схеме цифровой фильтрации сигнала, представленной на рис. 12.35.

В § 12.13 отмечалось, что осуществление подобной обработки при длинных последовательностях $s(k)$ стало эффективным лишь при использовании алгоритма БПФ — как для прямого, так и обратного дискретного преобразования (ОБПФ).

По существу, в данной схеме на первом этапе проводится спектральный анализ входного сигнала с помощью БПФ, затем осуществляется собственно фильтрация с помощью цифрового фильтра $\mathbf{K}_T(in)$, после чего профильтрованный сигнал с помощью ОБПФ преобразуется в выходной сигнал в виде функции времени. В современной практике как БПФ, так и ОБПФ осуществляются в одном и том же устройстве.

Обратимся к рассмотрению другой задачи — вычислению дискретной свертки двух функций времени $x(t)$ и $y(t)$, представленных последовательностями $\{x(k)\}$, $k = 1,0, \ldots, N_1 - 1$, и $\{y(k)\}$, $k = 0,1,\ldots, N_2 - 1$, с использованием БПФ.

В основе алгоритма этой операции, представленного на рис. 12.43, лежит теорема свертки, сформулированная для дискретных сигналов в п.3. § 12.4.

В соответствии с этой теоремой $\mathbf{S}(n) = \mathbf{X}(n)\,\mathbf{Y}(n)$, причем под N, как и ранее, следует подразумевать $N_1 + N_2$. После обратного БПФ получается последовательность $\{s(k)\}$, $k = 0,1, \ldots, N - 1$, являющаяся сверткой последовательностей $\{x(k)\}$ и $\{y(k)\}$.

Таким образом, вместо прямого вычисления свертки двух сигналов по формуле (12.73) сначала эти сигналы с помощью БПФ переводятся в спектральную область, а затем после перемножения спектров и ОБПФ приводятся к требуемому результату.

При достаточно длинных последовательностях $\{x(k)\}$ и $\{y(k)\}$ суммарное число арифметических операций оказывается значительно меньшим, чем при алгоритме (12.73). Подобную более экономную обработку иногда называют «скоростной сверткой».

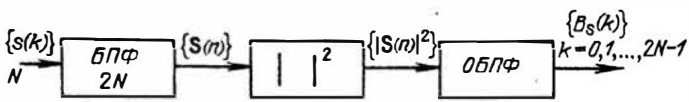


Рис. 12.44. Вычисление корреляционной функции сигнала с помощью БПФ

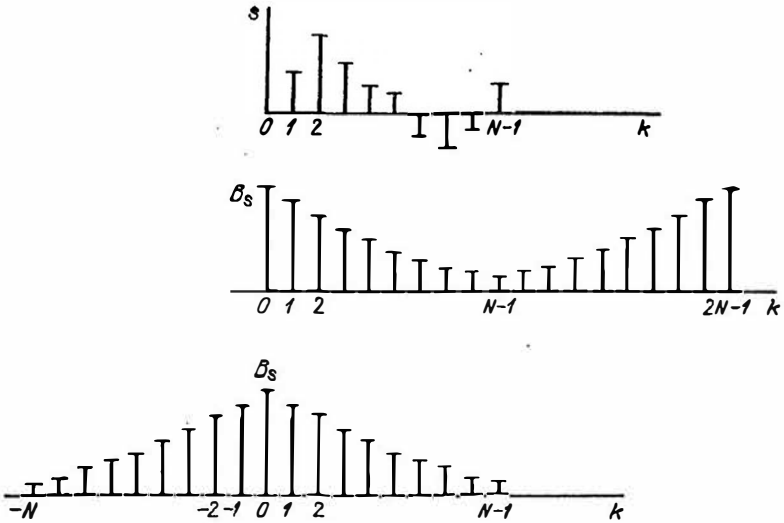


Рис. 12.45. К вычислению корреляционной функции сигнала по алгоритму рис. 12.44

Рассмотрим еще важный для практики вопрос об использовании БПФ при вычислении корреляционной функции дискретного сигнала.

На основе выражений

$$B_s(k) = \sum_{n=0}^{N-1} |S(n)|^2 e^{i\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad |S(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} B_s(k) e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$$

являющихся дискретными эквивалентами интегральных преобразований (2.136), (2.137), можно наметить структурную схему, представленную на рис. 12.44.

При входной последовательности из N отсчетов устройство БПФ рассчитывается на удвоенное число отсчетов (половина входов резервируется для обратного преобразования). Число отсчетов корреляционной функции $B_s(k)$ равно $2N$. Связь между последовательностями $\{S(k)\}$ и $\{B(k)\}$ иллюстрируется рис. 12.45.

Вследствие периодичности ОДПФ (с периодом $2N$) последовательность $\{B_s(k)\}$, $k = 0,1,\ldots, 2N-1$, эквивалентна четной относительно k последовательности, изображенной в нижней части рис. 12.45.

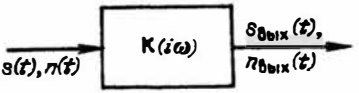
Глава 13. ПРИНЦИПЫ ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛА НА ФОНЕ ПОМЕХ

13.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Центральной проблемой радиотехники была и остается проблема помехоустойчивости связи. *Система связи должна быть спроектированной так*, чтобы она обладала способностью наилучшим образом противостоять мешающему действию помех.

Проблема помехоустойчивости радиосвязи включает в себя большое число других проблем, охватывающих все разделы радиотехники: генерирование мощных колебаний, освоение и выбор волн, обеспечивающий благоприятные условия распространения, использование антенн направленного дей-

Рис. 13.1. Воздействие сигнала и помехи на линейный четырехполюсник



ствия, поиски новых видов радиосигналов и новых способов их обработки на фоне помех и т. д.

Для теории радиотехнических цепей и сигналов особый интерес представляет возможность ослабления вредного действия помехи с помощью линейной фильтрации, основанной на использовании линейных частотных фильтров. На протяжении длительного периода развития радиотехники к подобным частотным фильтрам предъявлялось требование возможно более равномерного пропускания спектра сигнала и возможно более полного подавления частот вне этого спектра. Идеальным считался фильтр с прямоугольной П-образной АЧХ.

С развитием теории информации и статистической теории обнаружения сигналов трактовка функций линейного фильтра, а также подход к его построению существенно изменились. Стало очевидным, что указанная выше трактовка имеет следующие недостатки: 1) не учитывается форма сигнала (которая может быть различной при одной и той же ширине спектра сигнала); 2) не учитываются статистические свойства помехи.

Поэтому фильтр с П-образной АЧХ не является оптимальным в тех случаях, когда имеется априорная информация о форме сигнала и характеристиках помехи.

Коренной перелом в теории и практике линейной фильтрации связан с появлением работ Н. Винера, А. Н. Колмогорова, В. А. Котельникова и других ученых, которые поставили и решили задачу синтеза фильтра, оптимального в определенном смысле для приема заданного сигнала, действующего на фоне помехи с заданными статистическими характеристиками.

В зависимости от решаемой задачи — обнаружение сигнала, измерение его параметров или разрешение (различение) сигналов — критерии оптимальности могут быть разными. Для задачи обнаружения сигналов в шумах наибольшее распространение получил критерий максимума отношения сигнал-помеха на выходе фильтра. В настоящей главе рассматриваются только такие фильтры.

Требования к фильтру, максимизирующему отношение сигнал-помеха, можно сформулировать следующим образом. На вход линейного четырехполюсника с постоянными параметрами и передаточной функцией $\mathbf{K}(i\omega)$ подается аддитивная смесь сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$ (рис. 13.1). Сигнал полностью известен; это означает, что заданы его форма и положение на оси времени. Шум представляет собой случайный процесс с заданными статистическими характеристиками. Требуется синтезировать фильтр, обеспечивающий получение на выходе наибольшего возможного отношения пикового значения сигнала к среднеквадратическому значению шума. При этом не ставится условие сохранения формы сигнала, так как для обнаружения его в шумах форма значения не имеет.

13.2. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА

Под синтезом фильтра будем подразумевать отыскание передаточной функции *физически осуществимого* фильтра, обеспечивающего упомянутую выше максимизацию отношения сигнал-помеха. Передаточную функцию будем представлять в форме $\mathbf{K}(i\omega) = K(\omega)\, e^{i\varphi_k(\omega)}$.

Таким образом, задача сводится к отысканию АЧХ $K(\omega)$ и ФЧХ $\varphi_k(\omega)$ оптимального фильтра. Наиболее просто эта задача решается для сигнала, действующего на фоне *белого шума* с равномерным спектром $W(\omega) = W_0 = \text{const}$.

Для отыскания оптимальной (в указанном смысле) передаточной функции $\mathbf{K}(i\omega)$ составим выражения для сигнала и шума на выходе фильтра сначала порознь, а затем в виде их отношения.

Сигнал в фиксированный момент времени t_0 определяем общим выражением

$$s_{\text{вых}}(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega)\,\mathbf{K}(i\omega)\,e^{i\omega t_0}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,K(\omega)\,e^{i[\theta_s(\omega)+\varphi_k(\omega)+\omega t_0]}, \qquad (13.1)$$

а среднеквадратическое значение помехи — выражением

$$\sigma_{\text{вых}} = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)\,K^2(\omega)\,d\omega\right]^{1/2} = \left[\frac{W_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)\,d\omega\right]^{1/2}. \qquad (13.2)$$

В выражении (13.1) $\mathbf{S}(\omega) = S(\omega)\,e^{i\theta_s(\omega)}$ — спектральная плотность заданного входного сигнала $s(t)$, а под t_0 подразумевается момент времени (пока еще не определенный), соответствующий максимуму (пику) сигнала на выходе фильтра. Смысл и минимально возможное значение t_0 подробнее рассматриваются в следующем параграфе, однако из простых представлений очевидно, что для образования пика требуется использование всей энергии сигнала, а это возможно не ранее окончания действия входного сигнала. Иными словами, t_0 не может быть раньше момента окончания сигнала.

Составим теперь отношение

$$\frac{s_{\text{вых}}(t_0)}{\sigma_{\text{вых}}} = \frac{\left|\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,K(\omega)\,e^{i[\theta_s(\omega)+\varphi_k(\omega)+\omega t_0]}\,d\omega\right|}{\left(\dfrac{W_0}{2\pi}\right)^{1/2}\left[\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)\,d\omega\right]^{1/2}}. \qquad (13.3)$$

Воспользуемся известным неравенством Шварца

$$\left|\int_a^b F_1(x)\,F_2(x)\,dx\right|^2 \leqslant \int_a^b |F_1(x)|^2\,dx \int_a^b |F_2(x)|^2\,dx, \qquad (13.4)$$

где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — в общем случае комплексные функции.

Это неравенство обращается в равенство только при выполнении условия

$$F_2(x) = AF_1^*(x), \qquad (13.5)$$

т. е. когда функция $F_2(x)$ пропорциональна функции, комплексно-сопряженной $F_1(x)$ (A — произвольный постоянный коэффициент).

Приравнивая в (13.4) $F_1(x) = S(\omega)\, e^{i\theta_s(\omega)}$ и $F_2(x) = K(\omega)\, e^{i[\varphi_k(\omega)+\omega_0 t]}$, записываем неравенство (13.4) в форме

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, K(\omega)\, e^{i[\theta_s(\omega)+\varphi_k(\omega)+\omega t_0]}\, d\omega\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\, d\omega \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)\, d\omega\right]^{1/2}.$$

Тогда выражение (13.3) позволяет составить следующее неравенство:

$$\frac{s_{\text{вых}}(t_0)}{\sigma_{\text{вых}}} = \frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, K(\omega)\, e^{i[\theta_s(\omega)+\varphi_k(\omega)+\omega t_0]}\, d\omega\right|}{\left(\frac{W_0}{2\pi}\right)^{1/2}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)\, d\omega\right]^{1/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\, d\omega \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)\, d\omega\right]^{1/2}}{\left(\frac{W_0}{2\pi}\right)^{1/2}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)\, d\omega\right]^{1/2}} = \frac{1}{W_0^{1/2}}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\, d\omega\right]^{1/2}. \tag{13.6}$$

Учитывая, что выражение в квадратных скобках правой части этого неравенства есть не что иное, как полная энергия $\mathcal{Э}$ входного сигнала [см. (2.66)], приходим к следующему результату:

$$s_{\text{вых}}(t_0)/\sigma_{\text{вых}} \leqslant \sqrt{\mathcal{Э}/W_0}. \tag{13.7}$$

Наконец, из выражения (13.5) следует, что это неравенство обращается в равенство при выполнении условия

$$K(\omega)\, e^{i[\varphi_k(\omega)+\omega t_0]} = AS^*(\omega) = AS(\omega)\, e^{-i\theta_s(\omega)}$$

или, что то же,

$$\mathbf{K}(i\omega) = K(\omega)\, e^{i\varphi_k(\omega)} = AS^*(\omega)\, e^{-i\omega t_0} = AS(\omega)\, e^{-i[\theta_s(\omega)+\omega t_0]}. \tag{13.8}$$

Полученное соотношение полностью определяет передаточную функцию фильтра, максимизирующего отношение сигнал-помеха на выходе (при входной помехе типа белого шума).

Функция $\mathbf{K}(i\omega)$, отвечающая условию (13.8), *согласована* со спектральными характеристиками сигнала — амплитудной и фазовой. В связи с этим рассматриваемый оптимальный фильтр часто называют *согласованным* фильтром.

Итак, отношение пика сигнала к среднеквадратическому значению помехи на выходе согласованного фильтра определяется равенством

$$s_{\text{вых}}(t_0)/\sigma_{\text{вых}} = \sqrt{\mathcal{Э}/W_0}. \tag{13.9}$$

Из соотношения (13.8) вытекают следующие два требования к согласованному фильтру:

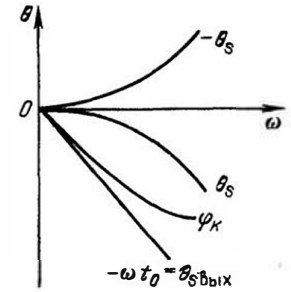


Рис. 13.2. Соотношение между фазовыми характеристиками спектра сигнала на входе и выходе согласованного фильтра

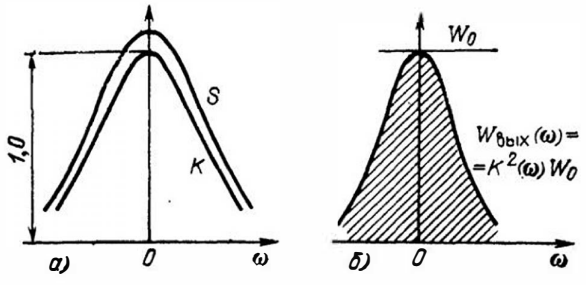


Рис. 13.3. Спектральная плотность сигнала и АЧХ согласованного фильтра (*а*) и энергетические спектры на входе и выходе фильтра (*б*)

ФЧХ фильтра должна отвечать условию

$$\varphi_K(\omega) = -[\theta_s(\omega) + \omega t_0]; \qquad (13.10)$$

АЧХ должна отвечать условию

$$K(\omega) = AS(\omega). \qquad (13.11)$$

В тех случаях, когда под комплексной передаточной функцией подразумевается безразмерная величина (например, отношение комплексных амплитуд напряжения на выходе и входе), постоянный *коэффициент A должен иметь размерность, обратную размерности спектральной плотности сигнала.*

Соотношения (13.10), (13.11) имеют глубокий физический смысл. Первое из них можно назвать *условием компенсации начальных фаз* в спектре сигнала, поскольку фазовый сдвиг в фильтре $-\theta_s(\omega)$ равен по величине и обратен по знаку начальной фазе соответствующей составляющей спектра $S(\omega)$ входного сигнала. В результате прохождения сигнала через фильтр с фазовой характеристикой $\varphi_K(\omega)$ сложение всех компонентов спектра, скорректированных по фазе, образует пик выходного сигнала. Слагаемое фазовой характеристики $\varphi_K(\omega)$, равное $-\omega t_0$, указывает на то, что пик задержан относительно начала сигнала $s(t)$ на время t_0.

Связь между ФЧХ $\theta_s(\omega)$ входного спектра, компенсирующей ее характеристикой фильтра $-\theta_s(\omega)$ и полной ФЧХ фильтра $\varphi_k(\omega) = -[\theta_s(\omega) + \omega t_0]$ поясняется рис. 13.2.

После прохождения через фильтр спектр выходного сигнала будет иметь фазовую характеристику

$$\theta_{\text{вых}}(\omega) = \theta_s(\omega) + \varphi_K(\omega) = \theta_s(\omega) + [-\theta_s(\omega) - \omega t_0] = -\omega t_0, \qquad (13.12)$$

показанную прямой линией на том же рисунке.

Соотношение (13.11), устанавливающее, что АЧХ фильтра $K(\omega)$ должна по своей форме совпадать с амплитудным спектром сигнала $S(\omega)$, также легко поддается физическому истолкованию. При АЧХ $K(\omega)$, отвечающей условию (13.11), фильтр пропускает спектральные составляющие шума неравномерно, с тем бо́льшим ослаблением, чем меньше модуль $S(\omega)$. Это приводит к существенному уменьшению мощности шума на выходе фильтра. На рис. 13.3, *б* эта мощность определяется площадью (заштрихованной) под кривой $W_{\text{вых}}(\omega) = K^2(\omega) W_0$. (Для наглядности характеристики на рис. 13.3 построены в предположении, что $AS(0) = 1$.)

Ослабление сигнала из-за неравномерности характеристики $K(\omega)$ выражено в меньшей степени, чем ослабление шума, поскольку уменьшение $K(\omega)$ имеет место для спектральных составляющих, вклад которых в пико-

вое значение сигнала сравнительно мал. В результате получается *ослабление шума относительно сигнала*. В сочетании с устранением фазовых сдвигов между спектральными составляющими сигнала это и приводит к *максимизации отношения сигнал-помеха на выходе фильтра*.

13.3. ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА. ФИЗИЧЕСКАЯ ОСУЩЕСТВИМОСТЬ

Тот факт, что коэффициент передачи согласованного фильтра $\mathbf{K}(i\omega)$ является функцией, сопряженной по отношению к спектру сигнала $\mathbf{S}(\omega)$, указывает на существование тесной связи также и между временными характеристиками фильтра и сигнала. Для выявления этой связи найдем импульсную характеристику согласованного фильтра.

Применяя выражение (5.39) и учитывая формулу (13.8), получаем

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = A\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}^*(\omega)\, e^{i\omega(t-t_0)}\, d\omega. \qquad (13.13)$$

Учитывая, что $\mathbf{S}^*(\omega) = \mathbf{S}(-\omega)$ и переходя к новой переменной $\omega_1 = -\omega$, переписываем выражение (13.13) следующим образом:

$$g(t) = -\frac{A}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty} \mathbf{S}(\omega_1)\, e^{-i\omega_1(t-t_0)}\, d\omega_1 =$$

$$= A\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega_1)\, e^{i\omega_1(t_0-t)}\, d\omega_1. \qquad (13.14)$$

Правая часть этого выражения есть не что иное, как функция $As(t_0 - t)$. Следовательно, если задан сигнал $s(t)$, то импульсная характеристика согласованного (оптимального) фильтра $g(t)$ определяется как функция

$$g(t) = As(t_0 - t), \qquad (13.15)$$

т. е. импульсная характеристика по своей форме должна совпадать с зеркальным отражением сигнала.

Построение графика функции $s(t_0 - t)$ показано на рис. 13.4 Кривая $s(-t)$ является зеркальным отражением заданного сигнала $s(t)$ с осью ординат в качестве оси симметрии. Функция же $s(t_0 - t)$, сдвинутая относительно $s(-t)$ на время t_0 вправо, также зеркальна по отношению к исходному сигналу $s(t)$, но с осью симметрии, проходящей через точку $t_0/2$ на оси абсцисс. На рис. 13.5 показано аналогичное построение для случая, когда отсчет времени ведется от начала сигнала.

Поскольку импульсная характеристика физической цепи не может начинаться при $t < 0$ [отклик фильтра не может опережать воздействие $\delta(t)$],

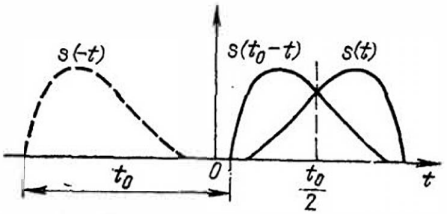


Рис. 13.4. Построение функции, зеркальной по отношению к сигналу

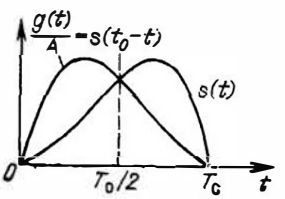


Рис. 13.5. Построение импульсной характеристики согласованного фильтра

то очевидно, что задержка t_0, фигурирующая в выражении (13.8), не может быть меньше T_c. Только при $t_0 \geqslant T_c$ может быть использована вся энергия сигнала для создания наибольшего возможного пика в точке $t = t_0$. Ясно, что увеличение t_0 сверх T_c не влияет на пиковое значение выходного сигнала, а просто сдвигает его вправо (в сторону запаздывания).

Кроме того, условие $t_0 \geqslant T_c$ накладывает на сигнал $s(t)$ требование, чтобы *длительность его T_c была конечна*; только в этом случае при конечной задержке t_0 можно реализовать пик сигнала. Иными словами, применение согласованной фильтрации для максимизации отношения сигнал-помеха в описанном выше смысле возможно при *импульсном* сигнале (а также ограниченной по продолжительности пачке импульсов).

Обратимся к вопросу о физической осуществимости согласованного фильтра. Пусть задан произвольный сигнал $s(t)$, которому соответствуют импульсная характеристика согласованного фильтра $g(t)$ и преобразование Фурье от этой функции $\mathbf{K}(i\omega)$, определяемые соответственно выражениями (13.15) и (13.18). Возникает вопрос, при каких условиях $\mathbf{K}(i\omega)$ может являться передаточной функцией *физически осуществимого четырехполюсника*.

Ответ на этот вопрос дает критерий осуществимости Пэли — Винера, согласно которому неравенство [1]

$$\int_0^\infty \frac{|\ln K(\omega)|}{1+\omega^2}\, d\omega < \infty \qquad (13.16)$$

является необходимым условием, чтобы положительная функция $K(\omega)$ могла быть модулем передаточной функции электрической цепи.

Хотя критерий Пэли — Винера оставляет открытым вопрос о структуре цепи, из него вытекают некоторые полезные следствия о свойствах электрических цепей.

В частности, из него следует, что АЧХ $K(\omega)$ должна быть *интегрируемой в квадрате*, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)\, d\omega < \infty$. Только при этом условии числитель $|\ln K(\omega)|$ растет с увеличением ω медленнее, чем знаменатель $1 + \omega^2$, и условие (13.16) выполняется. Например, передаточная функция $K(\omega) = K_0 e^{-\alpha\omega}$, $\omega > 0$, реализуема, так как $|\ln K_0(\omega)| = |\ln K_0 - \alpha\omega|$ растет медленнее, чем $1 + \omega^2$. Гауссовский фильтр с передаточной функцией $K(\omega) = K_0 e^{-\alpha\omega^2}$ не реализуется, так как $|\ln K(\omega)| = |\ln K_0 - \alpha\omega^2|$ растет с увеличением ω с такой же скоростью, что и знаменатель $1 + \omega^2$.

Далее, АЧХ $K(\omega)$ может быть равной нулю только на некоторых дискретных частотах, но не в конечной или бесконечно большой полосе частот. Действительно, если в полосе частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$ функция $K(\omega) = 0$, то $|\ln K(\omega)|$ обращается в бесконечность и интеграл в (13.15) расходится. Аналогично рассуждая, можно прийти к выводу, что фильтры с П-образной АЧХ нереализуемы, хотя практически можно получить характеристики, близкие к идеальным.

Так как в рассматриваемой задаче синтеза согласованного фильтра задано равенство $K(\omega) = AS(\omega)$ [см. (13.11)], то условие (13.16) можно записать в виде

$$\int_0^\infty \frac{|\ln S(\omega)|}{1+\omega^2}\, d\omega < \infty$$

и все приведенные выше ограничения на $K(\omega)$ можно распространить на модуль спектральной плотности сигнала $S(\omega)$.

[1] Здесь под ω подразумевается безразмерная нормированная величина.

13.4. СИГНАЛ И ПОМЕХА НА ВЫХОДЕ СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА

Для определения формы сигнала на выходе используем общее выражение

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{S}(\omega)\, \mathrm{K}(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega.$$

Подставив в него соотношение (13.8), получим

$$s_{\text{вых}}(t) = A \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{S}(\omega)\, \mathrm{S}^*(\omega)\, e^{-i\omega t_0}\, e^{i\omega t}\, d\omega =$$

$$= A \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\, e^{i\omega(t-t_0)}\, d\omega. \qquad (13.17)$$

Сопоставим это выражение с (2.136). Нетрудно видеть, что интеграл в правой части выражения (13.17) есть не что иное, как *корреляционная функция* входного сигнала [1] $B_s(\tau)$, в которой аргумент τ заменен [2] на $t - t_0$. Таким образом, приходим к важному выводу, что

$$s_{\text{вых}}(t) = AB_s(t - t_0) \qquad (13.18)$$

и соответственно

$$s_{\text{вых}}(t_0 + \tau) = AB_s(\tau). \qquad (13.19)$$

Итак, сигнал на выходе согласованного фильтра с точностью до постоянного коэффициента A *совпадает с корреляционной функцией входного сигнала.*

Для построения графика функции $s_{\text{вых}}(t)$ по заданной функции $B_s(\tau)$ достаточно в последней τ заменить на $t - t_0$ (и учесть коэффициент A). При $t = t_0$, т. е. при $\tau = 0$, величина $B_s(0)$ равна энергии сигнала. Следовательно, пиковое значение сигнала

$$s_{\text{вых}}(t_0) = AB_s(0) = A\mathcal{E}. \qquad (13.20)$$

Рассмотрим теперь параметры и статистические характеристики шума на выходе согласованного фильтра. При действии белого шума с нормальным законом распределения (именно такой шум и представляет основной интерес для практики) распределение шума на выходе линейного фильтра остается нормальным. Спектр шума на выходе, как это ясно из (7.2) и рис. 13.3, $W_{\text{вых}}(\omega) = K^2(\omega)\, W_0$. Следовательно, корреляционная функция шума на выходе согласованного фильтра

$$R_{\text{вых}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\text{вых}}(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega. \qquad (13.21)$$

Подставляя $K(\omega) = AS(\omega)$ и учитывая выражение (2.136), получаем

$$R_{\text{вых}}(\tau) = A^2 W_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = A^2 W_0 B_s(\tau). \qquad (13.22)$$

---

[1] Обратим внимание на то, что символом $B_s(\tau)$ обозначена корреляционная функция *детерминированного сигнала* $s(t)$. Использованные в гл. 4, 5 и 11 обозначения $K_x(\tau)$, $R_x(\tau)$ и r_x регламентированы (по ГОСТ) для статистики.

[2] Различие в знаках показателя степени $e^{i\omega\tau}$ не имеет значения ввиду четности функции $S^2(\omega)$.

Отсюда следует, что корреляционная функция шума на выходе согласованного фильтра по форме совпадает с корреляционной функцией входного сигнала (и, следовательно, с самим выходным сигналом).

Приравнивая $\tau = 0$, находим дисперсию (среднюю мощность) шума на выходе

$$\sigma^2_{\text{вых}} = R_{\text{вых}}(0) = A^2 W_0 B_s(0) = A^2 W_0 \mathcal{Э}. \tag{13.23}$$

Составим отношение пикового значения сигнала $s_{\text{вых}}(t)$ к среднеквадратическому значению шума $\sigma_{\text{вых}}$. В соответствии с формулами (13.19) и (13.23) приходим к результату (13.9): $s_{\text{вых}}(t_0)/\sigma_{\text{вых}} = (\mathcal{Э}/W_0)^{1/2}$.

Итак, при белом шуме отношение сигнал-шум не выхода фильтра, согласованного с сигналом, зависит только от энергии сигнала и энергетического спектра шума W_0.

Из этого заключения следует, что при заданных энергии и ширине спектра сигналу можно придавать различную форму, выгодную для решения конкретной задачи.

Так, для повышения скрытности передачи целесообразно удлинять сигнал при соответствующем уменьшении амплитуды ($A_0^2 T_c = \text{const}$). Это приводит к уменьшению отношения сигнал-помеха на входах любых радиоприемных устройств, что затрудняет извлечение информации из смеси сигнал + + шум. Лишь в приемнике с фильтром, согласованным с данным сигналом, восстанавливается наибольшее возможное при заданной энергии отношение сигнал-помеха. Следует, конечно, обеспечить неизменную ширину спектра при удлинении сигнала. Это можно осуществить, введя внутриимпульсную модуляцию, например частотную. Пример подобного сигнала — импульса с линейной ЧМ (ЛЧМ импульс) был рассмотрен в § 3.7, п. 3.

Удлинение радиоимпульса, дополняемое внутриимпульсной модуляцией, позволяет также снизить пиковую мощность генератора в передатчике при заданной энергии сигнала и при сохранении разрешающей способности сигнала (после сжатия в согласованном фильтре). Это преимущество более подробно рассматривается в § 13.5, п. 2.

Уточним смысл коэффициента A, фигурирующего во многих предыдущих выражениях. При определении *отношения* сигнал-помеха [см. (13.9)] в уточнении нет необходимости, однако при рассмотрении сигнала и помехи порознь, как, например, в выражениях (13.20) и (13.22), необходимо учитывать, что A — размерный коэффициент. Удобно нормировать A так, чтобы энергии входного и выходного сигналов были одинаковы, тем самым исключая из анализа усиление сигнала по энергии.

Энергия входного сигнала $\mathcal{Э} = B_s(0)$, а выходного

$$\mathcal{Э}_{\text{вых}} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2_{\text{вых}}(t)\, dt = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} B_s^2(\tau)\, d\tau. \tag{13.24}$$

Приравнивая $\mathcal{Э}_{\text{вых}}$ величине $\mathcal{Э}$, получаем условие нормирования коэффициента A

$$A = \left[B_s(0) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} B_s^2(\tau)\, d\tau \right]^{1/2}. \tag{13.25}$$

Подставив этот результат в (13.20), находим пик сжатого сигнала

$$s_{\text{вых}}(t_0) = AB_s(0) = [B_s(0)]^{3/2} \Big/ \left[\int_{-\infty}^{\infty} B_s^2(\tau)\, d\tau \right]^{1/2}. \tag{13.26}$$

Таким образом, пик сжатого сигнала (в отсутствие усиления) выражен через корреляционную функцию исходного сигнала $s(t)$. Применение выражения (13.26) иллюстрируется примерами, приведенными в следующем параграфе.

13.5. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ СОГЛАСОВАННЫХ ФИЛЬТРОВ

1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВИДЕОИМПУЛЬС

Зададим сигнал следующей функцией времени:

$$s(t) = \begin{cases} E & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T_c, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T_c. \end{cases} \tag{13.27}$$

Спектральная плотность такого сигнала, как известно,

$$S(\omega) = E\frac{1}{i\omega}\left(1 - e^{-i\omega T_c}\right), \qquad S(\omega) = \frac{2\left|\sin \omega T_c/2\right|}{\omega}. \tag{13.28}$$

По формуле (13.8), в которой t_0 приравниваем длительности импульса T_c, находим передаточную функцию согласованного фильтра

$$K(i\omega) = EA\frac{1}{(-i\omega)}\left(1 - e^{i\omega T_c}\right)e^{-i\omega T_c} = EA\frac{1 - e^{-i\omega T_c}}{i\omega}. \tag{13.29}$$

Рассматриваемый пример характерен тем, что $K(i\omega)$ отличается от спектра сигнала $S(\omega)$ лишь постоянным коэффициентом. Ясно, что и импульсная характеристика фильтра $g(t)$ совпадает по форме с самим сигналом $s(t)$; действительно, из соотношения (13.15) следует, что

$$g(t) = As(T_c - t) = \begin{cases} AE & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T_c, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T_c. \end{cases} \tag{13.30}$$

График $g(t)/A$ (рис. 13.6) по форме полностью совпадает с входным импульсом $s(t)$.

Дальнейшая задача сводится к отысканию структуры физической цепи, обладающей импульсной характеристикой, изображенной на рис. 13.6, и передаточной функцией, определяемой формулой (13.29).

Простейший сигнал (13.27) удобен для иллюстрации основных положений синтеза четырехполюсника по заданной импульсной характеристике $g(t) = As(t_0 - t)$ или, что то же, по комплексной передаточной функции $K(i\omega)$, являющейся преобразованием Фурье от $g(t)$.

Прежде всего отметим, что интеграл

$$\int_0^\infty \frac{|\ln S(\omega)|}{1+\omega^2}\,d\omega = \int_0^\infty \frac{|\ln|2\sin(\omega T_c/2)| - \ln\omega|}{1+\omega^2}\,d\omega < \infty,$$

т. е. интеграл сходится, так что в рассматриваемом примере функция $K(\omega) = AS(\omega)$ не противоречит критерию Пэли — Винера (13.16).

Показанную на рис. 13.7 структурную схему фильтра можно наметить непосредственно по передаточной функции (13.29). Входящий в эту функцию множитель $1/i\omega$ реализуется интегрирующим звеном, а второй множитель $(1 - e^{-i\omega T_c})$ — устройством вычитания, к которому сигнал попадает без задержки и с задержкой T_c. Передаточная функция идеальной линии задержки (без потерь) равна $e^{-i\omega T_c}$.

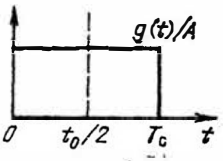


Рис. 13.6. Импульсная характеристика фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом

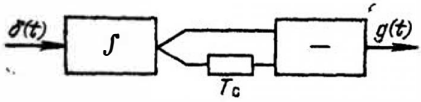


Рис. 13.7. Структурная схема фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом

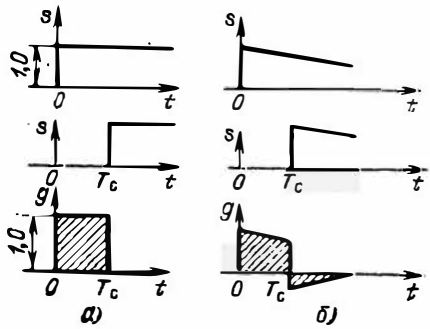


Рис. 13.8. Формирование импульсной характеристики в идеальном (*а*) и физическом (*б*) фильтрах

Объяснить работу этой схемы можно также на основании временны́х представлений: при подаче на вход единичного импульса ЭДС [дельта-функции $\delta(t)$] на выходе идеального интегратора появляется скачок напряжения в момент $t = 0$. На выходе устройства получается напряжение в виде разности двух единичных скачков, сдвинутых относительно друг друга на время T_c (рис. 13.8, *а*).

Реализация изображенного на рис. 13.7 устройства, которое обеспечивало бы точное интегрирование, а также задержку входного сигнала без искажения его формы (в пределах бесконечно широкого спектра единичного импульса), практически неосуществима. Можно, однако, получить достаточно хорошее приближение при использовании реальной интегрирующей *RC*-цепи, если обеспечить постоянную времени этой цепи, достаточно большую по сравнению с T_c. При этом на выходе вычитающего устройства импульс напряжения, являющийся разностью двух экспонент (рис. 13.8, *б*), может быть реализован достаточно близким к прямоугольному.

Найдем напряжение на выходе фильтра. Применяя формулу (13.18) и учитывая, что корреляционная функция прямоугольного импульса имеет вид равнобедренного треугольника с основанием $2T_c$ и высотой, равной энергии импульса E^2T_c, получаем

$$s_{вых}(t) = AB_s(t-t_0) = \begin{cases} AE^2 t & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T_c, \\ AE^2(2T_c - t) & \text{при } T_c \leqslant t \leqslant 2T_c. \end{cases} \tag{13.31}$$

Максимальное значение выходного сигнала, равное AE^2T_c, достигается в момент $t = T_c$, т. е. к концу действия входного сигнала (рис. 13.9).

Отношение сигнал-помеха в соответствии с (13.9)

$$s_{вых}(T_c)/\sigma_{вых} = E\sqrt{T_c/W_0}. \tag{13.32}$$

Определим теперь пик сжатого сигнала по формуле (13.26). В данном примере $B_s(0) = E^2 T_c$, а

$$\int_{-T_c}^{T_c} B_s^2(\tau)\,d\tau = 2\int_0^{T_c} B_s^2(\tau)\,d\tau = 2\int_0^{T_c} E^4\tau^2\,d\tau = 2E^4\,\frac{T_c^3}{3}.$$

Следовательно,

$$s_{\text{вых}}(t_0) = \frac{[B_s(0)]^{3/2}}{\left[\int_{-T_c}^{T_c} B_s^2(\tau)\,d\tau\right]^{1/2}} = \frac{(E^2 T_c)^{3/2}}{\sqrt{2/3}\,E^2 T_c^{3/2}} = \sqrt{3/2}\,E.$$

Таким образом, $s_{\text{вых}}(t_0)/E = \sqrt{3/2}$.

Как будет видно из дальнейших примеров, пик выходного сигнала намного превышает амплитуду входного при согласованной фильтрации сложных сигналов (с большой базой).

2. РАДИОИМПУЛЬС С ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

Рассмотрим сигнал, изображенный на рис. 13.10, *а*. Огибающая этого сигнала имеет прямоугольную форму, а частота заполнения нарастает по линейному закону (рис. 13.10, *б*) со скоростью

$$\beta = 2\omega_д/T_c = 2\cdot 2\pi f_д/T_c, \tag{13.33}$$

где T_c — длительность импульса; $2\omega_д$ — полное изменение частоты внутри импульса; $\omega_0 = 2\pi f_0$ — центральная частота заполнения. В дальнейшем исходим из условия, что $2\omega_д \ll \omega_0$. Таким образом,

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t, \quad -T_c/2 \leqslant t \leqslant T_c/2, \tag{13.34}$$

а мгновенное значение сигнала в интервале от $-T_c/2$ до $T_c/2$ определяется выражением

$$s(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \beta t^2/2). \tag{13.35}$$

Спектральная плотность подобного импульса была определена в гл.3. Было установлено, что модуль и фаза спектральной плотности определяются соответственно формулами (3.50) и (3.51).

Эти выражения могут быть в принципе положены в основу синтезирования фильтра, но создание четырехполюсника, точно реализующего столь сложные АЧХ и ФЧХ, представляет собой задачу трудную или даже вообще невыполнимую. Поэтому приходится прибегать к различным приемам аппроксимации АЧХ и ФЧХ. Первым этапом на этом пути является допущение о том, что огибающая спектра сигнала имеет прямоугольную форму, а

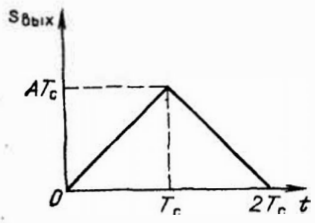


Рис. 13.9. Сигнал на выходе фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом

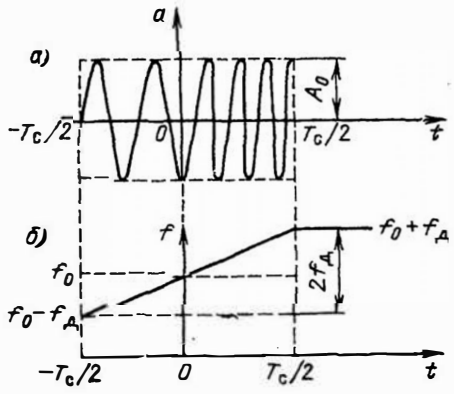


Рис. 13.10. ЛЧМ импульс (*а*) и закон изменения мгновенной частоты (*б*)

ФЧХ — форму квадратичной параболы. Таким образом, точные выражения заменяются приближенным [см. пояснения к формулам (3.50) и (3.51)]

$$S(\omega) \approx A_0 T_c / 2\sqrt{m} = \text{const}, \quad \omega_0 - \omega_д < \omega < \omega_0 + \omega_д, \tag{13.36}$$

$$\theta_s(\omega) \approx \frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\beta} = -\frac{\pi}{4} m \frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_д^2}, \quad \omega_0 - \omega_д < \omega < \omega_0 + \omega_д. \tag{13.37}$$

В § 3.7 было показано, что такое приближение тем лучше, чем больше $m = 2f_д T_c$ (постоянный фазовый сдвиг $\pi/4$ опущен).

При отсчете времени t от начала импульса фазовый спектр сигнала запишем в виде

$$\theta_s(\omega) = -\frac{\pi}{4} m \frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_д^2} - \frac{\omega T_c}{2}. \tag{13.37'}$$

Для сигнала с подобными амплитудными и фазовыми спектрами согласованный фильтр должен иметь прямоугольную АЧХ и ФЧХ, определяемую выражением

$$\varphi_K(\omega) = -\theta_s(\omega) - \omega T_c = \left[\frac{\pi}{4} m \frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_д^2} + \frac{\omega T_c}{2}\right] - \omega T_c =$$

$$= \frac{\pi}{4} m \frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_д^2} - \frac{\omega T_c}{2}. \tag{13.38}$$

Строго прямоугольная АЧХ также неосуществима. Поэтому дальнейшее упрощение заключается в замене прямоугольной амплитудной характеристики характеристикой реализуемого полосового фильтра. После этого фильтр может быть осуществлен в виде сочетания двух линейных четырехполюсников: полосового резонансного фильтра (обычный усилитель промежуточной частоты приемника) и специального четырехполюсника с равномерной АЧХ и квадратичной ФЧХ.

Заметим, что фазовой характеристике (13.38) соответствует групповое время запаздывания узкополосного сигнала

$$\tau(\omega) = \frac{d\varphi_K(\omega)}{d\omega} = \frac{\pi}{2} m \frac{(\omega-\omega_0)}{\omega_д^2} - \frac{T_c}{2}.$$

В качестве устройства с требуемой ФЧХ может быть использована любая цепь, у которой задержка в некотором частотном диапазоне (вблизи частоты ω_0) линейно зависит от частоты. Такими свойствами обладают, в частности, дисперсионные ультразвуковые линии задержки.

Определим сигнал на выходе фильтра. При этом будем иметь в виду не аппроксимированный, а точно согласованный фильтр, передаточная функция которого отвечает условию (13.8).

Основываясь на соотношении (13.18), воспользуемся выражением (3.106') для корреляционной функции входного сигнала, введенным в § 3.11:

$$B_a(\tau) \approx \frac{1}{2} E_0^2 T_c \frac{\sin\left[\pi m \frac{\tau}{T_c}\left(1-\frac{\tau}{T_c}\right)\right]}{\pi m (\tau/T_c)} \cos\omega_0 \tau.$$

Заменяя в этом выражении τ на $t - T_c$ и ограничиваясь рассмотрением участка вблизи точки $t = T_c$, т. е. в окрестности точки, где выходной сигнал достигает пикового значения, можем считать $\tau/T_c \ll 1$.

Тогда

$$B_a(t-T_c) \approx \frac{1}{2} E_0^2 T_c \frac{\sin[(\pi m/T_c)(t-T_c)]}{(\pi m/T_c)(t-T_c)} \cos\omega_0 (t-T_c).$$

Учитывая, что $m = (1/\pi)\,\omega_д T_c$ [см. (3.38)], последнее выражение перепишем в несколько иной форме

$$B_a(t-T_c) = \frac{1}{2} E_0^2 T_c \frac{\sin\omega_д (t-T_c)}{\omega_д (t-T_c)} \cos\omega_0 (t-T_c). \qquad (13.39)$$

Подставляя полученное выражение в (13.18), находим напряжение на выходе согласованного фильтра

$$u_{вых}(t) = AB_a(t-T_c) = \frac{1}{2} AE_0^2 T_c \frac{\sin\omega_д (t-T_c)}{\omega_д (t-T_c)} \cos\omega_0 (t-T_c) =$$

$$= U_{вых}(t) \cos\omega_0 (t-T_c), \qquad (13.40)$$

где огибающая

$$U_{вых}(t) = \frac{1}{2} AE_0^2 T_c \frac{\sin\omega_д (t-T_c)}{\omega_д (t-T_c)}. \qquad (13.41)$$

Заметим, что частота заполнения не модулирована и равна ω_0, т. е. средней частоте входного сигнала.

Поясним этот важный результат. ЛЧМ импульсу, определяемому выражением (13.25), при $m \gg 1$ соответствует амплитудный спектр прямоугольной формы и фазовый спектр в виде квадратичной параболы. После прохождения через согласованный фильтр амплитудный спектр остается прямоугольным, а фазовый спектр принимает вид линейной зависимости $\theta_{в\,вых}(\omega) = -(\omega - \omega_0)\, t_0$ в пределах $\omega_0 - \omega_д < \omega < \omega_0 + \omega_д$. Тем самым эффект ЧМ снимается и спектр приобретает вид двух лепестков прямоугольной формы (одного в области $\omega > 0$ и другого в области $\omega < 0$), симметричных относительно частот $\pm\omega_0$ и с линейным фазовым спектром. В соответствии с теоремой о смещении спектра (см. п. 3 § 2.8) подобная структура спектра соответствует функции времени вида $A(t)\cos\omega_0 t$, где $A(t)$ — медленная функция, имеющая смысл огибающей амплитуд сжатого сигнала. Спектральная плотность функции $A(t)$ получается сдвигом упомянутых двух лепестков на ω_0 к нулевой частоте и в рассматриваемом примере (ЛЧМ импульс) имеет форму прямоугольника с основанием, равным $2\omega_д$, с центром в точке $\omega = 0$. По аналогии с п. 4 § 2.10 (см. рис. 2.19), заменив ω_m и $\omega_д$, придем к $A(t)$ в виде функции $\mathrm{sinc}(2\pi f_д t)$.

Очевидно, что отсутствие модуляции высокочастотного заполнения сигнала на выходе согласованного фильтра имеет место при любом законе ЧМ входного сигнала. При определении же огибающей выходного сигнала необходимо учитывать изменение формы амплитудного спектра сигнала в фильтре (при непрямоугольной форме на входе фильтра).

Определим пик сжатого сигнала при нормировании энергии выходного сигнала к энергии сигнала на входе [см. (13.26)], в данном случае

$$B_a(0) = \mathcal{E} = {}^1\!/_2\, E_0^2 T_c, \text{ а } B_a(\tau) \approx {}^1\!/_2\, E_0^2 T_c \frac{\sin\omega_д \tau}{\omega_д \tau} \cos\omega_0 \tau.$$

Поэтому

$$s_{вых}(t_0) = \frac{({}^1\!/_2\, E_0^2 T_c)^{3/2}}{\left[\frac{1}{2} E_0^2 T_c \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\omega_д \tau}{(\omega_д \tau)^2} \cos^2\omega_0 \tau d\tau\right]^{1/2}}.$$

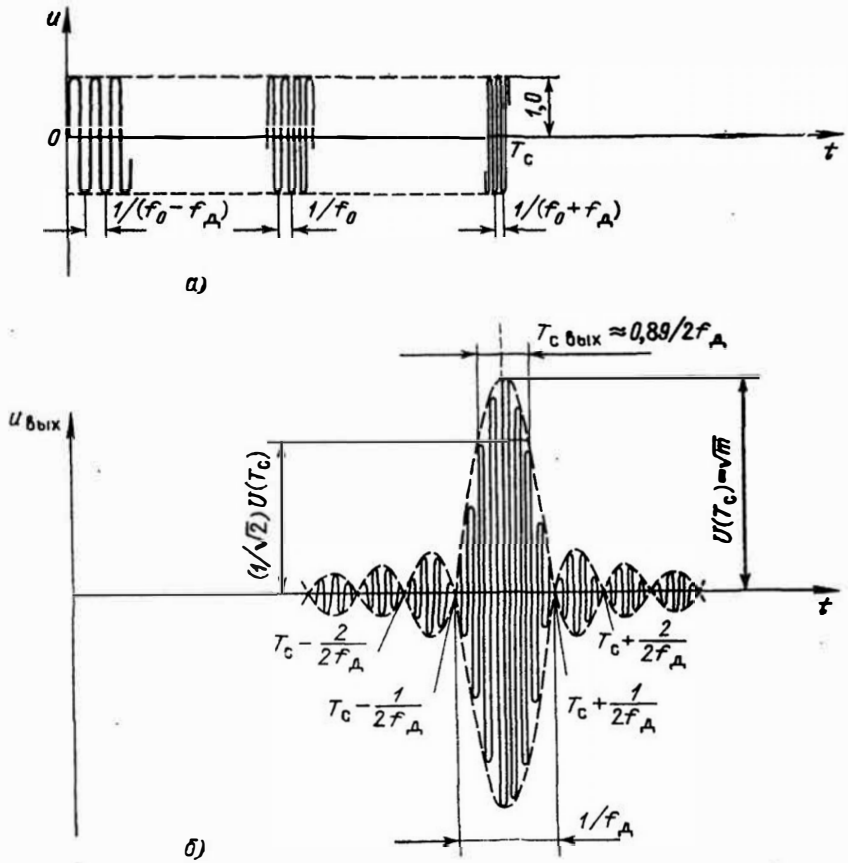


Рис. 13.11. ЛЧМ импульс на входе согласованного фильтра (*а*) и сжатый сигнал на выходе (*б*)

Подставив $\cos^2\omega_0\tau = {}^1/_2 + {}^1/_2 \cos 2\,\omega_0\tau$ и отбросив интеграл с подынтегральной функцией, содержащей множитель $\cos 2\,\omega_0\tau$, а также учитывая равенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \pi$, получаем окончательный результат

$$s_{вых}(t_0) = \frac{({}^1/_2 E_0^2 T_c)^{1/2}}{\left[\frac{1}{2\omega_д}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx\right]^{1/2}} = E_0\sqrt{2f_д T_c} = E_0\sqrt{m}.$$

Таким образом, выражение (13.41) можно переписать в форме

$$U_{вых}(t) = \sqrt{m}\,E_0\,\frac{\sin\omega_д(t-T_c)}{\omega_д(t-T_c)}. \qquad (13.42)$$

Сигналы на входе и выходе фильтра изображены на рис. 13.11 (при $E_0 = 1$). Наибольшая амплитуда выходного сигнала (в момент $t = T_c$) в $\sqrt{m}$ раз больше, чем на входе, а длительность основного лепестка, отсчитываемого между двумя нулями, равна $1/f_д$. Длительность выходного импульса на уровне $1/\sqrt{2}$ от максимального значения $T_{c\,вых} \approx 0{,}89/2f_д$.

Таким образом, отношение

$$T_c/T_{c\,вых} \approx 1{,}1\cdot 2f_д T_c, \qquad (13.43)$$

близкое по значению к параметру модуляции $m = 2f_д T_с$, можно назвать коэффициентом сжатия ЧМ импульса в согласованном фильтре.

Из выражения (13.42) видно, что компенсация фаз спектра сигнала — основная операция в согласованном фильтре — приводит к сжатию импульса в m раз при одновременном увеличении пика сигнала в $\sqrt{m}$ раз (при нормировке энергий входного и выходного сигналов).

Это весьма ценно для практики, так как позволяет удлинять импульс, генерируемый передатчиком, для увеличения энергии сигнала без потери разрешающей способности, которая определяется длительностью импульса на выходе согласованного фильтра. Техническое преимущество этого метода проявляется особенно в тех случаях, когда увеличение амплитуды импульсов в передатчике ограничивается импульсной мощностью электронных приборов, используемых для генерации колебаний. Значительно проще увеличивать энергию сигнала удлинением импульсов при одновременном наложении ЧМ. При этом параметр модуляции m должен расти пропорционально длительности $T_с$ излучаемого сигнала (при заданной длительности $T_{с\,вых}$ импульса на выходе согласованного фильтра). Иными словами, девиация частоты должна оставаться неизменной, а скорость изменения частоты β должна быть обратно пропорциональна $T_с$ (см. (13.39)).

3. ПАЧКА ОДИНАКОВЫХ ИМПУЛЬСОВ

Рассмотрим сигнал в виде группы из n одинаковых видеоимпульсов (рис. 13.12). Интервалы между импульсами могут быть неодинаковыми. Спектр такого сигнала

$$S(\omega) = S_1(\omega)\,(1 + e^{-i\omega T_1} + e^{-i\omega T_2} + \ldots + e^{-i\omega T_{n-1}}), \qquad (13.44)$$

где $S_1(\omega)$ — спектр первого имплульса, начинающегося в момент $t = 0$; $S_1(\omega)\,e^{-i\omega T_1}$ — спектр второго импульса, начинающегося в момент $t = T_1$, и т. д.

Так как полная длительность изображенного на рис. 13.12 сигнала равна $\tau_и + T_{n-1}$, то в соответствии с выражением (13.8) согласованный со спектром $S(\omega)$ фильтр должен иметь коэффициент передачи

$$\begin{aligned} K(i\omega) &= A\,S^*(\omega)\,e^{-i\omega(\tau_и + T_{n-1})} = \\ &= A\,S_1^*(\omega)\,e^{-i\omega\tau_и}\,e^{-i\omega T_{n-1}}\,(1 + e^{i\omega T_1} + e^{i\omega T_2} + \ldots + e^{i\omega T_{n-1}}) = \\ &= K_1(i\omega)\,[1 + e^{-i\omega(T_{n-1} - T_{n-2})} + e^{-i\omega(T_{n-1} - T_{n-3})} + \ldots \\ &+ e^{-i\omega(T_{n-1} - T_1)} + e^{-i\omega T_{n-1}}]. \end{aligned} \qquad (13.45)$$

В этом выражении $K_1(i\omega) = AS_1^*(\omega)\,e^{-i\omega\tau_и}$ представляет собой коэффициент передачи фильтра, согласованного с одиночным импульсом.

Основываясь на выражении (13.45), нетрудно наметить схему фильтра, согласованного с сигналом, изображенным на рис. 13.12. Подобный фильтр должен содержать звено с передаточной функцией $K_1(i\omega)$, обеспечивающее оптимальную внутриимпульсную обработку сигнала, и набор линий задержек. Величины этих задержек должны нарастать в порядке, обратном расстановке импульсов в пачке на входе фильтра. Один из возможных вариантов такого устройства показан на рис. 13.13, *а*.

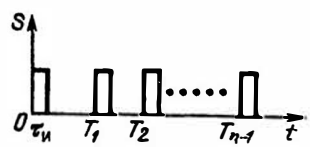


Рис. 13.12. Сигнал в виде пачки импульсов

Максимальный импульс на выходе сумматора получается, когда первый импульс входной последовательности, прошедший через задержку T_{n-1},

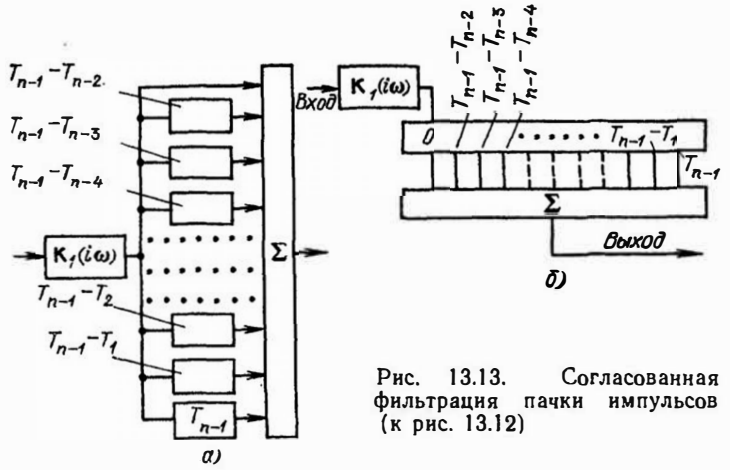


Рис. 13.13. Согласованная фильтрация пачки импульсов (к рис. 13.12)

суммируется со вторым импульсом, прошедшим через задержку $T_{n-1} - T_1$, с третьим импульсом, задержанным на $T_{n-1} - T_2$, и так далее вплоть до последнего импульса проходящего через рассматриваемое устройство без дополнительной задержки. Вместо набора из n линий задержки конструктивно проще и выгоднее применять одну линию задержки с n отводами (рис. 13.13, *б*). Отводы располагаются таким образом, чтобы соответствующие им задержки нарастали в том же порядке, что и на рис. 13.13, *а*.

Построение согласованного фильтра значительно упрощается, когда входной сигнал представляет собой последовательность равноотстоящих одинаковых импульсов, т. е. когда

$$T_1 = T,\ T_2 = 2T,\ T_3 = 3T,\ \ldots,\ T_{n-1} = (n-1)\,T.$$

Для этого случая выражение (13.45) можно записать так:

$$\mathbf{K}(i\omega) = \mathbf{K}_1(i\omega)\,[1 + e^{-i\omega T} + e^{-i\,2\omega T} + \ldots + e^{-i\,(n-1)\,\omega T}] = \\ = \mathbf{K}_1(i\omega)\,\mathbf{K}_2(i\omega). \qquad (13.46)$$

При достаточно большом числе n выражение в квадратных скобках можно свернуть по формуле геометрической прогрессии

$$\mathbf{K}_2(i\omega) = 1/(1 - e^{-i\omega T}). \qquad (13.47)$$

Структура выражения (13.46) указывает на возможность осуществления согласованного фильтра в виде каскадного соединения двух четырехполюсников: одного с передаточной функцией $\mathbf{K}_1(i\omega)$, как и в схеме на рис. 13,13, *а*, согласованного с одиночным импульсом, и другого в виде цепи с обратной связью, содержащей всего лишь одну линию задержки T (рис. 13.14). Передаточная функция подобной цепи (на рис. 13.14 обведенной штриховой линией) определяется выражением

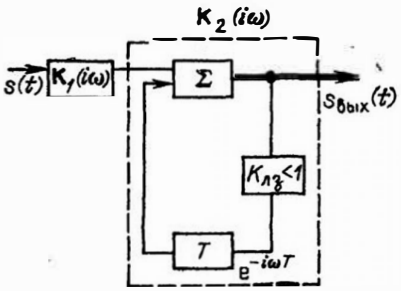


Рис. 13.14. Гребенчатый фильтр

$$\mathbf{K}_2(i\omega) = \frac{1}{1 - K_{лэ}\,e^{-i\omega T}} = 1 + \\ + K_{лэ}\,e^{-i\omega T} + K_{лэ}^2\,e^{-i2\omega T} + \ldots \qquad (13.48)$$

Символом $K_{лэ}$ обозначен безынерционный четырехполюсник, учитыва-

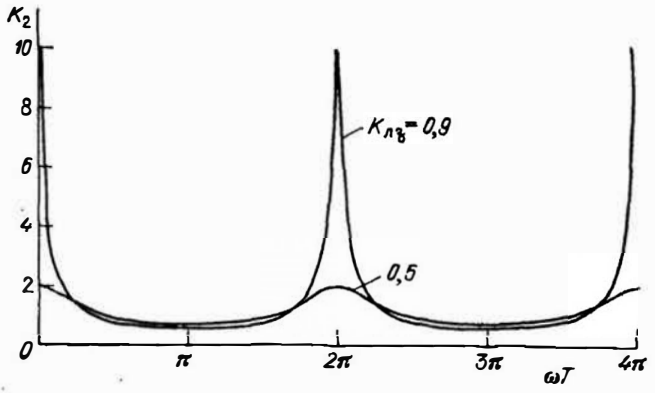


Рис. 13.15. Амплитудно-частотная характеристика гребенчатого фильтра

ющий затухание в линии задержки (достигающее десятков децибел) и включающий в себя усилитель, компенсирующий это затухание. Для устойчивости цепи коэффициент $K_{лз}$ должен быть меньше единицы. Сама линия задержки при этом может рассматриваться как идеальная с передаточной функцией $e^{-i\omega T}$.

При частотах, отвечающих условию $\omega T = (2k + 1)\pi$, $k = 0,1, 2, \ldots$, обратная связь отрицательна и $\mathbf{K}_2(i\omega) = 1/(1 + K_{лз})$. При частотах $\omega T = 2k\pi$, $k = 0,1, 2, \ldots$, обратная связь положительна и $\mathbf{K}_2(i\omega) = 1/(1 - K_{лз})$.

Амплитудно-частотная характеристика цепи приобретает вид, показанный на рис. 13.15. Фильтры с подобной характеристикой называются г р е б е н ч а т ы м и . Они эффективны для выделения сигналов в виде периодической последовательности импульсов на фоне белого шума. Чем больше число импульсов в пачке n и чем ближе $K_{лз}$ к единице, тем лучше приближение цепи к согласованному фильтру.

Импульсная характеристика фильтра $\mathbf{K}_2(i\omega)$

$$g(t) = \delta(t) + K_{лз}\,\delta(t - T) + K_{лз}^2\,\delta(t - 2T) + \ldots$$

Коэффициенты при единичных импульсах, возникающих на выходе четырехполюсника через интервалы T, убывают по закону, близкому к экспоненте. Таким образом, импульсная характеристика фильтра K_2 имеет вид, показанный на рис. 13.16.

Все приведенные выше рассуждения можно распространить и на фильтрацию последовательности радиоимпульсов. Необходимо лишь под $\mathbf{K}_1(i\omega)$ подразумевать коэффициент передачи фильтра, согласованного с одиночным радиоимпульсом. Кроме того, для обеспечения сложения задержанных радиоимпульсов в фазе требуется введение корректирующих фазовых сдвигов (при $T \neq k2\pi$).

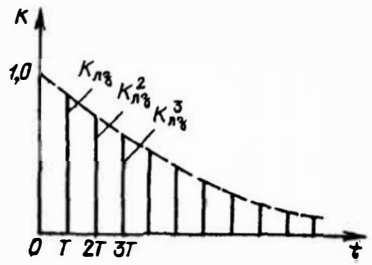
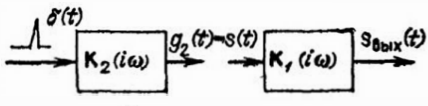


Рис. 13.16. Импульсная характеристика гребенчатого фильтра

Рис. 13.17. Формирование сигнала, сопряженного с заданным фильтром



13.6. ФОРМИРОВАНИЕ СИГНАЛА, СОПРЯЖЕННОГО С ЗАДАННЫМ ФИЛЬТРОМ

Рассмотрим одно интересное свойство схемы, представленной на рис. 13.17. На этой схеме $\mathbf{K}_1(i\omega)$ и $\mathbf{K}_2(i\omega)$ — передаточные функции фильтров на приемной и передающей сторонах канала связи, при этом выполняется условие

$$\mathbf{K}_1(i\omega) = \mathbf{K}_2^*(i\omega),$$

т. е. функции $\mathbf{K}_1(i\omega)$ и $\mathbf{K}_2(i\omega)$ являются комплексно-сопряженными.

При ударном возбуждении четырехполюсника $\mathbf{K}_2(i\omega)$ единичным импульсом $\delta(t)$ на его выходе возникает колебание (импульсная характеристика)

$$g_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_2(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega,$$

которое используется в качестве сигнала, передаваемого по каналу связи. Таким образом, $g_2(t) = s(t)$.

Нетрудно видеть, что по отношению к этому сигналу приемный фильтр $\mathbf{K}_1(i\omega)$ согласован, так как его импульсная характеристика $g_1(t)$ является зеркальным отражением сигнала $s(t)$.

Действительно,

$$g_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_1(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_2^*(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega =$$

$$= g_2(-t) = s(-t).$$

(Постоянная задержка t_0, входящая в выражение (13.15), здесь опущена.)

Сигнал $s_{вых}(t)$ на выходе фильтра $\mathbf{K}_1(i\omega)$ максимизирован в смысле соотношения (13.17).

Итак, для формирования на передающей стороне сигнала, сопряженного с заданным приемным фильтром, можно применить принцип ударного возбуждения «обратного» фильтра. Под обратным подразумевается фильтр, передаточная функция которого комплексно сопряжена с передаточной функцией «прямого» фильтра.

Так как формирование сигналов и обработка в приемнике обычно осуществляются на промежуточной частоте, то схема (см. рис. 13.17) должна быть дополнена высокочастотным генератором и преобразователем для сдви-

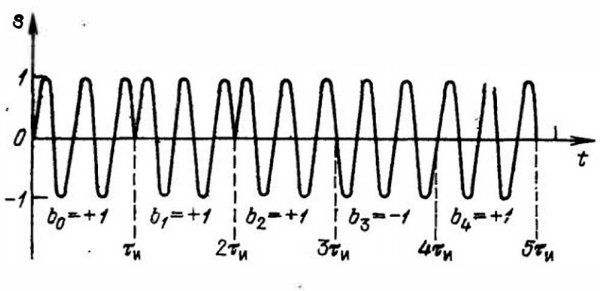


Рис. 13.18. Высокочастотное колебание, манипулированное по фазе

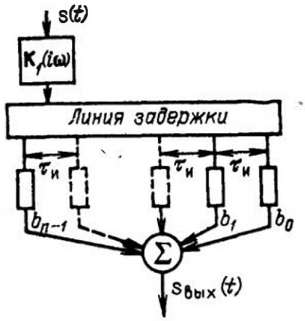


Рис. 13.19. Структурная схема фильтра, согласованного с фазоманипулированным сигналом

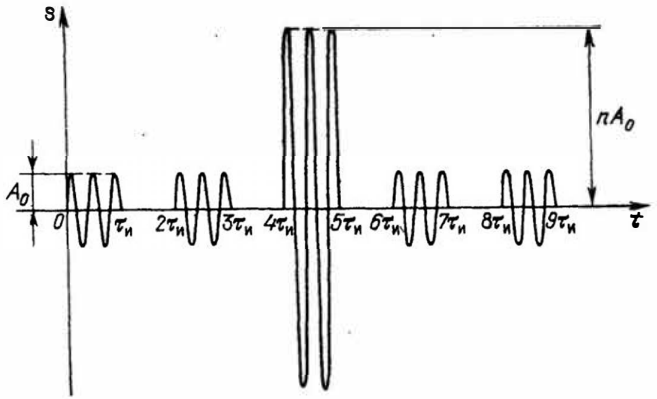


Рис. 13.20. Колебание на выходе фильтра, согласованного с фазоманипулированным сигналом

га спектра сигнала в область высокой частоты в передатчике, а также гетеродином с преобразователем для обратного преобразования частоты в приемнике.

Несмотря на кажущуюся простоту изложенного принципа формирования сигнала, обеспечивающего оптимальность его обработки в приемнике, реализация обратного фильтра является весьма сложной задачей, которая может быть успешно решена не для любого сигнала.

Относительно просто подобная задача решается для системы связи, в которой используется фазоманипулированный сигнал, представляющий собой последовательность радиоимпульсов, следующих без интервалов и различающихся между собой только фазой высокочастотного заполнения: начальная фаза в каждом из импульсов может быть либо 0, либо π, причем чередование фаз осуществляется по определенному коду: k-му импульсу приписывается коэффициент b_k, равный ± 1. Знак плюс соответствует фазе 0, а знак минус — фазе π.

На рис. 13.18 изображен подобный сигнал из пяти радиоимпульсов с коэффициентами $b_0 = +1$, $b_1 = +1$, $b_2 = +1$, $b_3 = -1$ и $b_4 = +1$.

Структурная схема фильтра, используемого для обработки подобного сигнала, изображена на рис. 13.19. Фильтр представляет собой соокупность четырехполюсника $\mathbf{K}(i\omega)$, согласованного с одиночным импульсом (с длительностью $\tau_и$), и многоотводной линии задержки. Число отводов, следующих через интервалы $\tau_и$, равно числу элементарных радиоимпульсов в сигнале. Безынерционные четырехполюсники b_0, b_1, b_2,... пропускают импульсы, поступающие с отводов линии задержки, без изменения или с изменением на 180° фазы высокочастотного заполнения импульсов.

Чередование коэффициентов b_0, b_1,... является зеркальным по отношению к сигналу. В результате напряжение на выходе приобретает вид, показанный на рис. 13.20 (без учета влияния четырехполюсника $\mathbf{K}_1(i\omega)$ на форму импульсов).

К концу действия входного сигнала на выходе сумматора выделяется максимальный импульс с амплитудой nA_0, где n — число элементарных импульсов. Таким образом, рассматриваемая цепь осуществляет *сжатие сигнала*, причем коэффициент сжатия равен n, т. е. числу отводов линии задержки. Число n в данном случае играет такую же роль, как произведение $2f_д T_с = m$ для фильтра, осуществляющего сжатие радиоимпульсов с частотно-модулированным заполнением.

Структурная схема обратного фильтра для получения сигнала, представленного на рис. 13.18, изображена на рис. 13.21. От схемы на рис. 13.19 эта схема отличается тем, что входной сигнал подается к противоположному концу линии задержки, благодаря чему чередование коэффициентов b_0, b_1, ..., b_{n-1} является зеркальным по отношению к схеме рис. 13.19. Кроме того, передаточная функция $\mathbf{K}_2(i\omega)$ четырехполюсника, осуществляющего внутрим-

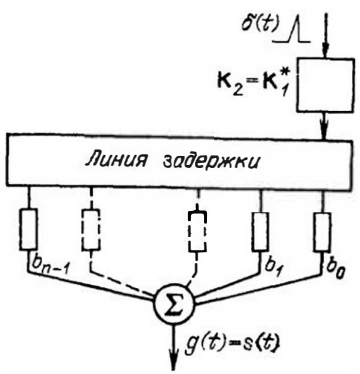


Рис. 13.21. Структурная схема фильтра, обратного по отношению к фильтру на рис. 13.19

пульсную обработку, является комплексно-сопряженной функции $\mathbf{K}_1(i\omega)$, обозначенной на рис. 13.19. Для импульса, симметричного относительно середины, $\mathbf{K}_2(i\omega)$ совпадает с $\mathbf{K}_1(i\omega)$. По существу, фильтры, показанные на рис. 13.19 и 13.21, совершенно идентичны, что является большим преимуществом, особенно в тех случаях, когда приемник и передатчик находятся в одном месте, например в радиолокаторе. В подобных случаях генерирование сигнала и его оптимальная обработка при приеме могут быть осуществлены с помощью одного фильтра. Подобная система получила название *ключ-замок*.

13.7. ФИЛЬТРАЦИЯ ЗАДАННОГО СИГНАЛА ПРИ НЕБЕЛОМ ШУМЕ

Пусть на полностью известный сигнал $s(t)$ линейно (аддитивно) накладывается шум с неравномерным энергетическим спектром $W(\omega)$ (небелый шум). Требуется синтезировать фильтр, максимизирующий отношение сигнал-помеха. В отличие от ранее рассмотренных задач в данном случае передаточная функция должна быть согласована не только со спектром сигнала $S(\omega)$, но и с энергетическим спектром шума $W(\omega)$ [22].

Наиболее простым способом отыскания требуемой передаточной функции $\mathbf{K}(i\omega)$ является приведение заданного шума к белому. Для выяснения сути этого способа рассмотрим вспомогательную структурную схему, показанную на рис. 13.22. На этой схеме $\mathbf{K}(i\omega)$ обозначает искомую передаточную функцию синтезируемого фильтра, а $\mathbf{K}_1(i\omega)$ и $1/\mathbf{K}_1(i\omega)$ являются передаточными функциями двух вспомогательных условных четырехполюсников, введение которых не оказывает никакого влияния на работу устройства, так как их результирующая передаточная функция равна единице.

Так как функцию $\mathbf{K}_1(i\omega)$ можно выбирать произвольно, то модуль этой функции зададим в виде

$$K_1(\omega) = \sqrt{W_0/W(\omega)}, \tag{13.49}$$

где W_0 — постоянная величина.

Тогда на выходе первого четырехполюсника будет действовать шум с равномерным энергетическим спектром

$$W_1(\omega) = W(\omega)\,[K_1(\omega)]^2 = W_0 = \text{const}, \text{ т. е. } \textit{белый шум}.$$

Само собой разумеется, сигнал на выходе этого четырехполюсника отличается от входного сигнала, так как спектральная плотность

$$\mathbf{S}_1(\omega) = \mathbf{S}(\omega)\,\mathbf{K}_1(i\omega) \tag{13.50}$$

отличается от $S(\omega)$. Однако это обстоятельство несущественно; основной задачей является максимизация отношения сигнал-помеха на выходе всего устройства. Поэтому важно отношение энергии сигнала к энергетическому спектру шума, а форма сигнала при этом роли не играет.

Так как в рассматриваемом сечении схемы шум является белым, то для получения на выходе максимума отношения сигнал-помеха вся последующая часть устройства должна иметь передаточную функцию, отвечающую условию (13.8). Таким образом,

$$\frac{1}{\mathbf{K}_1(i\omega)}\,\mathbf{K}(i\omega) = A\,\mathbf{S}_1^*(\omega)\,e^{-i\omega t_0}. \tag{13.51}$$

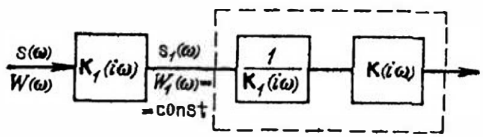


Рис. 13.22. Согласованная фильтрация заданного сигнала при небелом шуме

Левая часть этого выражения является результирующей передаточной функцией четырехполюсника, обведенного на рис. 13.22 штри-

ховой линией, а правая часть — функцией, комплексно-сопряженной по отношению к спектру $S_1(\omega)$ и дополненной множителем $e^{-i\omega t_0}$.

Из выражения (13.51) получаем

$$\mathbf{K}(i\omega) = A\,\mathbf{S}_1^*(\omega)\,\mathbf{K}_1(i\omega)\,e^{-i\omega t_0}. \qquad (13.52)$$

Но из (13.50) следует, что $\mathbf{S}_1^*(\omega) = \mathbf{S}^*(\omega)\,\mathbf{K}_1^*(i\omega)$.

Таким образом,

$$\mathbf{K}(i\omega) = A\,\mathbf{S}^*(\omega)\,\mathbf{K}_1^*(i\omega)\,\mathbf{K}_1(i\omega)\,e^{-i\omega t_0} = A\,\mathbf{S}^*(\omega)\,[K_1(\omega)]^2\,e^{-i\omega t_0}.$$

Подставляя сюда соотношение (13.49), окончательно получаем

$$\mathbf{K}(i\omega) = AW_0\,\frac{\mathbf{S}^*(\omega)}{W(\omega)}\,e^{-i\omega t_0}. \qquad (13.53)$$

Нетрудно истолковать физический смысл этого соотношения.

Как и в случае белого шума, для максимизации отношения сигнал-помеха в фильтре должна осуществляться компенсация начальных фаз спектра входного сигнала $\mathbf{S}(\omega)$. Поэтому в правую часть (13.53) входит комплексно-сопряженная функция $\mathbf{S}^*(\omega)$. Однако модуль передаточной функции должен быть, во-первых, пропорционален модулю $S(\omega)$ (как и в случае белого шума), и, во-вторых, обратно пропорционален энергетическому спектру шума на входе фильтра. Тем самым обеспечивается подчеркивание тех компонентов спектра сигнала, при которых интенсивность шума меньше.

13.8. ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ

При обработке сложных сигналов с внутриимпульсной модуляцией начальная фаза θ_0 высокочастотного заполнения в выражении

$$a(t, \theta_0) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t) + \theta_0] \qquad (13.54)$$

обычно является неизвестной величиной.

Если фильтр согласован с сигналом $a(t, 0) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)]$ без учета θ_0, то при наличии фазового сдвига θ_0 фильтр оказывается рассогласованным. Выясним влияние этого рассогласования на выходное колебание.

Основываясь на общем выражении (13.18) и опуская для упрощения анализа постоянную задержку t_0, сигнал на выходе согласованного фильтра (при $\theta_0 = 0$) представляем в форме (см. приложение 3)

$$a_{\text{вых}}(t, 0) = \frac{C}{2}\,\mathrm{Re}\left[e^{i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{A}(x)\,\mathbf{A}^*(x-t)\,dx\right] = \frac{1}{2}\,C\,\mathrm{Re}\,[e^{i\omega_0 t}\,B_A(t)]. \qquad (13.55)$$

Введем в рассмотрение начальную фазу θ_0 входного сигнала. Для этого достаточно функцию $\mathbf{A}(x)$ домножить на $e^{i\theta_0}$.

Новый интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{A}(x)\,e^{i\theta_0}\,\mathbf{A}^*(x-t)\,dx$ определяет взаимную корреляцию между функциями $\mathbf{A}(x)\,e^{i\theta_0}$ и $\mathbf{A}^*(x-t)$, однако после вынесения множителя $e^{i\theta_0}$ за знак интеграла получается произведение $e^{i\theta_0}\,B_A(t)$. Таким образом, приходим к следующему выражению для сигнала на выходе рассогласованного фильтра:

$$a_{\text{вых}}(t, \theta_0) = \frac{C}{2}\,\mathrm{Re}\,[e^{i(\omega_0 t + \theta_0)}]\,B_A(t). \qquad (13.56)$$

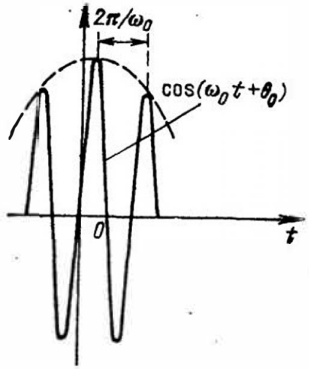


Рис. 13.23. Высокочастотное заполнение сжатого ЛЧМ импульса при начальной фазе сигнала $\theta_0=90°$

Из сравнения этого выражения с (13.55) вытекает, что для учета начальной фазы достаточно прибавить θ_0 к слагаемому $\omega_0 t$, сохранив огибающую выходного сигнала.

Проиллюстрируем этот результат на примере ЛЧМ импульса, рассмотренного в примерах § 3.11 и 13.5.

Из соотношений (3.103) и (3.106′) после замены в них τ на t (задержка сигнала не учитывается) вытекает следующее выражение для корреляционной функции огибающей:

$$B_A(t)=T_c\frac{\sin\left[\pi m\,\frac{t}{T_c}\left(1-\frac{t}{T_c}\right)\right]}{\pi m\,(t/T_c)}.$$

Таким образом,

$$a_{вых}(t,\,\theta_0)=AT_c\frac{\sin\left[\pi m\,\frac{t}{T_c}\left(1-\frac{t}{T_c}\right)\right]}{\pi m\,(t/T_c)}\cos(\omega_0 t+\theta_0). \qquad (13.57)$$

На рис. 13.23 изображено выходное колебание на отрезке времени вблизи пика при $\theta_0=90°$ для фильтра, согласованного с ЛЧМ сигналом. Параметры входного сигнала соответствуют п. 2 § 13.5 (см. рис. 13.10). В зависимости от θ_0 положение пика сжатого сигнала на оси времени может изменяться в пределах $\pm\pi/\omega_0$, т. е. половины периода высокочастотного заполнения. Из этого примера видно, что при достаточно большом числе периодов, приходящихся на длительность сжатого сигнала, влияние θ_0 на пиковое значение неизначительно. Если дальнейшая обработка сигнала ведется по огибающей, то при выполнении указанного выше условия относительно высокочастотного заполнения влияние θ_0 исключается.

13.9. СОГЛАСОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО СИГНАЛА. КВАДРАТУРНАЯ ОБРАБОТКА

В гл. 3 и 6 отмечалось, что комплексная огибающая $\mathbf{A}(t)$ узкополосного сигнала $a(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)]$ содержит в себе всю информацию, обусловленную как амплитудной, так и угловой модуляцией. Во многих практических задачах радиотехники обработку сигнала целесообразно производить непосредственно по огибающей $\mathbf{A}(t)$ с исключением несущей частоты ω_0. Такой подход особенно актуален при цифровой обработке сигналов. Осуществление цифровой обработки на частотах радиотехнического диапазона усложняется из-за требования чрезвычайно высокого быстродействия АЦП и арифметических устройств цифрового фильтра. В связи с этим цифровая обработка, как правило, производится в тракте видеочастоты приемного устройства.

Структурная схема устройства, выделяющего комплексную огибающую узкополосного сигнала $a(t)$, представлена на рис. 13.24. Устройство состоит из двух одинаковых преобразователей частоты с общим гетеродином, частота которого ω_0 совпадает с несущей частотой сигнала $a(t)$.

Избирательная цепь на выходе каждого преобразователя представляет собой фильтр нижних частот (RC-цепь). Полоса прозрачности предполагается достаточной для неискаженного воспроизведения спектра передаваемого сообщения. При выполнении условия $E_г\gg A_{max}$ осуществляется линейное преобразование частоты, в результате которого колебание разностной частоты на выходе первого преобразователя принимает вид (см. § 8.11)

$$s_c(t)=a_2 E_г A(t)\cos\{[\omega_0 t+\theta(t)]-\omega_0 t\}=k_{пр}A(t)\cos\theta(t). \qquad (13.58)$$

На выходе второго преобразователя благодаря сдвигу фазы гетеродинного колебания на угол $\varphi = 90^\circ$ получается колебание

$$s_s(t) = a_2 E_\Gamma A(t) \cos\{[\omega_0 t + \theta(t)] - (\omega_0 t + 90^\circ)\} = k_{\text{пр}} A(t) \sin\theta(t). \quad (13.59)$$

Символом $k_{\text{пр}} = a_2 E_\Gamma$ обозначен постоянный коэффициент, имеющий смысл крутизны характеристики преобразования; a_2 — коэффициент при квадратичном члене в выражении (8.10).

Устройства, выделяющие на выходе колебание, содержащее информацию о фазе $\theta(t)$ (слагаемое $\omega_0 t$ исключено), обычно называют фазовыми детекторами.

Колебания $s_c(t)$ и $s_s(t)$ совпадают соответственно с действительной и мнимой частями комплексной огибающей $\mathbf{A}(t)$ [см. (3.90)]. В этом смысле рассматриваемая обработка является квадратурной.

Совокупность физических колебаний $s_c(t)$ и $s_s(t)$, записанная в виде суммы $s_c(t) + is_s(t)$, позволяет трактовать комплексное колебание как физический процесс. Следует при этом иметь в виду, что рассматриваемое колебание не является аналитическим сигналом. Это объясняется тем, что спектральная плотность комплексной огибающей $\mathbf{A}(t)$ не обращается в нуль в области частот $\omega < 0$ (см. § 3.10).

Обратимся к синтезу фильтра, согласованного с комплексной огибающей $\mathbf{A}(t)$.

Свойства согласованной фильтрации, изложенные в § 13.1—13.4 для действительных сигналов, полностью распространяются и на комплексные сигналы. Это очевидно, так как:

в фазовых детекторах (см. рис. 13.24) отсутствует взаимодействие между сигналом и помехой (линейное преобразование);

сохраняется равномерность энергетического спектра помехи на выходе (белый шум);

коэффициент преобразования $k_{\text{пр}}$ одинаков для сигнала и помехи.

Исходный радиосигнал запишем в форме

$$a(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t) + \theta_0], \quad 0 \leqslant t \leqslant T_c, \quad (13.60)$$

где θ_0 — начальная фаза, обычно неизвестная.

Имея в виду квадратурную обработку, подвергаем сигнал $a(t)$ преобразованию по схеме рис. 13.24, причем на первом этапе начальную фазу θ_0 учитывать не будем. Тогда получим следующие сигналы на выходах фазовых детекторов [см. (13.58) и (13.59)]:

$$s_c(t) = A(t) \cos\theta(t), \; s_s(t) = A(t) \sin\theta(t), \; \dot{s}(t) = A(t) e^{i\theta(t)} = \mathbf{A}(t). \quad (13.61)$$

(Постоянный коэффициент $k_{\text{пр}}$ опущен.)

Задача сведена к согласованной фильтрации полностью известного комплексного сигнала $\dot{s}(t) = \mathbf{A}(t)$.

Рассмотрим сначала аналоговую обработку. Сигнал на выходе согласованного фильтра по форме совпадает с корреляционной функцией входного сигнала, в данном случае с корреляционной функцией комплексной огибающей (задержку t_0 не учитываем):

$$B_A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(x)\, \mathbf{A}^*(x+t)\, dx \quad (13.62)$$

[см. (3.98)].

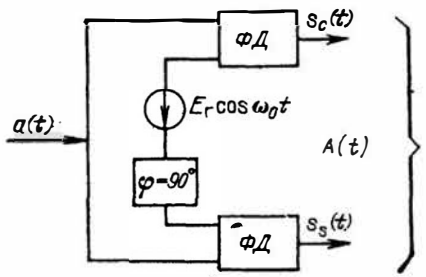


Рис. 13.24. Выделение квадратурных составляющих комплексной огибающей узкополосного сигнала

Следовательно,

$$\dot{s}_{\text{вых}}(t) = \mathbf{A}_{\text{вых}}(t) = CB_A(t), \tag{13.63}$$

где C — постоянный коэффициент.

В момент $t = 0$

$$B_A(0) = \int |\mathbf{A}(x)|^2 \, dx$$

— действительная величина, однако при $t \neq 0$ $B_A(t)$ является комплексной функцией:

$$B(t) = B_{\text{Re}}(t) + iB_{\text{Im}}(t). \tag{13.64}$$

Для выявления структуры согласованного фильтра воспользуемся соотношением вида (13.15) (постоянный коэффициент A заменен на C):

$$\dot{g}(t) = C\,\mathbf{A}^*(t_0 - t).$$

Ограничимся здесь частным случаем *симметричного* сигнала $[\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(-t)]$, а также опустим постоянную задержку t_0 (обобщение см. в приложении 4). Тогда

$$\dot{g}(t) = C\,\mathbf{A}^*(t) = C\,[A(t)\cos\theta(t) - iA(t)\sin\theta(t)] = g_{\text{Re}}(t) - ig_{\text{Im}}(t), \tag{13.65}$$

где $g_{\text{Re}}(t)$ и $q_{\text{Im}}(t)$ — действительная и мнимая части комплексной импульсной характеристики согласованного фильтра $\dot{g}(t)$.

Сигнал на выходе фильтра определим с помощью интегральной свертки

$$\dot{s}_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{s}(x)\,\dot{g}(t-x)\,dx = \mathbf{A}_{\text{вых}}(t). \tag{13.66}$$

Подставив в это выражение $\dot{s}(t) = s_c(t) + is_s(t)$, а также импульсную характеристику по формуле (13.65), получим

$$\dot{s}_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_c(x)\,g_{\text{Re}}(t-x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} s_s(x)\,g_{\text{Im}}(t-x)\,dx -$$

$$- i\left[\int_{-\infty}^{\infty} s_c(x)\,g_{\text{Im}}(t-x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} s_s(x)\,g_{\text{Re}}(t-x)\,dx\right] =$$

$$= s_{c\,\text{вых}}(t) + is_{s\,\text{вых}}(t). \tag{13.67}$$

Первый интеграл определяет отклик физической цепи с импульсной характеристикой (действительной) $g_{\text{Re}}(t)$ на воздействие $s_c(t)$, второй интеграл — отклик цепи с импульсной характеристикой $g_{\text{Im}}(t)$ (также действительной) на воздействие $s_s(t)$ и т. д.

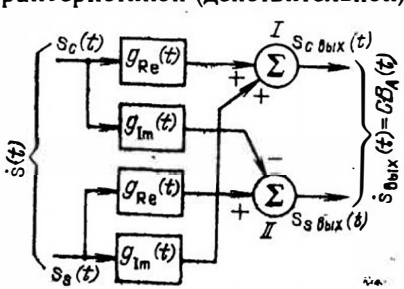


Рис. 13.25. Согласованная фильтрация комплексного сигнала

Алгоритм (13.67) реализуется схемой, показанной на рис. 13.25.

Сопоставление выражений (13.64) и (13.67) показывает, что сигнал на выходе сумматора I соответствует функции $CB_{\text{Re}}(t)$, а на выходе сумматора II — функции $CB_{\text{Im}}(t)$.

После дополнительной обработки (квадрирование и суммирование), по-

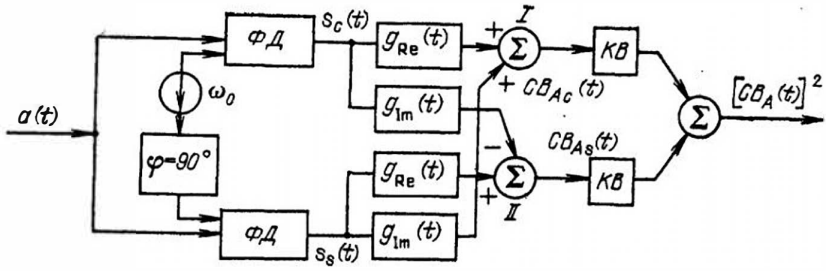


Рис. 13.26. Структурная схема согласованного фильтра

казанной в правой части полной структурной схемы (рис. 13.26), получаем окончательное выражение

$$[s_{\text{вых}}(t)]^2 = C^2 [B_{Ac}^2(t) + B_{As}^2(t)] = C^2 [B_A(t)]^2. \qquad (13.68)$$

Возведение в квадрат является нелинейным преобразованием. Однако эта часть обработки производится после максимизации отношения сигнал-помеха в линейной части устройства, поэтому взаимодействие сигнала и помехи проявляется незначительно.

Введем теперь в рассмотрение начальную фазу θ_0, сохраняя прежние значения $g_{\text{Re}}(t)$ и $g_{\text{Im}}(t)$. Тогда функция $\mathbf{A}(x)$ под интегралом в (13.62) должна быть умножена на постоянное число e^{iQ_0}, из чего следует, что при $\theta_0 \neq 0$ сигнал на выходе сумматоров I и II будет

$$CB_A(t)\, e^{i\theta_0} = \cos\theta_0 B_{Ac}(t) - \sin\theta_0 B_{As}(t) + i\,[\cos\theta_0 B_{Ac}(t) +$$

$$+ \sin\theta_0 B_{Ac}(t)],$$

а в результате последующей обработки на выходе всего устройства получится сигнал, совпадающий с выражением (13.68).

Таким образом, применение квадратурной обработки устраняет влияние неизвестной начальной фазы θ_0 на эффект фильтрации.

Итак, для осуществления согласованной фильтрации на видеочастоте в аналоговой форме требуется создание фильтров двух видов: с импульсными характеристиками $g_{\text{Re}}(t) = A(t)\cos\theta(t)$ и $g_{\text{Im}}(t) = A(t)\sin\theta(t)$.

При обработке сигналов сложной формы реализация указанных импульсных характеристик является трудной задачей. Например, при согласованной фильтрации ЛЧМ импульса эти характеристики должны быть следующими:

$$g_{\text{Re}}(t) = \cos\beta t^2/2,\ g_{\text{Im}}(t) = \sin\beta t^2/2,\ |t| \leqslant T_c/2.$$

Очевидно, что аналоговую обработку ЛЧМ импульсов затруднительно осуществлять с помощью квадратурной схемы в тракте видеочастоты.

При цифровой же обработке отмеченные трудности устраняются.

13.10. ЦИФРОВОЙ СОГЛАСОВАННЫЙ ФИЛЬТР

Рассмотренные выше принципы квадратурной обработки, а также соотношения между сигналами на входе и выходе аналогового фильтра полностью распространяются и на цифровую обработку. Однако собственно

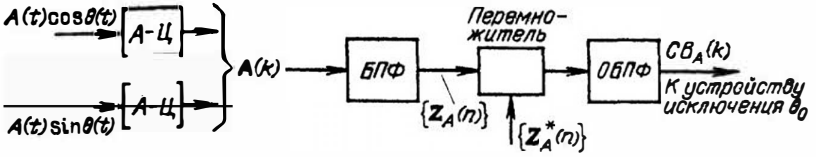


Рис. 13.27. Согласованная фильтрация цифрового сигнала с использованием БПФ

фильтр обычно синтезируется на основе спектрального подхода, с использованием БПФ.

Поскольку согласованный фильтр должен выдавать на выходе сигнал, совпадающий по форме с корреляционной функцией входного сигнала, алгоритм фильтра можно построить по структурной схеме, представленной на рис. 13.27.

На вход БПФ подается последовательность закодированных в цифру комплексных отсчетов $\{\mathbf{A}(k)\}$, $k = 0,1, \ldots, N-1$, а последовательность спектральных коэффициентов $\{\mathbf{Z}_A(n)\}$, $n = 0,1, \ldots, N-1$, с выхода БПФ поступает на набор перемножителей, осуществляющих умножение каждого из коэффициентов $Z_A(n)$ на комплексно-сопряженный коэффициент $Z_A^*(n)$. Полученная таким образом последовательность $\{|Z(n)|^2, n = 0, 1, \ldots, N-1$, подвергается обратному быстрому преобразованию Фурье, и тем самым формируется последовательность отсчетов выходного сигнала (с точностью до постоянного коэффициента).

Последующая обработка по устранению влияния начальной фазы сигнала повторяет (в дискретной форме) обработку, показанную на рис. 13.26.

Сопоставление описанного цифрового согласованного фильтра с рассмотренными в § 13.5 аналоговыми фильтрами указывает на главное преимущество цифровой обработки — возможность реализации устройств с любыми импульсными и частотными характеристиками в пределах полосы частот, обеспечиваемой быстродействием преобразования А—Ц и арифметических устройств. Все сводится к выбору весовых коэффициентов. Факторы, характерные для аналоговых цепей: инерционность энергоемких элементов, влияние паразитных связей между отдельными узлами и их несогласованности и др., при цифровой обработке полностью отсутствуют. Важным преимуществом цифровых устройств является возможность расширения динамического диапазона увеличением разрядности АЦП (~ 6 дБ на один разряд, см. § 12.9).

Наконец, следует указать на высокую точность и стабильность характеристик цифровых фильтров, что особенно важно при сжатии сигналов с очень большой базой. Все эти преимущества достигаются ценой усложнения структуры фильтра, но, как показывает практика, современная микроэлектроника успешно справляется с возникающими в этой области проблемами.

Вместе с тем в ряде радиотехнических задач применение квадратурной обработки оказывается неприемлемым и более предпочтительно осуществлять согласованную фильтрацию в тракте высокой частоты. Широко распространены аналоговые согласованные фильтры на линиях акустической поверхностной волны, на дисперсионных линиях задержки. Осваиваются новые способы, основанные на различных физических явлениях, таких, например, как спиновое эхо.

Глава 14. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ НЕКОТОРЫМИ СПЕЦИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

14.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В § 2.2 отмечалось, что в зависимости от класса сигнала ортогональные системы специальных функций могут быть подобраны таким образом, чтобы требуемая точность представления обеспечивалась при минимуме членов ряда.

Условия ортонормированности этих функций на заданном интервале (a, b) записываются в форме

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,\rho(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ 1 & \text{при } n = m. \end{cases} \tag{14.1}$$

От определения (2.4) это выражение отличается множителем $\rho(x)$ под знаком интеграла, называемым весовой функцией или функцией веса. Говорят, что функции $\varphi_n(x)$ и $\varphi_m(x)$ ортогональны с весом $\rho(x)$. Это означает, что ортогональны не эти функции, а функции $\sqrt{\rho(x)}\,\varphi_n(x)$.

При определении коэффициентов обобщенного ряда Фурье, аппроксимирующего функцию $f(x)$, следует исходить из формулы, аналогичной (2.9), но с учетом весовой функции $\rho(x)$:

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n \sqrt{\rho}\|^2} \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,\rho(x)\,dx, \tag{14.2}$$

где

$$\|\varphi_n \sqrt{\rho}\|^2 = \int_a^b \varphi_n^2(x)\,\rho(x)\,dx \tag{14.3}$$

— квадрат нормы функции $\varphi_n(x)\sqrt{\rho(x)}$.

Для представления сигналов наиболее употребительны ортогональные полиномы и функции Лежандра, Чебышева, Лагерра, Эрмита, а также кусочно-постоянные функции Хаара, Радемахера и Уолша.

Для представления непрерывных сигналов необходимо использовать систему непрерывных ортогональных функций, для представления дискретных (цифровых) сигналов — систему дискретных ортогональных функций, которые получаются из непрерывных функций путем дискретизации.

Ортогональные полиномы и функции Лежандра, Чебышева, Лагерра и Эрмита (им посвящены § 14.2 и 14.3) используются преимущественно для представления непрерывных сигналов, а функции Уолша чаще используются для представления дискретных сигналов. Последние приобрели особо важное значение в связи с развитием вычислительной техники. Рассмотрению непрерывных функций Уолша посвящены § 14.4, 14.5, а дискретных — — § 14.6.

14.2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ И ФУНКЦИИ НЕПРЕРЫВНОГО ТИПА

Перечислим некоторые из наиболее часто применяемых полиномов и кратко рассмотрим их свойства.

1. Полиномы Лежандра (первого рода), определяемые формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n, \tag{14.4}$$

ортогональны с весом $\rho(x) = 1$ на интервале $-1 < x < 1$. При целых $n \geqslant 0$ полиномы $P_n(x)$ содержат конечное число членов.

Полиномы Лежандра низших степеней, графически представленные на рис. 14.1, определяются выражениями

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = {}^1/_2 (3x^2-1),\ P_3(x) = {}^1/_2 (5x^3-3x),\ P_4(x) = {}^1/_8 (35x^4-30x^2+3). \tag{14.5}$$

Квадрат нормы функции $P_n(x)$ в соответствии с формулой (14.4) [32,33]

$$\| P_n(x) \|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}. \tag{14.6}$$

Выражение (2.9) для коэффициентов c_n принимает при этом форму

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x) dx, \tag{14.7}$$

а ряд (2.8)

$$f(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots \tag{14.8}$$

2. Полиномы Чебышева (первого рода) определяются как

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2}\, \frac{d^n}{dx^n} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2n-1}. \tag{14.9}$$

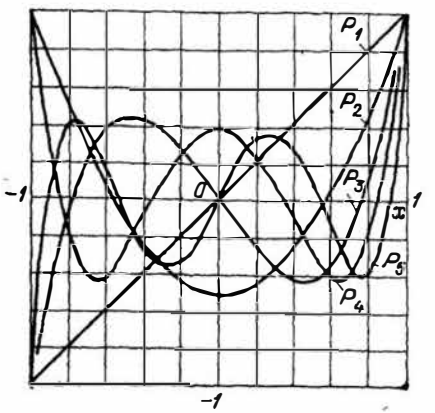


Рис. 14.1. Графики полиномов Лежандра

Полиномы Чебышева низших степеней

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2-1,\ T_3(x) = 4x^3-3x,\ T_4(x) = 8x^4-8x^2+1,\ T_5(x) = 16x^5-20x^3+5x.$$

На рис. 14.2 представлены графики полиномов $T_n(x)$ на интервале $0 < x \leqslant 1$, а на рис. 14.3—одного из них, в частности четвертого порядка, при $0 < |x| < {}^5/_4$. При $|x| > 1$ $T_n(x)$ стремится к бесконечности как $2^{n-1} x^n$.

Важной особенностью полиномов Чебышева является то, что из всех многочленов степени n со старшим коэффициентом, равным единице, *они на-*

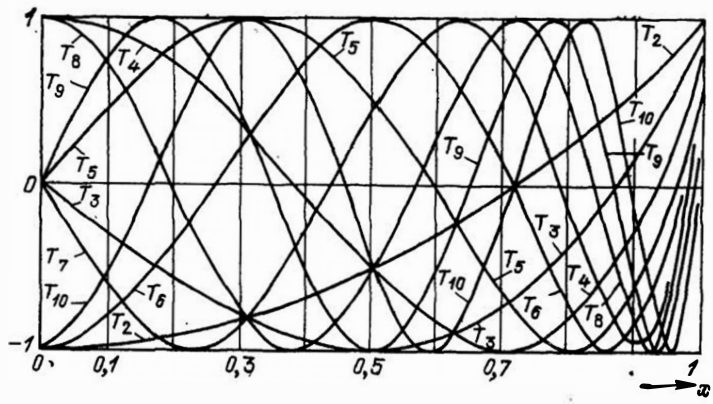


Рис. 14.2. Графики полиномов Чебышева

именее уклоняются от нуля на отрезке $-1 < x < 1$. Благодаря этому свойству полиномы Чебышева обеспечивают наименьшую максимальную ошибку равномерной аппроксимации на интервале $-1 < x < 1$.

Полиномы Чебышева не ортогональны, но после умножения на $1/\sqrt[4]{1-x^2}$ они образуют ортогональную в интервале $-1 < x < 1$ систему функций $(1/\sqrt[4]{1-x^2})\,T_n(x)$. Иными словами, полиномы $T_n(x)$ ортогональны с весом $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,T_m(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при } n = m. \end{cases} \tag{14.10}$$

Кроме того, при $m = n = 0$

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,T_m(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi. \tag{14.10'}$$

Таким образом, норма $||T_0\sqrt{\rho}|| = \sqrt{\pi}$ и $||T_n\sqrt{\rho}|| = \sqrt{\pi/2}$.

При разложении функции $f(x)$ по полиномам Чебышева (с учетом $T_0(x) = 1$) коэффициенты ряда

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,T_n(x), \quad -1 < x < 1,$$

должны определяться в соответствии с (14.2) и (14.10), (14.10′) следующими выражениями:

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{14.11}$$

Поведение полиномов Чебышева в интервале $-1 < x < 1$ в сочетании с неограниченным возрастанием $|T_n(x)|$ при $|x| > 1$ делает эти полиномы очень эффективными

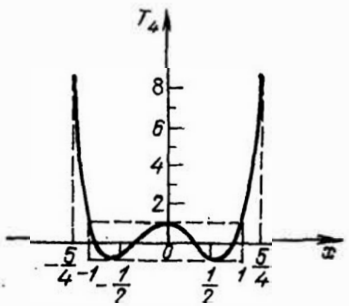


Рис. 14.3. График полинома Чебышева четвертого порядка

для аппроксимации АЧХ различных фильтров. Этот вопрос рассматривается в гл. 15.

3. Полиномы Лагерра определяются формулой

$$L_n(x) = \frac{e^x d^n}{n! dx^n}(x^n e^{-x}),\ x \geqslant 0. \tag{14.12}$$

Первые четыре полинома:

$L_0(x) = 1$, $L_1(x) = -x + 1$, $L_2(x) = x^2/2 - 2x + 1$, $L_3(x) = -x^3/6 + {}^3/_2 x^2 - 3x + 1$.

Полиномы Лагерра ортогональны на полуоси $0 < x < \infty$ с весом $\rho(x) = e^{-x}$.

Так как полиномы Лагерра образуют систему расходящихся при $x \to \infty$ функций, удобнее пользоваться функциями Лагерра

$$l_n = \sqrt{\rho(x)}\, L_n(x) = e^{-x/2} L_n(x). \tag{14.13}$$

При этом функции Лагерра $l_n(x)$ ортогональны с единичным весом. На рис. 14.4 приведены функции Лагерра при $n = 1,2,\ldots, 5$. Норма функции $l_n(x)$

$$\| l_n \| = \sqrt{\int_0^\infty l_n^2(x)\, dx} = 1,$$

поэтому при разложении функции $f(x)$ по функциям Лагерра коэффициенты ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n l_n(x) \tag{14.14}$$

должны определяться по формуле

$$c_n = \int_0^\infty f(x)\, l_n(x)\, dx. \tag{14.15}$$

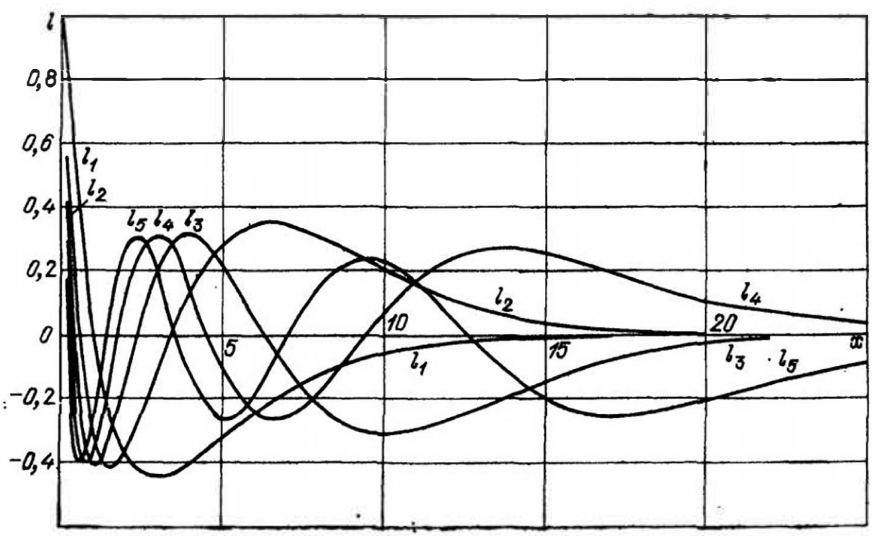


Рис. 14.4. Функции Лагерра

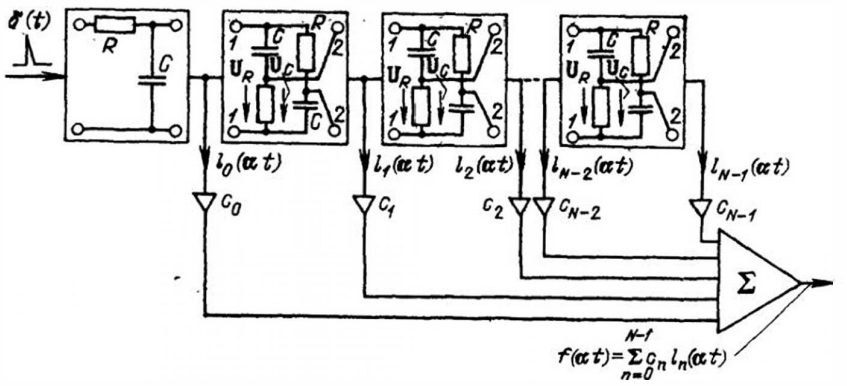


Рис. 14.5. Генератор функций Лагерра

Функции Лагерра получили широкое распространение в измерительной технике и в многоканальных системах связи, что в значительной степени объясняется простотой их генерирования. Дело в том, что функция $l_n(t)$ по форме совпадает с импульсной характеристикой физической цепи, составленной из каскадного соединения простых звеньев (рис. 14.5). Для определения передаточной функции требуемой цепи применим преобразование Лапласа к функции Лагерра (14.13), предварительно заменив в (14.12), (14.13) переменную x новой переменной $x = \alpha t$:

$$l_n(\alpha t) = \frac{e^{\alpha t/2}}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-\alpha t}).$$

Функции времени $e^{-\alpha t}t^n$ соответствует изображение $n!/(p+\alpha)^{n+1}$, а n-кратному дифференцированию — умножение изображения на p^n. Учитывая также, что умножение на $e^{\alpha t/2}$ дает сдвиг на p-плоскости на $-\alpha/2$, приходим к следующему изображению для функции Лагерра:

$$\frac{(p-\alpha/2)^n}{(p+\alpha/2)^{n+1}} = \frac{1}{(p+\alpha/2)}\left(\frac{p-\alpha/2}{p+\alpha/2}\right)^n.$$

Передаточная функция первого звена $1/(p+\alpha/2)$ реализуется интегрирующей RC-цепью, отвечающей условию $RC = 2/\alpha$. Передаточная функция $(p-\alpha/2)/(p+\alpha/2)$ соответствует мостовой схеме при $RC = 2/\alpha$.

Действительно, непосредственно для мостовой схемы одного звена (см. рис. 14.5)

$$\mathbf{U}_{2-2}/\mathbf{U}_{1-1} = (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_C)/\mathbf{U}_{1-1} = (R - 1/i\omega C)/(R + 1/i\omega C),$$

откуда

$$\mathbf{U}_{2-2}(p)/\mathbf{U}_{1-1}(p) = (p - 1/RC)/(p + 1/RC).$$

При возбуждении цепи (см. рис. 14.5) дельта-функцией колебание на выходе первого звена будет $e^{-\alpha t/2} = l_0(\alpha t)$, а на выходах последующих звеньев соответственно $l_1(\alpha t)$, $l_2(\alpha t)$ и т. д.

Взвешенное суммирование всех этих колебаний дает на выходе сумматора колебание

$$f(\alpha t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n l_n(\alpha t),\ t \geqslant 0,$$

где коэффициенты c_n определяются выражением (14.15).

4. Полиномы Эрмита определяются формулой

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}). \tag{14.16}$$

Первые пять полиномов Эрмита:

$H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$, $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$.

Графики этих полиномов представлены на рис. 14.6.

Полиномы Эрмита ортогональны с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ на всей оси $-\infty < x < \infty$, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 2^n \sqrt{\pi}\, n! & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Таким образом, норма функции $H_n(x) \sqrt{\rho(x)} = H_n(x) e^{-x^2/2}$

$$\| H_n \sqrt{\rho} \| = \sqrt{2^n \sqrt{\pi}\, n!}.$$

Для перехода к ортонормированной системе полиномов Эрмита вводят функцию

$$\varphi_n(x) = \frac{H_n(x) \sqrt{\rho(x)}}{\| H_n \sqrt{\rho} \|} = \frac{H_n(x) e^{-x^2/2}}{\sqrt{2^n \sqrt{\pi}\, n!}}. \tag{14.17}$$

При этом разложение функции $f(x)$ по нормированным функциям Эрмита записывается в форме

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

где

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_n(x) dx. \tag{14.18}$$

Графики нормированных функций $\varphi_n(x)$ приведены на рис. 14.7.

Из приведенного перечисления видно, что ортогональные системы функций можно разбить на два класса: 1) системы, определенные на конечном интервале (полиномы Лежандра и Чебышева); 2) системы, определенные на бесконечном интервале, представляющем собой полуось $0 < x < \infty$ (полиномы Лагерра) или всю ось $-\infty < x < \infty$ (полиномы Эрмита). Для аппроксимации процессов и характеристик, определенных на конечном интервале, естественно применять ортогональные системы первого класса. Для функций $f(x)$, заданных в бесконечном интервале, целесообразно применять системы второго класса.

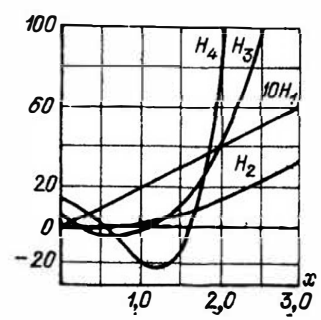


Рис. 14.6. Графики полиномов Эрмита

При выборе полиномов важное значение имеет вид весовой функции $\rho(x)$, соответствующей тому или иному виду полинома. Этот выбор должен быть тесно увязан с характером аппроксимируемой функции $f(x)$: ве-

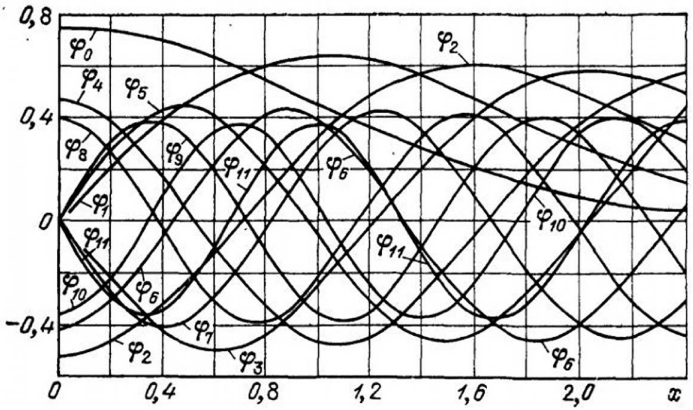


Рис. 14.7. Графики нормированных функций Эрмита

совая функция $\rho(x)$ должна достигать максимума на участке, где требуется наилучшая аппроксимация. При этом появляется возможность уменьшения числа членов ряда при заданной допустимой ошибке аппроксимации. Выбором весовой функции можно также осуществить аппроксимацию процессов конечной длительности полиномами второго класса (определенными на бесконечном отрезке). Для этого необходимо, чтобы эффективная длительность весовой функции была близка к длительности аппроксимируемого сигнала.

14.3. ФУНКЦИИ УОЛША

Функции Уолша и Радемахера, известные с 1922 г., были надолго преданы забвению. Интерес к этим функциям и широкое их распространение связаны с развитием вычислительной техники.

Существуют различные способы определения функций Уолша. Рассмотрим способ, основанный на взаимосвязи функций Уолша с функциями Радемахера. Последние, в свою очередь, получаются из синусоидальных функций с помощью соотношения

$$r_k(\theta) = \operatorname{sign}[\sin(2^k \pi\theta)],\ 0 \leqslant \theta < 1, \tag{14.19}$$

где аргумент $\theta = t/T_0$ есть безразмерное время, т. е. время, нормированное к произвольному интервалу T_0, а целое положительное число k — порядок функции. Символом sign (сигнум-функция) обозначается функция

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{14.20}$$

В соответствии с (14.19) и (14.20) функции Радемахера, принимающие одно из двух значений ± 1, имеют вид меандра (рис. 14.8).

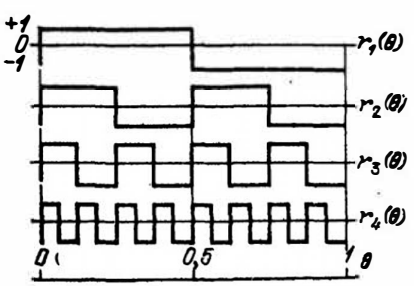


Рис. 14.8. Первые четыре функции Радемахера

Функции Радемахера ортонормированы (см. § 2.2) с единичной весовой функцией на интервале $0 \leqslant \theta < 1$. Действительно, для любых двух функций $r_m(\theta)$, $r_n(\theta)$ имеют место соотношения

$$\int_0^1 r_m(\theta)\, r_n(\theta)\, d\theta = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Все функции Радемахера являются нечетными относительно середины интервала определения и, следовательно, не могут быть использованы для аппроксимации сигналов $s(\theta)$, четных относительно момента $\theta = 1/2$. Иными словами, система функций Радемахера — неполная (см. § 2.2).

Функции Уолша, образующие полную ортонормированную систему, можно сформировать, образуя произведения степеней соответствующих функций Радемахера. Первые восемь функций Уолша представлены на рис. 14.9. Сопоставление этих функций с функциями Радемахера (рис. 14.8) позволяет составить очевидные, по крайней мере для первых четырех функций Уолша, соотношения

$$\mathrm{wal}\,(0, \theta) = r_1^0(\theta)\, r_2^0(\theta) = 1,\ \mathrm{wal}\,(1, \theta) = r_1(\theta)\, r_2^0(\theta) =$$
$$= r_1(\theta),\ \mathrm{wal}\,(2, \theta) = r_1(\theta)\, r_2(\theta),\ \mathrm{wal}\,(3, \theta) = r_1^0(\theta)\, r_2(\theta) = r_2(\theta).$$

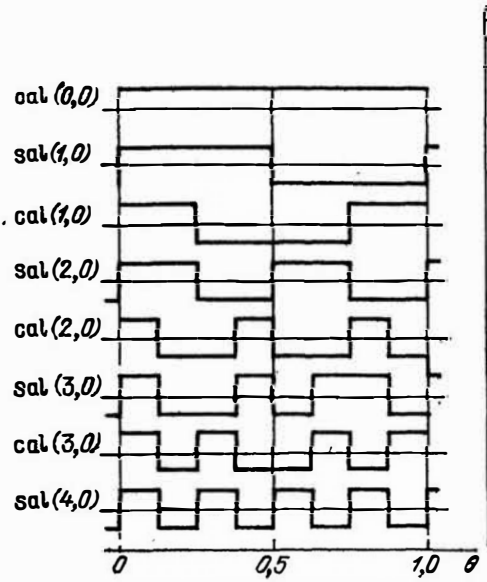
Нетрудно также проверить правильность соотношений

$$\mathrm{wal}\,(4, \theta) = r_1^0(\theta)\, r_2(\theta)\, r_3(\theta) = r_2(\theta)\, r_3(\theta),\ \mathrm{wal}\,(5, \theta) = r_1(\theta)\, r_2(\theta)\, r_3(\theta),$$
$$\mathrm{wal}\,(6, \theta) = r_1(\theta)\, r_2^0(\theta)\, r_3(\theta) = r_1(\theta)\, r_3(\theta),\ \mathrm{wal}\,(7, \theta) = r_1^0(\theta)\, r_2^0(\theta)\, r_3(\theta) = r_3(\theta).$$

Итак, каждая функция Уолша $\mathrm{wal}\,(w, \theta)$ за номером w, входящая в систему из $N = 2^n$ функций, является произведением степеней первых n функций Радемахера. Принцип нахождения показателей этих степеней поясняется табл. 14.1 на примере $N = 2^3 = 8$.

В таблице использованы следующие обозначения: w — номер функции в системе (в десятичном счислении); w_m — m-й разряд представления числа w в двоичной системе счисления, т. е.

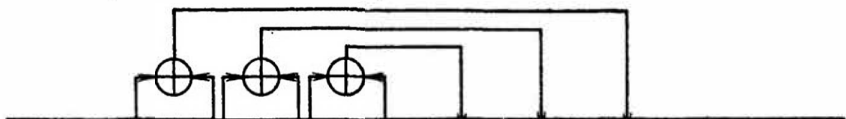
$$w = (w_1\, w_2 \ldots w_m \ldots w_n)_2 = w_1\, 2^{n-1} + w_2\, 2^{n-2} + \ldots + w_m\, 2^{n-m} +$$
$$+ \ldots + w_n\, 2^0 = \sum_{m=1}^{n} w_m\, 2^{n-m} = \sum_{m=1}^{n} w_{n-m+1}\, 2^{m-1}. \qquad (14.21)$$



wal(w,θ)	pal(p,θ)	had(h,θ)
w	p	h
0	0	0
1	1	4
2	3	6
3	2	2
4	6	3
5	7	7
6	5	5
7	4	1

Рис. 14.9. Первые восемь функций Уолша и их нумерация при различных способах упорядочения

Таблица 14.1



w	w_0	w_1	w_2	w_3	$r_1(\theta) \times r_2(\theta) \times r_3(\theta) =$	wal (w, θ)
0	0	0	0	0	$r_1^0(\theta) \times r_2^0(\theta) \times r_3^0(\theta) =$	wal $(0, \theta)$
1	0	0	0	1	$r_1^1(\theta) \times r_2^0(\theta) \times r_3^0(\theta) =$	wal $(1, \theta)$
2	0	0	1	0	$r_1^1(\theta) \times r_2^1(\theta) \times r_3^0(\theta) =$	wal $(2, \theta)$
3	0	0	1	1	$r_1^0(\theta) \times r_2^1(\theta) \times r_3^0(\theta) =$	wal $(3, \theta)$
4	0	1	0	0	$r_1^0(\theta) \times r_2^1(\theta) \times r_3^1(\theta) =$	wal $(4, \theta)$
5	0	1	0	1	$r_1^1(\theta) \times r_2^1(\theta) \times r_3^1(\theta) =$	wal $(5, \theta)$
6	0	1	1	0	$r_1^1(\theta) \times r_2^0(\theta) \times r_3^1(\theta) =$	wal $(6, \theta)$
7	0	1	1	1	$r_1^0(\theta) \times r_2^0(\theta) \times r_3^1(\theta) =$	wal $(7, \theta)$

В выражении (14.21) $n = \log_2 N$ — число разрядов, w (m) может принимать одно из двух значений — нуль или единица, а w_0 равно нулю по определению.

Символ $\oplus$ обозначает поразрядное суммирование по модулю 2 по правилам

$$1 \oplus 1 = 0 \oplus 0 = 0, \quad 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1. \tag{14.22}$$

Показанный в табл. 14.1 способ построения функций Уолша можно выразить аналитически для любого $N = 2^n$ в виде следующего соотношения:

$$\text{wal}\,(w, \theta) = \prod_{k=1}^{n} [r_k(\theta)]^{w_{n-k+1} \oplus w_{n-k}}. \tag{14.23}$$

Поясним применение (14.23) на примере шестой функции Уолша ($w = 6$), входящей в систему размером $N = 2^3 = 8$. Произведение в (14.23) состоит из трех множителей вида

при $k = 1$ $[r_1(\theta)]^{w_0 \oplus w_1}$, при $k = 2$ $[r_2(\theta)]^{w_0 \oplus w_1}$, при $k = 3$ $[r_3(\theta)]^{w_1 \oplus w_0}$.

Подстановкой в левую часть (14.21) $w = 6$ и $n = 3$ получаем

$$6 = w_1 2^2 + w_2 2^1 + w_3 2^0,$$

откуда следуют равенства $w_1 = 1$, $w_2 = 1$, $w_3 = 0$.

Таким образом,

$$w_3 \oplus w_2 = 0 \oplus 1 = 1, \; w_2 \oplus w_1 = 1 \oplus 1 = 0, \; w_1 \oplus w_0 = 1 \oplus 0 = 1$$

и по формуле (14.23)

$$\text{wal}\,(6, \theta) = r_1(\theta)\, r_2^0(\theta)\, r_3(\theta) = r_1(\theta)\, r_3(\theta).$$

Из рис. 14.9 видно, что четным относительно середины интервала определения ($\theta = 0{,}5$) функциям wal (w, θ) соответствуют четные номера w, а нечетным функциям — нечетные номера. Такое взаимно-однозначное соответствие между четностью функций wal (w, θ) и четностью их номеров w

аналогично свойствам тригонометрических функций $\cos\left(k\,\frac{2\pi}{T}\,t\right)$ и $\sin\left(k\,\frac{2\pi}{T}\,t\right)$ (рис. 14.10).

Поэтому иногда применяются обозначения cal (j, θ) для четных и sal (i, θ) для нечетных функций Уолша. Легко проверить, что функции cal(j, θ) и sal (j, θ) связаны с функциями wal (w, θ) следующими соотношениями:

$$\text{cal}\,(j, \theta) = \text{wal}\,(2j, \theta),\quad \text{sal}\,(j, \theta) = \text{wal}\,(2j - 1, \theta).$$

Эти обозначения указаны в таблице на рис. 14.9.

Функции Уолша *ортонормированы* на интервале $0 \leqslant \theta \leqslant 1$:

$$\int_0^1 \text{wal}\,(k, \theta)\,\text{wal}\,(i, \theta)\,d\theta = \begin{cases} 1 & \text{при } k = i, \\ 0 & \text{при } k \neq i. \end{cases} \tag{14.24}$$

Функции Уолша обладают свойством *мультипликативности*, т. е. перемножение двух функций Уолша дает другую функцию Уолша, причем

$$\text{wal}\,(k, \theta)\,\text{wal}\,(i, \theta) = \text{wal}\,(k \oplus i, \theta). \tag{14.25}$$

Функции Уолша wal (i, θ) обладают свойством *симметрии*, проявляющимся в том, что все выводы относительно i справедливы также и относительно θ.

Например, свойство мультипликативности (14.25) с учетом свойства симметрии запишется в виде

$$\text{wal}\,(i, \theta_1)\,\text{wal}\,(i, \theta_2 = \text{wal}\,(i, \theta_1, \oplus\, \theta_2). \tag{14.26}$$

Умножение любой функции Уолша самой на себя дает функцию нулевого порядка wal $(0, \theta)$, так как в результате получаются только произведения вида $(+1)(+1)$ и $(-1)\,(-1)$. Таким образом,

$$\text{wal}\,(i, \theta)\,\text{wal}\,(i, \theta) = \text{wal}\,(0, \theta).$$

Очевидно также, что умножение wal (i, θ) на wal $(0, \theta)$ не изменяет функцию wal (i, θ).

Функции Уолша иногда определяют на интервале $-1/2 \leqslant \theta < 1/2$. Первые восемь функций на указанном интервале представлены на рис. 14.11.

Функции Уолша могут служить базисом спектрального (негармонического) представления сигналов.

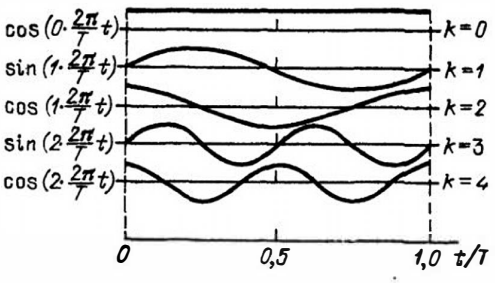


Рис. 14.10. Четность номеров косинусоидальных и нечетность номеров синусоидальных функций

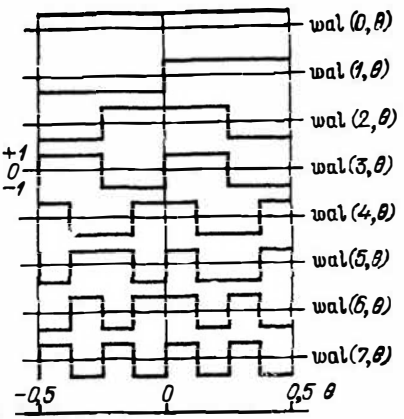


Рис. 14.11. Первые восемь функций Уолша на интервале $-0{,}5 \leqslant \theta < 0{,}5$

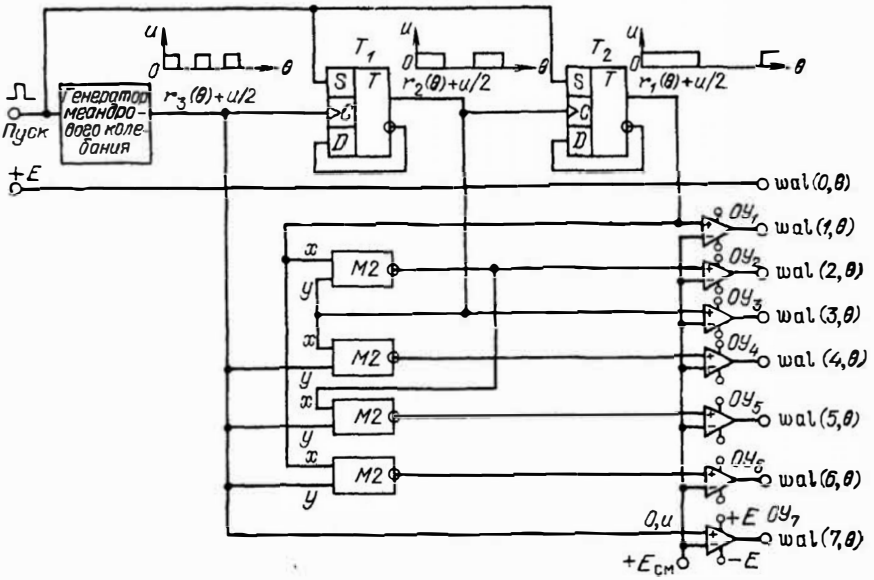


Рис. 14.12. Генератор первых восьми функций Уолша

Любую интегрируемую на интервале $0 \leqslant \theta < 1$ функцию $f(\theta)$ можно представить рядом Фурье по системе функций Уолша

$$f(\theta) = A(0) + A(1)\,\mathrm{wal}(1, \theta) + A(2)\,\mathrm{wal}(2, \theta) + \ldots + \ldots + A(i)\,\mathrm{wal}(i, \theta) \qquad (14.27)$$

с коэффициентами

$$A(i) = \int_0^1 f(\theta)\,\mathrm{wal}(i, \theta)\,d\theta, \quad \theta = t/T. \qquad (14.28)$$

Вне полуоткрытого интервала [0,1) ряд (14.27) описывает периодическую функцию $f(\theta + k)$, где k — любое целое число.

Некоторые особенности разложения непрерывных функций по системе Уолша иллюстрируются в § 14.5 на примерах.

Как уже ранее отмечалось, функции Уолша, широко используемые в задачах вычислительной техники, могут быть легко реализованы с помощью ключевых схем. Один из возможных вариантов схемы генератора первых восьми функций представлен на рис. 14.12.

Алгоритм формирования функций Уолша в этом генераторе основан на выражении (14.22), т. е. на перемножении степеней трех функций Радемахера: $r_1(\theta)$, r_2, (θ) и $r_3(\theta)$. Функция $r_3(\theta)$ получается непосредственно от генератора меандрового колебания. Вторая функция $r_2(\theta)$ получается из $r_3(\theta)$ удлинением периода этого колебания в 2 раза. Это достигается с помощью триггера со счетным входом (на рис. 14.12 изображен D-триггер T_1 в счетном режиме [1]), запускаемого фронтом каждого периода меандра. Аналогичным способом из $r_2(\theta)$ получается функция $r_1(\theta)$. Таким образом, на выходах триггеров T_1 и T_2 получаются функции Радемахера, смещенные по уровню на положительную величину $u/2$, т. е.

$$r_1(\theta) + u/2,\ r_2(\theta) + u/2 \text{ и } r_3(\theta) + u/2.$$

[1] См. Алексенко А. Г. Основы микросхемотехники. — М.: Сов. радио, 1977.

Указанные смещенные функции соответствуют функциям Уолша wal (1, 0), wal (3, θ) и wal (7, 0) (также смещенным). Для получения остальных функций Уолша используются сумматоры по модулю 2 (на рис. 14.12 обозначены М2) с инверсными выходами. Подобные сумматоры представляют собой устройство совпадения, которому соответствует следующая таблица истинности:

Вход x	Вход u	Выход с инверсией	Вход x	Вход u	Выход с инверсией
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1

Легко убедиться, что при подаче на сумматор функций $r_1(\theta) + u/2$ и $r_2(\theta) + u/2$ на выходе получается функция Уолша wal (2, 0)$+u/2$, т. е. эффект, эквивалентный перемножению соответствующих функций $r_1(\theta)$ и $r_2(\theta)$ (см. табл. 14.1).

Аналогично при объединении в сумматоре функций $r_2(\theta) + u/2$ и $r_3(\theta) + u/2$ имеем wal (4, θ) $+ u/2$ и т. д.

Для получения несмещенных функций Уолша, которые могут принимать значения $+1$, -1, используются коммутаторы на операционных усилителях $ОУ_1$ — $ОУ_7$ (с большим коэффициентом усиления для сокращения длительности фронтов). На инвертирующие входы усилителей задается смещающее напряжение $+E_{см}$, выбираемое из интервала $0 < E_{см} < u$. Если поступающее с сумматора напряжение $u > E_{см}$, то на выходе коммутатора возникает напряжение $+E$, при $u < E_{см}$ — напряжение $-E$, что соответствует $+1$ и -1.

Функции wal (1, θ), wal (3, θ) и wal (7, θ) получаются без обращения к сумматорам.

14.4. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ НУМЕРАЦИИ ФУНКЦИЙ УОЛША

Способ нумерации функций в системе называется упорядочением. Функции Уолша, сформированные в соответствии с выражением (14.22), упорядочены по Уолшу.

В ряде практических задач целесообразно пользоваться иными способами упорядочения. Часто применяются функции Уолша, упорядоченные по Адамару [had (h, θ)] и по Пэли [pal (p, θ)][1].

Независимо от упорядочения функции Уолша, составляющие систему из $N = 2^n$ функций, всегда можно представить в виде произведения степеней первых n функций Радемахера. Принцип же нахождения показателей этих степеней индивидуален для каждого упорядочения.

Остановимся более подробно на упорядочении по Адамару, получившем широкое распространение.

Функции had (h, θ) можно сформировать с помощью матриц Адамара. Матрицей Адамара H_N порядка $N = 2^n$ называется квадратная матрица размера $N \times N$ с элементами ± 1, такая, что

$$H_N \times H_N^{\mathrm{T}} = NI,$$

где I — единичная матрица; т — знак транспонирования.

[1] Обозначения had (h, θ) и pal (p, θ) образованы от начальных букв фамилий Hadamard и Peley соответственно.

Нормированную матрицу Адамара порядка N можно построить рекурсивно, т. е.

$$H_N = \begin{bmatrix} H_{N/2} & H_{N/2} \\ H_{N/2} & -H_{N/2} \end{bmatrix}$$

при $H_1 = 1$. (14.29)

Например,

$$H_2 = \begin{bmatrix} H_1 & H_1 \\ H_1 & -H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \text{ и т. д.}$$

Функция Уолша, упорядоченная по Адамару, т. е. had (h, θ) с номером h, является последовательностью прямоугольных импульсов с единичными амплитудами и полярностями, соответствующими знакам элементов h-й строки матрицы Адамара. Под длительностью импульсов подразумевается $(1/N)$-я доля интервала $[0,1]$.

Для иллюстрации связи между функцией had (h, θ) и матрицей Адамара, а также для определения места этих функций в системе приведем матрицу Адамара для $N = 8 = 2^3$, заменяя 1 и -1 знаками соответственно плюс и минус:

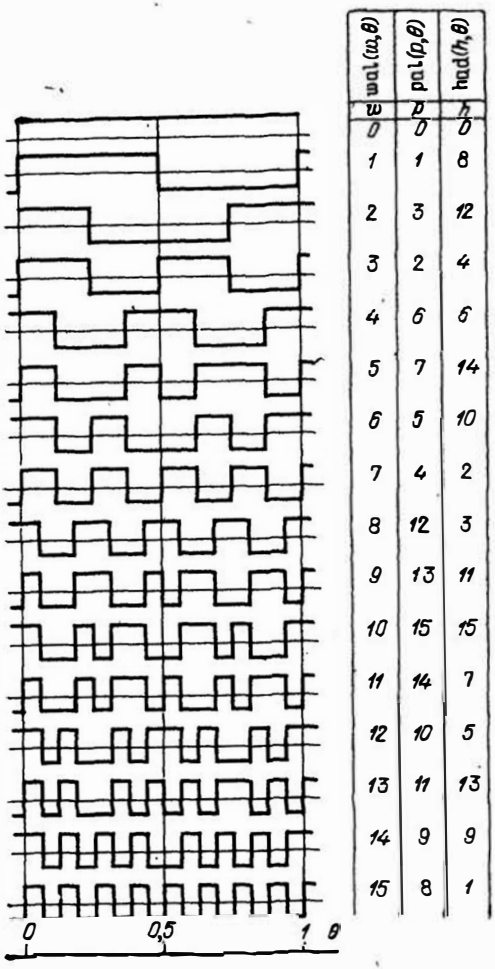


Рис. 14.13. Нумерация функций Уолша при различных способах упорядочения. Размер базиса $N=16$

$$H_8 = \begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ \hline + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{array}\right] \begin{matrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \end{matrix}$$

Нумерация первых восьми функций Уолша при различных способах упорядочения дана в таблице на рис. 14.9, а для 16 функций — в таблице на рис. 14.13. В этих таблицах указана также нумерация функций Уолша при упорядочении по Пэли.

Следует указать, что введенные выше упорядочения вытекают из свойства симметричности матрицы Адамара, заключающегося в том, что транспонированная матрица совпадает с исходной: $H_N = H_N^T$. Как видно из предыдущего, введенные упорядочения отвечают симметричности соответствующих им матриц.

Не следует полагать, что упорядочениями Уолша, Пэли и Адамара исчерпываются все возможные упорядочения. Отмеченная в предыдущем параграфе ортонормированность функций Уолша сохраняется при любом способе их упорядочения.

14.5. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ФУНКЦИЙ УОЛША

1. Спектр синусоиды $s(t) = \sin \frac{2\pi}{T} t$ (рис. 14.14, *а*) в базисе функций Уолша.

Интервал разложения T_0 в данном случае целесообразно приравнять величине T.

Переходя к безразмерному времени $\theta = t/T$, записываем колебание $s(t)$ в форме $s_1(\theta) = \sin 2\pi\theta$. Ограничимся 16-ю функциями, причем сначала выберем упорядочение по Уолшу. Поскольку заданная функция $s_1(\theta)$ нечетна относительно точки $\theta = 1/2$, все коэффициенты $A(i)$ при четных функциях Уолша в ряде (14.27), т. е. при cal (j, θ), равны нулю.

Те из оставшихся восьми функций wal (i, θ), которые совпадают с функциями Радемахера и имеют периодичность внутри интервала $[0,1)$, кратную периоду функции $s_1(\theta)$, также приводят к нулевым коэффициентам $A(i)$. К таким функциям относятся wal(3, θ), wal (7, θ) и wal (15, θ). Наконец, функция wal (11, θ), нечетная не только относительно точки $\theta = 1/2$, но также относительно точек $\theta = 1/4$ и $\theta = 3/4$ [внутри интервалов $[0, 1/2)$ и $(1/2, 1)$], приводит к нулевому коэффициенту $A(11)$ из-за четности $s_1(\theta)$ в указанных интервалах.

Итак, лишь четыре коэффициента из 16 не равны нулю: $A(1)$, $A(5)$, $A(9)$ и $A(13)$. Определим эти коэффициенты по формуле (14.28). Подынтегральные функции, являющиеся произведениями сигнала $s_1(\theta)$ (см. рис. 14.14, *а*) и соответствующей функции wal (i, θ), представлены на рис. 14.14, *б* — *д*. Кусочное интегрирование этих произведений дает

$$A(1) = 2\int_0^{1/2} \sin 2\pi\theta d\theta = 2/\pi = 0{,}636,$$

$$A(5) = 4\int_0^{2/16} \sin 2\pi\theta d\theta - 2\int_{2/16}^{6/16} \sin 2\pi\theta d\theta = \frac{2}{\pi}\left(1 - 2\cos\frac{\pi}{4}\right) = -0{,}265,$$

$$A(9) = 4\int_0^{1/16} \sin 2\pi\theta d\theta - 4\int_{1/16}^{3/16} \sin 2\pi\theta d\theta + 2\int_{3/16}^{5/16} \sin 2\pi\theta d\theta = -0{,}052,$$

$$A(13) = 4\int_0^{1/16} \sin 2\pi\theta d\theta - 4\int_{1/16}^{2/16} \sin 2\pi\theta d\theta + 4\int_{2/16}^{3/16} \sin 2\pi\theta d\theta -$$

$$-2\int_{3/16}^{5/16} \sin 2\pi\theta d\theta = -0{,}128.$$

Спектр рассматриваемого сигнала $s_1(\theta)$ в базисе функций Уолша (упорядоченных по Уолшу) представлен на рис. 14.15, *а*. При упорядочении

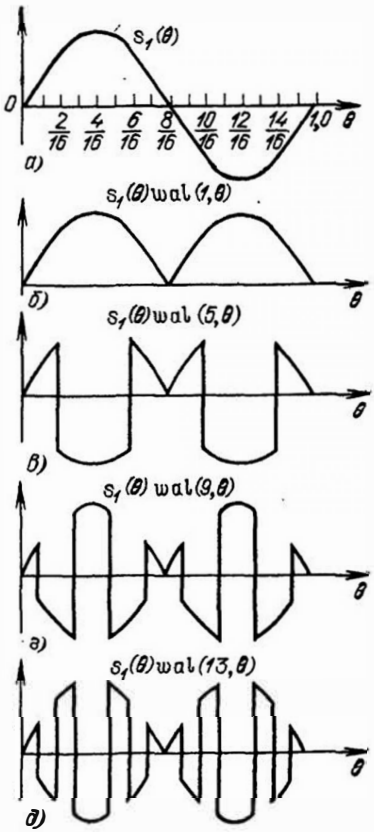


Рис. 14.14. Стробирование отрезка синусоиды функциями Уолша

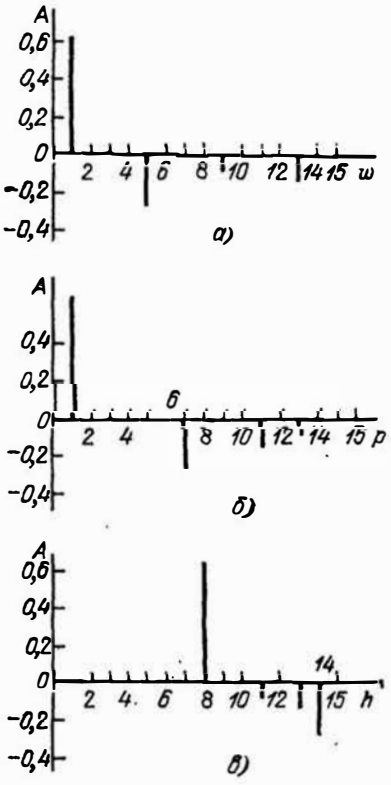


Рис. 14.15. Спектры синусоиды в базисе функций Уолша, упорядоченных по Уолшу (*а*), Пэли (*б*) и Адамару (*в*). Размер базиса $N=16$

по Пэли и Адамару спектр того же сигнала принимает вид, показанный на рис. 14.15, *б* и *в*. Эти спектры получены из спектра на рис. 14.15, *а* перестановкой коэффициентов в соответствии с таблицей (см. рис. 14.13), показывающей взаимосвязь между способами упорядочения функций Уолша (для $N = 16$).

Для уменьшения искажений при восстановлении колебания ограниченным числом функций Уолша предпочтение следует отдавать упорядочению, которое обеспечивает монотонное убывание спектра. Иными словами, наилучшим является упорядочение, при котором каждый следующий спектральный компонент не больше (по модулю) предыдущего, т. е. $|A(i+1)| \leqslant |A(i)|$. В этом смысле наилучшим упорядочением при представлении отрезка синусоиды, как это следует из рис. 14.15, является упорядочение Пэли, а наихудшим — Адамара.

Восстановление исходного сигнала (см. рис. 14.14, *а*) шестнадцатью функциями Уолша представлено на рис. 14.16 (двенадцать спектральных коэффициентов обращаются в нуль). От способа упорядочения функций это построение, разумеется, не зависит. Очевидно, что для более удовлетворительной аппроксимации синусоидального колебания в базисе Уолша требуется существенное увеличение числа спектральных компонентов.

Вне интервала [0,1) ряд (14.27), как отмечалось в § 14. 4, описывает периодическое продолжение $s_1(\theta)$, в данном примере гармоническую функцию.

2. Спектр гармонического колебания $s(t) = \cos(\omega t + \theta_0)$ (рис. 14.17) в базисе функций Уолша. Как и в предыдущем примере, рассматривается один цикл гармонического колебания с периодом $T = 2\pi/\omega$. Переходя к безразмерному времени $\theta = t/T$, записываем колебание $s(t)$ в форме

$$s_1(\theta) = \cos(2\pi\theta + \theta_0) = \cos\theta_0 \cos 2\pi\theta - \sin\theta_0 \sin 2\pi\theta = A\cos 2\pi\theta - B - \sin 2\pi\theta.$$

Спектр Уолша функции $\sin 2\pi\theta$ определен в примере 1. Совершенно аналогично определение спектра функции $\cos 2\pi\theta$ на интервале [0,1). Необходимо лишь функции $\mathrm{sal}(j, \theta)$ заменить функциями $\mathrm{cal}(j, \theta)$. Легко проверить, что при упорядочении по Уолшу новые коэффициенты A_i в ряде (14.27) будут $A(2)$, $A(6)$, $A(10)$ и $A(14)$ вместо $A(1)$, $A(5)$, $A(9)$ и $A(13)$. При этом значения коэффициентов остаются прежними.

Таким образом, ряд (14.27) для рассматриваемого колебания можно записать в форме

$$s_1(\theta) = \cos\theta_0 \cos 2\pi\theta - \sin\theta_0 \sin 2\pi\theta = \cos\theta_0 [A(2)\,\mathrm{wal}(2, \theta) + A(6)\,\mathrm{wal}(6, \theta) + A(10)\,\mathrm{wal}(10, \theta) + A(14)\,\mathrm{wal}(14, \theta)] - \sin\theta_0 [A(1) \times \mathrm{wal}(1,\theta) + A(5)\,\mathrm{wal}(5, \theta) + A(9)\,\mathrm{wal}(9, \theta) + A(13)\,\mathrm{wal}(13, \theta)].$$

Итак, при сдвиге гармонического колебания по фазе спектр Уолша содержит четные и нечетные функции $\mathrm{cal}(j, \theta)$ и $\mathrm{sal}(j, \theta)$.

3. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов (рис. 14.18) в базисе функций Уолша. Определим колебание $s(t)$ на интервале $[0, T_0)$ выражением $s(t) = 1$, $0 \leqslant t < \tau_и$, и соответственно

$$s_1(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant \theta < \tau_и/T_0, \\ 0 & \text{при } \theta \geqslant \tau_и/T_0. \end{cases} \qquad (14.30)$$

Структура спектра Уолша заданного колебания сильно зависит от соотношения между $\tau_и$ и T_0. Временная база T_0 является дополнительным и произвольно выбираемым параметром функций Уолша. Действительно, при

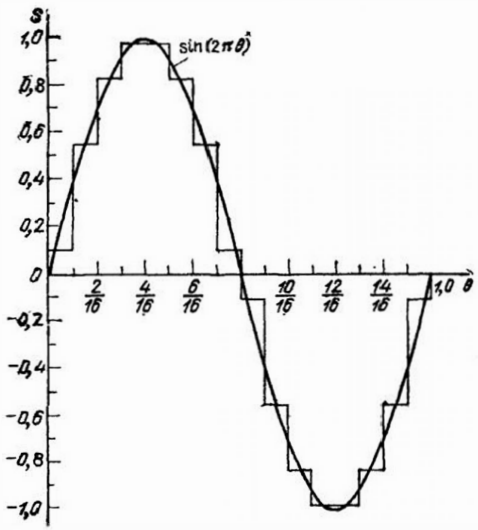


Рис. 14.16. Аппроксимация синусоиды функциями Уолша

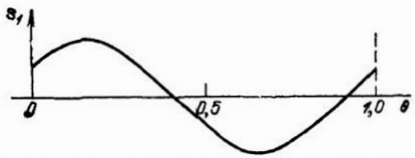


Рис. 14.17. Один период гармонического колебания на интервале $0 \leqslant \theta < 1$

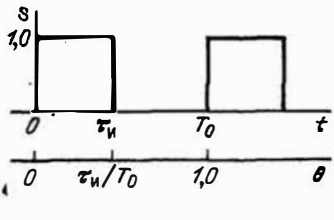


Рис. 14.18. Один цикл периодической импульсной последовательности при $\tau_и/T_0 = 1/2$

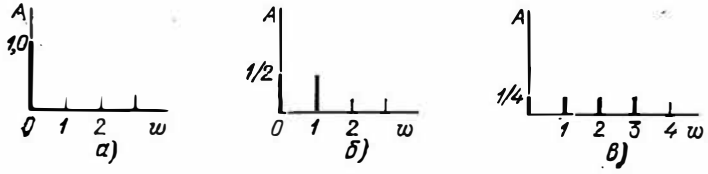


Рис. 14.19. Спектры последовательности прямоугольных импульсов в базисе функций Уолша:
а) при $\tau_и/T_0=1$; *б)* при $\tau_и/T_0=1/2$; *в)* при $\tau_и/T_0=1/4$; $N=16$

$\tau_и/T_0 = 1$ спектр содержит лишь одну функцию wal (0, θ) с коэффициентом $A(0) = 1$. При $\tau_и/T_0 = {}^1/_2$ колебание (14.30) полностью определяется двумя функциями wal (0, θ) и wal (1, θ) с коэффициентами $A(0) = A(1) = {}^1/_2$.

Далее, при $\tau_и/T_0 = 1/4$ использование формулы (14.28)

$$A(w) = \int_0^1 s(\theta)\,\mathrm{wal}(w, \theta)\,d\theta = \int_0^{1/4} \mathrm{wal}(w, \theta)\,d\theta$$

дает следующие коэффициенты: $A(0) = A(1) = A(2) = A(3) = 1/4$.

Найденные спектры представлены на рис. 14.19. Этот результат легко обобщается для последовательности прямоугольных импульсов с отношением $\tau_и/T_0 = 1/2^k$, где k — целое положительное число. Очевидно, что спектр Уолша такого колебания состоит из 2^k компонентов с одинаковыми амплитудами, равными $1/2^k$. Очень важно, что этот спектр содержит конечное число составляющих; разложение того же колебания (14.30) по гармоническим функциям является бесконечным.

Рассмотрим теперь случай, когда $\tau_и/T_0 \neq {}^1/_2{}^k$, например, $\tau_и/T_0 = {}^1/_3$. Ограничиваясь первыми 16-ю функциями Уолша (в упорядочении Уолша) и опуская промежуточные выкладки, получаем $A(0) = A(1) = 1/3$, $-A(4) = -A(5) = A(6) = A(7) = {}^1/_{12}$, $A(8) = A(9) = -A(10) = -A(11) = -A(13) = A(14) = A(15) = 1/24$.

Найденный спектр представлен на рис. 14.20. При переходе к упорядочению по Пэли структура спектра сохраняется (по модулям).

Итак, при $\tau_и/T_0 \neq 1/2^k$ спектр Уолша периодической последовательности прямоугольных импульсов содержит бесконечно большое число составляющих. Суммирование первых 16 функций дает импульс, показанный на рис. 14.21.

4. Влияние сдвига импульсной периодической последовательности на спектр Уолша. Рассмотрим этот вопрос на примере импульсной последо-

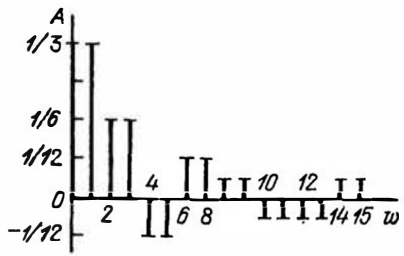


Рис. 14.20. Спектр последовательности прямоугольных импульсов в базисе функций Уолша при $\tau_и/T_0=1/3$; $N=16$

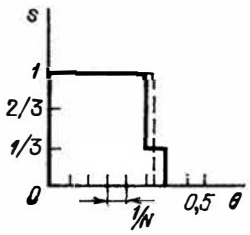


Рис. 14.21. Аппроксимация прямоугольного импульса 16 функциями Уолша при $\tau_и/T_0=1/3$, $N=16$

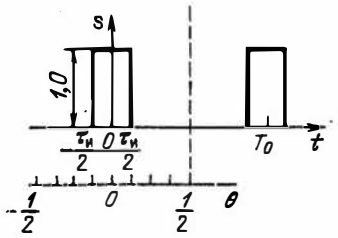


Рис. 14.22. Один цикл периодической последовательности импульсов на интервале $0{,}5 \leqslant \theta < 1$

Рис. 14.23. Влияние сдвига импульсной характеристики на спектр Уолша (ср. с рис. 14.19, *в*)

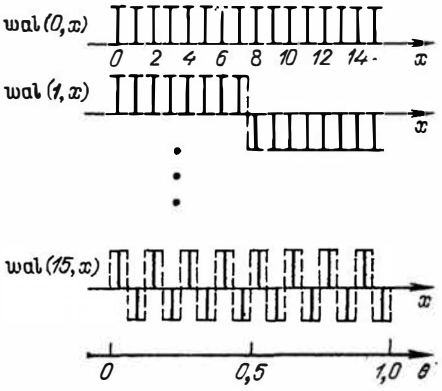


Рис. 14.24. Пример дискретных функций Уолша при $N=8$

вательности при $\tau_и/T_0 = 1/4$ (рис 14.22), смещенной на $\tau_и/2$ относительно аналогичной последовательности (см. пример 3).

Используя функции Уолша (в упорядочении Уолша), определенные на интервале $-1/2 \leqslant \theta < 1/2$ (см. рис. 14.11), запишем выражение для коэффициентов Уолша

$$A(w) = \int_{-1/8}^{1/8} \text{wal}(w, \theta)\, d\theta,$$

откуда получаются следующие ненулевые коэффициенты:

$$A(0) = A(2) = A(4) = A(6) = 1/4.$$

Полученный спектр (рис. 14.23) вдвое шире спектра, представленного на рис. 14.19, *в*. Таким образом, сдвиг импульсной последовательности на время $\tau_и/2$ привел к изменению спектра. Зависимость структуры спектра от сдвига колебания $s(t)$ на оси времени является особенностью анализа в базисе функций Уолша. Эта особенность связана с непериодичностью функций Уолша на единичном интервале их определения. Напомним, что при разложении по гармоническим функциям сдвиг сигнала во времени влияет лишь на ФЧХ спектра (см. § 2.7, п.1).

14.6. ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ УОЛША

Для цифровых методов спектрального анализа и обработки сигналов наибольший интерес представляют дискретные функции Уолша. Эти функции являются отсчетами непрерывных функций Уолша. Каждый отсчет расположен в середине связанного с ним элемента непрерывной функции. Длительность элемента равна $1/N$ от интервала $[0,1)$.

В качестве примера на рис. 14.24 показаны первые две и последняя $(N-1)$-я дискретные функции Уолша при $N=8$. В качестве аргумента дискретной функции Уолша принят номер отсчета $x = 0,1\ldots, N-1$ (см. ось абсцисс на верхней части рис. 14.24). Основываясь на (14.21) и (14.22), можно получить общее выражение для дискретной функции Уолша

$$\text{wal}(w, x) = (-1)^{\sum_{k=1}^{n} (w_{n-k+1} \oplus w_{n-k}) x_k} \qquad (14.31)$$

где $x_k = 0$ или 1 есть k-й разряд в представлении номера отсчета x в двоичной системе счисления:

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k 2^{n-k} = (x_1,\ x \ldots x_n)_2. \tag{14.32}$$

Пусть, например, рассматривается система функций Уолша размером $N = 16$, $n = \log_2 N = 4$. Тогда

$$x = \sum_{k=1}^{4} x_k 2^{4-k} = x_1 \cdot 2^3 + x_2 \cdot 2^2 + x_3 \cdot 2^1 + x_4 \cdot 2^0. \tag{14.33}$$

Определим одну из функций системы, например шестую ($w = 6$). По модулю все отсчеты функции Уолша равны единице и требуется определить лишь знак. Обратимся для этого к формуле (14.31), в которую подставим $w = 6$ и $n = 4$:

$$\text{wal}\,(6,\ x) = (-1)^{\sum_{k=1}^{4} (w_{4-k+1} \oplus w_{4-k}) x_k}$$

Напомним, что в соответствии с (14.21) при $n = 4$

$$w = 6 = w_1 \cdot 2^3 + w_2 \cdot 2^2 + w_3 \cdot 2^1 + w_4 \cdot 2^0,$$

откуда следуют равенства $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = 1$ и $w_4 = 0$.

Далее находим значения w_{4-k+1}, w_{4-k} и сумму

$w_{4-k+1} \oplus w_{4-k}$ при $k = 1 \ldots 4$:

$k = 1$: $w_{4-k+1} = w_4 = 0$, $w_{4-k} = w_3 = 1$, $w_{4-k+1} \oplus w_{4-k} = 0 \oplus 1 = 1$;

$k = 2$: $w_{4-k+1} = w_3 = 1$, $w_{4-k} = w_2 = 1$, $w_{4-k+1} \oplus w_{4-k} = 1 \oplus 1 = 0$;

$k = 3$: $w_{4-k+1} = w_2 = 1$, $w_{4-k} = w_1 = 0$, $1 \oplus 0 = 1$;

$k = 4$: $w_{4-k+1} = w_1 = 0$, $w_{4-k} = w_0 = 0$, $0 \oplus 0 = 0$.

Значения x_k (нуль или единица) находим из выражения (14.32), приравнивая номер отсчета x последовательно значениям 0, 1, 2, ..., 15.

При $x = 0$ все разряды x_1, x_2, x_3, x_4 равны нулю и, следовательно, по формуле (14.31) wal (6, 0) $= +1$.

При $x = 1$ соответственно $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ и $x_4 = 1$; при этом показатель степени в (14.31) при $k = 4$ равен $0 \cdot x_4 = 0$ и wal (6, 1) $= +1$.

При $x = 2$ $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ показатель степени в (14.31) при $k = 3$ равен $1 \cdot x_3 = 1$, откуда получаем wal (6,2) $= -1$.

Вычисленные три отсчета в точках $x = 0,1$ и 2 согласуются с ходом непрерывной функции wal (6,θ) на рис. 14.13. Продолжая расчет для $x = 3,4$, ..., 15, находим все отсчеты функции wal (6, x).

Другой формой представления дискретных функций Уолша являются матрицы Адамара, приведенные в § 14.4. Номера столбцов матрицы Адамара соответствуют номерам дискретных значений функций Уолша, а номера строк — номерам функций Уолша. Строки матрицы Адамара могут быть упорядочены по Пэли, по Уолшу и собственно по Адамару.

Перечисленные в § 14.3 свойства непрерывных функций Уолша записываются для дискретных функций следующим образом.

Ортогональность

$$\sum_{x=0}^{N-1} \text{wal}\,(i,\ x)\,\text{wal}\,(l,\ x) = \begin{cases} N & \text{при } i = l, \\ 0 & \text{при } i \neq l. \end{cases} \tag{14.34}$$

Дискретные функции Уолша не нормированы; норма равна N независимо от номера функции.

Мультипликативность

$$\text{wal}\,(i, x)\,\text{wal}\,(l, x) = \text{wal}\,(i \oplus l, x). \tag{14.35}$$

Пусть сигнал $s(t)$ (вещественная функция) представлен совокупностью своих эквидистантных отсчетов $s(k)$, $k = 0,1, 2, \ldots, N-1$.

Тогда преобразования

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)\,\text{wal}\,(n, k), \tag{14.36}$$

$$s(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S(n)\,\text{wal}\,(n, k) \tag{14.37}$$

образуют пару дискретных преобразований Уолша (ДПУ). Выражения (14.36), (14.37) аналогичны паре ДПФ в базисе гармонических функций [см. (12.14), (12.15)].

Как и ДПФ (см. § 2.17), ДПУ обладают свойством периодичности

$$S(n) = S(n + mN),\ s(k) = s(k + mN), \tag{14.38}$$

где m — целое число.

Имеются, однако, и существенные особенности ДПУ. Это относится к теореме запаздывания. Напомним, что в случае спектрального анализа в базисе гармонических функций умножение ДПФ $S(n)$ на базисную функцию $e^{i\frac{2\pi}{N}nm}$ эквивалентно сдвигу во времени последовательности $s(k)$, $k = 0,1, 2, \ldots, N-1$, на m интервалов.

Действительно, вводя под знак суммы в правой части (2.127) множитель $e^{i\frac{2\pi}{N}nm}$, получаем

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S(n)\, e^{i\frac{2\pi}{N}nm}\, e^{i\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S(n)\, e^{i\frac{2\pi}{N}(k+m)} = s(k+m),$$

что эквивалентно сдвигу каждого из отсчетов $s(k)$ на $(k + m) - k = m$ интервалов.

Проведем аналогичное рассуждение для ДПУ. Обращаясь к выражению (14.37) для $s(k)$, вводим под знак суммы множитель $\text{wal}\,(n, m)$, т. е. базисную функцию, имеющую тот же смысл, что и $e^{i\frac{2\pi}{N}nm}$ для анализа в базисе гармонических функций; тогда получим

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S(n)\,\text{wal}\,(n, k)\cdot\text{wal}\,(n, m) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S(n)\,\text{wal}\,(n, k\oplus m) = s(k\oplus m). \tag{14.39}$$

Здесь использовано свойство мультипликативности функций Уолша.

Как видим, при заданном значении m сдвиг k-го отсчета $s(k)$ будет равен $(k \oplus m) - k$ интервалов (а не просто m интервалов).

Переход от $s(k)$ и $s(k \oplus m)$ означает диадный сдвиг на m интервалов последовательности отсчетов $s(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Поясним смысл термина «диадный сдвиг». С понятием «сдвиг функции» приходится иметь дело, например, при определении корреляционной функции, при рассмотрении теоремы запаздывания, при определении свертки двух функций. В обычном смысле сдвиг рассматривается как параллельный перенос сдвигаемых значений колебания вдоль оси времени. Такой сдвиг можно назвать арифметическим, так как он выражается обычным арифметическим сложением или вычитанием. При арифметическом сдвиге, например, на $m = 3$ интервала k-й отсчет $x(5)$ переместится и станет $x(5+3) = x(8)$. При достаточно большом m отсчет $x(k)$ выйдет за пределы исходной совокупности отсчетов. При диадном сдвиге тот же отсчет $x(5)$, сдвинутый на $m = 3$, займет положение $x(5 \oplus 3) = x(6)$, так как

$$\begin{array}{r} 5 = (101)_2 \\ \oplus\ 3 = (011)_2 \\ \hline (110)_2 = 6. \end{array}$$

Диадный сдвиг обладает так называемым групповым свойством: сдвиг отсчетов $x(k)$ (где $k = 0,1,2, \ldots, N-1$) на $m \leqslant N-1$ соответствует лишь перестановке этих отсчетов внутри их исходной совокупности. Эта перестановка определяется операцией сложения по модулю 2, т. е. $k \oplus m$, для которой результат сложения всегда не превышает число $N-1$ при любом $m = 0,1,2, \ldots, N-1$. При этом имеется в виду, что $N = 2^n$, где n — целое положительное число.

Сделанное утверждение легко проверить перебором всевозможных диадных сдвигов всех отсчетов $x(k)$ при заданном N. Например, при $N = 8$ получается следующая квадратная матрица значений $q = k \oplus m$

$$q = \begin{array}{c|cccccccc|c} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & k \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & \\ 5 & 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 & \\ 6 & 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 & \\ 7 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \\ \hline m & & & & & & & & & \end{array}.$$

Из этой матрицы видно, что диадный сдвиг не выводит сдвинутые отсчеты за пределы исходной совокупности N отсчетов, а лишь производит их перестановку внутри этой совокупности.

Например, при исходной последовательности $s(0)\, s(1) \ldots s(7)$ получим следующие последовательности:

при $m = 1$

$s(1)\, s(0)\, s(3)\, s(2)\, s(5)\, s(4)\, s(7)\, s(6)$;

при $m = 2$

$s(2)\, s(3)\, s(0)\, s(1)\, s(6)\, s(7)\, s(4)\, s(5)$;

при $m = 3$

$s(3)\, s(2)\, s(1)\, s(0)\, s(7)\, s(6)\, s(5)\, s(4)$ и т. д.

Диадный сдвиг придает существенное своеобразие как спектральному анализу в базе функций Уолша, так и представлению сигналов во временной

области. В частности, диадная свертка двух временных последовательностей $x(\kappa)$ и $y(k)$ записывается в форме

$$h(k)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N=1}x(m)\,y(k\oplus m)=x(k)\otimes y(k).$$

Основное преимущество ДПУ перед ДПФ заключается в том, что отсчеты сигнала умножаются на функции Уолша, которые принимают значения ± 1 [см. (14.36), (14.37)]. По существу, операция умножения исключается и выражения (14.36), (14.37) сводятся к суммированию отсчетов с соответствующими знаками. В случае же ДПФ требуется умножение на комплексные числа вида $e^{\pm i\frac{2\pi}{N}nk}$, причем действительная и мнимая части этих чисел требуют представления достаточно большим числом разрядов (для снижения уровня шума округления).

По аналогии с БПФ и ОБПФ можно построить алгоритмы быстрых преобразований — прямого и обратного — по Уолшу.

Для вычисления $N=2^r$ спектральных коэффициентов при использовании БПУ требуется всего Nr операций сложения и вычитания.

Возведение спектральных коэффициентов Уолша $S(n)$ в квадрат и обратное преобразование Уолша дает диадную корреляционную функцию исходного сигнала. По своей форме эта функция сильно отличается от арифметической корреляционной функции. Кроме того, диадная корреляционная функция не инвариантна относительно положения обрабатываемого сигнала во времени. Эти обстоятельства препятствуют применению функций Уолша к такой, например, обработке сигналов, как согласованная фильтрация.

Тем не менее большое преимущество функций Уолша, не требующих использования операций умножения при обработке сигналов, способствует все большему их распространению в различных областях (передача изображений, распознавание образов, сжатие данных и др.)

Глава 15. ЭЛЕМЕНТЫ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ РАДИОЦЕПЕЙ

15.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Общая теория синтеза линейных электрических цепей не входит в задачу курса «Радиотехнические цепи и сигналы».

В данной главе рассматриваются лишь некоторые частные, специфические для синтеза радиоцепей вопросы:

синтез активных четырехполюсников в виде каскадного соединения элементарных невзаимодействующих (развязанных) звеньев первого или второго порядка;

построение избирательных цепей, не содержащих катушек индуктивности (интегральные микросхемы);

элементы синтеза дискретных (цифровых) цепей и соотношение между АЧХ и ФЧХ цифровых фильтров.

Синтез аналоговых цепей в данной главе проводится лишь в частотной области, т. е. по заданной передаточной функции; для цифровых цепей рассмотрен синтез и по заданной импульсной характеристике (кратко).

Известно, что передаточная функция линейного четырехполюсника однозначно определяется своими нулями и полюсами на p-плоскости (аналоговые цепи) или на z-плоскости (цифровые цепи). Поэтому выражение «синтез по заданной передаточной функции» эквивалентно выражению «синтез по заданным нулям и полюсам передаточной функции». Существующая теория синтеза четырехполюсников рассматривает цепи, передаточная функция которых имеет конечное число нулей и полюсов, иными словами, цепи, состоящие из конечного числа звеньев с сосредоточенными параметрами. Излагаемый ниже материал ориентирован на четырехполюсники с небольшим числом звеньев, которые характерны для фильтров нижних частот, верхних частот, заградительных фильтров и т. д., широко применяемых в радиоэлектронных устройствах.

15.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛОГОВОГО ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА КАСКАДНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

При заданных нулях и полюсах передаточную функцию $\mathbf{K}(p)$ целесообразно представлять в виде произведения множителей, каждый из которых может являться передаточной функцией простейшего, элементарного четырехполюсника. Пусть, например, передаточная функция синтезируемого четырехполюсника

$$\mathbf{K}(p) = \frac{a_0}{b_0} \frac{p}{(p-p_{п1})(p-p_{п2})(p-p_{п3})} \tag{15.1}$$

обладает нулем в точке $p = 0$ и тремя полюсами, из которых один вещественный в точке $p_{п1} < 0$ и два комплексных: $p_{п2}$ и $p_{п3} = p_{п2}^*$.

Учитывая равенство

$$(p-p_{п2})(p-p_{п2}^*) = p^2 - 2\,\mathrm{Re}(p_{п2})\,p + |p_{п2}|^2, \tag{15.2}$$

записываем (15.1) в форме

$$\mathbf{K}(p) = \frac{a_0}{b_0} \frac{p}{(p-p_{п1})} \frac{1}{p^2 - 2\,\mathrm{Re}(p_{п2})\,p + |p_{п2}|^2} = \frac{a_0}{b_0} \mathbf{K}_1(p)\,\mathbf{K}_2(p). \tag{15.3}$$

Передаточная функция $\mathbf{K}_1(p)$ реализуется звеном первого порядка (RC- или RL-цепь). Действительно, для RC-цепи (рис. 15.1, *а*) при съеме напряжения с резистора передаточная функция

$$\mathbf{K}_1(p) = \frac{R}{R + 1/Cp} = \frac{p}{p + 1/RC}, \tag{15.4}$$

откуда следует $p_{п1} = -1/RC$, $RC = 1/p_{п1}$.

При использовании RL-цепи (рис. 15,1, *б*)

$$\mathbf{K}_1(p) = \frac{Lp}{R + Lp} = \frac{p}{p + R/L}, \tag{15.5}$$

откуда $p_{п1} = -R/L$.

Функция $\mathbf{K}_2(p)$ реализуется звеном второго порядка.

Трактовка выражения (15.3) как передаточной функции каскадного соединения взаимно независимых четырехполюсников $\mathbf{K}_1(p)$ и $\mathbf{K}_2(p)$ позволяет задачу синтеза сложного четырехполюсника свести к синтезу простых звеньев. Увеличение числа нулей и полюсов в передаточной функции приводит

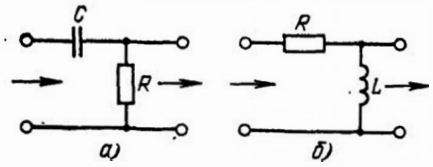


Рис. 15.1. Примеры четырехполюсника первого порядка

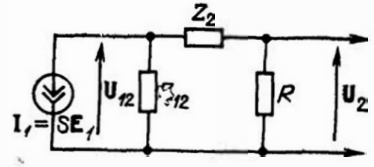


Рис. 15.2. Реализация типового звена второго порядка

лишь к соответствующему увеличению числа звеньев. Естественно, такой подход имеет смысл и допустим лишь при достаточной развязке элементарных четырехполюсников. Применение эмиттерных повторителей и некоторых других устройств современной микроэлектронной техники обеспечивает выполнение этого требования. В тех случаях, когда нельзя пренебрегать взаимным влиянием элементарных четырехполюсников, приходится прибегать к более сложным методам синтеза, излагаемым в специальной литературе.

Передаточную функцию элементарного четырехполюсника второго порядка в соответствии с (15.3) зададим в форме

$$\mathbf{K}(p) = a_0 \frac{1}{p^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(p_\text{п})\,p + |p_\text{п}|^2} = a_0 \frac{1}{p^2 + b_1 p + b_2}, \qquad (15.6)$$

где постоянные коэффициенты $b_1 = -2\,\mathrm{Re}\,(p_\text{п})$, $b_2 = |p_\text{п}|^2$, $b_0 = 1$.

Рассмотрим сначала реализацию функции $\mathbf{K}(p)$ с помощью цепи, содержащей катушку индуктивности L, конденсатор C и резистор R (рис. 15.2). Сопротивление резистора, являющегося нагрузкой четырехполюсника, считаем заданным. Один из элементов цепи Z_{12}, Z_2 должен быть индуктивным, а другой — емкостным. Под источником тока, возбуждающим цепь, можно подразумевать, например, коллекторную цепь транзисторного усилителя, работающего по схеме с ОЭ (см. рис. 5.8, *а*). Внутренней проводимостью источника тока пренебрегаем. Ток $\mathbf{I}_1$ равен $S\mathbf{E}_1$, где $\mathbf{E}_1$ — напряжение база—эмиттер.

Напряжение на элементе Z_{12} можно определить выражением

$$\mathbf{U}_{12} = Z_{12}\,(Z_2 + R)\,S\mathbf{E}_1/(Z_{12} + Z_2 + R),$$

а напряжение на резисторе R — выражением

$$\mathbf{U}_2 = \frac{R}{R + Z_2}\,\mathbf{U}_{12} = \frac{R}{(R + Z_2)}\,\frac{Z_{12}\,(Z_2 + R)}{(Z_{12} + Z_2 + R)}\,S\mathbf{E}_1.$$

Следовательно,

$$\mathbf{K}(p) = \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{E}_1} = S\frac{Z_{12}\,R}{Z_{12} + Z_2 + R}. \qquad (15.7)$$

Из сопоставления этого выражения с (15.6) очевидно, что для получения вещественного числителя следует задать $Z_{12} = 1/Cp$ и $Z_2 = Lp$. При этом

$$\mathbf{K}(p) = SR\frac{1}{Cp\left(\frac{1}{Cp} + Lp + R\right)} = \frac{SR}{LC}\,\frac{1}{\left(p^2 + \frac{R}{L}\,p + \frac{1}{LC}\right)}. \qquad (15.8)$$

Сравнение (15.8) с (15.6) приводит к равенствам $R/L = b_1$, $1/LC = b_2$, $SR/LC = a_0$, откуда

$$L = R/b_1;\ C = 1/b_2 L;\ a_0 = SRb_2. \qquad (15.9)$$

Таким образом, схема искомой цепи принимает вид, показанный на рис. 15.3, *а*.

Аналогичным образом нетрудно показать, что передаточной функции вида

$$\mathbf{K}(p) = a_0 \frac{p^2}{p^2 + b_1 p + b_2} \qquad (15.10)$$

соответствует схема, представленная на рис. 15.3, *б*, параметры которой L и C выражаются через коэффициенты b_1 и b_2 теми же соотношениями (15.19), что и в схеме на рис. 15.3, *а*. Различие лишь в постоянном коэффициенте $a_0 = SR$.

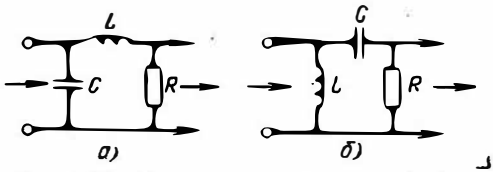


Рис. 15.3. Реализация передаточной функции:
а) по выраженню (15.8); *б*) по выраженню (15.10)

15.3. РЕАЛИЗАЦИЯ БЕЗЫНДУКТИВНОСТНОЙ ЦЕПИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В интегральных микросхемах, не допускающих применения катушек индуктивности, цепь второго порядка реализуется с помощью активной RC-цепи. Один из возможных вариантов такой цепи представлен на рис. 15.4, *а*. Свойства этой цепи обусловлены применением операционного усилителя K_0 и обратной связи. Усилитель в рассматриваемой схеме должен обеспечить небольшое усиление (не более нескольких единиц). Основные требования к усилителю — очень большое входное и близкое к нулю выходное сопротивления, а также отсутствие обратной реакции. При выполнении этих требований усилитель можно рассматривать как идеальный источник напряжения (управляемый напряжением), что позволяет при определении токов и напряжений в схеме на рис. 15.4, *а* считать точки *а* и *б* разомкнутыми, а напряжение на выходе приравнивать величине $K_0 U_{C_2}$, где U_{C_2} — напряжение на конденсаторе C_2. Эти допущения приводят к эквивалентной схеме на рис. 15.4, *б*, на которой усилитель K_0 опущен, а его влияние учтено тем, что напряжение на конденсаторе C_2 связано с выходным напряжением соотношением $\mathbf{U}_{C_2} = \mathbf{E}_2/K_0$.

Применяя общие уравнения четырехполюсника (5.4) к схеме, представленной на рис. 15.4, *б*, и учитывая добавочное условие $\mathbf{E}_2 = K_0(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)/C_2 p$, получаем

$$\mathbf{E}_1 = Z_{11}\mathbf{I}_1 + Z_{12}\mathbf{I}_2,\ \mathbf{E}_2 = Z_{21}\mathbf{I}_1 + Z_{22}\mathbf{I}_2 = K_0(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)/C_2 p. \qquad (15.11)$$

Здесь $Z_{11} = R_1 + R_2 + 1/C_2 p$; $Z_{12} = R_2 + 1/C_2 p$; $Z_{21} = R_2 + 1/C_2 p$ $Z_{22} = R_2 + 1/C_1 p + 1/C_2 p$.

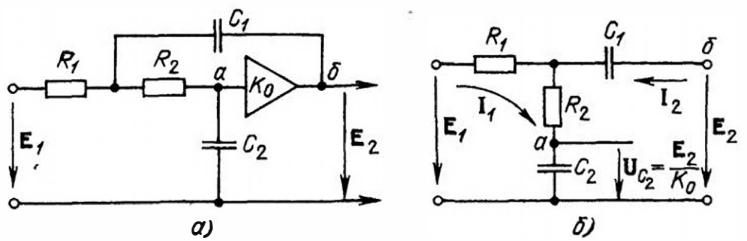


Рис. 15.4. Активная RC-цепь второго порядка (*а*) и схема замещения (*б*)

Исключив ток I_2 из первого уравнения (15.11), после несложных преобразований получим следующее выражение для передаточной функции четырехполюсника:

$$\mathbf{K}(p)=\frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1}=\frac{\dfrac{K_0}{R_2C_2}}{C_1R_1p^2+\left(1+\dfrac{R_1}{R_2}+\dfrac{C_1R_1}{C_2R_2}-K_0\dfrac{C_1R_1}{C_2R_2}\right)p+\dfrac{1}{C_2R_2}}=$$

$$=\frac{K_0/C_1C_2R_1R_2}{p^2+(1/C_1R_1+1/C_1R_2+1/C_2R_2-K_0/C_2R_2)\,p+1/C_1C_2R_1R_2}. \qquad (15.12)$$

Дальнейшая задача синтеза сводится к подбору резисторов, конденсаторов и K_0, обеспечивающих требуемые значения коэффициентов b_1 и b_2 полинома (15.6):

$$b_1=\left(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_1}+\frac{1}{R_2C_2}-\frac{K_0}{R_2C_2}\right),\quad b_2=\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}. \qquad (15.13)$$

Из первого равенства можно получить следующее выражение для требуемого коэффициента усиления:

$$K_0=1+C_2/C_1+R_2C_2/R_1C_1-b_1R_2C_2. \qquad (15.14)$$

Полученные соотношения будут проиллюстрированы в § 15.6.

15.4. ОСОБЕННОСТИ СИНТЕЗА ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА ПО ЗАДАННОЙ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

При синтезе фильтров нижних частот (ФНЧ), фильтров верхних частот (ФВЧ), полосовых фильтров и т. д. к ФЧХ обычно не предъявляется каких-либо специфических требований. Предполагается, что обеспечение удовлетворительной равномерности АЧХ минимально-фазового четырехполюсника в заданной полосе частот одновременно обеспечивает также и линейность ФЧХ в этой полосе.

Представим комплексную передаточную функцию $\mathbf{K}(i\omega)$ в форме

$$\mathbf{K}(i\omega)=\mathbf{K}(p)_{p=i\omega}=\frac{P(p)}{Q(p)}\Big|_{p=i\omega}, \qquad (15.15)$$

после чего перейдем к квадрату модуля

$$K^2(\omega)=\mathbf{K}(i\omega)\,\mathbf{K}(-i\omega)=\frac{P(p)\,P(-p)}{Q(p)\,Q(-p)}\Big|_{p=i\omega}, \qquad (15.16)$$

тем самым исключая из рассмотрения ФЧХ четырехполюсника.

Модуль передаточной функции, четный относительно частоты, можно рассматривать как функцию ω^2. То же относится к модулям $|P(i\omega)|$ и $|Q(i\omega)|$. Поэтому выражение (15.16) можно записать в форме

$$|\mathbf{K}(i\omega)|^2=\mathbf{K}(p)\,\mathbf{K}(-p)\big|_{p=i\omega}=\frac{A(\omega^2)}{B(\omega^2)}=\frac{A(-p^2)}{B(-p^2)}\Big|_{p=i\omega}, \qquad (15.17)$$

где $A(-p^2)=P(p)P(-p)$; $B(-p^2)=Q(p)\,Q(-p)$.

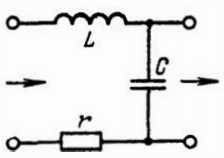


Рис. 15.5. Простой четырехполюсник с двумя полюсами

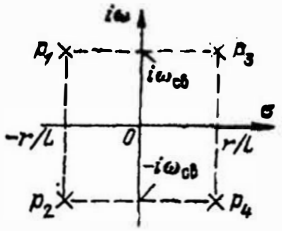


Рис. 15.6. Квадрантная симметрия полюсов

Переходя от мнимой оси $i\omega$ к любой точке p-плоскости, получаем следующее выражение:

$$\mathbf{K}(p)\,\mathbf{K}(-p) = A(-p^2)/B(-p^2). \qquad (15.18)$$

Полюсы и нули функции $A(-p^2)/B(-p^2)$ расположены в квадрантной симметрии: каждой комплексно-сопряженной паре в левой p-полуплоскости соответствует зеркальная пара в правой полуплоскости.

Поясним это положение на примере простейшего четырехполюсника (рис. 15.5) с передаточной функцией

$$\mathbf{K}(i\omega) = \frac{1/i\omega C}{\omega L + r + 1/i\omega C}, \quad \mathbf{K}(p) = \frac{1/LC}{p^2 + pr/L + 1/LC}.$$

Комплексно-сопряженной функции $\mathbf{K}(-i\omega)$ соответствуют выражения

$$\mathbf{K}(-i\omega) = \frac{1/(-i\omega C)}{-i\omega L + r + 1/(-i\omega C)}, \quad \mathbf{K}(-p) = \frac{1/LC}{p^2 - pr/L + 1/LC}.$$

Следовательно,

$$|\mathbf{K}(i\omega)|^2 = \frac{(1/LC)^2}{(\omega^2 - 1/LC)^2 + (r/L\omega)^2} = \frac{(1/LC)^2}{B(-p)^2}\Big|_{p=i\omega},$$

$$\mathbf{K}(p)\,\mathbf{K}(-p) = \frac{(1/LC)^2}{(p^2 + pr/L + 1/LC)(p^2 - pr/L + 1/LC)} = \frac{(1/LC)^2}{B(-p^2)}.$$

Полюсы функции $(1/LC)^2/B(-p)^2$, являющиеся корнями уравнения $B(-p^2) = 0$, расположены в точках (рис. 15.6)[1]

$$p_{1,2} = -r/2L \pm i\sqrt{1/LC - (r/2L)^2} = -\alpha \pm i\omega_{св},$$

$$p_{3,4} = +r/2L \pm i\sqrt{1/LC - (r/2L)^2} = +\alpha \pm i\omega_{св}.$$

К передаточной функции $\mathbf{K}(p)$ относятся полюсы, расположенные только в левой p-полуплоскости (в данном примере p_1 и p_2). То же относится к нулям передаточной функции, т. е. к корням уравнения $A(-p^2) = 0$, если передаточная функция $\mathbf{K}(p)$ соответствует минимально-фазовой цепи. В противном случае нули могут быть расположены и в правой p-полуплоскости (в данном примере нули отсутствуют).

Следует также указать, что полюсы, расположенные на мнимой оси, могут быть только кратными (с кратностью 2). Одна половина из них должна быть отнесена к $\mathbf{K}(p)$, а другая — к $\mathbf{K}(-p)$.

Из перечисленных свойств функции $K^2(\omega)$ вытекает, что для аппроксимации заданной АЧХ четырехполюсника можно использовать функции, зависящие от ω^2, а при переходе к переменному $p = \sigma + i\omega$ — функции, соответствующие указанному выше расположению полюсов и нулей на p-плоскости.

[1] Здесь опущен индекс «п» в обозначении полюса $p_{пk}$.

15.5. СИНТЕЗ ФИЛЬТРА НИЖНИХ ЧАСТОТ. ФИЛЬТР БАТТЕРВОРТА

Амплитудно-частотная характеристика идеального ФНЧ представлена на рис. 15.7. При аппроксимации АЧХ на оси абсцисс обычно откладывается безразмерная (нормированная) частота $x = \omega/\omega_c$, где ω_c — частота среза, а по оси ординат — нормированное значение $K(\omega/\omega_c) = K(x)$.

Аппроксимирующую функцию для идеальной АЧХ фильтра, показанной на рис. 15.7, задают в виде

$$K(x) = 1/\sqrt{1 + F^2(x)}, \tag{15.19}$$

причем накладывают условие, чтобы функция $F(x)$ по модулю была минимальна в полосе $0 \leqslant x \leqslant 1$ и максимальна при $x > 1$.

Простейшей функцией, отвечающей этому требованию, является функция $F(x) = x^n = (\omega/\omega_c)^n$. При этом

$$K^2(x) = |\mathbf{K}(ix)|^2 = 1/[1 + F^2(x)] = 1/(1 + x^{2n}). \tag{15.20}$$

Графики функции (15.19) при нескольких значениях n показаны на рис. 15.8. Определяемая выражением (15.20) аппроксимирующая функция получила название функции Баттерворта, а фильтры, синтезированные на основе этой функции, называются фильтрами Баттерворта. При частоте среза $x = 1$ ($\omega = \omega_c$) функции Баттерворта любого порядка n равны 1/2, что соответствует ослаблению АЧХ $1/\sqrt{2}$ (на 3 дБ). Аппроксимацию по Баттерворту часто называют максимально плоской.

При исчислении $K(x)$ в децибелах (15.19) приводится к виду

$$K(x)_{\text{дБ}} = 20 \lg K(x) = -10 \lg [1 + F^2(x)] = -10 \lg (1 + x^{2n}).$$

Если безразмерную частоту x представить в виде степени числа 2, т. е. $x = 2^y$, где y — число октав, то

$$K(x)_{\text{дБ}} = -10 \lg (1 + x^{2n}) = -10 \lg (1 + 2^{2ny}). \tag{15.21}$$

График зависимости K в децибелах от y показан на рис. 15.9. На частоте среза ($x = 1$, $y = 0$) затухание равно 3 дБ независимо от порядка n.

Вне полосы прозрачности фильтра, при $x^{2n} \gg 1$ ($y > 1$), выражение (15.21) определяет прямую линию

$$1/K_{\text{дБ}} \approx 10 \lg 2^{2ny} = 20ny \lg 2 = 6ny. \tag{15.22}$$

Таким образом, ослабление АЧХ равно $6n_{\text{дБ}}$ на одну октаву (т. е. при изменении частоты x вдвое, а y на одну единицу).

Для удовлетворительной аппроксимации прямоугольной характеристики (см. рис.15.7) с помощью функции Баттерворта требуются относительно

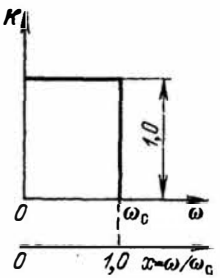


Рис. 15.7. Амплитудно-частотная характеристика идеального фильтра нижних частот

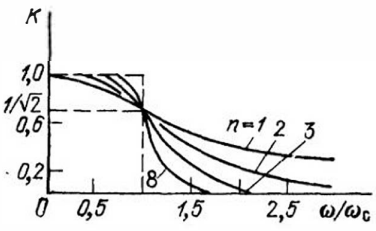


Рис. 15.8. Аппроксимирующие функции Баттерворта

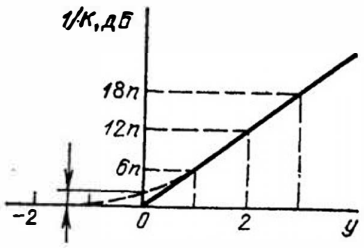


Рис. 15.9. Затухание в фильтре Баттерворта в зависимости от числа октав

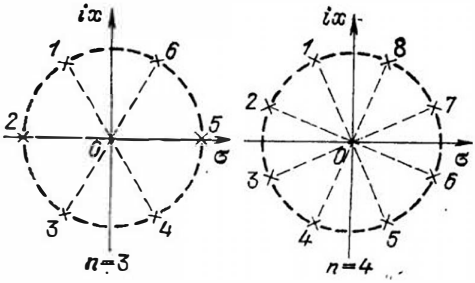


Рис. 15.10. Расположение полюсов передаточной функции фильтра Баттерворта третьего и четвертого порядков

высокие значения n. Так, если необходимо, чтобы при $\omega = 3\omega_c$ ($x = 3$) ослабление (затухание) АЧХ было не менее 40 дБ, то $n \geqslant 40/6y$. В данном случае $y = \lg_2 x = \lg_2 3 = 1{,}58$ и, следовательно, $n \geqslant 4{,}25$, т. е. требуется $n = 5$.

Следующим шагом после определения n является нахождение полюсов передаточной функции. Для этого выразим (15.20) в форме (15.17), для чего в (15.20) приравниваем $ix = p$, $x^2 = -p^2$ и $x^{2n} = (-1)^n p^{2n}$:

$$|K(ix)|^2 = K(p)\,K(-p)|_{p=ix} = \frac{1}{1+(-1)^n p^{2n}}\Bigg|_{p=ix} = \frac{1}{B(-p^2)}\Bigg|_{p=ix}.$$

Рассматривая теперь поведение функции $1/B(-p^2)$ на p-плоскости, находим полюсы как корни уравнения

$$B(-p^2) = 1+(-1)^n p^{2n} = 0$$

или

$$p^{2n} = -1/(-1)^n = (-1)^{-(n-1)}. \tag{15.23}$$

С помощью соотношений

$$(-1) = e^{-i\pi}, \quad (-1)^{n-1} = e^{-i\pi(n-1)} e^{-i2k\pi},$$

где k — любое целое число, получаем для k-го корня уравнения (15.23) следующее выражение:

$$p_k = e^{i\pi[(n-1)+2k]/2n}, \tag{15.24}$$

причем число корней равно степени уравнения (15.23).

Модули всех полюсов p_k равны единице, а аргументы

$$\varphi_k = \pi\,[n + (2k - 1)]/2n, \tag{15.25}$$

причем разность аргументов любых двух соседних корней равна π/n. Следовательно, все полюсы функции $1/B(-p^2)$ лежат на окружности единичного радиуса и делят эту окружность на равные дуги π/n. Аргумент первого полюса $\varphi_1 = \pi\,(n+1)/2n$, а последнего $\varphi_{2n} = \pi\,(5n-1)/2n$.

Расположение полюсов на окружности единичного радиуса для фильтра Баттерворта третьего и четвертого порядков показано на рис. 15.10.

В соответствии с § 15.4 к передаточной функции синтезируемого фильтра относятся только полюсы, расположенные в левой полуплоскости.

Эти полюсы

$$p_k = -\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\,\pi\right) + i\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\pi, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.26}$$

Следует помнить, что формулы (15.23), (15.24) определяют значения *нормированных* переменных p, т. е.

$$p = (\sigma + i\omega)/\omega_c. \tag{15.27}$$

Все полюсы образуют комплексно-сопряженные пары, кроме одного полюса на вещественной оси при нечетном n. Этому единственному полюсу соответствует $k = (n + 1)/2$. Подставив p_k по формуле (15.24) в общее выражение для передаточной функции

$$K(p) = \frac{a_0 (p - p_{01}) (p - p_{02}) \dots (p - p_{0n})}{b_0 (p - p_{\text{п}1}) (p - p_{\text{п}2}) \dots (p - p_{\text{п}m})},$$

где p_{0k} — нули; $p_{\text{п}k}$ — полюсы, получим передаточную функцию фильтра Баттерворта. Приведем эти выражения для $n = 2, 3, 4$.

При $n = 2$ полюсы $p_{1,2} = -1/\sqrt{2} \pm i/\sqrt{2}$ и по формулам (15.2) и (15.6) находим

$$\mathbf{K}(p) = \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}\,p + 1} = \frac{1}{p^2 + b_1 p + b_2}. \tag{15.28}$$

При $n = 3$ полюсы $p_1 = -0{,}5 + i\sqrt{3}/2$, $p_2 = -1$, $p_3 = -0{,}5 - i\sqrt{3}/2 = p_1^*$.

Передаточная функция

$$\mathbf{K}(p) = \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)} = \frac{1}{(p - p_2)} \frac{1}{(p - p_1)(p - p_1^*)} =$$

$$= \frac{p}{(p + 1)} \frac{1}{(p^2 + p + 1)} = \frac{1}{p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3}. \tag{15.29}$$

При $n = 4$ передаточная функция приводится к виду

$$\mathbf{K}(p) = \frac{1}{(p^2 + 0{,}765p + 1)} \frac{1}{(p^2 + 1{,}848p + 1)} =$$

$$= \frac{1}{p^4 + b_1 p^3 + b_2 p^2 + b_3 p + b_4}. \tag{15.30}$$

Коэффициенты полиномов в знаменателе передаточной функции Баттерворта приводится во многих пособиях по расчету фильтров.

Последним этапом синтеза ФНЧ является подбор элементов для типовых звеньев второго порядка, а при нечетных n — дополнительно для одного звена первого порядка.

15.6. ПРИМЕР СИНТЕЗА ФИЛЬТРА БАТТЕРВОРТА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В основу расчета положим выражение (15.28)

$$\mathbf{K}(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}\,p + 1}, \quad b_1 = \sqrt{2}, \quad b_2 = 1.$$

Переходя в выражении (15.12) к нормированной частотной переменной $p = (\sigma + i\omega)/\omega_c$ [как и в (15.28)], приводим его к виду

$$K(p)=\frac{\dfrac{K_0}{R_1R_2C_1C_2}}{\omega_c^2p^2+\dfrac{\omega_c}{R_2C_2}\left(\dfrac{R_2C_2}{R_1C_1}+\dfrac{C_2}{C_1}+1-K_0\right)p+\dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2}}=$$

$$=\frac{\dfrac{K_0}{\omega_c^2R_1R_2C_1C_2}}{p^2+\dfrac{1}{\omega_cR_2C_2}\left(\dfrac{R_2C_2}{R_1C_1}+\dfrac{C_2}{C_1}+1-K_0\right)p+\dfrac{1}{\omega_c^2R_1R_2C_1C_2}}. \qquad (15.31)$$

Приравнивая знаменатели в выражениях (15.28) и (15.31), получаем следующие условия для определения параметров схемы:

$$\frac{1}{\omega_cR_2C_2}\left(\frac{R_2C_2}{R_1C_1}+\frac{C_2}{C_1}+1-K_0\right)=b_1=\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\omega_c^2R_1R_2C_1C_2}=b_2=1. \qquad (15.32)$$

Постоянную времени цепи R_2C_2 обычно приравнивают значению, близкому к $1/\omega_c$. Тогда и $\omega_cR_1C_1\approx 1$ [из второго условия (15.32)]; при этом условие (15.32) сводится к равенству

$$K_0=1+\frac{R_2C_2}{R_1C_1}+\frac{C_2}{C_1}-b_1=1+1+\frac{C_2}{C_1}-\sqrt{2}\approx 0{,}59+\frac{C_2}{C_1}.$$

Задавая $C_2/C_1=0{,}4$ и, следовательно, $R_2/R_1=2{,}5$, получаем $K_0\approx 1$. В данном примере операционный усилитель, по существу, сводится к эмиттерному повторителю.

Для количественной оценки параметров ФНЧ зададим частоту среза $f_c=1000$ Гц, а емкость конденсатора $C_2=0{,}1$ мкФ. Тогда

$$C_1=C_2/0{,}4=0{,}25 \text{ мкФ},\ R_1=1/\omega_cC_1\approx 640 \text{ Ом},$$

$$R_2=1/\omega_cC_2\approx 1600 \text{ Ом}.$$

Приведенный выше пример реализации фильтра второго порядка является лишь иллюстрацией. Для выбора оптимальной схемы и проведения инженерного расчета читатель должен обратиться к специальной литературе.

15.7. ФИЛЬТР ЧЕБЫШЕВА (НИЖНИХ ЧАСТОТ)

Для улучшения аппроксимации идеальной прямоугольной характеристики ФНЧ (см. рис. 15.7) часто применяется *аппроксимация по Чебышеву*, при которой в качестве функции $F^2(x)$ в формуле (15.19) используется квадрат полинома Чебышева $T_n(x)$ соответствующего порядка n. При этом формула (15.20) записывается в виде

$$|K(ix)|^2=1/[1+\varepsilon^2T_n^2(x)], \qquad (15.33)$$

где $x=\omega/\omega_c$.

Коэффициент $\varepsilon<1$ вводится для ограничения амплитуды пульсации АЧХ в полосе пропускания, т. е. в интервале $|x|\leqslant 1$. Чем меньше ε, тем лучше аппроксимируется АЧХ в указанной полосе, но одновременно снижается крутизна ската характеристики в полосе задерживания (при $x>1$). Варьируя коэффициент ε и степень полинома n, можно осуществить приемлемый компромисс между противоречивыми требованиями к аппроксимации

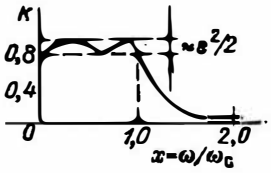


Рис. 15.11. Амплитудно-частотная характеристика фильтра Чебышева четвертого порядка

характеристики в полосе пропускания и вне этой полосы.

В § 14.2 указывалось, что значение $T_n(x)$ колеблется в пределах ± 1 в интервале $|x| < 1$ и растет по закону $T_n(x) \approx 2^{n-1} x^n$ при $|x| \gg 1$. График функции $|\mathbf{K}(ix)|$ при $\varepsilon^2 = 1/5$ и $n = 4$ показан на рис. 15.11.

Амплитуду пульсации АЧХ в полосе пропускания, равную

$$\Delta K = 1 - 1/\sqrt{1+\varepsilon^2}, \tag{15.34}$$

при малых ε можно приравнять значению $\sim\varepsilon^2/2$ (см. рис. 15.11).

Вне полосы пропускания (при больших x), когда $\varepsilon^2 T_n^2(x) \gg 1$, передаточная функция монотонно убывает по закону

$$|\mathbf{K}(ix)| \approx 1/\varepsilon\,|T_n(x)|. \tag{15.35}$$

Для сравнения аппроксимации прямоугольной АЧХ по Чебышеву с аппроксимацией по Баттерворту найдем ослабление АЧХ при $x = 3$ для фильтра четвертого порядка $n = 4$, $\varepsilon^2 = 1/5$. По формуле, приведенной в § 14.2 (или из таблицы полиномов Чебышева), определяем

$$T_4(3) = 8x^4 - 8x^2 + 1 = 8\cdot 3^4 - 8\cdot 3^2 + 1 = 574.$$

Далее,

$$|\mathbf{K}(i3)| \approx \sqrt{5}/574 \approx 4\cdot 10^{-3},\ 1/|\mathbf{K}(i3)| = 250,\ (1/|\mathbf{K}(i3)|)_{\text{дБ}} = 20\lg 250 = 20\cdot 2{,}39 \approx 48\ \text{дБ}.$$

Как видим, при одной и той же степени сложности фильтра (при одинаковых значениях $n = 4$) ослабление АЧХ у фильтра Чебышева на 8 дБ больше, чем у фильтра Баттерворта. При этом аппроксимация АЧХ в полосе пропускания лучше у фильтра Чебышева: наибольшее отклонение от единицы не превышает $\varepsilon^2/2 = 0{,}1$ (вместо $\sim 0{,}3$ у фильтра Баттерворта).

Определим полюсы передаточной функции фильтра Чебышева. Как и в предыдущем параграфе, записываем выражение (15.33) в форме

$$|\mathbf{K}(ix)|^2 = \mathbf{K}(p)\,\mathbf{K}(-p)|_{p=ix} = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(x)} = \frac{1}{B(-p^2)}\Big|_{p=ix}, \tag{15.36}$$

после чего находим корни уравнения

$$\varepsilon^2 T_n^2(x) + 1 = 0,\ T_n(x) = \pm i/\varepsilon. \tag{15.37}$$

Опустив промежуточные выкладки [27], приведем окончательные выражения

$$p_k = \sin\Phi_1 \operatorname{sh}\Phi_2 + i\cos\Phi_1 \operatorname{ch}\Phi_2,$$

где

$$\Phi_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2n},\quad k = 0, 1, 2, \ldots, (2n-1), \tag{15.38}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{n}\operatorname{arcsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{15.39}$$

Для полюсов, расположенных в левой p-полуплоскости, получается следующее выражение:

$$p_k = -\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2n}\right]\operatorname{sh}\Phi_2 + i\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2n}\right]\operatorname{ch}\Phi_2,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1). \qquad (15.40)$$

По найденным полюсам составляется выражение для передаточной функции $\mathbf{K}(p)$, аналогичное (15.29):

$$\mathbf{K}(p) = \frac{b_n}{p^n + b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \ldots + b_{n-1} p + b_n} =$$

$$= \frac{b_n}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)}. \qquad (15.41)$$

В отличие от фильтра Баттерворта коэффициент b_n не равен единице (поскольку полюсы передаточной функции расположены не на окружности единичного радиуса, а на эллипсе). Поэтому в числитель вводится коэффициент b_n для нормирования АЧХ к единице при $\omega = 0$ (и соответственно $p=0$).

Численные значения коэффициентов b_1, b_2, ..., b_n, а также полюсов p_1, p_2,..., p_n в зависимости от степени n и коэффициента неравномерности АЧХ ε приводятся в литературе по расчету фильтров.

Для иллюстрации синтеза фильтра Чебышева определим схему и параметры фильтра при следующих требованиях: неравномерность в полосе прозрачности не более 3 дБ, затухание при $x = \omega/\omega_c = 4$ не менее 30 дБ. При заданной неравномерности, приравнивая в выражении (15.34) $\Delta K = 1 - 1/\sqrt{2}$, получаем $\varepsilon = 1$. Далее по формуле (15.35) находим требуемое значение

$$|T_n(x)| = |T_n(4)| \geqslant 1/|\mathbf{K}(i4)|.$$

Ослаблению на 30 дБ соответствует уменьшение АЧХ в $\sqrt{1000} \approx 32$ раза. При максимальном значении АЧХ, равном единице, получаем следующее условие для определения порядка полинома Чебышева: $T_n(4) \geqslant 1/32$. Перебором первых трех полиномов низших степеней (см. § 14.2) убеждаемся, что полином второй степени при $x = 4$, равный $T_2(4) = 2x^2 - 1 = 31$, обеспечивает требуемую скорость убывания АЧХ в полосе задерживания. Применяя формулы (15.39), (15.40), находим

$$\Phi_2 = \frac{1}{n}\operatorname{arcsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arcsh} 1 = 0{,}44,$$

$$p_1 = -\sin\left(\frac{\pi}{2\cdot 2}\right)\operatorname{sh} 0{,}44 + i\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 2}\right)\operatorname{ch} 0{,}44 = -0{,}322 + i\,0{,}777,$$

$$p_2 = p_1^* = -0{,}322 - i\,0{,}777.$$

Передаточная функция [по формуле (15.41)]

$$\mathbf{K}(p) = \frac{b_2}{(p-p_1)(p-p_1^*)} = \frac{b_2}{p^2 + b_1 p + b_2} = \frac{b_2}{p^2 + 0{,}645p + 0{,}708}. \qquad (15.42)$$

Приравнивая (как и в предыдущем параграфе) коэффициенты полинома в знаменателе выражения (15.31) соответственно $b_1 = 0{,}645$ и $b_2 = 0{,}708$,

получаем следующие соотношения для определения параметров активной RC-цепи:

$$\frac{1}{\omega_c R_2 C_2}\left(\frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}+\frac{C_2}{C_1}+1-K_0\right)=b_1=0{,}645,$$

$$\frac{1}{\omega_c^2 R_1 R_2 C_1 C_2}=b_2=0{,}708.$$

Сохранив соотношения, принятые в § 15.6 для фильтра Баттерворта ($\omega_c R_2 C_2 \approx 1$, $C_2/C_1 = 0{,}4$), получим

$$\omega_c R_1 C_1=\frac{1}{\omega_c R_2 C_2}\frac{1}{b_2}=\sqrt{2}, \quad K_0=1+\frac{C_2}{C_1}+\frac{1}{\sqrt{2}}-0{,}645\approx 1{,}46.$$

Из сопоставления полученных результатов с результатами расчета фильтра Баттерворта видим, что, изменяя коэффициент усиления K_0 (операционного усилителя) и несущественно изменяя сопротивления резисторов R_1, R_2 (или емкости конденсаторов C_1, C_2), можно перейти от фильтра Баттерворта к фильтру Чебышева. Следует, однако, отметить, что при $n = 2$ фильтр Баттерворта обеспечивает ослабление АЧХ при $x = \omega/\omega_c = 4$ всего лишь на 24 дБ [см. (15.22) при $n = 2$ и и $y = 2$]. Для получения ослабления на 30 дБ потребовалось бы $n \geqslant 3$ (одно звено второго порядка и одно апериодическое звено). Это преимущество фильтра Чебышева в зоне задерживания (более быстрое убывание АЧХ) достигается ценой некоторого ухудшения равномерности в полосе прозрачности фильтра.

15.8. СИНТЕЗ РАЗЛИЧНЫХ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ ФИЛЬТРА НИЖНИХ ЧАСТОТ

Вернемся к функции (15.20), аппроксимирующей прямоугольную АЧХ идеального ФВЧ, и введем новую переменную

$$\nu = 1/x = \omega_c/\omega. \tag{15.43}$$

Тогда

$$K^2_{\text{нч}}(x) = 1/[1+(1/\nu)^{2n}] = \nu^{2n}/[1+\nu^{2n}] = K^2_{\text{вч}}(\nu). \tag{15.44}$$

Новая функция $K_{\text{вч}}(\nu)$, получаемая из АЧХ $K_{\text{нч}}(x)$ фильтра нижних частот заменой аргумента на $\nu = 1/x$, показана на рис. 15.12 (для $n = 2$). Функцию $K_{\text{вч}}$ можно рассматривать как АЧХ фильтра Баттерворта верхних частот, обладающего в полосе частот $1 < \nu < \infty$ такой же неравномерностью АЧХ, что и функция $K_{\text{нч}}(x)$ в полосе $0 < x < 1$. Таким образом, при синтезе ФВЧ можно использовать аппроксимирующую функцию $F(x)$ [см. (15.19)], заменив в ней аргумент на $\nu = 1/x$.

В соответствии с такой заменой частотную переменную p в (15.28) следует заменить переменной $s = 1/p$. Функция (15.28) при этом принимает вид

$$K_{\text{вч}}(s)=\frac{1}{(1/s)^2+\sqrt{2}\,(1/s)+1}=\frac{s^2}{s^2+\sqrt{2}\,s+1}. \tag{15.45}$$

Полюсы передаточной функции $K_{\text{вч}}(s)$, т. е. корни уравнения $s^2+\sqrt{2}s+1 = 0$, остаются теми же, что и в (15.28).

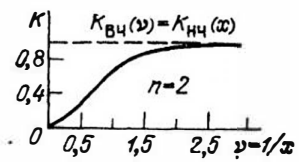


Рис. 15.12. Фильтр верхних частот Баттерворта

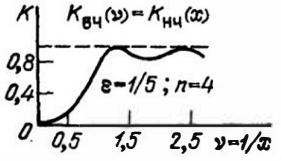


Рис. 15.13. Фильтр верхних частот Чебышева

Аналогичным образом можно получить передаточную функцию ФВЧ Чебышева. Соотношение между АЧХ фильтров Чебышева верхних и нижних частот представлено на рис. 15.13 (для $n = 4$).

Соответствующим преобразованием переменной p можно синтезировать и иные фильтры, например полосовые, на основе исходного ФНЧ [27].

15.9. СВЯЗЬ МЕЖДУ АМПЛИТУДНО- И ФАЗОЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ЦИФРОВЫХ ЦЕПЯХ

Линейные электрические цепи делятся на два класса: минимально-фазовые и неминимально-фазовые.

К первым относятся цепи, у которых между АЧХ и ФЧХ существует однозначное соответствие, так что задание одной из характеристик полностью определяет вторую. Ко второму классу относятся цепи, у которых между АЧХ и ФЧХ нет однозначного соответствия.

В теории аналоговых электрических цепей этот вопрос детально изучен. Установлено, что если передаточная функция четырехполюсника $\mathbf{K}(p)$ не имеет нулей в правой p-полуплоскости и, следовательно, постоянная передачи

$$\boldsymbol{\theta}(p) = \ln \mathbf{K}(p) \tag{15.46}$$

не имеет полюсов в указанной полуплоскости, то четырехполюсник является минимально-фазовым.

На оси частот постоянную передачи $\boldsymbol{\theta}(p)$ можно представить в форме

$$\boldsymbol{\theta}(i\omega) = \ln \mathbf{K}(i\omega) = \ln K(\omega) + i\varphi(\omega) = A(\omega) + i\varphi(\omega). \tag{15.46'}$$

В этом выражении [1] $\varphi(\omega)$ — ФЧХ, а

$$A(\omega) = \ln K(\omega) \tag{15.47}$$

— логарифмическое затухание четырехполюсника.

При условии отсутствия нулей функции $\boldsymbol{\theta}(p)$ в правой p-полуплоскости имеет место равенство

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}(i\omega_1) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{\theta}(i\omega_1)}{\omega - \omega_1}\, d\omega = 0, \tag{15.48}$$

где ω_1 — фиксированная частота [2].

Из (15.46') и (15.48) вытекают следующие соотношения:

$$A(\omega_1) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega)}{\omega - \omega_1}\, d\omega, \tag{15.49}$$

$$\varphi(\omega_1) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega - \omega_1}\, d\omega. \tag{15.50}$$

Таким образом, при оговоренных выше условиях $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ связаны между собой однозначно преобразованием Гильберта [см. (3.62), (3.63)].

---

[1] Следует иметь в виду, что при логарифмировании комплексной функции $\mathbf{K}(i\omega) = K(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)}$ возникает неоднозначность, так как добавление к $\varphi(\omega)$ любого числа $k2\pi$, где k — целое число, не изменяет значения функции. В данной главе под $\varphi(\omega)$ подразумевается главное значение аргумента, ограниченное пределами $-\pi < \varphi(\omega) < \pi$. Способы устранения неоднозначности рассматриваются в гл. 16.

[2] См. предыдущее издание настоящей книги.

Переход от логарифмического затухания $A(\omega)$ к АЧХ совершается с помощью соотношения, обратного соотношению (15.47):

$$K(\omega) = e^{A(\omega)}. \tag{15.51}$$

Обратимся к установлению связи между АЧХ и ФЧХ в *цифровых цепях*. Основываясь на определении передаточной функции цифрового фильтра (12.33), (12.34), переходим от $\widehat{K}(z)$ к функции $\widehat{\theta}(z) = \ln \widehat{K}(z)$ и по аналогии с выражением (15.46) к функции

$$\widehat{\theta}(z) = \ln \widehat{K}(e^{i\omega T}) = \ln K_T(i\omega) = A_T(\omega) + i\varphi_T(\omega), \tag{15.52}$$

где $A_T(\omega) = \ln |\widehat{K}(e^{i\omega T})|$.

Исходя из условия, что функция $\widehat{\theta}(z)$ не имеет полюсов вне круга $|z| = 1$ [что тождественно ранее принятому условию отсутствия полюсов функции $\theta(p)$ в правой p-полуплоскости], можно получить равенство, аналогичное (15.48):

$$\frac{1}{2}\widehat{\theta}(e^{i\omega_1 T}) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{\widehat{\theta}(e^{i\omega T})}{e^{i\omega T} - e^{i\omega_1 T}}\, d(e^{i\omega T}) = 0. \tag{15.53}$$

Подставив $d(e^{i\omega T}) = i\,T e^{i\omega T}\, d\omega$, приведем интеграл в (15.53) после перехода к переменной ω к виду

$$\frac{1}{2\pi i}\, iT \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{\widehat{\theta}(e^{i\omega T})\, e^{i\omega T}}{e^{i\omega T} - e^{i\omega_1 T}}\, d\omega = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{\widehat{\theta}(e^{i\omega T})}{1 - e^{-i(\omega-\omega_1)T}}\, d\omega.$$

Подставим в (15.53) $\widehat{\theta}(e^{i\omega T})$ и $\widehat{\theta}(e^{i\omega_1 T})$ по формуле (15.52):

$$\frac{1}{2}[A_T(\omega_1) + i\varphi_T(\omega_1)] + \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{A_T(\omega)}{1 - e^{-i(\omega-\omega_1)T}}\, d\omega + \frac{iT}{2\pi} \times$$

$$\times \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{\varphi_T(\omega)}{1 - e^{-i(\omega-\omega_1)T}}\, d\omega = 0. \tag{15.53'}$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{1}{1 - e^{-ix}} = \frac{e^{ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{\cos x/2 + i \sin x/2}{2i \sin x/2} = \frac{1}{2}(1 - i \operatorname{ctg} x/2).$$

Тогда, выделив в (15.53') действительную и мнимую части, придем к следующим формулам:

$$A_T(\omega_1) = -\frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} A_T(\omega)\, d\omega - \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \varphi_T(\omega) \operatorname{ctg} \frac{(\omega - \omega_1)T}{2}\, d\omega, \tag{15.54}$$

$$\varphi_T(\omega_1) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} A_T(\omega) \operatorname{ctg} \frac{(\omega - \omega_1)T}{2}\, d\omega. \tag{15.55}$$

Первое слагаемое в правой части (15.54) имеет смысл среднего значения $A_T(\omega)$ в полосе частот от $\omega T = 0$ до $\omega T = 2\pi$.

Соотношения (15.54), (15.55), как это вытекает из условия отсутствия нулей функции $\widehat{K}(z)$ вне круга единичного радиуса $|z| = 1$, справедливы для *минимально-фазовых* цифровых цепей.

Как и передаточная функция $K_T(i\omega)$ [или $\widehat{K}(e^{i\omega T})$], логарифмическое затухание $A_T(\omega)$ и ФЧХ дискретной цепи являются периодическими функциями частоты. Это позволяет существенно упростить соотношения, связывающие между собой АЧХ и ФЧХ.

С этой целью запишем функции $A_T(\omega)$ и $\varphi_T(\omega)$ в виде рядов Фурье:

$$A_T(\omega) = \ln|\widehat{K}(e^{-i\omega T})| = A_0 + A_1\cos\omega T + A_2\cos 2\omega T + \ldots, \tag{15.56}$$

$$\varphi_T(\omega) = \Phi_1\sin\omega T + \Phi_2\sin 2\omega T + \ldots \tag{15.57}$$

Косинусоидальный ряд для $A_T(\omega)$ обусловлен четностью этой функции относительно ω, а синусоидальный ряд — нечетностью функции $\varphi_T(\omega)$.

Соответственно коэффициенты рядов (15.56) и (15.57) определяются формулами

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_T(\omega)\cos n\omega T\, d(\omega T), \tag{15.58}$$

$$\Phi_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_T(\omega)\sin n\omega T\, d(\omega T). \tag{15.59}$$

Подставим ряд (15.56) в (15.55):

$$\varphi_T(\omega_1) = \frac{A_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ctg}[(\omega-\omega_1)T/2]\,d(\omega T) + \frac{A_1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\omega T\times$$

$$\times\operatorname{ctg}[(\omega-\omega_1)T/2]\,d(\omega T) + \frac{A_2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2\omega T\cdot\operatorname{ctg}[(\omega-\omega_1)T/2]\,d(\omega T) + \ldots$$

Первый интеграл равен нулю, а последующие $2\pi(-\sin n\omega_1 T)$.

Таким образом, приходим к следующему ряду для $\varphi_T(\omega_1)$ (опуская индекс 1 при ω):

$$\varphi_T(\omega) = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin n\omega T. \tag{15.60}$$

Аналогично подстановка ряда (15.57) в (15.54) приводит к выражению

$$A_T(\omega) = A_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n\cos n\omega T. \tag{15.61}$$

Из сопоставления рядов (15.60) и (15.57), а также (15.61) и (15.56) вытекает важное соотношение

$$A_n = -\Phi_n. \tag{15.62}$$

Следовательно, по заданной функции $A_T(\omega)$, записанной в виде ряда Фурье, можно найти коэффициенты Φ_n ФЧХ $\varphi_T(\omega)$. При заданной ФЧХ (также в виде ряда Фурье) функцию $A_T(\omega)$ можно найти с точностью лишь до A_0. Физический смысл этого факта очевиден, так как величина

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln K(\omega)\,d\omega T,$$

зависящая только от АЧХ фильтра $K(\omega)$, может изменяться в широких пределах (изменением усиления) при сохранении ФЧХ.

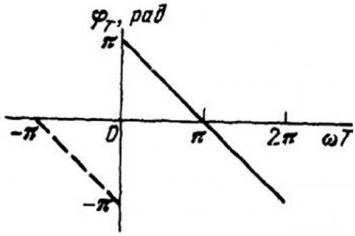


Рис. 15.14. Фазо-частотная характеристика цифрового фильтра, соответствующая АЧХ, равной $4\sin^2(\omega T/2)$

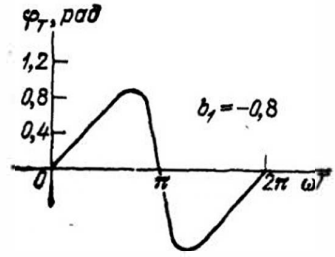


Рис. 15.15. Фазо-частотная характеристика цифрового фильтра с АЧХ, равной $1/\sqrt{1+b_1^2-2b_1\cos\omega T}$

Итак, для полного описания передаточной функции минимально-фазовой цифровой цепи достаточно знать коэффициенты Фурье одной из характеристик: ФЧХ $\varphi_T(\omega)$ или логарифмического затухания $A_T(\omega)$.

Вычисление коэффициентов ряда Фурье любой из характеристик $A_T(\omega)$ и $\varphi_T(\omega)$, заданной на интервале $0<\omega T<2\pi$, несравненно проще, чем вычисление интегралов в бесконечных пределах, требующееся при анализе аналоговых цепей [см. (15.49) и (15.50)].

15.10. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФЧХ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА ПО ЗАДАННОЙ АЧХ

1. Задана АЧХ фильтра $K_T(\omega T)=4\sin^2(\omega T/2)$, $-\pi<\omega T<\pi$ (см. п. 3 § 12.8). Требуется найти ФЧХ (не выясняя схемы фильтра).

В данном примере логарифмическое затухание

$$A_T(\omega)=\ln K_T(\omega T)=\ln 4+2\ln|\sin(\omega T/2)|,\quad -\pi<\omega T<\pi.$$

Находим коэффициенты Фурье периодической функции $A_T(\omega)$ по формуле (15.58) [1]:

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\ln 4+2\ln\left|\sin\frac{\omega T}{2}\right|\right]d(\omega T)=\ln 4+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,d(2x)=0,$$

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\ln 4+2\ln\left|\sin\frac{\omega T}{2}\right|\right]\cos n\omega T\,d(\omega T)=-\frac{2}{n}.$$

Итак, $A_0=0$, $A_1=-2\cdot 1$, $A_2=-2\cdot{}^1/_2$, $A_3=-2\cdot{}^1/_3$, ...

Основываясь на выражении (15.60) составим выражение для ФЧХ фильтра

$$\varphi_T(\omega)=2(\sin\omega T+{}^1/_2\sin 2\omega T+{}^1/_3\sin 3\omega T+\ldots),\quad -\pi<\omega T<\pi.$$

Полученный ряд сходится к $(\pi-\omega T)/2$ при $0<\omega T<2\pi$, следовательно $\varphi_T(\omega)=\pi-\omega T$, $0<\omega T<2\pi$.

График $\varphi_T(\omega)$ представлен на рис. 15.14. Продолжение в область $\omega T<0$ (штриховая линия) основано на периодичности функции $\varphi_T(\omega)$. Заметим, что полученная характеристика совпадает по форме с ФЧХ однозвенного фильтра, рассмотренного в п. 1 § 12.8. Каскадное соединение двух звеньев, соответствующее АЧХ, равной $4\sin^2\omega T/2$, приводит лишь к удвоению ФЧХ.

2. Рассмотрим теперь фильтр с АЧХ (см. п. 2 § 12.8)

$$K_T(\omega T)=1/\sqrt{1+b_1^2-2b_1\cos\omega T}.$$

[1] См. [31], формулы (4.224.3) и (4.384.3).

Логарифмическое затухание

$$A_T(\omega) = \ln K_T(\omega) = -\frac{1}{2}\ln(1-2b_1\cos\omega T + b_1^2).$$

Находим коэффициенты Фурье

$$A_n = \frac{2}{\pi}(-1/2)\int_0^{\pi}\ln(1-2b_1\cos\omega T + b_1^2)\cos n\omega T d(\omega T).$$

Выполнив интегрированые [1], получим

$$A_n = -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}b_1^n\right) = b_1^n/n.$$

Таким образом,

$$\varphi_T(\omega) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_1^n}{n}\sin n\omega T.$$

Используя соотношение [2]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_1^n}{n}\sin nx = \operatorname{arctg}\frac{b_1\sin x}{1-b_1\cos x},$$

получаем выражение, совпадающее с (12.49):

$$\varphi_T(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{b_1\sin\omega T}{1-b_1\cos\omega T},\quad -\pi < \omega T < \pi.$$

График ФЧХ для $b_1 = 0{,}8$ представлен на рис. 15.15 (на интервале $0 < \omega T < 2\pi$).

3. Задан цифровой ФНЧ с АЧХ, приближенно совпадающей с гауссовской кривой:

$$\left|\widehat{K}(e^{i\omega T})\right| \approx e^{-a^2(\omega T)^2}.$$

Найти ФЧХ фильтра. В данном примере

$$A_T(\omega) = \ln\left|\widehat{K}(e^{i\omega T})\right| = -a^2(\omega T)^2.$$

Вычисление коэффициентов A_n по формуле (15.58) дает следующие результаты:

$$A_0 = -\frac{\pi^2}{3}a^2,\ A_1 = 4a^2,\ A_2 = -a^2,\ A_3 = \frac{4}{9}a^2,$$

$$A_4 = -\frac{1}{4}a^2,\ A_5 = \frac{4}{25}a^2, \ldots$$

Таким образом,

$$\varphi_T(\omega) = -\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\omega T =$$

$$= a^2\left[-4\sin\omega T + \sin 2\omega T - \frac{4}{9}\sin 3\omega T + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\sin 4\omega T - \frac{4}{25}\sin 5\omega T + \ldots\right].$$

Графики $\varphi_T(\omega)$ для двух значений параметра a показаны на рис. 15.16.

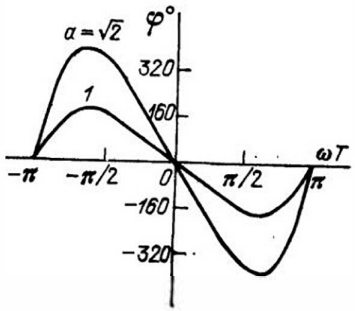


Рис. 15.16. Фазо-частотная характеристика цифрового фильтра с АЧХ, равной $\exp[-a^2(\omega T)^2]$

[1] См. [31], формула (4.397.6).
[2] См. [31], формула (1.448.1).

15.11. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Как и аналоговые, цифровые фильтры обычно синтезируются на основе передаточной функции, представленной в виде рациональной дроби (12.33). В результате соответствующей аппроксимации заданной передаточной функции $\widehat{\mathbf{K}}(z)$ определяется положение нулей и полюсов на z-плоскости, после чего находятся весовые коэффициенты a_n и b_m, входящие в (12.34).

Цифровой фильтр можно реализовать либо в виде совокупности простых звеньев (первого или второго порядка), либо в виде канонической схемы, описанной в § 12.3 (см. рис. 12.6).

При разбиении фильтра на простые звенья отпадают все ограничения, отмеченные в § 15.2 по отношению к аналоговым цепям. В цифровых цепях вопросы согласования входных, выходных и нагрузочных сопротивлений, а также вопросы развязки отдельных звеньев вообще не возникают. В связи с этим наряду с каскадным (последовательным) соединением простых звеньев широко применяется их параллельное включение.

В первом случае функция (12.33) записывается в виде произведения простых множителей, каждый из которых является передаточной функцией звена (см. аналогичное разбиение в § 15.2). Во втором случае функция (12.33) разлагается на простые дроби

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = A_0 \frac{P(z)}{Q(z)} = A_0 \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathbf{A}_k}{z - z_{\text{п}k}},$$

где $\mathbf{A}_k = \left[\frac{P(z)}{dQ(z)/dz}\right]_{z=z_{\text{п}k}}$ — вычет функции $\widehat{\mathbf{K}}(z)/A_0$ в полюсе $z_{\text{п}k}$.

Если знаменатель $Q(z)$ содержит всего m корней, из которых m_1 — число вещественных (лежащих на действительной оси), а m_2 — число комплексно-сопряженных пар корней ($m = m_1 + 2m_2$), то

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = A_0 \left[\sum_{k=1}^{m_1} \frac{\mathbf{A}_k}{z - z_{\text{п}k}} + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \left(\frac{\mathbf{A}_k}{z - z_{\text{п}k}} + \frac{\mathbf{A}_k^*}{z - z_{\text{п}k}} \right) \right].$$

Это выражение легко приводится к виду

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = A_0 \left[\sum_{k=1}^{m_1} \frac{\mathbf{A}_k}{z - z_{\text{п}k}} + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \frac{a_{0k} z + a_{1k}}{z^2 - b_{1k} z - b_{2k}} \right],$$

где $a_{0k} = 2\mathrm{Re}(\mathbf{A}_k)$; $a_{1k} = -2[\mathrm{Re}(z_{\text{п}k})\,\mathrm{Re}(\mathbf{A}_k) + \mathrm{Im}(Z_{\text{п}k})\,\mathrm{Im}(\mathbf{A}_k)]$; $b_{1k} = 2\mathrm{Re}(z_{\text{п}k})$; $b_{2k} = -|z_{\text{п}k}|^2$.

Как в каскадной, так и в параллельной схеме отдельные звенья реализуются по схеме, описанной в § 12.8 (см. рис. 12.21). Весовые коэффициенты звена второго порядка определяются по формуле (12.57), а звена первого порядка — непосредственно из передаточной функции звена.

Существенно различны подходы к синтезу трансверсальных и рекурсивных фильтров.

В § 12.2 отмечалось, что передаточная функция трансверсального фильтра не имеет полюсов и импульсная характеристика является ограниченной последовательностью $\{g(k)\}$, $k = 0,1,\ldots, H$, содержащей $N = H + 1$ отсчетов, где H — число элементов памяти, а значения $g(k)$ равны весовым коэффициентам фильтра a_k. Из этого следует, что задание импульсной характеристики $g(k)$ непосредственно определяет как структуру трансверсаль-

ного фильтра, так и его передаточную функцию

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_H z^{-H}.$$

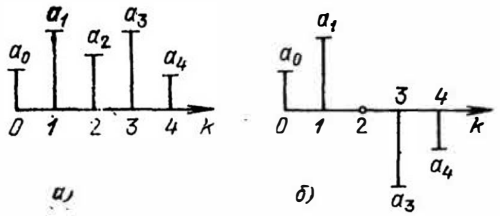


Рис. 15.17. Симметричная (*а*) и антисимметричная (*б*) импульсные характеристики трансверсального фильтра

В случае же рекурсивного фильтра структура и весовые коэффициенты более сложным образом связаны с импульсной характеристикой и передаточной функцией. Эти вопросы рассматриваются в следующем параграфе. Здесь мы рассмотрим некоторые особенности синтеза трансверсальных фильтров.

В § 12.8 и 15.10 приводились примеры простейших трансверсальных фильтров со строго линейной ФЧХ. Выявим требования к весовым коэффициентам, при которых обеспечивается линейность ФЧХ при любом значении N. Используем для этого выражение (12.9) и для сокращения записи ограничимся значением $H = 4$, т. е. $N = 5$:

$$\widehat{\mathbf{K}}(e^{i\omega T}) = a_0 + a_1 e^{-i\omega T} + a_2 e^{-i2\omega T} + a_3 e^{-i3\omega T} + a_4 e^{-i4\omega T}.$$

Соответствующая этой передаточной функции импульсная характеристика $g(k)$ представлена на рис. 15.17, *а*.

Наложим условие симметрии весовых коэффициентов, т. е. $a_0 = a_4$, $a_1 = a_3$, и вынесем за скобки множитель $e^{-i2\omega T}$:

$$\widehat{\mathbf{K}}(e^{i\omega T}) = e^{-i\omega 2T}(a_0 e^{i2\omega T} + a_1 e^{i\omega T} + a_2 + a_3 e^{-i\omega T} + a_4 e^{-i2\omega T}) =$$
$$= \pm e^{-i\varphi(\omega T)} | 2a_0 \cos 2\omega T + 2a_1 \cos \omega T + a_2 |.$$

Выбор знака плюс или минус перед правой частью приведенного выражения зависит от соотношения коэффициентов a_0, a_1 и a_2, а также от их знаков, фазовая же характеристика $\varphi(\omega T)$ *линейна* и определяется как

$$\varphi(\omega T) = \frac{N-1}{2}\omega T = k\omega T,$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$ при нечетных значениях $N \geqslant 3$.

При четных $N \geqslant 2$ это выражение принимает вид

$$\varphi(\omega T) = k\omega T/2, \quad k = 1, 3, 5, \ldots$$

Фильтры с линейной ФЧХ можно осуществить также при антисимметричной импульсной характеристике (рис. 15.17, *б*).

Трансверсальные фильтры с линейной ФЧХ применяются в дифференцирующих устройствах, а также при исследовании различных систем с нелинейными ФЧХ. Большое число элементов памяти и весовых коэффициентов, достигающее сотен, не является препятствием при использовании микроэлектронной аппаратуры.

15.12. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ПО АНАЛОГОВОМУ ПРОТОТИПУ

Пусть задан аналоговый фильтр с передаточной функцией $\mathbf{K}_A(i\omega)$ и импульсной характеристикой $g_a(t)$ и требуется построить эквивалентный ему (в определенном смысле) цифровой фильтр.

Рассмотрим физически наглядный, хотя и не во всех задачах эффективный, способ, основанный на дискретизации дифференциального уравнения,

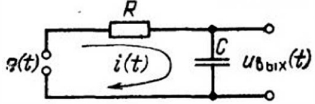


Рис. 15.18. Цепь, описываемая дифференциальным уравнением (15.63)

описывающего исходную аналоговую цепь. Подобный прием был использован в § 8.18.

Для сокращения выкладок обратимся к простейшему четырехполюснику, представленному на рис. 15.18. Передаточная функция и импульсная характеристика этого четырехполюсника

$$\mathbf{K}_a(p) = 1/(1+RCp), \quad g_a(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}. \tag{15.63}$$

Выпишем основные соотношения между $e(t)$, $u_{вых}(t)$ и $i(t)$:

$$i(t) = C\frac{du_{вых}(t)}{dt}, \quad u_{вых}(t) = e(t) - Ri(t) = e(t) - RC\frac{du_{вых}(t)}{dt},$$

$$\frac{du_{вых}(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_{вых}(t) = \frac{1}{RC}e(t). \tag{15.64}$$

Используя соответствие (8.113), переписываем (15.64) в форме

$$\frac{u_{вых}(t) - u_{вых}(t-T)}{T} + \frac{1}{RC}u_{вых}(t) = \frac{1}{RC}e(t). \tag{15.65}$$

Переходя к дискретному времени $t = mT$ и повторяя рассуждения, приведшие к (8.114), получаем *разностное* уравнение

$$u_{вых}(mT) = \frac{T}{\tau+T}e(mT) + \frac{\tau}{\tau+T}u_{вых}(mT-T), \quad \tau = RC. \tag{15.66}$$

Этому уравнению соответствует цифровой рекурсивный фильтр первого порядка с передаточной функцией и импульсной характеристикой [см. (12.11) и (12.46)]

$$\mathbf{K}_T(p) = \frac{a_0}{1-b_1 e^{-pT}}, \quad g(kT) = b_1^k. \tag{15.67}$$

Весовые коэффициенты синтезируемого фильтра должны быть

$$a_0 = T/(\tau+T) = \frac{T/\tau}{1+T/\tau}, \quad b_1 = \tau/(\tau+T) = 1/(1+T/\tau). \tag{15.68}$$

Сопоставим полученные характеристики $\mathbf{K}_T(p)$, $g(kT)$ с соответствующими характеристиками исходного (аналогового) фильтра $\mathbf{K}_a(p)$, $g_a(t)$.

Сначала сравним АЧХ $K_a(\omega)$ и $K_T(\omega)$:

$$\mathbf{K}_a^2(\omega) = \frac{1}{|1+RCi\omega|^2} = \frac{1}{1+(\omega\tau)^2}, \quad \mathbf{K}_T^2(\omega) = \frac{a_0^2}{|1-b_1 e^{-i\omega T}|^2} =$$

$$= \frac{a_0^2}{1+b_1^2-2b_1\cos\omega T}.$$

Подставив в последнее выражение a_0 и b_1 из формул (15.68), получим

$$K_T^2(\omega) = \frac{(T/\tau)^2}{1+(1+T/\tau)^2-2(1+T/\tau)\cos\omega T}.$$

При уменьшении шага дискретизации T до значения, малого по сравнению с τ, аргумент косинуса ωT в области частот, соизмеримых с $1/\tau$, отвечает условию $\omega T \ll 1$, так что $\cos \omega T \approx 1 - (\omega T)^2/2$. При этом

$$K_T^2(\omega) \approx \frac{(T/\tau)^2}{(T/\tau)^2 + (\omega T)^2 + \frac{T}{\tau}(\omega T)^2} = \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2 + \frac{T}{\tau}(\omega\tau)^2}.$$

С помощью этого выражения легко оценивать влияние T на отклонение $K_T(\omega)$ от $K_a(\omega)$. При $T/\tau \leqslant 0{,}2$ это выражение несущественно отличается от $K_a^2(\omega)$.

Обратимся к сравнению импульсных характеристик $g(kT)$ и $g_a(t)$. При $T/\tau \ll 1$ можно положить $b_1 = 1/(1 + T/\tau) \approx (1 - T/\tau) \approx e^{-T/\tau}$. Тогда $g(kT) = a_0 b_1^k \approx a_0 e^{-kT/\tau}$, т. е. $g(kT)$ отличается от $g_a(kT)$ только постоянным коэффициентом (a_0 вместо $1/\tau$).

Итак, для удовлетворительного совпадения характеристик цифрового и аналогового фильтров в данном примере требуется выполнение условия $T/\tau < 0{,}2$.

При более сложных цепях синтез, основанный на дискретизации дифференциального уравнения, становится громоздким. Более эффективен способ синтеза цифровых фильтров по заданным полюсам и нулям передаточной функции $\mathbf{K}_a(p)$ аналогового прототипа на p-плоскости. Задача синтеза при этом сводится к рациональному выбору оператора преобразования p-плоскости в z-плоскость. От выбранного оператора зависят свойства и характеристики цифрового фильтра.

Наиболее простым оператором преобразования является соотношение $z = e^{pT}$, использованное в гл. 12. В этом случае полюсы $z_{пm}$ и нули z_{0n} определяются равенствами

$$z_{пm} = e^{p_{пm}T}, \quad z_{0n} = e^{p_{0n}T}. \tag{15.69}$$

Метод, основанный на операторе $z = e^{pT}$, иногда называют методом стандартного z-преобразования.

Выясним степень приближения характеристик синтезируемого цифрового фильтра к аналоговой модели на примере рассмотренного выше четырехполюсника (см. рис. 15.18). Передаточная функция $\mathbf{K}_a(p)$, определяемая выражением (15.63), имеет один полюс

$$p_п = -1/RC = -1/\tau.$$

Основываясь на (15.69), находим полюс на z-плоскости

$$z_п = e^{p_п T} = e^{-T/\tau} = e^{-T/RC}.$$

Тогда

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = 1/(1 - z_п z^{-1}) = 1/(1 - e^{-T/RC} z^{-1}),$$

$$\widehat{\mathbf{K}}(e^{i\omega T}) = 1/(1 - e^{-T/\tau} e^{-i\omega T}) \tag{15.70}$$

и АЧХ фильтра

$$|\mathbf{K}(\omega)| = 1/\sqrt{1 + e^{-2T/\tau} - 2e^{-T/\tau}\cos\omega T}. \tag{15.71}$$

Далее, импульсная характеристика $g(kT) = e^{-kT/\tau}$ [см. (12.46)]. Замечаем, что $g(kT)$ совпадает (с точностью до постоянного коэффициента $1/\tau$) с импульсной характеристикой $g_a(t) = (1/\tau) e^{-t/\tau}$, дискретизованной с шагом T, причем это *совпадение не зависит* от T (в отличие от метода, основанного на дискретизации дифференциального уравнения цепи).

Аналогичный результат имеет место и для более сложных цепей.

В связи с этим метод синтеза, основанный на стандартном преобразовании $z = e^{pt}$, получил название метода, *инвариантного* относительно *импульсной характеристики*. При этом, однако, АЧХ цифрового фильтра может существенно отличаться от АЧХ аналогового прототипа, что было объяснено и проиллюстрировано в § 12.8, п. 2.

15.13. МЕТОД ИНВАРИАНТНЫХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для осуществления синтеза, инвариантного по отношению к АЧХ, следует применить преобразование, при котором бы вся мнимая ось $i\omega$ p-плоскости отображалась на z-плоскости одним обходом окружности радиуса $|z| = 1$.

Этому требованию отвечает б и л и н е й н о е (дробно-рациональное) преобразование

$$z = (1 + p)/(1 - p),\ p = (z - 1)/(z + 1), \tag{15.72}$$

где $p = (\sigma + i\omega)/\Omega_0$, а Ω_0 — произвольная постоянная, обеспечивающая безразмерность величины p, выбираемая исходя из соображений нормирования.

Для уяснения смысла билинейного преобразования положим $\sigma = 0$, т. е. приравняем $p = i\omega/\Omega_0$, и на основании (15.72) запишем

$$z\Big|_{p=i\omega/\Omega_0} = \frac{1+i\omega/\Omega_0}{1-i\omega/\Omega_0} = e^{i\ 2\ \mathrm{arc\ tg}\ \omega/\Omega_0} = e^{i\varphi(\omega/\Omega_0)}. \tag{15.73}$$

Из этого выражения следует: перемещению точки p вдоль оси $i\omega/\Omega_0$ соответствует перемещение точки z по окружности радиуса $|z| = 1$. В этом отношении билинейное преобразование не отличается от обычного z-преобразования, при котором $z|_{p=i\omega} = e^{i\omega T}$ (см. § 12.6). Отличие в том, что угол ωT возрастает пропорционально частоте ω, а при билинейном преобразовании угол $\varphi\ (\omega/\Omega_0) = 2\ \mathrm{arctg}\ \omega/\Omega_0$ возрастает нелинейно; при стремлении $\omega \to \pm\infty$ угол $\varphi\ (\omega/\Omega_0)$ стремится к своим предельным значениям $\pm\pi$. Таким образом, вся ось $i\omega/\Omega_0$ p-плоскости трансформируется на z-плоскости в один обход окружности $|z| = 1$ и тем самым обеспечивается взаимнооднозначное отображение p на z для всей p-плоскости.

Сопоставление функций $e^{i\varphi(\omega/\Omega_0)}$ и $e^{i\omega T}$ позволяет трактовать $\varphi\ (\omega/\Omega_0) = 2\ \mathrm{arctg}\ \omega/\Omega_0$ как эквивалентную частоту $\omega_ц T$ (безразмерную), связанную с обычной частотой ω, используемой при анализе и синтезе аналоговых цепей, соотношением

$$\omega_ц T = 2\ \mathrm{arctg}\ (\omega/\Omega_0). \tag{15.74}$$

Соответственно

$$\omega/\Omega_0 = \mathrm{tg}\ (\omega_ц T/2). \tag{15.75}$$

Нормирующую частоту Ω_0 можно определить, установив соотношение между какими-либо характерными частотами передаточных функций аналоговой и цифровой цепей. Например, если речь идет о цифровом ФНЧ с заданной частотой среза $\omega_{сц}$, эквивалентном (в смысле АЧХ) аналоговому фильтру с частотой среза $\omega_{са}$, то выражения (15.74), (15.75) можно записать так:

$$\omega_{сц} T = 2\ \mathrm{arctg}\ (\omega_{са}/\Omega_0),\ \omega_{са}/\Omega_0 = \mathrm{tg}\ (\omega_{сц} T/2). \tag{15.76}$$

Из последнего выражения следует, что

$$\Omega_0 = \omega_{са}/\mathrm{tg}\ (\omega_{сц} T/2).$$

Пусть, например, частота среза цифрового фильтра должна составлять 10% от частоты дискретизации $1/T$. Тогда

$$\omega_{сц} T = 0{,}1 \cdot 2\pi \text{ и } \operatorname{tg}(\omega_{сц} T/2) = \operatorname{tg}(0{,}1 \cdot 2\pi/2) = \operatorname{tg} 18° = 0{,}3249,$$

а выражение (15.74) переходит в

$$\omega_{ц} T = 2 \operatorname{arctg}[(\operatorname{tg} \omega_{сц} T/2)\, \omega/\omega_{са})] = 2 \operatorname{arctg}(0{,}3249x), \qquad (15.77)$$

где $x = \omega/\omega_{са}$ — нормированная частота, использованная при аппроксимации АЧХ аналогового фильтра (см. § 15.5, 15.7).

Полученное соотношение между $\omega_{ц} T$ и x позволяет построить АЧХ синтезируемого цифрового фильтра по заданной характеристике исходного аналогового фильтра. В качестве последней на рис. 15.19, *а* показана АЧХ фильтра Чебышева (при $n = 2$), рассчитанная в § 15.7:

$$|\mathbf{K}(ix)| = 1/\sqrt{1 + T_2^2(x)}.$$

АЧХ цифрового фильтра представлена на рис. 15.19, *б*. Видно, что эта характеристика, сохраняя масштаб на оси ординат, сжимается на оси абсцисс в пределах $-\pi \leqslant \omega_{ц} T < \pi$.

Обратимся теперь к определению структуры и параметров синтезируемого цифрового фильтра.

Отталкиваясь от передаточной функции исходного аналогового фильтра [см. (15.42)]

$$\mathbf{K}(p_x) = C/(p_x - p_{x п1})(p_x - p^*_{x п1}), \qquad (15.78)$$

где $p_x = (\sigma + i\omega)/\omega_{са}$ — переменная, нормированная относительно частоты среза, и переходя к новой переменной $p = (\sigma + i\omega)/\Omega_0 = 0{,}3249\, p_x$, на основании выражения (15.72) получаем

$$p = 0{,}3249 p_x = \frac{z-1}{z+1}, \quad p_x = \frac{1}{0{,}3249}\frac{z-1}{z+1}.$$

Подставим полученное выражение для p_x в (15.78). Полюсы $p_{x п1}$ и $p^*_{x п1}$, как и в примере, приведенном в § 15.7, равны соответственно $-0{,}322 + i\,0{,}777$ и $-0{,}322 - i\,0{,}777$.

После несложных преобразований приходим к следующему результату

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = \frac{A_0 (z+1)^2}{(z - z_{п1})(z - z^*_{п1})} = \frac{A_0 (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}},$$

где $b_1 = 2\operatorname{Re}(z_{п1})$ и $b_2 = -|z_{п1}|^2$, A_0 — коэффициент нормирования.

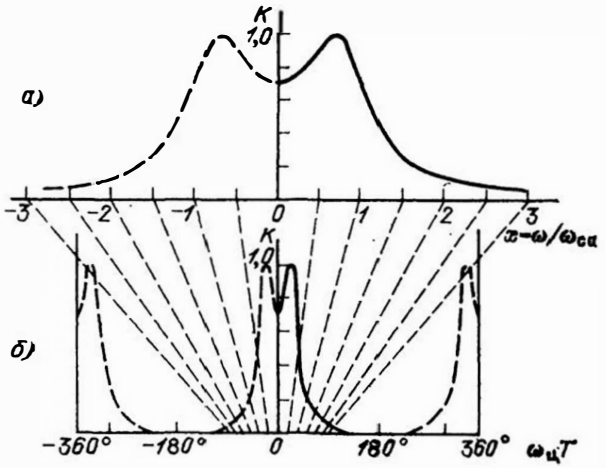


Рис. 15.19. Амплитудно-частотные характеристики аналогового (*а*) и соответствующего ему цифрового фильтра (*б*)

Полюсы функции $\widehat{\mathbf{K}}(z)$ на z-плоскости связаны с полюсами $p_{x\text{п}1,\,2}$ соотношениями

$$z_{\text{п}1} = (1 + 0{,}3249p_{x\text{п}1})/(1 - 0{,}3249p_{x\text{п}1}) = 0{,}72 + i0{,}393,$$

$$z_{\text{п}2} = z^*_{\text{п}1} = 0{,}72 - i0{,}393.$$

Итак, применение билинейного z-преобразования привело к появлению в передаточной функции двухкратного нуля (в точке $z = -1$).

Схема фильтра совпадает со схемой, представленной на рис. 12.21. В данном случае весовые коэффициенты в обратных связях (см. § 12.8, п.4) $b_1 = 2\,\mathrm{Re}\,(z_{\text{п}1}) = 2 \cdot 0{,}72 = 1{,}44$, $b_2 = -|z_{\text{п}1}|^2 = -(0{,}821)^2 = -0{,}674$, а в прямых связях $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ и $a_2 = 1$.

При $\omega_{\text{ц}} = 0$ $z = 1$ и функция $|\widehat{\mathbf{K}}(z)|$ по условию должна равняться единице, как и функция $\mathbf{K}(p)$ при $\omega = 0$. При указанных выше коэффициентах a_i и b_i $A_0 = 0{,}0585$.

При синтезе цифрового фильтра существенное значение имеет выбор числа разрядов в преобразователе А-Ц, а также в арифметическом устройстве исходя из допустимого уровня шумов квантования и округления (см. § 12.10 и 12.11).

Иначе обстоит дело с весовыми коэффициентами b_1 и b_2. Для точного представления этих коэффициентов в двоичной системе счисления может потребоваться значительное число разрядов (1,011101 для b_1 и 0,10101101 для b_2). Однако ценой несущественного отклонения АЧХ от заданной обычно можно значительно уменьшить число разрядов. Например, при загрублении весовых коэффициентов до $b_1 = 1{,}0111$ (1,4375) и $b_2 = 0{,}1011$ (0,687) получается АЧХ, практически совпадающая с заданной.

При этом необходимо, однако, учитывать, что погрешность квантования в цепях обратной связи накапливается и при значениях $|z_{\text{п}}|$, близких к единице, полюсы могут оказаться вне единичного круга, что означает неустойчивость фильтра.

Правильный выбор длины кодового слова (т. е. разрядности арифметического устройства фильтра), являющийся одним из важнейших вопросов синтеза цифровых цепей, изучается в специальных дисциплинах.

Глава 16. ОБОБЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ. КЕПСТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

16.1. ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

В предыдущих главах принцип суперпозиции рассматривался как основное свойство линейных систем. Математическая формулировка (1.1) принципа суперпозиции, предусматривающая только операцию сложения сигналов, является фундаментальной для обработки аддитивной смеси сигналов. Она также является основой для спектрального метода анализа воздействия сложных сигналов на линейные цепи, для метода интеграла Дюамеля и других методов, при которых входной сигнал представляется в виде суммы элементарных слагаемых.

Однако операция сложения, как указывалось в § 1.5, не исчерпывает проблемы обработки сложных сигналов. Важное значение для современной

теории и техники обработки сигналов имеют, в частности, операции умножения и свертки сигналов.

Линейные системы не позволяют осуществить раздельную обработку сигналов, входящих в произведение или образующих свертку. Иными словами, по отношению к сигналам $s(t) = s_1(t) \cdot s_2(t)$ или $s(t) = s_1(t) * s_2(t)$ неприменим принцип суперпозиции, в том виде, в каком он сформулирован для линейных систем. Однако с помощью сочетания линейных и некоторых нелинейных элементов можно осуществить систему, подчиняющуюся обобщенному принципу суперпозиции по отношению к упомянутым выше (и некоторым другим) сигналам.

Отыскание классов подобных систем для различных комбинаций входных сигналов основывается на теории линейных векторных пространств и на общей теории преобразования этих пространств. Основные понятия пространства сигналов, трактуемого как векторное пространство, были изложены в § 4.8 и 4.9. Применение этих понятий к задаче синтеза цепей, подчиняющихся обобщенному принципу суперпозиции, рассматривается в следующем параграфе. Предварительно поясним принцип построения подобных цепей для одного частного случая, основываясь на физических представлениях.

Рассмотрим обработку мультипликативного сигнала $s(t) = s_1(t)\, s_2(t)$ и поставим перед собой задачу преобразования его к виду суммы $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Искомый оператор преобразования обозначим символом D. Математически поставленная выше задача сводится к требованию

$$D[s(t)] = D[s_1(t) \cdot s_2(t)] = D[s_1(t)] + D[s_2(t)]. \tag{16.1}$$

Известно, что единственной непрерывной функцией, удовлетворяющей функциональному уравнению (16.1), является логарифмическая функция. Следовательно, оператор D соответствует логарифму и нелинейное устройство, осуществляющее требуемое преобразование, должно иметь характеристику вида $x = D(s) = \log s$. Сигнал на выходе этого устройства

$$x(t) = \log [s(t)]^1 = \log [s_1(t) \cdot s_2(t)] = \log [s_1(t)] + \log [s_2(t)] = x_1(t) + x_2(t). \tag{16.2}$$

В данном случае для упрощения мы ограничились рассмотрением действительных и ненулевых функций $s_1(t) > 0$ и $s_2(t) > 0$.

По своему частотному спектру, а следовательно и по форме сигналы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ отличаются от $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Существенно, однако, что сумму $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ можно обрабатывать (фильтровать) с помощью обычной линейной цепи.

Обозначим через $y_1(t)$ и $y_2(t)$ сигналы на выходе линейного фильтра L, осуществляющего фильтрацию сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Поскольку последние имеют смысл логарифмов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, то $y_1(t)$ и $y_2(t)$ можно рассматривать как логарифмы выходных сигналов $s_{1\text{вых}}(t)$ и $s_{2\text{вых}}(t)$. Тогда возникает задача, обратная по отношению к (16.2): как перейти от суммы $y_1(t) + y_2(t)$ к произведению $s_{\text{вых}}(t) = s_{1\text{вых}}(t) \cdot s_{2\text{вых}}(t)$.

Преобразованием, обратным логарифмированию, является потенцирование. Оператор такого преобразования обозначим D^{-1}. Тогда характеристика нелинейного элемента, осуществляющего обратное преобразование, должна иметь вид $s_{\text{вых}}(t) = D^{-1}(y)$, так что

$$s_{\text{вых}}(t) = D^{-1}[y(t)] = \exp [y_1(t) + y_2(t)] = e^{y_1(t)}\, e^{y_2(t)} = e^{\ln s_{1\text{вых}}(t)} \times e^{\ln s_{2\text{вых}}(t)} = s_{1\text{вых}}(t) \cdot s_{2\text{вых}}(t). \tag{16.3}$$

[1] Здесь и в дальнейшем log обозначает операцию логарифмирования. При выкладках и вычислениях используются натуральные логарифмы.

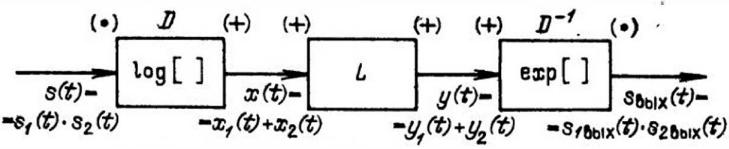


Рис. 16.1. Пример нелинейной системы, подчиняющейся принципу суперпозиции

Между двумя нелинейными элементами, осуществляющими преобразования D и D^{-1}, должно быть включено линейное устройство L для фильтрации сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$, т. е. для осуществления основной линейной обработки.

В результате приходим к схеме обработки, представленной на рис. 16.1. Как обозначено на этом рисунке, нелинейный элемент D преобразует произведение $(\cdot)$ в сумму $(+)$, линейный элемент L сохраняет операции суммирования $(+)$ и $(+)$, а нелинейный элемент D^{-1} преобразует сумму в произведение.

Применение подобной обработки целесообразно в тех случаях, когда с помощью линейного устройства L возможно разделять по частотному признаку сигналы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ и изменять в желательном направлении соотношение между уровнями сигналов $y_1(t)$ и $y_2(t)$.

Пусть, например, спектры функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$ не перекрываются, а линейный фильтр L пропускает только сигнал $y_1(t)$. Тогда выражение (16.3) принимает следующий вид:

$$s_{вых}(t)=D^{-1}[y(t)]=\exp[y_1(t)+0]=e^{y_1(t)}=e^{\ln s_{1вых}(t)}=s_{1вых}(t). \quad (16.3')$$

Аналогично при режекции сигнала $y_1(t)$ получим $s_{2вых}(t)$. Таким образом можно осуществить разделение сигналов.

Система, представленная на рис. 16.1, в целом подчиняется обобщенному принципу суперпозиции, в данном случае по отношению к сигналу $s(t)=s_1(t)\cdot s_2(t)$, так как в этой системе между сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$ отсутствует взаимодействие и соотношение между $s_{1вых}(t)$ и $s_1(t)$, а также между $s_{2вых}$ и $s_2(t)$ определяется только линейным устройством L.

Именно в этом смысле в дальнейшем будет трактоваться термин «обобщенный принцип суперпозиции».

16.2. ОБОБЩЕННАЯ СХЕМА ГОМОМОРФНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Если сигналы на входе и выходе рассматриваемой системы трактовать как элементы векторного пространства, то любое преобразование $H[s(t)]$, осуществляемое системой над сигналом $s(t)$, является преобразованием пространства сигналов. Такое преобразование переводит элементы s_1, s_2,... пространства входных сигналов в элементы $s_{1вых}(t)$, $s_{2вых}(t)$, ... пространства выходных сигналов, причем $s_{1вых}(t)=H[s_1(t)]$, $s_{2вых}(t)=H[s_2(t)]$.

Рассмотрим теперь преобразование входного сигнала, являющегося некоторой комбинацией двух сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Как уже ранее отмечалось, для обработки сигналов в радиоэлектронике наибольший интерес представляют следующие три комбинации: сложение, умножение и свертка. Обобщим эти операции символом $\square$, т. е. $s(t)=s_1(t)\square s_2(t)$. Каждому сигналу $s(t)$ соответствует вполне определенный элемент $s_{вых}(t)=H[s(t)]$ в пространстве выходных сигналов, однако различным операциям — суммированию, умножению или свертке соответствует определенный оператор: H_1, H_2 или H_3.

Можно синтезировать систему, осуществляющую такое преобразование входного сигнала $s(t) = s_1(t) \square s_2(t)$, при котором сигнал на выходе будет иметь вид $s_{вых}(t) = H[s_1(t)] \bigcirc H[s_2(t)]$, где $\bigcirc$ — обозначение (общее) операций над элементами пространства выходных сигналов (сложение, умножение, свертка), причем операция $\bigcirc$ может не совпадать с операцией $\square$.

Для такой системы имеет место следующее соотношение:

$$H[s_1(t) \square s_2(t)] = H[s_1(t)] \bigcirc H[s_2(t)]. \tag{16.4}$$

Имеется в виду однозначное, но не обязательно взаимно-однозначное преобразование.

Примером невзаимно-однозначного преобразования может служить операция квадрирования

$$H[s(t)] = [s(t)]^2.$$

Каждому значению $s(t)$ соответствует одно-единственное значение $s^2(t)$ в пространстве выходных сигналов, при обратном же преобразовании получим два возможных значения $\pm s(t)$.

Преобразование векторного пространства, отвечающее равенству (16.4), называется г о м о м о р ф н ы м (в отличие от обратимого, изоморфного преобразования), а системы, осуществляющие такое преобразование, называются г о м о м о р ф н ы м и относительно операции $\square$ на входе и операции $\bigcirc$ на выходе системы.

В частном случае $\square = \bigcirc = (+)$ выражение (16.4) переходит в соотношение

$$H[s_1(t) + s_2(t)] = H[s_1(t)] + H[s_2(t)], \tag{16.5}$$

соответствующее формулировке принципа суперпозиции для обычной линейной системе [см. (1.1)].

С этой точки зрения выражение (16.4) можно трактовать как *обобщение принципа суперпозиции*.

Пространство выходных сигналов, как и исходное, является линейным векторным пространством, хотя сам оператор преобразования $H[\ ]$ может быть нелинейным.

Проиллюстрируем смысл этого обобщения на нескольких примерах.

1. Система, осуществляющая преобразование Фурье сигнала $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$.

В данном случае $\square = \bigcirc = (+)$ и

$$\mathcal{F}[s(t)] = \mathcal{F}[s_1(t) + s_2(t)] = \mathcal{F}[s_1(t)] + \mathcal{F}[s_2(t)] = S_1(\omega) + S_2(\omega) \tag{16.6}$$

— *чисто линейное преобразование*.

Аналогичное соотношение можно написать и для z-преобразования, обозначаемого через $\xi[\ ]$:

$$\xi[s(t)] = \xi[s_1(t) + s_2(t)] = \xi[s_1(t)] + \xi[s_2(t)] = \widehat{S_1}(z) + \widehat{S_2}(z). \tag{16.7}$$

Выражения (16.6), (16.7) соответствуют определению принципа суперпозиции для линейной системы.

2. Система, осуществляющая преобразование сигнала $s(t) = s_1(t)\, s_2(t)$ в сумму $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

В данном примере $\square \to (\cdot)$, $\bigcirc \to (+)$. В соответствии с предыдущим параграфом [см. (16.2)] оператор H есть функция логарифмирования log:

$$H[s(t)] = H[s_1(t) \cdot s_2(t)] = \log[s_1(t) \cdot s_2(t)] = \log s_1(t) + \log s_2(t),$$
$$s_1 > 0, \quad s_2 > 0. \tag{16.8}$$

В данном случае гомоморфное преобразование с помощью нелинейного элемента (с логарифмической характеристикой) переводит операцию умножения в операцию сложения, что и обеспечивает применимость принципа суперпозиции к выходным сигналам.

3. Система, осуществляющая преобразование Фурье сигнала, представляющего собой свертку континуальных сигналов $s_1(t) = s_1(t) * s_2(t)$ или свертку дискретных сигналов $s(m) = s_1(m) \otimes s_2(m)$.

Известно, что свертке функций времени соответствует произведение их спектральных плотностей [см. (2.64)]; следовательно, в данном случае $\square$ обозначает свертку $*$ или $\otimes$, а $\bigcirc$ — умножение $(\cdot)$. Таким образом, для аналогового сигнала

$$\mathcal{F}[s(t)] = \mathcal{F}[s_1(t) * s_2(t)] = \mathcal{F}[s_1(t)]\,\mathcal{F}[s_2(t)] = \mathrm{S}_1(\omega)\cdot\mathrm{S}_2(\omega) \tag{16.9}$$

и для дискретного сигнала

$$\xi[s(m)] = \xi[s_1(m) \otimes s_2(m)] = \xi[s_1(m)]\cdot\xi[s_2(m)] = \widehat{\mathrm{S}}_1(z)\cdot\widehat{\mathrm{S}}_2(z), \tag{16.10}$$

где $\xi[\ ]$, как и в п. 1, обозначает z-преобразование.

В рассматриваемом примере гомоморфное преобразование, переводящее операцию свертки в операцию умножения, является линейным (это относится как к $\mathcal{F}[\ ]$, так и к $\xi[\ ]$). Оба эти преобразования обратимы, так как каждому прямому преобразованию соответствует однозначное обратное преобразование. Иными словами, преобразование Фурье и z-преобразование *изоморфны*.

Дополнительное гомоморфное преобразование с помощью логарифмической нелинейности (как в примере 2) приводит к сумме функций вида

$$\log \mathrm{S}_1(\omega) + \log \mathrm{S}_2(\omega) \text{ или } \log \widehat{\mathrm{S}}_1(z) + \log \widehat{\mathrm{S}}_2(z),$$

что и обеспечивает применимость принципа суперпозиции.

4. Система, осуществляющая преобразование операции сложения сигналов в операцию их умножения.

В § 16.1 показано, что для такого преобразования требуется нелинейный элемент с характеристикой $x(t) = \exp[s(t)]$ [см. (16.3)].

Приведенные выше рассуждения, а также примеры позволяют обобщить намеченную в § 16.1 систему гомоморфной обработки так, как это показано на рис. 16.2. Обобщенная, так называемая к а н о н и ч е с к а я система гомоморфной обработки состоит из трех каскадов.

Первая система $D_\square$, в общем случае нелинейная, обладающая свойством

$$D_\square[s_1(t)\square s_2(t)] = D_\square[s_1(t)] + D_\square[s_2(t)] = x_1(t) + x_2(t), \tag{16.11}$$

подчиняется обобщенному принципу суперпозиции со *входной* операцией $\square$ и *выходной* операцией $(+)$ (см. обозначения на рис. 16.2). Система $D_\square$ называется *характеристической* системой гомоморфной обработки.

Система L, являющаяся обычной линейной цепью, удовлетворяет условию $L[x_1(t) + x_2(t)] = L[x_1(t)] + L[x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$ и выполняет

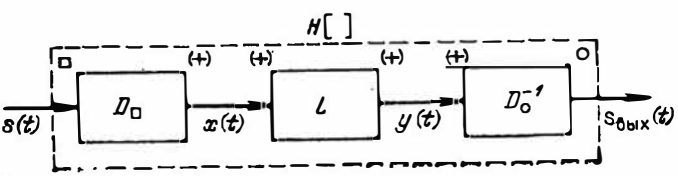


Рис. 16.2. Каноническая система гомоморфной обработки

основную функцию по раздельной обработке (фильтрации) сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Наконец, система $D_{\bigcirc}^{-1}$, преобразующая операцию сложения в выходную операцию $\bigcirc$, удовлетворяет условию

$$D_{\bigcirc}^{-1}[y_1(t)+y_2(t)]=D_{\bigcirc}^{-1}[y_1(t)]\bigcirc D_{\bigcirc}^{-1}[y_2(t)]=s_{1\text{вых}}(t)\bigcirc s_{2\text{вых}}(t). \quad (16.12)$$

Преобразование D^{-1} является обратным по отношению к преобразованию D. Если D — система нелинейная, то и D^{-1} — нелинейная система.

В последующих параграфах поясняется выбор характеристических систем $D_{\square}$ и $D_{\bigcirc}^{-1}$ для двух классов сигналов — произведения и свертки.

16.3. ГОМОМОРФНАЯ ОБРАБОТКА МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО СИГНАЛА

Структурная схема обработки мультипликативного сигнала представлена на рис. 16.1 и описана в § 16.1. Наложенные при анализе этой схемы ограничения — действительные и ненулевые сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$, а также разнесенность или несущественное перекрытие их спектров не препятствуют применению гомоморфной обработки в ряде важных для практики задач. К таким задачам относится, в частности, обработка сигналов телевизионного изображения. Дело в том, что, как правило, яркость фона на экране изменяется медленно, а контрастность изображения определяется высокочастотными изменениями сигнала, так что результирующий эффект можно считать пропорциональным произведению двух сигналов — низкочастотного $s_1(t)$ и высокочастотного $s_2(t)$. По своей природе эти сигналы являются действительными и положительными функциями времени.

Примерный вид сигналов $s_1(t)$, $s_2(t)$ и $s(t)$ представлен на рис. 16.3, *а*. Запишем их в форме

$$s_1(t)=A_{01}+\Delta s_1(t)>0,\quad s_2(t)=A_{02}+\Delta s_2(t)>0,$$

где A_{01} и A_{02} — постоянные составляющие соответственно функции $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

Тогда

$$s(t)=s_1(t)\cdot s_2(t)=A_{01}A_{02}+A_{02}\Delta s_1(t)+A_{01}\Delta s_2(t)+\Delta s_1(t)\cdot\Delta s_2(t).$$

В связи с тем, что сигнал $s_1(t)$ изменяется в широком динамическом диапазоне, соответственно изменяется и сигнал $s(t)$. Это предъявляет жесткие требования к линейности амплитудной характеристики телевизионного тракта. Выгодно ослабить влияние $s_1(t)$ и подчеркнуть сигнал $s_2(t)$, от которого зависит контрастность изображения. Для выявления возможности такой обработки рассмотрим спектры сигналов.

Спектры исходных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ показаны на рис. 16.3, *б* и *в*. Дельта-функции относятся к спектральным плотностям постоянных составляющих A_{01} и A_{02}, а $S_{\Delta 1}(\omega)$ и $S_{\Delta 2}(\omega)$ обозначают спектры переменных составляющих $\Delta s_1(t)$ и $\Delta s_2(t)$.

Спектр результирующего сигнала $s(t)$ представлен на рис. 16.4, *а*. Произведению $\Delta s_1(t)\cdot\Delta s_2(t)$ соответствует свертка спектров $S_{\Delta 1}(\omega)$ и $S_{\Delta 2}(\omega)$.

С помощью обычных линейных фильтров можно отфильтровать постоянную составляющую и низкочастотную часть спектра в полосе от нуля до Ω. Однако спектр $S_{\Delta 1}(\omega)*S_{\Delta 2}(\omega)$ не поддается разделению с помощью линейной фильтрации. В этих условиях применение системы, представленной на рис. 16.1, оказывается весьма эффективным. Хотя форма колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на выходе логарифмического преобразователя существенно от-

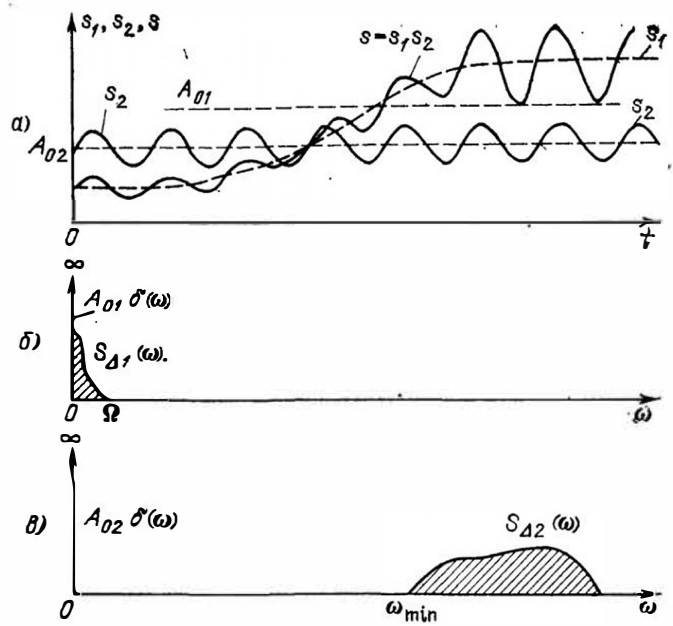


Рис. 16.3. К гомоморфной обработке мультипликативного сигнала:
а) исходные сигналы $s_1(t)$, $s_2(t)$ и их произведенне; *б*) спектр медленно изменяющегося сигнала $s_1(t)$; *в*) спектр быстро изменяющегося сигнала $s_2(t)$

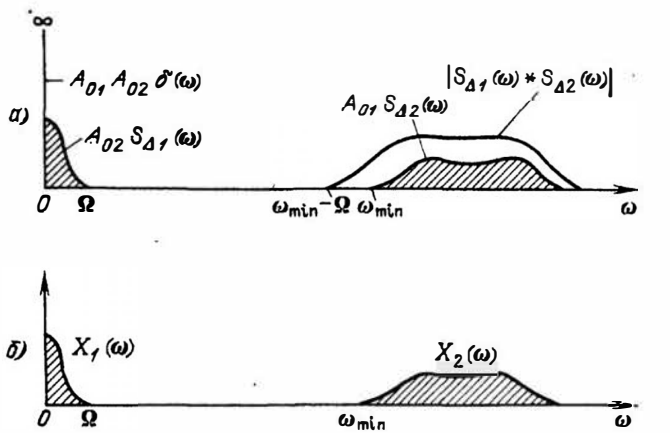


Рис. 16.4. Спектр мультипликативного сигнала (*а*) и спектр того же сигнала после логарифмического преобразования (*б*)

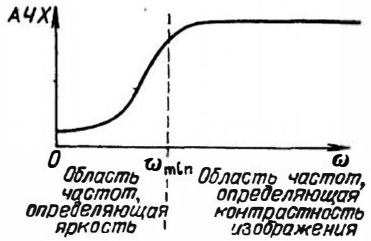


Рис. 16.5. Амплитудно-частотная характеристика линейной цепи в системе на рис. 16.1, обеспечивающая сжатие динамического диапазона и повышение контрастности изображения

личается от исходных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, соответствующие им спектральные полосы разнесены на оси частот в такой же степени, что и спектры $S_{\Delta 1}(\omega)$ и $S_{\Delta 2}(\omega)$ (рис. 16.4, *б*). В спектре $X_1(\omega)$ преобладают низкие частоты, близкие к Ω, а в спектре $X_2(\omega)$ — частоты, нижняя граница которых близка к ω_{min}.

Применение линейной цепи L с АЧХ, показанной на рис. 16.5, позволяет существенно снизить относительный уровень сигнала $y_1(t)$.

После обратного нелинейного преобразования D^{-1} получается новый мультипликативный сигнал $s_{вых}(t) = s_{1вых}(t)s_{2вых}(t)$ с требуемым соотношением уровней $s_{1вых}(t)$ и $s_{2вых}(t)$.

Таким образом можно осуществить одновременно сжатие динамического диапазона и повышение контрастности изображения.

16.4. ГОМОМОРФНАЯ ОБРАБОТКА СВЕРНУТОГО СИГНАЛА

Пусть задан континуальный сигнал $s(t) = s_1(t) * s_2(t)$ и требуется осуществить обработку, в результате которой выходной сигнал получится также в виде свертки $s_{вых}(t) = s_{1вых}(t) * s_{2вых}(t)$, но с измененным соотношением между составными сигналами.

В данном случае операции $\square$ и $\bigcirc$ совпадают с $*$ и каноническая форма системы обработки принимает вид, показанный на рис. 16.6, *а*.

В соответствии с (16.11) характеристическая система D_* должна отвечать условию

$$D_*[s_1(t) * s_2(t)] = D_*[s_1(t)] + D_*[s_2(t)]. \qquad (16.13)$$

В отличие от мультипликативного сигнала (см. § 16.3) не существует подходящей функции для прямой реализации условия (16.13). Можно, однако, сначала перевести операцию свертки в операцию умножения, а затем произведение преобразовать в сумму.

Подвергнув входной сигнал преобразованию Фурье, получим [см. (16.9)]

$$\mathcal{F}[s(t)] = S(\omega) = S_1(\omega)\, S_2(\omega). \qquad (16.14)$$

Следующий шаг — преобразование произведения в сумму с помощью выражения

$$\log S(\omega) = \log S_1(\omega) + \log S_2(\omega).$$

Применив, наконец, к $\log S(\omega)$ обратное преобразование Фурье, придем к характеристической системе D_*.

Структурная схема D_* представлена на рис. 16.7, *а*. На выходе этой системы сигнал

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[\log S(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[\log S_1(\omega)] + \mathcal{F}^{-1}[\log S_2(\omega)] = x_1(t) + x_2(t). \qquad (16.15)$$

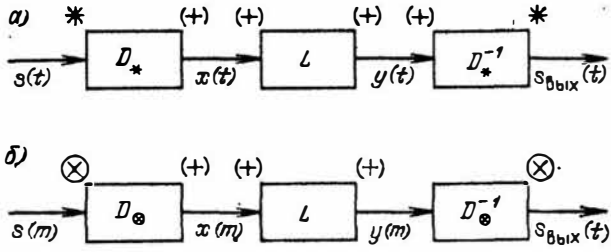


Рис. 16.6. Гомоморфная обработка свернутого аналогового (*а*) и цифрового (*б*) сигналов

Функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ по своей форме, естественно, существенно отличаются от исходных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

На рис. 16.8, *а* представлена обратная характеристическая система D_*^{-1}. Эта система получается из D_* заменой преобразования log [ ] на преобразование exp [ ].

На вход системы D_*^{-1} подается сигнал $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ с выхода линейной системы L.

После преобразования $\mathcal{F}[y(t)]$ получаются спектральные функции $\mathbf{Y}_1(\omega)$ и $\mathbf{Y}_2(\omega)$. Дальнейшее преобразование вида exp [ ] приводит к произведению вида $e^{\mathbf{Y}_1(\omega)} \cdot e^{\mathbf{Y}_2(\omega)}$, каждый из сомножителей которого также является спектральной функцией.

Наконец, обратное преобразование Фурье

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{Y}_1(\omega)} e^{\mathbf{Y}_2(\omega)} e^{i\omega t} d\omega = s_{1\text{вых}}(t) * s_{2\text{вых}}(t) \tag{16.16}$$

определяет выходной сигнал в виде свертки, в которой сигналы $s_{1\text{вых}}(t)$ и $s_{2\text{вых}}(t)$ изменены по сравнению с $s_1(t)$ и $s_2(t)$ в требуемом соотношении.

Цифровой вариант характеристической системы $D_{\otimes}$ представлен на рис. 16.7, *б*.

Сигнал (дискретный) на выходе этой системы определяется выражением, аналогичным (16.15):

$$x(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint \ln \widehat{S}(z)\, z^{m-1}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint \ln \widehat{S}_1(z)\, z^{m-1}\, dz + \\ + \frac{1}{2\pi i} \oint \ln \widehat{S}_2(z)\, z^{m-1}\, dz = x_1(m) + x_2 m. \tag{16.17}$$

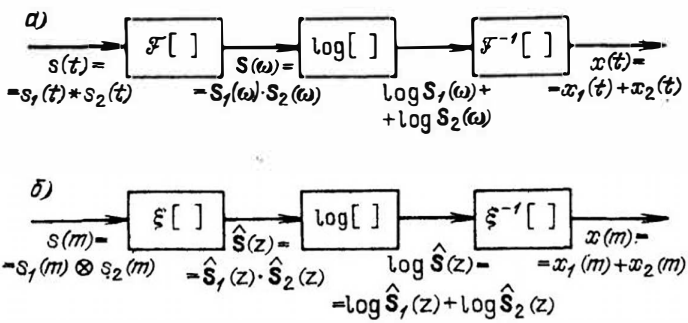


Рис. 16.7. Характеристическая система D_* для континуального сигнала (*а*) и $D_{\otimes}$ для цифрового сигнала (*б*)

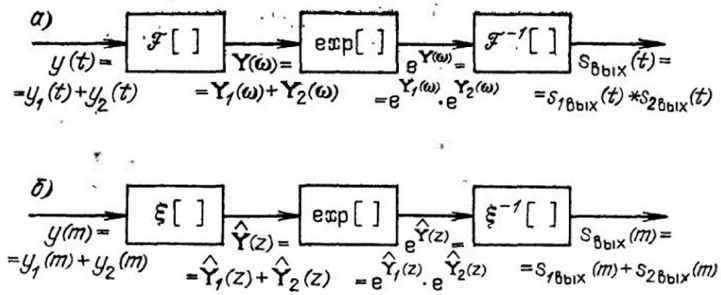


Рис. 16.8. Представление систем D_*^{-1} и $D_{\otimes}^{-1}$ (на рис *б* в выходном сигнале должен быть знак $\otimes$)

Обратная характеристическая система $D_{\otimes}^{-1}$ представлена на рис. 16.8,*б*. Сигнал на выходе всего устройства

$$s_{вых}(m)=\frac{1}{2\pi i}\oint e^{\hat{Y}_1(z)}e^{\hat{Y}_2(z)}z^{m-1}\,dz=s_{1вых}(m)\otimes s_{2вых}(m). \qquad (16.18)$$

В практике наибольшее распространение получила гомоморфная обработка свернутого сигнала, заканчивающаяся выделением функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ [или $x_1(m)$, $x_2(m)$], содержащих в себе всю информацию о входных сигналах $s_1(t)$ и $s_2(t)$ [или $s_1(m)$, $s_2(m)$]. При этом необходимость в громоздких преобразованиях D_*^{-1} или $D_{\otimes}^{-1}$ отпадает, а выходные сигналы определяются с помощью соотношений (16.15) или (16.17).

Главная особенность указанных соотношений — замена спектральной плотности S (ω) логарифмом S (ω), а z-преобразования $\widehat{S}(z)$ — логарифмом $\widehat{S}(z)$.

Основанный на логарифмически-спектральном преобразовании метод привел к новому направлению в теории сигналов, получившему название кепстральный анализ.

16.5. КЕПСТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ. КЕПСТР МОЩНОСТИ

Исторически понятие «кепстр» было определено выражением [1]

$$C_s(q)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln[S(\omega)]^2e^{i\omega q}\,d\omega, \qquad (16.19)$$

где S (ω) — амплитудный спектр континуального сигнала $s(t)$.

Поскольку S^2 (ω) имеет смысл спектральной плотности энергии сигнала $s(t)$ (см. § 2.9), то $C_s(q)$ истолковывается как *энергетический спектр* функции $\ln[S(\omega)]^2$.

Но из (16.19) очевидно, что аргумент q этого «спектра» имеет размерность *времени*, а не частоты. Этим и объясняется распространение термина «кепстр», который образован перестановкой букв в термине «спектр». (В зарубежной литературе аргумент называют «quefrency», что по-русски выглядит как «частота».)

[1] См., например: A. Michel Noll. Cepstrum Pitch Determination. — The T. of the Acoustical Soc. of America, 1967, v. 41 № 2.

Хотя q имеет размерность времени, это особое, *кепстральное* время, поскольку $C_s(q)$ в любой момент q зависит от функции $s(t)$, заданной при $-\infty < t < \infty$.

Определяемый выражением (16.19) кепстр принято называть *кепстром мощности* [1]. Фазо-частотная характеристика спектра не учитывается (в § 16.9 будет рассмотрен «комплексный кепстр»).

Кепстры мощности получили распространение при анализе сигналов, представляющих собой свертку двух функций времени, таких, что после преобразования $s(t)$ по алгоритму (16.19) образуются неперекрывающиеся на оси q импульсы. В подобной ситуации фазовый спектр составных функций, образующих свертку сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, может не приниматься во внимание.

Следует отметить, что выражение (16.19) имеет смысл не для любого сигнала $s(t)$. Действительно, для сигнала с конечной энергией выполняется условие $\int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\, d\omega < \infty$, из которого следует, что при $|\omega| \to \infty$ $S^2(\omega) \to 0$. Но тогда при $|\omega| \to \infty$ обращается в бесконечность $|\ln S(\omega)|$ и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \ln S^2(\omega)\, d\omega$ расходится.

Это противоречие в некоторых практических задачах обходят заменой пределов интегрирования $\pm\infty$ граничными частотами $\pm\omega_{гр}$, в пределах которых заключена основная доля энергии сигнала и значение функции $\ln S^2(\omega)$ ограничено.

Проиллюстрируем применение кепстра мощности на следующем примере. Пусть задан сигнал $s(t)$ на выходе линейного тракта и требуется получить информацию об исходном сигнале $s_1(t)$, действующем на его входе, а также об импульсной характеристике $g(t)$ самого тракта. Связь между тремя перечисленными функциями времени определяется сверткой

$$s(t) = s_1(t) * g(t).$$

Подобная задача возникает при анализе сейсмических процессов, при использовании радиолокационных методов определения характеристик среды распространения, при анализе сигналов речи и т. д.

В частности, при разработке электронных синтезаторов речи под $s_1(t)$ подразумевается сигнал, о котором известно лишь, что его спектральная плотность $S_1(\omega)$ заключена в некоторой полосе $|\omega| \leqslant \omega_{max}$, а форма АЧХ характеризуется периодической изрезанностью, однако период пульсации $1/T$ (на оси частот), а также амплитуда пульсации подлежат определению. Об импульсной характеристике речевого тракта $g(t)$ только известно, что ее продолжительность мала по сравнению с T, так что передаточная функция тракта $K(\omega)$ изменяется плавно по сравнению с пульсацией $S_1(\omega)$.)

Результаты обработки сигнала $s(t) = s_1(t) * g(t)$ по схеме на рис. 16.9 показаны на рис. 16.10.

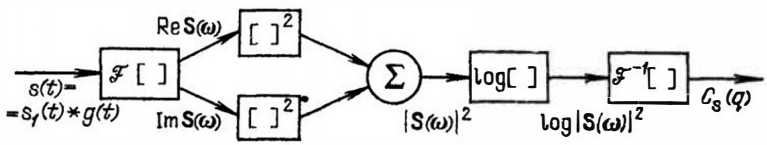


Рис. 16.9. Определение кепстра мощности континуального сигнала по алгоритму (16.19)

[1] Применительно к сигналам конечной длительности более уместен термин «кепстр энергии». Во избежание путаницы здесь сохранена формулировка, получившая распространение в литературе.

После фурье-преобразования, определения квадрата модуля спектра, а также логарифмирования получаются функции $\ln S_1^2(\omega)$ и $\ln K^2(\omega)$, примерный вид которых представлен [1] на рис. 16.10, *а*.

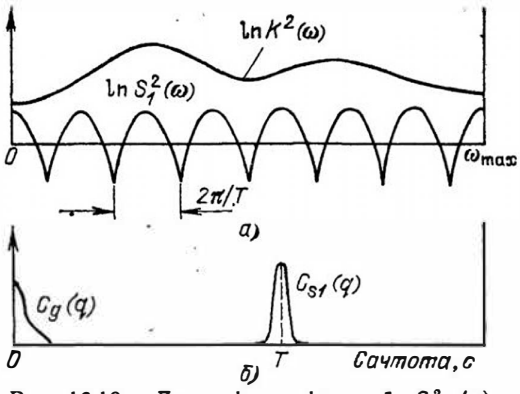


Рис. 16.10. Логарифмы функций $S_1^2(\omega)$ $K^2(\omega)$ (*а*) и соответствующие им кепстры (*б*)

Функции $\ln S_1^2(\omega)$, изменяющейся с периодом $1/T$, соответствует кепстр $C_{s1}(q)$ в виде пика на частоте T, медленному же изменению функции $\ln K^2(\omega)$ соответствует кепстр $C_g(q)$ в виде импульса, расположенного вблизи точки $q = 0$ (область малого кепстрального времени).

Таким образом можно выявить основную частоту $1/T$, а также получить некоторую информацию о форме АЧХ речевого тракта.

В отличие от рассмотренной выше упрощенной модели со строго периодической пульсацией спектра $S_1(\omega)$ и с постоянной (во времени) передаточной функцией $K(\omega)$ при обработке реальных сигналов речи приходится иметь дело с «квазипериодическим» процессом, частота которого изменяется во времени. То же относится к функции $K(\omega)$. Путем усреднения спектров по большому числу отрезков реализаций, в пределах которых функции $S(\omega)$ и $K(\omega)$ практически неизменны, удается выявить средние частоты и параметры тракта, необходимые для синтеза звуков речи.

Составим теперь выражение для кепстра мощности *цифрового* сигнала.

Основываясь на выражении (16.17), представим кепстр мощности дискретного сигнала в форме

$$C_s(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint \ln |\widehat{S}(z)|^2 z^{m-1}\, dz \tag{16.20}$$

или в эквивалентной форме [см. (12.28)]

$$C_s(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |\widehat{S}(e^{i\omega T})|^2 \cos(\omega m T)\, d(\omega T). \tag{16.20'}$$

Вычисление $C_s(m)$, как правило, производится с помощью БПФ. Для осуществления преобразований, эквивалентных алгоритму (16.20'), поступим следующим образом. Подвергнем входной сигнал $s(t)$ дискретному преобразованию Фурье по формуле (12.14):

$$S(n) = \sum_{m=0}^{N-1} s(m)\, e^{-i\frac{2\pi}{N}mn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{16.21}$$

в результате чего получим N спектральных коэффициентов входной последовательности $\{s(m)\}$.

В § 12.6 было показано, что $S(n)$ совпадает со значением $\widehat{S}(e^{i\omega T})$ в точке $z = e^{i\frac{2\pi}{N}n}$, лежащей на окружности единичного радиуса:

$$S(n) = \widehat{S}\left(e^{i\frac{2\pi}{N}n}\right) = \operatorname{Re} S(n) + i \operatorname{Im} S(n).$$

[1] См. сноску на с. 469.

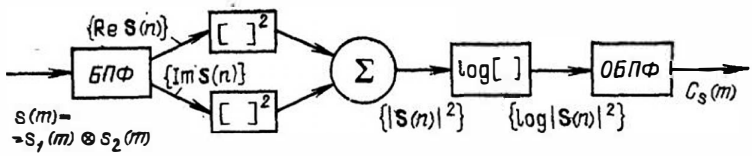


Рис. 16.11. Определение кепстра мощности свернутого сигнала (цифрового)

Переходя к модулям $|S(n)|^2 = [\mathrm{Re}\ S(n)]^2 + [\mathrm{Im}\ S(n)]^2$ и логарифмируя, получаем N чисел вида $\ln|S(n)|^2$.

Применив, наконец, ОДПФ

$$C_s(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \ln|S(n)|^2 e^{i\frac{2\pi}{N}nm},\ m=0,\ 1,\ \ldots,\ 2N-1, \qquad (16.22)$$

найдем кепстр мощности сигналов.

Алгоритм перечисленных выше преобразований представлен на рис. 16.11.

Вычисление кепстра мощности дискретного сигнала будет рассмотрено в следующем параграфе.

16.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАДЕРЖКИ СИГНАЛА

В ряде областей техники приходится иметь дело с обработкой сигналов, являющихся суммой исходного (зондирующего) сигнала и сигнала, отраженного от различных объектов. К таким областям относятся радиолокация, сейсмология, акустика и др. Сигнал на входе устройства обработки можно представить в форме

$$s(m) = s_1(m) + \alpha\, s_1(m - m_0),\ \alpha < 1, \qquad (16.23)$$

где $\{S_1(m)\}$, $m = 0, 1, \ldots, N-1$, — дискретизованный зондирующий сигнал, представляющий собой эквидистантную последовательность отсчетов с шагом T; $\alpha\, s_1(m - m_0)$ — отраженный сигнал, который можно трактовать как задержанную на время $t_0 = m_0 T$ копию исходного сигнала.

Пусть исходному сигналу $\{s_1(m)\}$ соответствует z-преобразование $\widehat{S}_1(z)$. Тогда z-преобразование последовательности $\alpha s_1(m - m_0)$ будет $\alpha\widehat{S}_1(z)z^{-m_0}$, а суммарного сигнала $\{s(m)\}$.

$$\widehat{S}(z) = \widehat{S}_1(z) + \alpha\widehat{S}_1(z)\,z^{-m_0} = \widehat{S}_1(z)(1 + \alpha z^{-m_0}) = \widehat{S}_1(z)\,\widehat{S}_2(z). \qquad (16.24)$$

Из (16.24) следует, что определяемый выражением (16.23) сигнал $s(m)$ можно трактовать как свертку $s(m) = s_1(m) \otimes s_2(m)$, где $s_2(m)$ — сигнал, z-преобразование которого равно $1 + \alpha z^{-m_0}$. Таким сигналом является сумма двух дельта-функций (рис. 16.12):

$$s_2(t) = \delta(t) + \alpha\delta(t - m_0 T).$$

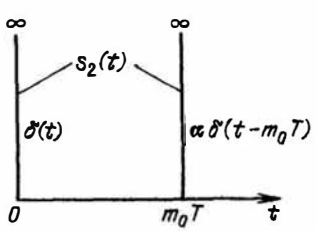


Рис. 16.12. Сигнал $\delta(t) + \alpha\delta(t - m_0 T)$

Это обстоятельство имеет фундаментальное значение, так как показывает, что широкий класс задач в перечисленных ранее областях, в которых приходится иметь дело с отраженными сигналами, сводится к обработке свернутых сигналов.

Существенно, что множитель $\widehat{S}_2(z) = (1 + \alpha z^{-m_0})$ в выражении (16.24), учитывающий задержку отраженного сигнала $m_0 T$ и коэффициент отражения α, от структуры спектра исходного сигнала не зависят.

Обратимся к (16.24) и, учитывая, что контур интегрирования в (16.20) совпадает с окружностью единичного радиуса на z-плоскости, подставим в множитель $(1 + \alpha z^{-m_0})$ вместо z переменную $e^{i\omega T}$.

Тогда

$$\left|\widehat{S}_2(e^{i\omega T})\right|^2 = |1 + \alpha e^{-i\omega m_0 T}|^2 = (1 + \alpha e^{-i\omega m_0 T})(1 + \alpha e^{i\omega m_0 T}) =$$
$$= 1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(\omega m_0 T). \qquad (16.25)$$

Таким образом, выражение (16.24) позволяет составить следующее соотношение:

$$\left|\widehat{S}(e^{i\omega T})\right|^2 = \left|\widehat{S}_1(e^{i\omega T})\right|^2 [1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(\omega m_0 T)]. \qquad (16.26)$$

Из (16.26) видно, что наложение задержанной копии $\alpha s_1 (m - m_0)$ на исходный сигнал $s_1(m)$ создает эффект модуляции спектра энергии $|\widehat{S}_1(e^{i\omega T})|^2$ по закону $1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(\omega m_0 T)$. Глубина модуляции определяется коэффициентом $2\alpha/(1 + \alpha^2)$, а период модуляции равен $2\pi/m_0$.

С аналогичным явлением мы встретились в примере предыдущего параграфа, где спектр энергии исходного сигнала также являлся периодической функцией ω.

Прологарифмировав выражение (16.26), получим

$$\ln|\widehat{S}(e^{i\omega T})|^2 = \ln|\widehat{S}_1(e^{i\omega T})|^2 + \ln[1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(\omega m_0 T)]. \qquad (16.27)$$

Примерный вид слагаемых правой части показан на рис. 16.13.

Вычислим кепстр мощности по выражению (16.20′), которое на основании (16.25) — (16.27) можно записать в форме

$$C_s(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|\widehat{S}_1(e^{i\omega T})|^2 \cos(m\omega T)\, d(\omega T) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|1 +$$
$$+ \alpha e^{-im_0 \omega T}|^2 \cos(m\omega T)\, d(\omega T) = C_{s1}(m) + C_{s2}(m). \qquad (16.28)$$

Как видно, информация о задержке t_0 содержится в кепстре $C_{s2}(m)$, поэтому вычисление начнем именно с $C_{s2}(m)$, не уточняя пока структуры сигнала $s_1(m)$ и кепстра $C_{s1}(m)$.

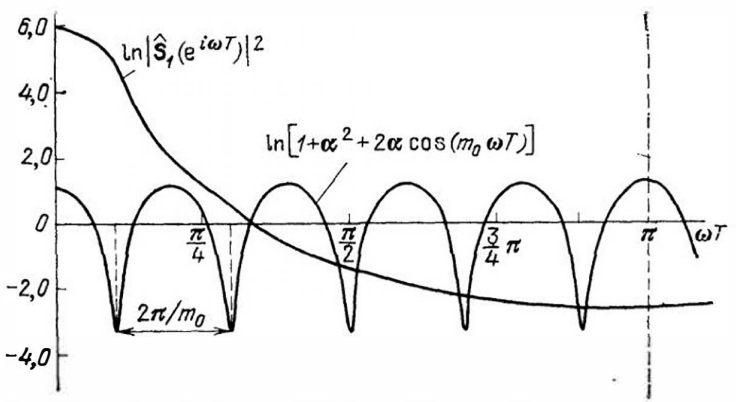


Рис. 16.13. К выражению (16.27); $\alpha = 0{,}8$, $m_0 = 10$

Основываясь на выражении (16.25), получаем

$$\ln|1+\alpha e^{-im_0\omega T}|^2=\ln(1+\alpha e^{-im_0\omega T})+\ln(1+\alpha e^{im_0\omega T}).$$

Так как $|\alpha e^{-im_0\omega T}|<1$, можно воспользоваться разложением $\ln(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-\ldots$

Тогда

$$\ln|1+\alpha e^{-im_0\omega T}|^2=\alpha(e^{-im_0\omega T}+e^{im_0\omega T})-\frac{\alpha^2}{2}(e^{-i2m_0\omega T}+e^{i2m_0\omega T})+$$

$$+\frac{\alpha^3}{3}(e^{-i3m_0\omega T}+e^{i3m_0\omega T})-\ldots=2\alpha\cos(m_0\omega T)-\alpha^2\cos(2m_0\omega T)+$$

$$+\frac{\alpha^3}{3}2\cos(3m_0\omega T)-\ldots$$

Подставив этот результат во второе слагаемое в правой части (16.28), получим

$$C_{s2}(m)=\alpha\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(m-m_0)\omega T]\,d(\omega T)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(m+m_0)\omega T]\times\right.$$

$$\left.\times\,d(\omega T)\right\}-\frac{\alpha^2}{2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(m-2m_0)\omega T]\,d(\omega T)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(m+2m_0)\omega T]\,d(\omega T)\right\}+\ldots$$

Очевидно, что $C_{s2}(m)$ отлично от нуля только в точках $m=\pm m_0$, $m=\pm 2m_0$ и т. д., причем

$$C_{s2}(m_0)=C_{s2}(-m_0)=\alpha,\ C_{s2}(2m_0)=C_{s2}(-2m_0)=-\alpha^2/2,\ C_{s2}(3m_0)=$$
$$=C_{s2}(-3m_0)=\alpha^3/3,\ \ldots$$

Кепстр $C_{s2}(m)$ представлен на рис. 16.14. Истинная задержка определяется по положению первого пика.

Найденный выше кепстр $C_{s2}(m)$ наблюдается на фоне кепстра $C_{s1}(m)$ исходного сигнала. Для надежного определения t_0 требуется достаточное превышение $C_{s2}(m)$ над $C_{s1}(m)$, а также разнесение их на оси кепстрального времени mT. Важно, чтобы кепстр $C_{s1}(m)$ концентрировался вблизи начала отсчета кепстрального времени. Кроме того, кепстр $C_{s1}(m)$ должен быть свободен от ложных пиков. Степень выполнения этих требований зависит от структуры спектра $S_1(\omega)$ исходного сигнала $s_1(t)$. Некоторые соображения по этому вопросу приводятся в следующем параграфе.

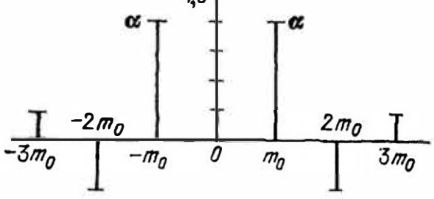


Рис. 16.14. Кепстр $C_{s2}(m)$ при $\alpha=0{,}8$

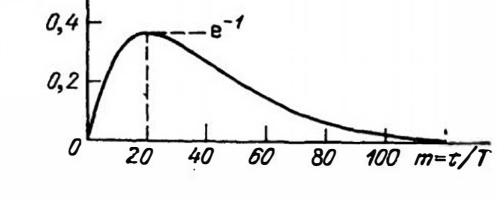


Рис. 16.15. Сигнал $s_1(t)=Ate^{-bt}$, нормированный к величине A/b, $bT=0{,}05$

16.7. ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАДЕРЖКИ СИГНАЛА

Для иллюстрации метода воспользуемся сигналом $s_1(t)$ в виде импульса (рис. 16.15)

$$s_1(t) = At\,e^{-bt},\ b > 0,\ t \geqslant 0.$$

Импульс $s_1(t)$ достигает своего максимума при $bt = 1$, так что амплитуда импульса $s_{1max} = (A/b)\,bte^{-bt} = (A/b)\,e^{-1}$.

Спектральная плотность выбранной функции

$$S(\omega) = A/(b + i\omega)^2. \tag{16.29}$$

Имея в виду цифровую обработку, переходим к дискретному времени $t = mT$; тогда

$$s_1(m) = ATm\,e^{-bTm},\ m = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,$$

и максимальное значение отсчета сигнала $s_1(t)$ получается при $m = 1/bT$ (см. рис. 16.15).

Перейдем от спектральной плотности (16.29) к z-преобразованию

$$\widehat{S}_1(e^{i\omega T}) = AT\sum_{m=0}^{N-1} m\,e^{-bTm}\,e^{-i\omega Tm} = AT\sum_{m=0}^{N-1} m\,e^{-(bT+i\omega T)m}. \tag{16.30}$$

Получилась арифметико-геометрическая прогрессия.

Шаг дискретизации T зададим из условия, чтобы на длительность импульса приходилось достаточно большое число отсчетов N, а постоянную b — из условия $Ne^{-bT} \ll 1$. При этом верхний предел суммирования $N-1$ в выражении (16.30) можно заменить на ∞, что приводит к простому результату

$$\widehat{S}_1(e^{i\omega T}) = AT\,e^{-bT}\,e^{-i\omega T}/(1 - e^{-bT}\,e^{-i\omega T})^2. \tag{16.31}$$

Модуль полученной функции

$$\left|\widehat{S}_1(e^{i\omega T})\right| = \frac{AT\,e^{-bT}}{1 - 2\,e^{-bT}\cos\omega T + e^{-2bT}} \tag{16.31'}$$

и

$$\ln\left|\widehat{S}_1(e^{i\omega T})\right|^2 = \ln(AT)^2 - 2bT - 2\ln(1 - 2e^{-bT}\cos\omega T + e^{-2bT}).$$

Применив к этому выражению формулу (16.20'), получим[1]:

при $m = 0$

$$C_{s1}(0) = \ln(AT)^2 - 2bT - 2\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln(1 - 2e^{-bT}\cos\omega T + e^{-2bT})\,d(\omega T) =$$

$$= \ln(AT)^2 - 2bT;$$

при $m \neq 0$

$$C_{s1}(m) = -2\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln(1 - 2e^{-bT}\cos\omega T + e^{-2bT})\cos(m\omega T)\,d(\omega T) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{m}e^{-2bmT}\right) = \frac{2}{m}e^{-2bmT}.$$

[1] См. [31], формулы (4.224.14), (4.397.6).

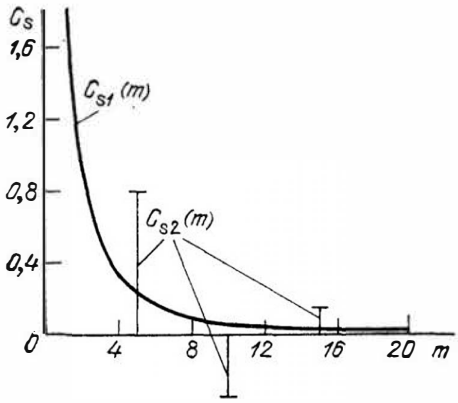


Рис. 16.16. Кепстр $C_{s1}(m)$ сигнала $s_1(t)$, показанного на рис. 16.15 и кепстр $C_{s2}(m)$ при $\alpha=0{,}8$ и задержке $t_0 = m_0T = 5T$

Вычислим $C_{s1}(m)$ для следующего частного случая: $\tau_и = 5$ мкс, $N = 128$, $T = \tau_и/N \approx 40$ нс, $e^{-bt} = 0{,}95$, $bT \approx 0{,}05$, $b = 1{,}25 \cdot 10^6$.

Кепстр $C_{s1}(m)$ представлен на рис. 16.16. На том же рисунке показан кепстр $C_{s2}(m)$, соответствующий коэффициенту $\alpha = 0{,}8$ и задержке $t_0 = m_0T$ при $m_0 = 5$. Как видно из этого рисунка, кепстр $C_{s1}(m)$ концентрируется вблизи точки $m = 0$ и монотонно убывает с возрастанием m. При $t_0 > 5T$ обеспечивается существенное превышение $C_{s2}(m)$ над $C_{s1}(m)$, что открывает возможность измерения весьма малых задержек даже при наличии помех. В данном примере минимальная измеряемая задержка t_0 составляет всего лишь $\sim 5\%$ от длительности импульса.

Для реализации такого же разрешения путем укорочения зондирующего импульса его длительность должна быть не больше $\sim 0{,}25$ мкс.

Сопоставим полученный результат с тем, который можно получить с помощью метода корреляционной функции. Заметим, что структурная схема, показанная на рис. 16.11, отличается от схемы рис. 12.44 только наличием операции логарифмирования. Определим корреляционную функцию сигнала $s(m) = s_1(m) + \alpha s_1(m - m_0)$ выражением

$$B_s(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \widehat{S}\left(e^{i\omega T}\right) \right|^2 \cos(m\omega T)\, d(\omega T).$$

С помощью процедуры, использованной при выводе выражений (16.25)—(16.28), нетрудно прийти к следующему результату:

$$B_s(m) = (1+\alpha^2) B_{s1}(m) + \alpha B_{s1}(m - m_0) + \alpha B_{s1}(m + m_0).$$

Даже при $\alpha \to 1$ и отсутствии помехи определение задержки по функции $B_s(m)$ возможно лишь при задержках t_0, не меньших чем $\sim \tau_и/2$. Этот результат иллюстрирует эффект, обусловленный введением операции логарифмирования перед преобразованием Фурье.

Итак, кепстральная обработка позволяет существенно облегчить определение задержки. Однако этот выигрыш достигается весьма дорогой ценой. Требуется применение широкополосного тракта обработки с очень низким уровнем шумов, поскольку уровень спектральной плотности полезного сигнала в центральной части диапазона 0, $1/T$ чрезвычайно низок.

Так, при $\omega T = 0$

$$\left| \widehat{S}_1\left(e^{i0}\right) \right|^2 = (AT)^2 \frac{e^{-2bT}}{(1-e^{-bT})^4} \approx \frac{(AT)^2}{(bT)^4}, \qquad (16.32)$$

а на частоте $\omega T = \pi$

$$\left| \widehat{S}_1\left(e^{i\pi}\right) \right|^2 = (AT)^2 \frac{e^{-2bT}}{(1+e^{-bT})^4} \approx \frac{(AT)^2}{2^4}. \qquad (16.33)$$

Отношение $\widehat{|S_1}(e^{i\pi})|^2/|S_1(e^{i0})|^2$ при $bT = 0{,}05$ уменьшается до $(0{,}05/2)^4 \approx$ $\approx 4\cdot 10^{-7} \to -64$ дБ.

Задача существенно облегчается при использовании сигналов, спектр которых убывает пропорционально $1/\omega$ [а не $1/\omega^2$, как в (16.29)].

16.8. ВЛИЯНИЕ ПОМЕХ

Кепстральная обработка, основанная на логарифмической нелинейности, весьма чувствительна к воздействию помех. Для оценки допустимого уровня помехи рассмотрим следующую модель: входной сигнал $s(t)$, длительность которого T_c и спектральная плотность $S(\omega)$ известны, действует на фоне помехи $x(t)$, являющейся стационарным случайным процессом с заданной спектральной плотностью мощности $W_x(\omega)$.

Отношение сигнал-помеха на входе устройства определим как отношение соответствующих энергий:

сигнала

$$\mathcal{Э}_s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\,d\omega; \tag{16.34}$$

помехи

$$\mathcal{Э}_x = T_c\,\sigma_x^2 = T_c\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\,d\omega, \tag{16.35}$$

где σ_x — средняя мощность помехи, которая действует на отрезке времени T_c, совпадающем с длительностью обрабатываемого сигнала $s(t)$.

Из последнего выражения вытекает, что величина $T_c W_x(\omega)$ имеет смысл *спектральной плотности энергии помехи*.

Таким образом, отношение

$$\eta(\omega) = S^2(\omega)/T_c\,W_x(\omega) \tag{16.36}$$

характеризует отношение спектральных плотностей энергии сигнала $s(t)$ и помехи $x(t)$ на входе устройства.

После дискретизации $s(t)$ и $x(t)$ с шагом T функция $S^2(\omega)$ преобразуется в $S_T^2(\omega) = \frac{1}{T^2}S^2(\omega)$, а $W_x(\omega)$ — в $W_{xT}(\omega) = \frac{1}{T^2}W_x(\omega)$ (см. § 2.17), но их соотношение остается прежним, поэтому функцию $\eta(\omega)$, записанную в форме (16.36) или в несколько иной форме

$$\eta(\omega) = \frac{S_T^2(\omega)}{T_c\,W_{xT}(\omega)} = \frac{S_T^2(\omega)}{T_c\,W_x(\omega)/T^2} = \frac{S_T^2(\omega)}{N\dfrac{1}{T}W_x(\omega)},\quad N = T_c/T, \tag{16.37}$$

можно трактовать как отношение энергетических спектров сигнала и помехи на входе логарифмической нелинейности.

Для выявления взаимодействия сигнала и помехи в указанной нелинейности обратимся к структурной схеме на рис. 16.11 и допустим, что на полезный сигнал $s(t)$ накладывается (аддитивно) одна из реализаций случайного процесса $x(t)$.

После дискретного преобразования Фурье (на выходе БПФ) получим совокупность спектральных коэффициентов $\{\mathbf{Y}_T(n)\}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, где

$$\mathbf{Y}_T(n) = \mathbf{S}_T(n) + \mathbf{X}_T(n),$$

причем случайная величина $X_T(n)\,e^{i\theta_{xn}}$ — спектральный коэффициент (комплексный) реализации $x(t)$ на дискретной частоте $\omega = n\omega_1$.

Определим квадрат модуля

$$|\mathbf{Y}_T(n)|^2 = [\mathbf{S}_T(n) + \mathbf{X}_T(n)][\mathbf{S}_T^*(n) + \mathbf{X}_T^*(n)] =$$

$$= S_T^2(n) + K_T^2(n) + S_T(n)\,X_T(n)\cos(\theta_{sn} - \theta_{xn}) = S_T^2(n)\left[1 + \frac{X_T^2(n)}{S_T^2(n)}\right] \times$$

$$\times \left[1 + \frac{S_T(n)\,X_T(n)}{S_T^2(n) + X_T^2(n)}\cos(\theta_{sn} - \theta_{xn})\right],$$

а после логарифмирования получим

$$\ln|\mathbf{Y}_T(n)|^2 = \ln S_T^2(n) + \ln\left[1 + \frac{X_T^2(n)}{S_T^2(n)}\right] +$$

$$+ \ln\left[1 + \frac{S_T(n)\,X_T(n)}{S_T^2(n) + X_T^2(n)}\cos(\theta_{sn} - \theta_{xn})\right].$$

Применение к совокупности $\{\ln S_T^2(n)\}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, ОБПФ дает в соответствии с (16.22) истинный кепстр сигнала $s(t)$, остальные же два слагаемых приводят к ложным отсчетам.

В реальных условиях кепстральная обработка имеет смысл при значительном превышении сигнала над помехой. Это позволяет упростить оценку влияния помехи.

Во-первых, при статистическом усреднении по множеству реализаций слагаемое, содержащее множитель $\cos(\theta_{sn} - \theta_{xn})$, обращается в нуль, поскольку начальная фаза помехи θ_{xn} случайна и равновероятна в интервале $-\pi < \theta_{xn} < \pi$.

Во-вторых, при выполнении условия $S_T^2 \gg NW_x(\omega)/T$ с вероятностью, близкой к единице, справедливо неравенство $X_T^2(n)/S_T^2(n) \ll 1$. Поэтому можно исходить из приближенного равенства

$$\ln[1 + X_T^2(n)/S_T^2(n)] \approx X_T^2(n)/S_T^2(n) \ll 1.$$

Если указанное неравенство выполняется для всех значений n или, что то же, для всех частот спектра в диапазоне от $\omega = 0$ до $\omega = \pi/T$, то ошибка при определении кепстра незначительна. Степень сложности выполнения этого требования при заданном сигнале $s(t)$ зависит от формы энергетического спектра помехи.

Наиболее сложная ситуация возникает при помехе в виде белого шума. В этом случае величина

$$W_x(\omega)/T = W_{x0}/T = \sigma_x^2$$

есть не что иное, как средняя мощность белого шума в полосе частот $1/T$, так что отношение (16.37) принимает вид

$$\eta(\omega) = S_T^2(\omega)/N\sigma_x^2. \qquad (16.38)$$

С повышением ω функция $S_T^2(\omega)$, а следовательно, и $\eta(\omega)$ быстро убывают.

Проиллюстрируем это на примере сигнала $s_1(t)$ из предыдущего параграфа, когда под помехой подразумевается шум квантования в АЦП.

Составим отношение, аналогичное (16.38), при замене $S_T^2(\omega)$ на $|\widehat{S}_1(e^{i\omega T})|^2$. Основываясь на (16.31′), получаем

$$\eta(\omega) = \frac{(ATe^{-bT})^2}{(1 - 2e^{-bT}\cos\omega T + e^{-2bT})^2}\,\frac{1}{N\sigma_x^2}.$$

Целесообразно выразить $\eta(\omega)$ через отношение полных энергий сигнала и помехи на входе логарифмической нелинейности:

$$\mathcal{Э}_s = \int_0^\infty s_1^2(t)\,dt = A\int_0^\infty t^2 e^{-2bt}\,dt = \frac{A^2}{4b^3},\quad \mathcal{Э}_x = \sigma_x^2 \tau_и = \sigma_x^2 NT,$$

$$\frac{\mathcal{Э}_s}{\mathcal{Э}_x} = \frac{A^2}{4b^3}\,\frac{1}{\sigma_x^2 NT} = \frac{(AT)^2}{4(bT)^3 N\sigma_x^2},\quad \eta(\omega) = \frac{4(bT)^3 e^{-2bT}}{(1-2e^{-bT}\cos\omega T + e^{-2bT})^2}\,\frac{\mathcal{Э}_s}{\mathcal{Э}_x}.$$

Потребуем, чтобы в точке $\omega T = \pi$, в которой спектральная плотность минимальна, выполнялось условие $\eta(\omega) = 10$. При $bT = 0{,}05$ это условие приводит к равенству

$$10 = \frac{4\cdot(0{,}05)^3\,0{,}9}{(1+0{,}95)^4}\,\frac{\mathcal{Э}_s}{\mathcal{Э}_x}$$

или

$$\mathcal{Э}_s/\mathcal{Э}_x \approx 3{,}1\cdot 10^5 \to 55 \text{ дБ}.$$

Реализация устройства кепстральной обработки при столь жестком требовании к $\mathcal{Э}_s/\mathcal{Э}_x$ является сложной проблемой. Для ее упрощения целесообразно, как ранее уже отмечалось, применять сигналы со спектром, убывающим медленнее, чем в рассмотренном примере. Но при этом следует помнить, что при неизменном шаге дискретизации T снижение скорости убывания спектра приводит к ошибкам измерения из-за перекрытия спектров на участке вблизи точки $\omega T = \pi$.

Для ослабления влияния шумов на результат обработки функцию $\ln|S(n)|^2$ перед ОБПФ (см. рис. 16.11) обрабатывают спектральным «окном», выделяя те составляющие, где $\eta(\omega) > 1$. При этом разрешающая способность в кепстральной области определяется функцией «окна».

Известны и иные способы повышения разрешающей способности, при которых вместо ОБПФ используются современные методы спектрального анализа (спектрального оценивания), такие как авторегрессионные методы, метод максимальной энтропии и др. [1].

Сущность этих методов заключается в определенной экстраполяции измеренного процесса вместо того, чтобы полагать процесс равным нулю за пределами спектрального окна.

На основе исходного дискретного сигнала (в рассматриваемом случае $\ln|S(n)|^2$) строится адаптивный фильтр, согласованный с сигналом, причем степень согласования зависит от априорной информации о сигнале.

16.9. КОМПЛЕКСНЫЙ КЕПСТР

В задачах, требующих не только определения задержки и относительного уровня отраженного сигнала, но и выявления формы сигналов, необходимо учитывать их фазовые характеристики. Поэтому при определении кепстра следует исходить из комплексной спектральной плотности сигнала, а не только из ее модуля [как в выражениях (16.20)—(16.28)].

[1] См.: 1) Аввакумов С. Ю., Александров А. И., Метелкин В. Н., Финкельштейн М. И. Кепстральная обработка сигналов в задачах подповерхностной радиолокации. — Радиотехника и электроника, 1984, т. 24, № 11,; 2) ТИИЭР. Тематический выпуск «Спектральное оценнвание», 1982, т. 70, № 9.

Комплексный кепстр континуального сигнала $s(t)$ определяется выражением

$$\mathbf{C}_s(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \mathbf{S}(\omega)\, e^{i\omega q}\, d\omega, \tag{16.39}$$

а дискретного сигнала $s(m)$ — выражением

$$\mathbf{C}_s(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \ln \widehat{\mathbf{S}}(z)\, z^{m-1}\, dz \tag{16.40}$$

или эквивалентным ему выражением

$$\mathbf{C}_s(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \widehat{\mathbf{S}}(e^{i\omega T})\, e^{i\omega m T}\, d(\omega T). \tag{16.41}$$

Преобразования сигнала $s(t)$, приводящие к $\mathbf{C}_s(q)$, представлены на рис. 16.7, *а*; аналогичные преобразования дискретного сигнала $s(m)$ представлены на рис. 16.7, *б*.

Отмеченное в § 16.5 требование сходимости интеграла в выражении (16.9) относится также и к определению комплексного кепстра. Главной же особенностью комплексного кепстра является его зависимость от неоднозначного аргумента комплексного логарифма, так как $e^{i\theta_s(\omega)} = e^{i\theta_s(\omega)+ik2\pi}$, где k — любое целое число.

Этот вопрос рассматривается в § 16.10. Можно, однако, привести большое число сигналов, для которых указанные затруднения не существуют. Это особенно относится к дискретным последовательностям, а также к сигналам, выраженным через дельта-функцию.

Например, для основного испытательного сигнала $s(t) = \delta(t)$ очевидны следующие равенства:

$$\mathbf{S}(\omega) = 1,\ \ln \mathbf{S}(\omega) = 0,\ \mathbf{C}_s(q) = 0. \tag{16.42}$$

Таким образом, кепстр $\mathbf{C}_s(q)$ дельта-функции $\delta(t)$ равен нулю. В данном случае кепстральное преобразование полностью подавляет дельта-функцию.

Кепстр той же функции, взятой с весом a, т. е. при $s(t) = a\delta(t)$, $a > 0$,

$$\mathbf{S}(\omega) = a,\ \ln \mathbf{S}(\omega) = \ln a$$

и

$$\mathbf{C}_s(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln a\, e^{i\omega q}\, d\omega = \ln a \delta(q). \tag{16.43}$$

При $a < 1$ весовой коэффициент $\ln a$ отрицателен, при $a > 1$ — положителен.

Пусть сигнал $s(t)$ задан в виде последовательности

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \delta(t - nt_0),\ t_0 > 0.$$

Тогда

$$\mathbf{S}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, e^{-in\omega t_0},$$

а с учетом соотношения $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! = e^x$

$$\mathbf{S}(\omega) = \exp\left(e^{-i\omega t_0}\right),\ \ln \mathbf{S}(\omega) = e^{-i\omega t_0},$$

$$C_s(q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t_0} e^{i\omega q}\, d\omega = \delta(q - t_0). \qquad (16.44)$$

Кепстр рассматриваемого сигнала $s(t)$ содержит всего лишь один импульс $\delta(q - t_0)$, задержанный (на оси q) на время t_0.

Приведем еще пример континуального сигнала вида

$$s(t) = 1/\pi t, \quad -\infty < t < \infty,$$

для которого спектральная плотность

$$\mathbf{S}(\omega) = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t}{t}\, dt - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t}\, dt\right] = -i \text{ при } \omega > 0, \\ = +i \text{ при } \omega < 0$$

(см. § 3.9, с. 93).

Учитывая, что $\mp i = e^{\mp i\pi/2}$ и $\ln(e^{\mp i\pi/2}) = \mp i\pi/2$, получаем

$$\ln \mathbf{S}(\omega) = \begin{cases} -i\pi/2 & \text{при } \omega > 0, \\ +i\pi/2 & \text{при } \omega < 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\ln \mathbf{S}(\omega)$ отличается от $\mathbf{S}(\omega)$ только коэффициентом $\pi/2$ из чего следует, что кепстр рассматриваемого сигнала $s(t) = 1/\pi t$

$$C_s(q) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\pi q} = \frac{1}{2q}.$$

В данном примере кепстральное преобразование не изменяет формы функции.

Приведем еще пример сигнала вида

$$s(t) = a/\pi(a^2 + t^2),$$

для которого спектральная плотность $\mathbf{S}(\omega) = e^{-a|\omega|}$ и $\ln \mathbf{S}(\omega) = -a|\omega|$.

Запишем это выражение в следующей эквивалентной форме:

$$\ln \mathbf{S}(\omega) = \begin{cases} -a(-i)(i\omega) & \text{при } \omega > 0, \\ -a(+i)(i\omega) & \text{при } \omega < 0. \end{cases}$$

От предыдущего примера $\ln S(\omega)$ отличается множителем $i\omega$, соответствующим операции дифференцирования, а также заменой $\pi/2$ на a; следовательно, обратное преобразование Фурье, определяющее кепстр, дает

$$C_s(q) = -a\,\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\pi q}\right) = \frac{a}{\pi q^2}.$$

16.10. СВОЙСТВА КОМПЛЕКСНОГО КЕПСТРА

Одной из основных операций при определении кепстра является логарифмирование спектральной плотности входного сигнала. Рассмотрим этот вопрос сначала с позиции континуального сигнала $s(t)$, спектральная плотность которого $\mathbf{S}(\omega) = S(\omega)\, e^{i\theta_s(\omega)}$.

Логарифм этой функции следует записывать в общей форме

$$\ln \mathbf{S}(\omega) = \ln S(\omega) + i\theta_s(\omega) = \ln S(\omega) + i[\theta_{s\,гл}(\omega) + k2\pi]. \qquad (16.45$$

Предполагается, что ФЧХ спектра $\theta_s(\omega)$ — непрерывная антисимметричная функция ω, а $\theta_{s\,гл}(\omega)$ — главное значение аргумента, определяемое «по модулю 2π», т. е. с отбрасыванием целого числа 2π, так что $|\theta_{s\,гл}| \leqslant \pi$.

Неоднозначность можно устранить, основываясь на непрерывности функции $\theta_s(\omega)$ и задании ее значения на какой-либо фиксированной частоте.

Из-за нечетности функции $\theta_s(\omega)$ целесообразно положить $\theta_s(0) = 0$

Продифференцируем $\ln \mathbf{S}(\omega)$ по частоте:

$$\frac{d}{d\omega} \ln \mathbf{S}(\omega) = \frac{1}{\mathbf{S}(\omega)}\,\frac{d\mathbf{S}(\omega)}{d\omega}. \qquad (16.46)$$

Тогда функцию $\ln \mathbf{S}(\omega)$ можно определить с помощью интеграла

$$\ln \mathbf{S}(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{1}{\mathbf{S}(\omega)} \frac{d\mathbf{S}(\omega)}{d\omega}\, d\omega, \tag{16.47}$$

имея в виду, что при $\theta_s(0)=0$ и нормировке $S(0)=1$ $\ln S(0)=0$.

Определенная таким образом функция $\ln \mathbf{S}(\omega)$ является однозначной.

Используем аналогичный способ устранения неоднозначности комплексного логарифма для дискретного сигнала.

Логарифмическая производная по аналогии с (16.46)

$$\frac{d}{dz} \ln \widehat{\mathbf{S}}(z) = \frac{1}{\widehat{\mathbf{S}}(z)} \frac{d\widehat{\mathbf{S}}(z)}{dz}$$

или

$$\mathbf{Y}'(z) = \widehat{\mathbf{S}}'(z)/\widehat{\mathbf{S}}(z), \tag{16.48}$$

где штрих обозначает производную по z, а $\mathbf{Y}(z) = \ln \widehat{\mathbf{S}}(z)$ рассматривается как z-преобразование, которое можно записать в виде ряда

$$\mathbf{Y}(z) = \ln \widehat{\mathbf{S}}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)\, z^{-m}. \tag{16.49}$$

Заметим, что применив к (16.49) обратное z-преобразование, получим $y(m)$, которое есть не что иное, как искомый кепстр (комплексный). Однако предварительно необходимо устранить неоднозначность комплексного логарифма $\ln \widehat{\mathbf{S}}(z)$. С этой целью продифференцируем (16.49):

$$\mathbf{Y}'(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-m)\, y(m)\, z^{-m-1} = \mathbf{S}'(z)/\widehat{\mathbf{S}}(z)$$

и умножим $\mathbf{Y}'(z)$ на z:

$$z\mathbf{Y}'(z) = \sum_{m=-\infty}^{m} [-my(m)]\, z^{-m} = z\widehat{\mathbf{S}}'(z)/\widehat{\mathbf{S}}(z).$$

Входящий в это выражение ряд по отрицательным степеням z представляет собой z-преобразование последовательности $\{-my(m)\}$, поэтому с помощью (16.40) получаем

$$-my(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C [z\widehat{\mathbf{S}}'(z)/\widehat{\mathbf{S}}(z)]\, z^{m-1}\, dz,$$

$$y(m) = -\frac{1}{2\pi i m} \oint_C [\widehat{\mathbf{S}}'(z)/\widehat{\mathbf{S}}(z)]\, z^m\, dz. \tag{16.50}$$

Найденное таким образом значение $y(m)$ можно обозначать символом $\mathbf{C}_s$, аналогичным обозначению кепстра мощности C_s.

Приведенные рассуждения справедливы при условии, что окружность единичного радиуса на z-плоскости входит в область сходимости функции $\ln \widehat{\mathbf{S}}(z)$. Заменив контур интегрирования C на $|z| = 1$, перепишем (16.50) в форме

$$y(m) = -\frac{1}{2\pi m}\int_{-\pi}^{\pi}[\widehat{S}'(e^{i\omega T})/\widehat{S}(e^{i\omega T})]e^{i\omega T(m+1)}d(\omega T) = C_s(m),\ m \geqslant 1. \quad (16.51)$$

Итак, комплексный кепстр найден без обращения к логарифму и, следовательно, однозначно.

При $m=0$ значение кепстра можно определить непосредственно из второй части выражений (16.41):

$$C_s(0) = y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\widehat{S}(e^{i\omega T})d(\omega T) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\ln|\widehat{S}(e^{i\omega T})| + i\arg\widehat{S}(e^{i\omega T})]d(\omega T).$$

Поскольку $\arg\widehat{S}(e^{i\omega T})$ является нечетной функцией частоты, получаем:

$$C_s(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|\widehat{S}(e^{i\omega T})|d(\omega T). \quad (16.51')$$

Наряду с описанным методом, основанным на логарифмической производной, широко распространен метод прямого вычисления комплексного логарифма с помощью БПФ. При этом используются соотношения

$$y(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\ln\widehat{S}(n)\,e^{i(2\pi/N)nm} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\{\ln S(\omega) +$$

$$+ i[\theta_{s\,гл}(\omega) + k\cdot 2\pi]\}\,e^{i(2\pi/N)nm},\ m = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Главное значение аргумента $\theta_{s\,гл}(\omega)$ вычисляется на ЭВМ непосредственно с помощью стандартной программы. Это главное значение фазы затем «разворачивается» так, чтобы получились отсчеты из непрерывной ФЧХ спектра сигнала. Непрерывная ФЧХ $\theta_s(\omega)$ и отсчеты $\theta_s(n\Delta\omega)$ показаны на рис. 16.17, *а*, а главное значение $\theta_{s\,гл}(\omega)$ — на рис. 16.17, *б*.

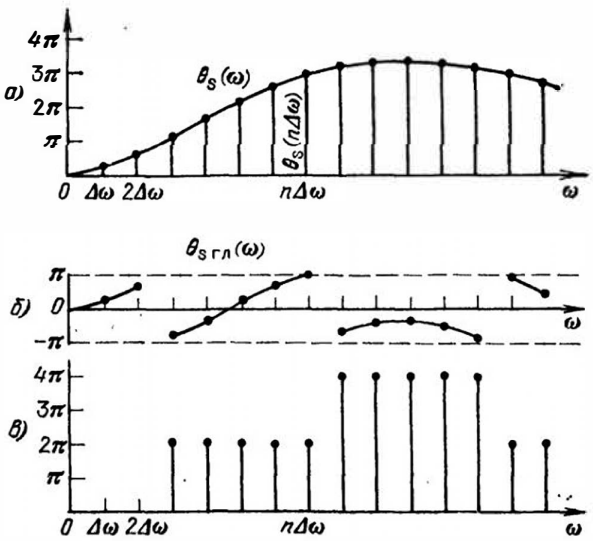


Рис. 16.17. Устранение неоднозначности фазы $\theta_s(\omega)$:
а) непрерывная ФЧХ $\theta_s(\omega)$; *б*) главная часть фазы; *в*) корректирующая последовательность

В пределах одного интервала $\Delta\omega$ набег фазы значительно меньше π. На частотах $\omega = n\Delta\omega$, где скачок $\theta_s(\omega)$ превышает $+\pi$, для восстановления истинного аргумента требуется добавить -2π; соответственно при скачке $-\pi$ требуется добавить $+2\pi$. На рис. 16.17, *в* изображена корректирующая последовательность, добавляемая к последовательности $\theta_{s\,гл}(n)$.

В заключение рассмотрим важный для практики случай входной последовательности $\{s(m)\}$, $m \geqslant 0$, когда z-преобразование (одностороннее) определяется выражением

$$\widehat{S}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} s(m)\, z^{-m}, \tag{16.52}$$

причем полюсы и нули функции $\widehat{S}(z)$ расположены внутри единичной окружности, т. е. радиус сходимости ряда (16.52) $r_0 < 1$.

Подобные последовательности называются минимально-фазовыми, по аналогии с системами, передаточная функция которых $\widehat{K}(z)$ имеет особые точки (полюсы и нули) внутри круга $|z| = 1$ (см. § 15.9).

Таким образом, модуль и аргумент z-преобразования минимально-фазовой последовательности однозначно связаны, а комплексный логарифм

$$\ln \widehat{S}(e^{i\omega T}) = \ln |\widehat{S}(e^{i\omega T})| + i\theta_s(\omega)$$

обладает тем свойством, что его действительная и мнимая части образуют пару преобразований Гильберта. В этом случае комплексный кепстр можно вычислять по формуле

$$C_s(m) = y(m) = 2 \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |\widehat{S}(e^{i\omega T})| \cos(m\omega T)\, d(\omega T),$$

которая отличается от (16.20′) только степенью $|\widehat{S}(e^{i\omega t})|$ в аргументе логарифма.

Из последнего выражения видно, что комплексный кепстр минимально-фазового сигнала $s(m)$ равен кепстру мощности $C_s(m)$ того же сигнала, и для его получения можно воспользоваться схемой, представленной на рис. 16.11.

Простейшим примером минимально-фазового сигнала является $s(t) = e^{-\alpha t}$, $t \geqslant 0$, с z-преобразованием $\widehat{S}(e^{i\omega t}) = 1/(1 - e^{-\alpha t} \cdot e^{i\omega T})$, имеющим нуль $z_0 = 0$ и полюс $z_п = e^{-\alpha t} < 1$ [см. (12.22)].

Сигнал $s(t) = At e^{-bt}$, рассмотренный в § 16.7, является другим примером минимально-фазового сигнала.

16.11. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КЕПСТРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

По аналогии с теоремами о спектрах, изложенными в § 2.8, рассмотрим связь между некоторыми преобразованиями исходного сигнала $s(t)$ и преобразованиями кепстра.

Установление этих связей представляет интерес в основном применительно к комплексным кепстрам.

1. СДВИГ СИГНАЛА ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Пусть исходному сигналу $s_1(t)$ со спектральной плотностью $S_1(\omega)$ соответствует кепстр $C_{s1}(q)$. При задержке сигнала на t_0 получим функцию времени $s_2(t) = s_1(t - t_0)$ со спектральной плотностью $S_2(\omega) = e^{-i\omega t_0} S_1(\omega)$, логарифм которой

$$\ln S_2(\omega) = -i\omega t_0 + \ln S_1(\omega).$$

Второму слагаемому соответствует кепстр $C_1(q)$ исходного сигнала $s_1(t)$, а первое слагаемое в соответствии с (16.39) приводит к следующему кепстру:

$$C_{t0}(q) = -t_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega\, e^{i\omega q}\, d\omega. \tag{16.53}$$

Учитывая, что функции $\delta(q)$ соответствует спектральная плотность, равная единице, множитель $i\omega$ можно рассматривать как спектральную плотность функции $\frac{d}{dq}\delta(q)$. Тогда (16.53) определяет функцию $\frac{d}{dq}\delta(q)$, и, следовательно,

$$C_{t0}(q) = -t_0 \frac{d}{dq}\delta(q). \tag{16.54}$$

Таким образом, кепстр сигнала $s_2(t) = s_1(t - t_0)$

$$C_{s2}(q) = -t_0 \frac{d}{dq}\delta(q) + C_{\varepsilon 1}(q). \tag{16.55}$$

Из сопоставления (16.55) и (16.54) вытекает, что кепстр смещенной дельта-функции $\delta(t - t_0)$ равен $-t_0 \frac{d}{dq}\delta(q)$. Оперирование производной дельта-функции затруднительно, однако при обработке сигнала можно исключить участок кепстрального времени в окрестности точки $q = 0$.

Рассмотрим соотношение между $C_{s2}(m)$ и $C_{s1}(m)$ для цифрового сигнала $s_2(m) = s_1(m - m_0)$.

Основываясь на методе z-преобразования, получаем

$$\widehat{S}_2(e^{i\omega T}) = e^{-im_0\omega T}\widehat{S}_1(e^{i\omega T}), \quad \ln\widehat{S}_2(e^{i\omega T}) = -im_0\omega T + \ln\widehat{S}_1(e^{i\omega T}).$$

Применяя к этому выражению обратное z-преобразование по формуле (12.28), получаем

$$C_{s2}(m) = -im_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega T\, e^{im\omega T}\, d(\omega T) + C_{s1}(m),$$

где $C_{s1}(m)$ — кепстр сигнала $s_1(m)$, а

$$C_{t0}(m) = -im_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, e^{imx}\, dx.$$

При $m = 0$ интеграл обращается в нуль, так что

$C_{t0}(0) = 0$.

При $m \neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\, e^{imx}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} x\cos(mx)\, dx + i\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(mx)\, dx =$$

$$= 2i\,\frac{\sin(m\pi) - m\pi\cos(m\pi)}{m^2} = -\frac{2i}{m}\pi\cos(m\pi)$$

и

$$C_{t0}(m) = -\frac{im_0}{2\pi}\left[-2i\,\frac{\pi}{m}\cos(m\pi)\right] = \frac{m_0}{m}(-1)^{m-1}.$$

Таким образом, при $m \neq 0$

$$C_{s2}(m) = \frac{m_0}{m}(-1)^{m-1} + C_{s1}(m).$$

Как видим, в случае цифрового сигнала кепстр $C_{s2}(m)$ задержанного сигнала отличается от $C_{s1}(m)$ лишь знакопеременным сигналом $\frac{m_0}{m}(-1)^{m-1}$, убывающим с возрастанием m; в точке $m = 0$ $C_{t0}(0) = 0$ и дельта-функция не возникает.

2. ИЗМЕНЕНИЕ МАСШТАБА ВРЕМЕНИ

Пусть $s_2(t) = s_1(nt)$, $n > 0$.
В соответствии с § 2.8, п. 2

$$\mathbf{S}_2(\omega) = \frac{1}{n}\,\mathbf{S}_1(\omega/n) \text{ и } \ln \mathbf{S}_2(\omega) = -\ln(n) + \ln \mathbf{S}_1(\omega/n).$$

Кепстр сигнала $s_2(t)$

$$\mathbf{C}_{s2}(q) = -\ln(n)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega q}\,d\omega +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln \mathbf{S}_1(\omega/n)\, e^{i\omega q}\,d\omega = -\ln(n)\,\delta(q) + n\,\mathbf{C}_{s1}(nq).$$

Изменение масштаба времени t приводит к такому же изменению масштаба кепстрального времени q; кроме того, возникает функция $\delta(q)$.

При дискретизованном сигнале изменение масштаба времени означает изменение шага T при *неизменном числе отсчетов* N (что необходимо для сохранения формы сигнала).

Положим $T_2 = nT_1$, $n > 0$, и запишем выражение (12.20) для z-преобразования сигнала $s_2(t)$

$$\widehat{\mathbf{S}}_2(e^{i\omega T}) = \sum_{m=0}^{N-1} s_2(m)\, e^{-i\omega T_2} = \sum_{m=0}^{N-1} s_2(m)\, e^{-i\omega n T_1}.$$

При сжатии или растяжении исходного сигнала отсчеты функции $s_1(t)$ сохраняют свое значение (при $N = \text{const}$).

Таким образом,

$$\widehat{\mathbf{S}}_2(e^{i\omega T_2}) = \sum_{m=0}^{N-1} s_1(m)\, e^{-i(\omega n)T_1} = \widehat{\mathbf{S}}_1(e^{i\omega n T_1})$$

и кепстр

$$\mathbf{C}_{s2}(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln \widehat{\mathbf{S}}_1(e^{in\omega T_1}) \cos(mn\omega T_1)\,d(n\omega T_1).$$

Переход от шага дискретизации T_1 к $T_2 = nT_1$ не изменяет структуры кепстра. Изменяется лишь диапазон частот ω, соответствующий одному обходу окружности единичного радиуса на z-плоскости (от $-\pi/T_1$, π/T_1 до $-\pi/nT_1$, π/nT_1). Соответственно изменяется и масштаб кепстрального времени; интервалы между отсчетами кепстра на оси q будут $T_2 = nT_1$.

3. СМЕЩЕНИЕ СПЕКТРА СИГНАЛА

Применим преобразование Фурье к произведению

$$a(t) = s(t)\, e^{i\omega_0 t},$$

где $s(t)$ — «медленная» (модулирующая) функция со спектральной плотностью $\mathbf{S}(\omega)$; $e^{i\omega_0 t}$ — несущее колебание.

Повторяя рассуждения, приведенные в § 2.7, п. 3, придем к спектру

$$\mathbf{S}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t}\,dt = \mathbf{S}(\omega - \omega_0).$$

Тогда

$$\ln \mathbf{S}_a(\omega) = \ln \mathbf{S}(\omega - \omega_0)$$

и кепстр сигнала $a(t)$

$$\mathbf{C}_a(q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln \mathbf{S}(\omega - \omega_0)\, e^{i\omega q}\,d\omega.$$

Перейдя к новой переменной $\Omega = \omega - \omega_0$, получим

$$\mathbf{C}_a(q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln \mathbf{S}(\Omega)\, e^{i\Omega q}\, d\Omega\, e^{i\omega_0 q} = \mathbf{C}_s(q)\, e^{i\omega_0 q},$$

где $\mathbf{C}_s(q)$ — кепстр исходного сигнала $s(t)$.

Итак, для определения кепстра $\mathbf{C}_a(q)$ модулированного колебания $a(t)$ достаточно умножить кепстр $\mathbf{C}_s(q)$ модулирующей функции на $e^{i\omega_0 q}$. В этом смысле эффект модуляции — домножение сигнала на несущее колебание проявляется одинаково для $a(t)$ и $\mathbf{C}_a(q)$.

4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИГНАЛА

Сигналу $s(t) = \dfrac{ds_1(t)}{dt}$ соответствует спектральная плотность $\mathbf{S}(\omega) = i\omega \mathbf{S}_1(\omega)$ и логарифм

$$\ln \mathbf{S}(\omega) = \ln(i\omega) + \ln \mathbf{S}_1(\omega).$$

Поэтому

$$\mathbf{C}_s(q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln(i\omega)\, e^{i\omega q}\, dq + \mathbf{C}_{s1}(q) = \mathbf{C}_{\text{диф}}(q) + \mathbf{C}_{s1}(q).$$

При дифференцировании сигнала $s_1(t)$ к кепстру $\mathbf{C}_{s1}(q)$ добавляется кепстр $\mathbf{C}_{\text{диф}}(q)$, который запишем в форме

$$\mathbf{C}_{\text{диф}}(q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\omega \left[\frac{\ln(i\omega)}{i\omega}\right] e^{i\omega q}\, dq.$$

Спектральной плотности $(\ln i\omega)/i\omega$ соответствует оригинал[1] $-(\gamma + \ln q) \times u(q)$, где $\gamma = 0{,}577\ldots$ — постоянная Эйлера; $u(q)$ — единичный скачок в момент $q = 0$, а произведению $i\omega\left[\dfrac{\ln(i\omega)}{i\omega}\right]$ соответствует производная

$$-\frac{d}{dq}[(\gamma + \ln q)\, u(q)] = -\left[(\gamma + \ln q)\, \delta(q) + \frac{1}{q}\, u(q)\right] = \mathbf{C}_{\text{диф}}(q).$$

Таким образом, окончательно

$$\mathbf{C}_s(q) = -\left[(\gamma + \ln q)\, \delta(q) + \frac{1}{q}\, u(q)\right] + \mathbf{C}_{s1}(q).$$

При интегрировании сигнала получается аналогичный результат, изменяется лишь знак перед $\mathbf{C}_{\text{диф}}(q)$.

Отметим, что дополнительный кепстр, обусловленный дифференцированием или интегрированием, не зависит от исходного сигнала.

5. СЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ

По заданным сигналам $s_1(t)$, $s_2(t)$ и их кепстрам $\mathbf{C}_{s1}(q)$, $\mathbf{C}_{s2}(q)$ невозможно составить общее выражение для кепстра суммы $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$. Необходимо предварительно вычислить результирующую спектральную плотность $\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{S}_1(\omega) + \mathbf{S}_2(\omega)$. Исключением является случай, когда $s_1(t)$ и $s_2(t)$ полностью совпадают по форме и отличаются лишь по величине и по положению во времени, благодаря чему их сумма $s(t)$ может быть представлена в виде свертки. Этот случай был рассмотрен в § 16.6.

6. ПРОИЗВЕДЕНИЕ СИГНАЛОВ

Для нахождения кепстра сигнала $s(t) = s_1(t) \cdot s_2(t)$ требуется знание свертки их спектров $\mathbf{S}_1(\omega)$ и $\mathbf{S}_2(\omega)$, поэтому установить прямую связь между $\mathbf{C}_{s1}(q)$, $\mathbf{C}_{s2}(q)$ и кепстром $\mathbf{C}_s(q)$ не представляется возможным.

---

[1] См., например: Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и Н. Стигана. — М.: Наука, 1979.

Приложение 1

ПРАВИЛА ПЕРЕХОДА ОТ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО ЛАПЛАСУ $L_s(p)$ К СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ $\mathbf{S}(\omega)$

Пусть заданному сигналу $s(t)$ соответствует изображение по Лапласу $L_s(p)$, которое не имеет особенностей в правой p-полуплоскости, но имеет единственный полюс в точке $p_1 = i\omega$ на линии $i\omega$. На основании теоремы Коши можно показать справедливость равенства

$$s(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L_s(p)\, e^{pt}\, dp = \frac{1}{2}\operatorname{res}_{p_1} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} L_s(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d(i\omega),\ c > 0. \tag{П1.1}$$

Смысл этого равенства в том, что контур интегрирования совмещается с линией $i\omega$ и обходом справа особой точки по полуокружности бесконечно малого радиуса r. При обходе особой точки по замкнутому кругу интеграл равен вычету res_{p_1}, а при обходе полуокружности $(r \to 0)$ получается $\frac{1}{2}\operatorname{res}_{p_1}$.

Проиллюстрируем применение выражения (П1.1) на примерах простейших сигналов, изображения $L_s(p)$ которых имеют полюсы на оси $i\omega$.

1. $s(t) = 1,\ t \geqslant 0;\quad L_s(p) = 1/p.$

Полюс $p_1 = 0,\ \operatorname{res}_{p_1=0} = 1;$

$$s(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L_s(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{П1.2}$$

Спектральная плотность первого слагаемого в правой части (П1.2) равна $\pi\delta(\omega)$ [см. (2.97)], а второе слагаемое является результатом интегрирования сплошного спектра соответствующей сигнум-функции [см. (2.99)]. Таким образом, замена в $L_s(p)$ переменной p на $i\omega$ в итоге приводит к выражению для спектральной плотности единичного скачка

$$\mathbf{S}(\omega) = \pi\delta(\omega) + 1/i\omega,$$

совпадающему с (2.100).

2. $s(t) = \cos\omega_0 t,\ t \geqslant 0;\quad L_s(p) = p/(\omega_0^2 + p^2).$

Полюсы $p_{1,2} = \pm i\omega_0,$

$$\operatorname{res}_{p_1} = \left.\frac{pe^{pt}}{2p}\right|_{p=+i\omega_0} = \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t},$$

$$\operatorname{res}_{p_2} = \left.\frac{pe^{pt}}{2p}\right|_{p=-i\omega_0} = \frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t}.$$

Спектральная плотность

$$\mathbf{S}(\omega) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] + i\omega/(\omega_0^2 - \omega^2).$$

3. $s(t) = \sin\omega_0 t,\ t \geqslant 0;\quad L_s(p) = \omega_0/(\omega_0^2 + p^2).$

Полюсы $p_{1,2} = \pm i\omega_0$,

$$\text{res}_{p_1} = \frac{\omega_0}{2\omega_0} e^{i\omega_0 t} = \frac{1}{2} e^{i\omega_0 t}, \quad \text{res}_{p_2} = -\frac{1}{2} e^{-i\omega_0 t}.$$

$$S(\omega) = -i\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)] + \omega_0/(\omega_0^2 - \omega^2).$$

Из приведенных примеров видно, что к спектральной плотности, получаемой подстановкой $p = i\omega$ в изображение по Лапласу, нужно добавить дельта-функции, обусловленные полюсами функции $L_s(p)$ на оси $i\omega$.

Приложение 2
ПРАВИЛО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ПРИ ИНТЕГРИРОВАНИИ СИГНАЛА

Пусть исходному сигналу $s(t)$ соответствует изображение по Лапласу $L_s(p)$, *не имеющее полюсов в правой p-полуплоскости и на оси iω. В результате интегрирования* получится сигнал $s_{\text{инт}}(t)$ с изображением $L_s(p)/p$, так что

$$s_{\text{инт}}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{L_s(p)}{p} e^{pt}\, dp, \quad t > 0. \tag{П2.1}$$

По аналогии с (П1.1) перейдем к выражению

$$s_{\text{инт}}(t) = \frac{1}{2}\text{res}_{p=0} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{L_s(i\omega)}{i\omega} e^{i\omega t}\, d(i\omega) =$$

$$= \frac{1}{2}\text{res}_{p=0} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_s(i\omega)}{i\omega} e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{П2.2}$$

Вычет функции $L_s(p)\, e^{pt}/p$ в полюсе $p = 0$

$$\text{res}_{p=0} = L_s(0) = S(0), \tag{П2.3}$$

где $S(0)$ — спектральная плотность исходного сигнала $s(t)$ на частоте $\omega = 0$.

Напомним, что $S(0)$ равно площади сигнала, так что, если выполняется условие $\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, dt \to = 0$, то $\text{res}_{p=0}$ обращается в нуль и подынтегральная функция $L_s(i\omega)/i\omega = S(\omega)/i\omega$ полностью определяет спектральную плотность функции $s_{\text{инт}}(t)$. Если же условие $S(0) = 0$ не выполняется, то $S(i\omega)/i\omega$ определяет только сплошную часть спектра[1] функции $s_{\text{инт}}(t)$. Слагаемому же $\frac{1}{2}\text{res}_{p=0}$ соответствует спектральная плотность

$$\frac{1}{2}\text{res}_{p=0} \cdot 2\pi\delta(\omega) = \pi S(0)\,\delta(\omega).$$

Итак, в общем случае

$$S_{\text{инт}}(\omega) = \pi S(0)\,\delta(\omega) + S(\omega)/i\omega. \tag{П2.4}$$

Проиллюстрируем это выражение примерами.

1. $s(t) = \delta(t)$; $S(\omega) = S(0) = 1$;

$s_{\text{инт}}(t) = 1$, $t \geqslant 1$

— *единичный скачок*:

По формуле (П2.4)

$$S_{\text{инт}}(\omega) = \pi\delta(\omega) + 1/i\omega.$$

[1] См.: Тронин Ю. В. Утеряна дельта-функция! — Радиотехника и электроника, 1986, № 2.

2. $s(t)=\alpha e^{-\alpha t},\ t\geqslant 0;\ \mathbf{S}(\omega)=\dfrac{\alpha}{\alpha+i\omega},\ S(0)=1;$

$s_{\text{инт}}(t)=(1-e^{-\alpha t}),\ t\geqslant 0;$

$\mathbf{S}_{\text{инт}}(\omega)=\pi\delta(\omega)-(1/\alpha)\Big/\left[\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)^2-i\dfrac{\omega}{\alpha}\right].$

3. $s(t)=\begin{cases}1/\tau_{\text{и}}, & |t|\leqslant\tau_{\text{и}}/2,\\ 0, & |t|\geqslant\tau_{\text{и}}/2\end{cases}$

— прямоугольный импульс длительностью $\tau_{\text{и}}$ и амплитудой $1/\tau_{\text{и}}$;

$\mathbf{S}(\omega)=\operatorname{sinc}(\omega\tau_{\text{и}}/2),\ S(0)=1;$

$s_{\text{инт}}(t)=\begin{cases}0, & t<-\tau_{\text{и}}/2,\\ 1/2+t/\tau_{\text{и}}, & |t|\leqslant\tau_{\text{и}}/2,\\ 1, & t>\tau_{\text{и}}/2.\end{cases}$

К концу импульса $s_{\text{инт}}(t)$ достигает максимального значения, равного 1, которое остается постоянным;

$\mathbf{S}_{\text{инт}}(\omega)=\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{i\omega}\operatorname{sinc}(\omega\tau_{\text{и}}/2).$

4. $s(t)=\operatorname{sinc}(\pi t/\tau_{\text{и}});$

$\mathbf{S}(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\pi/\tau_{\text{и}},\\ 0, & |\omega|>\pi/\tau_{\text{и}}),\end{cases}\ S(0)=1;$

$s_{\text{инт}}(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\operatorname{Si}(\pi t/\tau_{\text{и}});$

$\mathbf{S}_{\text{инт}}(\omega)=\begin{cases}\pi\delta(\omega)+1/i\omega, & |\omega|<\pi/\tau_{\text{и}},\\ 0, & |\omega|>\pi/\tau_{\text{и}}.\end{cases}$

Приложение 3

СОГЛАСОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ УЗКОПОЛОСНОГО СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ

Сигнал на выходе согласованного фильтра совпадает по форме с корреляционной функцией входного сигнала, поэтому в случае укополосного сигнала (13.54) целесообразно совершить переход к аналитическому сигналу, что позволяет воспользоваться соотношением

$$a_{\text{вых}}(t)=C\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[e^{i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{A}(x)\,\mathbf{A}^*(x+t)\,dx\right]. \qquad (\text{П3.1})$$

Это выражение получается из (3.97′) заменой τ на $t-t_0$ (при $t_0=0$), а также переменной интегрирования t на x.

Интеграл в (П3.1) имеет смысл корреляционной функции $B_A(t)$ комплексной огибающей $\mathbf{A}(t)$.

Удобно указанную функцию записать в форме

$$B_A(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{A}(x)\,\mathbf{A}^*(x-t)\,dx,$$

что равносильно изменению знака сдвига t. Тогда (П3.1) переходит в

$$a_{\text{вых}}(t)=C\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[e^{i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{A}(x)\,\mathbf{A}^*(x-t)\,dx\right]=C\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[e^{i\omega_0 t}B_A(t)\right], \qquad (\text{П3.2})$$

совпадающее с (13.55).

Приложение 4

СОГЛАСОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО СИГНАЛА

Обобщим выражение (13.65) с учетом условия физической осуществимости фильтра $t_0 \neq 0$, а также отказа от требования симметричности сигнала $\mathbf{A}(t)$.

Исходный узкополосный сигнал запишем в форме

$$a(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)] = \mathrm{Re}[e^{i\omega_0 t}\,\mathbf{A}(t)],$$

где $\mathbf{A}(t) = A(t)\,e^{i\theta(t)}$ — комплексная огибающая сигнала.

Импульсная характеристика согласованного фильтра в соответствии с (13.15) должна иметь вид:

$$g(t) = Ca(t_0 - t) = CA(t_0 - t)\cos[\omega_0(t_0 - t) + \theta(t_0 - t)] =$$

$$= C\,\mathrm{Re}[e^{i\omega_0 t}\,A(t_0 - t)\,e^{-i\theta(t_0 - t)}\cdot e^{-i\omega_0 t_0}].$$

Учитывая равенство $A(t_0 - t)\,e^{-i[\theta(t_0 - t)]} = \mathbf{A}^*(t_0 - t)$, приходим к следующему выражению для комплексной огибающей импульсной характеристики согласованного фильтра:

$$\mathbf{G}(t) = C\,\mathbf{A}^*(t_0 - t)\,e^{-i\omega_0 t_0}. \qquad (П4.1)$$

Развернув это выражение, получим

$$\mathbf{G}(t) = CA(t_0 - t)\cos[\theta(t_0 - t) - \omega_0 t_0] - iCA(t_0 - t)\sin[\theta(t_0 - t) - \omega_0 t_0] =$$

$$= g_{\mathrm{Re}}(t) - ig_{\mathrm{Im}}(t). \qquad (П4.2)$$

Если $\omega_0 t_0$ кратно числу 2π, то $\omega_0 t_0$ можно опустить в выражении (П4.2). В противном случае влияние $\omega_0 t_0$ на положение пика сжатого сигнала можно учесть так же, как и влияние начальной фазы θ_0, рассмотренное в § 13.8.

При квадратурной обработке комплексный сигнал $\dot{s}(t)$ на входе согласованного фильтра совпадает с $\mathbf{A}(t)$, следовательно, структурная схема фильтра сводится к схемам, представленным на рис. 13.25 и 13.24. В данном случае импульсные характеристики $g_{\mathrm{Re}}(t)$ и $g_{\mathrm{Im}}(t)$ должны определяться из выражений

$$g_{\mathrm{Re}}(t) = CA(t_0 - t)\cos[\theta(t_0 - t) - \omega_0 t_0],$$

$$g_{\mathrm{Im}}(t) = CA(t_0 - t)\sin[\theta(t_0 - t) - \omega_0 t_0].$$

Приложение 5

О НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФАЗОЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ СПЕКТРА СИГНАЛА

Этот вопрос относится к ряду разделов данной книги. При определении коэффициентов $c_n = |c_n|\,e^{i\theta_n}$ ряда Фурье периодического сигнала [формула (2.25)] можно было написать

$$c_n = |c_n|\,e^{i(\theta_n + k2\pi)},\ k\text{—целое число}, \qquad (П5.1)$$

подразумевая под θ_n — «главное значение аргумента» в интервале $-\pi < \theta_n < \pi$.

Наряду с этим при определении θ_n выражением (2.27) можно было написать

$$\theta_n = -\mathrm{arctg}[c_{ns}/c_{nc}] + k\pi, \qquad (П5.2)$$

поскольку главное значение $\mathrm{arctg}\,x$ заключено в пределах $\pm\pi/2$.

Аналогичные вопросы связаны с определением ФЧХ спектральной плотности непериодического сигнала:

$$\mathbf{S}(\omega) = S(\omega)\,e^{i\theta(\omega)} \text{ и } \theta(\omega) = -\mathrm{arctg}[B(\omega)/A(\omega)]$$

[формулы (2.50) и (2.53)].

Неоднозначность определения ФЧХ проявляется при измерении фазы. Известно, что измерение фазы колебания основано на сравнении ее с фазой опорного колебания.

Но «разность фаз» можно однозначно определить только в пределах $\pm$ 180°, хотя истинная разность фаз может при этом достигать сотен и даже тысяч радиан (например, в случае ЛЧМ-сигнала). Поэтому принято выражение «определение фазы по модулю 2π».

Однако такой подход в некоторых задачах неприемлем, например, при определении групповой задержки (запаздывания) сигнала в физических цепях, используемых для формирования сигналов. Известно, что групповая задержка определяется как производная ФЧХ. При этом имеется в виду истинная ФЧХ, без отбрасывания целого числа 2π. В физических цепях задержка сигнала является конечной величиной, из чего следует, что $\theta_s(\omega)$ есть непрерывная функция. На этом свойстве ФЧХ основан метод логарифмической производной спектральной плотности (см. гл. 16, с. 490), позволяющий определить истинную ФЧХ сигнала.

Проиллюстрируем этот метод сначала на простом сигнале $s(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, $t \geqslant 0$, со спектральной плотностью $\mathbf{S}(\omega) = \alpha/(\alpha + i\omega)$. Подобный сигнал будем рассматривать как импульсную характеристику апериодического звена.

Отказываясь от представления спектральной плотности в форме $|\mathbf{S}(\omega)|\, e^{i\theta_s(\omega)}$ с определением $\theta_s(\omega) = -\operatorname{arctg}[B(\omega)/A(\omega)]$, сначала определим $\ln \mathbf{S}(\omega)$ с помощью выражения (16.47)

$$\ln \mathbf{S}(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{1}{\mathbf{S}(\omega)} \frac{d\mathbf{S}(\omega)}{d\omega}\, d\omega,$$

подставив в него

$$\frac{d\mathbf{S}(\omega)}{d\omega} = -\frac{i\alpha}{(\alpha + i\omega)^2}.$$

Тогда

$$\ln \mathbf{S}(\omega) = -i\left[\alpha \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} - i \int_0^{\omega} \frac{\omega d\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\right] =$$

$$= -i \operatorname{arctg} \omega/\alpha - \frac{1}{2}\left[\ln(\alpha^2 + \omega^2) - \ln \alpha^2\right].$$

Поскольку $\ln \mathbf{S}(\omega) = \ln S(\omega) + i \arg \mathbf{S}(\omega)$, то очевидно, что $\arg \mathbf{S}(\omega)$, т. е. ФЧХ спектра

$$\theta_s(\omega) = -\operatorname{arctg} \omega/\alpha. \qquad (\text{П5.3})$$

Этот результат получен обращением непосредственно к комплексной спектральной плотности без выделения ее модуля и аргумента. Приведенный вывод основан на условии непрерывности функции $\theta_s(\omega)$ [что необходимо для дифференцируемости $\mathbf{S}(\omega)$], ее нечетности, а также на задании $\theta_s(\omega)$ на одной из частот (в данном примере на $\omega = 0$). Поэтому определенная выражением (П5.3) функция $\theta_s(\omega)$ является однозначной в пределах $-\infty < \omega < \infty$.

В рассмотренном примере не было необходимости прибегать к логарифмической производной, поскольку ФЧХ $|\theta_s(\omega)|$ не выходит за пределы $\pi/2$. Продолжим поэтому пример на случай трех идентичных развязанных звеньев с импульсной характеристикой, спектральная плотность которой $\mathbf{S}(\omega) = [\alpha/(\alpha + i\omega)]^3$, а ФЧХ заключена в пределах $\pm 3\pi/2$, т. е. 3π. Повторяя предыдущие рассуждения, придем к результату $\theta_s(\omega) = -3\operatorname{arctg} \omega/\alpha$, хотя прямые измерения не могут дать более $\pm\pi$.

В тех случаях, когда ФЧХ спектра задана аналитически в виде непрерывной функции $\theta_s(\omega)$, вопрос о выделении «главной части аргумента» вообще не возникает (как, например, в случае ЛЧМ-импульса с ФЧХ в виде квадратичной параболы).

Вопрос о неоднозначности ФЧХ приобретает особое значение при цифровой обработке сигнала, когда дискретные отсчеты фазы производятся «по модулю 2π». Способы восстановления истинной ФЧХ рассматриваются в § 16.10.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Баскаков С. И.** Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов.— М.: Высшая школа, 1983.

2. **Радиотехнические** цепи и сигналы: Учеб. пособие для вузов/Д. В. Васильев, М. Р. Витоль, Ю. Н. Горшенков и др.: Под ред. К. А. Самойло.— М.: Радио и связь, 1982.

3. **Зиновьев А. Л., Филиппов Л. И.** Введение в теорию сигналов и цепей: Учеб. пособие для вузов.— 2-е изд., перераб. и доп. —М.: Высшая школа, 1975.

4. **Теория** передачи сигналов: Учебник для вузов/А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, М. В. Назаров, Л. М. Финк.— М.: Связь, 1980.

5. **Андреев В. С.** Теория нелинейных электрических цепей: Учеб. пособие для вузов.— 2-е изд., перераб. и доп. —М.: Радио и связь, 1982.

6. **Сборник** задач по курсу «Радиотехнические цепи и сигналы»/ Под ред. А. М. Николаева.— М.: Сов. радио, 1972.

7. **Горяинов В. Т., Журавлев А. Г., Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника: Примеры и задачи.— М.: Сов. радио, 1980.

8. **Попов В. П.** Основы теории цепей: Учебник для вузов. — М.: Высшая школа, 1985.

9. **Трахтман А. М.** Введение в обобщенную спектральную теорию.— М.: Сов. радио, 1972.

10. **Варакин Л. Е.** Теория сложных сигналов.— М.: Сов. радио, 1970.

11. **Френкс Л.** Теория сигналов: Пер. с англ. /Под ред. Д. Е. Вакмана.—М. Сов. радио, 1974.

12. **Конторович М. И.** Операционное исчисление и процессы в электрических цепях.— М.: Сов. радио, 1975.

13. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. I.—М.: Сов. радио, 1974.

14. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника.— М.: Сов. радио, 1966.

15. **Основы** теории колебаний/В.В. Мигулин, В. И. Медведев, Е. Р. Мустель, В. Н. Парыгин.— М.: Физматгиз, 1978.

16. **Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е.** Разделение частот в теории колебаний и волн. — М.: Наука, 1983.

17. **Давенпорт В. Б., Рут В. Л.** Введение в теорию случайных сигналов и шумов: Пер. с англ./Под ред. Р. М. Добрушина.— М.: ИЛ, 1960.

18. **Деч Р.** Нелинейное преобразование случайных процессов: Пер. англ. /Под ред. Б. Р. Левина.— М.: Сов. радио, 1965.

19. **Хемминг Р. В.** Цифровые фильтры: Пер. с англ. /Под ред. А. М. Трахтмана.— М.: Сов. радио, 1980.

20. **Трахтман А. М., Трахтман В. А.** Основы теории сигналов на конечных интервалах.— М.: Сов. радио, 1975.

21. **Рабинер Л., Гоулд Б.** Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. /Под ред. Ю. И. Александрова.— М.: Мир, 1978.

22. **Котельников В. А.** Теория потенциальной помехоустойчивости.— М. : Сов. радио, 1956.

23. **Ширман Я. Д.** Разрешение и сжатие сигналов.— М.: Сов. радио, 1974.

24. **Финк Л. М.** Сигналы, помехи, ошибки... Заметки о некоторых неожиданностях, парадоксах и заблуждениях в теории связи. — 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Радио и связь, 1984.

25. **Хармут Х.** Теория секвентного анализа: Пер. с англ./Под ред. Л. М. Сороко.— М.: Мир, 1980.

26. **Матханов П. Н.** Основы синтеза линейных электрических цепей: Учеб. пособие для вузов.— М.: Высшая школа, 1978.

27. **Карни Ш.** Теория цепей. Анализ и синтез: Пер. с англ./ Под ред. С. Е. Лондона.— М.: Связь, 1973.

28. **Масленников В. В., Сироткин А. П.** Избирательные *RC*-усилители.— М.: Энергия, 1980.

29. **Хьюлсман Л. П.** Теория и расчет активных *RC*-цепей: Пер. с англ./Под ред. А. Е. Знаменского и И. Н. Теплюка.— М.: Связь, 1973.

30. **Оппенгейм А. В., Шафер Р. В.** Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ./ Под ред. С. Я. Шаца.— М.: Связь, 1979.

31. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: ГИФМЛ, 1963.

32. **Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.** Специальные функции.: Пер. с нем./Под ред. Л. И. Седова.— М.: Наука, 1968.

33. **Справочник** по специальным функциям./Под ред. М. А. Абрамовица и И. Стигана: Пер. с англ. /Под ред. В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной.— М.: Наука, 1979.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A — амплитуда
A_n — амплитуда n-й гармоники
A_0 — амплитуда несущего колебания
$A(t)$ — огибающая амплитуд высокочастотного колебания
$\dot{A}(t)$ — производная функции $A(t)$
$A_c(t)$, $A_s(t)$ — квадратурные составляющие огибающей $A(t)$
$\mathbf{A}(t)$ — комплексная огибающая
$a, a_{эк}$ — параметр расстройки контура
a_n — коэффициент ряда Фурье (при косинусе)
$B_s(\tau)$ — корреляционная функция детерминированного сигнала $s(t)$
$B_z(\tau)$ — корреляционная функция детерминированного аналитического сигнала $z(t)$
$B_A(\tau)$ — корреляционная функция огибающей $A(t)$ детерминированного сигнала
$B_{s_1 s_2}(\tau)$ — взаимно-корреляционная функция сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$
b_n — коэффициент ряда Фурье (при синусе)
C — емкость
c_n — коэффициент обобщенного ряда Фурье
E — амплитуда ЭДС
E_0 — амплитуда ЭДС несущей частоты
$E(t)$ — огибающая амплитуд высокочастотной ЭДС $e(t)$
$\mathbf{E}(t)$ — комплексная огибающая высокочастотной ЭДС
$\mathbf{E}(\omega)$ — спектральная плотность ЭДС
$e(t)$ — мгновенное значение ЭДС
$e_н$ — напряжение накачки
f, F — частота
f_0 — центральная частота (несущая)
f_m — граничная (максимальная) частота
G_i — внутренняя проводимость источника сигнала
$G_н$ — проводимость нагрузки
$G(t)$ — огибающая амплитуд импульсной характеристики цепи
$g(t)$ — мгновенное значение импульсной характеристики цепи
I — амплитуда тока
$\mathbf{I}$ — комплексная амплитуда тока
$i(t)$ — мгновенное значение тока
$J_n(m)$ — функция Бесселя
$\mathbf{K}(p)$, $\mathbf{K}(i\omega)$ — передаточная функция цепи на p-плоскости и на оси частот соответственно
$K(\omega)$ — модуль передаточной функции
$\mathbf{K}_0(p)$, $\mathbf{K}_0(i\omega)$ — передаточная функция цепи, охваченной обратной связью
$\widehat{K}(z)$ — передаточная функция дискретного фильтра на z-плоскости
$\mathbf{K}_T(i\omega)$ — передаточная функция дискретного фильтра
$\mathbf{K}_y(p)$, $\mathbf{K}_y(i\omega)$ — передаточная функция усилителя
$K_x(\tau)$ — ковариационная функция случайного процесса $x(t)$
$k_{ам}$ — крутизна характеристики амплитудного модулятора
$k_{чм}$ — крутизна характеристики частотного модулятора
$k_{фм}$ — крутизна характеристики фазового модулятора
L — индуктивность
$L_s(p)$ — преобразование Лапласа функции $s(t)$
M — коэффициент модуляции, взаимоиндуктивность
m — индекс угловой модуляции, база ЛЧМ сигнала
p — комплексная переменная
$p(x)$ — одномерная плотность вероятности
Q — добротность колебательного контура
$R_x(\tau)$ — корреляционная функция случайного процесса $x(t)$
$r_x(\tau)$ — нормированная корреляционная функция
$r_0(\tau)$ — огибающая нормированной корреляционной функции
S — крутизна характеристики активного элемента
$\mathbf{S}(\omega)$, $\mathbf{S}(\Omega)$ — спектральная плотность (комплексная) функции $s(t)$

$s(t)$ — мгновенное значение сигнала

$s(kT)$ — отсчет сигнала $s(t)$ в момент $t = kT$

$S(\omega)$, $S(\Omega)$ — модуль спектральной плотности

$\mathbf{S}_A$ — спектральная плотность огибающей $\mathrm{A}\ (t)$

$\overline{s(t)}$ — усреднение $s\ (t)$ по времени

$\widehat{\mathbf{S}}(z)$ — z-преобразование функции $s\ (t)$

$s_T(t)$ — сигнал $s\ (t)$, дискретизованный с шагом T

$\mathbf{S}_T(\omega)$ — спектральная плотность дискретного сигнала

$\mathbf{S}_T(n\omega_1)$ — дискретное преобразование Фурье

$\mathbf{S}_T(p)$ — дискретное преобразование Лапласа

T — период колебания, шаг дискретизации сигнала

T_c — длительность сигнала

U — амплитуда напряжения

$U(t)$ — огибающая амплитуд высокочастотного напряжения $u\ (t)$

$\mathbf{U}(t)$ — комплексная огибающая напряжения $u\ (t)$

$\mathbf{U}(\omega)$ — спектральная плотность напряжения

$u(t)$ — мгновенное значение напряжения

W_0 — спектральная плотность мощности белого шума

$W_x(\omega)$ — спектральная плотность мощности случайного процесса $x\ (t)$

$W_{xy}(\omega)$ — взаимная спектральная плотность случайных процессов $x\ (t)$ и $y\ (t)$

Y — проводимость (комплексная)

Z — сопротивление (комплексное)

$Z(\omega)$ — спектральная плотность комплексного колебания $z\ (t)$

$z_a(t)$ — аналитический (комплексный) сигнал, соответствующий физическому сигналу $a\ (t)$

$\mathcal{Э}$ — энергия сигнала

α — затухание, физический параметр транзистора

β — скорость изменения угловой частоты, физический параметр транзистора

γ — фаза модулирующей функции, при АМ — фаза огибающей

Δt — шаг дискретизации по времени

$\Delta\omega_1, \Delta f$ — шаг дискретизации сигнала по частоте, расстройка

$\Delta\omega_0$, Δf_0 — полуширина узкополосного спектра, полоса прозрачности фильтра

$\delta(t)$, $\delta(\omega)$ — дельта-функции

θ — угол отсечки тока

θ_n — начальная фаза n—й гармоники

$\theta(\omega)$ — аргумент комплексной спектральной плотности сигнала

θ_0 — начальная фаза несущего колебания

$\theta(t)$ — мгновенное значение фазы узкополосного колебания

θ_{max} — амплитуда изменения фазы при угловой модуляции

ρ — характеристическое сопротивление колебательного контура

σ_x^2 — дисперсия случайного процесса $x(t)$

τ — время

$\tau_и$ — длительность импульса

$\tau_0, \tau_1, \tau_a, \tau_к$ — постоянные времени соответствующих цепей

φ — фазовый сдвиг гармонического колебания в цепи, аргумент передаточной функции цепи

$\varphi(\omega)$ — ФЧХ четырехполюсника

$\varphi_n(t)$ — базисная функция ортогональной системы

$\Psi(t)$ — полная фаза высокочастотного колебания

ω, Ω — угловая частота

ω_m — граничная (максимальная) частота

$\omega_д$ — амплитуда частотного отклонения (девиация)

$\omega_н$ — частота накачки

q — кепстральное время (аргумент кепстра)

$C_s(q)$ — кепстр мощности аналогового сигнала $s\ (t)$

$C_s(m)$ — кепстр мощности дискретного сигнала s_m

$\mathbf{C}_s(q)$ — комплексный кепстр сигнала $s\ (t)$

$\mathbf{C}_s(m)$ — комплексный кепстр сигнала $s\ (m)$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автогенератор
на RC 295—299
на туннельном диоде 291—293
нелинейное уравнение 282—285
одноконтурный 273, 276, 280—281
— с автотрансформаторной обратной связью 280—282
— с емкостной обратной связью 280—282
— с трансформаторной обратной связью 280—282
режим самовозбуждения жесткий 279—280
— — мягкий 279
— стационарный 270—272, 276—278
с внешней обратной связью 271
с внутренней обратной связью 291—293
с синхронизирующим источником ЭДС в колебательном контуре 303—304
— — в цепи база — эмиттер 301—302
с линией задержки в цепи обратной связи 293—295
условие баланса амплитуд 272
— — фаз 272
— самовозбуждения 275
фазовые портреты 289—291
Анализ
гармонический непериодических сигналов 27—29
— периодических сигналов 20—23
корреляционный детерминированных сигналов 67—71
Аналитический сигнал 99—103
Аппроксимация нелинейных характеристик 222
кусочно-линейная 224—225
степенным полиномом 223—224
Аргумент комплексной спектральной плотности
главная часть 488, 490, 491—492
неоднозначность определения 489, 499
определение по модулю 2π 490
устранение неоднозначности 490
— — по методу логарифмической производной 490

База сигнала (число степеней свободы) 62
Белый шум 121, 210
Бесселевы функции 85—86
Бесселя неравенство 18—19

Варактор 259
Варикап 259
Винера—Хинчина теорема 120
Возбуждение колебаний параметрическое 324—326
Выпрямление 239—241
Взаимная корреляционная функция 70—71, 123—126

Гауссовский случайный процесс 116—118
Гиббса явление 24
Гильберта преобразования 94—95, 97—98
Годограф функции 171

Дельта-функция 43
спектральная плотность 44
фильтрующее свойство 44
Детектирование
амплитудное 242
— квадратичное 242—244
— линейное 244—247
— синхронное 254—255
фазовое 251—252
частотное 247—248
Детектор
амплитудный 242, 243, 245, 334—342
фазовый 251—252.
частотный 247, 342—344
— двухконтурный 248—251
— одноконтурный 248
Диапазоны радиоволн 6
Дискретизация
сигнала 64—67
— узкополосного 106—109
Дифференцирование
сигнала 180—181
случайной функции 210—213
Дифференцирующие цепи 181—184

Емкость дифференциальная 221, 308

Задержка сигнала 480—482
Захватывание частоты автогенератора 301—304

Импульсная характеристика
гребенчатого фильтра 413
дискретного фильтра 354
линейной цепи 152—153
параметрической цепи 310—312
резонансного усилителя 158
согласованного фильтра 401
Индуктивность дифференциальная 222, 308
Интегрирование
сигнала 180—181
случайной функции 213—215
Интегрирующие цепи 181—184

Кепстр мощности
комплексный 487—492
континуального сигнала 477—478
цифрового сигнала 479—480
Ковариационная функция 111, 120
Корреляционная функция 67—68
АМ радиосигнала 103—104
детерминированного сигнала 67
ЛЧМ импульса 104—106
пачки прямоугольных импульсов 69
периодического сигнала 69—70
периодической последовательности прямоугольных импульсов 70
прямоугольного импульса 68
радиоимпульса 104
случайного процесса 111
— — нормированная 113
треугольного импульса 68—69
Котельникова теорема (теорема отсче-

тов) 59, 62—64
Коэффициент усиления активного четырехполюсника 147
Крутизна характеристики
дифференциальная 220—221
средняя 221

Лагерра полиномы 426
— функции 426—427
Лапласа преобразование
дискретное 66
одностороннее и двустороннее 57—59
прямое и обратное 55—56
Лежандра полиномы 424

Манипуляция
фазовая 195—196
частотная 196—198
Метод
инвариантных частотных характеристик 466—468
интеграла наложения 176—177
— — упрощенный 187
квазилинейный 231—233
колебательной характеристики 276—277
мгновенной частоты 199—201
моментов 46
переменных состояния 267
спектральный 174—176
— упрощенный 185—186
фазовой плоскости 285—289
характеристических функций 214
z-преобразования 361—362, 465
— временных функций 362—364
— передаточных функций дискретных цепей 365—367
Модуляция
амплитудная (АМ) 73, 74—75, 255—257
— коэффициент АМ 74—75
— мощность АМ колебания 75
— спектр АМ колебаний 76—81
амплитудно-угловая (частотная) 91—93
угловая 73, 81—82, 304—305
— девиация частоты 82
— индекс угловой модуляции 82
— спектр колебания 84—91
— фазовая 82, 83—84
— частотная 82, 83—84
— — линейная 89
Моделирование процессов 266—270
Мэнли—Роу теорема 264—265

Нормализация случайного процесса 218—220

Обработка сигнала квадратурная 418—419
Обратная связь 158
внешняя 159
внутренняя 158—159
отрицательная 160, 162—167
положительная 160
Ограничение амплитудное 235—238
Ошибка квантования 377, 379

Параметрон 324
емкостной 326
индуктивный 327
Парсеваля равенство 36
Передаточная функция
апериодического усилителя 178
резонансного n-каскадного усилителя (фильтра) 158
узкополосной цепи 185
цепи с периодически изменяющимся параметром 312—314
четырехполюсника 152
Помеха
аддитивная 329
мультипликативная 329, 349—351
Преобразование
аналог-цифра 376—377
цифра-аналог 380—381
частоты 252—254
Преобразования кепстра
дифференцирование и интегрирование сигнала 495
изменение масштаба времени 494
произведение сигналов 495
сдвиг сигналов во временной области 492—493
сложение сигналов 495
смещение спектра сигнала 494
Принцип суперпозиции обобщенный 468—470
Произведение длительность сигнала$\times$ $\times$полоса частот 45
Пространство сигналов 136
Процесс случайный
виды 113—118
дифференцирование 210—213
интегрирование 213—214
нормализация 218—220
параметры 110—113
стационарный 112
— эргодический 112
узкополосный 126—132
— огибающая 127—131
— фаза 131—132
— частота 132
комплексный 133—135
Пэли—Винера критерий 402

Расстройка контура обобщенная 157
Регенерация 299—301
Рэлея распределение 129
— функция обобщенная 338
Ряд Фурье
обобщенный 18
тригонометрический 20, 23
— комплексная форма 20, 23

Сигналы радиотехнические
детерминированные 9, 16, 174
дискретные 10, 11, 177—180, 361—362
квантованные 10, 11
континуальные 10, 11
случайные 9, 109, 202
цифровые 11, 358—360
Система автоколебательная 14, 270
Система функций
ортогональная 17, 19, 20
— полная 19

ортонормированная 17
Спектральная плотность 28, 31
гармонического колебания 53—54
группы одинаковых и равноотстоящих импульсов 41—42
единичного скачка 55
импульса вида sinc (x) 40—41
колоколообразного (гауссовского) импульса 39—41
ЛЧМ импульса 91
мощности случайного процесса 118—120
— — — взаимная 125
прямоугольного импульса 37—38
треугольного импульса 38—39
Спектр
колебания при амплитудно-частотной модуляции 91—93
пилообразного колебания 25
последовательности униполярных прямоугольных импульсов 26—27
— — треугольных импульсов 25—26
прямоугольного колебания 23—25
радиоимпульса с ЧМ заполнением 89—90

Умножение частоты 259—262
Уолша функции 429
дискретные 440—441
свойство мультипликативности 432
— ортогональности 430
упорядоченные по Адамару 434—436
— по Пэли 435
Усиление
нелинейное резонансное 231—233
параметрическое 314—315
Усилитель
апериодический 153—154, 177—180
— каскадное соединение 154—155
параметрический двухконтурный 320—324
— одноконтурный 318—320
— регенеративный 299—301
резонансный 156—158, 188—191
Устойчивость линейных цепей с обратной связью
алгебраический критерий Рауса—Гурвица 169—170
критерий Ляпунова 168
частотный критерий Найквиста 172

Фильтр
оптимальный 397—401
— согласованный 399
цифровой 351—353
— рекурсивный 354, 357, 368—370, 372—373
— — условие устойчивости 366
— с комплексными весовыми коэффициентами 374—376
— согласованный 421—422
— трансверсальный 354, 367—368, 370—372
Чебышева 453—456
Фильтрация
дискретная 353—354
линейная оптимальная 397
согласованная комплексного сигнала 418—421
Фурье-преобразование
быстрое (БПФ) 386—391
дискретное (ДПФ) 358
обратное 28—29
прямое 28—29
сигнала при дифференцировании 33
— — замене $\omega \rightleftarrows t$ 35
— — изменении масштаба времени 31—32
— — интегрировании 33
— — перемножении 33—34
— — сдвиге во времени 31
— — сложении 33

Характеристическая функция 214—217

Цепи радиотехнические
линейные с переменными параметрами (параметрические) 13, 306, 308—309, 312—314
— с постоянными параметрами 12—13, 142, 174
нелинейные 14—15, 220
Центральная предельная теорема 116

Чебышева полиномы 424—426
Четырехполюсник
активный 142
— импульсная характеристика 152—153
— коэффициент усиления 147
— обратная связь 158
— передаточная функция 152, 161
— устойчивость *см.* Устойчивость линейных цепей
пассивный 142, 144—145

Шумы
квантования 377—380
округления 383
собственные 204
— в резистивном усилителе 207—208
— в резонансном усилителе 208—210

Элементы нелинейные
реактивные 220, 221
резистивные 220, 229
Эрмита полиномы 428—429

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию 3

Глава 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, СИГНАЛОВ И ЦЕПЕЙ 5

1.1. Передача сигналов на расстояние и используемые в радиотехнике частоты 5
1.2. Преобразование сигналов в радиотехнических системах 7
1.3. Классификация сигналов, используемых в радиотехнике 9
1.4. Радиотехнические цепи и методы их анализа 12
1.5. Проблема помехоустойчивости и электромагнитной совместимости радиотехнических систем 15

Глава 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ . . . 16

2.1. Энергетические характеристики 16
2.2. Представление произвольного сигнала в виде суммы элементарных колебаний 17
2.3. Гармонический анализ периодических сигналов 20
2.4. Спектры простейших периодических сигналов 23
2.5. Распределение мощности в спектре периодического сигнала 27
2.6. Гармонический анализ непериодических сигналов 27
2.7. Соотношение между спектрами одиночного импульса и периодической последовательности импульсов 30
2.8. Некоторые свойства преобразования Фурье 31
2.9. Распределение энергии в спектре непериодического сигнала 36
2.10. Примеры определения спектров непериодических сигналов 36
2.11. Бесконечно короткий импульс с единичной площадью (дельта-функция) . 42
2.12. Соотношение между длительностью сигнала и шириной его спектра. Скорость убывания спектра 45
2.13. Спектры некоторых неинтегрируемых функций 53
2.14. Представление сигналов на плоскости комплексной частоты 55
2.15. Представление сигналов с ограниченной полосой частот в виде ряда Котельникова 59
2.16. Теорема отсчетов в частотной области 62
2.17. Дискретизованные сигналы 64
2.18. Корреляционный анализ детерминированных сигналов 67
2.19. Соотношение между корреляционной функцией и спектральной характеристикой сигнала 71

Глава 3. МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ 72

3.1. Общие определения 72
3.2. Радиосигналы с амплитудной модуляцией 74
3.3. Спектр амплитудно-модулированного колебания 76
3.4. Угловая модуляция. Фаза и мгновенная частота колебания 81
3.5. Спектр колебания при угловой модуляции. Общие соотношения . . . 84
3.6. Спектр колебания при гармонической угловой модуляции 85
3.7. Спектр радиоимпульса с частотно-модулированным заполнением . . . 89
3.8. Спектр колебания при амплитудно-частотной модуляции 91

3.9. Огибающая, фаза и частота узкополосного сигнала 93
3.10. Аналитический сигнал 98
3.11. Корреляционная функция модулированного колебания 103
3.12. Дискретизация узкополосного сигнала 106

Глава 4. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ . . . 109

4.1. Общие определения 109
4.2. Виды случайных процессов. Примеры 113
4.3. Спектральная плотность мощности случайного процесса 118
4.4. Соотношение между спектральной плотностью и коварнационной функцией случайного процесса 120
4.5. Взаимная корреляционная функция и взаимная спектральная плотность двух случайных процессов 123
4.6. Узкополосный случайный процесс 126
4.7. Комплексный случайный процесс 133
4.8. Геометрическое представление сигналов. Пространство сигналов . . . 135
4.9. Пространство случайных сигналов 139

Глава 5. ЛИНЕЙНЫЕ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ 142

5.1. Определения и свойства активных цепей 142
5.2. Активный четырехполюсник как линейный усилитель 147
5.3. Частотные и временные характеристики радиоэлектронных цепей . . . 152
5.4. Апериодический усилитель 153
5.5. Каскадное соединение идентичных апериодических усилителей 154
5.6. Резонансный усилитель 156
5.7. Обратная связь в активном четырехполюснике 158
5.8. Применение отрицательной обратной связи для улучшения характеристик усилителя 162
5.9. Устойчивость линейных активных цепей с обратной связью. Алгебраический критерий устойчивости 167
5.10. Частотные критерии устойчивости 171

Глава 6. ПРОХОЖДЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ . . . 174

6.1. Вводные замечания 174
6.2. Спектральный метод 174
6.3. Метод интеграла наложения 176
6.4. Прохождение дискретных сигналов через апериодический усилитель . . 177
6.5. Дифференцирование и интегрирование сигналов 180
6.6. Анализ радиосигналов в избирательных цепях. Метод огибающей . . . 184
6.7. Прохождение радиоимпульса через резонансный усилитель 188
6.8. Линейные искажения амплитудно-модулированного колебания в резонансном усилителе 192
6.9. Прохождение фазоманнпулированного колебания через резонансную цепь 195
6.10. Прохождение частотно-манипулированного колебания через избирательную цепь 196
6.11. Прохождение частотно-модулированного колебания через избирательные цепи 198

Глава 7. ПРОХОЖДЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ 202

7.1. Преобразование характеристик случайного процесса в линейных цепях . . 202
7.2. Спектральная плотность мощности и корреляционная функция случайного процесса на выходе цепи 203
7.3. Характеристики собственных шумов в радиоэлектронных цепях 204
7.4. Дифференцирование случайной функции 210
7.5. Интегрирование случайной функции 213
7.6. Параметры распределения случайного процесса на выходе линейной цепи Характеристическая функция 214
7.7. Нормализация случайных процессов в узкополосных линейных цепях . . 218

Глава 8. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ И МЕТОДЫ ИХ АНАЛИЗА 220

8.1. Нелинейные элементы 220
8.2. Аппроксимация нелинейных характеристик 222

8.3. Воздействие узкополосного радиосигнала на безынерционные нелинейные элементы . . . 225
8.4. Воздействие бигармонического колебания на нелинейный резистивный элемент . . . 229
8.5. Нелинейное резонансное усиление . . . 231
8.6. Умножение частоты . . . 234
8.7. Амплитудное ограничение . . . 235
8.8. Нелинейная цепь с фильтрацией постоянного тока (выпрямление) . . . 239
8.9. Амплитудное детектирование . . . 242
8.10. Частотное и фазовое детектирование . . . 247
8.11. Преобразование частоты сигнала . . . 252
8.12. Синхронное детектирование . . . 254
8.13. Получение амплитудно-модулированных колебаний . . . 255
8.14. Резонанс в колебательном контуре с нелинейной емкостью . . . 257
8.15. Воздействие гармонического сигнала на нелинейную емкость. Умножитель частоты на варакторе . . . 259
8.16. Воздействие двух гармонических колебаний на цепь с нелинейным энергоемким элементом . . . 262
8.17. Теорема Мэнли—Роу . . . 264
8.18. Моделирование процессов в нелинейных цепях по заданному дифференциальному уравнению . . . 266

Глава 9. ГЕНЕРИРОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ . . . 270

9.1. Автоколебательная система . . . 270
9.2. Возникновение колебания в автогенераторе . . . 273
9.3. Стационарный режим автогенератора . . . 276
9.4. Мягкий и жесткий режимы самовозбуждения . . . 279
9.5. Примеры схем автогенераторов . . . 280
9.6. Нелинейное уравнение автогенератора . . . 282
9.7. Метод фазовой плоскости . . . 285
9.8. Фазовые портреты автогенератора . . . 289
9.9. Автогенераторы с внутренней обратной связью . . . 291
9.10. Автогенератор с линией задержки в цепи обратной связи . . . 293
9.11. *RC*-генераторы . . . 295
9.12. Действие гармонической ЭДС на цепи с положительной обратной связью. Регенерация . . . 299
9.13. Действие гармонической ЭДС на автогенератор. Захватывание частоты . . . 301
9.14. Угловая модуляция в автогенераторе . . . 304

Глава 10. ЦЕПИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ . . . 306

10.1. Общие характеристики цепей с переменными параметрами . . . 306
10.2. Прохождение сигналов через линейные цепи с переменными параметрами 309
10.3. Пример определения импульсной характеристики параметрической цепи . 310
10.4. Передаточная функция цепи с периодически изменяющимся параметром . 312
10.5. Принцип параметрического усиления сигналов . . . 314
10.6. Одноконтурный параметрический усилитель . . . 318
10.7. Двухконтурный параметрический усилитель . . . 320
10.8. Параметрическое возбуждение колебаний . . . 324
10.9. Сопоставление параметрических и нелинейных преобразований сигналов . 328

Глава 11. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ . . . 329

11.1. Вводные замечания . . . 329
11.2. Преобразование случайного процесса в безынерционных нелинейных цепях 329
11.3. Преобразование спектра случайного процесса в безынерционном нелинейном элементе . . . 332
11.4. Воздействие узкополосного шума на амплитудный детектор . . . 334
11.5. Совместное воздействие гармонического сигнала и гауссовского шума на амплитудный детектор . . . 338
11.6. Совместное воздействие гармонического сигнала и гауссовского шума на частотный детектор . . . 342
11.7. Взаимодействие гармонического сигнала и гауссовского шума в амплитудном ограничителе с резонансной нагрузкой . . . 344

11.8. Корреляционная функция и спектр случайного процесса в линейной параметрической цепи . . . 346
11.9. Влияние мультипликативной помехи на закон распределения сигнала . . 349

Глава 12. ДИСКРЕТНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ . 351

12.1. Вводные замечания . . . 351
12.2. Принцип дискретной фильтрации . . . 353
12.3. Передаточная функция цифрового фильтра . . . 355
12.4. Характеристики цифровых сигналов . . . 358
12.5. Применение метода z-преобразования для анализа дискретных сигналов и цепей . . . 361
12.6. z-преобразование временных функций . . . 362
12.7. z-преобразование передаточных функций дискретных цепей . . . 365
12.8. Примеры анализа цифровых фильтров . . . 367
12.9. Цифровые фильтры с комплексными весовыми коэффициентами . . . 374
12.10. Преобразование аналог — цифра. Шумы квантования . . . 376
12.11. Преобразование цифра—аналог и восстановление континуального сигнала 380
12.12. Быстродействие арифметического устройства цифрового фильтра . . . 383
12.13. Алгоритм цифровой фильтрации во временной и частотной областях . . 385
12.14. Быстрое преобразование Фурье . . . 386
12.15. Спектральный анализ на базе быстрого преобразования Фурье . . . 391
12.16. Применение быстрого преобразования Фурье в устройствах обработки сигналов . . . 395

Глава 13. ПРИНЦИПЫ ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛА НА ФОНЕ ПОМЕХ . . . 396

13.1. Постановка задачи . . . 396
13.2. Передаточная функция оптимального фильтра . . . 397
13.3. Импульсная характеристика согласованного фильтра. Физическая осуществимость . . . 401
13.4. Сигнал и помеха на выходе согласованного фильтра . . . 403
13.5. Примеры построения согласованных фильтров . . . 405
13.6. Формирование сигнала, сопряженного с заданным фильтром . . . 414
13.7. Фильтрация заданного сигнала при небелом шуме . . . 416
13.8. Фильтрация сигнала с неизвестной начальной фазой . . . 417
13.9. Согласованная фильтрация комплексного сигнала. Квадратурная обработка 418
13.10. Цифровой согласованный фильтр . . . 421

Глава 14. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ НЕКОТОРЫМИ СПЕЦИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ . . . 423

14.1. Вводные замечания . . . 423
14.2. Ортогональные полиномы и функции непрерывного типа . . . 424
14.3. Функции Уолша . . . 429
14.4. Различные способы нумерации функций Уолша . . . 434
14.5. Примеры применения функций Уолша . . . 436
14.6. Дискретные функции Уолша . . . 440

Глава 15. ЭЛЕМЕНТЫ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ РАДИОЦЕПЕЙ . . . 444

15.1. Вводные замечания . . . 444
15.2. Представление аналогового четырехполюсника каскадным соединением элементарных четырехполюсников . . . 445
15.3. Реализация безындуктивностной цепи второго порядка . . . 447
15.4. Особенности синтеза четырехполюсника по заданной амплитудно-частотной характеристике . . . 448
15.5. Синтез фильтра нижних частот. Фильтр Баттерворта . . . 450
15.6. Пример синтеза фильтра Баттерворта второго порядка . . . 452
15.7. Фильтр Чебышева (нижних частот) . . . 453
15.8. Синтез различных фильтров на основе фильтра нижних частот . . . 456
15.9. Связь между амплитудно- и фазо-частотной характеристиками в цифровых цепях . . . 457
15.10. Примеры определения ФЧХ цифрового фильтра по заданной АЧХ . . . 460
15.11. Синтез цифровых фильтров. Общие замечания . . . 462

15.12. Синтез цифровых фильтров по аналоговому прототипу 463
15.13. Метод инвариантных частотных характеристик 466

Глава 16. ОБОБЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ. КЕПСТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ 468

16.1. Обобщенный принцип суперпозиции 468
16.2. Обобщенная схема гомоморфной обработки сигналов 470
16.3. Гомоморфная обработка мультипликативного сигнала 473
16.4. Гомоморфная обработка свернутого сигнала 475
16.5. Кепстральный анализ сигналов. Кепстр мощности 477
16.6. Определение задержки сигнала 480
16.7. Пример определения задержки сигнала 483
16.8. Влияние помех 485
16.9. Комплексный кепстр 487
16.10. Свойства комплексного кепстра 489
16.11. Некоторые свойства кепстральных преобразований 492

Приложение 1. Правила перехода от изображения по Лапласу $L_s(p)$ к спектральной плотности $S(\omega)$ 496
Приложение 2. Правило преобразования спектральной плотности при интегрировании сигнала 497
Приложение 3. Согласованная фильтрация узкополосного сигнала с неизвестной начальной фазой 498
Приложение 4. Согласованная фильтрация комплексного сигнала 499
Приложение 5. О неодиозначности определения фазочастотной характеристики спектра сигнала 499

Список литературы 501
Условные обозначения 503

Предметный указатель 505

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница, строка	Напечатано	Должно быть
46, 1-я снизу	[31]	[11]
116, 3-я сверху	Подставляя в (4.8)	Подставляя в (4.6
140, 5-я снизу	$\cdots = M(x^4)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\cdots$	$\cdots = M(x^4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
286, 20-я снизу	$y = x$	$y = \dot{x}$
320, 8-я сверху	$\ldots = \omega_н = (\omega_н/2+\Omega) = \ldots$	$\ldots = \omega_н - (\omega_н/2+\Omega)$
356, 11-я снизу	$\mathbf{S} < T_{вых}(\omega)/$	$\mathbf{S}_{вых}(\omega)/$
492, 15-я снизу	$\hat{S}(e^{i\omega t}) = \cdots$	$\hat{S}(e^{i\omega\tau}) = \cdots$
497, 16-я снизу	$\int_{-\infty}^{\infty} (s(t)dt \longrightarrow = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)dt = 0$