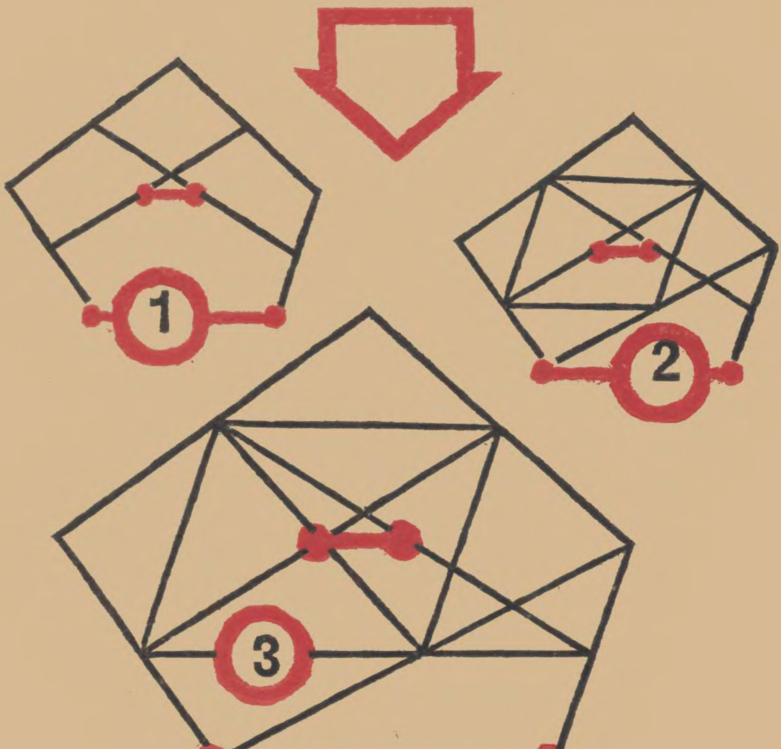
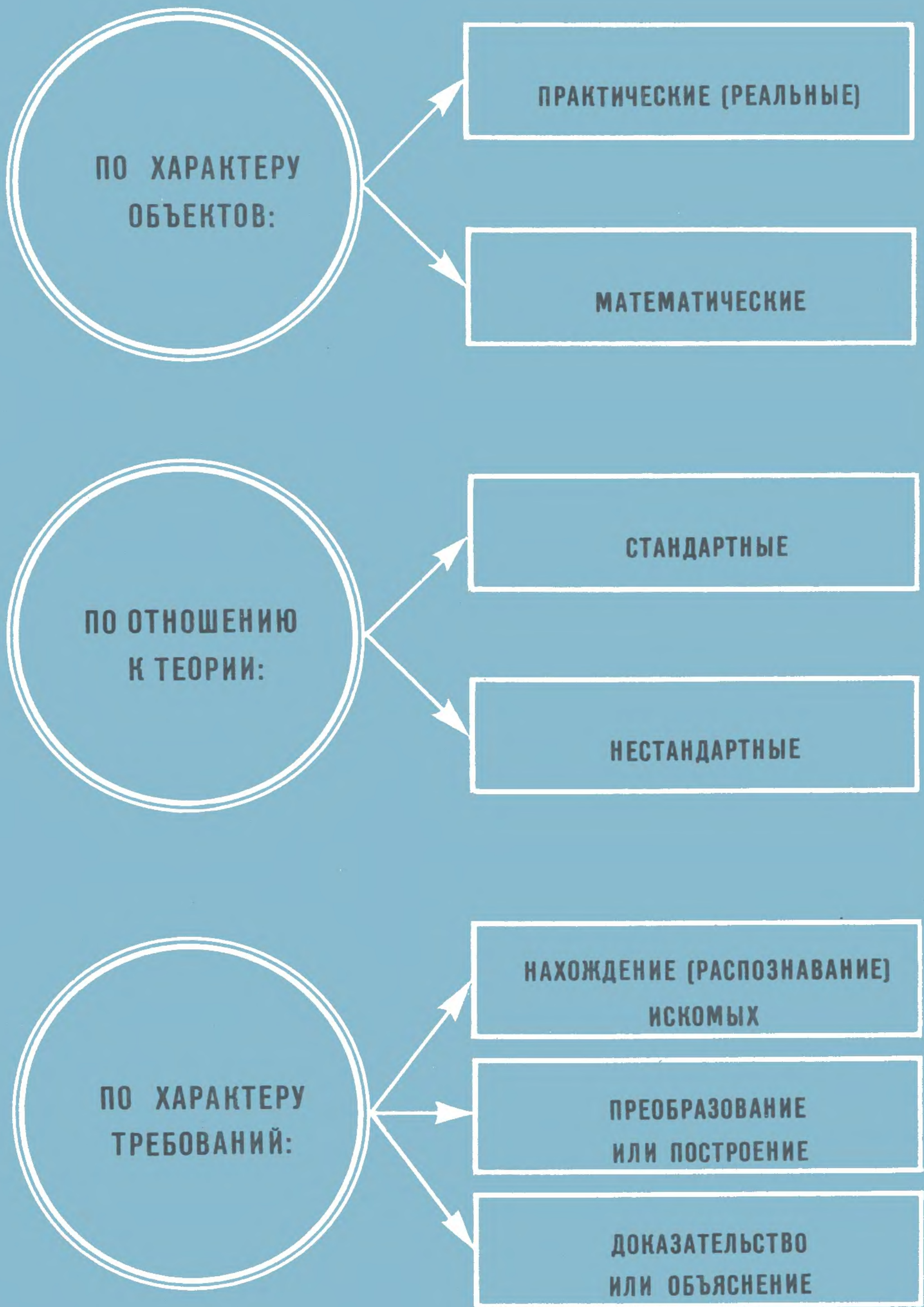
Л. М. Фридман Е. Н. Турецкий

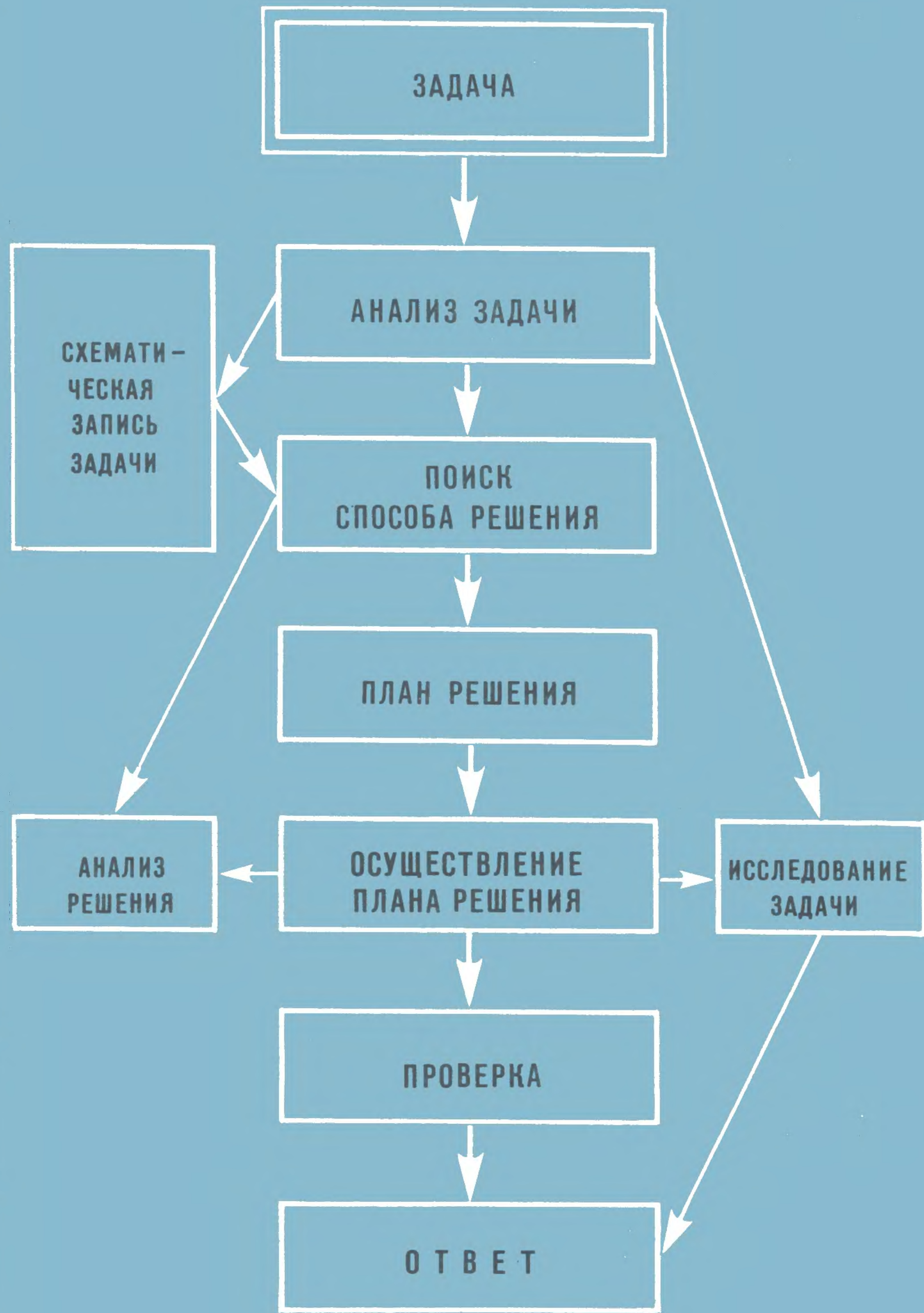
КАК НАУЧИТЬСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ



ВИДЫ ЗАДАЧ, РЕШАЕМЫХ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ



ПРОЦЕСС РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ



Л.М.Фридман Е.Н.Турецкий

КАК НАУЧИТЬСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ

КНИГА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ
старших классов средней школы

3-е издание, доработанное

Москва
«Просвещение»
1989

ББК 22.1
Ф88

Рецензент
учитель математики школы № 415 г. Москвы *А. В. Наумова*

Фридман Л. М., Турецкий Е. Н.
Ф 88 Как научиться решать задачи: Кн. для учащихся ст. классов сред. шк.— 3-е изд., дораб.— М.: Просвещение, 1989.— 192 с.: ил.
ISBN 5—09—000596—6

В книге изложена сущность решения школьных математических задач, а также задач повышенной трудности. Она предназначена для учащихся старших классов средней школы, но ею могут пользоваться также учащиеся техникумов и ПТУ, вообще все, кто хочет научиться решать математические задачи.

$Ф\ \dfrac{4306020000—384}{103(03)—89}\ 203—88$ ББК 22.1

ISBN 5—09—000596—6

Учебное издание

Фридман Лев Моисеевич
Турецкий Евсей Наумович

КАК НАУЧИТЬСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ

Зав. редакцией *Р. А. Хабиб.* Редактор *Т. А. Бурмистрова.* Младший редактор *Е. А. Сафронова.* Художественный редактор *Е. Н. Карасик.* Технический редактор *Т. Г. Иванова.* Корректоры *Л. С. Вайтман, Н. В. Бурдина.* ИБ № 11288.
Сдано в набор 10.07.87. Подписано к печати 24.11.88. Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Бум. кн. журн. отечеств. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 12,0+0,25 форз. Усл. кр.-отт. 12,69. Уч.-изд. л. 10,77+0,42 форз. Тираж 500 000 экз. Заказ № 522. Цена 50 коп.
Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
Набрано в ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградском производственно-техническом объединении «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.
Отпечатано на Саратовском ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинате Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Предисловие

Решение задач занимает в математическом образовании огромное место. Поэтому обучению решения задач уделяется много внимания, но до сих пор, пожалуй, единственным методом такого обучения были показ способов решения определенных видов задач и значительная, порой изнурительная практика по овладению ими. Поэтому все пособия для учащихся по решению задач были построены в форме сборника задач (с ответами и с некоторыми указаниями к ним).

В последние годы появился ряд пособий, в которых излагаются некоторые общие указания и рекомендации (эвристики) по решению задач, по поиску этих решений. В первую очередь это книги Д. Пойя, некоторые удачные пособия для поступающих в вузы. Однако эти пособия излагают вопросы, связанные с решением математических задач, недостаточно полно, без необходимой системы, без учета тех реальных трудностей, с которыми сталкиваются учащиеся.

Психологические исследования проблемы обучения решению задач показывают, что основные причины несформированности у учащихся общих умений и способностей в решении задач состоят в том, что школьникам не даются необходимые знания о сущности задач и их решений, а поэтому они решают задачи, не осознавая должным образом свою собственную деятельность. У учащихся не вырабатываются отдельно умения и навыки в действиях, входящих в общую деятельность по решению задач, и поэтому им приходится осваивать эти действия в самом процессе решения задач, что многим школьникам не под силу. Не стимулируется постоянный анализ учащимися своей деятельности по решению задач и выделению в них общих подходов и методов, их теоретического осмысления и обоснования.

Возникла необходимость разработки таких пособий, которые помогли бы преодолеть указанные причины и дали возможность учащимся планомерно сформировать у себя нужные умения и навыки в решении математических задач. Эта книга — первая попытка создать такое пособие.

Первые издания данного пособия вызвали благожелательные отклики читателей. Особую благодарность выражаем К. К. Михайловой, А. И. Фейгиной, Е. М. Больсену, которые дали ряд ценных советов по совершенствованию книги. В третье издание пособия внесены необходимые исправления и уточнения. Будем весьма благодарны всем, кто пришлет свой отзыв в адрес издательства: 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41, редакция математики.

Авторы

К читателям

Умение решать задачи является одним из основных показателей уровня вашего математического развития, глубины освоения учебного материала. Поэтому любой экзамен по математике, любая проверка знаний содержит в качестве основной и, пожалуй, наиболее трудной части решение задач.

И вот тут обнаруживается, что многие из вас не могут показать достаточные умения в решении задач. На всех экзаменах, как в школе, так и на приемных в вузы и техникумы, довольно часто встречаются случаи, когда ученик показывает, казалось бы, хорошие знания в области теории, знает все требуемые определения и теоремы, но запутывается при решении весьма несложной задачи.

За время обучения в школе каждый из вас решает огромное число задач, порядка нескольких десятков тысяч. При этом все вы решаете одни и те же задачи. А в итоге некоторые ученики овладевают общим умением решения задач, а многие, встретившись с задачей незнакомого или малознакомого вида, теряются и не знают, как к ней подступиться.

В чем причина такого положения?

Причин, конечно, много. И одной из них является то, что одни ученики вникают в процесс решения задач, стараются понять, в чем состоят приемы и методы решения задач, изучают задачи. Другие же, к сожалению, не задумываются над этим, стараются лишь как можно быстрее решить заданные задачи. Эти учащиеся не анализируют в должной степени решаемые задачи и не выделяют из решения общие приемы и способы. Задачи зачастую решаются лишь ради получения ответа.

У большинства учащихся весьма смутные, а порой и неверные представления о сущности решения задач, о самих задачах. Как могут учащиеся решить сложную задачу, если они не представляют, из чего складывается анализ задачи, как могут они решить задачу на доказательство, если они не знают, в чем смысл доказательства? Многие учащиеся не знают, в чем смысл решения задач на построение, зачем и когда нужно производить проверку решения и т. д.

Очевидно, что на таких представлениях не могут возникнуть сознательные и прочные умения в решении задач. Наблюдения показывают, что многие учащиеся решают задачи лишь по образцу. А поэтому, встретившись с задачей незнакомого типа, заявляют: «А мы такие задачи не решали». Как будто можно все виды задач заранее перерешать!

А можно ли научиться решать *любые* задачи?

Конечно, любые задачи научиться решать невозможно, ибо как бы вы хорошо ни научились их решать, всегда встретится такая задача, которую вы не сможете решить. Ведь ученые-математики тратят всю свою жизнь на то, чтобы найти решение некоторых задач. В математике известны задачи, которые ученые уже много лет решают и не могуть решить.

Но если говорить о школьных задачах или о задачах, которые предлагаются на разного рода экзаменах, то каждый (!) ученик в принципе может научиться их решать. Конечно, и здесь может встретиться такая задача, которую вы с ходу не сумеете решить. Понадобится посидеть над ней, изрядно поработать для того, чтобы ее решить, но в принципе любая из таких задач вам доступна, вы можете ее решить.

Для того чтобы научиться решать задачи, надо много поработать. Но эта работа не сводится лишь к решению большого числа задач. Если кратко обозначить то, что нужно сделать для этого, то можно так сказать: *надо научиться такому подходу к задаче, при котором задача выступает как объект тщательного изучения, а ее решение — как объект конструирования и изобретения.*

Эта книга предназначена для того, чтобы помочь вам научиться решать школьные и предлагающиеся на приемных экзаменах в вузы и техникумы математические задачи. Если вы твердо захотели научиться решать задачи, то *запаситесь терпением и упорством.* Эту книгу нужно не просто читать, а прорабатывать. Это значит, что ее нужно читать, как говорят, с карандашом и бумагой. Надо тщательно обдумывать все, что в ней написано, додумываться до сути прочитанного. Надо терпеливо и не спеша проделать все задания, которые в ней указаны. Главное, не спешите, читайте книгу медленно, вдумчиво, возвращаясь по мере надобности к прочитанному.

Вы должны понять, что только в результате самостоятельной и упорной работы можно действительно чему-то научиться, а тем более такому сложному умению, как умение решать математические задачи.

Данная книга состоит из двух взаимосвязанных частей. В первой части даются общие сведения о задачах и их решении, рассматриваются общие методы анализа задачи и поиска ее решения. Во второй части рассматриваются методы решения некоторых наиболее часто встречающихся видов задач. Приведенные в книге задачи взяты, как правило, из школьных учебников и некоторых экзаменационных работ.

Задания для самостоятельной работы снабжены указаниями и ответами, которые помещены в конце книги. Однако не спешите заглядывать в ответы. Сначала попытайтесь самостоятельно проверить свое решение, обдумать его и лишь затем сверить с приведенным ответом.

В случае расхождения с приведенным ответом выявите причину расхождения, затем найдите свои ошибки и исправьте их.

Если у вас хватит терпения и упорства проработать эту книгу до конца, то надеемся, что вы сами почувствуете, что приобрели достаточную уверенность, чтобы не теряться при встрече с незнакомой задачей. Думаем, что теперь вы будете с желанием и интересом решать встречающиеся вам задачи.

Желаем успеха!

Авторы

Часть I
ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЕ

Глава I
СОСТАВНЫЕ ЧАСТИ ЗАДАЧИ

I.1. Что такое задача?

Решение задач — это *работа* несколько необычная, а именно умственная работа. А чтобы научиться какой-либо работе, нужно предварительно хорошо изучить тот материал, над которым придется работать, те инструменты, с помощью которых выполняется эта работа.

Значит, для того чтобы научиться решать задачи, надо разобраться в том, что собой они представляют, как они устроены, из каких составных частей они состоят, каковы инструменты, с помощью которых производится решение задач.

Начнем все это изучать.

Итак, что же такое задача?

Если приглядеться к любой задаче, то увидим, что она представляет собой *требование или вопрос, на который надо найти ответ, опираясь и учитывая те условия, которые указаны в задаче.* Поэтому, приступая к решению какой-либо задачи, надо ее внимательно изучить, установить, в чем состоят ее требования (вопросы), каковы условия, исходя из которых надо решать задачу. Все это называется *анализом* задачи. Вот и начнем учиться производить анализ задачи.

I.2. Условия и требования задачи

Получив задачу, мы, естественно, ее внимательно читаем.

Задача 1. *В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной* 5 *см и* 12 *см. Найти катеты треугольника.*

Первое, что мы можем заметить при чтении этой задачи, состоит в следующем: в ней имеются определенные утверждения и требования. В ней утверждается, что «в прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см». Требование задачи состоит в том, что нужно «найти катеты треугольника».

Часто требование задачи формулируется в виде вопроса. Но всякий вопрос предполагает требование найти ответ на этот вопрос, а поэтому всякий вопрос можно заменить требованием.

Как видим, формулировка любой задачи состоит из нескольких утверждений и требований. Утверждения задачи называются условиями задачи [1].

Отсюда ясно, что первое, что нужно сделать при анализе задачи,— это *расчленить формулировку задачи* на условия и требования. Заметим, что в задаче обычно не одно условие, а несколько независимых элементарных (т. е. нерасчленимых дальше) условий; требований в задаче также может быть не одно. Поэтому необходимо расчленить все утверждения и требования задачи на отдельные элементарные условия и требования.

В задаче 1 можно вычленить такие элементарные условия:

1) треугольник, о котором идет речь в задаче, прямоугольный;

2) в этот треугольник вписана окружность;

3) точка касания окружности с гипотенузой делит ее на два отрезка;

4) длина одного из этих отрезков равна 5 см;

5) длина другого отрезка равна 12 см.

Требование этой задачи можно расчленить на два элементарных:

1) найти длину одного катета треугольника;

2) найти длину другого катета треугольника.

Расчленение формулировки задачи на условия и требования не всегда легко произвести. В ряде случаев для этого нужно переосмыслить задачу, переформулировать ее. Например.

Задача 2. *Сколько цифр содержит число* 2^{100} (в десятичной системе счисления)?

Формулировка этой задачи состоит из одного вопроса. Но, вдумавшись в этот вопрос, мы можем из него вычленить такие условия:

1) 2^{100} есть натуральное число;

2) его можно записать обычным образом в виде многозначного числа в десятичной системе счисления.

Тогда требование этой задачи состоит в следующем: найти, сколько цифр содержит запись этого многозначного числа.

Задача 3. *Решить уравнение* $ax^4-x^3+a^2x-a=0$.

Формулировка этой задачи состоит из одного требования. Но анализ этого требования позволяет вычленить из него условие и собственно требование. Условие: $ax^4-x^3+a^2x-a=0$ есть уравнение, а требование: решить это уравнение.

---

[1] Заметим, что иногда условием задачи называют всю формулировку задачи, т. е. все условия и требования вместе.

Конечно, на этом нельзя остановиться и надо продолжить анализ. Мы замечаем, что запись уравнения содержит две буквы: a и x. Предполагается, конечно, что вы знаете, что эти буквы обозначают: буква a — параметр, т. е. величину, которая в пределах данной задачи рассматривается как постоянная; x — переменную, область изменения которой есть множество чисел, например действительных (обычно в задаче это как-то оговаривается). Кроме того, полезно вспомнить, что означает уравнение. Тогда у с л о в и я этой задачи таковы:

1) a — есть параметр;

2) x — переменная, область изменения которой есть множество действительных чисел;

3) $ax^4-x^3+a^2x-a=0$ есть равенство с переменной x.

Т р е б о в а н и е этой задачи тогда можно так сформулировать: найти все такие значения переменной x из области ее изменения, при которых указанное равенство выполняется.

Анализ задачи можно продолжить еще дальше. Можно спросить: что значит найти значения переменной x при данных условиях? Найдя ответ на этот вопрос, тем самым уточним требование задачи. Оно примет такой вид: найти такие выражения x от a, которые, будучи подставлены в заданное высказывание с переменной вместо x, обращают его в истинное высказывание при всех допустимых значениях параметра a.

Как видим, анализ задачи и вычленение ее условий и требований можно производить с разной глубиной. Глубина анализа зависит главным образом от того, знакомы ли мы с видом задач, к которому принадлежит заданная, и знакомы ли с общим способом решения этих задач. Если да, то нам достаточен простейший анализ, сводящийся к установлению вида данной задачи; если нет, то для нахождения решения задачи нужен более глубокий анализ.

Задание 1

Попытайтесь самостоятельно произвести анализ приведенных ниже задач, указать для каждой из них все ее элементарные условия и все требования.

1.1. При каких значениях x неравенство $2^x>4$ обращается в верное числовое неравенство?

1.2. Построить сумму векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, если $A\ (-1, 2)$, $B\ (2, 3)$, $C\ (1, 1)$, $D\ (3, 5)$.

1.3. Из пункта A в пункт B вышел поезд, скорость которого 72 км/ч. Через 45 мин вышел поезд из B в A со скоростью 75 км/ч. Расстояние между A и B 348 км. На каком расстоянии от B поезда встретятся?

1.4. Ребро куба равно a. Чему равно расстояние между ребрами куба?

I.3. Направление анализа задач

Вернемся к задаче 2. Анализируя эту задачу, мы вычленили такие условия: 1) 2^{100} есть натуральное число; 2) его можно записать обычным образом в виде многозначного числа.

Почему именно эти условия вычленены из формулировки задачи? Ведь можно было вычленить и другие условия, например: 2^{100} есть произведение числа 2 само на себя сто раз или 2^{100} есть действительное число и т. д. Но почему-то мы выделили не эти условия, а указанные выше.

Все дело в том, что, производя анализ задачи, вычленяя из формулировки задачи ее условия, мы все время должны соотносить этот анализ с требованием задачи, как бы постоянно оглядываться на требование. Иными словами, *анализ задачи всегда направлен на требования задачи.*

Действительно, в задаче 2 нам нужно узнать, сколько цифр содержит число 2^{100}. Естественно, это предполагает, что, во-первых, это число рассматривается как натуральное (ибо обычно в записи чисел другого вида число цифр не подсчитывается, а то, что оно натуральное, следует из определения степени), а во-вторых, это натуральное число записано в обычном виде в форме многозначного числа. Эти два условия мы и выделили при анализе задачи. Рассмотрим еще примеры.

Задача 4. *Катер прошел* 20 *км по течению реки и* 20 *км против течения реки. Затратит ли он на весь путь больше времени, чем ему требуется на прохождение* 40 *км в стоячей воде, меньше или столько же?*

Первичный анализ этой задачи позволяет вычленить такие условия:

1) катер прошел 20 км по течению реки; 2) он прошел 20 км против течения реки; 3) он же прошел 40 км в стоячей воде.

Но, сопоставив эти условия с требованием задачи: узнать больше, меньше или столько же времени затратил катер на первый и второй пути вместе по сравнению с третьим, мы обнаруживаем недостаточность произведенного анализа. Эта недостаточность проявляется хотя бы в том, что в условиях ничего не говорится о времени, а требование задачи сводится к сравнению промежутков времени. Поэтому нужно продолжить анализ. Для этого вдумаемся в требование задачи. Надо сравнить время движения катера по реке с временем движения этого катера в стоячей воде. От чего зависит это время? Очевидно, от собственной скорости катера, от скорости течения реки и, конечно, пройденных расстояний. Но если пройденные расстояния в формулировке задачи даны, то скорости катера и реки даже не упоминаются. Как же быть? В таких случаях эти величины, без которых решение задачи невозможно, принимаются за неопределенные параметры. Положим, например, что собственная скорость катера равна v км/ч, а скорость течения реки a км/ч. Теперь мы можем вычленить такие условия:

1) собственная скорость катера v км/ч;
2) скорость течения реки a км/ч;
3) катер проплыл 20 км по течению реки;
4) он же проплыл 20 км против течения реки;
5) на весь путь туда и обратно по реке катер затратил t_1 ч;
6) в стоячей воде катер проплыл 40 км;
7) на этот путь он затратил t_2 ч.

Требование задачи: сравнить t_1 и t_2 и установить, равны ли они или нет, а если нет, то что больше.

Задача 5. *Из всех цилиндров заданного объема найти цилиндр с наименьшей полной поверхностью.*

Условие этой задачи («из всех цилиндров заданного объема») можно понимать так, что рассматривается множество цилиндров, объем которых равен некоторому числу V (здесь V является параметром). Требование задачи состоит в том, чтобы из заданного множества цилиндров найти такой, полная поверхность которого наименьшая.

Соотнесем это требование с указанным условием. Становится ясно, что полная поверхность рассматриваемых цилиндров выступает в качестве переменной величины. Надо найти минимум этой переменной. Для этого, очевидно, эту переменную следует представить как функцию от другой переменной. В качестве последней можно взять, например, радиус r основания цилиндра. Следовательно, надо найти такое значение r (при данном параметре V), при котором $S(r)$, где $S(r)$ — это функция поверхности цилиндра от радиуса r, принимает наименьшее значение.

Итак, условия данной задачи таковы:

1) рассматривается множество цилиндров, объем которых равен V (V — параметр);

2) радиус основания этих цилиндров есть переменная r;

3) полная поверхность S этих цилиндров есть некоторая функция $S(r)$.

Требования задачи:

1) найти функцию $S(r)$;

2) найти такое значение r, при котором $S(r)$ принимает наименьшее значение.

Направленность анализа задачи на ее требования состоит еще и в том, что особое внимание необходимо уделить выяснению сущности требования задачи, четкому определению того, что нужно найти, сделать в задаче.

Задача 6. *Доказать, что множество значений выражения* $\frac{b+1}{b}+\frac{c+1}{c}-\frac{b+c}{bc}$ *состоит из одного элемента.*

Очевидное условие этой задачи: $\frac{b+1}{b}+\frac{c+1}{c}-\frac{b+c}{bc}$ есть выражение, зависящее от двух переменных b и c.

А в чем сущность требования задачи? Что значит доказать, что множество значений заданного выражения состоит из одного элемента?

Очевидно, что это нужно так понимать: заданное выражение зависит от двух переменных b и c, при этом область изменения этих переменных есть множество действительных чисел, за исключением числа 0 (ибо b и c являются знаменателями дробей и, как таковые, не могут быть равны 0). Поэтому множество значений самого выражения бесконечное. А нам нужно доказать, что это множество состоит из одного элемента. Как это может быть? Это может быть лишь в том случае, если все значения заданного выражения равны между собой, а это значит, что все они равны одному и тому же числу (элементу множества).

Итак, требование этой задачи состоит в том, чтобы доказать, что все значения заданного выражения равны какому-то определенному числу.

Пока ограничимся приведенными примерами анализа задач. В дальнейшем мы будем все время встречаться с различными примерами анализа задач, ибо *умение анализировать задачу*, проникать в ее сущность — *это главное* в общем умении решения задач.

Задание 2

Проанализируйте приведенные ниже задачи и укажите все условия и требования каждой из этих задач.

2.1. Открытый бак в форме прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием должен вмещать V л жидкости. При каких размерах на его изготовление уйдет наименьшее количество материала?

2.2. Доказать равенство треугольников по углу, биссектрисе этого угла и стороне, прилежащей к этому углу.

2.3. По окружности, длина которой 60 м, равномерно и в одном направлении движутся 2 точки. Одна делает полный оборот на 5 с скорее другой и при этом догоняет вторую точку каждую минуту Определить скорости точек.

I.4. Как устроены условия задачи?

Для некоторых более сложных задач рассмотренный выше анализ (расчленение задачи на отдельные условия и требования) целесообразно продолжить. А именно установить, как устроены (из чего состоят) вычлененные условия.

Задача 7. *К двум окружностям, радиусы которых 4 см и 6 см, проведены внутренние общие касательные, оказавшиеся взаимно перпендикулярными. Вычислить расстояние между центрами окружностей.*

Эта задача содержит такие условия:

1) дана окружность центра O_1, радиус которой равен 4 см (здесь слово «дано» означает, что эта окружность построена из произвольного центра O_1);

2) из некоторого другого центра O_2 проведена окружность радиуса 6 см;

3) эти две окружности построены так, что к ним можно провести общие внутренние касательные;

4) общие внутренние касательные к этим двум окружностям взаимно перпендикулярны.

Анализируя эти условия, можно заметить, что каждое из них состоит из одного или нескольких объектов и некоторой их характеристики. Так, объектом первого условия является окружность, а ее характеристикой: радиус этой окружности равен 4 см. Во втором условии объектом является также окружность с характеристикой: ее радиус равен 6 см. В третьем условии два объекта: указанные выше две окружности, а характеристикой является их взаимное расположение на плоскости: они расположены так, что к ним можно провести внутренние общие касательные. Наконец, четвертое условие содержит два объекта: общие внутренние касательные к окружностям, в качестве характеристики указано их отношение: они взаимно перпендикулярны.

Итак, мы видим, что в каждом условии задачи имеется один или два (в некоторых случаях больше) объекта; если в условии один объект, то указывается его характеристика в виде некоторого свойства этого объекта; если же объектов два, то характеристикой служит некоторое отношение этих объектов.

Довольно часто анализ задачи (ее расчленение на условия и требования, выделение в условиях объектов и их характеристик) сопряжен с большими трудностями. Приведем пример.

Задача 8. *Две окружности касаются в точке X и касаются одной и той же прямой соответственно в точках A и B. Какую фигуру образует множество всех точек X, если радиусы данных окружностей будут принимать всевозможные значения?*

На первый взгляд кажется, что в задаче речь идет о двух окружностях. Но прочтите еще раз внимательно вопрос задачи: требуется установить, какую фигуру образуют точки X (точка X — переменная). Значит, речь идет о множествах окружностей и множестве точек их касания. Исходя из этого, задачу можно расчленить на такие условия:

1. Дано множество окружностей, каждая из которых касается данной прямой в данной на ней точке A.

Здесь объектом является множество окружностей, а их характеристикой — свойство каждой окружности этого множества: она касается данной прямой в точке A.

2. Дано множество окружностей, каждая из которых касается данной прямой (с той же стороны, что и первое множество окружностей) в данной точке B.

Объект и характеристика этого условия аналогичны первому условию.

3. Из этих двух множеств образованы такие пары окружностей, причем первый элемент пары есть окружность первого множества, а второй элемент пары — окружность второго множества, которые взаимно касаются.

Объектом этого условия является множество пар окружностей, а их характеристикой — отношение: окружности, входящие в пару, взаимно касаются.

Заметим, что в это множество пар окружностей войдут не все окружности первого и второго множеств окружностей, а лишь те из них, которые удовлетворяют указанному отношению (взаимное касание).

4. X — есть точка, в которой взаимно касаются соответствующие окружности, входящие в образованные пары (по третьему условию). Объектом этого условия является точка X (переменная точка), а ее характеристикой — свойство: эта точка есть точка касания окружностей, входящих в пару.

5. Множество точек X есть некоторая геометрическая фигура. Объектом условия является множество точек X взаимного касания окружностей, входящих в пары, а характеристикой — искомое свойство этого множества как геометрической фигуры.

Требование задачи состоит как раз в том, чтобы найти эту последнюю характеристику объекта пятого условия.

Некоторые из вас могут усомниться: нужен ли такой анализ для решения задачи? Ведь обычно, решая задачи, мы, мол, не производим такой анализ. Но это вам только кажется, что вы, решая задачи, не производите такого анализа. Вы просто не замечаете этого, ибо обычно такой анализ производится устно по ходу решения и притом этот анализ мы большей частью не осознаем. Но мы его производим, ибо без него решить задачу невозможно!

Чтобы убедиться в этом, попробуйте решить какую-нибудь достаточно сложную задачу (лучше не очень знакомого вида) и, решая ее, все время старайтесь следить за своими мыслями, за своими безмолвными рассуждениями. Если вы внимательно будете фиксировать ход собственных мыслей, то убедитесь, что вы, по сути дела, производили такой же анализ, который мы рассмотрели выше. Но, конечно, вы не употребляли термины «условие», «требование», «объект», «характеристика» и т. д. Эти термины ввели для того, чтобы нам было легче с вами объясняться, чтобы, имея дело, например, с условием, каждый раз не объяснять, что это такое. Поэтому, если вы действительно хотите овладеть общими методами решения задач, то нужно научиться производить подробный их анализ. В дальнейшем вы сможете производить такой анализ устно, свернуто, не полностью, в той мере, в какой каждый из вас нуждается в нем, для того чтобы найти решение той или иной задачи.

Задание 3

Произведите анализ приведенных ниже задач по следующей форме:

№ задачи	Условия	Объекты условия	Характеристики

3.1. Скорый поезд должен по расписанию пройти перегон AB без остановок за 4 ч. Однако в 150 км от станции A он был задержан на 20 мин и, чтобы прибыть на станцию B по расписанию, должен был пройти оставшийся путь со скоростью, превышающей первоначальную на 15 км/ч. Найти длину перегона AB.

3.2. Меньшие стороны двух подобных многоугольников 35 см и 21 см, а разность их периметров 40 см Определить периметр каждого многоугольника.

3.3. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 30. Если из первого члена этой прогрессии вычесть 2, а остальные числа оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия. Найти эти числа.

I.5. Схематическая запись задач

Результаты предварительного анализа задач надо как-то зафиксировать, записать. Та словесная, описательная форма записи, которую мы использовали выше, конечно, малоудобна. Надо найти более удобную, более компактную и в то же время достаточно наглядную форму записи результатов анализа задач. Такой формой является *схематическая запись задачи.*

Заметим, что не для всякой задачи надо делать схематическую запись. Так, например, для задач по решению уравнений, неравенств, преобразований выражений анализ проводится обычно устно и никак не оформляется. Вообще для задач, которые записаны на символическом языке (с помощью общепринятых обозначений и символов), схематическая запись не нужна.

Первой отличительной особенностью схематической записи задач является широкое использование в ней разного рода обозначений, символов, букв, рисунков, чертежей и т. д. Второй особенностью является то, что в ней четко выделены все условия и требования задачи, а в записи каждого условия указаны объекты и их характеристики, наконец, в схематической записи фиксируется лишь только то, что необходимо для решения задачи; все другие подробности, имеющиеся в задаче, при схематической записи отбрасываются.

На практике используется много разных видов схематической записи задач. Покажем на примерах.

Задача 9. *С одного участка собрали* 1440 *ц пшеницы, а с другого, площадь которого на* 12 *га меньше,*—1080 *ц. Найти площадь первого участка, если известно, что на первом участке собирали пшеницы с каждого гектара на* 2 *ц больше, чем на втором.*

Анализ задачи показывает, что в ней рассматривается сбор урожая пшеницы с двух участков, при этом этот сбор характеризуется тремя величинами: массой собранной пшеницы, площадью участка и урожаем с одного гектара. Исходя из этого, составим таблицу для схематической записи условий и требований задачи. Неизвестные величины, встречающиеся в задаче, запишем в таблице буквами, притом искомое обозначим буквой x:

Участки	Масса собранной пшеницы, ц	Урожай с 1 га, ц	Площадь участка, га
Первый	1440	$a+2$	x
Второй	1080	a	$x-12$

В этой схематической записи выделены все условия, их объекты и характеристики. Указано и требование задачи: найти площадь первого участка. В то же время эта запись очень компактная, наглядная и полностью заменяет саму формулировку задачи.

Задача 10. *Составить уравнение, корни которого были бы соответственно равны квадратам корней уравнения* $2x^2-5x+1=0$.

Вычленим сначала требование задачи: составить уравнение. Какое уравнение нужно составить? В задаче сказано, что нужно составить уравнение, корни которого равны соответственно квадратам корней заданного уравнения, а последнее есть квадратное. Оно имеет два корня (каких — это в данном случае несущественно). Поэтому и искомое уравнение должно иметь два корня. Простейшее уравнение, имеющее два корня,— это квадратное. Следовательно, можно считать, что искомое уравнение — это квадратное.

А что значит составить квадратное уравнение? Очевидно, что это значит найти его коэффициенты. Обозначим их буквами a, b и c, а переменную искомого уравнения буквой y, с тем чтобы отличить это уравнение от данного.

Теперь мы можем сделать схематическую запись задачи в таком виде:

Дано: 1) корни уравнения $2x^2-5x+1=0$ есть x_1 и x_2,
2) корни уравнения $ay^2+by+c=0$ есть y_1 и y_2,
3) $y_1=x_1^2$; 4) $y_2=x_2^2$.

Найти: a, b, c.

Довольно часто удобно составлять схематическую запись не для всей задачи, а лишь для какой-либо ее части, чтобы более наглядно представлять описываемую в задаче ситуацию, а также чтобы в решении оперировать теми обозначениями, которые вводятся в этой частичной схематической записи. В этих случаях используются разного рода графические схемы. Приведем пример.

Задача 11. *От станции A по направлению к станции B отошел пассажирский поезд. Через* 2 *ч* 30 *мин от станции B по направлению к станции A отошел поезд «Стрела». Поезда встретились на станции C. После встречи пассажирский поезд шел* 4 *ч* 30 *мин, а поезд «Стрела»* 3 *ч* 40 *мин. Сколько времени потребовалось каждому из этих поездов на весь путь между станциями A и B? Предполагается, что скорость поездов постоянна на всем пути.*

Изобразим схему движения поездов (рис. 1).

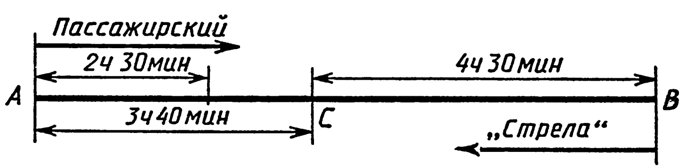


Рис. 1

Приведенная схема сама по себе не может полностью заменить задачу. Она лишь создает возможность опираться на нее, как на наглядный образ, при решении.

Задание 4

Составьте для приведенных задач схематические записи (полные или частичные).

4.1. Одна мастерская должна была изготовить 420 деталей; другая за тот же срок 500 деталей. Первая выполнила свою работу на 4 дня раньше срока, а вторая на 7 дней. По скольку деталей в день изготовляла каждая мастерская, если вторая мастерская ежедневно изготовляла на 5 деталей больше?

4.2. Из A в C вышел пешеход. Спустя 1 ч 24 мин в том же направлении из A выехал велосипедист и через 1 ч ему оставалось проехать 1 км, чтобы догнать пешехода, а еще через 1 ч велосипедисту оставалось проехать до C вдвое меньше расстояние, чем пройти пешеходу до C. Найти скорости пешехода и велосипедиста, если известно, что расстояние AC равно 27 км.

4.3. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна $1\frac{5}{9}$. Найти эти числа.

I.6. Использование чертежей для схематической записи задач

Для схематической записи геометрических и некоторых других задач полезно использовать чертеж той фигуры, которая рассматривается в задаче. При построении такого чертежа надо выполнять ряд требований. Укажем главные из них.

1. Чертеж должен представлять собой схематический рисунок основного объекта задачи (геометрической фигуры, или совокупности фигур, или какой-то части этих фигур) с обозначением с помощью букв и других знаков всех элементов фигуры и некоторых их характеристик. Если в тексте задачи указаны какие-либо обозначения фигуры или ее элементов, то эти обозначения должны быть и на чертеже; если же в задаче никаких обозначений нет, то следует воспользоваться общепринятыми обозначениями или придумать наиболее удобные.

2. Этот чертеж должен соответствовать задаче. Это означает, что если в задаче в качестве основного объекта назван, например, треугольник и при этом не указан его вид (прямоугольный, равносторонний и др.), то надо построить какой-либо разносторонний треугольник. Или если в задаче в качестве основного объекта названа трапеция и не указан ее вид, то не следует строить равнобедренную или прямоугольную трапецию и т. д.

3. При построении чертежа нет надобности выдерживать строго какой-либо определенный масштаб. Однако желательно соблюдать какие-то пропорции в построении отдельных элементов фигуры. Например, если по условию задачи сторона AB треугольника ABC наибольшая, то это должно быть соблюдено на чертеже. Или если задана медиана треугольника, то соответствующий ей отрезок на чертеже должен проходить приблизительно через середину стороны треугольника и т. д.

Точно так же надо соблюдать на чертеже такие отношения, как параллельность, перпендикулярность и другие, заданные в задаче.

4. При построении чертежей пространственных фигур необходимо соблюдать все правила черчения. Там, где это можно и целесообразно, лучше строить какие-либо плоскостные сечения этих фигур.

Кроме чертежа, для схематической записи геометрических задач используется еще краткая запись всех условий и требований задачи. В этой краткой записи, пользуясь принятыми на чертеже обозначениями, записываются все характеристики и отношения, указанные в условиях задачи. Названия фигур или отдельных ее частей желательно заменять записью их определений. Например, вместо того чтобы писать: $ABCD$ — трапеция, можно писать: $AB \parallel CD$.

В краткой записи можно использовать, там, где это целесообразно, стандартные математические знаки (принадлежности элемента к множеству, параллельности, перпендикулярности и т. д.). Конечно, все приведенные рекомендации имеют не всеобщий характер, и при решении отдельных геометрических задач чертеж фигур и краткая запись условия могут производиться иначе.

Рассмотрим на примерах, как строятся схематические записи геометрических задач с помощью чертежей.

Задача 12. *Диагональ трапеции перпендикулярна к ее основаниям; тупой угол, прилежащий к большему основанию, равен* 120°, *а боковая сторона, прилежащая к нему, равна* 7 *см; большее основание равно* 12 *см. Найти среднюю линию трапеции.*

Основным объектом этой задачи является трапеция. В этой трапеции одна из диагоналей перпендикулярна к ее основаниям. Если вы начнете чертить эту трапецию обычным способом, т. е. начиная с построения ее сторон, то обязательно ошибетесь (проверьте: попробуйте, не читая последующие строки, начертить заданную трапецию, начиная с построения ее оснований и боковых сторон).

Лучше начать с построения указанной диагонали. Обратите внимание на то, что эта диагональ перпендикулярна к обеим основаниям трапеции. Это можно представить так: диагональ — это вертикальный отрезок, от концов которого отходят два горизонтальных отрезка (основания трапеции), притом в разные стороны. Когда вы это построите, то тогда вам станет ясно, что углы трапеции у вершин, которые соединяет эта диагональ, должны быть оба тупыми. Действительно, в задаче дано, что угол при большем основании равен 120°. Это должен быть как раз тот угол, вершина которого есть один из концов построенной диагонали. Теперь уже построить заданную трапецию нетрудно. Обозначим ее вершины, заданный угол отметим дугой и проведем среднюю линию. Пользуясь принятыми на чертеже обозначениями, запишем все условия и требование задачи. Получаем такую схематическую запись задачи (рис. 2).

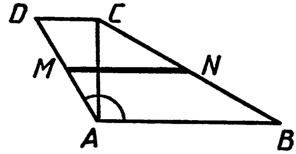


Рис. 2

Дано: 1) $AB \parallel CD$; 2) $AB \perp AC$, 3) $AC \perp CD$; 4) $\angle BAD = 120°$; 5) $AB = 12$ см; 6) $AD = 7$ см; 7) $AM = MD$; $BN = NC$.

Найти: MN.

Задача 13. *На основании равнобедренного треугольника взята точка, делящая основание на два отрезка длиной 8 см и 12 см, и эта точка соединена с вершиной треугольника. В образовавшиеся два треугольника вписаны окружности. Найти расстояние между точками касания этих окружностей с проведенной прямой.*

Основным объектом задачи является равнобедренный треугольник. В нем заданы лишь два отрезка, на которые делит основание некоторая точка на нем. Поэтому мы можем построить произвольный равнобедренный треугольник. На его основании выберем точку, которая делит основание в отношении $8:12 = 2:3$, и эту точку соединим с вершиной треугольника. В получившиеся два треугольника впишем окружности. Таким образом построение чертежа не вызывает особых трудностей.

Несколько сложнее с краткой записью условий. Нужно записать, что построенные окружности вписаны в соответствующие треугольники. Но это как раз можно не делать, ибо сам чертеж наглядно показывает это условие. Нужно также записать, что точки K и H (рис. 3) являются точками касания указанных окружностей с проведенной прямой. Это можно записать просто словами, но лучше использовать символику, рассматривая, напри-

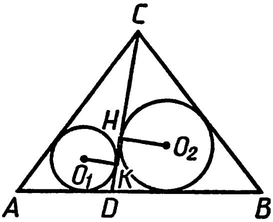


Рис. 3

мер, эти точки как общие части соответствующих окружностей и секущей прямой.

В результате получаем такую схематическую запись задачи (рис. 3).

Дано: 1) $AC=BC$;
2) $AD=8$ см;
3) $DB=12$ см;
4) K и H — точки касания CD и соответственно окружностей с центрами O_1 и O_2.

Найти: KH.

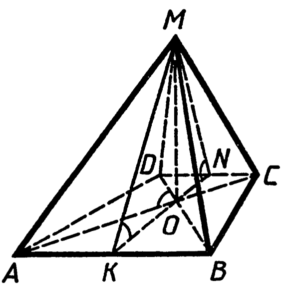


Рис. 4

Приведем теперь примеры построения чертежей для схематических записей стереометрических задач.

Задача 14. *Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, в которой параллельные стороны равны* 12 *см и* 8 *см, а неравные отрезки диагоналей образуют угол в* 60°. *Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания. Двугранные углы, образованные боковыми гранями с основанием и прилежащие к параллельным сторонам трапеции, относятся как* 1 : 2. *Определить объем пирамиды.*

Основной объект задачи — четырехугольная пирамида. Построение ее чертежа можно выполнить, например, так.

Проводим произвольный отрезок AB (удобнее горизонтальный) и через середину его — точку K — проводим примерно под углом в 30° прямую. Через произвольную точку N этой прямой проводим другую прямую, параллельную прямой AB, и на ней откладываем по обе стороны точки N два равных отрезка NC и ND (несколько меньшие, чем половина отрезка AB). Соединив C с B и D с A, получаем основание пирамиды — трапецию $ABCD$. Проводим в ней диагонали и через точку O — точку пересечения этих диагоналей проводим высоту пирамиды — вертикальный отрезок OM.

Соединив точку M со всеми вершинами основания, получаем полный чертеж заданной пирамиды (рис. 4).

При краткой записи условий можно непосредственно записать заданное отношение двугранных углов, но можно сначала построить на чертеже линейные углы этих двугранных углов, записать отношение линейных углов. В первом случае получаем такую схематическую запись задачи (рис. 4).

Дано: 1) $AB \parallel CD$; 2) $AD = BC$;
3) $\angle AOD = 60°$; 4) $OM \perp (ABCD)$[1];
5) $\angle (MAB;\ ABCD)$[2]: $\angle (MCD;\ ABCD) = 1:2$.

Найти: V_{ABCD}.

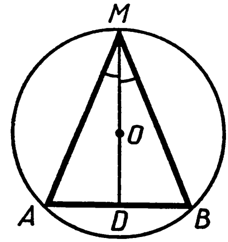


Рис. 5

Во втором случае условие 5 можно записать так: $\angle OKM : \angle ONM = 1:2$. Но тогда в самом решении нужно описать построение линейных углов заданных двугранных углов (через точку O проводим прямую KN перпендикулярно основаниям трапеции, тогда угол OKM будет линейным углом двугранного угла с ребром AB, а угол ONM будет линейным углом двугранного угла с ребром CD). Последние утверждения, что углы OKM и ONM являются линейными углами соответствующих двугранных углов, необходимо обосновать, доказать.

Задача 15. *Определить отношение объема конуса к объему описанного около него шара, если образующая конуса составляет с его осью угол в* 20°.

Основной объект данной задачи есть конус с описанным около него шаром. Но для схематической записи задачи нет надобности чертить конус и описанный шар, достаточно построить сечение этих фигур. Удобнее построить сечение, проходящее через ось конуса. Это сечение плоскостью представляет собой равнобедренный треугольник (осевое сечение конуса) с описанной вокруг него окружностью (сечение описанного шара).

Схематическую запись задачи можно представить так (рис. 5).

Дано: 1) $\triangle ABM$ — осевое сечение конуса; $AM = BM$; $MD \perp AB$; $\angle BMD = 20°$;
2) $(O;\ OM)$ — осевое сечение описанного шара.

Найти: $V_{кон} : V_{шара}$.

Задание 5

Для того чтобы проверить себя, все ли вы правильно поняли в изложении последнего пункта, ответьте на следующие вопросы.

5.1. Какое условие записано под номером 7 в схематической записи задачи 12? Как иначе можно записать это условие?

---

[1] $(ABCD)$ — плоскость $ABCD$.

[2] $\angle (MAB; ABCD)$ — двугранный угол, образованный гранями MAB и $ABCD$.

5.2. Какое условие записано под номером 4 в схематической записи задачи 13? Как иначе можно было записать это условие?

5.3. Какое условие записано под номерами 1 и 2 в схематической записи задачи 14?

5.4. Прочитать словами запись условия под номером 5 в схематической записи задачи 14.

Задание 6

Постройте схематические записи следующих задач.

6.1. В треугольнике сумма двух сторон равна 14 см, а третья сторона делится биссектрисой противоположного угла на отрезки 3 см и 4 см. Определить стороны треугольника.

6.2. Две окружности равных радиусов касаются внешним образом в точке K; в одной из них проведена хорда KA, а в другой — хорда KB, перпендикулярная первой. Определить отрезок AB, если радиусы окружностей равны 15 см.

6.3. Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18 см, а длины сторон оснований равны 14 см и 10 см.

6.4. В шар радиуса R вписаны два конуса с общим основанием; вершины конусов совпадают с противоположными концами диаметра шара. Шаровой сегмент, вмещающий меньший конус, имеет в осевом сечении дугу, равную 120°. Найди расстояние между центрами шаров, вписанных в эти конусы.

Задание 7

По приведенным схематическим записям сформулируйте соответствующие им задачи.

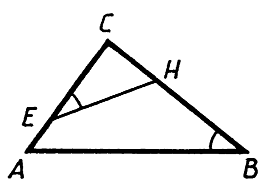


Рис. 6

7.1. (Рис. 6.)

Дано: 1) $AB=12$ см;
2) $BC=10$ см;
3) $AC=8$ см;
4) $AE=2$ см;
5) $\angle CEH=\angle ABC$.

Найти: EH и BH.

7.2. $\left.\begin{array}{r}\text{I отряд — 75 \% от } x.\\ \text{II отряд — } x \text{ кг семян.}\\ \text{III отряд — 110 \% от } x.\end{array}\right\}$ Вместе — 85,5 кг.

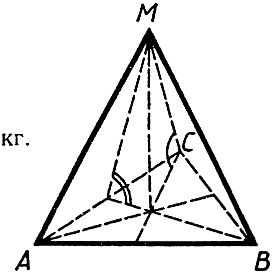


Рис. 7

7.3. (Рис. 7.)

Дано: 1) $ABCM$ — правильная пирамида;
2) $\angle\,(MC;\,ABC)=60°$.

Найти: $\angle\,(ACM;\,ABC)$.

7.4. По приведенной схематической записи сформулируйте соответствующую задачу.

Скорость, км/ч	Время, ч	Путь AB, км
a	t	x
50	$t+1$	x
70	$t-1$	x

I.7. Практические и математические задачи

Задачи, которые вы решаете в школе, различаются в первую очередь характером своих объектов. В одних задачах объектами являются реальные предметы, в других — все объекты математические (числа, геометрические фигуры, функции и т. д.). Первые задачи, в которых хотя бы один объект есть реальный предмет, называются *практическими* (житейскими, текстовыми, сюжетными); вторые, все объекты которых математические, называются *математическими* задачами.

Из приведенных выше задач 4, 9 и 11 — практические задачи, а все остальные математические. Приведем еще один пример практической задачи.

Задача 16. *Телефонная проволока длиной* 15 *м протянута от столба, где она прикреплена на высоте* 8 *м от поверхности земли, к дому, где ее прикрепили на высоте* 20 *м. Найти расстояние между домом и столбом, если проволока не провисает.*

Объектами этой задачи являются вполне реальные предметы: проволока, столб, дом. Поэтому это практическая задача. Чтобы ее решить с помощью математики, надо построить соответствующую ей математическую задачу, которая получается путем отвлечения от конкретных особенностей реальных предметов и заменой их математическими объектами. В данном случае проволоку, столб и дом (точнее, стену дома) можно рассматривать как отрезки. Считая, что поверхность земли есть прямая, а отрезки, изображающие столб и дом, перпендикулярны к этой прямой, получаем такую математическую задачу.

Задача 17. *Отрезки длиной* 8 *м и* 20 *м перпендикулярны к прямой, соединяющей их концы, и расположены по одну сторону от этой прямой. Отрезок, соединяющий другие концы этих отрезков, имеет длину* 15 *м. Найти расстояние между отрезками.*

Заметим, что в курсе математики решаются лишь такие практические задачи, которые сводимы к математическим. Решение же математических задач и сводимых к ним практических рассмотрим в следующей главе.

Глава II

СУЩНОСТЬ И СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В предыдущей главе вы познакомились с составными частями задачи, с тем, как следует производить анализ задач. Теперь нужно разобраться в том, что составляет сущность решения задач, какова структура процесса решения, в чем особенности отдельных этапов этого процесса. Только сделав это, можно перейти к основному вопросу этой книги: как искать решение задач?

Итак, переходим к детальному рассмотрению вопросов о сущности и структуре решения задач.

II.1. Что значит решить математическую задачу?

Задумайтесь над вопросом, который мы вынесли в заглавие данного пункта. Вы уже решали тысячи задач. А можете ли вы ответить на поставленный вопрос? Возможно, что вы так ответите: решить задачу — это значит найти ее ответ.

Что ж, в какой-то степени это верно, но все дело в том, как понимать слово «найти». Вот кто-то, получив задачу, узнав какимлибо способом ее ответ (например, подсмотрев в ответы задачника), просто сообщает этот ответ. Он, конечно, нашел ответ. Но можно ли считать, что он решил задачу? Очевидно, что нет. Значит, решение задачи не просто состоит в том, чтобы найти ответ, а в чем-то ином.

Чтобы разобраться в этом, придется внимательно приглядеться к процессу решения задач. Чтобы это легче было сделать, рассмотрим решения несложных задач и при этом будем выписывать эти решения самым подробным образом.

Задача 18. *Разложить на множители многочлен*

$$x^3-24+6x^2-4x.$$

Решение. На основе переместительного и сочетательного законов сложения данный многочлен можно представить в таком виде:

$$x^3-24+6x^2-4x=(x^3-4x)+(6x^2-24). \qquad (1)$$

Применим к каждому из выражений, стоящих в скобках в правой части равенства (1), правило вынесения общего множителя за скобки. Общим множителем для первого выражения x^3-4x является x, а для второго выражения $6x^2-24$ является число 6. Тогда получим:

$$(x^3-4x)+(6x^2-24)=x(x^2-4)+6(x^2-4). \qquad (2)$$

Теперь, рассматривая x^2-4 как множитель, можно, используя то же правило вынесения общего множителя за скобки, выражение, стоящее в правой части равенства (2), представить в таком виде:

$$x(x^2-4)+6(x^2-4)=(x^2-4)\ (x+6). \qquad (3)$$

Осталось к выражению, стоящему в первой скобке правой части (3), применить правило разложения на множители разности квадратов:

$$(x^2-4)\ (x+6)=(x+2)\ (x-2)\ (x+6). \qquad (4)$$

Сравнивая теперь полученные равенства (1), (2), (3), (4) и замечая, что правая часть каждого из первых трех равенств одинакова с левой частью следующего за ним равенства, на основании свойства транзитивности равенств (если $a=b$ и $b=c$, то и $a=c$) получаем, что левая часть первого равенства равна правой части последнего, т. е.

$$x^3-24+6x^2-4x=(x+2)\ (x-2)\ (x+6).$$

Тем самым заданный многочлен разложен на множители и, следовательно, задача решена.

Внимательно анализируя приведенное решение, замечаем, что оно состоит из отдельных шагов, при этом каждый шаг решения есть применение какого-либо общего положения математики (правила, тождества, закона, формулы) к отдельным условиям задачи или к полученным следствиям из этих условий.

Приведенное решение задачи 18 можно представить в виде схемы.

Заметим, что в этой схеме расчленение решения задачи на отдельные шаги произведено не до конца. Так, например, первый шаг можно было расчленить на несколько более элементарных шагов, в каждом из которых использовался лишь один из двух указанных законов сложения. Точно так же второй шаг можно было расчленить на два, в каждом из которых правило вынесения

Схема решения задачи 18

№ шагов решения	Общие положения математики	Условия задачи или их следствия	Результат
1	Переместительный и сочетательный законы сложения	$x^3-24+6x^2-4x$	$(x^3-4x)+(6x^2-24)$
2	Правило вынесения общего множителя за скобки	$(x^3-4x)+(6x^2-24)$	$x(x^2-4)+6(x^2-4)$
3	То же правило	$x(x^2-4)+6(x^2-4)$	$(x^2-4)\ (x+6)$
4	Правило разложения на множители разности квадратов	$(x^2-4)\ (x+6)$	$(x+2)(x-2)(x+6)$
5	Свойство транзитивности равенства	Все полученные равенства	$x^3-24+6x^2-4x=$ $=(x+2)(x-2)(x+6)$

общего множителя за скобки применялось бы лишь к одному из двух рассматриваемых выражений. Это же относится и к последующим шагам. Больше того, такое расчленение можно было бы продолжить и дальше. Но мы это не делали и не будем делать в дальнейшем, ибо такое скрупулезное расчленение нужно для составления программы решения задачи электронно-вычислительной машиной, но не человеком, который обычно оперирует более крупными блоками.

Рассмотрим решение еще одной задачи.

Задача 19. *Длины оснований трапеции равны* 4 *см и* 10 *см. Найти длины отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.*

Сначала построим схематическую запись задачи (рис. 8).

Дано: $AB \parallel CD$; $AM=MD$; $BN=NC$; $AB=10$ см; $CD=4$ см.

Найти: MK и NK.

Решение. Как известно, средняя линия трапеции параллельна ее основаниям. Значит, $MN \parallel AB$ и $MN \parallel CD$. Диагональ AC делит трапецию на два треугольника. Рассмотрим каждый из них. В $\triangle ABC$ отрезок NK является средней линией, ибо NK как часть отрезка NM параллельна AB, и точка N по условию есть середина стороны BC. А средняя линия треугольника равна половине основания. Значит, $KN=\frac{1}{2}AB$, а так как $AB=10$ см, то $KN=5$ см.

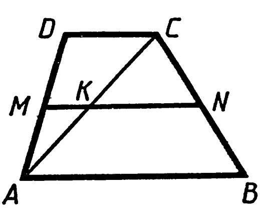


Рис. 8

Аналогично, рассматривая $\triangle ACD$, мы убеждаемся, что MK есть средняя линия этого треугольника и поэтому $MK=\frac{1}{2}CD$, но $CD=4$ см, следовательно, $MK=2$ см.

Итак, искомые длины отрезков найдены, задача решена.

Приведенное решение можно представить в виде схемы.

Схема решения задачи 19

№ шагов решения	Общие положения математики	Условия задачи или их следствия	Результат
1	Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям	MN — средняя линия трапеции $ABCD$	$MN \parallel AB$, $MN \parallel CD$
2	Диагональ делит трапецию на два треугольника	$ABCD$ — трапеция, AC — ее диагональ	ABC и ACD — треугольники
3—4	Отрезок, проходящий через середину стороны треугольника параллельно другой стороне, является средней линией треугольника	В $\triangle ABC$ точка N — середина BC и $NK \parallel AB$, в $\triangle ACD$ точка M — середина AD и $MK \parallel CD$	NK — средняя линия $\triangle ABC$, MK — средняя линия $\triangle ACD$
5—6	Средняя линия треугольника равна половине основания	NK — средняя линия $\triangle ABC$, $AB=10$ см	$NK=\frac{1}{2}AB=$ $=\frac{1}{2}\cdot 10=5$ см
		MK — средняя линия $\triangle ACD$, $CD=4$ см	$MK=\frac{1}{2}CD=$ $=\frac{1}{2}\cdot 4=2$ см

Из приведенных примеров можно сделать следующий вывод: *Решить математическую задачу — это значит найти такую последовательность общих положений математики* (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), *применяя которые к условиям задачи или к их следствиям* (промежуточным результатам решения), *получаем то, что требуется в задаче,— ее ответ.*

К вопросу о сущности решения задач мы еще неоднократно будем возвращаться и приведенную формулировку будем уточнять. Кроме того, этот вопрос рассмотрим с других точек зрения. Так что на приведенное определение следует смотреть лишь как на первое, самое общее толкование сущности решения математических задач.

Задание 8

Составьте схему решения приведенных ниже задач так же, как это было сделано выше для задач 18 и 19.

8.1. Решить уравнение $\cos^2 x - 2\sin x = -\frac{1}{4}$.

8.2. Большая сторона треугольника ABC равна a. Периметр треугольника, вершинами которого служат середины сторон $\triangle ABC$, равен Q. Доказать, что $a < Q$.

II.2. Структура процесса решения задач

Когда в предыдущем пункте мы выписывали решения задач, то эти записи представляли собой лишь изложения самого решения. Но как эти решения были найдены, как убедились, что они правильные,— обо всем этом ничего не было сказано. Если под процессом решения задач понимать процесс, начинающийся с момента получения задачи до момента полного завершения ее решения, то, очевидно, что этот процесс состоит не только из изложения уже найденного решения, а из ряда этапов, одним из которых и является изложение решения.

Из каких же этапов состоит процесс решения задачи?

Очевидно, получив задачу, первое, что нужно сделать,—это разобраться в том, что это за задача, каковы ее условия, в чем состоят ее требования, т. е. провести тот анализ задачи, о котором говорилось в первой главе. Этот анализ и составляет *первый этап* процесса решения задачи.

В ряде случаев этот анализ надо как-то оформить, записать. Для этого, как вы знаете, используются разного рода схематические записи задач, построение которых составляет *второй этап* процесса решения.

Анализ задачи и построение ее схематической записи необходимы главным образом для того, чтобы найти способ решения данной задачи. Поиск этого способа составляет *третий этап* процесса решения.

Когда способ решения задачи найден, его нужно осуществить,— это будет уже *четвертый этап* процесса решения — этап осуществления (изложения) решения.

После того как решение осуществлено и изложено (письменно или устно), необходимо убедиться, что это решение правильное, что оно удовлетворяет всем требованиям задачи. Для этого производят проверку решения, что составляет *пятый этап* процесса решения.

При решении многих задач, кроме проверки, необходимо еще произвести исследование задачи, а именно установить, при каких условиях задача имеет решение и притом сколько различных решений в каждом отдельном случае; при каких условиях задача вообще не имеет решения и т. д. Все это составляет *шестой этап* процесса решения.

Убедившись в правильности решения и, если нужно, произведя исследование задачи, необходимо четко сформулировать ответ задачи,— это будет *седьмой этап* процесса решения.

Наконец, в учебных и познавательных целях полезно также произвести анализ выполненного решения, в частности установить, нет ли другого, более рационального способа решения, нельзя ли задачу обобщить, какие выводы можно сделать из этого решения и т. д. Все это составляет последний, конечно не обязательный, *восьмой этап* решения.

Итак, весь процесс решения задачи можно разделить на восемь этапов:

1-й этап — анализ задачи;
2-й этап — схематическая запись задачи;
3-й этап — поиск способа решения задачи;
4-й этап — осуществление решения задачи;
5-й этап — проверка решения задачи;
6-й этап — исследование задачи;
7-й этап — формулирование ответа задачи;
8-й этап — анализ решения задачи.

Приведенная схема дает лишь общее представление о процессе решения задач как о сложном и многоплановом процессе. Приведем несколько примеров решения задач, на которых покажем более конкретно этот процесс.

Задача 20. *Лодка прошла по течению реки расстояние между двумя пристанями за* 6 *ч, а обратный путь она совершила за* 8 *ч. За сколько времени пройдет расстояние между пристанями плот, пущенный по течению реки?*

1. Анализ задачи. В задаче речь идет о двух объектах: лодка и плот. Лодка имеет какую-то собственную скорость, а река, по которой плывет и лодка, и плот, имеет определенную скорость течения. Именно поэтому лодка совершает путь между пристанями по течению реки за меньшее время (6 ч), чем против течения (8 ч). Но эти скорости (собственная скорость лодки и скорость течения реки) в задаче не даны (они неизвестны), так же как неизвестно расстояние между пристанями. Однако требуется найти не эти неизвестные скорости и расстояние, а время, за которое плот проплывет неизвестное расстояние между пристанями.

2. Схематическая запись задачи (рис. 9).

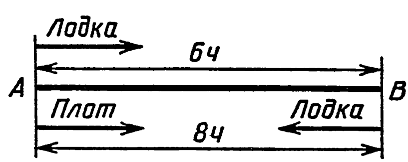


Рис. 9

3. Поиск способа решения задачи. Нужно найти время, за которое плот проплывет расстояние между пристанями A и B. Для того чтобы найти это время, надо знать расстояние AB и скорость течения реки. Оба они неизвестны, поэтому обозначим расстояние AB буквой s (км), а скорость течения реки примем равной a км/ч. Чтобы связать эти неизвестные с данными задачи (время движения лодки по и против течения реки), нужно еще знать собственную скорость лодки. Она тоже неизвестна, положим, что она равна v км/ч. Отсюда естественно возникает план решения, заключающийся в том, чтобы составить систему уравнений относительно введенных неизвестных.

4. Осуществление решения задачи. Итак, пусть расстояние AB равно s км, скорость течения реки a км/ч, собственная скорость лодки v км/ч, а искомое время движения плота на пути в s км равно x ч.

Тогда скорость лодки по течению реки равна $(v+a)$ км/ч. За 6 ч лодка, идя с этой скоростью, прошла путь AB в s км. Следовательно.

$$6\,(v+a)=s. \tag{1}$$

Против течения эта лодка идет со скоростью $(v-a)$ км/ч и путь AB в s км она проходит за 8 ч, поэтому

$$8(v-a)=s. \tag{2}$$

Наконец, плот, плывя со скоростью a км/ч, покрыл расстояние s км за x ч, следовательно,

$$ax=s. \tag{3}$$

Уравнения (1), (2) и (3) образуют систему уравнений относительно неизвестных s, a, v и x. Так как требуется найти лишь x, то остальные неизвестные постараемся исключить.

Для этого из уравнений (1) и (2) найдем:

$$v+a=\frac{s}{6},\quad v-a=\frac{s}{8}.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$2a=\frac{s}{6}-\frac{s}{8},\ \text{отсюда}\ a=\frac{s}{48}.$$

Подставим найденное выражение для a в уравнение (3):

$$\frac{s}{48}\cdot x=s.$$

Так как, очевидно, s не равно нулю, то можно обе части полученного уравнения разделить на s. Тогда найдем: $x=48$.

5. Проверка решения. Итак, мы нашли, что плот проплывает расстояние между пристанями за 48 ч. Следовательно, его скорость, равная скорости течения реки, равна $\frac{s}{48}$ км/ч. Скорость же лодки по течению равна $\frac{s}{6}$ км/ч, а против течения $\frac{s}{8}$ км/ч. Для того чтобы убедиться в правильности решения, достаточно проверить, будут ли равны собственные скорости лодки, найденные двумя способами:

1) от скорости лодки по течению отнять скорость течения реки, т. е. $\frac{s}{6}-\frac{s}{48}$,

2) к скорости лодки против течения реки прибавить скорость течения реки, т. е. $\frac{s}{8}+\frac{s}{48}$.

Произведя вычисления, получаем верное равенство: $\frac{7s}{48}=\frac{7s}{48}$.

Значит, задача решена правильно.

6. Исследование задачи. В данном случае этот этап решения не нужен.

7. Ответ: плот проплывет расстояние между пристанями за 48 ч.

8. Анализ решения. Мы свели решение этой задачи к решению системы трех уравнений с четырьмя неизвестными. Однако найти-то надо было нам лишь одно из этих неизвестных. Поэтому, естественно, возникает мысль, что проведенное решение не самое удачное, хотя и достаточно простое. Можно предложить другое решение.

Зная, что лодка проплыла расстояние AB по течению реки за 6 ч, а против — за 8 ч, найдем, что в 1 ч лодка, идя по течению, проходит $\frac{1}{6}$ часть этого расстояния, а против течения $\frac{1}{8}$. Тогда разность между ними $\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}\right)$ есть удвоенная часть расстояния AB, проплываемая плотом за 1 ч. Значит, плот за 1 ч проплывет $\frac{1}{48}$ часть расстояния AB, следовательно, все расстояние AB он проплывет за 48 ч.

Как видим, при таком решении нам не понадобилось составлять систему уравнений. Однако, несомненно, это решение сложнее приведенного выше, хотя бы потому, что не всякий догадается найти разность скоростей лодки по течению и против течения реки. Часто также эту разность принимают не за удвоенную часть расстояния AB, проплываемую плотом за 1 ч, а за скорость плота, что, конечно, приводит к ошибочному ответу.

Следует обратить внимание в приведенном решении еще на одно обстоятельство. В этом решении была получена система трех уравнений с четырьмя неизвестными. И хотя число неизвестных больше числа уравнений, из этой системы удалось найти числовое значение одного из неизвестных. Значит, не всегда такая система полностью неопределенная, в том смысле, что из нее можно найти лишь выражения одних неизвестных через другие. Как видим, в некоторых случаях из такой системы удается найти значения отдельных неизвестных (конечно, не всех).

Задача 21. *В основании пирамиды лежит правильный треугольник, стороны которого равны а. Два боковых ребра пирамиды составляют с плоскостью основания углы, равные* α, *а грань, заключенная между ними, наклонена к основанию под углом* β. *Найти объем пирамиды.*

1. Анализ задачи. Данная задача является геометрической задачей на вычисление с параметрами (буквенными данными). Поэтому в первую очередь надо установить возможные области изменения параметров. Очевидно, что a — длина стороны основания пирамиды — может быть любым положительным числом, т. е.

$$a>0. \tag{1}$$

Углы α, как углы наклона боковых ребер к основанию, т. е. углы между этими ребрами и их проекциями на основание, могут быть лишь острыми:

$$0°<\alpha<90°. \tag{2}$$

Что касается угла β — двугранного угла между боковой гранью и плоскостью основания, то этот угол может меняться в пределах от 0° до 180°:

$$0°<\beta<180°. \tag{3}$$

При этих условиях, которые мы уточним в процессе дальнейшего решения, можно перейти к поиску решения. Но предварительно нужно построить схематическую запись задачи, и в частности чертеж заданной пирамиды, ибо иначе трудно будет искать и выполнять план решения.

2. Схематическая запись задачи. Построим заданную в задаче пирамиду. Но очевидно, что чертеж этой пирамиды существенно зависит от того, как наклонена указанная боковая грань к плоскости основания, т. е. каково значение параметра β. Возможны три случая:

$$1)\ 0°<\beta<90°;\ 2)\ \beta=90°;\ 3)\ 90°<\beta<180°.$$

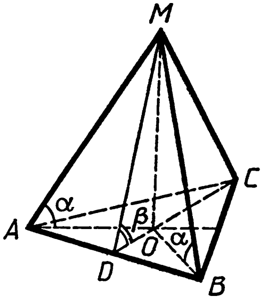


Рис. 10

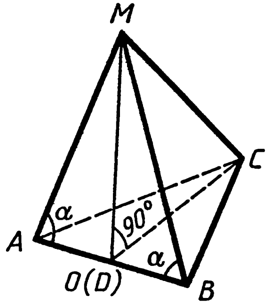


Рис. 11

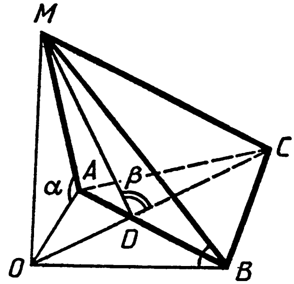


Рис. 12

Этим трем случаям соответствуют три различных вида пирамиды, изображенные соответственно на рисунках 10—12.

Для того чтобы построить углы наклона ребер AM и BM к плоскости основания, опускаем из вершины M перпендикуляр MO на плоскость основания. Тогда, очевидно, AO и BO будут проекциями ребер AM и BM и, следовательно, $\angle MAO$ и $\angle MBO$ будут указанными углами. Для того чтобы построить линейный угол двугранного угла, образованного гранью AMB с плоскостью основания, проводим $OD \perp AB$ (заметим, что на рис. 11 точки O и D совпадают). Тогда по известной теореме о трех перпендикулярах $DM \perp AB$. Так как $\triangle OAM = \triangle OBM$ (объясните почему), то $AM = BM$. Отсюда следует, что высота MD проходит через середину AB (почему?). Учитывая, что $\triangle ABC$ правильный, получаем, что продолжение OD должно проходить через вершину C (почему?). Тогда $\angle CDM$ и есть линейный угол указанного двугранного угла.

Исходя из всего этого, условия задачи можно записать так.

Дано: 1) $AB = BC = CA = a$; 2) $MO \perp (ABC)$[1];

3) $OD \perp AB$; 4) $\angle OAM = \angle OBM = \alpha$; 5) $\angle CDM = \beta$.

Найти: $V_{\text{пир}}$.

3—5. Поиск и осуществление решения. Исследование задачи.

Эти три этапа процесса решения в данном случае удобно производить совместно.

По известной формуле имеем:

$$V = \frac{1}{3} Sh, \tag{4}$$

где S — площадь $\triangle ABC$, а $h = MO$.

[1] (ABC) — плоскость ABC.

Так как $\triangle ABC$ правильный со стороной a, то

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \tag{5}$$

Осталось найти h. Проще всего найти h для второго случая, когда $\beta=90°$ (рис. 11). Из прямоугольного $\triangle AOM$, где $AO=$ $=\frac{a}{2}$, находим:

$$h=OM=AO\operatorname{tg} OAM=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha. \tag{6}$$

Подставив значения S и h из (5) и (6) в формулу (4), получаем для данного случая, что

$$V=\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha\sqrt{3}}{24}. \tag{7}$$

В остальных двух случаях можно поступить так. Из прямоугольного $\triangle AOM$ находим:

$$AO=OM:\operatorname{tg} OAM=\frac{h}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{8}$$

Из прямоугольного $\triangle ODM$ имеем:

$$OD=\frac{OM}{\operatorname{tg} ODM}=\frac{h}{\operatorname{tg} ODM}.$$

Для первого случая, когда угол β острый, получаем:

$$OD=\frac{h}{\operatorname{tg}\beta}. \tag{9}$$

Для случая, когда угол β тупой, получаем:

$$OD=\frac{h}{\operatorname{tg}(180°-\beta)}=-\frac{h}{\operatorname{tg}\beta}. \tag{9'}$$

Теперь из прямоугольного $\triangle ADO$, где $AD=\frac{a}{2}$, имеем:

$$\frac{a^2}{4}=AO^2-OD^2.$$

Подставляя сюда значения AO и OD из формул (8) и (9) или (9′), получим:

$$\frac{a^2}{4}=h^2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2\beta}\right).$$

Отсюда

$$h^2=\frac{a^2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}{4(\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\alpha)}.$$

Это выражение имеет смысл лишь тогда, когда $\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\alpha>0$ или

$$\frac{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}>0.$$

Отсюда следует, что

$$\beta>\alpha \tag{10}$$

и

$$\alpha+\beta<180^\circ. \tag{11}$$

Эти условия уточняют область изменения параметров. При их выполнении найдем: $h=\frac{a\,|\operatorname{tg}\alpha|\cdot|\operatorname{tg}\beta|}{2\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

Учитывая условия (2) для рассматриваемых двух случаев, получим:

$$h=\begin{cases}\dfrac{a\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\alpha}} & (0^\circ<\beta<90^\circ),\\ -\dfrac{a\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\alpha}} & (90^\circ<\beta<180^\circ).\end{cases}$$

Подставляя в формулу (4), найдем окончательно:

$$V=\begin{cases}\dfrac{a^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{24\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\alpha}} & (0^\circ<\beta<90^\circ),\\ -\dfrac{a^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{24\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\alpha}} & (90^\circ<\beta<180^\circ).\end{cases}$$

6. Проверка. В данном случае проверка решения сводится к тому, чтобы убедиться, что по найденным формулам действительно можно вычислить V такое, которое принадлежит области его определения. Очевидно, что должно соблюдаться лишь одно условие: $V>0$. Рассматривая полученные формулы для V для всех трех случаев и учитывая указанные при этом условия задачи, легко убеждаемся в выполнении указанного условия.

7. Ответ: при $\beta>\alpha>0^\circ$, $\alpha<90^\circ$; $\alpha+\beta<180^\circ$, $a>0$:

$$V=\begin{cases}\dfrac{a^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{24\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\alpha}}, & \text{если } 0^\circ<\beta<90^\circ,\\ \dfrac{a^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{24}, & \text{если } \beta=90^\circ,\\ -\dfrac{a^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{24\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\alpha}}, & \text{если } 90^\circ<\beta<180^\circ.\end{cases}$$

8. Исследование решения. Просматривая внимательно проведенное решение, замечаем, во-первых, что при решении подобных задач важно предварительно при анализе задачи установить области изменения параметров. Но оказывается, что непосредственно из условия задачи эти области изменения не всегда можно найти. В данном случае в процессе решения мы значительно уточнили предварительно найденную область, установив дополнительные условия (10) и (11).

Следовательно, при решении подобных задач надо анализировать каждый шаг решения с точки зрения его выполнимости при предварительно найденных или заданных условиях и при необходимости эти условия уточнять, тем самым суживая области изменения параметров.

Во-вторых, можно было найти h для случаев острого и тупого углов несколько иначе, а именно:

$$h^2=\frac{a^2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}{4(\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\alpha)}=\frac{a^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{4\sin(\beta-\alpha)\sin(\alpha+\beta)}.$$

При выполнении условий (10) и (11) получаем для обоих рассматриваемых случаев одну общую формулу:

$$h=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{2\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}.$$

Тогда ответ задачи принял бы такую форму: при $\beta>\alpha>0°$, $\alpha<90°$, $\alpha+\beta<180°$, $a>0$

$$V=\begin{cases}\dfrac{a^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{24}, & \text{если } \beta=90°,\\[2mm] \dfrac{a^3\sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta}{24\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}, & \text{если } \beta\neq 90°.\end{cases}$$

Задача 22. *Вычислить без таблиц значение выражения*

$$\operatorname{ctg}9°+\operatorname{ctg}15°+\operatorname{tg}9°+\operatorname{tg}15°-\operatorname{ctg}27°-\operatorname{tg}27°.$$

Решение. Для того чтобы вычислить это выражение, очевидно, надо так его преобразовать, чтобы в нем остались лишь тригонометрические функции известных углов (например, 30°, 45° и 60°) и определенные числа. Для этого надо воспользоваться известными формулами преобразования суммы и разности двух функций одного и того же аргумента. Поэтому, обозначив значение этого выражения буквой M, сгруппируем в нем попарно функции одного и того же аргумента:

$$M=(\operatorname{ctg}9°+\operatorname{tg}9°)+(\operatorname{ctg}15°+\operatorname{tg}15°)-(\operatorname{ctg}27°+\operatorname{tg}27°).$$

Заменим котангенсы через тангенсы:

$$M=\left(\frac{1}{\operatorname{tg} 9^\circ}+\operatorname{tg} 9^\circ\right)+\left(\frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ}+\operatorname{tg} 15^\circ\right)-\left(\frac{1}{\operatorname{tg} 27^\circ}+\operatorname{tg} 27^\circ\right)=$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}^2 9^\circ}{\operatorname{tg} 9^\circ}+\frac{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ}{\operatorname{tg} 15^\circ}-\frac{1+\operatorname{tg}^2 27^\circ}{\operatorname{tg} 27^\circ}.$$

Используем формулу $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ и заменим в знаменателях тангенсы через синусы и косинусы соответствующих углов, получим после преобразований:

$$M=\frac{1}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ}+\frac{1}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}-\frac{1}{\sin 27^\circ \cos 27^\circ}.$$

Теперь воспользуемся формулой синуса двойного угла:

$$M=\frac{2}{\sin 18^\circ}+\frac{2}{\sin 30^\circ}-\frac{2}{\sin 54^\circ}.$$

Первую и третью дроби сгруппируем, а во второй заменим $\sin 30^\circ$ его значением: $M=\frac{2\,(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ}+4.$

Разность синусов преобразуем в произведение:

$$M=\frac{4\cos 36^\circ \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ}+4.$$

Зная, что $\cos 36^\circ=\sin 54^\circ$, получаем окончательно:

$$M=4+4=8.$$

Как видим, в этом решении трудно выделить отдельные этапы, ибо анализ, поиск решения и проверка решения производились по ходу осуществления решения. Этапы же схематической записи задачи и исследования задачи здесь вовсе оказались ненужными. Что касается анализа решения, то он также вряд ли нужен, хотя некоторое рассмотрение решения с целью закрепления в памяти использованных приемов было бы полезно.

Таким образом, структура процесса решения задачи зависит в первую очередь от характера задачи и, конечно, от того, какими знаниями и умениями обладает решающий задачу.

Приведенная выше схема процесса решения задач является лишь примерной. При фактическом решении указанные там этапы обычно не отделены друг от друга, а переплетаются между собой. Так, в процессе анализа задачи обычно производится и поиск решения. При этом полный план решения устанавливается не до осуществления решения, а в его процессе. Тогда поиск решения ограничивается лишь нахождением идеи решения. Порядок этапов также иногда может меняться.

Из указанных восьми этапов пять являются обязательными, и они имеются (в том или ином виде) в процессе решения любой задачи. Это этапы анализа задачи, поиска способа ее решения, осуществления решения, проверки решения и формулирования ответа. Остальные три этапа (схематическая запись задачи, исследование задачи и заключительный анализ решения) являются не обязательными и в процессе решения многих задач не имеются. (Схему процесса решения задачи смотрите на первом форзаце.)

Анализ задачи, т. е. выяснение характера задачи, ее вида, установление ее условий и требований (конечно, не всегда в полном объеме), мы производим в процессе решения любой, даже самой простейшей задачи. Когда мы читаем, например, такую задачу: «Решить уравнение $x^2+3x+2=0$» — и говорим: «Это квадратное уравнение», то уже тем самым мы произвели анализ этой задачи. Конечно, это самый простейший анализ, состоящий в установлении вида задачи, но в данном случае он вполне достаточен. Для других, более сложных задач понадобится и более развернутый, более многоплановый и сложный анализ. Заметим, что при решении особо сложных задач анализ приходится производить не один раз, при первичном чтении задачи, а многократно, при каждой новой попытке решения (а их может быть несколько), в процессе самого решения, при переходе к каждому очередному шагу решения.

Точно так же поиск способа решения производится в процессе решения любой задачи. Даже в указанной выше задаче, после того как установили, что это есть квадратное уравнение, обычно говорим (вслух или мысленно): «Для его решения используем формулу корней приведенного квадратного уравнения». Этим самым мы и произвели поиск способа решения. При решении более сложных задач поиск способа решения является самым трудным и основным этапом решения. Он может занимать и по времени самое большое место в общем процессе решения. При этом довольно часто поиск способа решения приходится производить не один раз. Когда в процессе выполнения найденного способа решения мы убеждаемся в его ошибочности или сложности, то приходится снова возвращаться к этапу поиска решения и искать другой способ решения. И так зачастую приходится делать много раз. Тут нужно, конечно, упорство, но еще важней каждый раз в случае неудачи поиска решения возвращаться к анализу задачи, производить его еще раз более внимательно и искать причины этих неудач.

Что касается этапа осуществления решения, то очевидно, что без него и нет самого решения.

Сложнее с этапом проверки решения. Большей частью проверка решения производится попутно по мере осуществления решения, и, как правило, она производится устно. В этом случае эта проверка является формой самоконтроля за своими действиями. При этом часто мы даже не осознаем, что производим проверку-самоконтроль. Но это тогда, когда имеется прочная привычка к такому самоконтролю и хороший навык к тому. Тем же из вас, кто такой привычкой и навыком не обладает, советуем производить проверку каждый раз, с тем чтобы в конечном итоге приобрести такой навык.

Формулирование ответа не всегда выделяется в особый этап, но, если ответ особо не выписывается, надо все же его как-то выделить (например, путем подчеркивания).

Хотя этап схематической записи является и не обязательным, но мы советуем им не пренебрегать. Схематическая запись служит очень хорошей формой, организующей и глубокий и планомерный анализ задачи, и поэтому этот этап всегда сливается с анализом задачи. Схематическая запись, кроме того, облегчает само решение, ибо, опираясь на эту запись, легче и проще оформить решение.

Что касается анализа решения, то следует учесть, что решение школьных задач является не самоцелью, а средством обучения. Поэтому обсуждение проделанного решения, выявление его недостатков, поиск других способов, установление и закрепление в памяти тех приемов, которые были использованы в данном решении, выявление условий возможности применения этих приемов — все это как раз и будет способствовать превращению решения задач в могучее обучающее средство.

При анализе решения полезно устанавливать возможность обобщения данной задачи, выявлять ее особенности, сопоставлять решение данной задачи с ранее решенными и т. д.

Если вы хотите по-настоящему научиться решать задачи, то анализируйте решение каждой мало-мальски новой и более или менее сложной задачи. Не жалейте на это времени и сил: все это в будущем окупится.

В заключение обращаем ваше внимание на некоторую особенность использования термина «решение задачи». Дело в том, что этим термином обозначаются два связанных между собой, но все же неодинаковых понятия. Когда мы говорим: «процесс решения задачи», то здесь под решением задачи понимается вся деятельность человека, решающего задачу, с момента начала чтения задачи до конца. Когда же мы говорим: «поиск решения задачи» или «анализ решения задачи», «осуществление решения задачи», то здесь под решением задачи понимаются лишь те действия, которые мы производим над условиями и их следствиями на основе общих положений математики для получения ответа задачи. Было бы, пожалуй, целесообразно как-то различать эти два аспекта понятия «решение задачи» (например, второй называть «непосредственное решение задачи»), но обычно это не делают, а из самого контекста ясно, о каком аспекте идет речь. Это следует вам иметь в виду при чтении данной книги.

Заметим, что иногда термин «решение задачи» используется еще и в третьем аспекте, а именно в смысле результата (ответа) задачи. Например, когда говорят: «решением системы уравнений называется и т. д.» или «мы нашли два решения этой задачи», то как раз имеют в виду этот аспект термина «решение задачи».

II.3. Стандартные задачи и их решение

Вы уже знаете из пункта II.1, что непосредственное решение задачи состоит из последовательности шагов (действий), каждый из которых есть применение некоторого общего положения математики к условиям задачи или к их следствиям. Поэтому отыскание этой последовательности шагов есть самое главное, что нужно сделать для того, чтобы решить задачу.

Математика и занимается тем, что она устанавливает для многих видов задач правила, пользуясь которыми можно найти указанную последовательность шагов для решения любой задачи данного вида. Для многих видов задач такие правила уже давно найдены, и вы их изучаете в школьном курсе математики.

Правила, пользуясь которыми можно найти последовательность шагов для решения любой задачи некоторого вида, в математике излагаются в различных формах. Приведем некоторые примеры таких правил.

1. ***Словесное правило.*** Примером такого правила может служить правило нахождения степени произведения, которое вы изучали в VI классе: *степень произведения равна произведению степеней сомножителей.*

Это правило позволяет составить такую программу — последовательность шагов для решения любой задачи нахождения степени произведения:

1) установить все сомножители произведения;

2) найти данную степень каждого из этих сомножителей;

3) результаты 2-го шага перемножить.

В соответствии с этой программой решение задачи: «Найти $(3a^2b^3)^4$» — будет таким:

1) устанавливаем, что заданное произведение состоит из трех сомножителей: 3, a^2 и b^3;

2) находим 4-ю степень каждого из этих сомножителей:

$$3^4=81,\ (a^2)^4=a^8,\ (b^3)^4=b^{12};$$

3) находим произведение результатов предыдущего шага: $81a^8b^{12}$. *Ответ:* $(3a^2b^3)^4=81a^8b^{12}$.

Заметим, что при выполнении 2-го шага мы, кроме рассматриваемого правила, использовали также правило возведения степени в степень.

2. *Правило-формула.* Примером такого правила служит формула корней квадратного уравнения. В курсе алгебры VII класса эта формула дается примерно в таком виде:

корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, если $a\neq 0$ и $D\geqslant 0$, где $D=b^2-4ac$, можно вычислить по формуле $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

В этом правиле прямо не указана последовательность шагов для решения какого-либо квадратного уравнения. Однако легко указать эту последовательность на основе указанного правила-формулы:

1) проверяем условие: $a\neq 0$;

2) находим: $D=b^2-4ac$;

3) проверяем условие: $D\geqslant 0$;

4) если эти условия выполнены, то вычисляем корни по формуле $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Заметим, что при выполнении 2-го и 4-го шагов мы используем еще правила вычисления алгебраических выражений при заданных значениях переменных.

Приведенная последовательность шагов может служить программой для решения любого квадратного уравнения. Например, для решения уравнения $2x^2-3x+1=0$ получаем такую последовательность шагов:

1) $a=2\neq 0$;

2) $D=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1=1$;

3) $D=1>0$;

4) $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 1}{4}$; $x=1$; $x=\frac{1}{2}$. *Ответ:* 1; $\frac{1}{2}$.

3. *Правило-тождество.* Примером такого правила может служить тождество квадрата двучлена, которое вы изучали в VI классе: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Словесная формулировка этого тождества такова: *квадрат двучлена равен сумме трех выражений: квадрата первого члена, удвоенного произведения первого члена на второй и квадрата второго члена.*

В соответствии с этим тождеством можно составить такую программу — последовательность шагов для решения задачи нахождения квадрата двучлена:

1) найти первый член двучлена;
2) найти второй член двучлена;
3) возвести первый член двучлена в квадрат;
4) возвести второй член двучлена в квадрат;
5) составить произведение первого и второго членов двучлена;
6) результат 5-го шага удвоить;
7) результаты 3, 4 и 6-го шагов сложить.

Эта последовательность шагов является программой для решения любой задачи нахождения квадрата двучлена. Например, для нахождения $(2a^3-3b^2)^2$ в соответствии с этой программой нужно произвести следующие действия:

1) первым членом двучлена является $2a^3$;
2) вторым членом двучлена является $-3b^2$;
3) квадрат первого члена есть $(2a^3)^2$;
4) квадрат второго члена есть $(-3b^2)^2$;
5) произведение этих членов есть $(2a^3)\ (-3b^2)$;
6) удвоенное произведение этих членов есть $2\ (2a^3)\ (-3b^2)$;
7) сумма результатов 3, 4 и 6-го шагов есть

$$(2a^3)^2+(-3b^2)^2+2(2a^3)\ (-3b^2).$$

Для полного решения этой задачи необходимо еще использовать правила возвышения одночленов в степень и умножения одночленов. Если это сделать, то получим такой ответ:

$$(2a^3-3b^2)^2=4a^6+9b^4-12a^3b^2.$$

4. ***Правило-теорема.*** Многие теоремы могут служить правилами для решения задач соответствующего вида. Например, теорема: *средняя линия трапеции параллельна ее основаниям, и длина ее равна полусумме длин оснований*, изучаемая в курсе геометрии VII класса, служит правилом для решения задач нахождения длины средней линии трапеции по ее основаниям. Последовательность шагов (программа) для решения таких задач весьма простая:

1) устанавливаем длину оснований трапеции;
2) находим их полусумму. Это и будет длина средней линии.

5. ***Правило-определение.*** Иногда основой для правила решений задач некоторого вида может служить определение соответствующего понятия. Примером такого определения является определение решения системы неравенств с одной переменной. Это определение в учебнике алгебры VII класса сформулировано в таком

виде: *решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.*

На основе этого определения можно составить такую программу решения системы неравенств с одной переменной:

1) решить каждое из неравенств системы, получим для каждого неравенства числовой промежуток — его решение;

2) найти пересечение (общую часть) полученных числовых промежутков.

Найденное пересечение и будет решением системы неравенств.

В соответствии с этой программой решение системы неравенств:

$$\begin{cases} 7x+3\geqslant 5x-19, \\ 4x+1\leqslant 22-3x, \\ 6<x^2-x\ (x-3) \end{cases}$$

будет состоять из последовательности следующих шагов:

1) решаем первое неравенство системы:

$$7x+3\geqslant 5x-19,\ 2x\geqslant -22,\ x\geqslant -11;$$

2) решаем второе неравенство системы:

$$4x+1\leqslant 22-3x,\ 7x\leqslant 21,\ x\leqslant 3;$$

3) решаем третье неравенство системы:

$$6<x^2-x\ (x-3),\ 6<3x,\ x>2;$$

4) находим пересечение числовых промежутков: $[-11;\ +\infty)$, $(-\infty;\ 3]$, $(2;\ +\infty)$. Получим промежуток $(2;\ 3]$. Это и будет ответ задачи.

Заметим, что при выполнении первых трех шагов мы использовали правило решения линейных неравенств с одной переменной и правило приведения подобных слагаемых. При выполнении четвертого шага было использовано правило нахождения пересечения числовых промежутков (с помощью числовой прямой).

Итак, мы видим, что правила для решения задач формулируются в математике обычно в свернутом виде (в форме словесного правила, формулы, тождества) и для того, чтобы использовать эти правила для решения какой-либо задачи, нужно уметь эти правила развертывать в программы — последовательности шагов решения. Сказанное еще в большей степени относится к некоторым определениям и теоремам, на основе которых можно составить правила решения задач соответствующих видов.

Математические задачи, для решения которых в школьном курсе математики имеются готовые правила (в любой форме) или эти правила непосредственно следуют из каких-либо определений или теорем, определяющих программу решения этих задач в виде последовательности шагов, назовем *стандартными.* При этом предполагается, что для выполнения отдельных шагов решения стандартных задач в курсе математики также имеются вполне определенные правила.

В чем характерные особенности процесса решения стандартных задач? Чтобы выяснить это, рассмотрим несколько примеров решения таких задач.

Задача 23. *Выписать первые пять членов арифметической прогрессии, если* $a_1=10$, $d=4$.

В самой задаче указан ее вид: это задача на нахождение членов арифметической прогрессии. Вспоминаем определение арифметической прогрессии: *числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом (это число называется разностью прогрессии), называется арифметической прогрессией.*

На основе этого определения составляем программу решения задач указанного вида:

1) определить, какой (по номеру) член прогрессии предшествует искомому;

2) установить значение этого предшествующего члена;

3) найти разность прогрессии;

4) к значению предшествующего члена прибавить разность прогрессии; полученная сумма и будет искомым членом.

В соответствии с этой программой решение данной задачи будет таким:

нам нужно найти первые пять членов арифметической прогрессии, у которой $a_1=10$ и $d=4$. Значит, нам нужно найти a_2, a_3, a_4 и a_5. Начнем, естественно, с a_2. Предшествующим для него членом является a_1. Его значение дано в задаче. Известно также и значение разности прогрессии. Поэтому $a_2=a_1+d=10+4=14$.

Аналогично найдем a_3, a_4 и a_5. Получим:

$$a_3=a_2+d=14+4=18,$$
$$a_4=a_3+d=18+4=22,$$
$$a_5=a_4+d=22+4=26.$$

Ответ: 10, 14, 18, 22, 26.

Задача 24. *Разложить на множители многочлен*

$$4x^2-9x+5.$$

Так как многочлен, данный в задаче, является квадратным трехчленом, то эта задача является задачей на разложение квадратного трехчлена на множители.

На основе известного тождества $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена, стоящего в левой части тождества, можно составить следующую программу решения задач указанного вида:

1) найти корни x_1 и x_2 трехчлена ax^2+bx+c, т. е. решить уравнение $ax^2+bx+c=0$;

2) образовать двучлены $x-x_1$ и $x-x_2$, где x_1 и x_2 — корни данного трехчлена;

3) образовать произведение полученных двучленов и коэффициента a.

Заметим, что для выполнения 1-го шага в курсе алгебры VII класса также имеется соответствующее правило, которое мы уже однажды приводили.

Теперь в соответствии с этой программой решение задачи 24 будет таким:

решаем уравнение $4x^2-9x+5=0$:

$$D=b^2-4ac=(-9)^2-4\cdot4\cdot5=1>0,$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{9\pm\sqrt{1}}{2\cdot4}=\frac{9\pm1}{8},\ x_1=1,\ x_2=1{,}25.$$

Значит, $4x^2-9x+5=4\ (x-1)\ (x-1{,}25)$.

Приведенные примеры показывают, что процесс решения стандартных задач имеет следующие особенности.

1. Анализ задач сводится к установлению (распознаванию) вида задач, к которому принадлежит заданная.

2. Поиск решения состоит в составлении на основе общего правила (формулы, тождества) или общего положения (определения, теоремы) программы — последовательности шагов решения задач данного вида (если, конечно, такая программа не рассматривалась в курсе математики). Естественно, что нет надобности эту программу формулировать в письменной форме, достаточно ее про себя наметить.

3. Само решение стандартной задачи состоит в применении этой общей программы к условиям данной задачи. Если некоторые шаги программы решения требуют для своего выполнения использования также каких-то программ, то в отношении их производятся те же операции (распознавание вида задачи, составление программы решения и осуществление решения на основе этой программы).

Отсюда следует, что, для того чтобы легко решать стандартные задачи (а они являются основными математическими задачами, ибо все другие в конечном итоге сводятся к ним), нужно:

1) помнить (держать в памяти) все изученные в курсе математики общие правила (формулы, тождества) и общие положения (определения и теоремы). Действительно, для того чтобы решить какую-либо стандартную задачу, нужно в первую очередь распознать ее вид, а для этого нужно хорошо помнить все изученные общие правила и положения, на основе которых решаются задачи соответствующих видов.

Некоторые учащиеся рассуждают так: «Для чего помнить все эти теоремы, формулы... Ведь в случае нужды их можно найти в справочнике или учебнике». Это рассуждение ошибочно, ибо, конечно, в справочнике действительно можно найти позабытую формулу или теорему, но ведь, когда вам надо решить задачу, то не будете же вы перелистывать справочник в поисках подходящей формулы, тем более что для решения одной задачи зачастую нужно использовать не одну формулу, а несколько формул, тождеств и теорем. Представьте, во что превратится решение задачи, сколько времени оно займет. Ведь для того чтобы в справочнике найти нужную формулу, нужно знать, что искать, какую формулу или тождество вам необходимо найти. Как же вы это установите, если вы не помните все основные формулы, тождества и теоремы? Нет, основные формулы, тождества, определения и теоремы необходимо твердо помнить, с тем чтобы в любой нужный момент их использовать и чтобы иметь возможность выбрать для решения заданной задачи нужную формулу, теорему...

Другое дело, что некоторые мало употребляемые формулы можно и не помнить наизусть. Конечно, с годами какие-то формулы, теоремы можно и позабыть, вот для таких случаев и существуют разного рода справочники.

Советуем вам все изучаемые в школе определения, теоремы, формулы, тождества знать и твердо помнить: это чрезвычайно поможет вам в решении математических задач;

2) уметь развертывать свернутые общие правила, формулы, тождества, а также определения и теоремы в программы — последовательности шагов решения задач соответствующих видов.

Этому умению нужно учиться на протяжении всех лет обучения в школе. Надо иметь в виду, что в школьном курсе математики обычно не даются готовые программы решения задач. Эти программы нужно самим извлечь из соответствующих правил, формул, тождеств, определений или теорем. Без этого умения вы не сможете решить многие простейшие стандартные задачи, а тем более нестандартные задачи, требующие применения нескольких программ. Это умение довольно простое, и при некоторой настойчивости им можно быстро овладеть, нужна лишь постоянная тренировка, с тем чтобы развертывание общих правил в программы производить быстро, не задумываясь над этим, притом устно (в уме).

Если вы будете твердо помнить все общие положения и правила школьного курса математики и будете уметь быстро развертывать их в программы решения соответствующих задач, то решение любых стандартных задач не будет представлять для вас никаких особых трудностей.

Задание 9

Укажите, какие из нижеприведенных задач являются стандартными, и назовите вид задач, к которому относится каждая из стандартных задач, а также то общее правило или положение, на основе которого она может быть решена.

9.1. Построить график функции $y=2x$.

9.2. Построить график функции $y=2x^2+2x^{-2}$.

9.3. Разложить на множители многочлен $8a^3+27c^{18}$.

9.4. Разложить на множители многочлен $2x^3+3ax^2-11a^2x-6a^3$.

9.5. Первая цифра шестизначного числа 1. Если эту цифру переставить на последнее место, то получится число, большее первоначального в 3 раза. Найди это шестизначное число.

9.6. Найти сумму первых шести членов геометрической прогрессии, если $a_1=-2$, $q=3$.

Задание 10

Приведенные ниже общие правила разверните в программы — последовательности шагов решения задач соответствующего вида.

10.1. Произведение двух степеней с одинаковыми основаниями равно степени с тем же основанием и показателем, равным сумме показателей этих степеней.

10.2. $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$.

10.3. $V_ш=\frac{4}{3}\pi R^3$.

10.4. Для того чтобы задать формулой функцию, обратную данной, нужно выразить переменную x через y и поменять обозначения: x на y и y на x.

Задание 11

На основе нижеприведенных определений и теорем постройте программы решения соответствующего вида задач, указав название этого вида задач.

11.1. Определение: если все члены многочлена записать в стандартном виде и выполнить приведение подобных членов, то получится многочлен стандартного вида.

11.2. Теорема: отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

11.3. Определение: цифра α называется верной, если модуль погрешности данного приближения не превосходит единицы того разряда, в котором записана цифра α.

11.4. Следствие: логарифмы чисел, отличающихся друг от друга только порядком, имеют одну и ту же мантиссу.

II.4. Нестандартные задачи и их решение

В определении стандартных задач, которое было дано в предыдущем пункте, в качестве основного признака этих задач указано наличие в курсе математики таких общих правил или положений, которые однозначно определяют программу решения этих задач и выполнение каждого шага этой программы.

Отсюда понятно, что *нестандартные задачи* — это такие, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения.

Рассмотрим примеры решения таких задач, с тем чтобы выяснить особенности процесса их решения.

Задача 25. *Расстояние от реки до турбазы туристы рассчитывали пройти за* 6 *ч. Однако после* 2 *ч пути они уменьшили скорость на* 0,5 *км/ч и в результате опоздали на турбазу на* 30 *мин. С какой скоростью шли туристы первоначально?*

Решение. Эта задача является текстовой. Для подобных задач никакого общего правила, определяющего точную программу их решения, не существует. Однако это не значит, что вообще нет каких-то общих указаний для решения таких задач. Подробно сущность этих указаний мы рассмотрим в следующей главе. А пока лишь покажем, как эти указания практически используются.

Обозначим искомую первоначальную скорость туристов через x км/ч. Тогда за 6 ч, за которые они рассчитывали пройти расстояние от реки до турбазы, они прошли $6x$ км. Фактически этот путь они прошли следующим образом: 2 ч они шли с первоначальной скоростью, а затем еще 4,5 ч (ибо они опоздали на 0,5 ч к сроку) — с уменьшенной скоростью $(x-0{,}5)$ км/ч. Следовательно, они прошли $2x$ км и $4{,}5\,(x-0{,}5)$ км, а всего $2x+4{,}5\,(x-0{,}5)$ км, что равно расстоянию от реки до турбазы, т. е. $6x$ км. Получаем уравнение:

$$2x+4{,}5\,(x-0{,}5)=6x.$$

Решив это уравнение, найдем: $x=4{,}5$. Значит, первоначальная скорость туристов равна 4,5 км/ч.

Проанализируем процесс приведенного решения задачи 25. Сначала мы определили вид задачи («текстовая задача»), и, исходя из этого, возникла идея решения («составить уравнение»). Для этого, пользуясь весьма общими указаниями и образцами решения подобных задач, полученных в школьном курсе математики («надо обозначить одно из неизвестных буквой, например x, и выразить остальные неизвестные через x, затем составить равенство из полученных выражений»), мы составили уравнение. Заметим, что эти указания, которыми мы пользовались, не являются правилами, ибо в них ничего не сказано, какое из неизвестных обозначить через x, как выразить остальные неизвестные через x, как получить нужное равенство и т. д. Все это делается каждый раз по-своему, исходя из условий задачи и приобретенного опыта решения подобных задач.

Полученное уравнение представляет собой уже стандартную задачу. Решив ее, мы тем самым решили и исходную нестандартную задачу.

Таким образом, смысл процесса решения данной задачи состоит в том, что с помощью особого приема (составления уравнения) мы свели ее решение к решению эквивалентной стандартной задачи.

Задача 26. *При каких значениях переменной y сумма дробей $\frac{y}{y-3}$ и $\frac{6}{y+3}$ равна их произведению?*

Решение. Находим сумму заданных дробей:

$$\frac{y}{y-3}+\frac{6}{y+3}=\frac{y^2+9y-18}{y^2-9}.$$

Теперь найдем произведение этих дробей:

$$\frac{y}{y-3}\cdot\frac{6}{y+3}=\frac{6y}{y^2-9}.$$

Сравниваем полученные две дроби. Обнаруживаем, что знаменатели у них одинаковые, значит, их значения будут равны при тех значениях переменной y, при которых равны значения числителей, а значение общего знаменателя не равно нулю.

Следовательно, нам нужно решить уравнение

$$y^2+9y-18=6y \qquad (1)$$

при условии

$$y^2-9\neq 0. \qquad (2)$$

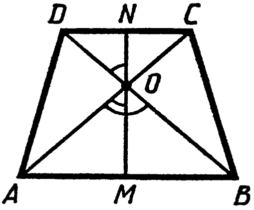


Рис. 13

Уравнение (1) имеет два корня 3 и -6, из которых лишь второй удовлетворяет условию (2). Значит, получаем такой ответ:

$$y = -6.$$

Как видим, процесс решения этой задачи состоит в следующем: данную задачу разбиваем на такие подзадачи:

1) нахождение суммы двух дробей;
2) нахождение произведения двух дробей;
3) решение квадратного уравнения;
4) проверка выполнения условия неравенства нулю выражения с переменной при некоторых значениях переменной.

Решив эти четыре стандартные задачи, мы в конечном итоге решаем и исходную нестандартную задачу.

Задача 27. *Определить площадь равнобедренной трапеции, у которой основания равны 12 см и 20 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.*

Решение. Построим схематическую запись задачи (рис. 13).

Дано: 1) $AB \parallel CD$; 2) $AD = BC$;
3) $AC \perp BD$; 4) $AB = 20$ см;
5) $CD = 12$ см.

Найти: $S_{тр}$.

Площадь трапеции вычисляется по формуле

$$S_{тр} = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

где a и b — основания трапеции, а h — ее высота.

Основания трапеции в задаче заданы; следовательно, задача сводится к нахождению высоты трапеции.

Проведем высоту трапеции. В данном случае это удобно сделать так: проводим через точку O пересечения диагоналей трапеции $MN \perp AB$. Тогда MN и есть искомая высота h.

Так как трапеция равнобедренная, то MN есть ось симметрии трапеции, и поэтому точки M и N — середины соответствующих оснований трапеции. Зная основания трапеции, находим, что $AM = 10$ см, $DN = 6$ см. Получаем также, что $\angle AOM = \angle DON = 45°$.

Рассматривая треугольники AMO и DON, получаем, что они прямоугольные и равнобедренные. Тогда $OM = AM = 10$ см, $ON = DN = 6$ см. Следовательно,

$$h = MN = MO + ON = 10 + 6 = 16 \text{ см}.$$

Теперь по указанной выше формуле можно вычислить и площадь трапеции, найдем $S_{тр} = 256$ см^2.

Процесс решения этой задачи состоит из следующих этапов:

1) задачу вычисления площади трапеции свели к задаче нахождения высоты трапеции;

2) задачу нахождения высоты трапеции разбили на две подзадачи: а) нахождение длины отрезка MO высоты MN; б) нахождение длины отрезка ON той же высоты;

3) задачи 2 (а, б) свели к двум задачам: а) распознавание вида прямой MN по отношению к заданной трапеции; б) определение сторон MO и ON треугольников AOM и DON;

4) в результате решения задачи 3 (а) установили, что MN есть ось симметрии трапеции. Это позволило найти AM и DN, а также углы $A\hat{O}M$ и DON;

5) результаты решения задачи 4 и условие перпендикулярности диагоналей трапеции позволили установить, что треугольники AOM и DON прямоугольные и равнобедренные;

6) следовательно, задача 3 (б) свелась к такой: найти катет прямоугольного равнобедренного треугольника, если известен другой катет.

Решив задачу 6, возвратились к задаче 2, а затем к исходной задаче.

Приведенные примеры показывают, что процесс решения любой нестандартной задачи состоит в последовательном применении двух основных операций:

1) сведение (путем преобразования или переформулирования) нестандартной задачи к другой, ей эквивалентной, но уже стандартной задаче;

2) разбиение нестандартной задачи на несколько стандартных подзадач.

В зависимости от характера нестандартной задачи мы используем либо одну из этих операций, либо обе. При решении более сложных задач эти операции приходится использовать многократно.

В математике нет каких-либо общих правил по применению указанных двух операций для решения нестандартных задач. Математика не занимается разработкой таких правил, но в школьном курсе математики на очень многих примерах вы могли наблюдать использование этих операций.

Хотя, как мы сказали, общих правил для решения нестандартных задач нет (поэтому-то эти задачи и называются нестандартными) и нет каких-то точных правил использования операций по сведению решения нестандартных задач к решению стандартных, однако многие выдающиеся математики и педагоги нашли ряд общих указаний-рекомендаций, которыми следует руководствоваться при решении нестандартных задач. Эти указания обычно называют *эвристическими правилами* или, короче, эвристиками [1].

В отличие от математических правил эвристики носят характер не обязательных рекомендаций, советов, следование которым может привести (а может и не привести) к решению задачи.

Некоторые наиболее общие и часто используемые эвристические правила мы подробно рассмотрим в следующей главе, а более частные эвристики обсудим во второй части книги.

Задание 12

Решите приведенные ниже задачи, проанализируйте эти решения и укажите, к каким стандартным задачам сводится или на какие стандартные задачи разбивается каждая из этих нестандартных задач.

12.1. Разложить на множители многочлен b^3+2b^2+2b+1.

12.2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 м. Если каждый катет увеличить на 3 м, то гипотенуза увеличится на 4 м. Найти катеты этого треугольника.

12.3. Построить треугольник по основанию, медиане и высоте, проведенным к этому основанию.

Глава III

ПОИСК ПЛАНА РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Вам предлагают решить какую-либо задачу или вы вдруг сами захотели это сделать. Разве вы знаете, какая она: стандартная или нестандартная? На основе каких общих правил и положений она может быть решена? С помощью каких приемов и операций она может быть сведена к хорошо знакомым задачам? Все это вы должны сами установить. Иными словами, чтобы решить задачу, надо найти план решения.

Поиск плана решения составляет центральную часть всего процесса решения. Найдя план, его осуществление уже не составляет особого труда, оно требует лишь технических умений выполнения тех действий и операций, которые изучаются в курсе мате-

---

[1] Слово «эвристика» греческого происхождения и означает «искусство нахождения истины».

матики. Конечно, предполагается, что такими техническими умениями вы обладаете.

Однако начинать процесс решения задачи надо не непосредственно с поиска плана решения, а как было установлено в первой главе, начинать надо с глубокого и всестороннего анализа задачи и построения ее схематической записи, если это нужно. Но анализ задачи, построение ее схематической записи являются не самоцелью, а лишь средством для поиска плана решения. Анализ задачи и построение схематической записи должны проводиться направленно. Их цель — поиск плана решения задачи.

При этом не нужно представлять себе, что план решения — это обязательно точный и полный перечень всех действий и операций, которые надо выполнить, чтобы решить данную задачу. Большей частью план — это лишь идея решения, его замысел, а точный и полный перечень действий возникает постепенно, уже в процессе осуществления найденной идеи, замысла решения. Может случиться, что найденная идея решения неточна, а иногда и просто неверна. Тогда приходится снова возвращаться к анализу задачи, искать другую идею решения или уточнять найденную прежде.

Как же искать план решения задачи?

Односложного и вполне определенного ответа на этот вопрос дать нельзя, ибо поиск плана решения задач является очень трудным и не поддающимся точному определению процессом. Однако, как мы уже говорили, можно дать ряд рекомендаций, советов для того, чтобы научиться производить поиск решения задач. Рассмотрению этих рекомендаций и посвящена данная глава.

При этом мы очень настоятельно советуем вам понять, что поиску решения задач *нельзя научить, а можно лишь самому научиться.* И цель нашей книги не в том, чтобы вас научить, а в том, чтобы помочь вам самим научиться решать задачи (особенно поиску планов решения), привить математическую культуру.

III.1. Распознавание вида задачи

Когда приступаем к решению какой-либо задачи, то первое, что хочется, естественно, узнать,— это: что это за задача? Какого она вида, типа? Иными словами, нужно распознать вид данной задачи.

Если мы сумеем это сделать, установим, к какому виду задач она принадлежит, то тем самым сделаем первый, очень важный шаг в поисках плана ее решения. Ведь, зная вид задачи, в большинстве случаев получаем и способ ее решения, ибо в курсе математики для многих видов задач имеются общие правила их решения.

Как же распознать вид задачи?

Для этого, очевидно, нужно знать основные виды математических задач и их признаки.

Первым признаком, по которому все математические задачи делятся на отдельные виды или классы, является *характер требования задачи.* По этому признаку все задачи делятся на три основных класса.

1-й класс. ***Задачи на нахождение искомого.*** В задачах этого класса требование состоит в том, чтобы найти, разыскать, распознать какое-то искомое. При этом искомым могут быть величина, отношения, какой-либо объект, предмет, его положение или форма и т. д.

Очевидными примерами задач этого класса являются задачи на вычисление различных выражений, значений функций, задачи на установление характера функции и т. д.

К ним же относятся геометрические вычислительные задачи, где нужно найти длину отрезка, величину угла, площадь фигуры, объем тела и т. п.

Многочисленные задачи на решение различных уравнений, систем уравнений, неравенств и их систем также принадлежат к этому классу задач, ибо в каждой из них нужно найти значения некоторых переменных, удовлетворяющих определенным условиям.

Задачи, в которых нужно установить вид заданных выражений, чисел, форму заданной геометрической фигуры или тела,— это опять-таки задачи рассматриваемого класса.

Как видим, этот класс задач чрезвычайно многочисленный и разнообразный. Поэтому, естественно, для решения задач этого класса нет какого-либо общего метода. Но все же знание, что данная задача принадлежит к рассматриваемому классу, сужает область поисков плана решения и служит ориентиром в этих поисках. Можно даже высказать такую весьма общую рекомендацию: если вы установили, что данная задача есть задача нахождения искомого, и вы не смогли найти более простого решения, то сведение данной задачи к какому-либо известному виду уравнений, неравенств или систем всегда приведет к решению этой задачи.

2-й класс. ***Задачи на доказательство или объяснение.*** В задачах этого класса требование состоит в том, чтобы убедиться в справедливости некоторого утверждения, или проверить верность или ложность этого утверждения, или, наконец, объяснить, почему имеет место то или иное явление, тот или иной факт.

Все задачи, требование которых начинается со слов «доказать», «проверить» или содержащие вопрос «Почему?», обычно относятся к этому классу задач.

3-й класс. *Задачи на преобразование или построение.* К этому классу относятся задачи, в которых требуется преобразовать какое-либо выражение, упростить его, представить в другом виде, построить что-либо (например, геометрическую фигуру или выражение), удовлетворяющее указанным условиям.

Класс этих задач также весьма многочисленный и разнообразный. Характерной особенностью задач этого класса является то, что в каждой из них заданы какие-то объекты (элементы, выражения), из которых требуется создать, построить, сконструировать другой какой-то объект с заранее известными свойствами.

Например, задано выражение и из него нужно получить (построить) другое выражение, обладающее какими-то особенностями (скажем, тождественно равное данному, но записанное в стандартном виде и т. д.). Или заданы элементы геометрических фигур и из них (с помощью определенных инструментов) нужно построить сами эти фигуры и пр.

Каждый из указанных трех классов задач в свою очередь делится на ряд видов, с некоторыми из которых мы познакомимся во второй части книги.

Для того чтобы установить вид задачи, особое внимание следует уделить анализу требования (вопроса) задачи. Иногда в самом требовании указан вид задачи, например: «Решите квадратное уравнение $3x^2-4x+1=0$». Но большей частью вид задачи в требовании прямо не указан и лишь анализ этого требования может помочь определить вид задачи.

Так, в задаче: «Найти точки пересечения графика функции $y=3x^2-4x+1$ с осью абсцисс» — требование не содержит прямого указания на вид этой задачи. Но если мы внимательно проанализируем это требование (найти точки пересечения графика функции, т. е. кривой, с осью абсцисс, т. е. с прямой, заданной уравнением $y=0$), то легко поймем, что имеем дело с той же задачей решения квадратного уравнения.

Конечно, в ряде случаев распознавание вида задачи представляет собой довольно сложное дело. Приведем пример.

Задача 28. *Сколько центров гомотетии имеют два равных круга?*

На первый взгляд кажется, что эта задача какого-то вида на нахождение искомого. К такому выводу нас наталкивает вопрос:

«Сколько?» Значит, надо что-то найти. Но не следует спешить, вдумаемся в требование задачи. Нужно найти число центров гомотетии двух равных кругов. Следовательно, эти два равных круга даны и их надо рассматривать как гомотетичные фигуры, а требуется найти центры гомотетии, только тогда мы сможем пересчитать их и установить, сколько их. А что значит найти центры гомотетии? Это значит по данным гомотетичным фигурам построить их центр гомотетии. Значит, данная задача фактически является задачей на построение, притом весьма своеобразной, ибо по заданным геометрическим фигурам, которые гомотетичны, необходимо построить (восстановить) их центр гомотетии. Подсчет же числа этих центров (после их построения) уже задачи не представляет.

Итак, анализ требования задачи для распознавания ее вида связан с переформулированием этого требования, с заменой его другим, знакомым, но, конечно, эквивалентным первоначальному.

Что дает нам распознавание вида задачи?

Очень многое. Ведь для большинства видов в школьном курсе математики вы изучали методы решения этих задач, и, следовательно, установив принадлежность данной задачи к определенному виду, тем самым получаем готовый план ее решения: применить известный метод решения подобных задач.

Конечно, вам встретятся задачи, определить вид которых вы не сумеете или это будет такой вид, для которого вам неизвестен общий метод решения. Что ж, тогда надо будет использовать другие приемы (например, разбиение на подзадачи известного вида и др.)

Задание 13

Определите вид каждой из следующих задач.

13.1. Показать, что результат двух последовательных поворотов, имеющих общий центр, есть поворот.

13.2. Разделить число 7812 на шесть частей так, чтобы отношение каждой части к последующей было равно $\frac{1}{5}$.

13.3. Найти значения аргумента α, при которых равенство

$$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=2\operatorname{ctg}\alpha$$

является тождеством.

III.2. Поиск плана решения задачи путем сведения к ранее решенным задачам

Известный советский математик, профессор Московского университета Софья Александровна Яновская (1896—1966) однажды выступила перед участниками математических олимпиад с лекцией «Что значит решить задачу?». Ее ответ оказался поразительно простым, но несколько неожиданным для слушателей: *«Решить задачу — значит свести ее к уже решенным»*.

Для вас этот ответ С. А. Яновской не должен быть неожиданным. Ведь в предыдущей главе мы уже говорили, что решение нестандартных задач, а именно их, конечно, имела в виду С. А. Яновская, состоит в сведении их путем преобразования или переформулирования к стандартным задачам или же в разбиении их на стандартные подзадачи, что также означает сведение к стандартным задачам. А что значит свести решение нестандартной задачи к решению стандартных задач? Это и означает, что мы сводим решение данной (незнакомой) задачи к ранее решенным задачам, ибо стандартные задачи можно рассматривать как такие, которые вы уже умеете решать и не однажды решали.

Когда мы приступаем к решению какой-либо задачи и в результате ее анализа не сумеем распознать в ней знакомый вид, иными словами, обнаружим, что данная задача принадлежит к незнакомому нам виду, для которого нам неизвестен общий метод решения, то что нам остается делать? Только попытаться свести к знакомым, ранее решенным задачам (с помощью преобразования, переформулирования и др.). Это-то и рекомендовала делать С. А. Яновская.

Конечно, совет С. А. Яновской абсолютно верный и простой, но практически воспользоваться им не так-то просто. Ведь, как вы уже знаете, нет определенных правил для такого сведения незнакомых задач к знакомым, уже решенным. Однако, если внимательно, вдумчиво анализировать задачу, вдумчиво решать каждую задачу, фиксируя в своей памяти все приемы, с помощью которых были найдены решения, какими методами были решены задачи, то постепенно у вас выработается умение в таком сведении.

Покажем на нескольких примерах, как такое сведение производится.

Задача 29. *Решить систему уравнений:* $\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 7, \\ \lg \dfrac{x}{y} = 2. \end{cases}$

Решение. В самой задаче указан ее вид (решение системы уравнений), но от этого, как говорится, нам не легче, ибо это такой тип систем уравнений, метода решений которых мы пока не знаем.

Поэтому начнем более внимательно анализировать задачу. В левую часть первого уравнения входят квадраты логарифмов x и y, в левую же часть второго уравнения входит логарифм частного этих переменных. А ведь было бы, должно быть, лучше, если бы в левую часть второго уравнения входили те же логарифмы, что и в первом уравнении. Сделать это нетрудно, для этого воспользуемся теоремой о логарифме частного, тогда второе уравнение примет такой вид (при этом учитываем на основе первого уравнения, что $x>0$ и $y>0$): $\lg x - \lg y = 2$.

Наличие в обоих уравнениях одних и тех же логарифмов, естественно, приводит к мысли произвести замену переменных, а именно обозначить

$$\lg x = u, \tag{1}$$

$$\lg y = v. \tag{2}$$

Тогда данная система сведется к хорошо знакомой системе:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 7, \\ u - v = 2. \end{cases}$$

Решив эту систему и найдя значения u и v, из простейших логарифмических уравнений (1) и (2) найдем x и y.

Как видим, здесь для сведения незнакомой задачи к знакомым использован прием замены переменных, который очень часто с успехом может использоваться при решении разнообразных задач.

Задача 30. *Доказать, что* $\frac{x^2+y^2}{x-y} \geqslant 2\sqrt{2}$, *если* $xy=1$ *и* $x> >y>0$.

Решение. Надо доказать неравенство, но при этом переменные x и y, входящие в неравенство, связаны следующими соотношениями:

$$xy = 1, \tag{1}$$

т. е. их произведение всегда равно 1, и

$$x > y > 0, \tag{2}$$

т. е. оба они принимают лишь положительные значения, при этом x всегда больше y.

Вспоминаем, не решали ли мы раньше подобные задачи. Неравенства доказывали, но такое (с такими условиями) не встречалось.

Рассмотрим сначала, что следует из заданных соотношений между x и y. Из (2) следует, что $x-y>0$, значит, знаменатель дроби, стоящий в левой части неравенства, положительный. Из (1) следует, что если значение одного из переменных больше 1, то значение другого меньше 1, а так как $x>y$, то всегда $x>1$, а $y<1$, но $y>0$.

Что это дает? Пока неясно.

Попробуем тогда преобразовать само неравенство. Можно идти при этом двумя путями: 1) преобразовывать его к неравенству с одной переменной или 2) преобразовывать его к неравенству, в правой части которого стоит нуль.

Рассмотрим оба пути.

1. К неравенству с одной переменной мы можем прийти, заменив y через x из соотношения (1) или сделав замену переменных, обозначив $x-y=t$.

Первый способ не очень удачен, ибо при такой замене появляются высокие степени x (четвертые). Поэтому попытаемся преобразовать вторым способом.

Итак, пусть

$$x-y=t, \tag{3}$$

где $t>0$. Тогда $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$, учитывая (1) и (3), получаем:

$$x^2+y^2=t^2+2.$$

Заданное неравенство преобразуется в следующее:

$$\frac{t^2+2}{t}\geqslant 2\sqrt{2}.$$

Перенеся все члены влево, получим:

$$\frac{t^2+2-2\sqrt{2}\,t}{t}\geqslant 0.$$

Так как $t>0$, то достаточно доказать, что

$$t^2+2-2\sqrt{2}\,t\geqslant 0.$$

Но легко видно, что левую часть можно представить в виде: $(t-\sqrt{2})^2$. А неравенство $(t-\sqrt{2})^2\geqslant 0$ верно при всех t

Так как при всех преобразованиях исходное неравенство переходило в равносильное ему, то тем самым верно и исходное неравенство.

2. Второй путь состоит в том, чтобы заменить данное неравенство таким, у которого правая часть есть нуль. Заметим, что в ходе решения первым путем мы были вынуждены в конце решения использовать этот же прием.

Этот прием, т. е. преобразование неравенства к виду, когда одна из частей неравенства равна нулю, является весьма полезным, ибо доказать (и решить) такое неравенство всегда проще, чем неравенство, в правой части которого стоит, например, $2\sqrt{2}$. Ведь когда в правой части неравенства стоит нуль, то это значит, что нужно доказать, что левая часть положительна или отрицательна, или, как в данном случае, неотрицательна. Сделать это всегда проще.

Поэтому перенесем все члены нашего неравенства в левую часть и, сделав необходимые преобразования, получим:

$$\frac{x^2+y^2-2\sqrt{2}\,(x-y)}{x-y} \geqslant 0.$$

Чтобы убедиться в справедливости этого неравенства, достаточно доказать, что числитель левой части неотрицателен, ибо, как мы знаем, знаменатель положителен.

Итак, нужно доказать: $x^2+y^2-2\sqrt{2}\,(x-y) \geqslant 0$.

Как это можно сделать? Самое простое — убедиться, что левая часть есть квадрат некоторого выражения. Для этого будем рассматривать $2\sqrt{2}\,(x-y)$ как удвоенное произведение $(x-y)$ на число $\sqrt{2}$. Тогда, для того чтобы получить квадрат двучлена, нужно еще иметь квадрат $(x-y)$ и квадрат числа $\sqrt{2}$. Квадрат $(x-y)$ можно получить из x^2+y^2, если к нему присоединить $-2xy$; чтобы выражение не изменилось, прибавим столько же, получим

$$x^2+y^2-2xy+2xy-2\sqrt{2}\,(x-y) \geqslant 0.$$

Теперь первые три члена левой части можно заменить $(x-y)^2$, а $2xy$ заменить числом 2 в силу соотношения (1). Получаем:

$$(x-y)^2+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\,(x-y) \geqslant 0,$$

или

$$((x-y)-\sqrt{2})^2 \geqslant 0.$$

Получили очевидное неравенство, и, следовательно, задача решена.

Обсудим проведенное решение.

Задача была незнакомого вида. Но ее анализ натолкнул нас на несколько путей сведения этой задачи к ранее решенным. Первый путь — это преобразование, сводящее неравенство с двумя переменными к неравенству с одной переменной путем замены переменных. Второй путь — это замена данного неравенства таким, в котором правая часть есть нуль. Как мы убедились, оба эти пути эффективны, и полезно «положить в копилку памяти» эти две идеи — способы преобразований неравенств.

Кроме того, в ходе решения мы доказали еще и такое неравенство:

$$\frac{t^2+2}{t} \geqslant 2\sqrt{2}, \text{ или } t+\frac{2}{t} \geqslant 2\sqrt{2}.$$

Если последнее неравенство обобщить таким образом:

$$t+\frac{a}{t} \geqslant 2\sqrt{a},$$

то его полезно запомнить.

Задача 31. *В произвольном выпуклом пятиугольнике вершины и стороны пронумерованы в порядке обхода по часовой стрелке. Середины первой и третьей сторон, а также второй и четвертой соединены отрезками. Затем середины этих двух отрезков соединены также отрезком. Найти длину последнего отрезка, если длина пятой стороны равна a.*

Решение. Построим схематическую запись задачи, ибо без нее разобраться в задаче очень трудно (рис. 14).

Дано: $A_1B_1 = B_1A_2$;
$A_2B_2 = B_2A_3$;
$A_3B_3 = B_3A_4$;
$A_4B_4 = B_4A_5$;
$B_1M = MB_3$;
$B_2N = NB_4$;
$A_1A_5 = a$.

Найти: MN.

Прочтя задачу, построив ее схематическую запись, видим, что задача явно незнакомого вида. К каким знакомым задачам можно ее свести?

Читая еще раз условие, обращаем внимание на то, что в ней речь идет о серединах сторон. Где мы раньше встречались с серединами сторон? В задачах на среднюю линию треугольника, среднюю линию трапеции. Возможно, что вы решали и задачу, где речь идет о фигуре, полученной путем последовательного соединения середин сторон произвольного четырехугольника. А нам дан произвольный пятиугольник. Как быть?

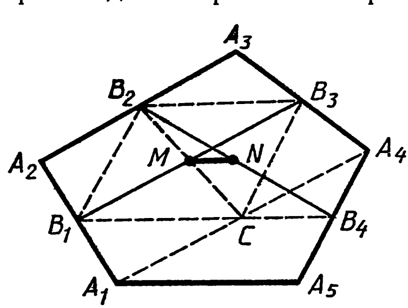


Рис. 14

Естественно возникает идея отсечь от пятиугольника четырехугольник. Только надо удачно это сделать. Рассматривая рисунок 14, замечаем, что удобнее для этого соединить вершины A_1 и A_4. В полученном четырехугольнике $A_1A_2A_3A_4$ середины первых трех сторон отмечены точками B_1, B_2 и B_3. Отметим середину и четвертой стороны A_1A_4 — точку C. Если последовательно соединить эти середины сторон четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ (точки B_1, B_2, B_3 и C), то получится параллелограмм $B_1B_2B_3C$.

Если вы раньше эту задачу (о последовательном соединении середин сторон произвольного четырехугольника) не решали, то легко сейчас доказать, что полученная фигура есть параллелограмм. Для этого проведем (мысленно) диагональ A_2A_4, она разбивает четырехугольник на два треугольника. B_2B_3 есть средняя линия $\triangle A_2A_3A_4$, и поэтому она параллельна диагонали A_2A_4 и равна ее половине. Точно так же B_1C есть средняя линия $\triangle A_1A_2A_4$, и поэтому B_1C параллельна той же диагонали и равна ее половине. Следовательно, противоположные стороны B_2B_3 и B_1C рассматриваемого четырехугольника параллельны и равны. Поэтому четырехугольник $B_1B_2B_3C$ есть параллелограмм.

В этом параллелограмме B_1B_3 и B_2C являются диагоналями, а они в точке пересечения делятся пополам. Отсюда следует, что точка M (середина диагонали B_1B_3) должна совпадать с точкой пересечения диагоналей параллелограмма, а поэтому M есть и середина диагонали B_2C. А точка N есть середина B_2B_4. Тогда если мы соединим точку C с B_4, то MN будет средней линией в $\triangle CB_2B_4$. Отсюда следует, что

$$MN \parallel CB_4 \text{ и } MN=\frac{1}{2}CB_4. \qquad (1)$$

Но CB_4 есть средняя линия $\triangle A_1A_4A_5$, поэтому

$$CB_4 \parallel A_1A_5 \text{ и } CB_4=\frac{1}{2}A_1A_5=\frac{1}{2}\cdot a. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), найдем, что $MN=\frac{1}{4}a$.

Задача решена. Больше того, мы еще установили, что $MN \parallel A_1A_5$, т. е. искомый отрезок параллелен пятой стороне пятиугольника.

Итак, на приведенных примерах мы видели, что процесс сведения незнакомых задач к знакомым (ранее решенным) производит ся с помощью каких-либо преобразований, переформулирований задачи или разбиения ее на подзадачи.

Существует много разных приемов преобразования (например, замена переменных, перенос всех членов в одну сторону и др.), переформулирования (например, составление уравнения или системы и др.) и разбиения на подзадачи. С некоторыми из этих приемов вы уже познакомились, с другими вы познакомитесь несколько позже. Перечислить все их вряд ли возможно, да в этом нет необходимости. Ведь их надо не просто запомнить, а ими надо овладеть! Поэтому, используя эти приемы, встречаясь с ними при чтении книги, надо каждый раз откладывать в своей памяти эти приемы, и тогда постепенно вы ими овладеете. Конечно, вам может встретиться задача, для решения которой ни один из известных вам приемов не окажется пригодным. Что ж, вам придется и з о б р е т а т ь (конструировать) новый прием. В этом и состоит искусство решения задач. Этому искусству можно и нужно учиться.

Задание 14

Решите следующие задачи, используя те приемы, которые были применены при решении задач данного пункта.

14.1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2^x+2^y=12, \\ 2^{x+y}=32. \end{cases}$

14.2. При каких значениях a неравенство $\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$ удовлетворяется при всех значениях x?

14.3. Построить прямоугольный треугольник по данной гипотенузе c и высоте h $\left(h\leqslant\frac{c}{2}\right)$, опущенной на гипотенузу.

14.4. Доказать, что $t+\frac{a}{t}\geqslant 2\sqrt{a}$, если $t>0$ и $a>0$.

III.3. Как поймать мышь в куче камней?

Когда встречаешься с незнакомой и хитроумной задачей, то все известные рекомендации и советы почему-то не помогают. И снова возникает вопрос: как же все-таки искать решение задачи?

Один из первых организаторов математических олимпиад в нашей стране, известный математик, профессор Владимир Абрамович Тартаковский, отвечая на этот вечный вопрос, сравнивал поиск решения с задачей поймать мышь, прячущуюся в куче камней.

— Есть два способа поймать мышь в куче камней,— рассказывал он.

Можно постепенно отбрасывать из этой кучи камень за камнем до тех пор, пока не покажется мышь. Тогда бросайтесь и ловите ее...

Но можно и иначе. Надо ходить и ходить вокруг кучи и зорко смотреть, не покажется ли где-либо хвостик мыши. Как только заметите хвостик — хватайте и вытягивайте мышь из кучи...

Действительно, довольно часто поиск решения задачи напоминает эту операцию по поимке мыши в куче камней.

Приведем примеры.

Задача 32. *Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми 105 км, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста и, встретившись через 1 ч 45 мин после начала движения, без остановки продолжали путь — каждый в своем направлении.*

Через 3 мин после их встречи первый велосипедист, ехавший со скоростью 40 км/ч, повстречал третьего велосипедиста, ехавшего ему навстречу по той же дороге. Третий велосипедист после встречи с первым велосипедистом без остановки продолжал ехать в прежнем направлении и догнал второго велосипедиста в пункте C, в котором встретились бы первый и второй велосипедисты, если бы скорость первого была бы на 20 км/ч меньше, а второго — на 2 км/ч больше первоначальной. С какой скоростью ехал третий велосипедист?

Решение. Некоторые учащиеся, прочтя эту задачу, пытались сразу составить уравнение, обозначив искомое буквой. Ни к чему хорошему это не приводило.

Данная задача подобна большой куче камней, и прежде чем составлять уравнение, надо внимательно осмотреть эту кучу и отбросить по возможности все камни.

Прочтя еще раз задачу, замечаем, что в описываемом явлении можно выделить ряд отдельных эпизодов.

Первый эпизод состоит в том, что из двух пунктов A и B, расстояние между которыми 105 км, выехали навстречу друг другу одновременно два велосипедиста и, встретившись через 1 ч 45 мин после начала движения, без остановки продолжали свой путь — каждый в своем направлении.

Этот эпизод изобразим схематически на рисунке 15.

Точка M на этой схеме обозначает место встречи велосипеди-

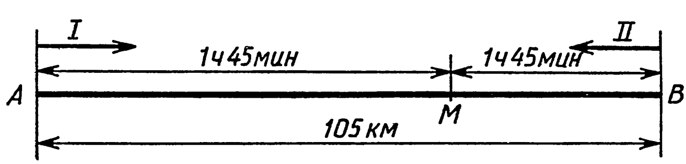


Рис. 15

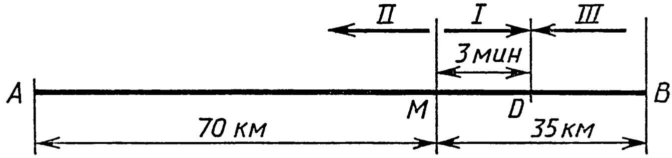


Рис. 16

стов. Если бы нам была известна скорость этих велосипедистов, то мы бы смогли определить положение точки M, узнав расстояния AM и BM.

Прочтя дальше задачу, находим в ней данное, что скорость первого велосипедиста равна 40 км/ч. Тогда можно найти путь AM, пройденный им за 1 ч 45 мин. Он равен $40 \cdot 1\frac{3}{4} = 70$ км. Этим самым мы уже отбросили один из камней данной кучи.

Теперь становится возможным отбросить еще один камень: найти скорость второго велосипедиста. Зная, что весь путь AB равен 105 км и что первый велосипедист до встречи в пункте M проехал 70 км, узнаем, что второй велосипедист до встречи проехал $105 - 70 = 35$ км. А этот путь BM он проехал за 1 ч 45 мин, следовательно, его скорость равна $35 : 1\frac{3}{4} = 20$ км/ч.

Итак, мы уже знаем скорости обоих велосипедистов и пути, которые они проехали до встречи в пункте M.

Выделим теперь второй эпизод. Он состоит в том, что первый велосипедист через 3 мин после встречи со вторым в пункте M встретил третьего велосипедиста, ехавшего ему навстречу по той же дороге. Схема этого эпизода изображена на рисунке 16.

На этой схеме точка D обозначает пункт, где встретились первый и третий велосипедисты. Так как время $\left(3 \text{ мин} = \frac{1}{20} \text{ ч}\right)$ и скорость (40 км/ч) движения первого велосипедиста от M до D нам известны, то можно найти расстояние MD. Оно равно $40 \cdot \frac{1}{20} = 2$ км.

Переходим к следующему эпизоду. Третий велосипедист после встречи с первым (в пункте D) продолжал ехать в прежнем направлении и догнал второго в пункте C (рис. 17).

Про этот эпизод пока нам известно чересчур мало, чтобы можно было отбросить камни, его образующие. Тогда читаем задачу дальше.

В ней сказано, что пункт C — это такой пункт, в котором встретились бы первый и второй велосипедисты, если бы скорость

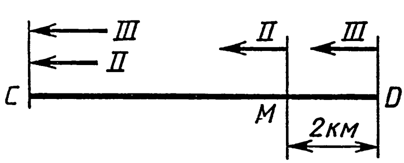


Рис. 17

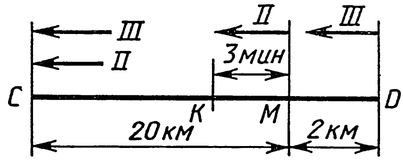


Рис. 18

первого была бы на 20 км/ч меньше, а скорость второго — на 2 км/ч больше первоначальной.

Так как первоначальные скорости этих велосипедистов нам уже известны, то можно найти и их измененные скорости. Они будут равны у первого $40-20=20$ км/ч, а у второго $20+2=$ $=22$ км/ч. При этих скоростях они встретились бы через $105:(20+22)=2{,}5$ ч, и, следовательно, пункт C находится на расстоянии $20\cdot 2{,}5=50$ км от A или на расстоянии MC, равном $70-50=20$ км от первого пункта встречи.

Оглянемся и посмотрим, какая куча камней у нас осталась. Получаем такую задачу: «Из пункта M выехал второй велосипедист со скоростью 20 км/ч, а через 3 мин после его выезда из пункта D, отстоящего от M на расстоянии 2 км, выехал вдогонку третий велосипедист, который догнал второго в пункте C, отстоящем от M на расстоянии 20 км. С какой скоростью ехал третий велосипедист?»

Схематическая запись этой задачи изображена на рисунке 18.

Получили совсем небольшую кучу камней, сквозь которую уже проглядывает мышь,— решение задачи. Действительно, за 3 мин второй велосипедист проехал путь MK, равный $20\cdot\frac{1}{20}=1$ км, следовательно, ему осталось ехать до пункта C $20-1=19$ км, которые он проедет за $19:20=\frac{19}{20}$ ч. За это время третий велосипедист должен проехать путь DC, равный $20+2=22$ км, значит, его скорость равна $22:\frac{19}{20}=23\frac{3}{19}$ км/ч.

Как видите, задача полностью решена и никакого уравнения составлять не понадобилось.

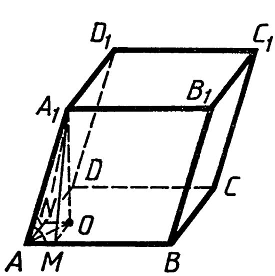


Рис. 19

Задача 33. *В параллелепипеде длины трех ребер, выходящих из общей вершины, a, b и c, ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α. Определить объем параллелепипеда.*

Решение. Построим схематическую запись задачи (рис. 19).

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед; $AB=a$; $AD=b$; $AA_1=c$; $AB \perp AD$; $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \alpha$.

Найти: V.

Как мы знаем, объем параллелепипеда вычисляется по формуле

$$V=S\cdot h, \tag{1}$$

где S — площадь основания параллелепипеда, а h — его высота.

Приняв за основание грань $ABCD$, в которой ребра AB и AD взаимно перпендикулярны, мы легко находим площадь основания:

$$S=AB\cdot AD=ab.$$

Осталось найти высоту h параллелепипеда. Проведем ее. Высоту параллелепипеда можно провести разным образом, но, конечно, ее нужно провести так, чтобы можно было ее связать с известными элементами параллелепипеда. Поэтому удобнее провести высоту из вершины A_1. Пусть $A_1O \perp (ABCD)$. Тогда $A_1O=h$.

Как же найти h? Что мы имеем? Искомый отрезок A_1O и известные отрезки AB, AD и AA_1. Они как-то связаны, но как? Пока сплошная куча камней и ничего не видно. Походим вокруг нее и посмотрим, нельзя ли ее разбросать.

В первую очередь, должно быть, нужно установить положение точки O — основания высоты. Где она может находиться? Может ли она находиться на ребре AB или ребре AD? Очевидно, нет, ибо ребро AA_1 одинаково наклонено к этим ребрам. Если считать этот угол острым, как это показано на рисунке 19, то точка O должна находиться где-то внутри прямоугольника $ABCD$.

Чтобы связать искомую высоту с данными отрезками и определить положение точки O, опустим из нее перпендикуляры на ребра AB и AD. Пусть $OM \perp AB$ и $ON \perp AD$. Тогда получается четырехугольник $AMON$, в котором три угла при вершинах A, M, N прямые, следовательно, он является прямоугольником. Можно считать, что один камень мы уже отбросили.

Оглядываясь на задачу, замечаем, что до сих пор не использовали данное о величине углов A_1AB и A_1AD. Чтобы связать их с искомой высотой, соединим точки M и N с вершиной A_1, тем самым получаем треугольники AMA_1 и ANA_1, в которые входят эти углы.

Что это за треугольники?

OM и ON можно рассматривать как проекции соответственно A_1M и A_1N на плоскость основания. Эти проекции по построению перпендикулярны соответственно к прямым AB и AD. Тогда по теореме о трех перпендикулярах сами наклонные также перпендикулярны к этим прямым, т. е.

$$A_1M \perp AB \text{ и } A_1N \perp AD.$$

Значит, треугольники AMA_1 и ANA_1 прямоугольные, в которых нам известны общая гипотенуза $AA_1 = c$ и острые углы A_1AM и A_1AN, равные α. Тогда возникает возможность отбросить сразу несколько камней.

Во-первых, ясно, что эти треугольники равные и поэтому

$$AM = AN. \tag{2}$$

Во-вторых, можно найти

$$AM = AA_1 \cos\alpha = c\cos\alpha. \tag{3}$$

Теперь, вспоминая, что четырехугольник $AMON$ по доказанному есть прямоугольник, и сопоставляя это с (2), устанавливаем, что он является квадратом. Тогда можно отбросить еще один камень — найти диагональ этого квадрата AO. Получим:

$$AO = AM\cdot\sqrt{2} = c\sqrt{2}\cos\alpha. \tag{4}$$

Наконец, рассмотрим прямоугольный треугольник AOA_1, в котором гипотенуза $AA_1 = c$ и катет AO уже найден. Поэтому можем найти и второй катет — искомую высоту:

$$A_1O^2 = AA_1^2 - AO^2 = c^2 - 2c^2\cos^2\alpha = c^2(1 - 2\cos^2\alpha). \tag{5}$$

Выражение, стоящее в скобках, преобразуем по формуле косинуса двойного угла; получим: $A_1O^2 = -c^2\cos 2\alpha$.

Отсюда $A_1O = c\sqrt{-\cos 2\alpha}$, или $h = c\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

Мышь уже видна, осталось ее поймать — подставить выражение для h в формулу (1). Получаем ответ:

$$V = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

В данном случае нужно произвести и с с л е д о в а н и е задачи. Оно сводится к следующему.

1. Мы предполагали, что заданный угол α острый. Если бы он был тупой, то это означало бы, что заданные три ребра параллелепипеда выходили бы не из вершины A, а из вершины C (рис. 19). Тогда основание O высоты параллелепипеда находилось бы вне основания $ABCD$.

Произведя те же построения и вычисления, мы получили бы вместо формулы (3) такую:

$$CM = CC_1\cos(180° - \alpha) = -c\cos\alpha. \tag{3'}$$

Формула (4) приняла бы такой вид:

$$CO = -c\sqrt{2}\cos\alpha. \qquad (4')$$

Но уже формула (5) имела бы тот же самый вид, что и при $\alpha < 90°$, и окончательный ответ был точно таким же, какой мы получили выше.

2 Наличие в ответе знака «минус» под квадратным корнем заставляет нас подумать о том, в каких пределах может изменяться угол α. Чтобы это установить, вспомним свойства плоских углов трехгранного угла. Мы знаем, что величина каждого плоского угла трехгранного угла меньше суммы величин двух других его плоских углов. Рассматривая трехгранный угол при вершине A и зная, что два его плоских угла имеют величину α, а третий прямой, получаем, что

$$90° < 2\alpha, \text{ отсюда } \alpha > 45°$$

Известно также, что сумма величин всех плоских углов трехгранного угла меньше 360°. Значит, $2\alpha + 90° < 360°$, отсюда $\alpha < 135°$.

Итак, $45° < \alpha < 135°$.

Легко проверить, что при изменении α в этих пределах $\cos 2\alpha$ всегда отрицательный, а поэтому $-\cos 2\alpha > 0$. Следовательно, полученный нами ответ всегда имеет смысл

Задача 34. *Решить уравнение* $x^{x^5} = 5$.

Решение. Эта задача представляет собой такую кучу камней, от которой вряд ли можно отбросить хотя бы один. Остается искать хвостик мыши — *идею решения.*

Что за уравнение нам нужно решить? Оно и не степеннóе, ибо показатель x степени — переменная, и не показательное, ибо основание степени — переменная. Значит, оно является уравнением неизвестного нам вида. И чтобы решить его, нужно свести к какому-то знакомому виду.

К какому? Свести к показательному нельзя, а вот свести к степеннóму можно попытаться. Итак, пока идея решения такая — свести данное уравнение к степенному.

Для этого обозначим:

$$x^5 = y. \qquad (1)$$

Тогда данное уравнение примет вид:

$$x^y = 5. \qquad (2)$$

Если мы сумеем найти y, то тогда из (1) сумеем найти и x.

Для нахождения y имеем систему двух уравнений (1) и (2). Возникает идея исключить из этой системы x и тем самым получить уравнение относительно одного y. Из (1) находим:

$$x=\sqrt[5]{y}. \qquad (3)$$

Подставляя это выражение в (2), получим $(\sqrt[5]{y})^y=5$. Чтобы придать ему более простой вид, возвысим обе части этого уравнения в пятую степень: $y^y=5^5$.

Это равенство возможно лишь при единственном значении y, а именно при $y=5$. Тогда из (3) найдем $x=\sqrt[5]{5}$. Это и есть ответ.

Задача 35. *Найти пары чисел x и y, удовлетворяющие уравнению*

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}+4\sqrt{x-2}+\sqrt{y-1}-28=0.$$

Решение. Это уравнение еще, пожалуй, более необычное, чем предыдущее: в нем две переменные. Хотя уравнение с двумя переменными вы уже встречали, но то были линейные уравнения и их решение состояло в том, что одну из переменных мы выражали через другую. В данном случае это, конечно, неприменимо. Да и задача состоит не в том, чтобы выразить x через y или наоборот, а в том, чтобы найти числовые значения x и y, удовлетворяющие этому уравнению. Значит, остается искать хвостик мыши — идею решения.

Присматриваясь к уравнению, замечаем, что в него входят корни $\sqrt{x-2}$ и $\sqrt{y-1}$. Отсюда следует, что

$$x>2 \text{ и } y>1. \qquad (1)$$

Этим, конечно, мы отбросили камень, но вряд ли приблизились к решению. Более существенно, что эти корни в одних членах входят в знаменатели дробей, а в других — в сомножители. Объединим эти члены:

$$\left(\frac{36}{\sqrt{x-2}}+4\sqrt{x-2}\right)+\left(\frac{4}{\sqrt{y-1}}+\sqrt{y-1}\right)-28=0,$$

или

$$4\left(\sqrt{x-2}+\frac{9}{\sqrt{x-2}}\right)+\left(\sqrt{y-1}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}\right)=28.$$

Все члены, стоящие в скобках, положительные, и вся левая часть уравнения должна быть равна 28. Тогда, может быть, можно оценить эту левую часть? Вот это и есть хвостик мыши — идея решения.

Итак, нам нужно оценить величину выражений, стоящих в скобках. Каждое из этих выражений очень напоминает выражение, стоящее в левой части неравенства, рассмотренного нами при решении задачи 30 в предыдущем пункте:

$$t+\frac{a}{t}\geqslant 2\sqrt{a}.$$

В первых скобках можно считать $t=\sqrt{x-2}$, $a=9$, следовательно, $\sqrt{x-2}+\frac{9}{\sqrt{x-2}}\geqslant 2\sqrt{9}=6$. Во вторых скобках можно считать $t=\sqrt{y-1}$, $a=4$, поэтому

$$\sqrt{y-1}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}\geqslant 2\sqrt{4}=4.$$

Итак, левая часть уравнения

$$4\left(\sqrt{x-2}+\frac{9}{\sqrt{x-2}}\right)+\left(\sqrt{y-1}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}\right)\geqslant 4\cdot 6+4=28,$$

а она должна быть точно равна 28. Это будет лишь в том случае, если каждое из выражений, стоящих в скобках, примет наименьшее значение, что происходит при $t=\sqrt{a}$, т. е. при

$$\sqrt{x-2}=3 \text{ и } \sqrt{y-1}=2.$$

Отсюда находим $x=11$, $y=5$. Замечаем, что эти значения удовлетворяют условиям (1). Поэтому они могут служить ответом задачи.

Возможен и другой способ решения. Левую часть исходного уравнения можно представить в таком виде:

$$\left(2\sqrt[4]{x-2}-\frac{6}{\sqrt[4]{x-2}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{y-1}-\frac{2}{\sqrt[4]{y-1}}\right)^2=0.$$

Так как сумма квадратов может быть равной нулю лишь в том случае, когда каждое слагаемое равно нулю, то получаем такую систему уравнений:

$$2\sqrt[4]{x-2}-\frac{6}{\sqrt[4]{x-2}}=0 \text{ и } \sqrt[4]{y-1}-\frac{2}{\sqrt[4]{y-1}}=0.$$

Решив каждое из этих уравнений, найдем тот же ответ.

Приведенные примеры убедительно показывают, что в процессе поисков решения полезно иметь в виду следующие рекомендации:

1. Если в задаче имеются или можно образовать такие части, которые составляют легко решаемые самостоятельные задачи, то эти части необходимо выделить в виде подзадач, их решить, после чего преобразовать исходную задачу, имея в виду полученные результаты решения подзадач. После такого преобразования исходная задача, как правило, становится проще.

2. Обычно условия задачи даются для того, чтобы на их основе удовлетворить требованиям задачи. Поэтому надо следить, чтобы полностью использовать каждое из данных условий.

3. Идея решения задачи возникает в процессе глубокого анализа и сопоставления ее с ранее решенными задачами. Поэтому не жалейте сил и времени на анализ задачи, ищите для данной задачи подобные ей, чем либо похожие на нее среди решенных вами ранее, используйте эти аналоги как возможные идеи решения.

Задание 15

Решите следующие задачи.

15.1. Некоторый объект первоначально начали строить 40 рабочих; через 6 дней к ним присоединились еще 10 рабочих, а через 6 дней после этого — еще 10 рабочих. Сколько дней продолжалась постройка объекта, если известно, что те же 60 рабочих окончили бы ее в 11 дней, если бы начали работу одновременно?

15.2. Решить уравнение $x^{12}-x^7+x^4-x+1=0$.

15.3. Решить уравнение $x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{y^2}{4}+\frac{4}{y^2}+\frac{z^2}{9}+\frac{9}{z^2}=6$.

15.4. Решить уравнение $5x^2+y^2-4xy-4x+4=0$.

III.4. Моделирование в процессах решения задач

Психология уже свыше ста лет занимается исследованием процессов решения задач человеком. В результате этих исследований открыто много интересных закономерностей и найдены важные характеристики процессов решения задач. Особый интерес представляет общая характеристика этого процесса, данная известным советским психологом Сергеем Леонидовичем Рубинштейном (1889—1960). Он характеризовал решение задач человеком как *процесс их переформулирования,* в котором непрерывно производится анализ условий и требований задачи через синтетический акт их соотнесения [1].

Действительно, выше вы неоднократно наблюдали это переформулирование задач, их преобразование в процессе анализа и поисков решения. Мы уже не раз отмечали эту характерную особенность процессов решения, однако, пожалуй, стоит ее рассмотреть более подробно. Ведь одного указания на эту особенность процесса решения задач, указания на анализ и синтез как

---

[1] Напомним, что а н а л и з (дословно — разложение, расчленение, разбор) есть метод научного исследования путем разложения (фактического или мысленного) предмета на его составные части, а с и н т е з (дословно — соединение, сочетание, составление) есть метод изучения предмета в его целостности, в единстве и взаимной связи его частей.

средства переформулирования и решения недостаточно для того, чтобы сознательно использовать их для решения задач. Естественно возникают вопросы: а в чем состоит это переформулирование? Что мы делаем с задачей, когда ее переформулируем? Что получаем? Какими средствами производится переформулирование?

Чтобы разобраться во всех этих вопросах, рассмотрим пример переформулирования задач в процессе анализа и решения.

Задача 36. *Некоторая коллекция значков была размещена в коробках, каждая из которых имела 10 отделений. В некоторые отделения коробок были положены значки, по одному в отделение, другие отделения были еще пустые. Любые две коробки этой коллекции отличались друг от друга хотя бы наличием или отсутствием значков в одном и том же отделении. Очевидно, что наибольшее число значков в коробке равно 10, а наименьшее — нуль (коробка пустая). Сколько коробок в этой коллекции?*

Эта задача, конечно, носит несколько необычный характер. Но вот подобная ей задача, имеющая уже более реальный характер, полученная из задачи 36 с помощью такого переформулирования: каждому отделению коробки поставим в соответствие электрическую лампочку, тогда наличию или отсутствию в нем значка соответствует одно из возможных состояний лампочки (горит или не горит). В результате получаем такую задачу.

Задача 37. *В квартире 10 лампочек. Сколько существует различных способов освещения квартиры? Два способа освещения считаются различными, если они отличаются состоянием хотя бы одной лампочки. Каждая лампочка может гореть и не гореть. Случай, когда все лампочки не горят,— это тоже способ освещения.*

Хотя эта задача более реальная и явление, в ней описанное, более наглядное, но и ее решение не очевидно.

Чтобы легче подсчитать все различные способы освещения квартиры (или число коробок), изобразим каждую лампочку (каждое отделение) в виде квадрата, а ее состояние будем отмечать знаком «+», если лампочка горит (значок имеется), и знаком «—» в противном случае. Тогда каждому способу освещения квартиры (каждой коробке) будет соответствовать строка из десяти квадратиков со знаком «+» или «—». Число же таких строк в таблице и есть искомое число различных способов освещения квартиры (число коробок).

Получаем такую задачу.

Задача 38. *Имеется прямоугольная таблица, содержащая 10 столбцов. В каждой клеточке этой таблицы поставлен знак «+» или «—». Любые две строки таблицы отличаются знаком* *в клеточках, стоящих хотя бы в одном и том же столбце. Какое наибольшее число строк имеет эта таблица?*

Если решение и этой задачи вам не очевидно, то можно построить еще более прозрачную задачу следующим образом. Будем рассматривать каждую строку таблицы, о которой идет речь в предыдущей задаче, как десятизначное число, составленное из цифр 1 и 0 (цифра 1 соответствует знаку «+» в клеточке, а цифра 0 — знаку «—»). Тогда задача 38 переформулируется в такую.

Задача 39. *Сколько различных десятизначных чисел можно образовать из цифр* 0 *и* 1? *При этом числа, в записи которых стоят слева одни нули (например,* 0100001101, *или* 000000001, *или даже* 0000000000*), также рассматриваются.*

Решение этой последней задачи уже очевидно. На каждом месте в записи десятизначного числа могут стоять лишь цифры 1 и 0. Поэтому имеется всего лишь две комбинации цифр на каждом месте. Эти комбинации независимы друг от друга, ибо проставление цифры на данном месте в записи числа не зависит от того, какие цифры стоят на других местах. Поэтому общее число комбинаций или возможных десятизначных различных чисел равно $2^{10} = 1024$.

Итак, общее число коробок из задачи 36, число способов освещения квартиры из задачи 37, число строк в таблице из задачи 38 и число десятизначных чисел из задачи 39 равно 1024.

Задачи 37—39 были получены из задачи 36 с помощью ее переформулирования. Чем же они являются для нее?

Оказывается, что все они являются ее моделями, следовательно, переформулирование задачи 36 явилось способом ее моделирования, построения ее моделей.

Что такое модель и моделирование?

В науке широко используется метод моделирования. Заключается он в том, что для исследования какого-либо явления или объекта выбирают или строят другой объект, в каком-то отношении подобный исследуемому. Построенный или выбранный объект изучают и с его помощью решают исследовательские задачи, а затем результаты решения этих задач переносят на первоначальное явление или объект.

Пример. Люди издавна интересуются, как устроена наша Вселенная. Этот интерес не только чисто познавательный, но и сугубо практический, ибо люди хотели научиться предсказывать периодические явления, связанные с устройством Вселенной, такие, как затмения Солнца и Луны, наступление времен года и т. д. Для решения этих задач ученые строили свои представления о Вселенной в виде схемы — картины мира, в которой объекты

Вселенной — Солнце и звезды, планеты, Земля и Луна изображались точками, движущимися по каким-то кривым — траекториям их движения. Таковы, например, схемы, построенные Птолемеем, в которых центральное место занимала наша Земля, или схема Коперника, в которой центр занимало Солнце. С помощью этих схем ученые решали задачи предсказания отдельных астрономических явлений.

Эти схемы, эти картины мира суть модели Вселенной, а метод исследования Вселенной, нахождения законов о Вселенной и решения задач, связанных с нею, с помощью этих моделей является методом моделирования.

Другой пример. Люди издавна интересуются, как они сами устроены, как функционирует человеческий организм. Но исследовать эти вопросы на живом человеческом организме очень трудно, ибо такое изучение до появления особых приборов было связано с гибелью этого организма. Тогда ученые стали исследовать устройство человеческого организма на подобных ему организмах животных (обезьян, собак и пр.). Изучение организма животных, их функционирования помогло установить многие важнейшие закономерности функционирования человеческого организма. Вспомните, к примеру, знаменитые исследования И. П. Павлова на собаках. В этих исследованиях животные организмы выступали в качестве моделей человеческого организма, а применяемый при этом метод исследования есть метод моделирования.

Еще пример. Разрезая конус плоскостями, получаем в сечении различные кривые: окружности, эллипсы, параболы, гиперболы. Математики еще в древности начали изучение этих кривых, результаты которых имеют большое значение для физики, астрономии, техники, военного дела, где очень часто встречаются эти кривые. Однако лишь тогда, когда, пользуясь методом Декарта и Ферма, были составлены уравнения этих кривых, их изучение сразу резко подвинулось вперед и с помощью этих уравнений — моделей кривых конических сечений были решены все основные задачи, с ними связанные. Заметим, что уравнения $x^2+y^2=$ $=r^2$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=kx^2$ и $y=\frac{k}{x}$ выступают в качестве моделей соответственно окружности, эллипса, параболы и гиперболы, а эти кривые в свою очередь можно рассматривать как геометрические модели указанных уравнений.

Теперь должно быть вам ясно, что рассмотренные выше задачи 37—39 являются моделями задачи 36, а переформулирование задачи 36 последовательно в задачи 37—39 является способом построения моделей этой задачи, т. е. способом ее моделирования.

Можно сказать, что мы осуществили решение задачи 36 методом ее моделирования.

Вспоминая, как мы решали задачи, как искали их решения, можно установить, что в процессах решения многих задач мы широко использовали моделирование этих задач. Покажем еще на нескольких примерах применение моделирования при решении задач.

Задача 40 *(задача Ньютона). Трава на лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее за 24 дня, а 30 коров — за 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву за 96 дней?*

Решение. Эта задача практическая, текстовая. Для того чтобы ее решить, надо составить уравнение или систему уравнений, которые представляют собой модель данной задачи.

Заданные в задаче величины — количество коров и число дней — не связаны непосредственно, поэтому введем следующие вспомогательные неизвестные — параметры — для установления связи между основными величинами.

Пусть на лугу первоначально было a единиц травы, и ежедневно на нем вырастает b единиц травы. Пусть каждая корова за 1 день съедает c единиц травы. Тогда в соответствии с условием получаем.

За 24 дня всего вырастет $(a+24b)$ единиц травы, которую за это время съедают 70 коров. Они съедают $24\cdot 70\cdot c=1680\,c$, следовательно,

$$a+24b=1680c. \qquad (1)$$

По условию, что 30 коров съедают всю траву за 60 дней, получаем:

$$a+60b=1800c. \qquad (2)$$

За 96 дней на лугу вырастет всего $a+96b$ единиц травы, которую съедят искомое x число коров, они съедят всего $96\,xc$ единиц травы, следовательно, получим такое уравнение:

$$a+96b=96xc. \qquad (3)$$

Уравнения (1), (2) и (3) образуют систему, которая и есть модель исходной задачи. Эту систему нам нужно решить относительно искомого x.

Вычтем почленно из уравнения (2) уравнение (1), получим: $36b=120c$. Отсюда

$$c=0{,}3b. \qquad (4)$$

Подставим полученное значение c в уравнение (1): $a+24b=$

$=504b$, отсюда

$$a=480b. \qquad (5)$$

Подставим выражения c и a из (4) и (5) в (3), получим: $480b+96b=28{,}8xb$ или $576b=28{,}8xb$, отсюда, сократив предварительно на b, найдем: $x=20$.

Ответ: 20 коров.

Задача 41. *Объем конуса в 2 раза больше объема вписанного в него шара. Найти угол между образующей и плоскостью основания конуса.*

Решение. Построим схематическую запись задачи — модель конуса. Для этого проведем сечение конуса с вписанным в него шаром плоскостью, проходящей через ось конуса (осевое сечение). В сечении получим равнобедренный треугольник с вписанной в него окружностью. Так как боковая сторона этого треугольника есть образующая конуса, а высота треугольника есть ось конуса, перпендикулярная к плоскости основания конуса, то угол между боковой стороной и основанием треугольника есть искомый угол между образующей и плоскостью основания. Получаем такую модель задачи (рис. 20).

Дано: ABM — осевое сечение конуса;
$AM=BM$; $MK\perp AB$;
$(O; OK)$ — осевое сечение вписанного шара;
$V_к : V_ш=2$.

Найти: $\angle MAK$.

Построенная наглядная модель задачи облегчает поиск и решение задачи.

По известным формулам найдем объемы конуса и шара:

$$V_к=\frac{1}{3}\pi AK^2\cdot MK;\ V_ш=\frac{4}{3}\pi OK^3.$$

По условию имеем:

$$V_к : V_ш=\frac{1}{3}\pi AK^2\cdot MK : \frac{4}{3}\pi OK^3=2.$$

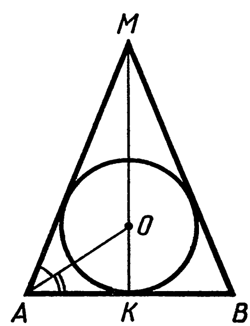


Рис. 20

Получаем:

$$AK^2\cdot MK : 4OK^3=2. \qquad (1)$$

Выразим все отрезки, входящие в равенство (1), через искомый угол $\angle MAK=x$ и отрезок $AK=y$.

Из $\triangle AMK$ находим:

$$MK=AK \operatorname{tg} MAK=y \operatorname{tg} x. \qquad (2)$$

Из $\triangle AOK$ находим: $OK=AK \operatorname{tg} OAK$. Очевидно, OA есть биссектриса угла MAK, поэтому

$$OK = y \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \qquad (3)$$

Подставим найденные выражения из (2) и (3) в (1):

$$y^2 \cdot y \operatorname{tg} x : 4 \left(y \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^3 = 2.$$

Получаем:

$$\operatorname{tg} x = 8 \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}.$$

Это тригонометрическое уравнение есть модель исходной задачи при условии, что $0° < x < 90°$. Решив уравнение при этом условии, найдем ответ задачи.

В заключении первой части книги сформулируем основные рекомендации для поиска решения математических задач.

1. *Прочтя задачу, надо попытаться установить, к какому виду задач она принадлежит.*

2. *Если вы узнали в ней стандартную задачу знакомого вида, то примените для ее реш ния известное вам общее правило.*

3. *Если же задача не является стандартной, то следует действовать в следующих направлениях:*

а) *вычленять из задачи или разбивать ее на подзадачи стандартного вида (способ разбиения);*

б) *ввести в условие вспомогательные элементы: вспомогательные параметры, вспомогательные построения (способ вспомогательных элементов);*

в) *переформулировать ее, заменить ее другой равносильной задачей (способ моделирования).*

4. *Для того чтобы легче было осуществлять указанные способы, полезно предварительно построить наглядную вспомогательную модель задачи — ее схематическую запись.*

5. *Решение нестандартных задач есть искусство, которым можно овладеть лишь в результате глубокого постоянного самоанализа действий по решению задач и постоянной тренировки в решении разнообразных задач.*

Помните, что решение задач есть вид творческой деятельности, а поиск решения есть процесс изобретательства.

Учитесь творить и изобретать в процессе решения задач!

Часть II
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

В этой части книги будут рассмотрены основные методы решения разных видов задач. Конечно, все виды задач, встречающиеся в школьном курсе математики, мы не сумеем рассмотреть. Для этого понадобилась бы не одна такая книга. Однако наиболее часто встречающиеся виды задач будут рассмотрены.

При изложении методов решения задач можно объединить в один вид такие задачи, которые в школе изучаются в разных классах. Так, например, задачи на доказательство алгебраических тождеств и задачи на доказательство тригонометрических тождеств, изучаемые в школе раздельно, мы будем рассматривать совместно, как один вид задач.

Глава IV
ЗАДАЧИ НА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ

IV.1. Виды выражений и сущность их преобразований

Под выражением понимается любая запись, составленная из чисел или переменных (букв), соединенных знаками действий или функций и скобками.

В зависимости от того, входят или не входят в выражения буквенные переменные, выражения делятся на числовые и на выражения с переменными (буквенные выражения).

Примеры числовых выражений: $2{,}4-(5{,}6+3{,}78):4{,}2$; $\lg 2{,}47$; $\sin 36^\circ+\cos 18^\circ$ и т. д. Всякое числовое выражение есть число, поэтому его преобразование состоит в записи этого числа другим способом, в другой форме, т. е. в нахождении числа, равного данному, но записанного иначе. Например, выражение $2^3+4\cdot 5$ можно преобразовать в выражение $2^2\cdot 7$, или 28. Таким образом, всякое число можно рассматривать как числовое выражение.

Преобразование некоторых числовых выражений сводится к выполнению тех действий, знаками которых соединены числа, входящие в выражение. Например, если в выражении $282-(72:4+60:5)\cdot 7$ произвести в определенном порядке все указанные действия, то найдем, что оно равно 72.

В других случаях для преобразования числовых выражений приходится использовать довольно сложные приемы. Например, преобразование числового выражения $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ в равное ему выражение (число) 1 весьма не просто и требует использования особых приемов, которые мы здесь рассматривать не будем.

Всякое выражение с переменными можно рассматривать как функцию этих переменных, принимающую разные числовые значения при разных значениях этих переменных. Так, например, выражение $2a+b^2-c^3$ есть функция от трех переменных a, b и c. Если этим переменным дать какие-то числовые значения из области их изменения, то и само выражение примет соответствующее значение. Если, например, $a=1$, $b=2$, $c=-1$, то это выражение равно 7, если $a=2$, $b=-1$, $c=3$, то выражение равно -22 и т. д.

Выражения с переменными делятся на виды в зависимости от того, какими действиями или функциями связаны эти переменные. Различают следующие виды выражений с переменными:

1. Одночлены — переменные связаны действиями умножения и возвышения в натуральную степень.

2. Многочлены — сумма одночленов.

3. Целые рациональные выражения — переменные связаны действиями сложения, вычитания, умножения и возвышения в натуральную степень.

4. Дробные выражения — частное двух целых рациональных выражений.

5. Рациональные выражения — переменные связаны действиями сложения, вычитания, умножения, деления и возвышения в любую целую степень.

6. Иррациональные выражения — переменные, кроме указанных выше действий, связаны еще действиями извлечения корня или возвышения в дробную степень.

7. Логарифмические выражения — переменные находятся под знаком логарифмической функции.

8. Показательные выражения — переменные находятся в показателе степени.

9. Тригонометрические выражения — переменные находятся под знаком тригонометрических функций.

Областью определения выражения с переменными называется множество систем значений этих переменных, при которых это выражение имеет смысл, т. е. может быть вычислено.

Заметим, что эта область зависит от множества чисел, в котором это выражение рассматривается.

Например, область определения выражения $\frac{x}{y}$, рассматриваемого на множестве натуральных чисел, такая: y — любое натуральное число (число 0 не рассматривается при этом как натуральное), а $x=ky$, где k — произвольное натуральное число, область определения того же выражения, рассматриваемого на множестве рациональных или действительных чисел, уже другая: x — любое число, а $y\neq 0$.

Если выражение $\sqrt{x-1}$ рассматривать на множестве натуральных (или рациональных) чисел, то область его определения такова: $x=1+k^2$, где k — произвольное натуральное (рациональное) число; если же это выражение рассматривать на множестве действительных чисел, то область его определения есть множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $x\geqslant 1$.

Когда говорят о преобразованиях выражений, то имеют в виду замену данного выражения каким-либо другим на основе определенных правил. В школе рассматриваются главным образом тождественные преобразования выражений с переменными, когда данное выражение заменяется тождественно равным ему выражением, но обладающим каким-либо определенным свойством (оно, например, является выражением стандартного вида или представляет собой произведение многочленов и т. п.).

Два выражения называются тождественно равными, если все их соответственные значения равны. При этом соответственными значениями двух выражений с общими переменными называются значения этих выражений, получаемые при одних и тех же значениях этих переменных, взятых из общей области определения этих переменных.

Наряду с такой трактовкой тождественных преобразований выражений с переменными, принятой в школьных учебниках математики, можно дать и другую трактовку этих преобразований.

Вы знаете, что действия над числами обладают особыми свойствами, называемыми законами действий. К ним относятся переместительный и сочетательный законы сложения, такие же законы умножения, распределительный закон и др.

Для других действий имеются другие законы, например

$(a^n)^m = a^{nm}$. Кроме того, сами определения этих действий (вычитания, деления, возвышения в степень) можно рассматривать как своеобразные законы.

На основе этих законов в школьном курсе математики доказаны многие тождества, такие, например:

$$a^2 - b^2 = (a-b)\ (a+b);$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \ (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0) \text{ и т. п.}$$

Все эти определения, законы действий, тождества и свойства функций можно рассматривать как общие правила тождественных преобразований выражений с переменными. Любое из них представляет собой тождественное равенство. При этом во всех этих правилах буквы обозначают не только какие-то переменные, но и целые выражения. Поэтому любое такое правило применимо к соответствующим выражениям и в результате его применения мы всегда получаем тождественно равное выражение (конечно, в общей области определений исходного и преобразованного выражений). Например, в выражении $(2a^2 + b^3) \cdot 3c^2$, применяя распределительный закон, получим:

$$(2a^2 + b^3) \cdot 3c^2 = (2a^2)\ (3c^2) + (b^3)\ (3c^2).$$

К полученному выражению можно применить переместительный и сочетательный законы умножения:

$$(2a^2)\ (3c^2) + (b^3)\ (3c^2) = 6a^2c^2 + 3b^3c^2.$$

К выражению $\lg 4x^3 (x-y)^2$ можно сначала применить правило логарифмирования произведения, затем правило логарифмирования степени, получаем:

$$\lg 4x^3 (x-y)^2 = \lg 4 + 3 \lg x + 2 \lg (x-y).$$

Итак, мы видим, что *тождественные преобразования выражений с переменными можно понимать как последовательное применение к данному выражению общих правил таких преобразований.* Тогда под *тождественно равными выражениями будем понимать такие выражения, которые получаются одно из другого в результате последовательного применения общих правил тождественных преобразований.*

Например, если к выражению $\frac{x-2}{x^2+2x+4} - \frac{6x}{x^3-8} + \frac{1}{x-2}$ последовательно применять указанные справа в скобках общие правила тождественных преобразований, то будем получать выражения, тождественно равные данному выражению (конечно, лишь при условии $x \neq 2$):

$\frac{x-2}{x^2+2x+4}-\frac{6x}{x^3-8}+\frac{1}{x-2}=$ (тождество: разность кубов двух выражений)

$=\frac{x-2}{x^2+2x+4}-\frac{6x}{(x-2)(x^2+2x+4)}+\frac{1}{x-2}=$ (правило сложения дробей)

$=\frac{(x-2)(x-2)-6x+1\cdot(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$ (тождество: квадрат двучлена и определение умножения единицы на число)

$=\frac{x^2-4x+4-6x+x^2+2x+4}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$ (правило приведения подобных членов)

$=\frac{2x^2-8x+8}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$ (распределительный закон)

$=\frac{2(x^2-4x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$ (тождество: квадрат двучлена)

$=\frac{2(x-2)^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{2(x-2)}{x^2+2x+4}.$ (правило сокращения дробей).

Теперь вам должно быть ясно, для того чтобы произвести какое-либо тождественное преобразование заданного выражения, нужно умело выбрать необходимую последовательность общих правил этих преобразований и применить их одно за другим к данному выражению, пока не получим требуемую форму выражения. Поэтому понятно, что нужно хорошо знать все эти общие правила преобразования.

Приведем перечень основных общих правил тождественных преобразований. Для облегчения запоминания разобьем их на группы.

I группа. Законы сложения и умножения

I.1. $a+b=b+a$ (переместительный закон сложения)
I.2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (сочетательный закон сложения).
I.3. $ab=ba$ (переместительный закон умножения).
I.4. $(ab)c=a(bc)$ (сочетательный закон умножения).
I.5. $(a+b)c=ac+bc$ (распределительный закон).
I.6. Если $a=b$ и c — любое число, то $a+c=b+c$.
I.7. Если $a=b$ и $c\neq 0$, то $ac=bc$.

II группа. Определения и свойства вычитания и деления

II.1. Если $a-b=c$, то $a=b+c$ (определение разности).
II.2. $a-b=a+(-b)$ (замена вычитания сложением)

II.3. $a+(b-c)=a+b-c$ (правила раскрытия скобок)

II.4. $a-(b-c)=a-b+c$

II.5. $|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a\geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a<0 \end{cases}$ (определение модуля числа).

II.6. Если $a:b=c$, то $a=bc$ (определение частного).

III группа. Особые случаи действий

III.1. $a+0=0+a=a$ (прибавление нуля).

III.2. $a\cdot 1=1\cdot a=a$ (умножение на единицу).

III.3. $a\cdot 0=0\cdot a=0$ (умножение на нуль).

III.4. $0:a=0\ (a\neq 0)$ (деление нуля).

IV группа. Свойства дробей

IV.1. Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $ad=bc$ $(b\neq 0,\ d\neq 0)$ (определение равенства дробей).

IV.2. $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}$ (основное свойство дроби).

IV.3. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ (правило сложения дробей).

IV.4. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$ (правило вычитания дробей).

IV.5. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ (правило умножения дробей).

IV.6. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$ (правило деления дробей).

V группа. Определения и свойства степеней

V.1. $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ раз}}$ (определение степени с натуральным показателем).

V.2. $a^0=1\ (a\neq 0)$ (определение степени с нулевым показателем).

V.3. $a^1=a$ (определение степени с показателем 1).

V.4. $a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (a\neq 0)$ (определение степени с отрицательным показателем).

V.5. $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}\ (a>0)$ (определение степени с дробным показателем).

V.6. $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$ (умножение степеней с равными основаниями).

V.7. $a^n:a^m=a^{n-m}$ (деление степеней с равными основаниями).

V.8. $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$ (степень произведения).

V.9. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ (степень частного).

V.10. $(a^n)^m=a^{nm}$ (степень степени).

VI группа. Тождества сокращенного умножения

VI.1. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ (разность квадратов).

VI.2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (квадрат двучлена)

VI.3. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (куб двучлена).

VI.4. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ (сумма кубов).

VI.5. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (разность кубов)

VII группа. Определение и свойства корней

VII.1. Если $\sqrt[n]{a}=b$, то $a=b^n$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$ (определение корня)

VII.2. $(\sqrt[n]{a})^n=a$ $(a\geqslant 0)$ (основное свойство корня)

VII.3. $\sqrt[m]{-a}=-\sqrt[m]{a}$ (m — нечетное, $a>0$) (свойство корня с нечетным показателем)

VII.4. $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$ (извлечение корня из произведения).

VII.5. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(a\geqslant 0,\ b>0)$ (извлечение корня из частного).

VII.6. $\sqrt[n]{a^{np+q}}=a^p\sqrt[n]{a^q}$ $(a\geqslant 0)$ (вынесение рационального множителя за знак корня).

VII.7. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$ $(a\geqslant 0)$ (извлечение корня из корня).

VIII группа. Определение и свойства логарифмов

VIII.1. Если $\log_a b=c$, то $a^c=b$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$ (определение логарифма).

VIII.2. $a^{\log_a b}=b$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$ (основное тождество)

VIII.3. $\log(a\cdot b)=\log a+\log b$ $(a>0,\ b>0)$ (логарифм произведения).

VIII.4. $\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$ $(a>0,\ b>0)$ (логарифм частного)

VIII.5. $\log a^k=k\log a$ $(a>0)$ (логарифм степени)

VIII.6. $\log_a u=\frac{\log_b u}{\log_b a}$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1,\ u>0)$ (формула перехода к другому основанию)

Примечание. В формулах, в которых основание логарифма не указано, предполагается произвольное основание, одинаковое в обеих частях равенства.

IX группа. Формула Ньютона

IX.1. $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^ma^{n-m}b^m+\ldots+C_n^nb^n$.

СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

X группа. Соотношения между функциями одного и того же аргумента

X.1. $\sin^2 x+\cos^2 x=1.$

X.2. $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}.$

X.3. $\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}.$

X.4. $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1.$

X.5. $1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}.$

X.6. $1+\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

XI группа. Четность и нечетность тригонометрических функций

XI.1. $\sin(-x)=-\sin x.$

XI.2. $\cos(-x)=\cos x.$

XI.3. $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x.$

XI.4. $\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x.$

XII группа. Формулы приведения

XII.1. $\sin(x+2\pi n)=\sin x\ (n\in\mathbf{Z}).$

XII.2. $\cos(x+2\pi n)=\cos x\ (n\in\mathbf{Z}).$

XII.3. $\operatorname{tg}(x+\pi n)=\operatorname{tg} x\ (n\in\mathbf{Z}).$

XII.4. $\operatorname{ctg}(x+\pi n)=\operatorname{ctg} x\ (n\in\mathbf{Z}).$

XII.5. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\pm x\right)=\cos x.$

XII.6. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\sin x.$

XII.7. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\operatorname{ctg} x.$

XII.8. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\operatorname{tg} x.$

XII.9. $\sin(\pi\pm x)=\mp\sin x.$

XII.10. $\cos(\pi\pm x)=-\cos x.$

XII.11. $\operatorname{tg}(\pi\pm x)=\pm\operatorname{tg} x.$

XII.12. $\operatorname{ctg}(\pi\pm x)=\pm\operatorname{ctg} x.$

XII.13. $\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi\pm x\right)=-\cos x.$

XII.14. $\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi\pm x\right)=\pm\sin x.$

XII.15. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3}{2}\pi\pm x\right)=\mp\operatorname{ctg} x.$

XII.16. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi\pm x\right)=\mp\operatorname{tg} x.$

Примечание. В формулах, в которых имеются двойные знаки, берутся в обеих частях равенства или оба верхних, или оба нижних знака.

XIII группа. Формулы сложения

XIII.1. $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$

XIII.2. $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$

XIII.3. $\operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}.$

XIII.4. $\operatorname{ctg}(x+y)=\dfrac{\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y-1}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y}.$

XIV группа. Формулы двойного аргумента

XIV.1. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

XIV.2. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.

XIV.3. $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

XIV.4. $\operatorname{ctg} 2x = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$.

XV группа. Формулы понижения степени

XV.1. $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

XV.2. $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.

XV.3. $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$.

XV.4. $\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$.

XVI группа. Формулы суммы и разности тригонометрических функций

XVI.1. $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}$.

XVI.2. $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2}$.

XVI.3. $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}$.

XVI.4. $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2} = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{y-x}{2}$.

XVI.5. $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x \pm y)}{\cos x\cos y}$.

XVI.6. $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \dfrac{\sin(y \pm x)}{\sin x\sin y}$

XVII группа. Формулы половинного аргумента

XVII.1. $\sin\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$.

XVII.2. $\cos\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$.

XVII.3. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$.

XVII.4. $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x} = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x}$.

Примечание. Знак перед корнем берется в соответствии с тем, в какой четверти лежит аргумент.

XVIII группа. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

XVIII.1. $\sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

XVIII.2. $\cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

XVIII.3. $\operatorname{tg} x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

XVIII.4. $\operatorname{ctg} x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

XIX группа. Формулы замены произведения суммой

XIX.1. $\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$.

XIX.2. $\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$.

XIX.3. $\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$.

Обращаем еще раз ваше внимание на то, что во всех этих формулах буквы обозначают не только отдельные переменные, но и любые выражения с переменными.

Также важно заметить, что любую из этих формул преобразований можно рассматривать (читать) как слева направо, так и справа налево. Например, если правило I.5 читать слева направо, то оно выражает распределительный закон, позволяющий раскрывать скобки в произведении; если же это правило читать справа налево, то оно выражает правило вынесения общего множителя за скобки.

Формула VI.4 слева направо выражает правило разложения суммы кубов на множители; при чтении ее справа налево она выражает правило умножения суммы двух выражений на неполный квадрат разности этих выражений и т. д.

Особо следует сказать о формулах, выражающих свойства тригонометрических функций (X—XIX). В этих формулах мы не указывали области, в которых они справедливы. Но вам следует иметь в виду известные ограничения на области определения тригонометрических функций. Например, функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ не определены соответственно при $x=\frac{\pi}{2}\cdot(2n+1)$ и при $x=\pi n$. Отсюда, в частности, следует, что при использовании формул XVIII группы область определения суживается. Так, если левая часть формул XVIII.1 и XVIII.2 имеет смысл при любых значениях x, то правая часть этих формул имеет смысл лишь при $x \neq \pi\ (2n+1)$.

Заметьте также, что приведенные формулы не независимы друг от друга. Некоторые из них являются следствиями других. Например, формулы понижения степени тригонометрических функций (XV группа) являются следствиями формул половинного аргумента и т. д. Но для удобства пользования этими правилами и формулами мы привели их все.

Перейдем теперь к рассмотрению методов использования приведенных правил для решения некоторых видов задач на тождественные преобразования выражений.

IV.2. Задачи на приведение выражений к стандартному виду

Для некоторых выражений с переменными в математике вводится понятие о стандартном виде этих выражений. Это такая форма записи выражений, которая принимается за нормальную (стандартную), и любое выражение данного типа с помощью тождественных преобразований обычно приводится к этому стандартному виду.

Стандартный вид установлен не для всех типов выражений. Так, для иррациональных, логарифмических и тригонометрических выражений какого-то определенного стандартного вида не установлено. Укажем те типы выражений, для которых установлен (узаконен) определенный стандартный вид.

1. Одночлены. Одночленом стандартного вида называется такой одночлен, в котором имеется лишь один числовой множитель, стоящий на первом месте слева (числовой коэффициент), и каждое произведение одинаковых переменных в нем представлено степенью.

Например, одночлен $1{,}2a^2b\ (-5ab^4)\ (-ab^2)$ после приведения к стандартному виду будет иметь такой вид: $6a^4b^7$.

2. Многочлены. Многочлен считается приведенным к стандартному виду, если он представляет собой сумму стандартного вида одночленов. Иногда еще требуется расположение этих одночленов по убывающим степеням одной из переменных. Последнее требование, не являясь обязательным, имеет особый смысл в случае, когда многочлен есть выражение с одной переменной.

3. Целые рациональные выражения. Любое целое рациональное выражение можно преобразовать в тождественный ему многочлен стандартного вида.

4. Дроби (дробные выражения). За стандартный вид дроб-

ного выражения принимается несократимая дробь, числитель и знаменатель которой представляют собой многочлены стандартного вида.

5. Рациональные выражения. Любое рациональное выражение, в котором переменные связаны действием деления, всегда можно преобразовать в тождественно равную ему дробь стандартного вида.

Рассмотрим несколько задач на приведение выражений к стандартному виду.

Задача 1. *Представить выражение*

$$5ab\,(ab-b^2)-7a^2\,(a^2-b^2)+5b^2\,(a^2-ab)$$

в виде многочлена стандартного вида.

Решение. Заданное выражение есть целое рациональное выражение. Для того чтобы представить его в виде многочлена стандартного вида, нужно: 1) раскрыть все скобки; 2) все одночлены привести к стандартному виду; 3) привести подобные одночлены; 4) если нужно, расположить все одночлены в каком-то порядке (например, по убывающим степеням одной из переменных).

Проделаем все эти преобразования в заданном выражении.

Для раскрытия скобок используется распределительный закон I.5 и правила раскрытия скобок II.3 и II.4. Однако в данном случае сразу применить правило I.5 нельзя, ибо это правило позволяет преобразовывать выражения вида $(a+b)\,c$, а в данной задаче мы имеем выражения вида $c\,(a+b)$. Поэтому предварительно нужно воспользоваться переместительным законом умножения I.3 и в каждом из трех слагаемых мысленно переставить сомножители (т. е. $5ab\,(ab-b^2)$ представить как $(ab-b^2)\cdot 5ab$, $7a^2\,(a^2-b^2)$ представить в виде $(a^2-b^2)\cdot 7a^2$ и $5b^2\,(a^2-ab)$ — в виде $(a^2-ab)\cdot 5b^2$), а уже затем применить распределительный закон I.5.

Теперь о расстановке знаков при раскрытии скобок. Можно поступать двояким образом. Можно рассматривать знак перед одночленом, как знак, относящийся к его коэффициенту, и тогда всюду будем иметь сумму одночленов. В данном выражении это означает представление его в таком виде:

$$5ab\,(ab+(-b^2))+(-7a^2)\,(a^2+(-b^2))+5b^2\,(a^2+(-ab)).$$

Тогда при раскрытии скобок знаки коэффициентов произведений определяются по известным правилам умножения положительных и отрицательных чисел.

Но можно делать иначе. А именно рассматривать имеющиеся знаки перед одночленами как знаки действий, а сами коэффициенты одночленов считать положительными. Тогда при раскрытии скобок следует использовать распределительный закон относительно вычитания (в приведенном списке правил он не указан): $(a-b)\ c=ac-bc$. И кроме того, использовать правила раскрытия скобок II.3 и II.4. Тогда последовательное преобразование заданного выражения будет таким (справа в скобках указаны используемые при каждом шаге-преобразовании правила тождественных преобразований).

$$5ab\ (ab-b^2)-7a^2\ (a^2-b^2)+5b^2\ (a^2-ab)= \qquad \text{(I.3)}$$
$$=(ab-b^2)\ (5ab)-(a^2-b^2)\ (7a^2)+(a^2-ab)\ (5b^2)= \qquad \text{(I.5)}$$
$$=(ab\cdot 5ab-b^2\cdot 5ab)-(a^2\cdot 7a^2-b^2\cdot 7a^2)+(a^2\cdot 5b^2-ab\cdot 5b^2)= \qquad \text{(I.3; I.4; V.6)}$$
$$=(5a^2b^2-5ab^3)-(7a^4-7a^2b^2)+(5a^2b^2-5ab^3)= \qquad \text{(II.3; II.4)}$$
$$=5a^2b^2-5ab^3-7a^4+7a^2b^2+5a^2b^2-5ab^3.$$

Теперь в полученном выражении нужно привести подобные члены. Это производится на основе того же распределительного закона, но читать его надо справа налево. Получим:

$$5a^2b^2-5ab^3-7a^4+7a^2b^2+5a^2b^2-5ab^3=$$
$$=(5+7+5)\ a^2b^2+(-5-5)\ ab^3-7a^4=17a^2b^2-10ab^3-7a^4.$$

В полученном многочлене можно расположить члены по убывающим степеням переменной, например a, тогда окончательно получим:

$$-7a^4+17a^2b^2-10ab^3.$$

Это и будет стандартный вид заданного выражения.

Задача 2. *Преобразовать выражение*

$$\left(\frac{a-x}{a^2+ax+x^2}-\frac{1}{a-x}\right)\cdot\left(\frac{2x+a}{a}+\frac{2a+x}{x}\right)$$

в дробь.

Решение. Требование этой задачи надо понимать так, что заданное рациональное выражение нужно преобразовать в дробь. Так как заданное выражение представляет собой произведение двух рациональных выражений, то каждое из них надо предварительно представить в виде дроби, а затем полученные дроби перемножить и, если можно, результат представить в форме дроби.

Проделаем все это, записывая справа в скобках используемые правила тождественных преобразований

$$\left(\frac{a-x}{a^2+ax+x^2}-\frac{1}{a-x}\right)\cdot\left(\frac{2x+a}{a}+\frac{2a+x}{x}\right)= \quad (IV.3;\ IV.4)$$

$$=\frac{(a-x)(a-x)-1\cdot(a^2+ax+x^2)}{(a^2+ax+x^2)(a-x)}\cdot\frac{(2x+a)x+(2a+x)a}{ax}= \quad (V.1;\ III.2;\ I.5)$$

$$=\frac{(a-x)^2-(a^2+ax+x^2)}{(a^2+ax+x^2)(a-x)}\cdot\frac{2x\cdot x+a\cdot x+2a\cdot a+x\cdot a}{ax}= \quad (VI.2,\ II.4,\ I.3,\ V.1)$$

$$=\frac{a^2-2ax+x^2-a^2-ax-x^2}{(a^2+ax+x^2)(a-x)}\cdot\frac{2x^2+ax+2a^2+ax}{ax}= \quad (I.5,\ III.3)$$

$$=\frac{-3ax}{(a^2+ax+x^2)(a-x)}\cdot\frac{2(x^2+ax+a^2)}{ax}= \quad (IV.5,\ I.1)$$

$$=\frac{-3ax\cdot 2(a^2+ax+x^2)}{(a^2+ax+x^2)(a-x)ax}=\frac{-6}{a-x}=\frac{6}{x-a}. \quad (IV.2,\ I.4)$$

Конечно, при решении подобных задач нет надобности все время делать ссылки на те правила тождественных преобразований, которые используются в решении. Это обычно не требуется Но если вы хотите сознательно овладеть такими преобразованиями с полным пониманием сущности каждого шага, то нужно хотя бы несколько задач решить так, как было проделано выше, т. е с указанием всех используемых на каждом шаге правил тождественных преобразований.

Задание 16

Решите задачи, указывая, как это было сделано выше, все правила тождественных преобразований, которые вы использовали в решении.

16.1. Преобразовать выражение $(2x-5y)^3-x(6x-5y)^2$ к стандартному виду.

16.2. Разделить дроби $\frac{x+y}{x-y}:\frac{x^2+2xy+y^2}{(x-y)^2}$.

16.3. На основе каких правил тождественных преобразований произведен переход от дроби $\frac{-6}{a-x}$ к дроби $\frac{6}{x-a}$ в решении задачи 2?

IV.3. Задачи на упрощение выражений

Задачи на упрощение выражений с переменными встречаются очень часто, при этом в отличие от задач на приведение выражений к стандартному виду упрощать приходится любые выражения, а не только рациональные. Но в то же время эти задачи менее определенные, ибо не всегда ясно, упрощено ли уже выражение и нельзя ли его еще упростить.

Характерный пример произошел на экзаменах на аттестат зрелости в 1976 г. В одной из экзаменационных работ была такая задача:

$$\textit{упростить выражение } \frac{\sin 3x+\sin 5x}{\sin 2x}.$$

При решении этой задачи одни учащиеся получили ответ: $4\cos 2x \cos x$, а другие: $2(\cos x+\cos 3x)$. Оба эти ответа верны, но какой из них лучше, вряд ли можно сказать. Некоторые учащиеся, не зная, на каком ответе остановиться, привели в качестве ответа оба указанных выше: мол, выбирайте сами, какой вам больше нравится.

Однако в большинстве случаев упрощение выражений является достаточно определенным преобразованием. Смысл его состоит в том, чтобы, пользуясь приведенными выше правилами и формулами тождественных преобразований, представить заданное выражение в более простой, компактной форме.

Из-за некоторой неопределенности понятия «простая форма» нет возможности указать какое-либо общее правило для решения задач этого типа, но для отдельных видов выражений можно достаточно определенно это сделать. Мы укажем эти правила на примерах упрощения разных выражений.

Задача 3. *Упростить выражение*

$$(2-b)(1+2b)+(1+b)(b^2+3b).$$

Решение. Заданное выражение есть целое рациональное выражение. Для его упрощения следует: 1) раскрыть скобки (т. е. выполнить все указанные действия) и 2) привести подобные члены. Иными словами, надо данное выражение привести к стандартному виду многочлена.

В данном случае получим:

$$(2-b)(1+2b)+(1+b)(b^2-3b)=$$
$$=2+4b-b-2b^2+b^2-3b+b^3-3b^2=b^3-4b^2+2.$$

Задача 4. *Упростить выражение*

$$(2p-3)(4p^2+6p+9)+(p+3)(p^2-3p+9).$$

Решение. Так как заданное выражение есть целое рациональное, то можно поступить так же, как в предыдущей задаче. Но если внимательно рассмотреть условие, то замечаем, что к каждому из слагаемых применимы тождества VI.5 и VI.4, читая их справа налево, получим:

$$(2p-3)(4p^2+6p+9)+(p+3)(p^2-3p+9)=$$
$$=((2p)^3-3^3)+(p^3+3^3)=8p^3-27+p^3+27=9p^3.$$

Задача 5. *Упростить выражение*

$$\frac{10}{x^2-25y^2}+\frac{y}{5y^2-xy}-\frac{5}{x^2+5xy}.$$

Решение. Данное выражение является рациональным, поэтому его упрощение сводится обычно к приведению к стандартному виду. Сначала нужно сложить все входящие в это выражение дроби. Следовательно, нужно найти общий знаменатель этих дробей, а для этого знаменатели надо разложить на множители. Замечаем, что к знаменателю первой дроби применимо правило разложения разности квадратов, а к знаменателям второй и третьей дробей — правило вынесения общего множителя за скобки. Обозначив для простоты заданное выражение буквой M (так мы будем делать и в последующем), получим:

$$M=\frac{10}{(x-5y)\,(x+5y)}+\frac{y}{y\,(5y-x)}-\frac{5}{x\,(x+5y)}.$$

Обнаруживается, что вторую дробь можно сократить на y. Кроме того, замечаем, что в знаменателе первой дроби имеется множитель $x-5y$, а знаменатель второй дроби (после сокращения) равен $5y-x$, т. е. отличается лишь знаком. Поэтому члены второй дроби умножим на -1, получим:

$$M=\frac{10}{(x-5y)\,(x+5y)}-\frac{1}{x-5y}-\frac{5}{x\,(x+5y)}=$$

$$=\frac{10x-x\,(x+5y)-5\,(x-5y)}{x\,(x-5y)\,(x+5y)}=\frac{10x-x^2-5xy-5x+25y}{x\,(x-5y)\,(x+5y)}=$$

$$=\frac{5x-x^2-5xy+25y}{x\,(x-5y)\,(x+5y)}.$$

Чтобы проверить, нельзя ли сократить (и следовательно, упростить) эту дробь, нужно разложить на множители числитель. В данном случае это легко сделать, сгруппировав первое и четвертое слагаемое и второе и третье. Получим:

$$M=\frac{5\,(x+5y)-x\,(x+5y)}{x\,(x-5y)\,(x+5y)}=\frac{(x+5y)\,(5-x)}{x\,(x-5y)\,(x+5y)}.$$

Видим, что дробь действительно можно сократить, после чего получаем ответ: $M=\frac{5-x}{x\,(x-5y)}$.

Очевидно, что больше упростить это выражение нельзя. Что касается указания в ответе области определения полученного равенства, то существуют разные точки зрения на этот счет. Одни математики считают, что в таких равенствах указывать область определения нет нужды, другие же требуют такого указания. В данном случае, если придерживаться последнего требования, следовало поступить так. Сначала установить область определения исходного выражения. Она такова: $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq \pm 5y$. Затем в процессе преобразования все время следить за изменением этой области. Такое изменение могло произойти при сокращении дробей, но так как мы сократили на y и на $x+5y$, которые в области определения не равны нулю, то изменения области не произошло. Поэтому окончательный ответ следует сформулировать так:

$$M=\frac{5-x}{x\,(x-5y)} \text{ при } x \neq 0,\ y \neq 0,\ x \neq \pm 5y.$$

Задача 6. *Упростить выражение* $3b\sqrt[4]{\dfrac{a^7\sqrt[3]{a^2}}{27b^2}}$.

Решение. Заданное выражение есть корень из одночлена. Его упрощение обычно сводится к следующим операциям:

1) произвести все указанные в выражении действия (возвышение в степень, извлечение корня из корня и др.);

2) освободиться от дроби под знаком корня;

3) вынести за знак корня все рациональные множители;

4) сократить показатель корня с показателями подкоренного выражения.

Однако предварительно нужно установить условия, при которых данное выражение имеет смысл, т. е. найти область его определения. Так как имеем арифметический корень, то подкоренное выражение должно быть неотрицательным, а поэтому a^7, а следовательно, и $a \geqslant 0$ (1); b^2, стоящее в знаменателе, должно быть отлично от нуля, значит, $b \neq 0$ (2).

Преобразование корня в данном случае удобнее начать со второй операции, а именно освободиться от дроби под знаком корня. Для этого умножим числитель и знаменатель подкоренного выражения на такой множитель, чтобы в знаменателе получить произведение, из которого целиком извлекается корень. Очевидно, что нужно умножить на $3b^2$, получим: $M=3b\sqrt[4]{\dfrac{3b^2a^7\sqrt[3]{a^2}}{81b^4}}$.

Извлекая корень 4-й степени из знаменателя, мы получим $3|b|$, ибо согласно условию (2) знак b неизвестен, а в таком случае по определению арифметического корня $\sqrt[4]{b^4}=|b|$. Получим:

$$M=\frac{3b}{3|b|}\sqrt[4]{3b^2a^7\sqrt[3]{a^2}}=\frac{b}{|b|}\sqrt[4]{3b^2a^7\sqrt[3]{a^2}}.$$

Теперь можно вывести рациональный множитель за знак корня на основе правила VII.6. Для этого смотрим, показатель какой переменной под корнем не меньше показателя корня. Видим, что показатель a равен $7>4$. Значит, можно вынести за знак корня a. Учитывая условие (1), получим:

$$M=\frac{ab}{|b|}\sqrt[4]{3b^2a^3\sqrt[3]{a^2}}.$$

Для того чтобы выполнить извлечение корня из корня, можно поступить двояко. Можно сначала множитель, стоящий перед внутренним корнем, подвести под знак этого корня, а затем уже извлечь корень из корня:

$$M=\frac{ab}{|b|}\sqrt[4]{\sqrt[3]{27a^9b^6a^2}}=$$

$$=\frac{ab}{|b|}\sqrt[12]{27a^{11}b^6}.$$

Можно сделать иначе, а именно сначала извлечь внешний корень из произведения, а затем полученные результаты перемножить, приведя их предварительно к общему показателю:

$$M=\frac{ab}{|b|}\sqrt[4]{3b^2a^3}\sqrt[12]{a^2}=\frac{ab}{|b|}\sqrt[12]{27b^6a^9}\cdot\sqrt[12]{a^2}=\frac{ab}{|b|}\sqrt[12]{27a^{11}b^6}.$$

Теперь, учитывая две возможности знака b, получаем такой ответ: $M=\begin{cases} a\sqrt[12]{27a^{11}b^6}, \text{ если } b>0,\ a\geqslant 0,\\ -a\sqrt[12]{27a^{11}b^6}, \text{ если } b<0,\ a\geqslant 0.\end{cases}$

Задача 7. *Упростить выражение* $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-1$.

Решение. Сначала находим область определения заданного выражения. Очевидно, она определяется так, чтобы знаменатель имеющейся дроби не был равен нулю. Это будет при условии:

$$a\neq b. \qquad (1)$$

Теперь выполним указанные действия, т. е. приведем выражение к виду дроби: $M=\frac{\sqrt[3]{a}-(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$.

Дальнейшее упрощение этого выражения может заключаться в избавлении от корней в знаменателе (как говорят: избавиться от иррациональности в знаменателе дроби). Так как в знаменателе кубические корни, то, чтобы получить рациональное выражение, надо каждый из этих корней возвысить в куб, т. е. надо получить разность кубов этих корней. Для этого воспользуемся тождеством VI.5 и умножим числитель и знаменатель полученной дроби на

$$(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}.$$

Получим:

$$\frac{\sqrt[3]{b}\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+\sqrt[3]{b^3}}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}.$$

На основе правила VII.2 получим такой ответ:

$$M=\frac{\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{a-b}\quad \text{при } a\neq b.$$

Задача 8. *Упростить выражение*

$$\frac{bc^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}}-\frac{b}{b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}+c}:\left(\frac{b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}}{bc^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}c}-\frac{4}{b-c}\right).$$

Решение. Упрощение выражений с дробными показателями производится так же, как и упрощение рациональных выражений.

Найдем область определения заданного выражения:

$$b>0,\ c>0,\ b\neq c. \qquad (1)$$

При этих условиях проще всего ввести следующие обозначения: $b^{\frac{1}{2}}=x$, $c^{\frac{1}{2}}=y$. Тогда заданное выражение принимает такой вид:

$$\frac{x^2y}{x-y}-\frac{x^2}{xy+y^2}:\left(\frac{x+y}{x^2y-xy^2}-\frac{4}{x^2-y^2}\right).$$

В результате его упрощения получаем, что оно равно $-x^2$. Следовательно, заданное выражение при условиях (1) равно $-b$.

Задача 9. *Упростить выражение* $\dfrac{\sin(x-\pi)\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)\operatorname{ctg}(\pi-x)}$.

Решение. Для упрощения тригонометрических выражений используются указанные выше многочисленные формулы групп X—XIX. Выбор формул той или иной группы определяется характером заданного выражения. В данном случае видим, что в выражение входят функции от аргументов $x-\pi$, $x-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi+x$ и

$\pi - x$. Наличие таких аргументов показывает, что нужно воспользоваться формулами приведения. Для их использования надо аргумент $x-\pi$ заменить на $\pi - x$ (т. е. изменить знак этого аргумента). То же проделать с аргументом $x-\frac{\pi}{2}$. Для этого воспользуемся формулами XI группы, а именно на основе формул XI.1 и XI.3 имеем:

$$\sin(x-\pi)\,\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=(-\sin(\pi-x))\left(-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=$$

$$=\sin(\pi-x)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

Итак, заданное выражение $M=\dfrac{\sin(\pi-x)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)\mathrm{ctg}\,(\pi-x)}$.

Теперь применим формулы XII.9, XII.7, XII.14 и XII.12. Получим: $M=\dfrac{\sin x\,\mathrm{ctg}\,x}{\sin x\,(-\mathrm{ctg}\,x)}$.

Полученную дробь можно сократить. Но для этого переменное x должно быть таким, при котором $\sin x \neq 0$ и $\mathrm{ctg}\,x \neq 0$, т. е. $x \neq \pi k$, где $k \in Z$. При этом условии $M=-1$.

Примечание. Полученное равенство нужно понимать так. Выражения, стоящие в обеих частях этого равенства, тождественно равны в общей области их определения (т. е. при условии $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$) при дополнительном условии: $x\neq\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Поэтому более точно ответ задачи следовало сформулировать так:

$$M=-1 \text{ при } x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n \text{ и } x\neq\pi k, \text{ где } n \text{ и } k\in\mathbf{Z}.$$

Но обычно общая область определения обеих частей тождественного равенства не указывается, хотя иногда это требуется.

Задание 17

Решите задачи.

17.1. Упростить выражение $\dfrac{a-2}{a^2+2a}:\left(\dfrac{a}{a^2-2a}-\dfrac{a^2+4}{a^3-4a}-\dfrac{1}{a^2+2a}\right)$

Укажите, какие операции необходимо для этого выполнить и на основе каких правил тождественных преобразований эти операции можно произвести Оформите свое решение по приведенной ниже схеме, в которой показаны для образца записи первых четырех операций.

№ операций	Название операций	На основании какого правила	К какому выражению применяется	Результат
1—3	Разложение на множители знаменателей дроби	I.5 I.5 I 5, VI.1	a^2+2a a^2-2a a^3-4a	$a(a+2)$ $a(a-2)$ $a(a+2)(a-2)$
4	Сложение и вычитание дробей в скобках	IV.4	$\frac{a}{a(a-2)}-\frac{a^2+4}{a(a+2)(a-2)}-\frac{1}{a(a+2)}$	$\frac{a(a+2)-(a^2+4)-(a-2)}{a(a+2)\ (a-2)}$

17.2. Найдя ответ в предыдущей задаче, указать область изменения переменной a, в которой этот ответ имеет смысл.

17.3. Упростить выражение $t\cdot\frac{1+\frac{2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}}-\sqrt{t+4}+\frac{4}{\sqrt{t+4}}$. Решение оформите по схеме, указанной в задании 17.1.

17.4. При каком условии имеет смысл ответ, полученный вами в предыдущей задаче?

IV.4. Разложение на множители

С необходимостью разложения выражений на множители вы уже встречались при приведении дробей к общему знаменателю, при сокращении дробей. Это же преобразование широко используется при решении уравнений и неравенств. Поэтому научиться раскладывать некоторые простейшие выражения на множители крайне важно.

В общем виде задача разложения на множители многочленов, уже не говоря о более сложных выражениях, средствами школьной математики неразрешима. Но в тех простейших случаях, которые встречаются в школьной и экзаменационной практике, достаточно тех методов, которые вы изучали в VI классе (вынесение общего множителя за скобки, применение тождеств сокращенного умножения, метод группировки).

Покажем, как следует использовать эти методы для решения задач разложения на множители различных выражений.

Задача 10. *Разложить на множители многочлен*

$$6x^3y+3x^2y^2-3xy^3.$$

Решение. Разложение на множители многочленов производится с помощью следующих операций в таком порядке:

1. *Вынесение общего множителя за скобки.* Проверяем, не имеют ли все одночлены, входящие в многочлен, общего множителя. Если да, то выносим его за скобки, если нет, то переходим к следующей операции.

2. *Применение тождеств сокращенного умножения.* Проверяем, не представляет ли заданный многочлен такое выражение, к которому непосредственно применимо одно из тождеств сокращенного умножения (разность квадратов, квадрат или куб двучлена, разность или сумма кубов). Если да, то применяем это тождество, если нет, то переходим к следующей операции.

3. *Группировка членов.* Разбиваем многочлен на несколько (две или более) групп и к каждой из них пытаемся применить первые две операции.

Применим эту последовательность операций к заданному многочлену.

Все члены многочлена M имеют общий множитель $3xy$. Выносим его за скобки. Получим: $M=3xy\ (2x^2+xy-y^2)$.

Теперь попытаемся разложить на множители многочлен K, стоящий в скобках. Очевидно, что к нему первые две операции (вынесение общего множителя за скобки и применение тождеств сокращенного умножения) неприменимы. Попытаемся тогда произвести группировку членов. Так как многочлен можно разбить минимум на два многочлена и в каждом из них должно быть не менее двух членов, то, для того чтобы можно было произвести группировку, в данном многочлене должно быть не менее четырех членов. А в многочлене K имеется всего три члена. В таком случае разобьем один из членов на два. Удобнее это сделать с первым членом. Тогда многочлен K принимает такой вид:

$$K=x^2+x^2+xy-y^2.$$

Группировка его членов возможна таким образом:

$$K=(x^2-y^2)+(x^2+xy).$$

Видим, что первая группа членов представляет собой разность квадратов и, следовательно, к ней применимо соответствующее тождество, а ко второй группе применима операция вынесения общего множителя x за скобки. Получим:

$$K=(x-y)\ (x+y)+x\ (x+y).$$

Рассматривая теперь полученные два произведения, видим, что они содержат общий множитель $(x+y)$. Выносим его за скобки: $K=(x+y)\ (x-y+x)=(x+y)\ (2x-y)$.

Тогда окончательно получим:

$$M=3xy\ (x+y)\ (2x-y).$$

Задача 11. *Разложить на множители выражение*

$$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$$

Решение. При решении можно поступить двояким образом

1. Можно сначала заданное выражение преобразовать в многочлен стандартного вида, а уже затем попытаться разложить его на множители.

Применяя тождество VI.3 (куб двучлена) и приведение подобных членов, получим:

$$M=y^3-3y^2z+3yz^2-z^3+z^3-3z^2x+3zx^2-x^3+x^3-3x^2y+$$

$$+3xy^2-y^3=3\ (-y^2z+yz^2-z^2x+x^2z-x^2y+xy^2).$$

Сгруппируем члены многочлена, стоящего в скобках, как показано, применим к этим группам операции вынесения общего множителя за скобки и тождество разность квадратов:

$$M=3\ ((-y^2z+yz^2)+(-z^2x+xy^2)+(zx^2-x^2y))=$$

$$=3\ (yz\ (z-y)-x\ (z^2-y^2)+x^2\ (z-y))=$$

$$=3\ (yz\ (z-y)-x\ (z-y)\ (z+y)+x^2\ (z-y)).$$

Теперь имеется возможность вынести за скобки общий множитель $(z-y)$:

$$M=3\ (z-y)\ (yz-x\ (z+y)+x^2)=3\ (z-y)\ (yz-xz-xy+x^2)$$

В многочлене, стоящем во вторых скобках, произведем группировку членов, а затем операцию вынесения общего множителя за скобки:

$$M=3\ (z-y)\ ((yz-xz)-(xy-x^2))=$$

$$=3\ (z-y)\ (z\ (y-x)-x\ (y-x))=3\ (z-y)\ (y-x)\ (z-x).$$

2. Можно же не преобразовывать заданное выражение к виду многочлена, а применить сразу операции по разложению на множители. В данном случае первые два слагаемых можно рассматривать как сумму кубов выражений $(y-z)$ и $(z-x)$, а поэтому можно к ним применить соответствующее тождество. Получим:

$$M=((y-z)+(z-x))\ ((y-z)^2-(y-z)\ (z-x)+(z-x)^2)+$$

$$+(x-y)^3=(y-x)\ ((y-z)^2-(y-z)\ (z-x)+(z-x)^2)+$$

$$+(x-y)^3$$

Видим, что в первом слагаемом имеется множитель $(y-x)$, а во втором $(x-y)$. Тогда, изменив знак второго слагаемого, получим возможность вынести за общие скобки $(y-x)$:

$$M=(y-x)\ ((y-z)^2-(y-z)\ (z-x)+(z-x)^2-(y-x)^2)\ (1)$$

В выражении K, стоящем во вторых скобках, произведем группировку членов по два по порядку и в первой группе вынесем за скобки $(y-z)$, ко второй группе применим тождество разность квадратов:

$$K=(y-z)\ (y-z-z+x)+(z-x-y+x)\ (z-x+y-x)=$$

$$=(y-z)\ (y-2z+x)+(z-y)\ (z-2x+y).$$

Изменим знак первого слагаемого, для того чтобы получить общий множитель $(z-y)$, который вынесем за общие скобки:

$$K=(z-y)\ (-y+2z-x+z-2x+y)=(z-y)\ (3z-3x)=$$

$$=3\ (z-y)\ (z-x).$$

Подставляя K в равенство (1), получим окончательно:

$$M=3\ (y-x)\ (z-y)\ (z-x).$$

Задача 12. *Разложить на множители*

$$4\ (\sin^4 x+\cos^4 x)-4\ (\sin^6 x+\cos^6 x)-\sin^2 4x.$$

Решение. Разложение тригонометрических выражений на множители производится с помощью тех же операций, что и разложение рациональных выражений. Но естественно, что при этом используются формулы преобразований тригонометрических выражений.

В заданном выражении общих множителей нет, а вот тождество VI.4 можно применить к сумме $\sin^6 x+\cos^6 x$, рассматривая ее как сумму кубов $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$. Получим:

$$M=4\ (\sin^4 x+\cos^4 x)-$$
$$-4\ (\sin^2 x+\cos^2 x)\ (\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)-\sin^2 4x.$$

На основе формулы X.1 заменяем $\sin^2 x+\cos^2 x$ единицей. Раскрыв затем скобки и сделав приведение подобных членов, получим:

$$M=4\sin^2 x\cos^2 x-\sin^2 4x.$$

Выражение $4\sin^2 x\cos^2 x$ напоминает формулу синуса двойного угла. Используя ее, получим:

$$M=\sin^2 2x-\sin^2 4x.$$

Дальше можно действовать по-разному. Можно применить тождество разность квадратов, а затем формулы суммы и разности синусов. А можно сначала применить формулы понижения степени, а уже затем формулу разности косинусов. Получим:

$$M=\frac{1}{2}(1-\cos 4x)-\frac{1}{2}(1-\cos 8x)=\frac{1}{2}(\cos 8x-\cos 4x)=$$

$$=-\sin 6x \sin 2x.$$

Задание 18

Разложите на множители приведенные ниже выражения, указывая каждый раз, какие операции и формулы вы использовали в решении

18.1. $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}+\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2}$.

18.2. $x+4\sqrt{x}+3$.

18.3. $\cos^2(x-y)-\sin^2(x+y)$

IV.5. Дифференцирование выражений

В качестве примера особых преобразований выражений рассмотрим дифференцирование функций, заданных каким-либо выражением с одной переменной.

Отвлекаясь от содержательного определения производных функций, их нахождение можно истолковать с чисто алгебраической точки зрения как своеобразное преобразование выражений с одной переменной, с помощью которых заданы эти функции. При этом в результате такого преобразования получаются выражения, не тождественные исходным.

Это преобразование — дифференцирование выражений — производится на основе правил и формул дифференцирования. При записи этих правил и формул на знак производной следует смотреть как на знак особого преобразования (операции, действия), так же как вы смотрели на знаки сложения, умножения и др. В записи правил дифференцирования буквы u и v обозначают любые выражения, а запись $u(v)$ обозначает не умножение выражений u и v, а математическую операцию (взятие выражения u от выражения v) — как сложную функцию u от v.

Например, если $u=x^2$, а $v=\sin x$, то

$$u(v)=(\sin x)^2=\sin^2 x, \text{ а } v(u)=\sin x^2.$$

Если $u=3^x+x^3$, а $v=\lg(x+2)$, то

$$u(v)=3^{\lg(x+2)}+(\lg(x+2))^3, \text{ а } v(u)=\lg(3^x+x^3+2).$$

В формулах дифференцирования буква x обозначает любую переменную.

Приводим список правил и формул дифференцирования.

Правила дифференцирования

П.1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ (производная суммы и разности).
П.2. $(uv)' = u'v + uv'$ (производная произведения).
П.3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (производная частного).
П.4. $(ku)' = ku'$ (k — постоянный множитель).
П.5. $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ (производная сложной функции).

Формулы дифференцирования

Ф.1. $(C)' = 0$, C — число.
Ф.2. $(x^p)' = px^{p-1}$, где $p \in R$.
Ф.3. $(\sin x)' = \cos x$.
Ф.4. $(\cos x)' = -\sin x$.
Ф.5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
Ф.6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
Ф.7. $(e^x)' = e^x$.
Ф.8. $(a^x)' = a^x \ln a$.
Ф.9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
Ф.10. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Если нам нужно найти производную некоторого выражения (функции), то должны поступать следующим образом.

1. Устанавливаем, какие действия и в каком порядке производятся над переменной в заданном выражении.

2. Если действие одно (за исключением прибавления или отнимания от переменной числа), то непосредственно применяем соответствующую формулу дифференцирования, и на этом процесс нахождения производной заканчивается.

3. Если же этих действий два или больше, а также когда выражение представляет собой сумму или разность переменной и числа, то устанавливаем, какое из этих действий последнее. Если этим последним действием является сложение или вычитание, то применяем правило П.1, если умножение, то П.2, если деление, то П.3, если умножение на постоянное число, то П.4, а если какое-либо другое (возвышение в степень, извлечение корня, логарифмирование, нахождение показательной или тригонометрической функции), то применяем правило П.5.

4. В результате 3-го шага дифференцирование заданного выражения сводится к дифференцированию двух более простых выражений, а в случае применения П.4 — одного. К каждому из них применяем последовательно шаги 1, 2 и 3-й, и так до тех пор, пока дифференцирование не будет полностью закончено.

Покажем применение этого общего правила на примерах.

Задача 13. *Найти производную функцию* $f(x) = \log_3 x$.

Решение. В данном выражении, с помощью которого задана функция, над переменной x производится всего лишь одно действие — логарифмирование. Поэтому ищем соответствующую формулу дифференцирования. Ею является Ф.10. В соответствии с этой формулой получим: $f'(x)=(\log_3 x)'=\frac{1}{x\ln 3}$.

Задача 14. *Продифференцировать выражение*

$$x\sin x+\ln(1+x^2).$$

Решение. В данном выражении над переменной x производятся следующие действия:

1) взятие синуса от x; 2) умножение (x на $\sin x$); 3) возвышение в квадрат x; 4) сложение (1 и x^2); 5) логарифмирование (ln от $1+x^2$); 6) сложение (результатов 2 и 5 действий).

Так как действие не одно, то применяем правила дифференцирования. Последним действием является сложение. Поэтому применяем правило П.1. Получим:

$$(x\sin x+\ln(1+x^2))'=(x\sin x)'+(\ln(1+x^2))'. \quad (1)$$

Теперь нужно найти производные двух выражений. Находим отдельно каждую из них.

В выражении $x\sin x$ последним действием является умножение. Поэтому применяем к нему правило П.2:

$$(x\sin x)'=(x)'\sin x+x(\sin x)'.$$

Теперь можно применить формулы Ф.2 и Ф.3. Получим:

$$(x\sin x)'=1\cdot\sin x+x(\cos x)=\sin x+x\cos x. \quad (2)$$

Во втором выражении $\ln(1+x^2)$ последнее действие есть логарифмирование. Поэтому применяем правило П.5:

$$(\ln(1+x^2))'=\ln'(1+x^2)\cdot(1+x^2)'. \quad (3)$$

Обозначение $\ln'(1+x^2)$ следует понимать так: производная натурального логарифма от $(1+x^2)$, когда $(1+x^2)$ рассматривается как одна переменная. Тогда по формуле Ф.9 имеем:

$$\ln'(1+x^2)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Для нахождения $(1+x^2)'$ применяем сначала правило П.1, а затем формулы Ф.1 и Ф.2: $(1+x^2)'=(1)'+(x^2)'=0+2x=2x$.

Подставляем полученные результаты в (3):

$$(\ln(1+x^2))'=\frac{2x}{1+x^2}. \quad (4)$$

Теперь, подставив из (2) и (4) в (1), найдем окончательно:

$$(x\sin x+\ln(1+x^2))'=\sin x+x\cos x+\frac{2x}{1+x^2}.$$

Задание 19

Продифференцируйте выражения, записывая процесс решения так же, как было показано в решении задачи 14.

19.1. $\log_2(x^3+2\sqrt{x}+5)$.

19.2. $(x+1)\sin x-x\cos^2 x$.

IV.6. Задачи на построение

Задачи на построение являются традиционными задачами в курсе геометрии. Разработкой методов решения этих задач математики занимаются еще с времен Древней Греции. Уже математики школы Пифагора (VI в. до н. э.) решили довольно сложную задачу построения правильного пятиугольника. В течение многих веков математики проявляли живейший интерес к задачам на построение. Интерес к этим задачам обусловлен не только их красотой и оригинальностью методов решения, но и большой практической ценностью. Проектирование строительства, архитектура, конструирование различной техники основаны на геометрических построениях.

Обычно *задача на построение ставится как требование из заданных элементов в соответствии с какими-то условиями, с помощью определенных инструментов построить названную геометрическую фигуру или их совокупность, удовлетворяющих указанным свойствам.*

Таким образом, в любой задаче на построение следует различать:

1) заданные элементы и их характеристики (условия задачи);

2) инструменты, с помощью которых можно выполнить требуемое построение;

3) искомую фигуру (или их совокупность) с указанными свойствами.

Приведем пример.

Задача 15. *Даны прямая l и точка A вне ее. Построить точку A_1, симметричную A относительно прямой l, пользуясь одним циркулем.*

В этой задаче заданы два элемента: прямая l и точка A. Их характеристика (условие) состоит в том, что точка A находится вне прямой l. Искомой фигурой, которую нужно построить, является точка A_1. Она должна обладать таким свойством: точка A_1 симметрична точке A относительно прямой l, принимаемой за ось симметрии. Указаны и инструменты, с помощью которых должно быть осуществлено построение искомой фигуры, а именно один циркуль.

Обращаем внимание на некоторые особенности геометрических задач на построение.

1. Заданные элементы искомой фигуры в задачах на построение большей частью фактически не задаются, а лишь указываются. В приведенной задаче сказано, что даны прямая l и точка A вне ее, но фактически ни прямая l, ни точка A не даны. Мы можем их провести где и как угодно. В рассматриваемой задаче это, конечно, совершенно несущественно. Но вот представьте, что надо решить задачу построения треугольника по трем сторонам. Одно дело, когда эти стороны (заданные элементы) фактически нам даны в виде натуральных отрезков. Тогда мы должны по этим отрезкам построить треугольник. Может случиться, что треугольник удастся построить, а может случиться, что этого сделать не удастся. И в том и в другом случае решение задачи на этом будет завершено. И совсем другое дело, когда эти стороны нам будут лишь названы как данные, но фактически в натуральном виде не даны. Тогда мы сами должны взять три произвольных отрезка и из них попытаться построить треугольник. Удача или неудача в этом еще не завершает решения: надо еще установить, в каком случае мы сумеем осуществить построение треугольника, а в каком нет.

Итак, заданные элементы в задачах на построение могут быть даны в натуральном виде, а могут быть лишь названы с указанием их характеристик. В первом случае решение заканчивается построением искомой фигуры; во втором же случае необходимо еще установить условия, при которых это построение возможно. Поэтому обязательным этапом решения задач на построение является этап анализа (или, как большей частью говорят, этап исследования) выполненного решения — построения искомой фигуры.

2. Во всякой задаче на построение требование состоит не просто в построении какой-то геометрической фигуры, а в построении геометрической фигуры, обладающей указанными в задаче свойствами. Например, в задаче 15 нужно построить не просто точку, а такую, которая обладает следующим свойством: она должна быть симметрична заданной точке A относительно заданной оси l. Или в задаче на построение треугольника по трем сторонам нужно построить не вообще треугольник, а такой, сторонами которого являются заданные отрезки. Поэтому естественно,

что, после того как произведено построение искомой фигуры, нужно убедиться, что она действительно обладает всеми указанными свойствами. Этот этап процесса решения задач на построение обычно называют доказательством, хотя, по сути дела, это обычный этап проверки решения.

3. В задаче 15 указан тот инструмент, с помощью которого следует выполнить построение (циркуль). Однако обычно в задачах на построение инструменты не указываются. В этом случае предполагается, что построение должно быть выполнено с помощью так называемых *классических инструментов* — линейки (односторонней) и циркуля.

Для того чтобы понять, какое значение имеет указание об инструментах построения, решим задачу 15 с помощью разных инструментов.

Сначала решим ее, как указано в задаче, одним циркулем. Для этого придется провести с помощью циркуля следующие построения (рис. 21):

1) Из точки A как из центра произвольным радиусом, но большим расстояния от A до l, провести окружность.

2) Найти точки B и C пересечения построенной окружности с прямой l.

3) Из B как из центра провести тем же радиусом окружность.

4) Из C как из центра тем же радиусом провести окружность.

5) Найти вторую точку пересечения этих последних двух окружностей (первая точка пересечения будет A). Это будет искомая точка A_1.

Решим ту же задачу, пользуясь одним угольником (с прямым углом). В этом случае придется провести следующие построения (рис. 22).

1) Через A провести $AB \perp l$.

2) Продолжить луч AB за точку B.

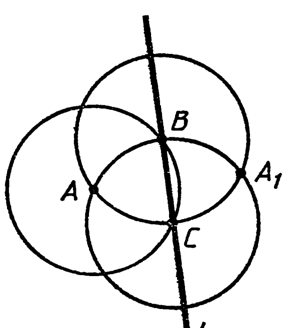


Рис. 21

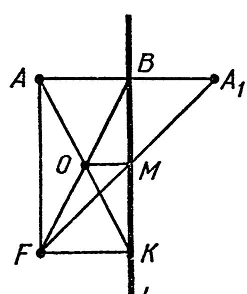


Рис. 22

3) Через A провести $AF \perp AB$.

4) Взять на AF произвольную точку F.

5) Через F провести $FK \perp l$.

6) Провести AK.

7) Провести FB.

8) Найти точку O пересечения AK и FB.

9) Через O провести $OM \perp l$.

10) Провести FM.

11) Найти точку пересечения FM с AB. Это будет искомая точка A_1.

Из этого примера вам, должно быть, стало ясно, что с помощью каждого инструмента можно провести ограниченное число основных построений. Перечислим основные построения, которые можно выполнить с помощью классических инструментов.

С помощью одной односторонней линейки можно выполнить следующие основные построения:

Л.1. Построить отрезок, соединяющий две данные (или построенные) точки.

Л.2. Построить прямую, проходящую через две данные (или построенные) точки.

Л.3. Построить луч, исходящий из данной точки и проходящий через другую данную точку.

С помощью одного циркуля можно выполнить следующие основные построения:

Ц.1. Построить окружность, если даны ее центр и отрезок, равный радиусу окружности.

Ц.2. Построить любую из двух дополнительных дуг окружности, если даны центр окружности и концы дуги.

Кроме основных построений, считаются возможными еще следующие основные построения:

П.1. Построить (найти) точку пересечения двух данных прямых.

П.2. Построить (найти) точки пересечения данной прямой с данной окружностью.

П.3. Построить (найти) точки пересечения двух данных окружностей.

П.4. Взять на прямой, или на окружности, или вне их произвольную точку.

П.5. Провести на плоскости произвольную прямую.

Если нужно решить какую-либо задачу на построение с помощью классических инструментов (линейки и циркуля), то достаточно свести решение этой задачи к последовательности указанных выше основных построений (Л.1.— Л.3, Ц.1.—Ц.2. и П.1.— П.3).

Заметим, что тем самым необходимость в фактическом построении отпадает. Но для того чтобы легче было осуществить само построение, а затем после построения доказательство и исследование, фактическое построение производят и получается наглядный чертеж.

Кроме основных построений, рассматривают еще так называемые элементарные геометрические построения, к которым обычно сводят более сложные построения, т. е. считается, что эти элементарные построения всегда можно выполнить, и объяснять, как они фактически производятся, не принято.

К элементарным геометрическим построениям обычно относятся следующие:

Э.1. Разделить данный отрезок на два равных отрезка.

Э.2. Разделить данный угол на два равных угла, или, что то же самое, провести биссектрису данного угла.

Э.3. Построить на данной прямой от данной точки в данном направлении отрезок, равный данному.

Э.4. Построить угол с вершиной в данной точке с данной стороной угла по указанную сторону от нее и равный данному углу.

Э.5. Построить прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

Э.6. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой.

Э.7. Построить треугольник по трем данным сторонам.

Э.8. Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.

Э.9. Построить треугольник по стороне и двум углам, прилежащим к ней.

Э.10. Построить прямую, касательную к данной окружности и проходящую через данную точку вне этой окружности.

Э.11. Построить прямоугольный треугольник по двум катетам, или по катету и гипотенузе, или по катету и острому углу, или по гипотенузе и острому углу.

Существует много разных специальных методов решения геометрических задач на построение. Сущность всех этих методов состоит, естественно, в том, чтобы свести решение данной задачи к последовательности основных и элементарных построений. Мы здесь не можем рассматривать все эти методы, да и в этом нет особой необходимости, ибо главное — это понять указанную выше идею сведения.

Покажем на примерах решение геометрических задач на построение. Во всех задачах предполагается построение с помощью классических инструментов.

Задача 16. *Построить треугольник по высоте, одной из боковых сторон и разности углов при основании.*

Решение. Сначала установим данные элементы, искомую фигуру и те свойства, которыми она должна обладать.

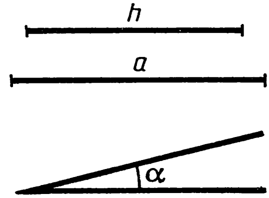


Рис. 23

Данными элементами являются (рис. 23) произвольный отрезок h, являющийся высотой в искомом треугольнике, произвольный отрезок a, являющийся боковой стороной в искомом треугольнике, и угол α, являющийся разностью углов при основании искомого треугольника.

Отсюда ясно, что искомая фигура (треугольник) должна удовлетворять следующим условиям:

1) высотой, опущенной на основание (а за основание можно принять любую сторону), должен быть отрезок, равный h;

2) одна из боковых сторон этого треугольника должна быть равна отрезку a;

3) разность углов при основании треугольника должна быть равна углу α.

Чтобы найти способ решения задачи на построение, обычно поступают следующим образом. Допускают, что задача решена, т. е. в данном случае треугольник построен, отмечают в нем все данные элементы и ищут способ построения других элементов или путь сведения данной задачи к основным и элементарным построениям.

Итак, пусть $\triangle ABC$ искомый, т. е. тот, который нам нужно построить (рис. 24). Будем считать его основанием сторону AB. Тогда высота CD есть заданная высота h, а боковая сторона BC есть заданная боковая сторона a. Теперь нужно отметить на рисунке заданный угол α. Для этого от большего угла при основании AB надо отнять меньший угол. Будем, например, считать, что больший угол A. Тогда, если $\angle BAK = \angle B$, то $\angle KAC$ и есть заданный угол α.

Можно сразу установить некоторые условия, которым должны удовлетворять эти элементы. Так как h и a являются соответственно катетом и гипотенузой $\triangle CDB$, то

$$h < a. \qquad (1)$$

Что же касается угла α, то, каковы бы ни были углы A и B, их разность, очевидно, есть отрый угол, т. е.

$$\alpha < 90°. \qquad (2)$$

Перейдем теперь к поиску способа решения этой задачи.

Ставим перед собой вопрос: можно ли сразу по данным эле-

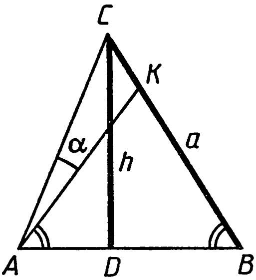


Рис. 24

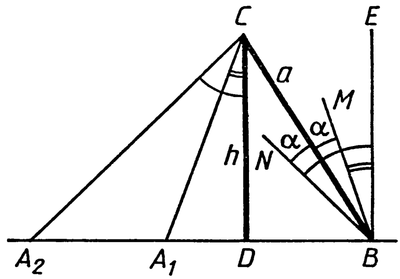


Рис. 25

ментам построить искомый треугольник? Очевидно, что нет. Но, может быть, можно построить какую-либо часть искомой фигуры? Приглядываясь к рисунку 24, видим, что в прямоугольном треугольнике BCD катет CD и гипотенуза BC являются данными. Поэтому этот треугольник можно построить. Тем самым определится угол B, а зная угол α, следовательно, сумеем к $\triangle BCD$ пристроить $\triangle ACD$ и тем самым полностью построить искомую фигуру. План построения найден.

Перейдем к построению. Будем записывать шаги построения, ссылаясь на номера основных и элементарных построений (рис. 25).

1. **Э.11.** Строим прямоугольный треугольник BCD по гипотенузе $BC=a$ и катету $CD=h$.
2. **Э.4.** Строим $\angle CBM=\angle CBN=\alpha$.
3. **Э.6.** Проводим $BE\perp DB$.
4. **Э.4.** Строим $\angle DCA_1=\angle MBE$.
5. **Э.4.** Строим $\angle DCA_2=\angle NBE$.

Полученные треугольники A_1BC и A_2BC искомые.

Доказательство. 1) В каждом из этих двух треугольников высота CD, опущенная на основание A_1B или A_2B, равна по построению данному отрезку h.

2) В каждом из этих двух треугольников боковая сторона BC равна по построению данному отрезку a.

3) Рассмотрим теперь разность углов при основании A_1B или A_2B. В $\triangle A_1BC$ бо́льшим углом является угол A_1. Тогда $\angle A_1 - \angle B = (90° - \angle A_1CD) - \angle B = (90° - \angle MBE) - \angle B = \angle MBA_1 - \angle B = \angle CBM = \alpha$. В $\triangle A_2BC$ большим углом является угол B, поэтому находим разность $\angle B - \angle A_2$ и доказываем аналогично, что и она равна α.

Исследование. Установим, при каких условиях можно выполнить указанные пять шагов построения. Очевидно, что первые три шага при условиях (1) и (2) выполнить можно всегда. А вот последние два шага нуждаются в дополнительном исследовании. Дело в том, что каждый из них состоит из двух построений: построения угла, равного указанному (соответственно $\angle MBE$ и $\angle NBE$), и построения точки пересечения полученного луча с прямой BD. Построение угла, равного указанному, всегда возможно, а вот нахождение точки пересечения полученного луча с прямой нуждается в исследовании.

Если луч BM проходит внутри угла CBE, то 4-й шаг всегда выполним. Если же BM проходит вне указанного угла (на рис. 25 справа от BE), то здесь возможны три случая:

1) Луч BM проходит так, что $\angle BEM \geqslant \angle DCB$, т. е. $\alpha - (90° - \angle B) \geqslant 90° - \angle B$, или $\alpha + 2\angle B \geqslant 180°$. В этом случае луч CA_1 пройдет вне угла DCB, поэтому $\triangle A_1BC$ построить нельзя.

2) Если BM проходит правее BE, так, что $\angle BEM < \angle DCB$, то CA_1 пройдет внутри $\angle DCB$, тогда $\triangle A_1BC$ будет тупоугольный.

3) Если же BM совпадает с BE, то $\triangle A_1BC$ совпадает с $\triangle DCB$. Тогда получаем в качестве решения прямоугольный треугольник.

Таким же образом исследуем 5-й шаг. Если луч BN проходит внутри $\angle DBC$, то построить $\triangle A_2BC$ можно. Если же BN совпадает с BD или проходит вне $\angle DBC$, то $\angle NBE \geqslant 90°$, поэтому CA_2 не пересечет DB слева от D, следовательно, построить $\triangle A_2BC$ нельзя.

Итак, видим, что при разных соотношениях между углами α и B задача может не иметь решения, иметь одно решение и иметь два решения.

Конечно, можно провести исследование и более строго, установить количественные соотношения между заданными элементами, соответствующие каждому случаю. Но это потребует использования тригонометрических функций, что вряд ли предполагается в условиях VI класса.

Задача 17. *Построить равносторонний треугольник так, чтобы одна его вершина находилась в данной точке A, другая — на данной прямой BC и третья — на данной окружности.*

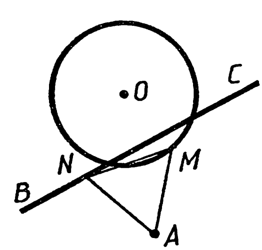


Рис. 26

Решение. Пусть положение заданных точки A, прямой BC и окружности $(O; r)$ таково, как оно изображено на рисунке 26.

Допустим, что искомый равносторонний треугольник построен и занимает положение AMN (рис. 26). Очевидно, что ни весь, ни какую-либо его часть по данным

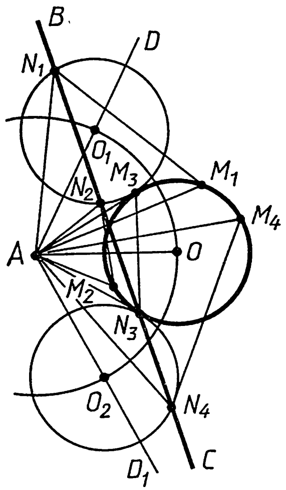


Рис. 27

элементам построить нельзя. В таких случаях полезно подумать, что мешает нам в построении. Мешает, естественно, то, что прямая BC и окружность $(O;\ r)$ никак не связаны и расположены совершенно произвольно. Мешает еще и то, что в искомом треугольнике нам известен лишь один его элемент (его углы).

Поэтому подумаем, нельзя ли устранить эти помехи. Как?

Очевидно, что нужно как-то преобразовать данную ситуацию (расположение элементов) в такую, в которой данные элементы как-то связаны между собой.

Точка A фиксированная, и угол MAN тоже данный, известный. Отсюда возникает мысль повернуть окружность $(O;\ r)$ вокруг точки A на этот угол, т. е. угол 60°. Тогда точка M совпадет с точкой N, т. е. это будет точка пересечения прямой BC с новым положением окружности $(O;\ r)$.

Теперь можно провести построение (рис. 27).

1. **Л.1.** Проводим AO.

2. **Э.4.** Строим $\angle OAD = 60°$ и $\angle OAD_1 = 60°$ по обе стороны от OA.

3. **Ц.1.** Проводим из A как из центра окружность радиуса AO.

4. **П.2.** Находим точки пересечения O_1 и O_2 окружности $(A;\ AO)$ с лучами AD и AD_1.

5. **Ц.1.** Проводим из O_1 и O_2 окружности радиуса r.

6. **П.2.** Находим точки пересечения окружностей $(O_1;\ r)$ и $(O_2;\ r)$ с BC; на рисунке 27 таких точек четыре: N_1, N_2, N_3 и N_4. Это максимально возможное число точек пересечения одной прямой с двумя окружностями. Но вообще их может быть от 0 до 4.

7. **Ц.1.** Проводим из A радиусом AN_1 (AN_2, AN_3 и AN_4) окружности.

8. **П.2.** Находим точки пересечения окружностей, построенных на предыдущем шаге, с окружностью $(O;\ r)$, и из каждой пары точек пересечения выбираем в качестве точки M_1, M_2, M_3 и M_4 ту, которая лежит по ту же сторону от AO, по какую лежит соответствующая ей точка N_1, N_2, N_3 или N_4 от AD или AD_1.

9. **Л.1.** Соединяем точки A, M_1 и N_1, A, M_2 и N_2, A, M_3 и N_3, A, M_4 и N_4 отрезками. Получаем искомые треугольники AM_1N_1, AM_2N_2, AM_3N_3 и AM_4N_4.

Доказательство и исследование очевидны. Надо лишь особо рассмотреть случай, когда точка A совпадает с центром O заданной окружности, ибо тогда описанное выше построение непригодно. В этом случае решение задачи возможно лишь тогда, когда BC пересекает заданную окружность $(O; r)$ или касается ее. Откладывая от каждой точки пересечения (или касания) по обе стороны дуги в 60°, получим 4 решения (в случае пересечения) или 2 решения (в случае касания).

Задание 20

Решите следующие задачи на построение.

20.1. Построить треугольник по двум высотам h_b и h_c и медиане m_a.

20.2. Построить четырехугольник, если даны все его четыре стороны и известно, что одна из диагоналей делит один из углов пополам.

20.3. Построить треугольник по двум углам A и B и периметру $2p$.

20.4. Построить параллелограмм по двум сторонам и углу между диагоналями.

20.5. Построить отрезок данной длины так, чтобы его концы лежали на данных двух окружностях и чтобы он был параллелен данной прямой.

20.6. Построить окружность, проходящую через две данные точки A и B и касающуюся данной прямой.

Глава V
ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ИСКОМОГО

V.1. Сущность решения уравнений и неравенств

Уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств являются математическими моделями очень многих физических и иных явлений. Поэтому решение различных практических задач сводится к решению уравнений, неравенств и их систем.

Уравнения и неравенства в разных учебниках определяются несколько по-разному. Однако более важно усвоить не те или иные определения, а основные признаки этих понятий:

1. Всякое уравнение или неравенство есть задача.

2. Записью этой задачи является *равенство (неравенство) с переменной (переменными)*. Заметим, что раньше вместо «переменная» говорили «неизвестная».

3. Уравнение или неравенство — это такая задача, в которой требуется найти значение этой переменной (или переменных).

4. Искомые значения переменной (переменных), которые нужно найти в задаче-уравнении (неравенстве), должны быть такими,

чтобы, будучи подставлены вместо переменной (переменных) в уравнение (неравенство), они обращали его в истинное высказывание (верное равенство (неравенство)).

Эти значения переменной (переменных), удовлетворяющие уравнению (неравенству), называются *решениями уравнения* (неравенства). В случае уравнения с одной переменной решения называются еще **корнями**.

Помните, что слово «решение» обозначает также и процесс отыскания решения. Так что каждый раз следует отдать себе отчет, о каком смысле слова «решение» идет речь.

В чем смысл решения (как процесса) уравнения (неравенства)?

Рассмотрим пока уравнения и неравенства с одной переменной.

Всякое уравнение (неравенство) можно записать, как было указано, в виде равенства (неравенства) с переменной. Следовательно, всякое уравнение имеет такой вид:

$$f(x)=\varphi(x). \tag{1}$$

А всякое неравенство такой вид:

$$f(x)\ \omega\ \varphi(x), \tag{2}$$

где знак ω обозначает один из следующих: $>$, $<$, $\geqslant$ или $\leqslant$.

Здесь $f(x)$ и $\varphi(x)$ суть некоторые выражения (функции) от переменной x. Притом одно из них, т. е. $f(x)$ или $\varphi(x)$, может представлять собой некоторую постоянную функцию (число), в частности нуль.

Областью определения уравнения (1) или неравенства (2) называется общая область определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Простейшим уравнением считается уравнение вида

$$x=a, \tag{3}$$

где a — некоторое число. Это уравнение считается простейшим потому, что оно есть и запись задачи (найти значение, удовлетворяющее этому равенству), и запись ответа задачи: единственное значение переменной x, удовлетворяющее уравнению (3), есть a. Поэтому понятно, что решение любого уравнения (1) состоит в том, чтобы свести его к простейшему уравнению (или к совокупности простейших уравнений).

По тем же причинам простейшим неравенством называется неравенство вида $x\ \omega\ a$ или двойное неравенство вида

$$a\ \omega\ x\ \omega\ b, \tag{4}$$

где a и b — некоторые числа. Решением простейшего неравенства является числовой промежуток. Так, неравенству $x>a$ соответствует промежуток $(a, +\infty)$, неравенству $x\leqslant a$ соответствует промежуток $(-\infty, a]$, неравенству $a<x<b$ соответствует промежуток (a, b) и т. д.

Сведение уравнения (1) или неравенства (2) к уравнениям или неравенствам простейшего вида производится с помощью правил равносильности уравнений или неравенств. Как вы знаете, *равносильными* уравнениями (неравенствами) считаются такие два уравнения (неравенства), множества решений которых совпадают в множестве чисел, на котором рассматривается решение уравнений. Это значит, что всякое решение первого уравнения (неравенства) удовлетворяет и второму уравнению (неравенству) и, обратно, всякое решение второго уравнения (неравенства) удовлетворяет и первому.

При решении уравнений используется еще понятие — *следствие* уравнения, а именно, если известно лишь, что все решения первого уравнения удовлетворяют второму уравнению (а обратное неизвестно), то второе уравнение называется следствием первого.

Например, следствием уравнения $2x+1=x+3$ (а) является уравнение $(x-1)(2x+1)=(x-1)(x+3)$ (б), ибо уравнение (а) имеет один корень $x=2$, этот корень удовлетворяет и уравнению (б), но уравнение (б) имеет еще один корень $x=1$, который не удовлетворяет уравнению (а). Поэтому (а)$\Rightarrow$(б). Это же уравнение (а) имеет и такое следствие: $4x=2x+4$ (в). Но в этом случае не только корень (а) удовлетворяет (в), но и корень (в) удовлетворяет (а). Поэтому не только (в) есть следствие (а), но и (а) есть следствие (в), а это значит, что эти два уравнения равносильны: (а) $\Leftrightarrow$ (в).

В математике установлены правила (теоремы), позволяющие преобразовывать данное уравнение (неравенство) в ему равносильное. Заметим, что уравнения иногда преобразовываются в следствия, а вот неравенства преобразовываются лишь в равносильные неравенства (подумайте почему).

Напомним все эти *правила*.

Для преобразований уравнений используются такие правила.

У.1. Если $f(x)\equiv f_1(x)$ и $\varphi(x)\equiv\varphi_1(x)$, то

$$(f(x)=\varphi(x))\Leftrightarrow(f_1(x)=\varphi_1(x)).$$

Здесь знак «$\equiv$» обозначает тождественное равенство. Это правило позволяет заменять любое выражение, входящее в уравнение, ему тождественно равным.

У.2. $(f(x)=\varphi(x))\Leftrightarrow(f(x)+F(x)=\varphi(x)+F(x))$.

Если к обеим частям уравнения прибавить (или отнять) одно и то же выражение, имеющее смысл в области определения уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.

У.3. $(f(x)=\varphi(x)) \Leftrightarrow (f(x) \cdot F(x)=\varphi(x) \cdot F(x))$.

Если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же выражение, имеющее смысл в области определения данного уравнения и в этой области не равное нулю, то получим уравнение, равносильное исходному.

Если же условие $F(x) \neq 0$ не выполняется, то уравнение, полученное в результате умножения обеих частей на $F(x)$, будет следствием исходного, а в случае деления на $F(x)$, наоборот, исходное будет следствием полученного. Это означает, что при умножении обеих частей данного уравнения на выражение $F(x)$ (когда неизвестно, что $F(x) \neq 0$) можно лишь приобрести посторонние корни (т. е. корни, не удовлетворяющие данному уравнению), а при делении обеих частей уравнения на $F(x)$ можно потерять некоторые из корней данного уравнения.

У.4. $(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)=0) \Rightarrow (f_1(x)=0) \cup (f_2(x)=0) \cup \ldots \cup (f_n(x)=0)$.

Если левая часть уравнения есть произведение нескольких выражений, а правая нуль, то совокупность (объединение) уравнений, левая часть которых есть сомножители произведения, а правая нуль, является следствием данного уравнения.

У.5. $(f(x)=\varphi(x)) \Rightarrow (f^n(x)=\varphi^n(x))$.

Если обе части уравнения возвысить в одну и ту же степень, то получим уравнение, являющееся следствием данного. Заметим, что если обе части данного уравнения сохраняют в области его определения неотрицательное значение, то, возвышая обе части уравнения в одну и ту же степень, получим уравнение, равносильное данному.

У.6. $(a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}) \Leftrightarrow (f(x)=\varphi(x))$, где $a>0$, $a \neq 1$.

У.7. $(\log_a f(x)=\log_a \varphi(x)) \Rightarrow (f(x)=\varphi(x))$, где $a>0$, $a \neq 1$.

Пользуясь этими правилами, можно решить любое уравнение. При этом когда мы пользуемся лишь правилами, в результате применения которых получаются равносильные уравнения, то никакой особой проверки решения уравнения не требуется. Если же использовалось какое-либо правило, применение которого дает лишь следствие данного уравнения, то проверка решения необходима. За этим очень важно следить, ибо забвение этого приводит либо к приобретению посторонних корней, либо к потере корней, т. е. к неверному ответу.

Для преобразований неравенств используются такие правила.

Н.1. Если $f(x) \equiv f_1(x)$ и $\varphi(x) \equiv \varphi_1(x)$, то
$$(f(x)\ \omega\ \varphi(x)) \Leftrightarrow (f_1(x)\ \omega\ \varphi_1(x)).$$
Н.2. $(f(x)\ \omega\ \varphi(x)) \Leftrightarrow (f(x)+F(x)\ \omega\ \varphi(x)+F(x))$ при условии, что $F(x)$ имеет смысл в области определения исходного неравенства.

Н.3. Если $F(x)>0$ при всех $x \in R$, то
$$(f(x)\ \omega\ \varphi(x)) \Leftrightarrow (f(x)\ F(x)\ \omega\ \varphi(x)\ F(x)).$$
Если $F(x)<0$ при всех $x \in R$, то
$$(f(x)\ \omega\ \varphi(x)) \Leftrightarrow (f(x)\ F(x)\ \omega^{-1}\ \varphi(x)\ F(x)),$$
где ω^{-1} обозначает знак неравенства противоположного смысла неравенства ω (т. е. если ω есть $<$, то ω^{-1} есть $>$ и т. д.).

Н.4. Если $f(x)>0$ и $\varphi(x)>0$ в области их определения D, то $(f(x)\ \omega\ \varphi(x)) \Leftrightarrow (f^n(x)\ \omega\ \varphi^n(x)) \cap D$.

Н.5. Если $a>1$, то $(a^{f(x)}\ \omega a^{\varphi(x)}) \Leftrightarrow (f(x)\ \omega\ \varphi(x))$.
Если $0<a<1$, то $(a^{f(x)}\ \omega a^{\varphi(x)}) \Leftrightarrow (f(x)\ \omega^{-1}\ \varphi(x))$.

Н.6. Если $a>1$, то $(\log_a f(x)\ \omega \log_a \varphi(x)) \Leftrightarrow (f(x)\ \omega\ \varphi(x)) \cap$ $\cap\ (f(x)>0) \cap (\varphi(x)>0)$.
Если $0<a<1$, то $(\log_a f(x) \omega \log_a \varphi(x)) \Leftrightarrow (f(x) \omega^{-1}\ \varphi(x)) \cap$ $\cap\ (f(x)>0) \cap (\varphi(x)>0)$.

Перейдем сейчас к рассмотрению методов решения отдельных видов уравнений и неравенств с одной переменной, а затем и систем уравнений и неравенств.

Задание 21

Ответьте на следующие вопросы.

21.1. Почему при решении неравенств не используется понятие «следствие неравенства»?

21.2. Какое важное следствие вытекает из правила У.2?

21.3. Что такое совокупность уравнений?

21.4. Что такое совокупность неравенств?

21.5. Какое следствие вытекает из правила У.3?

21.6. При каком дополнительном условии в правиле У.7 вместо знака следования можно поставить знак равносильности?

21.7. Какое следствие вытекает из правила Н.2?

21.8. Какое следствие вытекает из правила Н.3?

Задание 22

Приведите словесную формулировку следующих правил.

22.1. Правила У.6. **22.2.** Правила У.7. **22.3.** Правила Н.1.
22.4. Правила Н.2. **22.5.** Правила Н.3. **22.6.** Правила Н.4.
22.7. Правила Н.5. **22.8.** Правила Н.6.

Задание 23

Ответьте на следующие вопросы (см. с. 120).

23.1. Как можно записать в виде одного уравнения совокупность (объединение) следующих простейших уравнений: $x=-2$, $x=3$, $x=4$?

23.2. Какому неравенству соответствует числовой промежуток $[-2, 3)$?

23.3. Какое простейшее неравенство равносильно совокупности (объединению) следующих неравенств:

$$(x<0)\cup(0\leqslant x\leqslant 2)\cup(2<x\leqslant 3)?$$

23.4. Можно ли изобразить совокупность неравенств $(x<-2)\cup$ $\cup(x>3)$ в виде одного простейшего неравенства?

23.5. Как можно записать в виде одного неравенства систему (пересечение) следующих неравенств:

$$(3x+2<x^2-2)\cap(3x+2>0)\cap(x^2-2>0)?$$

V.2. Рациональные уравнения

Основными рациональными уравнениями с одной переменной являются линейные и квадратные уравнения. Их решение вам хорошо знакомо.

Все остальные рациональные уравнения приводятся с помощью различных преобразований к этим основным уравнениям, т. е. к линейным и квадратным. Этими *преобразованиями* являются следующие:

1. Если уравнение дробное, то сначала приводят его к целому виду, умножив обе части уравнения на общий знаменатель всех дробей. При этом нужно помнить, что согласно правилу У.3 мы получим лишь следствие исходного уравнения.

2. Если уравнение целое, то используют два способа преобразований: а) замену переменных (введение новых переменных); б) разложение левой части уравнения на множители, когда правая часть равна нулю.

Покажем на примерах использование этих преобразований.

Задача 18. *Решить уравнение* $\dfrac{3}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{x(x-1)^2}+\dfrac{3}{x(x-3)}$.

Решение. Данное уравнение дробное. Чтобы привести его к целому виду, умножим обе части на общий знаменатель всех дробей:

$$x(x-1)^2(x+2)(x-3)$$

(ибо $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$). Будем помнить, что получим лишь следствие исходного уравнения:

$$3x(x-1)(x-3)=(x+2)(x-3)+3(x-1)^2(x+2).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов в каждой части уравнения получим: $3x^3-12x^2+9x=3x^3+x^2-10x$.

Перенесем теперь все члены в левую сторону и сделаем приведение подобных членов, получим: $-13x^2+19x=0$.

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$-x\ (13x-19)=0.$$

На основании правила У.4 получим совокупность двух линейных уравнений: $-x=0$ и $13x-19=0$, отсюда $x=0$ и $x=\frac{19}{13}$.

Так как в процессе решения мы использовали преобразования, приводящие к следствиям уравнения, то необходима проверка. Подстановка в исходное уравнение показывает, что $x=0$ является посторонним корнем (ибо 0 не входит в область определения уравнения), а $\frac{19}{13}$ удовлетворяет уравнению.

Ответ: $x=1\frac{6}{13}$.

Задача 19. *Решить уравнение*

$$(x^2+x+4)^2+8x\ (x^2+x+4)+15x^2=0.$$

Решение. Очевидно, что приведение левой части уравнения к стандартному виду многочлена лишь усложнит уравнение. Поэтому надо искать иные способы решения. Покажем два способа.

1-й способ. Он основан на разложении левой части на множители. Левая часть уравнения очень напоминает квадрат суммы выражений x^2+x+4 и $4x$. Но тогда третье слагаемое должно быть не $15x^2$, а $16x^2$.

Это легко сделать следующим образом:

$$(x^2+x+4)^2+8x\ (x^2+x+4)+16x^2-x^2=0$$

или

$$((x^2+x+4)+4x)^2-x^2=0,$$

$$(x^2+5x+4-x)\ (x^2+5x+4+x)=0,$$

$$(x^2+4x+4)\ (x^2+6x+4)=0.$$

На основании правила У.4 получаем совокупность двух квадратных уравнений: $x^2+4x+4=0$ и $x^2+6x+4=0$.

Решив их, найдем множество корней: $x_1=-2$, $x_{2,3}=-3\pm\sqrt{5}$.

2-й способ основан на подстановке:

$$x^2+x+4=y. \qquad (1)$$

Тогда исходное уравнение принимает вид: $y^2+8xy+15x^2=0$.

Этот квадратный трехчлен легко разложить на множители: $(y+5x)\ (y+3x)=0$. Отсюда находим, что $y=-5x$ или $y=-3x$.

Подставляя полученные выражения вместо y в (1), получаем те же два квадратных уравнения.

Задание 24

Укажите, какие преобразования нужно последовательно произвести в процессе решения уравнений.

24.1. $(x-2)^6-19(x-2)^3=216$. 24.2. $\frac{x^2-4x+5}{x^2+6x+10}=\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2$.

V.3. Рациональные неравенства

Основными рациональными неравенствами являются линейные, системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной. Всякое линейное неравенство, а также системы линейных неравенств легко сводятся к одному из простейших неравенств, а совокупности линейных неравенств — к одному или совокупности нескольких простейших. Здесь возможны следующие случаи.

Линейные неравенства с одной переменной всегда с помощью тождественных преобразований обеих частей неравенства сводятся к неравенству вида $ax+b \omega cx+d$, а затем и к неравенству $(a-c)x \omega d-b$. Дальнейшее решение зависит не только от значений коэффициентов в левой и правой частях неравенства, но и от смысла знака ω.

Например, неравенство $3x+5<3x+8$ или $0 \cdot x<3$ выполняется при любом значении x, и, следовательно, его решением является вся область R, а неравенство $3x+5>3x+8$ или $0 \cdot x>3$ не выполняется ни при каком значении x, и, следовательно, это неравенство не имеет решений.

Системы линейных неравенств с одной переменной одного и того же смысла всегда можно заменить одним простейшим неравенством того же смысла. Например, система $\begin{cases} x>-2, \\ x>3, \\ x>2, \\ x>5 \end{cases}$ равносильна неравенству $x>5$.

Заметим, что 5 есть наибольшее из чисел, стоящих в правых частях простейших неравенств данной системы.

Система $\begin{cases} x<3, \\ x<2, \\ x<-1 \end{cases}$ равносильна неравенству $x<-1$.

Число -1 есть наименьшее из чисел, стоящих в правых частях простейших неравенств системы.

Системы неравенств с одной переменной разного смысла или же приводятся к одному простейшему неравенству (двойному), или же противоречивы и не имеют решения. Например, система

$$\begin{cases} x>3,\\ x<5,\\ x>2,\\ x<4,\\ x<1 \end{cases}$$ равносильна системе из двух систем $$\begin{cases} \begin{cases} x>3,\\ x>2 \end{cases}\\ \begin{cases} x<5,\\ x<4,\\ x<1. \end{cases} \end{cases}$$

Последняя система равносильна системе: $\begin{cases} x>3,\\ x<1, \end{cases}$ которая противоречива и не имеет решений.

Совокупности линейных неравенств, очевидно, всегда можно свести к совокупности простейших неравенств.

Что касается нелинейных рациональных неравенств с одной переменной, то они с помощью особых преобразований, основанных на правилах Н.1 — Н.3 и приведенных ниже двух теоремах, сводятся к линейным неравенствам.

Теорема 1. *Если в системе неравенств одно из них удовлетворяется при всех значениях переменной (такое неравенство иногда называют тождественно-истинным), то, отбросив его, получим систему, равносильную исходной.*

Например, $\begin{cases} x^2+1>0,\\ 2x-3<0,\\ 4-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3<0,\\ 4-x^2>0, \end{cases}$

ибо неравенство $x^2+1>0$ справедливо при любом $x\in R$.

Следствие. *Если в неравенстве $f(x)\ \varphi(x)\ \omega\ 0$ множитель $f(x)$ такой, что $f(x)>0$ при всех $x\in R$, то этот множитель можно отбросить, т. е. исходное неравенство равносильно неравенству $\varphi(x)\ \omega\ 0$.*

Например, неравенство $x^3-1<0$, или, что то же,

$$(x-1)\ (x^2+x+1)<0,$$

равносильно неравенству $x-1<0$, ибо неравенство $x^2+x+1>0$ является тождественно-истинным, т. е. выполняющимся при любом $x\in R$.

Теорема 2. *Неравенство $\frac{f(x)}{\varphi(x)}>0$ или $\frac{f(x)}{\varphi(x)}<0$ равносильно соответственно неравенству $f(x)\ \varphi(x)>0$ или $f(x)\ \varphi(x)<0$.*

Например, неравенство $\frac{2x-3}{x+5}>0$ равносильно неравенству $(2x-3)\ (x+5)>0$. Заметим, что если неравенство нестрогое, то эта теорема верна лишь при некоторых дополнительных условиях. Например, неравенство $\frac{3x-2}{x+3}\geqslant 0$ равносильно неравенству $(3x-2)\ (x+3)\geqslant 0$ при условии, что $x\neq -3$.

Решение нелинейных рациональных неравенств можно производить в такой последовательности:

1-й шаг. Все члены неравенства переносим в одну сторону (например, в левую), с тем чтобы правая сторона неравенства была равна нулю.

2-й шаг. Если левая часть неравенства есть дробное выражение, то приводим его к виду дроби, которую на основе теоремы 2 заменяем произведением многочленов, стоящих в числителе и знаменателе дроби.

3-й шаг. Многочлены, если их степень больше первой, разлагаем на линейные множители или квадратные с отрицательным дискриминантом.

4-й шаг. Отбрасываем все множители, значение которых положительно при всех значениях переменной.

Дальнейшее решение рассмотрим несколько ниже, а пока проиллюстрируем эти четыре шага на одном примере.

Задача 20. *Решить неравенство*

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^4}+\frac{x^2}{(x^2-1)^3(x-1)}>\frac{1}{(x^2-1)^2(x+1)}.$$

Решение.

1-й шаг. $\dfrac{1}{(x+1)(x-1)^4}+\dfrac{x^2}{(x^2-1)^3(x-1)}-\dfrac{1}{(x^2-1)^2(x+1)}>0.$

2-й шаг. $\dfrac{(x+1)^2+x^2-(x-1)^2}{(x+1)^3(x-1)^4}>0,$

$$((x+1)^2+x^2-(x-1)^2)(x+1)^3(x-1)^4>0.$$

3-й шаг. $x(x+4)(x+1)^3(x-1)^4>0.$

4-й шаг. $(x+1)^2>0$ при $x\neq -1$, а $(x-1)^4>0$ при $x\neq 1$. Поэтому при этих условиях можно отбросить указанные множители, т. е. $(x+1)^2$ и $(x-1)^4$. Тогда получим, что исходное неравенство равносильно неравенству

$$x(x+4)(x+1)>0 \text{ при } x\neq\pm 1. \qquad (1)$$

Дальнейшее решение возможно несколькими способами. Можно заменить данное неравенство совокупностью систем линейных неравенств, рассуждая таким образом. В левой части (1) имеются три множителя, произведение которых должно быть положительно. Очевидно, это будет тогда, когда или все эти множители положительны, или один положителен, а остальные два отрицательны. Получаем поэтому совокупность следующих систем неравенств:

$$\begin{cases}x>0,\\x+4>0,\\x+1>0,\end{cases}\quad\begin{cases}x>0,\\x+4<0,\\x+1<0,\end{cases}\quad\begin{cases}x<0,\\x+4>0,\\x+1<0,\end{cases}\quad\begin{cases}x<0,\\x+4<0,\\x+1>0.\end{cases}$$

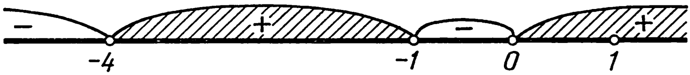


Рис. 28

Решив эти системы, получим решение исходного неравенства, конечно, при учете условия $x \neq \pm 1$.

Однако такой способ очень громоздок. Более удобен так называемый *способ промежутков*. Состоит он в следующем. Найдем корни левой части неравенства, т. е. те значения переменной, при которых каждый из множителей левой части обращается в нуль. В рассматриваемом примере это 0, -1 и -4. Изобразим их на числовой прямой, при этом если неравенство строгое, как в данном случае, то изобразим их в виде пустых кружочков. Если же неравенство нестрогое, то в виде заштрихованных кружочков (рис. 28). Нанесем также точки в виде пустых кружочков, соответствующие дополнительным условиям, в данном случае $x \neq \pm 1$.

Точки, соответствующие корням левой части неравенства, разбивают всю прямую на области (в данном случае на четыре области). Рассмотрим знак левой части (1) в каждой из этих областей.

Если $x \in (0;\ +\infty)$ (первая справа область), то x больше всех корней левой части и поэтому все сомножители положительны, а значит, положительна и вся левая часть неравенства (1). При переходе x в следующую слева область, т. е. в область $(-1;\ 0)$, меняется лишь знак одного из сомножителей (а именно знак x с «$+$» переходит на «$-$»), а все остальные сомножители сохраняют свой знак, следовательно, произведение меняет свой знак на противоположный (было оно положительно, стало отрицательно). То же будет происходить и при переходе в следующую слева область. Таким образом, знаки произведения (левой части неравенства) в выделенных областях чередуются, притом в первой справа области знак всегда «$+$», а затем, идя справа налево, знаки «$+$» и «$-$» чередуются.

После того как знаки в областях расставлены, выбираем те области, которые удовлетворяют неравенству. В данном случае нам нужно выбрать области со знаком «$+$». Получаем $0 < x < +\infty$, $-4 < x < -1$ при условии, что $x \neq 1$.

Это решение можно записать еще и так:

$$x \in (-4;\ -1) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty).$$

Задача 21. *Решить неравенство* $\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{(x^2-2x+3)^2} \geqslant 1.$

Решение. Переносим все члены в левую часть неравенства и приводим к виду дроби: $\frac{(x^2+2x-3)^2-(x^2-2x+3)^2}{(x^2-2x+3)^2}\geqslant 0.$

Раскладываем выражение, стоящее в числителе, на множители. Полученное неравенство равносильно следующему:

$$2x^2(4x-6)(x^2-2x+3)^2\geqslant 0.$$

Квадратный трехчлен x^2-2x+3 разложить на множители нельзя, ибо его дискриминант отрицателен. А вы знаете, что знак такого квадратного трехчлена одинаков со знаком коэффициента старшего члена, в данном случае этот трехчлен при всех x положителен. Поэтому его можно отбросить. Точно так же можно отбросить и множитель x^2, но при условии, что $x\neq 0$. Следовательно, при этом условии исходное неравенство равносильно такому: $2(4x-6)\geqslant 0$. Или, отбрасывая множитель 8, получаем $x-1{,}5\geqslant 0$ при условии, что $x\neq 0$. Отсюда, учитывая, что неравенство нестрогое, получаем такое решение: $x\geqslant 1{,}5$ и $x=0$.

Задание 25

Решите неравенства.

25.1. $(x-1)^3(x-2)^5(x-3)^7(x-4)^{10}<0.$ 25.2. $\frac{2x^2-3x+5}{2x^2-3x+1}\geqslant 0.$

V.4. Иррациональные уравнения и неравенства

Решение иррациональных уравнений и неравенств обычно состоит в том, что с помощью некоторых преобразований их заменяют равносильными им рациональными уравнениями, неравенствами или системами уравнений и неравенств (зачастую смешанными системами, т. е. такими, в которые входят как уравнения, так и неравенства). Этими преобразованиями является, кроме рассмотренных выше замены переменных (введение новых переменных) и разложения на множители, еще и возвышение обеих частей уравнения или неравенства в одну и ту же степень. При этом, конечно, нужно следить, чтобы не приобрести посторонних решений. Поэтому полезно там, где это возможно, находить область определения уравнения или неравенства, а также область возможных значений решений.

Например, приступая к решению уравнения

$$\sqrt{x-3}-\sqrt{x+9}=\sqrt{x-2},$$

обращаем внимание на то, что левая часть уравнения есть разность двух корней, при этом при любых значениях x $x-3<x+9$, а поэтому и $\sqrt{x-3}<\sqrt{x+9}$, следовательно, эта разность всегда отрицательна и не может быть равна неотрицательному значению корня $\sqrt{x-2}$. Значит, это уравнение не имеет решения.

Решая уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{5-x}=x-6$, находим сначала область его определения. Она определяется условиями $x-2\geqslant 0$ и $5-x\geqslant 0$, отсюда

$$2\leqslant x\leqslant 5. \qquad (1)$$

Но так как левая часть уравнения как сумма квадратных корней всегда неотрицательна, то возможные значения корней уравнения должны удовлетворять еще и такому условию: $x-6\geqslant 0$. Но это условие противоречит условию (1), поэтому область возможных значений корней уравнения пустая и, следовательно, уравнение не имеет решений.

Приступая к решению неравенства $\sqrt{x-2}<1-x$, следует сначала установить область определения неравенства. Она определяется условием $x-2\geqslant 0$, или $x\geqslant 2$. Но так как в этой области левая часть неравенства неотрицательна, то должно выполняться еще одно условие: правая часть неравенства должна быть неотрицательна, т. е. $1-x\geqslant 0$, или $x\leqslant 1$. Это условие противоречит ранее установленному $x\geqslant 2$, и поэтому данное неравенство не имеет решений.

Приведем теперь примеры решения иррациональных уравнений и неравенств.

Задача 22. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

Решение. Устанавливаем, что во всяком случае подкоренное выражение внутреннего корня $x-1\geqslant 0$; отсюда

$$x\geqslant 1. \qquad (1)$$

При этом условии выражения, стоящие под внешними корнями, можно так преобразовать:

$$\sqrt{(x-1)-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{(x-1)-6\sqrt{x-1}+9}=1,$$

или

$$\sqrt{(\sqrt{x-1})^2-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{(\sqrt{x-1})^2-6\sqrt{x-1}+9}=1,$$

или

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=1.$$

После извлечения корня, учитывая, что знаки разностей нам неизвестны, получаем такое уравнение:

$$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1. \tag{2}$$

Знаки разностей $\sqrt{x-1}-2$ и $\sqrt{x-1}-3$ зависят от того, в какой из трех возможных областей $[0;\ 2)$, $[2;\ 3]$, $(3;\ +\infty)$ находится значение корня $\sqrt{x-1}$. Поэтому рассмотрим три случая:

1) $0 \leqslant \sqrt{x-1} < 2$. Тогда тем более $\sqrt{x-1} < 3$. Поэтому уравнение (2) переходит в следующее:

$$(2-\sqrt{x-1})+(3-\sqrt{x-1})=1.$$

Отсюда $2\sqrt{x-1}=4$, $\sqrt{x-1}=2$. А по предположению $\sqrt{x-1}<2$. Полученное противоречие показывает, что при указанном предположении уравнение корней не имеет.

2) $2 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 3$. При этом предположении уравнение (2) переходит в следующее:

$$(\sqrt{x-1}-2)+(3-\sqrt{x-1})=1, \text{ или } 1=1.$$

Это означает, что любое значение переменной, удовлетворяющее указанному условию, удовлетворяет и исходному уравнению.

Из условия $2 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 3$ получим после возвышения всех частей в квадрат (возвышать в квадрат можно, ибо все члены этого двойного неравенства положительны):

$$4 \leqslant x-1 \leqslant 9, \text{ откуда } 5 \leqslant x \leqslant 10.$$

Это значит, что любое $x \in [5;\ 10]$ удовлетворяет исходному уравнению (эти значения x удовлетворяют и условию (1)).

3) $\sqrt{x-1} > 3$. Тогда уравнение (2) переходит в следующее:

$$(\sqrt{x-1}-2)+(\sqrt{x-1}-3)=1,$$

или $2\sqrt{x-1}=6$, откуда $\sqrt{x-1}=3$, что противоречит принятому предположению, что $\sqrt{x-1}>3$. Значит, при этом предположении уравнение корней не имеет.

Итак, получаем такой **ответ**: исходное уравнение имеет бесконечное множество корней, а именно все действительные числа, принадлежащие промежутку $[5;\ 10]$.

Задача 23. *Решить уравнение* $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

Решение. Так как в уравнение входят корни нечетной степени, то областью его определения является вся область R.

Покажем три способа решения этого уравнения.

1-й способ. Возвысим обе части уравнения в куб:

$$(\sqrt[3]{x+34})^3-3(\sqrt[3]{x+34})^2\sqrt[3]{x-3}+3\sqrt[3]{x+34}(\sqrt[3]{x-3})^2-$$
$$-(\sqrt[3]{x-3})^3=1,$$

или

$$(x+34)-3\sqrt[3]{x+34}\sqrt[3]{x-3}(\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3})-(x-3)=1.$$

Произведем приведение подобных членов и учтем, что разность $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}$ по условию равна 1, получим:

$$37-3\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}=1.$$

Отсюда $\sqrt[3]{x^2+31x-102}=12$. Возвысим обе части последнего уравнения в куб, получим:

$$x^2+31x-102=1728, \text{ или } x^2+31x-1830=0.$$

Решив это квадратное уравнение, найдем: $x_1=30$ и $x_2=-61$.

Проверка показывает, что оба найденных значения переменной удовлетворяют уравнению.

2-й способ. Введем новые переменные: $x+34=y^3$, $x-3=z^3$.

Получаем такую систему уравнений: $\begin{cases} x+34=y^3, \\ x-3=z^3, \\ y-z=1. \end{cases}$ Вычтем почленно из первого уравнения второе и преобразуем разность:

$$37=y^3-z^3=(y-z)((y-z)^2+3yz).$$

Подставив вместо $y-z$ его значение из третьего уравнения, получим: $37=1+3yz$, откуда $yz=12$.

Итак, нужно найти два числа, произведение которых равно 12, а разность равна 1. Очевидно, получаем два решения: $y=4$, $z=3$ и $y=-3$, $z=-4$. Подставляя найденные значения z в уравнение $x-3=z^3$, найдем $x_1=3+3^3=30$ и $x_2=3+(-4)^3=-61$. Получили те же корни.

3-й способ. $\sqrt[3]{x+34}=1+\sqrt[3]{x-3}$,

$$x+34=1+3\sqrt[3]{x-3}+3(\sqrt[3]{x-3})^2+x-3.$$

Пусть $\sqrt[3]{x-3}=y$, тогда $3y^2+3y-36=0$, $y^2+y-12=0$; $y_1=3$, $y_2=-4$. Отсюда $x_1=30$, $x_2=-61$.

Задача 24. *Решить неравенство* $\sqrt{x^2-x-12}>x$.

Решение. Найдем сначала область определения неравенства. Она находится из условия $x^2-x-12\geqslant 0$.

Разложим левую часть этого неравенства на множители:

$$(x-4)(x+3)\geqslant 0, \text{ отсюда } x\geqslant 4 \text{ или } x\leqslant -3. \qquad (1)$$

В области определения левая часть неравенства неотрицательна, поэтому если правая часть $x<0$, то данное неравенство справедливо, но, учитывая условие (1), получим такое решение:

$$x\leqslant -3. \qquad (2)$$

Если же правая часть неравенства тоже неотрицательна, т. е.

$$x\geqslant 0, \qquad (3)$$

то можно обе части неравенства возвысить в квадрат, получим: $x^2-x-12>x^2$, или $x<-12$. Полученное неравенство противоречит условию (3), следовательно, при этом условии неравенство не имеет решений. Остается окончательно такой ответ: $x\leqslant -3$.

Задание 26

Объясните, почему каждое из приведенных ниже уравнений не может иметь решений.

26.1. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-3}=0$.

26.2. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}=-2$.

26.3. $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-6}=2$.

26.4. $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=2$.

26.5. $\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{18+2x}}=1$.

Задание 27

Решите следующие иррациональные уравнения и неравенства

27.1. $\sqrt{x+16}=x-4$ **27.2.** $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$. **27.3.** $\sqrt{2x-1}<\sqrt{x+5}$.

V.5. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Решение разнообразных показательных и логарифмических уравнений и неравенств производится на основе правил У.6, У 7 и Н.5, Н.6. Пользуясь этими правилами, показательные и логарифмические уравнения и неравенства обычно сводят к рациональным уравнениям и неравенствам.

Приведем несколько примеров решения таких уравнений и неравенств.

Задача 25. *Решить уравнение*

$$\sqrt[3x-3]{27^{x-1}}\cdot\sqrt[2x-2]{3^{2,5x+9,5}}=\sqrt[x-1]{9^{2x-6}}.$$

Решение. Представим все члены уравнения как степени одного и того же основания. За общее основание выбираем число 3, ибо имеющие два других основания 27 и 9 легко представить как степени 3. Получим:

$$3^{\frac{3(x-1)}{3(x-1)}}\cdot 3^{\frac{2{,}5x+9{,}5}{2(x-1)}}=3^{\frac{2(2x-6)}{x-1}},\ \text{или}\ 3^{1+\frac{2{,}5x+9{,}5}{2(x-1)}}=3^{\frac{2(2x-6)}{x-1}}.$$

Отсюда по правилу У.6 получаем такое рациональное уравнение:

$$1+\frac{2{,}5x+9{,}5}{2(x-1)}=\frac{2(2x-6)}{x-1}.$$

Умножив обе части этого уравнения на $2(x-1)$, получим равносильное уравнение при условии $x\neq 1$ (1):

$$2(x-1)+2{,}5x+9{,}5=4(2x-6).$$

Отсюда $x=9$. Так как это не противоречит условию (1), то получаем ответ: $x=9$.

Задача 26. *Решить уравнение*

$$\lg y+\lg(y-2)+\lg(y+2)=\lg 3+2\lg(y+2).$$

Решение. Сначала найдем область определения уравнения. Она определяется условиями

$$y>0,\ y-2>0,\ y+2>0,\ \text{отсюда}\ y>2. \qquad (1)$$

При этом условии можно в левой и правой частях уравнения заменить сумму логарифмов логарифмом произведения:

$$\lg y(y-2)(y+2)=\lg 3(y+2)^2.$$

Отсюда на основе правила У.7 получаем:

$$y(y-2)(y+2)=3(y+2)^2,$$

или

$$(y+2)(y(y-2)-3(y+2))=0.$$

По правилу У.4 получаем совокупность двух уравнений:

$$y+2=0\ \text{и}\ y^2-5y-6=0.$$

Решив их, найдем: $y=-2$, $y=-1$, $y=6$.

Но первые два значения не удовлетворяют условию (1) и, следовательно, не входят в область определения уравнения, т. е. это посторонние корни. Проверка третьего значения показывает, что оно является корнем уравнения.

Ответ: $y=6$.

Задача 27. *Решить уравнение*

$$\log_{x+1}(x^3-9x+8)\cdot\log_{x-1}(x+1)=3.$$

Р е ш е н и е. Сначала найдем область определения уравнения. Основания логарифмов и выражения, стоящие под знаком логарифма, должны быть положительны и не равны единице, поэтому $x-1>0$ и $x+1>0$. Отсюда

$$x>1 \text{ и } x\neq 2. \qquad (1)$$

Что касается многочлена x^3-9x+8, то так как решить неравенство $x^3-9x+8>0$ затруднительно, то пока оставим его без исследования.

Так как основания логарифмов различные, то, очевидно, целесообразно преобразовать их к общему основанию. За общее основание удобно принять $x+1$. По формуле перехода от одного основания логарифмов к другому (глава IV, формула VIII.6) получим:

$$\log_{x+1}(x^3-9x+8)\cdot\frac{\log_{x+1}(x+1)}{\log_{x+1}(x-1)}=3,$$

так как $\log_{x+1}(x+1)=1$, то

$$\log_{x+1}(x^3-9x+8)=3\log_{x+1}(x-1)=\log_{x+1}(x-1)^3.$$

Последнее получено по правилу VIII.5.

Теперь по правилу У.7 получаем такое рациональное уравнение $x^3-9x+8=(x-1)^3$, или $x^3-9x+8=x^3-3x^2+3x-1$.

Отсюда $3x^2-12x+9=0$ или $x^2-4x+3=0$.

Решив это квадратное уравнение, найдем: $x_1=1$, $x_2=3$.

Первое значение не входит в область определения, ибо не удовлетворяет условию (1). Проверяем второе значение подстановкой в исходное уравнение:

$$\log_4 8\cdot\log_2 4=3;\ \log_4 4^{\frac{3}{2}}\cdot\log_2 2^2=3;\ \frac{3}{2}\log_4 4\cdot 2\log_2 2=3.$$

Так как $\log_4 4=\log_2 2=1$, то получаем верное равенство: $\frac{3}{2}\cdot 2=3$.

Ответ: $x=3$.

Задача 28. *Решить неравенство* $\log_x(2x-1)>2$.

Р е ш е н и е. Для того чтобы можно было использовать правило Н.6, представим правую часть неравенства в форме логарифма. Получим:

$$\log_x(2x-1)>\log_x x^2. \qquad (1)$$

Так как основание логарифма x может принимать значения как меньше 1, так и больше 1, то рассмотрим два случая:

1) $0<x<1$. Тогда неравенство (1) равносильно системе:

$$\begin{cases}2x-1<x^2,\\ 2x-1>0,\\ x^2>0.\end{cases}$$

Третье неравенство системы при условии $0<x<1$ тождественно-истинно, и его поэтому можно отбросить. Первые два неравенства можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{cases} x^2-2x+1>0, \\ x>0{,}5, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (x-1)^2>0, \\ x>0{,}5. \end{cases}$$

Теперь первое неравенство полученной системы при условии $0<x<1$ также всегда выполняется, т. е. тождественно-истинно, и его поэтому можно отбросить. Оставшееся неравенство вместе с условием $0<x<1$ дает решение исходного неравенства:

$$0{,}5<x<1. \qquad (2)$$

2) $x>1$ (3). Тогда (1) равносильно такой системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x-1>x^2, \\ 2x-1>0, \\ x^2>0. \end{cases}$$

Первое неравенство этой системы противоречиво, ибо оно равносильно такому неравенству: $(x-1)^2<0$. Поэтому и вся система не имеет решений. Следовательно, исходное неравенство имеет решения, лишь определяемые неравенством (2).

Ответ: $0{,}5<x<1$.

Задание 28

Решите уравнение и неравенство.

28.1. $(0{,}81)^{x-1}-(0{,}9)^{2x-3}+(0{,}01)^{x-1{,}5}-9\,(0{,}1)^{2x-2}=0$.

28.2. $\log_{x-1}(3x-2)>\log_{x-1}(2x-3)$.

V.6. Тригонометрические уравнения и неравенства

Решение тригонометрических уравнений и неравенств отличается от решения других видов уравнений и неравенств в первую очередь тем, что в результате их решения получаем бесконечные серии решений. (Основные тригонометрические уравнения и неравенства достаточно подробно рассмотрены в учебнике IX класса). Поэтому ограничимся тем, что приведем сводку результатов решения этих уравнений и неравенств. Основными тригонометрическими уравнениями являются следующие:

1) $\sin x=a$.

Если $|a|>1$, то уравнение не имеет решений.

Если $|a|\leqslant 1$, то его решениями являются два бесконечных множества значений переменной, определяемых следующими формулами:

$$x=\arcsin a+2k\pi \text{ и } x=-\arcsin a+(2k+1)\pi, \text{ где } k\in Z.$$

Иногда эти две формулы объединяют в одну:

$$x=(-1)^n \arcsin a+n\pi,\ n\in Z.$$

Что собой представляют эти формулы, например

$$x=\arcsin a+2k\pi? \qquad (1)$$

Эту формулу надо понимать так. В ней имеется параметр k, который принимает (пробегает) всевозможные значения из области Z целых чисел от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому получаем для x двустороннюю бесконечную (т. е. бесконечно протяженную в обе стороны) последовательность значений:

$$\dots \arcsin a-2\pi,\ \arcsin a,\ \arcsin a+2\pi, \dots \qquad (2)$$

Заметим, что соседние члены этой последовательности отличаются друг от друга на 2π (период функции $\sin x$). Иными словами, если члены этой последовательности обозначить x_i, где индекс i обозначает значение параметра k, при котором получается из формулы (1) данный член последовательности (2), то справедливо следующее равенство: $x_{i+1}=x_i+2\pi$.

А это значит, что последовательность (2) есть двусторонняя бесконечная арифметическая прогрессия, разность которой равна 2π.

В формуле (1) за начальный член с номером 0 в соответствующей последовательности (2), от которого в обе стороны идут члены с положительными (вправо) и отрицательными номерами (влево), выбран член $\arcsin a$. Но в отличие от конечной арифметической прогрессии в данной бесконечной прогрессии за начальный член можно выбрать любой другой член этой прогрессии. Например, за начальный член можно выбрать $\arcsin a-2\pi$. Для этого достаточно в формуле (1) заменить k на $n-1$, тогда получим такую формулу: $x=\arcsin a-2\pi+2n\pi$.

Если в этой последней формуле придавать n всевозможные значения из области Z, то получим ту же самую последовательность (2).

Это показывает, что к параметру k в формуле (1) можно прибавлять или вычитать любое целое число. От этого характер формулы не нарушится. Поэтому если при решении тригонометрического уравнения вы получите, например, такую формулу:

$$x=\frac{\pi}{2}+(k+3)\,2\pi,$$

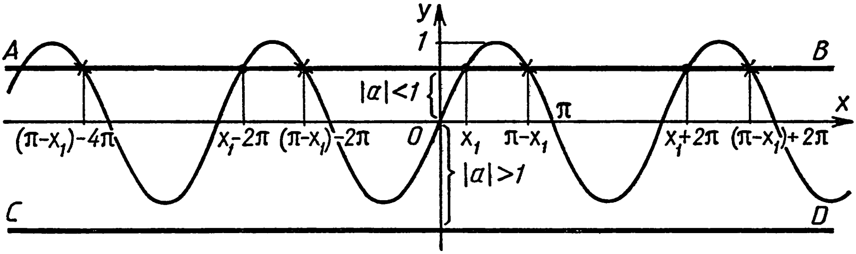


Рис. 29

то ее можно упростить и записать так: $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Решение данного уравнения можно наглядно увидеть, если воспользоваться графиками функций. Графическое решение уравнения $\sin x=a$ можно рассматривать как нахождение абсцисс точек пересечения графиков $y=\sin x$ и $y=a$. Строим на одном чертеже эти два графика (рис. 29). Для удобства масштабы на осях взяты неодинаковые. Если $|a|>1$, то график функции $y=a$ (прямая CD) не пересекает синусоиду ни в одной точке и поэтому в этом случае данное уравнение не имеет решений. Если же $|a|\leqslant 1$, то график $y=a$ (прямая AB) имеет с синусоидой бесконечное число точек пересечения. Эти точки можно разделить на два класса. К первому относятся точки, отмеченные на рисунке 29 кружочками. Их абсциссы образуют бесконечную двустороннюю арифметическую прогрессию с начальным членом $x_1=\arcsin a$ и разностью (периодом) 2π. Ко второму классу относятся точки, отмеченные на рисунке 29 крестиками, их абсциссы образуют также бесконечную двустороннюю арифметическую прогрессию с начальным членом $\pi-x_1=\pi-\arcsin a$ и разностью 2π.

Это же уравнение можно графически решить иначе, а именно на так называемой тригонометрической окружности. Для этого построим окружность единичного радиуса и проведем через ее центр две взаимно перпендикулярные оси координат (рис. 30). Для решения заданного выше уравнения на оси ординат найдем точку M, соответствующую числу a, и через точку M проведем прямую, параллельную оси абсцисс, до пересечения с окружностью. Очевидно, что пересечение произойдет лишь в случае $|a|\leqslant 1$. Полученные точки пересечения C и C_1 соединим с центром O,

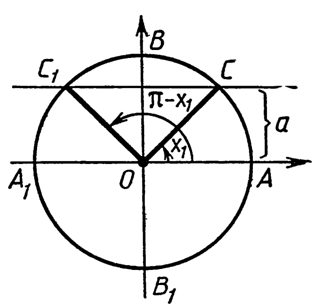


Рис. 30

получим два угла AOC и AOC_1, величины которых и являются решениями уравнения $\sin x=a$. Но углы AOC и AOC_1 являются представителями бесконечных множеств углов, образованных соответственно лучами OA с OC и OA с OC_1, отличающихся друг от друга на целое число полных оборотов. Поэтому мы и получим приведенные выше две серии решений.

2) $\cos x=a$.

Если $|a|>1$, то уравнение не имеет решений.

Если $|a|\leqslant 1$, то его решениями являются два бесконечных множества значений переменной, определяемые следующей формулой:

$$x=\pm\arccos a+2k\pi,\ k\in Z.$$

3) $\operatorname{tg} x=a$.

При любом a его решения задаются формулой

$$x=\operatorname{arctg} a+k\pi,\ k\in Z.$$

4) $\operatorname{ctg} x=a$.

При любом a его решения задаются формулой

$$x=\operatorname{arcctg} a+k\pi,\ k\in Z.$$

Приведем решения некоторых основных тригонометрических неравенств:

1) $\sin x<a$.

Если $a>1$, то x — любое.

Если $-1<a\leqslant 1$, то $\pi-\arcsin a+2k\pi<x<\arcsin a+2\pi(k+1)$.

Если $a\leqslant -1$, то неравенство не имеет решений.

2) $\sin x>a$.

Если $a\geqslant 1$, то неравенство не имеет решений.

Если $-1\leqslant a<1$, то $\arcsin a+2k\pi<x<\pi-\arcsin a+2k\pi$.

Если $a<-1$, то x — любое.

3) $\operatorname{tg} x<a$.

При любом a данное неравенство равносильно множеству (бесконечному) простейших неравенств, определяемых формулой

$$-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\operatorname{arctg} a+k\pi,\ k\in Z.$$

4) $\operatorname{tg} x>a$.

При любом a решения задаются формулой

$$\operatorname{arctg} a+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi.$$

Решение любого неосновного тригонометрического уравнения или неравенства сводится к решению одного или нескольких основных уравнений или неравенств. Процесс сведения неосновных уравнений и неравенств к основным производится с помощью различных преобразований на основе формул тождественных преобразований тригонометрических функций (глава IV, формулы группы X—XIX), а также с помощью замены переменных и разложения на множители.

Приведем несколько примеров.

Задача 29. *Решить уравнение* $\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-1=0$.

Решение. Рассматривая $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ как переменную, видим, что левая часть уравнения представляет собой разность квадратов этой переменной и 1. А так как правая часть уравнения есть нуль, то применим преобразование разложения левой части на множители. Получим

$$\left(\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-1\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+1\right)=0.$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-1=0 \text{ и } \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+1=0,$$

или

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=1 \text{ и } \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-1.$$

Если теперь в этих уравнениях заменить $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}$ новой переменной (явно или мысленно), то каждое из них представляет собой основное уравнение и к ним тогда можно применить указанные выше формулы. Получим для первого уравнения: $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=$ $=\pm\arccos 1+2k\pi$. Так как $\arccos 1=0$, то $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=2k\pi$, откуда

$$x=-\frac{2\pi}{3}+4k\pi. \qquad (1)$$

Для второго уравнения найдем: $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=\pm\arccos(-1)+$ $+2m\pi$. Учитывая, что $\arccos(-1)=\pi$, получаем: $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=$ $=\pm\pi+2m\pi$. Отсюда

$$x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi\,(2m\pm1). \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \tag{3}$$

ибо в формуле (1) 2π повторяется $2k$ раз, т. е. четное число раз, а в формуле (2) 2π повторяется $2m+1$ или $2m-1$, т. е. нечетное число раз. Следовательно, объединяя их, 2π повторяется любое число раз, что и сделано в формуле (3).

Данное уравнение можно решить проще, воспользовавшись тождеством X.1. Получаем:

$$\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Задача 30. *Решить уравнение* $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 2\sin 4x$.

Решение. Сначала установим область определения этого уравнения. Она определяется такими условиями: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$ и $3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$. Нельзя ли эти два условия объединить? Легко видно, что первое условие есть частный случай второго. Действительно, если в формуле второго условия положить $k = 3m+1$, то вторая формула переходит в первую:

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}(3m+1) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi m = \frac{\pi}{2} + \pi m.$$

Поэтому оба условия в совокупности равносильны одному второму условию. Значит, область определения уравнения такова:

$$x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k, \ k \in Z. \tag{1}$$

Теперь можно переходить к самому решению.

Замечаем, что аргументы входящих в уравнение функций различны. Поэтому надо так преобразовать уравнение, чтобы привести функции к одному и тому же аргументу. Это наталкивает на мысль использовать формулу XVI.5, чтобы в левой части получить $\sin 4x$. Получаем: $\frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x} = 2\sin 4x$, или $\sin 4x = 2\sin 4x \cos x \cos 3x$. Отсюда

$$\sin 4x\,(1 - 2\cos x \cos 3x) = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) распадается на два уравнения:

1) $\sin 4x = 0$, откуда $4x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{4}n$; (3)

2) $1 - 2\cos x \cos 3x = 0$.

В этом уравнении имеем произведение косинусов, поэтому применим формулу XIX.2. Получим: $1 - \cos 2x - \cos 4x = 0$.

Чтобы привести функции к одному аргументу, заменим $1-\cos 4x$ по формуле понижения степени XV.1 $2\sin^2 2x$. Тогда получаем такое уравнение: $2\sin^2 2x-\cos 2x=0$.

Теперь получили уравнение, в котором разные функции одного аргумента. Поэтому нужно привести их к одной функции. Легче это сделать, выразив $\sin^2 2x$ через косинус того же аргумента по формуле X.1. Получим: $2(1-\cos^2 2x)-\cos 2x=0$.

Раскрыв скобки и изменив знаки всех членов на обратные, получим квадратное уравнение относительно $\cos 2x$:

$$2\cos^2 2x+\cos 2x-2=0.$$

По формуле корней квадратного уравнения получим:

$$\cos 2x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}.$$

Так как $\left|\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right|>1$, то этот корень отбрасываем как посторонний. Остается $\cos 2x=\frac{\sqrt{17}-1}{4}$, откуда

$$2x=\pm\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+2m\pi,$$

или

$$x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+m\pi. \qquad (4)$$

Теперь необходимо сделать проверку принадлежности найденных решений области определения (1).

Решения, определяемые формулой (4), очевидно, всегда удовлетворяют условию (1), и их нет нужды проверять. А вот решения, определяемые формулой (3), в такой проверке нуждаются.

Для этого допустим, что $\frac{\pi}{4}n=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$. Отсюда $3n=2+4k$. Так как n и k — целые числа, то правая часть должна делиться на 3. Это будет тогда, когда $k=3l+1$. При этих значениях k получаем, что $3n=2+4(3l+1)=6+12l$, отсюда $n=2+4l$.

Полученное равенство показывает, что, для того чтобы решения, определяемые формулой (3), принадлежали области определения уравнения, нужно, чтобы $n\neq 2+4l$.

Итак, получаем такой ответ:

$$x\in\left\{\frac{\pi}{4}n,\ n\neq 2+4l,\ n \text{ и } l\in Z\right\}\cup$$

$$\cup\left\{\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+m\pi,\ m\in Z\right\}.$$

Как видим, решение тригонометрических уравнений — дело довольно сложное. Еще сложнее решение тригонометрических неравенств. Рассмотрим довольно простой пример.

Задача 31. *Решить неравенство* $\operatorname{tg} x > \cos x$.

Решение. Заменим $\operatorname{tg} x$ на $\frac{\sin x}{\cos x}$. Получаем неравенство:

$$\frac{\sin x}{\cos x} > \cos x. \qquad (1)$$

Чтобы избавиться от дробей, нужно умножить обе части неравенства на $\cos x$. Но это возможно лишь тогда, когда известен знак этого множителя. Поэтому рассмотрим два возможных случая:

1) $\cos x > 0$. Тогда из (1) получаем

$$\sin x > \cos^2 x, \text{ или } \sin x > 1 - \sin^2 x, \ \sin^2 x + \sin x - 1 > 0. \quad (2)$$

Найдя корни квадратного трехчлена, стоящего в левой части (2), можно разложить этот трехчлен на множители:

$$\left(\sin x + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\sin x - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) > 0.$$

Первый множитель левой части всегда положителен, ибо $\frac{\sqrt{5}+1}{2} > 1$. Поэтому достаточно, чтобы $\sin x - \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0$, отсюда $\sin x > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Итак, получили такую систему основных неравенств:

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x > \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{cases} \qquad (3)$$

Решим эту систему сначала на промежутке первого периода изменения аргументов функций $\sin x$ и $\cos x$, т. е. на промежутке $[0;\ 2\pi]$. При этом условии данная система равносильна такой:

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \ \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

А эта система равносильна такому двойному неравенству:

$$\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Теперь, чтобы получить общее решение системы (3), достаточно к левой и правой частям последнего неравенства прибавить целое число периодов:

$$\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z.$$

2) $\cos x<0$.

Аналогично получаем такую систему основных неравенств:

$$\begin{cases}\cos x<0,\\ \sin x<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}.\end{cases}$$

Решение этой системы на первом периоде $[0;\ 2\pi]$:

$$\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<\frac{3}{2}\pi.$$

Общее решение: $\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2n\pi<x<\frac{3}{2}\pi+2\pi n,\quad n\in Z.$

Итак, исходное неравенство имеет два общих решения:

$$\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z,$$

$$\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2n\pi<x<\frac{3}{2}\pi+2n\pi,\ n\in Z.$$

Как следует понимать эти решения? Их следует понимать так. В каждом из них соответствующие параметры k и n принимают всевозможные целые значения. Тем самым получаем две двусторонние бесконечные (т. е. бесконечно протяженные в обе стороны) последовательности промежутков изменения переменной x, в которых справедливо исходное неравенство. Обозначив для простоты $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ буквой α, получаем такие две последовательности:

$$\ldots,\ (\alpha-2\pi;\ -1{,}5\pi),\ \left(\alpha;\ \frac{\pi}{2}\right),\ (\alpha+2\pi;\ 2{,}5\pi),\ (\alpha+4\pi;\ 4{,}5\pi),\ \ldots$$

$$\ldots,(-\alpha-\pi;\ -0{,}5\pi),\ (\pi-\alpha;\ 1{,}5\pi),\ (-\alpha+3\pi;\ 3{,}5\pi),\ \ldots$$

Если изобразить эти промежутки на числовой прямой, то получим наглядное изображение решений неравенства (рис. 31).

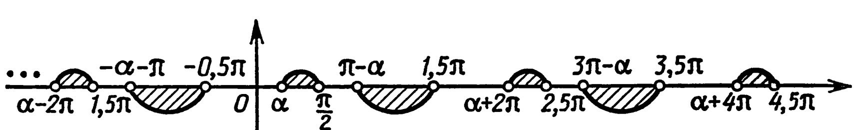


Рис. 31

Задание 29

Выполните следующие задания.

29.1. Решить уравнение $\operatorname{tg}(2x+30°)+\sqrt{3}=0$ и изобразить в виде последовательности его решения.

29.2. Решить уравнение $(4\sin^2 x-1)(4\cos^2 x-1)\sin x\cos x=0$ и полученные формулы решений объединить в одну общую формулу решений.

29.3. Решить неравенство $\sin x>\sin 3x$.

V.7. Системы уравнений

Основная идея решения систем уравнений состоит в свертке их в одно уравнение с одной переменной. Эта свертка системы уравнений в одно уравнение производится главным образом с помощью двух методов преобразования систем:

1. *Способ подстановки*, когда одну из переменных какого-либо уравнения системы выражают через остальные переменные этого уравнения, а затем полученное выражение подставляют вместо этой переменной во все остальные уравнения системы. Тем самым число уравнений и число переменных уменьшается на единицу. Действуя таким образом, в конечном итоге и получаем одно уравнение с одной переменной.

2. *Способ сложения*, когда, складывая или вычитая почленно два уравнения системы (обычно предварительно как-то преобразованных), удается исключить одну из переменных и тем самым уменьшить общее число переменных системы. Кроме того, конечно, при решении систем уравнений используются и общие методы решений уравнений: замена переменных и разложение на множители. Из-за недостатка места здесь не касаемся очень важного вопроса о равносильности систем уравнений.

Покажем на нескольких примерах использование всех этих способов и приемов.

Задача 32. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} 2\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{3}}=24, \\ 5\sqrt{\dfrac{x+y}{8}}-3\sqrt{\dfrac{x-y}{12}}=19. \end{cases}$$

Решение. Видно, что корни, входящие во второе уравнение, одинаковы с корнями, входящими в первое уравнение. Но для этого их нужно несколько преобразовать: вынести из знаменателей рациональные множители. Затем для простоты умножим все члены второго уравнения на 2. Получим систему:

$$\begin{cases} 2\sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{\frac{x-y}{3}}=24, \\ 5\sqrt{\frac{x+y}{2}}-3\sqrt{\frac{x-y}{3}}=38. \end{cases} \qquad (1)$$

Теперь возникает возможность сделать замену переменных. Введем такие новые переменные:

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}}=z \text{ и } \sqrt{\frac{x-y}{3}}=t. \qquad (2)$$

Тогда система (1) перейдет в систему рациональных уравнений:

$$\begin{cases} 2z+t=24, \\ 5z-3t=38. \end{cases}$$

Эту систему можно решить способом сложения, для чего предварительно умножим члены первого уравнения на 3, а затем сложим почленно оба уравнения, тем самым переменная t будет исключена и получим одно уравнение с одной переменной: $11z=$ $=110$, отсюда $z=10$. Подставляя найденное значение z в первое уравнение системы, найдем $t=4$.

Теперь из системы (2) после возвышения обеих частей этих уравнений в квадрат при найденных значениях z и t получим такую систему:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2}=100, \\ \frac{x-y}{3}=16, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y=200, \\ x-y=48. \end{cases}$$

Опять применим способ сложения. Складывая и вычитая почленно уравнения последней системы, найдем $2x=248$, $2y=152$, отсюда $x=124$, $y=76$.

Задача 33. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=2, \\ \log_2 x-4=\log_2 3-\log_2 y. \end{cases}$$

Решение. Сначала установим область определения уравнений системы. Так как x и y находятся под знаком логарифмов, то имеем:

$$x>0, \ y>0. \qquad (1)$$

Решение логарифмических систем (так же как и иррациональных, показательных и тригонометрических) обычно состоит в сведении их к системам рациональных уравнений. Для этого, естественно, надо освободиться от логарифмов, что можно сделать с помощью потенцирования выражений, входящих в уравнения системы.

Из первого уравнения получаем:

$$x^2+y^2=100. \qquad (2)$$

Во втором уравнении предварительно заменим число 4 логарифмом по основанию 2. Получим: $\log_2 x-\log_2 16=\log_2 3-\log_2 y$, отсюда

$$\frac{x}{16}=\frac{3}{y}, \text{ или } xy=48. \qquad (3)$$

Уравнения (2) и (3) вместе с условием (1) образуют рациональную систему, которую можно решить многими способами. Покажем два из них.

1-й способ. $\begin{cases}x^2+y^2=100,\\ xy=48.\end{cases}$

Умножим члены второго уравнения на 2 и после этого сложим и вычтем почленно оба уравнения:

$$\begin{cases}x^2+2xy+y^2=196,\\ x^2-2xy+y^2=4,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}(x+y)^2=196,\\ (x-y)^2=4.\end{cases}$$

Отсюда при учете условий (1) получаем: $\begin{cases}x+y=14,\\ |x-y|=2.\end{cases}$ Так как знак разности $x-y$ нам неизвестен, то придется рассматривать два случая, когда $x-y>0$ и $x-y<0$. Получим две системы уравнений: $\begin{cases}x+y=14,\\ x-y=2,\end{cases}$ отсюда $x=8$, $y=6$, и $\begin{cases}x+y=14,\\ y-x=2,\end{cases}$ отсюда $x=6$, $y=8$.

Итак, получили два решения: (8; 6) и (6; 8).

2-й способ $\begin{cases}x^2+y^2=100,\\ xy=48.\end{cases}$

Возвысив обе части второго уравнения в квадрат, получим:

$$\begin{cases}x^2+y^2=100,\\ x^2y^2=2304.\end{cases}$$

Рассматривая x^2 и y^2 как переменные, видим, что нужны два числа, сумма которых равна 100, а произведение равно 2304. Вспоминая обратную теорему Виета, можно составить квадратное уравнение, корнями которого будут x^2 и y^2: $z^2-100z+2304=0$.

Решив это уравнение, найдем $z=64$ или $z=36$. Следовательно, получаем две возможные системы:

$$\begin{cases}x^2=64,\\ y^2=36,\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x^2=36,\\ y^2=64.\end{cases}$$

Учитывая условия (1), получаем из этих систем указанные выше решения.

Задача 34. *Решить систему уравнений:* $\begin{cases}\sin x \sin y=0{,}75,\\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=3.\end{cases}$

Решение. Имея систему тригонометрических уравнений, следует думать о том, как ее свести к системе рациональных уравнений. В данном случае пока следует преобразовать систему. А именно наличие во втором уравнении тангенсов, а в первом синусов наводит на мысль заменить тангенсы через отношения синусов и косинусов. Получим:

$$\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}=3.$$

Подставляя вместо произведения синусов его значение из первого уравнения, найдем, что $\cos x \cos y=0{,}25$. Получили такую систему: $\begin{cases}\sin x \sin y=0{,}75,\\ \cos x \cos y=0{,}25.\end{cases}$

Наличие в уравнениях произведений синусов и косинусов наводит на мысль использовать формулы замены произведения суммой, а именно формулы XIX.1 и XIX.2. Получим:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))=0{,}75,\\ \frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))=0{,}25,\end{cases} \qquad (1)$$

$$\text{или}\ \begin{cases}\cos(x-y)-\cos(x+y)=1{,}5,\\ \cos(x-y)+\cos(x+y)=0{,}5.\end{cases}$$

Рассматривая теперь $\cos(x-y)$ и $\cos(x+y)$ как переменные, применим к последней системе способ сложения и вычитания, в результате найдем:

$$\cos(x-y)=1 \ \text{и}\ \cos(x+y)=-0{,}5. \qquad (2)$$

Заметим, что то же самое можно было найти, складывая и вычитая почленно уравнения системы (1) и применяя формулы косинуса суммы и разности аргументов (формула XIII.2). Из системы (2) получим систему уравнений относительно x и y:

$$\begin{cases}x-y=2k\pi,\ k\in Z,\\ x+y=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\ n\in Z.\end{cases}$$

Отсюда, применяя снова способ сложения и вычитания, найдем:

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k+n),\quad y=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(n-k).$$

Так как второе уравнение системы содержало функции тангенса, то найденные решения должны быть отличны от тех значений, при которых тангенсы не определены, т. е. при $\frac{\pi}{2}+m\pi$. Легко видно, что найденные формулы для значений x и y ни при каких целых n и k не могут принимать эти критические значения и поэтому они полностью пригодны для ответа.

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(n+k)$; $y=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(n-k)$, n и $k\in Z$.

Особые трудности возникают при решении систем уравнений с параметрами (буквенными коэффициентами). Трудности эти связаны главным образом с тем, что необходимо рассматривать решение системы при всевозможных значениях параметров, а при этом оказывается довольно часто, что при разных значениях параметров система имеет разные формулы решений. Приведем пример.

Задача 35. *Решить систему уравнений относительно x и y:*

$$\begin{cases} (x+a)(y-b)+(x-a)(y+b)=2(y^2-b^2), \\ ay+bx=2ab. \end{cases}$$

Решение. Сначала упростим первое уравнение, раскроем скобки, переместим все члены в левую сторону и приведем подобные члены. Получим:

$$\begin{cases} y^2-xy+ab-b^2=0, \\ ay+bx=2ab. \end{cases} \tag{1}$$

Проще всего решить эту систему способом подстановки, выразив из второго уравнения x через y (это удобнее, чем выражать y через x, ибо в первое уравнение x входит в первой степени, а y — в квадрате). Но для этого нам придется делить обе части второго уравнения на b, а поэтому должны быть уверены, что $b\neq 0$.

Если же $b=0$, то при $a\neq 0$ из второго уравнения найдем, что $y=0$. При этом видим, что оба уравнения системы (1) удовлетворяются при любых значениях x.

Если же $b=0$ и $a=0$, то из первого уравнения системы (1) получаем: $y^2-xy=0$ или $y(y-x)=0$.

Отсюда или $y=0$, а x — любое, или $y=x$. Второе же уравнение системы (1) удовлетворяется при любых x и y.

Теперь допустим, что $b\neq 0$. Тогда из второго уравнения (1) найдем:

$$x=\frac{2ab-ay}{b}. \tag{2}$$

Подставим найденное выражение для x в первое уравнение:

$$y^2-y\cdot\frac{2ab-ay}{b}+ab-b^2=0.$$

После упрощения квадратное уравнение относительно y:

$$(a+b)\ y^2-2aby+ab^2-b^3=0. \qquad (3)$$

Если $a+b=0$, т. е. $a=-b$, то уравнение (2) становится линейным относительно y: $2b^2y-2b^3=0$, отсюда при $b\neq 0$ находим $y=b$. Тогда из (2) найдем $x=a=-b$.

Если $a+b\neq 0$, то из (3) найдем два значения (точнее, две формулы) для y:

$$y=b \text{ и } y=\frac{b\ (a-b)}{a+b}.$$

Подставив эти значения y в (2), найдем соответствующие им значения x:

$$x=a \text{ и } x=\frac{a\ (a+3b)}{a+b}.$$

Ответ: 1) Если $a=b=0$, то система имеет два бесконечных множества решений: $x=y$ и x — любое число, $y=0$.

2) Если $b=0$, $a\neq 0$, то система имеет одно бесконечное множество решений: x — любое число, $y=0$.

3) Если $a=-b\neq 0$, то $x=-b$, $y=b$.

4) Если $a+b\neq 0$, $b\neq 0$, то система имеет два решения

$$\begin{cases}x=a,\\ y=b\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}x=\dfrac{a\ (a+3b)}{a+b},\\ y=\dfrac{b\ (a-b)}{a+b}.\end{cases}$$

Приведенный ответ следует понимать так. Если параметрам a и b дать какие-либо определенные значения, то исходная система перейдет в обычную систему с числовыми коэффициентами. При этом ее решения можно будет сразу вычислить по приведенным в ответе формулам. Например, если $a=3$, $b=2$, то исходная система принимает такой вид:

$$\begin{cases}(x+3)\ (y-2)+(x-3)\ (y+2)=2\ (y^2-4),\\ 3y+2x=12.\end{cases}$$

Решение этой системы находим по формулам пункта 4 ответа:

$$x=3,\ y=2 \text{ и } x=5{,}4,\ y=0{,}4$$

Если $a=1$, $b=0$, то исходная система принимает такой вид:

$$\begin{cases}(x+1)\ y+(x-1)\ y=2y^2,\\ y=0.\end{cases}$$

Решение этой системы находим по формулам, приведенным в пункте 2 ответа: x — любое число, $y=0$.

Таким образом, решение уравнений или систем уравнений с параметрами есть нахождение функций переменных от заданных параметров. В рассмотренном случае эти функции при разных значениях параметров заданы разными выражениями.

Задание 30

Решите следующие системы уравнений.

30.1. $\begin{cases}x^2-xy+y^2=21,\\ y^2-2xy=-15.\end{cases}$

30.2. $\begin{cases}x^2-xy+ay=0,\\ y^2-xy-4ax=0.\end{cases}$

30.3. $\begin{cases}2^{\frac{x-y}{2}}-2^{\frac{x-y}{4}}=12,\\ 3^{\lg(2y-x)}=1.\end{cases}$

30.4. $\begin{cases}\cos^2 x+\cos^2 y=\frac{1}{2},\\ x-y=\frac{\pi}{3}.\end{cases}$

V.8. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными

В средней школе обычно ограничиваются рассмотрением неравенств и систем неравенств с двумя переменными. При этом рассматривается их решение лишь на координатной плоскости. Иными словами, задача решения неравенств и систем неравенств с двумя переменными ставится так: «Найти на координатной плоскости такую геометрическую фигуру (множество точек), координаты каждой точки которой удовлетворяют данному неравенству или системе неравенств с двумя переменными».

Возможность такой постановки задачи решения неравенств с двумя переменными связана со следующим фундаментальным положением математики, установленным еще в XVII в. Р. Декартом и П. Ферма: *уравнению вида $y=f(x)$ соответствует на координатной плоскости некоторая линия.*

Это положение и создает возможность графического решения уравнений и систем уравнений (которое мы не рассматриваем из-за недостатка места), а также решения неравенств и систем неравенств.

Сущность и процесс такого решения неравенств и систем неравенств мы покажем на примерах.

Задача 36. *Решить неравенство $2x-y>3$.*

Решение. Если в неравенстве знак неравенства заменить знаком равенства, то получим уравнение $2x-y=3$, которое будем называть соответствующим данному неравенству. Этому уравнению на координатной плоскости соответствует прямая AB (рис. 32). Эта прямая делит всю плоскость на две полуплоскости. Различать эти полуплоскости можно по-разному. Проведем, например, через произвольную точку M оси Ox прямую, перпендикулярную этой оси. Эта прямая пересекает прямую AB в точке N. Если теперь на прямой MN взять точку N_1, лежащую выше N, то полуплоскость, которой принадлежит точка N, будем называть верхней относительно прямой AB. Если же на прямой MN взять точку N_2 ниже точки N, то соответствующую этой точке полуплоскость будем называть нижней (относительно прямой AB).

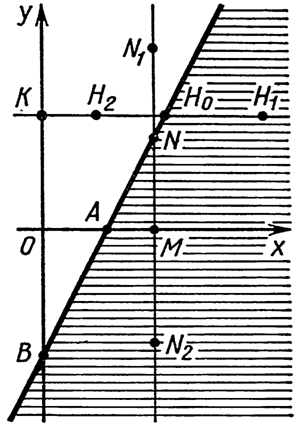


Рис. 32

Рассмотрим теперь, какими соотношениями связаны между собой координаты точек полученных двух полуплоскостей.

Координаты точек прямой AB связаны между собой соотношением

$$2x-y=3. \qquad (1)$$

Поэтому координаты точки N $(x_0; y_0)$, лежащей на этой прямой, удовлетворяют этому равенству, т. е.

$$2x_0-y_0=3.$$

У всех точек прямой MN абсциссы одни и те же, равные абсциссе точки N. А вот ординаты у всех у них разные. Если взять точку N_1, принадлежащую верхней полуплоскости, то ее ордината y_1 больше ординаты y_0 точки N, а поэтому разность $2x_1-y_1<2x_0-y_0$, так как уменьшаемые у этих двух разностей равные, а вычитаемое у первой разности больше вычитаемого второй разности.

Если же взять точку N_2, принадлежащую нижней полуплоскости, то абсцисса $x_2=x_0$, а ордината $y_2<y_0$. Поэтому разность $2x_2-y_2>2x_0-y_0$, так как уменьшаемые у них одинаковые, а вычитаемое первой разности меньше вычитаемого второй.

Но так как $2x_0-y_0=3$, то получаем, что координаты точки N_1 верхней полуплоскости связаны соотношением $2x_1-y_1<3$, а координаты точки N_2 нижней полуплоскости связаны соотношением

$2x_2-y_2>3$. Очевидно, что замеченные соотношения будут справедливы для любых точек верхней и нижней полуплоскостей, ибо точка M была выбрана совершенно произвольно. Следовательно, координаты любой точки верхней полуплоскости удовлетворяют неравенству $2x-y<3$, а координаты любой точки нижней полуплоскости — неравенству $2x-y>3$.

Поэтому решением заданного неравенства является нижняя полуплоскость, заштрихованная на рисунке 32.

Решение этого неравенства можно было произвести, разрешив это неравенство предварительно относительно одной из переменных. Разрешим, например, это неравенство относительно x, получим:

$$x>0{,}5y+1{,}5. \tag{2}$$

Соответствующее неравенству (2) уравнение имеет вид:

$$x=0{,}5y+1{,}5. \tag{3}$$

Графиком уравнения (3) является та же прямая AB (рис. 32), которая делит всю координатную плоскость на две полуплоскости. Если через произвольную точку K оси Oy провести прямую, перпендикулярную этой оси, то прямая пересечет прямую AB в точке H, координаты которой $(x_0; y_0)$ удовлетворяют уравнению (3), т. е. $x_0=0{,}5y_0+1{,}5$.

Если на прямой KH взять точку H_1 правее точки H, то полуплоскость, которой принадлежит точка H_1, будем называть п р а в о й полуплоскостью относительно прямой AB (эта та полуплоскость, которую при первом способе решения мы назвали нижней). Если же на этой прямой KH взять точку H_2, левее точки H, то соответствующую этой точке полуплоскость будем называть л е в о й (в первом способе она называлась верхней).

Все точки прямой KH имеют одну и ту же ординату y_0, а вот абсциссы у них разные. Когда мы двигаемся по этой прямой слева направо, то абсциссы точек возрастают.

Поэтому у всех точек прямой KH значение выражения $0{,}5y+1{,}5$ одно и то же (ибо значение y у них одно и то же), а абсцисса любой точки правой полуплоскости, например точки H_1, больше абсциссы точки H, т. е. $x_1>x_0$. Тогда имеем: $x_1>x_0$, $x_0=0{,}5y_0+1{,}5=0{,}5y_1+1{,}5$. Следовательно,

$$x_1>0{,}5y_1+1{,}5.$$

Очевидно, что такое соотношение будет верно для любой точки правой полуплоскости, т. е. координаты любой точки этой полуплоскости удовлетворяют неравенству $x>0{,}5y+1{,}5$.

Аналогично можно убедиться, что координаты любой точки левой полуплоскости удовлетворяют неравенству $x<0{,}5y+1{,}5$.

Следовательно, неравенству (2) соответствуют точки правой полуплоскости, которая уже заштрихована на рисунке 32. Конечно, получили то же решение.

Из этого примера можно сделать общий вывод о процессе решения линейных неравенств с двумя переменными. Этот процесс состоит из следующих шагов.

1) Заменив знак неравенства в заданном неравенстве (1) на знак равенства, получим линейное уравнение с двумя переменными (2), соответствующее неравенству (1).

2) Строим на координатной плоскости график уравнения (2). Это будет прямая, назовем ее AB.

3) Прямая AB делит всю плоскость на две полуплоскости, которые можно называть верхней и нижней, если отсчет этих полуплоскостей вести по оси Oy, или правой и левой, если отсчет их вести по оси Ox.

4) Чтобы установить, в какой полуплоскости координаты точек удовлетворяют неравенству (1), проводим прямую, перпендикулярную оси Ox, если неравенство (1) и уравнение (2) разрешимо относительно y; или прямую, перпендикулярную оси Oy, если неравенство (1) и уравнение (2) разрешимо относительно переменной x; если же неравенство разрешимо относительно свободного члена (как это было в рассмотренной задаче 35), то можно проводить ту или другую прямую.

5) Берем на проведенной прямой точку выше (правее) и точку ниже (левее) точки пересечения этой прямой с прямой AB. Устанавливаем, каким неравенством связаны координаты этих точек. Так как прямая проведена совершенно произвольно, то полученный результат справедлив для всех точек соответствующих полуплоскостей.

6) Выбираем и заштриховываем ту полуплоскость, в которой выполняется заданное неравенство (1).

Заметьте, что попутно мы, по сути дела, доказали такую теорему: *если графиком уравнения $ax+by+c=0$ является прямая AB, делящая всю координатную плоскость на две полуплоскости, то координаты всех точек одной из полуплоскостей удовлетворяют неравенству $ax+by+c<0$, а координаты всех точек другой полуплоскости удовлетворяют неравенству $ax+by+c>0$.*

Задача 37. *Решить графически систему неравенств:*

$$\begin{cases} y \geqslant 3-x, \\ y-2x<0, \\ 2y-x<0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Решение системы неравенств с двумя переменными производится в следующем порядке.

1) Решаем одно из неравенств системы, т. е. отмечаем на координатной плоскости область, координаты точек которой удовлетворяют данному неравенству.

2) Затем решаем какое-либо другое неравенство этой системы и ищем пересечение отмеченных областей. И так продолжаем до исчерпания всех неравенств системы.

Общим решением системы неравенств считается пересечение (общая часть) всех отмеченных областей — решений отдельных неравенств этой системы.

В данном случае сначала решаем первое неравенство:

$$y \geqslant 3 - x. \qquad (1)$$

Соответствующее ему уравнение будет:

$$y = 3 - x. \qquad (2)$$

Графиком этого уравнения является прямая AB, проходящая через точки (0; 3) и (3; 0) (рис. 33).

Для того чтобы установить, какая из двух полуплоскостей, на которые делит прямая AB координатную плоскость, является решением неравенства (1), проведем произвольную прямую CK, перпендикулярную оси Ox, ибо неравенство (1) и уравнение (2) разрешено относительно y. Если мы на этой прямой CK возьмем точки K_1 выше точки K — пересечения (CK) с прямой AB — и K_2 — ниже точки K, то точке K_1 соответствует верхняя полуплоскость, а точка K_2 принадлежит нижней полуплоскости. Легко установить, так же как мы это делали при решении предыдущей задачи, что точки верхней полуплоскости удовлетворяют неравенству $y > 3 - x$, а координаты точек нижней полуплоскости — неравенству $y < 3 - x$. Следовательно, решением неравенства (1) являются точки верхней полуплоскости и точки прямой AB. Эту полуплоскость отмечаем маленькой штриховкой, а прямую AB — толстой линией.

Затем решаем второе неравенство: $y - 2x < 0$. Для этого проводим прямую OF через точки $O\,(0;\ 0)$ и $F\,(1;\ 2)$ —график уравнения $y - 2x = 0$. Решением данного неравенства является открытая нижняя (правая) полуплоскость. Прямые AB и OF пересекаются в точке F, а пересечением отмеченных областей (полуплоскостей) является угол BFF_1 вместе с лучом FB.

Наконец, решаем последнее неравенство: $2y - x < 0$. Для этого строим график уравнения $2y - x = 0$ — прямую OD, проходящую через точки O (0; 0) и D (2; 1). Решением неравенства будет открытая нижняя (правая) полуплоскость.

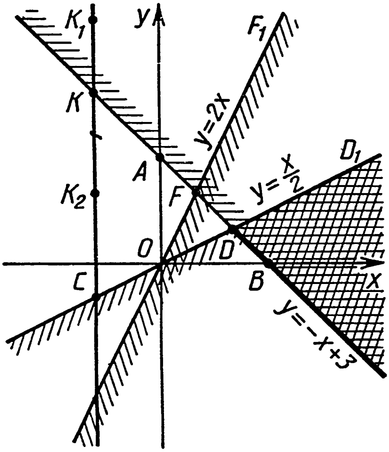


Рис. 33

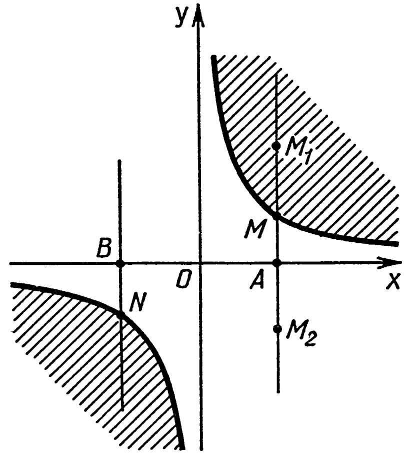


Рис. 34

Пересечением всех трех отмеченных областей, т. е. решением заданной системы неравенств, является заштрихованный угол BDD_1 вместе с лучом DB.

Задача 38. *Решить неравенство* $xy>2$.

Решение. Уравнением, соответствующим этому неравенству, является $xy=2$.

Графиком этого уравнения является гипербола, ветви которой расположены в первой и третьей четвертях координатной плоскости (рис. 34). Чтобы найти решение заданного неравенства, поступим так же, как мы делали при решении линейных неравенств, а именно через произвольную точку A проведем прямую, перпендикулярную оси Ox. Эта прямая пересечет гиперболу в одной точке M. Все точки прямой AM имеют одну и ту же абсциссу x, а ординаты у них разные. В точке M ордината такова, что $xy=$ $=2$. Если возьмем точку M_1 выше точки M, то ее ордината будет больше ординаты точки M, а абсцисса такая же, следовательно, произведение xy в точке M_1 будет больше этого произведения в точке M, равного 2, значит, в точке M_1 $xy>2$. Если же взять на прямой AM точку M_2 ниже точки M, то в этой точке произведение ее координат будет меньше произведения координат точки M. Следовательно, в точке M_2 $xy<2$.

Отсюда понятно, что область первой четверти, лежащая выше гиперболы (как бы внутри гиперболы), обладает тем свойством, что координаты любой точки этой области удовлетворяют заданному неравенству.

Рассуждая аналогично относительно некоторой прямой BN

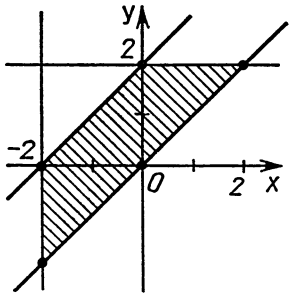


Рис. 35

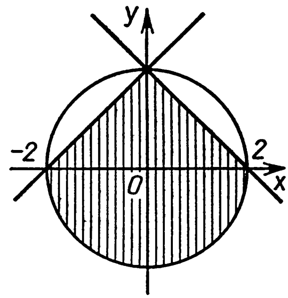


Рис. 36

(в третьей четверти), убеждаемся, что неравенству удовлетворяют точки области, лежащей ниже (внутри) гиперболы.

Обе указанные области, точки которых являются решениями неравенства, на рисунке 34 заштрихованы.

Заметим, что можно было решить заданное неравенство, разрешив его предварительно относительно x и y, но тогда мы должны были бы рассматривать решение совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} y > \frac{2}{x}, \\ x > 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y < \frac{2}{x}, \\ x < 0. \end{cases}$$

Задание 31

Решите системы неравенств.

31.1. $\begin{cases} y < x^2 + 2, \\ x + y \leqslant 3. \end{cases}$

31.2. $\begin{cases} xy \leqslant 2, \\ x^2 + y^2 < 9, \\ x^2 - y^2 > 0. \end{cases}$

Задание 32

Составьте систему неравенств, которой удовлетворяют координаты точек отмеченной на рисунке области (рис. 35, 36).

V.9. Задачи на максимум и минимум

Задачи на максимум и минимум относятся к числу наиболее интересных математических задач. Это связано в первую очередь с тем, что в процессе трудовой деятельности люди стремятся наилучшим образом использовать материальные и трудовые ресурсы и при заданном объеме производства свести к минимуму (минимизировать) затраты или при заданных ресурсах обеспечить максимальный выпуск продукции. Такого рода задачи носят название оптимизиционных задач. Разработкой общих методов их решения занимаются специальные разделы высшей математики. Мы, конечно, ограничимся несколькими задачами, решаемыми элементарно.

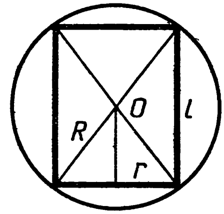


Рис. 37

Задача 39. *Вписать в данный шар радиуса R цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.*

Решение. Пусть цилиндр, осевое сечение которого изображено на рисунке 37, есть искомый, т. е. вписанный в данный шар и имеющий наибольшую боковую поверхность. Обозначим через r радиус основания этого цилиндра, а через l — его образующую. Тогда

$$S_б=2\pi rl. \qquad (1)$$

Выразим r через R и l, для того чтобы сделать $S_б$ функцией от одной переменной. Имеем:

$$r=\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}.$$

Подставляя это выражение r в (1), получим:

$$S_б=2\pi\sqrt{R^2l^2-\frac{l^4}{4}}.$$

Для простоты обозначим l^2 через x, ибо l^2 можно рассматривать как переменную (различным значениям l^2 соответствуют различные вписанные цилиндры). Тогда

$$S_б=2\pi\sqrt{R^2x-\frac{x^2}{4}}. \qquad (2)$$

Отсюда видно, что максимальное значение $S_б$ соответствует такому значению x, которое обращает в максимум подкоренное выражение в формуле (2), т. е.

$$y=R^2x-\frac{x^2}{4}. \qquad (3)$$

Следовательно, нам нужно найти наибольшее значение функции (3) на промежутке изменения переменной x от 0 до $4R^2$ (так как образующая вписанного цилиндра может меняться от 0 до $2R$). Это можно сделать, используя понятие производной, но можно обойтись и без нее. Покажем оба способа решения.

1-й способ (с помощью производной).

Найдем производную функции $y' = R^2 - \frac{x}{2}$. Эта производная обращается в нуль в единственной точке $x = 2R^2$. Так как функция (3) дифференцируема во всем промежутке изменения x от 0 до $4R^2$, то для нахождения наибольшего значения этой функции достаточно вычислить ее значение на концах этого промежутка и в критической точке $x = 2R^2$. Находим, что при $x = 0$ и при $x = 4R^2$ $y = 0$, а при $x = 2R^2$ $y = R^4$. Следовательно, наибольшее значение y принимает при $x = 2R^2$.

2-й способ. Преобразуем формулу (3) следующим образом:

$$y = R^2x - \frac{x^2}{4} = R^2x - \frac{x^2}{4} - R^4 + R^4 = R^4 - \left(\frac{x}{2} - R^2\right)^2.$$

Так как $\left(\frac{x}{2} - R^2\right)^2 \geqslant 0$, то $y \leqslant R^4$ и наибольшее значение R^4 принимает при таком значении x, при котором $\frac{x}{2} - R^2 = 0$, т. е. при $x = 2R^2$.

При найденном значении $x = 2R^2$, $l^2 = 2R^2$, $l = R\sqrt{2}$, $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Тогда $l = 2r$. Это значит, что цилиндр с наибольшей боковой поверхностью, вписанный в данный шар, в осевом сечении представляет собой квадрат, вписанный в окружность большого круга.

Ответ: наибольшее значение $S_б = 2\pi R^2$ при $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $l = R\sqrt{2}$.

Задача 40. *Определить a так, чтобы сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2-a)x - a - 3 = 0$ была наименьшей.*

Решение. Выразим сумму квадратов $x_1^2 + x_2^2$ корней x_1 и x_2 данного уравнения через коэффициенты уравнения. Для этого вспомним теорему Виета:

$$x_1 + x_2 = -(2-a) = a - 2, \quad x_1 \cdot x_2 = -(a+3).$$

Отсюда

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a-2)^2 + 2(a+3) = (a-1)^2 + 9.$$

Из последнего выражения видно, что всегда $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 9$, при этом наименьшее значение она принимает при $a = 1$, и это наименьшее значение равно 9.

Ответ: $a = 1$.

Задание 33

Решите задачи.

33.1. Числа x и y положительны, и $x+y=5$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$?

33.2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$\varphi(x)=\sin^6 x+\cos^6 x.$$

33.3. Найти наименьшие и наибольшие возможные значения функции

$$y=4\sin x+3\cos x.$$

33.4. Найти наибольшее значение функции

$$y=\frac{x}{ax^2+b}\ (a>0,\ b>0).$$

33.5. Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью v км/ч, составляет $90+0{,}4v^2$ р/ч. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость 1 км пути была наименьшей?

V.10. Геометрические задачи на вычисление

К геометрическим задачам на вычисление относятся задачи на нахождение величины какого-либо элемента или отношения элементов указанной геометрической фигуры (тела) или совокупности фигур, когда известны размеры некоторых элементов фигуры, соотношения между элементами фигуры или соотношения между самими фигурами, если их несколько.

Проанализируем несколько геометрических задач на вычисление и выделим в них все их составные части.

Задача 41. *Около круга радиуса R описан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c. Найти периметр треугольника.*

Анализ задачи: 1) объектом задачи является совокупность двух фигур: круга и прямоугольного треугольника;

2) данные элементы: радиус круга и гипотенуза прямоугольного треугольника;

3) искомые элементы: периметр треугольника;

4) заданные соотношения: прямоугольный треугольник описан около круга.

Задача 42. *Радиус одного основания усеченного конуса в 4 раза больше радиуса другого. Высота конуса разделена на 3 равные части и через точки деления проведены плоскости параллельно основаниям. В каком отношении разделился объем?*

Анализ задачи: 1) объектом задачи является усеченный конус. Но он разделен плоскостями, параллельными основаниям, на части. Очевидно, что эти части также усеченные конусы. Следовательно, объектом задачи является совокупность четырех усеченных конусов, из которых один основной, а остальные три являются его частями;

2) данные элементы: нет;

3) искомые элементы: нет;

4) соотношения, данные: а) отношение радиусов оснований основного конуса; б) отношение частей высоты конуса, на которые она разделена основаниями малых усеченных конусов — частей основного усеченного конуса; искомое: отношение объемов усеченных конусов — частей основного конуса.

Процесс решения геометрических задач на вычисление обычно строится следующим образом. Проводим устный анализ задачи по указанной выше схеме. На основе анализа строим схематическую запись задачи, включая чертеж объекта задачи. Затем выписываем формулы для нахождения искомых элементов или отношений и смотрим, можно ли на основе имеющихся данных вычислить по этим формулам искомые. Если нет, то стараемся свести задачу к нахождению каких-то отрезков или углов и ищем на чертеже те фигуры (обычно треугольники), в которые эти отрезки или углы входят. При этом необходимо добиться, чтобы эти искомые элементы входили вместе с данными в одни и те же фигуры. Если это не так, то вводим или строим вспомогательные элементы и фигуры, дающие возможность в итоге этого добиться.

Весьма часто процесс нахождения отдельного искомого элемента задачи выглядит следующим образом:

1) выписываем формулу для вычисления этого искомого элемента;

2) подставляем в эту формулу данные элементы;

3) если после этого в формуле переменных элементов не остается, то производим вычисление искомого по этой формуле, и на этом процесс нахождения этого искомого завершается;

4) если же в формуле после 2-го шага остаются переменные элементы, то для каждого из них повторяем 1—3-й шаги, и так до тех пор, пока не завершим процесс нахождения искомого.

Покажем процесс решения геометрических задач на вычисление на примере решения приведенных выше двух задач.

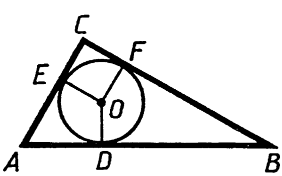


Рис. 38

Р е ш е н и е задачи 41. Строим схематическую запись задачи (рис. 38).

Д а н о: $OD=OE=OF=R$; $AB=c$; $\angle ACB=90°$.

Н а й т и: $P_{\triangle ABC}$.

На рисунке 38 точки D, E и F есть точки касания описанного прямоугольного треугольника ABC с заданной окружностью радиуса R. Тогда $OE \perp AC$ и $OF \perp BC$. Следовательно, в четырехугольнике $OECF$ три угла E, C и F прямые, поэтому и угол EOF тоже прямой, а так как, кроме того, $OE=OF$ как радиусы окружности, то этот четырехугольник является квадратом. Перейдем теперь к нахождению искомого элемента. По определению

$$P=AB+AC+BC. \quad (1)$$

Подставляем в (1) данные элементы, получим:

$$P=c+AC+BC. \quad (2)$$

Как видим, в формуле остались переменные элементы, значит, процесс решения надо продолжить, т. е. надо найти формулы для вычисления этих переменных: AC и BC. Рассматривая рисунок 38, замечаем, что можем выписать следующие формулы для их вычисления:

$$AC=AE+EC, \quad (3)$$

$$BC=BF+FC. \quad (4)$$

По доказанному четырехугольник $OECF$ есть квадрат, и поэтому $EC=FC=OE=R$.

Подставляем в (3) и (4):

$$AC=AE+R, \quad (5)$$

$$BC=BF+R. \quad (6)$$

Как видим, задача свелась к нахождению величины отрезков AE и BF. Их можно найти из условия, что $\triangle ABC$ описан около окружности. Из этого соотношения следует: $AE=AD$ и $BF=BD$, как отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки. Подставляем в (5) и (6):

$$AC=AD+R, \quad (7)$$

$$BC=BD+R. \quad (8)$$

Найденные выражения AC и BC из (7) и (8) подставляем в (2):

$$P=c+(AD+R)+(BD+R)=c+2R+(AD+BD)=2c+2R,$$

ибо сумма отрезков AD и BD есть гипотенуза AB.

Ответ: $2(c+R)$.

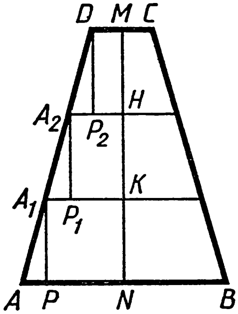


Рис. 39

Решение задачи 42. Строим схематическую запись задачи. Чертеж строим в виде осевого сечения заданного усеченного конуса (рис. 39).

Дано: $ABCD$ — осевое сечение усеченного конуса;
NA — радиус нижнего основания конуса;
MD — радиус верхнего основания;
MN — высота (ось) конуса;
$NA : MD = 4$; $NK = KH = HM$.

Обозначим объем усеченного конуса $ABCD$ через V, а объемы малых усеченных конусов ABB_1A_1, $A_1B_1B_2A_2$ и A_2B_2CD соответственно через V_1, V_2 и V_3.

Найти: $V_1 : V_2 : V_3$.

Чтобы найти искомые отношения, выпишем формулы для объемов усеченных конусов:

$$V = \frac{1}{3}\pi NM\,(NA^2 + NA \cdot MD + MD^2), \tag{1}$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi NK\,(NA^2 + NA \cdot KA_1 + KA_1^2), \tag{2}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi KH\,(KA_1^2 + KA_1 \cdot HA_2 + HA_2^2), \tag{3}$$

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi HM\,(HA_2^2 + HA_2 \cdot MD + MD^2). \tag{4}$$

В формулах (1) — (4) все входящие элементы являются переменными. Правда, нам нужно найти не сами эти объемы, а их отношения, но все же в таком виде вычислить даже отношения мы не сумеем. В таком случае введем вспомогательные элементы, которые затем постараемся исключить. В качестве таких вспомогательных элементов удобнее принять $MD = r$ и $MN = h$. Тогда по условию $NA = 4r$, а $NK = KH = HM = \frac{1}{3}h$.

Осталось выразить через r и h радиусы оснований малых усеченных конусов KA_1 и HA_2. Для этого можно провести $A_1P \perp AB$, $A_2P_1 \perp A_1B_1$ и $DP_2 \perp A_2B_2$. Очевидно, что построенные тем самым прямоугольные треугольники APA_1, $A_1P_1A_2$ и A_2P_2D равны, следовательно, $AP = A_1P_1 = A_2P_2$. Кроме того, $DM = P_2H$, $HA_2 = KP_1$ и $KA_1 = NP$. Поэтому $AN = DM + 3AP$, или $4r = r + 3AP$, отсюда $AP = r$. Тогда

$$A_2H = A_2P_2 + P_2H = r + DM = r + r = 2r,$$
$$A_1K = A_1P_1 + P_1K = r + A_2H = r + 2r = 3r.$$

Подставляем теперь найденные выражения всех переменных элементов в формулы (1) — (4):

$$V=\frac{1}{3}\pi h\ (16r^2+4r^2+r^2)=7\pi hr^2, \tag{5}$$

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\frac{1}{3}h\ (16r^2+12r^2+9r^2)=\frac{37}{9}\pi hr^2, \tag{6}$$

$$V_2=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1}{3}h\ (9r^2+6r^2+4r^2)=\frac{19}{9}\pi hr^2, \tag{7}$$

$$V_3=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1}{3}h\ (4r^2+2r^2+r^2)=\frac{7}{9}\pi hr^2. \tag{8}$$

Вот теперь можно подставить найденные выражения из формул (6) — (8) в $V_1 : V_2 : V_3$:

$$V_1 : V_2 : V_3=\frac{37}{9}\pi hr^2 : \frac{19}{9}\pi hr^2 : \frac{7}{9}\pi hr^2=37 : 19 : 7.$$

Ответ: объем усеченного конуса разделился в отношении 37 : 19 : 7.

Задание 34

Решите следующие задачи.

34.1. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника продолжен за вершину острого угла. И на этом продолжении отложены два отрезка, равные катету. Концы этих отрезков соединены со второй вершиной. Найти сумму двух новых острых углов, образованных при этом.

34.2. В шаре насквозь просверлено отверстие, внутренняя поверхность которого представляет боковую поверхность усеченного конуса, образующая этого конуса c, а высота h. Определить объем оставшейся части шара.

34.3. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 120°. Найти боковую поверхность ее, если площадь диагонального сечения равна m.

34.4. Площади нижнего и верхнего оснований и боковой поверхности правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся как $m : n : p$. Найти угол между боковой гранью и плоскостью нижнего основания пирамиды.

34.5. Дана правильная четырехугольная пирамида $MABCD$ с вершиной M. Через точки A и B и середину MC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Глава VI

ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

VI.1. Сущность и методы доказательства

Требование всякой задачи на доказательство состоит в том, чтобы доказать некоторое сформулированное в задаче утверждение. А что это значит?

В жизни часто, когда говорят о доказательстве, имеют в виду просто проверку высказанного утверждения. Но в науке проверка и доказательство — это разные вещи, хотя, конечно, и связанные между собой. Например, когда в задаче требуется доказать, что высоты ромба равны, то если мы в каком-либо ромбе проведем высоты и затем путем измерения проверим, равны ли они или нет, то положительный результат этой проверки, конечно, делает наше утверждение более правдоподобным, но еще не доказанным.

Чтобы доказать его, мы рассмотрим треугольники, катетами которых являются проведенные высоты. Так как они по построению прямоугольные и их гипотенузы равны как стороны ромба, а острые углы равны как противоположные острые углы ромба, то эти треугольники по известному признаку равны. А как известно, в равных треугольниках соответственные стороны равны. Следовательно, проведенные высоты ромба равны. Что и требовалось доказать.

Если внимательно вглядеться в это доказательство, то заметим, что его сущность состоит в построении такой последовательности ранее доказанных и принятых в математике утверждений, прямым логическим следствием которых является утверждение, которое нам нужно было доказать. Вообще, *доказать какое-либо утверждение — это значит показать, что это утверждение является логическим следствием системы уже доказанных и принятых в науке утверждений* (или, как говорят, некоторой теории).

Каждый шаг доказательства обычно имеет такую с т р у к т у р у: 1) доказанное ранее или принятое утверждение; 2) условие задачи; 3) логическое следствие из применения этого общего утверждения к данному условию задачи.

Например, одним из шагов проведенного выше доказательства был такой: *гипотенузы рассматриваемых прямоугольных треугольников равны как стороны ромба.* Этот шаг имеет такую структуру: 1) *общее утверждение*: стороны ромба равны или более подробно: если отрезки a и b являются сторонами ромба, то $a=b$; 2) *условие:* гипотенузы рассматриваемых треугольников являются сторонами ромба, т. е. отрезки c_1 и c_2 действительно являются сторонами ромба; 3) *логическое следствие:* гипотенузы этих треугольников равны, т. е. $c_1 = c_2$.

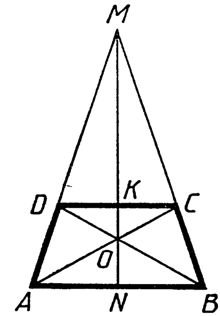


Рис. 40

Доказательство, построенное из таких шагов, можно назвать прямым доказательством. Решение задач на доказательство обычно оформляют в виде прямого доказательства. Но найти прямое доказательство сразу, как правило, не удается. Процесс нахождения доказательства строится обычно в обратном порядке, идя не от условий к требованию, а, наоборот, от требования к условиям. Покажем это на примерах.

Задача 43. *Доказать, что прямая, определяемая точкой пересечения диагоналей равнобедренной трапеции и точкой пересечения продолжений боковых сторон, перпендикулярна основаниям трапеции и делит их пополам.*

Решение. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция, у которой AB и CD — основания, а AD и BC — равные боковые стороны (рис. 40). Проведем в этой трапеции диагонали AC и BD, которые пересекаются в точке O, и продолжим боковые стороны до пересечения в точке M. Через точки O и M проведем прямую MO до пересечения с основаниями трапеции в точках K и N.

Нам нужно доказать: 1) $OM \perp DC$; 2) $OM \perp AB$; 3) $DK = KC$; 4) $AN = BN$.

Внимательно присматриваясь к рисунку, на котором изображена заданная фигура, мы видим, что утверждения, которые необходимо доказать, означают следующее: MK и MN суть высоты и медианы соответственно $\triangle DCM$ и $\triangle ABM$.

Как можно убедиться в этом? Вспоминаем теоремы о высотах и медианах треугольников. Естественно, вспоминается и теорема о высотах и медианах равнобедренных треугольников, хотя бы потому, что данная трапеция равнобедренная. Если мы будем опираться на эту теорему, то нам нужно будет доказать, во-первых, что треугольники ABM и DCM равнобедренные, а во-вторых, что MN и MK — биссектрисы этих треугольников. Чтобы доказать, что эти треугольники равнобедренные, достаточно доказать, что углы при их основаниях равны. Но, вспоминая задачи, решенные несколько ранее, мы находим среди них и такую, в которой было доказано, что углы при основании равнобедренной трапеции равны. Значит, можно опереться на результат решения этой задачи.

А для того чтобы доказать, что MN и MK — биссектрисы соответствующих треугольников, нужно, очевидно, доказать равенство треугольников, в которые входят углы AMN и BMN. Можно, например, рассмотреть треугольники AOM и BOM. В этих треугольниках OM — общая сторона, стороны AM и BM равны как боковые стороны равнобедренного треугольника ABM. Следовательно, необходимо еще доказать, что $AO=BO$. Это мы сможем доказать, рассматривая, например, $\triangle AOB$ и доказав, что углы OAB и OBA равны. А это в свою очередь можно будет доказать, доказав равенство треугольников ABD и ABC (по трем сторонам).

Вот теперь мы можем оформить решение этой задачи в виде прямого доказательства.

1. Мы знаем, что в равнобедренной трапеции углы при основании равны, следовательно, $\angle MAB = \angle MBA$.

2. Если два угла треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный. В $\triangle ABM$ по доказанному углы при основании равны, следовательно, этот треугольник равнобедренный, т. е. $AM=BM$ и т. д.

Иногда можно оформить решение задачи на доказательство и идя от требования к условиям (как бы обратным ходом), но тогда в решении можно использовать лишь такие теоремы (утверждения), обратные которым также верны. Приведем пример такого решения.

Задача 44. *Доказать, что при $m>0$ справедливо неравенство*

$$m+\frac{4}{m}\geqslant 4.$$

Решение. 1. Прямое доказательство (от условия к требованию). Каково бы ни было действительное число m, квадрат разности $m-2$ является неотрицательным числом, т. е. $(m-2)^2\geqslant 0$ — верное неравенство.

Раскроем скобки в левой части этого неравенства, получим снова верное неравенство: $m^2-4m+4\geqslant 0$.

Так как по условию $m>0$, то, разделив все члены последнего неравенства на m, получим также верное неравенство:

$$m-4+\frac{4}{m}\geqslant 0.$$

Прибавим к обеим частям этого неравенства по 4, получим снова неравенство: $m+\frac{4}{m}\geqslant 4$. А это нам и надо было доказать.

2. Обратное доказательство (от требования к условиям).

Допустим, что неравенство, которое нам нужно доказать, верно, т. е. допустим, что

$$m+\frac{4}{m}\geqslant 4 \text{ при } m>0. \qquad (1)$$

Тогда если мы все члены этого неравенства умножим на $m>0$, то получим равносильное неравенство:

$$m^2+4>4m. \qquad (2)$$

Неравенство (2) в свою очередь равносильно такому:

$$m^2+4-4m\geqslant 0. \qquad (3)$$

А это равносильно следующему:

$$(m-2)^2\geqslant 0. \qquad (4)$$

Неравенство (4) верно, ибо квадрат любого действительного числа есть число неотрицательное. Тогда верно и исходное неравенство (1), ибо оно равносильно неравенству (4).

Обратное доказательство не следует путать с доказательством от противного. Сущность *доказательства от противного* состоит в следующем. Предполагаем, что некоторое утверждение верно (обычно имеется в виду утверждение, противоположное тому, которое необходимо доказать). Из этого предположения делаем логические следствия до тех пор, пока не получим явно неверное (противоречивое) утверждение. Тогда делаем заключение, что и предполагаемое нами утверждение также неверно. Таким образом, доказательство от противного основано на следующем общелогическом положении: *если из высказывания A следует высказывание B и высказывание B ложно, то ложно и высказывание A.*

Приведем в качестве примера решение задачи 44 с помощью доказательства от противного.

Для этого построим утверждение, противоположное тому, которое нам нужно доказать. Нам требуется доказать, что $m+\frac{4}{m}\geqslant 4$, противоположное ему будет неравенство

$$m+\frac{4}{m}<4. \qquad (1)$$

Итак допустим, что неравенство (1) верно. Умножив обе части его на $m>0$, получим равносильное неравенство $m^2+4<4m$, из которого следует такое:

$$m^2+4-4m<0, \text{ или } (m-2)^2<0. \qquad (2)$$

Неравенство (2) является следствием неравенства (1), и в то же время оно ложно, ибо квадрат действительного числа $m-2$ не может быть отрицательным числом. Следовательно, ложно и неравенство (1). А поэтому истинно ему противоположное неравенство, а именно $m+\frac{4}{m}\geqslant 4$, что и требовалось доказать.

Заметим, что здесь мы воспользовались следующим общелогическим положением: *если высказывания А и В противоположны и исчерпывают все возможности (т. е. возможны либо А, либо В и ничего другого), то если А истинно, то В ложно, и наоборот, если А ложно, то В истинно.*

Существуют еще и некоторые другие методы решения задач на доказательство, которое мы продемонстрируем при рассмотрении отдельных видов задач на доказательство.

Задание 35

Решите с помощью прямого и обратного доказательства следующие задачи.

35.1. Доказать, что $\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\ldots\cos 32\alpha\leqslant\frac{1}{64}$.

35.2. Доказать, что при всех $n\in N$ значение выражения n^3-n делится на 6.

Задание 36

Решите с помощью доказательства от противного следующие задачи.

36.1. Доказать, что если отрезок, проведенный через середину одной стороны треугольника до пересечения с другой стороной, равен половине длины третьей стороны, то этот отрезок есть средняя линия треугольника.

36.2. Доказать, что число 15 не может быть корнем уравнения вида $x^3+ax^2+bx+1=0$, где a и b — целые числа.

VI.2. Доказательство тождеств

Доказательство тождеств основано на тождественных преобразованиях выражений, которые были рассмотрены в главе IV. Если нам нужно доказать, что выражение A тождественно равно выражению B, то сделать это можно следующими способами:

1) Преобразуем выражение A на основе правил тождественных преобразований до тех пор, пока не получим выражение, одинаковое с выражением B.

2) Преобразуем выражение B до тех пор, пока не получим выражение, одинаковое с A.

3) Преобразуем оба выражения A и B до тех пор, пока не получим два одинаковых выражения A' и B'.

4) Допустим, что равенство $A=B$ тождественно-истинно. Преобразуем его в равносильные равенства до тех пор, пока не получим равенство $A'=B'$, истинность которого очевидна (известна). Тогда в силу равносильности последнего равенства исходному будет истинно и исходное равенство.

Приведем примеры решения задач на доказательство тождеств этими способами.

Задача 45. *Доказать тождество*

$$(a+b+c)\ (ab+bc+ca)-abc=(a+b)\ (b+c)\ (c+a). \quad (1)$$

Решение. Эту задачу одинаково легко решить любым из указанных выше способов.

1-й способ. Преобразуем левую часть данного равенства (1):

$$L=(a+b+c)\ (ab+bc+ca)-abc=$$

$$=a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+ac^2-abc=$$

$$=(a^2b+ab^2)+(abc+b^2c)+(bc^2+ac^2)+(a^2c+abc)=$$

$$=ab\ (a+b)+bc\ (a+b)+c^2\ (a+b)+ac\ (a+b)=$$

$$=(a+b)(ab+ac+bc+c^2)=(a+b)(b+c)(c+a).$$

Получили выражение, одинаковое с правой частью (1), следовательно равенство (1) есть тождество.

2-й способ. Преобразуем правую часть равенства (1):

$$P=(a+b)\ (b+c)\ (c+a)=$$

$$=abc+ac^2+b^2c+bc^2+a^2b+a^2c+ab^2+abc=$$

$$=(abc+bc^2+b^2c)+(ac^2+a^2c+abc)+(a^2b+ab^2+abc)-abc=$$

$$=bc(a+b+c)+ac(a+b+c)+ab(a+b+c)-abc=$$

$$=(a+b+c)\ (ab+bc+ca)-abc.$$

Получили выражение, одинаковое с левой частью (1), следовательно, равенство (1) есть тождество.

3-й способ. Раскроем скобки в обеих частях равенства (1) и сравним полученные выражения:

$$a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+ac^2-abc=$$

$$=abc+ac^2+b^2c+bc^2+a^2b+a^2c+ab^2+abc;$$

$$a^2b+a^2c+ab^2+cb^2+ac^2+bc^2+2abc=$$

$$=a^2b+a^2c+ab^2+cb^2+ac^2+bc^2+2abc.$$

Получили совершенно одинаковые выражения, следовательно, равенство (1) есть тождество.

4-й способ. Допустим, что равенство (1) есть тождество. Тогда верно и такое равенство:

$$(a+b+c)\ (ab+bc+ca)-(a+b)\ (b+c)\ (c+a)=abc.$$

Или

$$(a+b)\ (ab+bc+ca)+c\ (ab+bc+ca)-$$

$$-(a+b)\ (b+c)\ (c+a)=abc;$$

$$(a+b)\ (ab+bc+ca-(b+c)\ (c+a))+c\,(ab+bc+ca)=abc;$$

$$c\ (ab+bc+ca-c\ (a+b))=abc;$$

$$abc=abc.$$

Получили верное равенство, следовательно, и равенство (1) верно.

Однако в ряде случаев удобнее применять один из указанных способов.

Задача 46. *Доказать тождество* $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x}=1+\log_a b$ *при* $x>0,\ x\neq 1,\ a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ ab\neq 1.$

Решение. В этой задаче удобнее преобразовывать левую часть заданного равенства, хотя бы потому, что левая часть содержит переменную x, а правая часть эту переменную не содержит.

Для преобразования левой части воспользуемся формулой перехода к другому основанию логарифмов (формула VIII.6). По этой формуле заменим логарифм, стоящий в знаменателе дроби, логарифмом с основанием a. Получим:

$$\log_{ab} x=\frac{\log_a x}{\log_a ab}.$$

Следовательно,

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x}=\frac{\log_a x\cdot\log_a ab}{\log_a x}=\log_a ab.$$

Сократить дробь на $\log_a x$ можно, ибо при указанных в задаче ограничениях этот логарифм не равен нулю.

Теперь к полученному выражению применим формулу логарифма произведения (VIII.3), получим: $\log_a ab = \log_a a + \log_a b$.

На основании определения логарифма $\log_a a = 1$, следовательно, получили:

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b,$$

что и требовалось доказать.

Несколько своеобразно решаются задачи на доказательство тригонометрических тождеств. Это своеобразие связано главным образом с необходимостью использования большего числа различных правил и формул тождественных преобразований. Приведем пример.

Задача 47. *Доказать тождество*

$$4 \sin^3 x \cos 3x + 4 \cos^3 x \sin 3x = 3 \sin 4x.$$

Решение. Характер тождества, которое нам нужно доказать, показывает, что целесообразно преобразовывать левую часть. Так как в этой части имеем функции двух аргументов x и $3x$, а надо получить функцию аргумента $4x$, то, очевидно, следует воспользоваться такими формулами, которые увеличивают аргумент. Для этого представим левую часть L в таком виде:

$$L = (2 \sin^2 x)\ (2 \sin x \cos 3x) + (2 \cos^2 x)\ (2 \cos x \sin 3x)$$

и сначала воспользуемся формулами понижения степени:

$$L = (1 - \cos 2x)\ (2 \sin x \cos 3x) + (1 + \cos 2x)\ (2 \cos x \sin 3x) =$$

$$= 2\ (\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x) +$$

$$+ 2 \cos 2x\ (\cos x \sin 3x - \sin x \cos 3x).$$

Теперь к выражениям, стоящим в скобках, применим формулы синуса суммы и разности двух аргументов:

$$L = 2 \sin 4x + 2 \cos 2x \sin 2x.$$

Ко второму слагаемому можно применить формулу синуса двойного аргумента:

$$L = 2 \sin 4x + \sin 4x = 3 \sin 4x,$$

что и требовалось доказать.

Несколько сложнее решаются задачи на доказательство так называемых условных тождеств. Приведем примеры.

Задача 48. *Доказать, что* $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, *если* $a + b + c = 0$.

Решение. При доказательстве таких тождеств можно, как и при доказательстве обычных тождеств, идти или от условий к требованию, или от требования к условиям.

1-й способ. Будем двигаться от условия к требованию. Нам дано, что $a+b+c=0$. В тождество же, которое нужно доказать, входят кубы чисел a, b и c, поэтому придется применить к условию возвышение обеих частей его в куб. Но предварительно представим это условие в таком виде:

$$a+b=-c. \tag{1}$$

Возвысив это равенство в куб, получим:

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=-c^3,$$

или

$$a^3+b^3+c^3=-3ab\ (a+b).$$

Заменив в правой части сумму $a+b$ числом $(-c)$ согласно условию (1), получим требуемое тождество: $a^3+b^3+c^3=3abc$.

2-й способ. Будем двигаться от требования к условию.

Допустим, что равенство $a^3+b^3+c^3=3abc$ верно. Тогда верно и такое равенство: $a^3+b^3=3abc-c^3$.

Отсюда $(a+b)\ (a^2-ab+b^2)=c\ (3ab-c^2)$.

Заменим сумму $a+b$ согласно условию (1) числом $(-c)$:

$$-c\ (a^2-ab+b^2)=c\ (3ab-c^2).$$

Перенесем все члены в одну сторону:

$$c\ (a^2-ab+b^2+3ab-c^2)=0;$$

$$c\ (a^2+2ab+b^2-c^2)=0;$$

$$c\ ((a+b)^2-c^2)=0;$$

$$c\ (a+b+c)\ (a+b-c)=0.$$

Так как по условию сомножитель $a+b+c=0$, то последнее равенство есть тождество. А так как все преобразования мы производили на основе правил, имеющих характер тождеств, то и исходное равенство есть тождество, что и требовалось доказать.

Задача 49. *Доказать, что для углов x, y, z треугольника справедливо равенство*

$$\sin x+\sin y+\sin z=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}.$$

Решение. Здесь, пожалуй, удобнее преобразовать какую-либо часть условного тождества, имея в виду условие

$$x+y+z=\pi. \qquad (1)$$

Будем преобразовывать левую часть:

$$L=(\sin x+\sin y)+\sin z=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\sin z.$$

Из (1) следует, что $z=\pi-(x+y)$, поэтому

$$\sin z=\sin(\pi-(x+y))=\sin(x+y)=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

Из (1) следует также, что $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}$, поэтому

$$\sin\frac{x+y}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}\right)=\cos\frac{z}{2}.$$

Тогда получаем:

$$L=2\cos\frac{z}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\cos\frac{z}{2}\cos\frac{x+y}{2}=$$

$$=2\cos\frac{z}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\right).$$

Теперь воспользуемся формулой суммы косинусов, получим:

$$L=2\cos\frac{z}{2}\cdot 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2},$$

что и требовалось доказать.

Задание 37

Докажите тождества.

37.1. $\sqrt{b(\sqrt{a}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a}-\sqrt{a-b})}=-b$ при $a\geqslant 0$, $b\leqslant 0$.

37.2. $\log_a b=\log_{a^k}(b^k)$, где $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$.

37.3. Если $\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\beta$, то $\sin(\alpha+\beta)=3\sin(\alpha-\beta)$.

VI.3. Доказательство неравенств

При доказательстве неравенств, кроме правил преобразования неравенств, указанных в пункте V.1, очень часто используются следующие два положения:

1) если $a-b>0$, то $a>b$; если $a-b<0$, то $a<b$;

2) четная степень, в частности квадрат, любого действительного числа есть число неотрицательное.

Покажем на примерах способы доказательства неравенств.

Задача 50. *Доказать, что при любых значениях x справедливо неравенство*

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1>0. \qquad (1)$$

Решение. Разобьем область изменения переменной x, множество R, на такие промежутки: $(-\infty;\ 0]$, $(0;\ 1)$, $[1;\ +\infty)$ — и рассмотрим знак левой части неравенства в каждом из этих промежутков.

1) Если $x\leqslant 0$, то все четные степени x неотрицательны, а $-x^9$ и $-x$ принимают также неотрицательные значения, следовательно, вся левая часть (1) принимает положительные значения, т. е. (1) справедливо.

2) Если $0<x<1$, то преобразуем левую часть (1) таким образом:

$$L=x^{12}+x^4(1-x^5)+(1-x).$$

При указанных значениях x выражения в скобках принимают положительные значения и, следовательно, L положительно.

3) Наконец, если $x\geqslant 1$, то представим левую часть так:

$$L=x^9(x^3-1)+x(x^3-1)+1.$$

Выражения в скобках принимают неотрицательные значения, а поэтому вся левая часть положительна.

Таким образом, видим, что в каждом из рассмотренных промежутков неравенство (1) справедливо, значит, оно справедливо при всех значениях переменной x.

Задача 51. *Доказать, что если арифметическая прогрессия (a_n) с положительной разностью и геометрическая прогрессия (b_n) имеют два равных последовательных члена, то все последующие члены геометрической прогрессии больше соответствующих членов арифметической прогрессии.*

Решение. Нам дано, что

$$a_1=b_1 \qquad (1)$$

и

$$a_2=b_2. \qquad (2)$$

Равенство (2) можно представить в таком виде:

$$a+d=aq, \qquad (3)$$

где $d>0$. Отсюда

$$q=1+\frac{d}{a}. \qquad (4)$$

Следовательно, $q>1$.

Нам нужно доказать, что

$$b_n > a_n \text{ при } n > 2. \qquad (5)$$

По известным формулам общего члена арифметической и геометрической прогрессии неравенство (5) представим в таком виде:

$$aq^{n-1} > a + d\,(n-1).$$

Подставляя вместо d его значение из (3), получим:

$$aq^{n-1} > a + (aq - a)\,(n-1), \text{ или}$$

$$a\,(q^{n-1} - 1) > a\,(q-1)\,(n-1).$$

Так как $a > 0$, то можно разделить обе части на a, а разность $q^{n-1} - 1$ разложить на множители:

$$(q-1)\,(q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q + 1) > (q-1)\,(n-1).$$

Так как $q > 1$, то $q - 1 > 0$, поэтому можно разделить обе части на $q-1$, получим: $q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q + 1 > n - 1$.

В левой части неравенства имеем сумму $n-1$ слагаемых, каждое из которых (за исключением последнего) есть степень $q > 1$. Поэтому все эти слагаемые больше 1, а поэтому вся сумма больше $n-1$. Значит, действительно $b_n > a_n$ при $n > 2$, что и требовалось доказать.

Задача 52. *Доказать, что среднее арифметическое нескольких чисел не меньше наименьшего из них и не больше наибольшего из них.*

Решение. Обозначим наименьшее из чисел a_1, a_2, ..., a_n через $\min(a_n)$, а наибольшее из этих чисел через $\max(a_n)$. Если наименьших или наибольших среди данных чисел, равных между собой, несколько, то в качестве таковых берем одно из них.

Тогда нам нужно доказать, что

$$\min(a_n) \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \max(a_n).$$

Обозначим

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = A. \qquad (1)$$

Если каждое из слагаемых числителя (1) заменить $\min(a_n)$, то, очевидно, сумма может уменьшиться и, следовательно,

$$\frac{\min(a_n) + \min(a_n) + \ldots + \min(a_n)}{n} \leqslant A$$

или

$$\frac{n\cdot\min(a_n)}{n}\leqslant A,\ \min(a_n)\leqslant A. \qquad (2)$$

Если теперь каждое слагаемое числителя (1) заменить $\max(a_n)$, то вся сумма может лишь увеличиться:

$$\frac{n\cdot\max(a_n)}{n}\geqslant A,$$

отсюда

$$\max(a_n)\geqslant A. \qquad (3)$$

Сопоставляя (2) и (3), получим $\min(a_n)\leqslant A\leqslant\max(a_n)$, что и требовалось доказать.

Задание 38

Докажите неравенства.

38.1. Если $\operatorname{tg} x=3\operatorname{tg} y$, $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant y<\frac{\pi}{2}$, то $x-y\leqslant\frac{\pi}{6}$.

38.2. $\frac{1}{4}\leqslant\sin^6 x+\cos^6 x\leqslant 1$.

38.3. Доказать, что среднее гармоническое двух положительных чисел не больше их среднего геометрического. (Средним гармоническим чисел a и b называется обратная величина среднего арифметического обратных величин этих чисел, т. е. $W=\dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=\dfrac{2ab}{a+b}$, а средним геометрическим — $H=\sqrt{ab}$.)

VI.4. Метод полной математической индукции

Для доказательства многих предложений, справедливых при натуральных значениях переменной, используется особый метод, называемый методом полной математической индукции. Этот метод основан на следующем *принципе (аксиоме) полной математической индукции:*

Если некоторое предложение $A(n)$:

1) *справедливо (истинно) при $n=1$,*

2) *из предположения, что это предложение истинно при $n=k$, следует истинность этого предложения и при следующем значении n, т. е. при $n=k+1$,*

то предложение $A(n)$ истинно при всех $n\in\mathbf{N}$.

Многих учащихся смущает сложность этой аксиомы, ее недостаточная очевидность. Поэтому покажем, что эту аксиому можно доказать как теорему, приняв за аксиому более простое и более очевидное положение, а именно следующую.

Аксиома наименьшего числа: в любом множестве натуральных чисел всегда имеется наименьшее число.

Смысл этой аксиомы состоит в том, что, какое бы множество натуральных чисел ни рассматривать, в нем обязательно найдется такое число, которое меньше всех остальных чисел этого множества.

Известно, что множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ имеет наименьшее число — это 1. Аксиома наименьшего числа утверждает, что таким свойством обладает не только множество $\boldsymbol{N}$, но и любое его подмножество.

Заметим, что для других видов чисел указанная аксиома неверна. Например, если рассматривать множество рациональных чисел, то среди этих чисел, больших 2 ($x>2$), нет наименьшего, ибо, какое бы рациональное число, большее 2, мы ни взяли, всегда найдется другое рациональное число, тоже большее 2, но меньшее первого. Например, число 2,00001 больше 2, но число 2,000001 тоже больше 2, но меньшее первого числа и т. д.

На основе указанной аксиомы можно доказать следующую теорему:

Теорема о принципе математической индукции. *Если некоторое предложение $A(n)$ верно при $n=1$ и из предположения, что оно верно при некотором значении $n=k$, следует, что это предложение верно и при следующем значении $n=k+1$, то предложение $A(n)$ верно при всех $n\in\boldsymbol{N}$.*

Доказательство. Будем вести доказательство методом от противного. Нам нужно доказать, что предложение $A(n)$ верно (истинно) при всех $n\in\boldsymbol{N}$. Допустим противное, т. е. допустим, что $A(n)$ верно не при всех значениях n. Значит, существует множество натуральных чисел, при которых $A(n)$ ложно. В этом множестве согласно аксиоме наименьшего числа имеется наименьшее, пусть это будет m. Так как при $n=1$ $A(n)$ по условию теоремы истинно, то $m>1$. Следовательно, существует натуральное число, предшествующее числу m, т. е. $m-1$ есть натуральное число. При этом предложение $A(n)$ при $n=m-1$ уже должно быть истинно. (Вдумайтесь. Ведь по предположению $A(n)$ ложно в множестве натуральных чисел, в котором m есть наименьшее число. Значит, вне этого множества, а значит, и при $m-1$ предложение $A(n)$ должно быть истинно.)

Но по условию, если предложение $A(n)$ истинно для какого-либо натурального числа, то оно истинно и для следующего. Для числа $m-1$ это предложение истинно, следовательно, оно должно быть истинно и для числа m. В то же время по предположению

$A(n)$ при $n=m$ ложно. Получили, что предложение $A(n)$ при $n=m$ и истинно, и ложно, чего не может быть.

Полученное противоречие показывает, что наше предположение о том, что существуют значения n, при которых $A(n)$ ложно, неверно, следовательно, $A(n)$ истинно при всех значениях $n \in N$.

Покажем теперь, как, пользуясь этой теоремой (принципом) полной математической индукции, можно доказывать отдельные предложения.

Задача 53. *Доказать справедливость (истинность) равенства*

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2-1}=\frac{n}{2n+1}. \qquad (1)$$

Решение. Предложение $A(n)$, истинность которого нам нужно доказать, задано равенством (1). Доказательство методом полной математической индукции состоит из двух шагов.

1-й шаг. Проверяем истинность $A(1)$. Но как найти $A(1)$?

В левой части (1) n означает число слагаемых суммы, а в правой — переменную. Следовательно, чтобы найти $A(1)$, надо в левой части взять одно слагаемое, а в правой n положить равной 1. Получим: $\frac{1}{2^2-1}=\frac{1}{2\cdot 1+1}$, или $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$. Значит, $A(1)$ истинно.

2-й шаг. Допустим, что $A(n)$ при произвольном $n=k$ истинно, т. е. допустим, что равенство (1) при $n=k$ верно. Это значит, что мы предполагаем справедливость следующего равенства:

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\ldots+\frac{1}{(2k)^2-1}=\frac{k}{2k+1}. \qquad (2)$$

Тогда докажем, что истинно и $A(k+1)$, т. е. верно такое равенство:

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\ldots+\frac{1}{(2k)^2-1}+\frac{1}{(2(k+1))^2-1}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}. \qquad (3)$$

Для доказательства преобразуем левую часть (3):

$$L=\left(\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\ldots+\frac{1}{(2k)^2-1}\right)+\frac{1}{(2(k+1))^2-1}.$$

Выражение, стоящее в скобках, согласно предположению можно заменить его значением из равенства (2):

$$L=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+2)^2-1}=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}.$$

Сократив эту дробь на $2k+1$, получим правую часть равенства (3). Так как заданное предложение $A(n)$ оказалось верным при $n=1$ и из допущения, что оно верно при $n=k$, мы доказали, что оно будет верно и при $n=k+1$, то на основе принципа полной математической индукции заданное предложение — равенство (1) — верно при всех $n \in N$.

В некоторых случаях предложение, которое необходимо доказать методом полной математической индукции, справедливо не для всех $n \in N$, а лишь для n, начиная с некоторого a. Однако характер доказательства при этом не меняется.

Задача 54. *Доказать, что неравенство*

$$2^n > n^2 \qquad (1)$$

справедливо при всех натуральных значениях $n \geqslant 5$.

Решение. Проверьте, что неравенство (1) верно при $n=1$, но при $n=2$, 3, 4 оно неверно, а вот то, что при $n \geqslant 5$ оно верно, нам предстоит доказать.

1-й шаг. Докажем, что (1) верно при $n=5$. Действительно, $2^5 > 5^2$, ибо $32 > 25$ есть истинное неравенство.

2-й шаг. Допустим, что при некотором $n=k>5$ неравенство (1) верно, т. е. верно, что

$$2^k > k^2. \qquad (2)$$

Тогда докажем, что это неравенство верно при следующем значении n, т. е. при $n=k+1$. Значит, нужно доказать, что

$$2^{k+1} > (k+1)^2. \qquad (3)$$

Преобразуем левую часть (3): $2^{k+1}=2 \cdot 2^k$. В силу неравенства (2), если 2^k заменить k^2, то получим:

$$2^{k+1} > 2k^2 = k^2 + k^2. \qquad (4)$$

Так как $k>5$, то $k-1>4$, значит $(k-1)^2>16$, k^2-2k+ $+1>16$, отсюда $k^2>15+2k>2k+1$. Заменим в правой части (4) второе слагаемое согласно доказанному $2k+1$, тем самым неравенство (4) лишь усилится: $2^{k+1}>k^2+2k+1=(k+1)^2$, что и требовалось доказать.

Следовательно, на основе принципа полной математической индукции неравенство (1) верно при всех $n \geqslant 5$.

Иногда приходится использовать этот метод в весьма своеобразной форме. Приведем пример.

З а д а ч а 55. *Если в последовательности* (a_n) *первые два члена равны соответственно 3 и 9, а для любого* $k>2$ *имеет место следующее равенство:*

$$a_k=4a_{k-1}-3a_{k-2}, \tag{1}$$

то

$$a_n=3^n. \tag{2}$$

Р е ш е н и е. 1-й ш а г. Проверяем справедливость (2) для первых двух членов последовательности (a_n): $a_1=3^1=3$ и по условию $a_1=3$; $a_2=3^2=9$ и по условию $a_2=9$.

Значит, для этих членов последовательности формула (2) справедлива.

2-й ш а г. Допустим, что формула (2) верна для двух последовательных членов этой последовательности, например для a_m и a_{m+1}, т. е. верны равенства

$$a_m=3^m$$

и

$$a_{m+1}=3^{m+1}. \tag{3}$$

Тогда докажем, что формула (2) верна и для следующего значения: $n=m+2$, т. е. верна такая формула:

$$a_{m+2}=3^{m+2}. \tag{4}$$

Действительно, согласно условию (1)

$$a_{m+2}=4a_{m+1}-3a_m.$$

Подставляем вместо a_{m+1} и a_m их значения из формул (3), справедливость которых нами принята, тогда получим:

$$a_{m+2}=4\cdot 3^{m+1}-3\cdot 3^m=4\cdot 3^{m+1}-3^{m+1}=3^{m+1}(4-1)=3^{m+2},$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, формула (2) справедлива для всех $n\in N$.

Задание 39

Докажите методом полной математической индукции.

39.1. $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2.$

39.2. Число $11^{n+1}+12^{2n-1}$ при всех $n\in N$ делится на 133.

39.3. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ при $n>1$.

Как же научиться решать задачи?

Дорогие читатели! Вы заканчиваете работу над данной книгой (именно работу, а не просто чтение). Цель вашей работы сформулирована в названии книги: *научиться решать задачи.*

Давайте в заключение еще раз повторим, что же надо сделать, чтобы научиться решать задачи.

Во-первых, надо научиться анализировать сами задачи.

Это значит, что нужно уметь расчленять задачу на элементарные условия и требования. А в каждом элементарном условии видеть объект и его характеристику, если же объектов в условии несколько, то выявить их отношение (связь). Нужно также установить характер каждого требования (вопроса) и тем самым определить вид задачи.

Полезно придерживаться правила: *пока не произведен полный, глубокий анализ задачи, не построена, если нужно, ее схематическая запись, не приступать к самому решению.*

Поспешность в решении задачи вредна!

При построении схематической записи задачи надо широко использовать математическую символику, чертежи, таблицы и т. д. Приведем пример.

Задача 56. *Множество A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A не менее восьми. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно* 330. *Никакие два числа из A не являются взаимно простыми. Сумма всех чисел из A равна* 755. *Произведение всех чисел из A не является четвертой степенью никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.*

Чтобы построить схематическую запись такой сложной задачи, надо внимательно читать каждое предложение ее формулировки и устанавливать, какие элементарные условия в этом предложении указаны. Так, первое предложение приведенной задачи гласит: «Множество A состоит из различных натуральных чисел». Это предложение указывает два элементарных условия: искомые числа множества A являются натуральными числами и все эти искомые числа различные, т. е. не равные друг другу.

Так же проанализируем остальные предложения формулировки задачи. Обозначив искомые числа через $x_1, x_2, \dots, x_n$, можно составить следующую схематическую запись этой задачи:

Дано: $x_1, x_2, \dots, x_n \in N;$ (1)

$x_i \neq x_j \ (i \neq j);$ (2)

$n \geqslant 8;$ (3)

$\text{НОК}\ (x_1, x_2, \dots, x_n) = 330;$ (4)

$\text{НОД}\ (x_i, x_j) \neq 1 \ (i \neq j);$ (5)

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=755; \quad (6)$$
$$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\neq k^4, \text{ где } k\in N. \quad (7)$$

Найти: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Конечно, для очень многих задач нет надобности строить какие-то схематические записи, ибо сама формулировка этих задач является такой записью. Но анализ задачи и в этом случае необходим. Вот пример.

Задача 57. *Найти разность* $\sqrt{|12\sqrt{5}-29|}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}$.

Конечно, для этой задачи никакой схематической записи делать не надо, надо лишь ее внимательно изучить, проанализировать, задав себе хотя бы такие вопросы:

1. Почему под знаком первого квадратного корня стоит модуль разности?

2. Нельзя ли избавиться от этого модуля, что для этого надо сделать?

3. Каким числом — положительным или отрицательным — является заданная разность? И т. д.

Во-вторых, надо хорошо понять, что решение любой задачи есть последовательное применение каких-то знаний (главным образом математических) к условиям данной задачи, получение тем самым из этих условий следствий (промежуточных решений) до тех пор, пока не получим такие следствия, которые являются ответами на требования (вопросы) задачи.

А для того чтобы получать эти следствия, надо хорошо знать и помнить все знания (определения, правила, формулы, теоремы и т. д.) из курса математики. Без этих знаний решать задачи невозможно.

В-третьих, надо уметь использовать основные методы решения задач. А их всего лишь три: разбиение задачи на подзадачи, преобразование (моделирование) задачи и метод вспомогательных элементов.

Получив задачу, проанализировав ее, построив ее схематическую запись (если надо), дальше надо действовать, как правило, в таком порядке:

1. Если можно, разбить сложную задачу на более простые подзадачи.

При этом в ряде случаев это разбиение можно производить последовательно, вычленяя из данной задачи ее подзадачи одну за другой. Приведем пример.

Задача 58. *Средняя линия равнобочной трапеции, равная* 10, *делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно* 7:13. *Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Найти высоту трапеции.*

После анализа этой задачи легко последовательно выделить из нее такие подзадачи:

1) Длина средней линии равнобочной трапеции равна 10. Чему равна сумма оснований трапеции?

2) Сумма оснований равнобочной трапеции равна 20. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Чему равна боковая сторона трапеции? И т. д.

2. Если же разбить сложную задачу на подзадачи не удается, то надо, если можно, преобразовать ее в более простой, более знакомый вид.

Для этого можно использовать различные приемы: тождественные преобразования заданных выражений, замену переменных (неизвестных), различные замены объектов задачи другими более знакомыми или более удобными объектами и т. д.

Самый простой прием заключается в том, что, сопоставляя между собой условия задачи, делают такие выводы, которые позволяют преобразовать задачу в более простой вид.

Например, первую из приведенных выше задач можно преобразовать следующим образом.

По условию (4) наименьшее общее кратное искомое чисел равно 330, но $330=2\cdot3\cdot5\cdot11$. Сопоставляя это условие (4) с условиями (1) и (2), делаем вывод, что $x_i=2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdot11^d$, где a, b, c и d равны 0 или 1.

Учитывая же теперь условие (5), делаем вывод, что если одно из искомых чисел равно 2, 3, 5 или 11, то и все остальные искомые числа кратны этому числу. А так как сумма всех искомых чисел равна $755=5\cdot151$, то очевидно, что ни одно из искомых чисел не может быть равно 2, 3 или 11.

В итоге исходная задача преобразуется в следующую:

«Из чисел 5, 6, 10, 15, 22, 30, 33, 55, 66, 110, 165 и 330 выбрать не менее 8 чисел, никакие два из которых не взаимно просты, сумма которых равна 755».

Ответ: 6, 15, 30, 33, 66, 110, 165, 330.

Заметим, что при этом выясняется, что последнее условие (7) оказывается излишним (мы привели формулировку задачи так, как она предлагалась на приемных экзаменах в вуз).

Вторую из приведенных выше задач также можно преобразовать следующим образом.

Заметив, что $|12\sqrt{5}-29|=29-12\sqrt{5}$, получаем более простую задачу:

«Найти разность $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}$». А заметив, что $29-12\sqrt{5}=20-12\sqrt{5}+9=(2\sqrt{5}-3)^2$ и $29+12\sqrt{5}=(2\sqrt{5}+3)^2$, получаем еще более простую задачу:

«Найти разность $\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}-\sqrt{(2\sqrt{5}+3)^2}$».

На этом примере мы видим, что последовательное преобразование (упрощение) задачи может привести к полному ее решению.

3. Если же разбить задачу на подзадачи или преобразовать ее в более простой вид непосредственно не удается, то надо попытаться ввести какие-либо вспомогательные элементы, с тем чтобы получить задачу, которую или можно разбить на подзадачи, или же преобразовать в более простой вид.

Приведем сначала простейший пример.

Задача 59. *Первый рабочий выполнил всю работу за* 8 *ч, а второй такую же работу выполнил за* 12 *ч. За сколько часов они могут выполнить эту работу, работая вместе?*

Сразу разбить эту задачу на подзадачи или преобразовать в более простой вид не удается. Если же ввести вспомогательный элемент — объем всей работы равен S, то затем легко разбить задачу на такие подзадачи:

1) Первый рабочий выполнил работу объема S за 8 ч. Какова его часовая производительность труда?

2) Второй рабочий выполнил работу объема S за 12 ч. Какова его часовая производительность труда? И т. д.

Приведем другой пример.

Задача 60. *Решить уравнение* $5\sin x+12\cos x=10$.

Очевидно, что эту задачу нельзя ни разбить на подзадачи, ни преобразовать в более простой вид.

Но, зная, что $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ и что $5^2+12^2=13^2$, разделив все члены уравнения на 13, получим:

$$\frac{5}{13}\sin x+\frac{12}{13}\cos x=\frac{10}{13}$$

Введем теперь вспомогательный элемент: $\frac{5}{13}=\sin\alpha$, где $0<\alpha<90°$. Тогда $\frac{12}{13}=\cos\alpha$. Уравнение принимает такой вид:

$$\sin x\sin\alpha+\cos x\cos\alpha=\frac{10}{13},$$

или

$$\cos(x-\alpha)=\frac{10}{13}.$$

Получили простейшее уравнение.

Может, конечно, случиться (хотя и редко), что ни один из указанных методов не приводит к решению задачи. Что ж, тогда надо искать какой-то особый прием. Ведь мы уже говорили, что решение задачи подобно изобретению.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1.1. Условия: 1) $2^x > 4$ есть неравенство с переменной x; 2) область изменения переменной x — множество R. Требование: найти множество значений x, при которых неравенство $2^x > 4$ верно.

1.2. Условия: 1) точка A имеет координаты $(-1, 2)$; 2) точка B имеет координаты $(2, 3)$; 3) точка C имеет координаты $(1, 1)$; 4) точка D имеет координаты $(3, 5)$; 5) вектор $\overline{AB}$ имеет начало в точке A и конец в точке B; 6) вектор $\overline{CD}$ имеет начало в точке C и конец в точке D. Требование: построить вектор, равный сумме векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

1.3. Условия: 1) скорость поезда, вышедшего из пункта A в пункт B, равна 72 км/ч; 2) скорость поезда, вышедшего из B в A, равна 75 км/ч; 3) второй поезд вышел из B через 45 мин после выхода первого из A; 4) расстояние между A и B равно 348 км. Требование: узнать расстояние от B до пункта встречи этих поездов.

1.4. Условия: 1) дан куб; 2) сторона куба равна a. Требования: 1) найти расстояние между противоположными ребрами куба, лежащими в одной грани; 2) найти расстояние между параллельными ребрами куба, лежащими в противоположных гранях; 3) найти расстояние между скрещивающимися ребрами куба.

2.1. Условия: 1) открытый бак имеет форму прямоугольного параллелепипеда; 2) основание этого параллелепипеда есть квадрат; 3) сторона квадрата равна x (переменная); 4) высота параллелепипеда есть y (переменная), 5) объем параллелепипеда равен V (параметр); 6) $S(x, y)$ есть сумма боковой поверхности параллелепипеда и площади его нижнего основания. Требование: найти такие значения x и y, как функции V, при которых $S(x,y)$ принимает наименьшее значение.

2.2. Условия: 1) ABC и $A_1B_1C_1$ — треугольники; 2) $\angle A = \angle A_1$; 3) AD и A_1D_1 — биссектрисы углов A и A_1; 4) $AD = A_1D_1$; 5) $AB = A_1B_1$.
Требование: доказать, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

2.3. Условия: 1) две точки движутся по окружности; 2) длина окружности равна 60 м; 3) точки движутся равномерно; 4) они движутся в одном и том же направлении; 5) первая точка делает полный оборот на 5 с скорее другой; 6) первая точка проходит за 1 мин на один оборот больше второй.

Требования: 1) найти скорость первой точки; 2) найти скорость второй точки.

№ задачи	Условие	Объекты условий	Характеристики
3.1 1	Поезд должен был пройти путь AB за 4 ч	Плановое время	4 ч
2	С этой скоростью поезд прошел 150 км до пункта C	Путь AC	150 км

№ задачи	Условие	Объекты условий	Характеристики
3	После этого поезд повысил скорость на 15 км/ч	Плановая и повышенная скорость	Первая больше второй на 15 км
4	Время движения поезда на пути CB меньше планового на 20 мин	Время движения на пути CB с повышенной и плановой скоростью	Первое на 20 мин меньше второго
3.2 1	Два многоугольника подобны	Два многоугольника	Они подобны
2	Меньшая сторона первого многоугольника равна 35 см	Сторона многоугольника	35 см
3	Меньшая сторона второго многоугольника равна 21 см	Сторона многоугольника	21 см
4	Разность периметров многоугольников равна 40 см	Периметры многоугольников	Их разность 40 см
3.3 1	Три числа составляют арифметическую прогрессию	Три числа	Они образуют арифметическую прогрессию
2	Их сумма равна 30	Три числа	Их сумма 30
3	Из первого числа вычитают 2	Первое число и измененное число	Измененное число на 2 меньше
4	Измененное первое число и остальные два образуют геометрическую прогрессию	Три числа	Они образуют геометрическую прогрессию

4.1. a — плановое количество дней работы.

Мастерская	Фактическая выработка деталей в 1 день	Количество дней работы	Общее число изготовленных деталей
1-я	x	$a-4$	420
2-я	$x+5$	$a-7$	500

4.2. (Рис. 41)

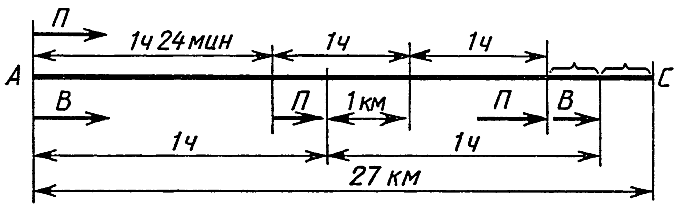


Рис. 41

4.3. Дано: $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$ (1); $a_1+a_2+a_3=2$ (2); $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1\frac{5}{9}$ (3).

Найти: a_1; a_2; a_3.

5.1. MN есть средняя линия трапеции. Другая запись этого условия: $AM=MD$, $MN \parallel AB$. Возможны и другие записи.

5.2. Точка K есть точка касания окружности, вписанной в $\triangle ADC$ с прямой CD. Другая запись этого условия может быть такой: $O_1K \perp CD$.

5.3. $ABCD$ — равнобедренная трапеция.

5.4. Отношение величины двугранного угла, образованного плоскостями MAB и $ABCD$, к величине двугранного угла, образованного плоскостями MCD и $ABCD$, равно отношению чисел 1 к 2.

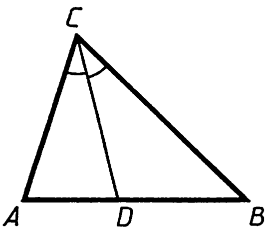


Рис. 42

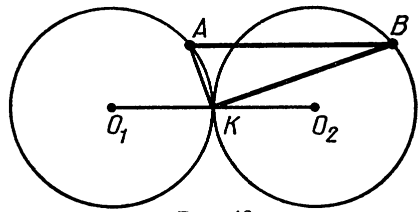


Рис. 43

6.1. (Рис. 42).

Дано: 1) $AC+BC=14$ см;
2) $\angle ACD=\angle BCD$;
3) $AD=3$ см;
4) $BD=4$ см.

Найти: AC; BC; AB.

6.2. (Рис. 43).

Дано: 1) $O_1K=O_2K=15$ см;
2) $AK \perp BK$.

Найти: AB.

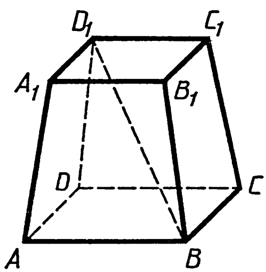


Рис. 44

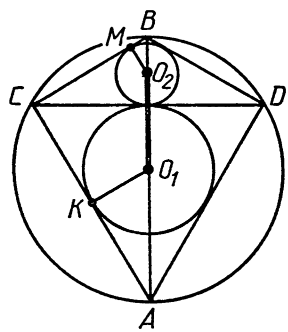


Рис. 45

6.3. (Рис. 44).

Дано: 1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная усеченная пирамида;
2) $BD_1=18$ см;
3) $AB=14$ см;
4) $A_1B_1=10$ см.

Найти: $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.

6.4. (Рис. 45).

Дано: 1) $(O;\ OA)$ — сечение шара, $OA=R$;
2) $\triangle ACD$ и $\triangle CDB$ — сечения конусов, вписанных в шар; $\angle CBD=120°$;
3) $(O_1;\ O_1K)$ и $(O_2;\ O_2M)$ — сечения шаров, вписанных в конусы.

Найти: O_1O_2.

7.1. На стороне AC, равной 8 см, треугольника ABC взята точка E на расстоянии 2 см от вершины A и через нее проведен отрезок EH (H на стороне BC) так, что углы CEH и ABC равны. Найти отрезки EH и HB, если сторона AB равна 12 см, а сторона BC равна 10 см.

7.2. Три отряда собрали вместе 85,5 кг семян лекарственных трав. Сколько семян собрал каждый отряд, если первый собрал 75 %, а третий 110 % от количества семян, собранных вторым отрядом?

7.3. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°. Под каким углом наклонена к плоскости основания боковая грань пирамиды?

7.4. Поезд должен пройти перегон между станциями A и B. Если он будет двигаться со скоростью 50 км/ч, то придет в B с опозданием в 1 ч; если же поезд будет двигаться со скоростью 70 км/ч, то придет в B на 1 ч раньше, чем предусмотрено по расписанию. Найти расстояние между станциями A и B.

8.1.

№ шагов решения	Общие положения математики	Условия задачи или их следствия	Результат
1	Тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	Данное уравнение	$(1-\sin^2 x) - 2\sin x = -\frac{1}{4}$ (1)
2	Формула корней квадратного уравнения	Уравнение (1)	$\sin x = 0{,}5$ $\sin x = -2{,}5$
3—4	Формула корней уравнения $\sin x = a$	$\sin x = 0{,}5$ $\sin x = -2{,}5$	$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ Нет решений

8.2.

№ шагов решения	Общие положения математики	Условия задачи или их следствия	Результат
1	Теорема: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других	a, b, c — стороны $\triangle ABC$	$a < b + c$ (1)
2—5	Теорема о средней линии треугольника	Q — периметр треугольника, вершинами которого служат середины сторон $\triangle ABC$	$Q = \frac{1}{2}(a + b + c)$ (2)
6—7	Свойства неравенств	Неравенство (1)	$2a < (b + c) + a$ $a < \frac{1}{2}(a + b + c)$ (3)
8	Свойство транзитивности равенства	Равенство (2) и неравенство (3)	$a < Q$

9.1. Стандартная. Построение графика функции $y=kx$. Правило: график функции $y=kx$ есть прямая линия, проходящая через начало координат.

9.2, 9.4, 9.5. Нестандартная.

9.3. Стандартная. Разложение на множители суммы кубов. Тождество: $a^3+b^3=(a+b)\ (a^2-ab+b^2)$.

9.6. Стандартная. Нахождение суммы членов геометрической прогрессии. Формула:

$$S_n=\frac{a_1\,(q^n-1)}{q-1}.$$

10.1. 1) Установить, что сомножители представляют собой степени с одним и тем же основанием.

2) Найти сумму показателей всех сомножителей.

3) Написать степень с основанием, общим для всех сомножителей, и показателем, равным сумме, найденной на 2-м шагу.

10.2. 1) Установить, сумму скольких членов прогрессии надо найти, т. е. найти значение n.

2) Определить первый член a_1 и разность d.

3) Подставить значения a_1, d и n в указанную формулу и произвести вычисление.

10.3. 1) Найти значение радиуса шара R.

2) Установить, с какой точностью необходимо вычислить V_m, и в зависимости от этого найти приближенное значение $\pi=3{,}1415...$

3) Произвести вычисление V_m по указанной формуле при данных значениях R и π.

10.4. 1) Решить уравнение $y=f\ (x)$ относительно x; получим $x= =\varphi\ (y)$.

2) В формуле $x=\varphi\ (y)$ поменять обозначения: y на x и x на y; получим $y=\varphi\ (x)$.

11.1. Приведение многочлена к стандартному виду.

1) Привести каждый член многочлена к стандартному виду.

2) Найти члены многочлена, подобные первому члену; выполнить приведение их к одному члену.

3) Установить, имеются ли в многочлене другие члены, не подобные первому члену. Если нет, то преобразование закончено; если да, то применить 2-й шаг к этим членам. После этого снова то же самое проделать до тех пор, пока все члены многочлена не окажутся неподобными.

11.2. Нахождение площади фигуры, подобной данной.

1) Определить коэффициент подобия искомой фигуры данной.

2) Установить площадь данной фигуры.

3) Умножив площадь данной фигуры на квадрат коэффициента подобия, получим площадь искомой фигуры.

11.3. Нахождение верных цифр данного приближения.

1) Найти модуль погрешности h данного приближения.

2) Установить, в каком разряде записана определяемая цифра α.

3) Сравнить h с единицей найденного разряда во 2-м шаге. Если

h меньше или равен этой единице, то α — верная цифра, если h больше этой единицы, то α — не верная цифра.

11.4. Нахождение логарифма числа, если известен логарифм другого числа, отличающегося от данного лишь порядком.

1) Найти характеристику и мантиссу известного логарифма числа.

2) Найти порядок данного числа. Это будет характеристика его логарифма.

3) В качестве мантиссы взять мантиссу, найденную в 1-м шаге.

12.1. Задача разбивается на следующие стандартные подзадачи:

1) Разложить на множители сумму кубов двух выражений.

2) Вынести за скобки общий множитель.

3) Привести подобные члены многочлена.

12.2. Задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=169, \\ (x+3)^2+(y+3)^2=289. \end{cases}$$

12.3. Задача сводится к решению следующих стандартных задач на построение:

1) Провести прямую, параллельную данной, на данном расстоянии.

2) Из данной точки провести данным радиусом окружность.

3) Найти точки пересечения данной прямой с данной окружностью.

4) Построить треугольник по основанию, заданному по величине и положению на плоскости, и по заданной противоположной вершине.

13.1. Геометрическая задача на доказательство.

13.2. Задача на нахождение членов геометрической прогрессии по их сумме и знаменателю.

13.3. Тригонометрическое уравнение.

14.1. Указание. Обозначить $2^x=u$, $2^y=v$. Ответ: (3; 2), (2; 3).

14.2. Указание. Задача сводится к решению неравенства $a^2+4a-12<0$. Ответ: $(-6; 2)$.

14.3. Указание. Задача сводится к построению точек пересечения окружности радиуса $\frac{c}{2}$ с двумя прямыми, параллельными диаметру этой окружности и отстоящими от него на расстоянии h.

14.4. Задача сводится к доказательству неравенства $t^2+a-2\sqrt{a}t\geqslant 0$.

15.1. Принять объем работы за 1. Ответ: 14 дн.

15.2. Решения нет. Указание. Убедиться в этом можно следующим образом: оценим данное уравнение при а) $x<1$, б) $x=1$, в) $x>1$. а) Преобразуем уравнение следующим образом: $x^{12}+x^4-x^7+1-x=0$, $x^{12}+x^4(1-x^3)+1-x=0$. Тогда при $x<1$ левая часть положительна и не равна правой. б) При $x=1$ левая часть равна 1. в) Преобразуем уравнение следующим образом: $x^7(x^5-1)+x(x^3-1)+1=0$. Тогда при $x>1$ левая часть положительна.

15.3. Использовать неравенство $t+\frac{a}{t}\geqslant 2\sqrt{a}$.

Ответ: $\{(1, 2, 3), (1, 2, -3), (1, -2, 3), (-1, 2, 3), (1, -2, -3), (-1, 2, -3), (-1, -2, 3), (-1, -2, -3)\}$.

15.4. Преобразовать уравнение к виду:
$(2x-y)^2+(x-2)^2=0$. Ответ: $x=2$; $y=4$.
16.1. $-28x^3+125xy^2-125y^3$.
16.2. $\frac{x-y}{x+y}$.
16.3. Правила IV.2 и II.4 (умножение обоих членов дроби на -1).
17.1.

№ операций	Название операций	На основании какого правила	К какому выражению применяется	Результат
1—3	Разложение на множители знаменателей дробей	I.5 I.5 I.5, VI.1	a^2+2a a^2-2a a^3-4a	$a(a+2)$ $a(a-2)$ $a(a-2)(a+2)$
4	Вычитание дробей	IV.4	$\frac{a}{a(a-2)}-$ $-\frac{a^2+4}{a(a-2)(a+2)}-$ $-\frac{1}{a(a+2)}$	$\frac{a(a+2)-(a^2+4)-(a-2)}{a(a-2)(a+2)}$
5	Приведение числителя полученной дроби к стандартному виду		$a(a+2)-(a^2+4)-$ $-(a-2)$	$a-2$
6—7	Разложение на множители знаменателя первой дроби и деление дробей	I.5 IV.6	$\frac{a-2}{a^2+2a}:\frac{a-2}{a(a-2)(a+2)}$	$\frac{(a-2)a(a-2)(a+2)}{a(a+2)(a-2)}$
8	Сокращение дробей	IV.2	Результат предыдущей операции	$a-2$

17.2. $a\neq 0$, $a\neq\pm 2$. **17.3.** -4. **17.4.** При $t>-4$ и $t\neq 0$.
18.1. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$. **18.2.** $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)$.
18.3. $\cos 2x\cdot\cos 2y$. **19.1.** $\frac{3x^2+x^{-0,5}}{(x^3+2\sqrt{x}+5)\ln 2}$.
19.2. $\sin x+(x+1)\cos x-\cos^2 x+x\sin 2x$.

21.1. Потому, что проверка решения неравенства и отбор посторонних решений не менее сложны, чем их решение лишь на понятии равносильности.

21.2. Члены уравнения можно переносить из одной части в другую с противоположным знаком.

21.3 и **21.4.** Совокупностью уравнений (неравенств) называется несколько уравнений (неравенств), решением которых является объединение всех решений каждого из уравнений (неравенств) этой совокупности.

21.5. Знаки всех членов уравнения можно изменить на противоположные.

21.6. При условии $f(x)>0$ и $\varphi(x)>0$.

21.7. Члены неравенства можно переносить из одной части в другую с противоположным знаком.

21.8. Знаки всех членов неравенств можно изменить на противоположные, изменив при этом знак неравенства на знак противоположного смысла.

23.1. $(x+2)(x-3)(x-4)=0$.

23.2. $-2 \leqslant x < 3$.

23.3. $x \leqslant 3$.

23.4. Нельзя.

23.5. $\lg(3x+2) < \lg(x^2-2)$.

24.1. 1) Ввести новое переменное $y=(x-2)^3$. 2) Решить квадратное уравнение $y^2-19y-216=0$. 3) Решить уравнение $(x-2)^3=27$. 4) Решить уравнение $(x-2)^3=-8$. Ответ: 5; 0.

24.2. 1) Произвести указанные действия в правой части уравнения. 2) Умножить обе части уравнения на общий знаменатель дробей. 3) Привести обе части уравнения к стандартному виду многочлена. 4) Перевести все члены в левую часть уравнения и произвести приведение подобных членов. 5) Решить уравнение $10x+5=0$. 6) Проверить, входит ли найденное значение переменной в область определения уравнения.

Ответ: $x=-0{,}5$.

25.1. Указание. Если левая часть неравенства есть произведение, а правая — нуль и одним из множителей левой части является нечетная степень двучлена $(x-a)$, то этот множитель можно заменить множителем $(x-a)$ в первой степени. Ответ: $x \in (-\infty;\ 1) \cup (2;\ 3)$.

25.2. $x \in (-\infty;\ 0{,}5) \cup (1;\ +\infty)$.

26.1. Входящие в левую часть уравнения корни не могут быть равны нулю одновременно, и поэтому левая часть всегда положительна и не может быть равна нулю.

26.2. Левая часть всегда неотрицательна и не может быть равна отрицательному числу.

26.3. Область определения уравнения пустая, ибо неравенство $4-x \geqslant 0$ противоречит неравенству $x-6 \geqslant 0$.

26.4. При любом $x \geqslant 0$ $\sqrt{x+9} \geqslant 3$. Это значит, что правая часть уравнения всегда больше левой.

26.5. Так как в уравнение входит $\sqrt{x}$, то $x \geqslant 0$, но тогда $18+2x > 0$. Поэтому $\sqrt{x+\sqrt{18+2x}} > \sqrt{x}$, а это значит, что левая часть уравнения в области определения всегда отрицательна и не может быть равна 1.

27.1. $x=9$.

27.2. $\{16,\ 81\}$.

27.3. $[0{,}5;\ 6)$.

28.1. $x=1{,}5$.

28.2. $x>2$.

29.1. $x=-45°+90°n$ $(\ldots -45°,\ 45°,\ 135°,\ 225°,\ \ldots)$.

29.2. Указание. Убедитесь, что все полученные формулы решений основных уравнений, на которые расчленяется заданное уравнение, можно объединить в одну формулу. Для этого установите, что начальные члены всех этих формул образуют арифметическую прогрессию с начальным членом 0 и разностью $\frac{\pi}{6}$, а периоды (разности) во всех этих формулах одинаковые (2π). Ответ: $x=\frac{\pi}{6}k$, $k\in Z$.

29.3. $\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{3}{4}\pi+2k\pi$; $-\frac{\pi}{4}+2n\pi<x<2\pi n$;

$$\pi+2m\pi<x<\frac{5}{4}\pi+2m\pi.$$

30.1. (4; 5), (−4; −5), $(3\sqrt{3};\ \sqrt{3})$, $(-3\sqrt{3};\ -\sqrt{3})$.

30.2. 1) Если $a=0$, то система имеет бесконечное множество решений $x=y$. 2) Если $a\neq 0$, то $x_1=y_1=0$; $x_2=2a$, $y_2=4a$; $x_3=\frac{2}{3}a$, $y_3=-\frac{4}{3}a$.

30.3. $x=17$, $y=9$. **30.4.** $x=\frac{2}{3}\pi+\pi k$, $y=\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$.

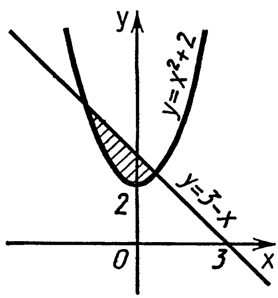


Рис. 46

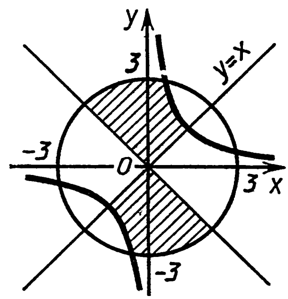


Рис. 47

31.1. (Рис. 46).
31.2. (Рис. 47).
32.1. $y-x>0$, $y-x<2$, $y-2<0$, $x+2>0$.
32.2. $x^2+y^2<4$, $x+y<2$, $x+2>y$.

33.1. $\frac{4}{5}$. **33.2.** 1 и $\frac{1}{4}$. **33.3.** 5 и −5. **33.4.** $\frac{1}{2\sqrt{ab}}$ при $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$.

33.5. 60 км/ч. **34.1.** $\frac{\pi}{4}$. **34.2.** $\frac{1}{6}\pi c^2h$. **34.3.** $4m$.

34.4. $\alpha=\arccos\frac{m-n}{p}$. При условии, что $m>n$ и $m-n<p$.

34.5. В отношении 3 : 5.

35.1. Указание. Используйте формулу синуса двойного угла.

35.2. Указание. Можно опираться на такое утверждение: *из трех последовательных натуральных чисел одно обязательно четно и одно кратно* 3.

36.2. Указание. Противоречие состоит в том, что 1 не может делиться на 15.

38.3. Указание. Рассмотрите разность между средним геометрическим и средним гармоническим.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

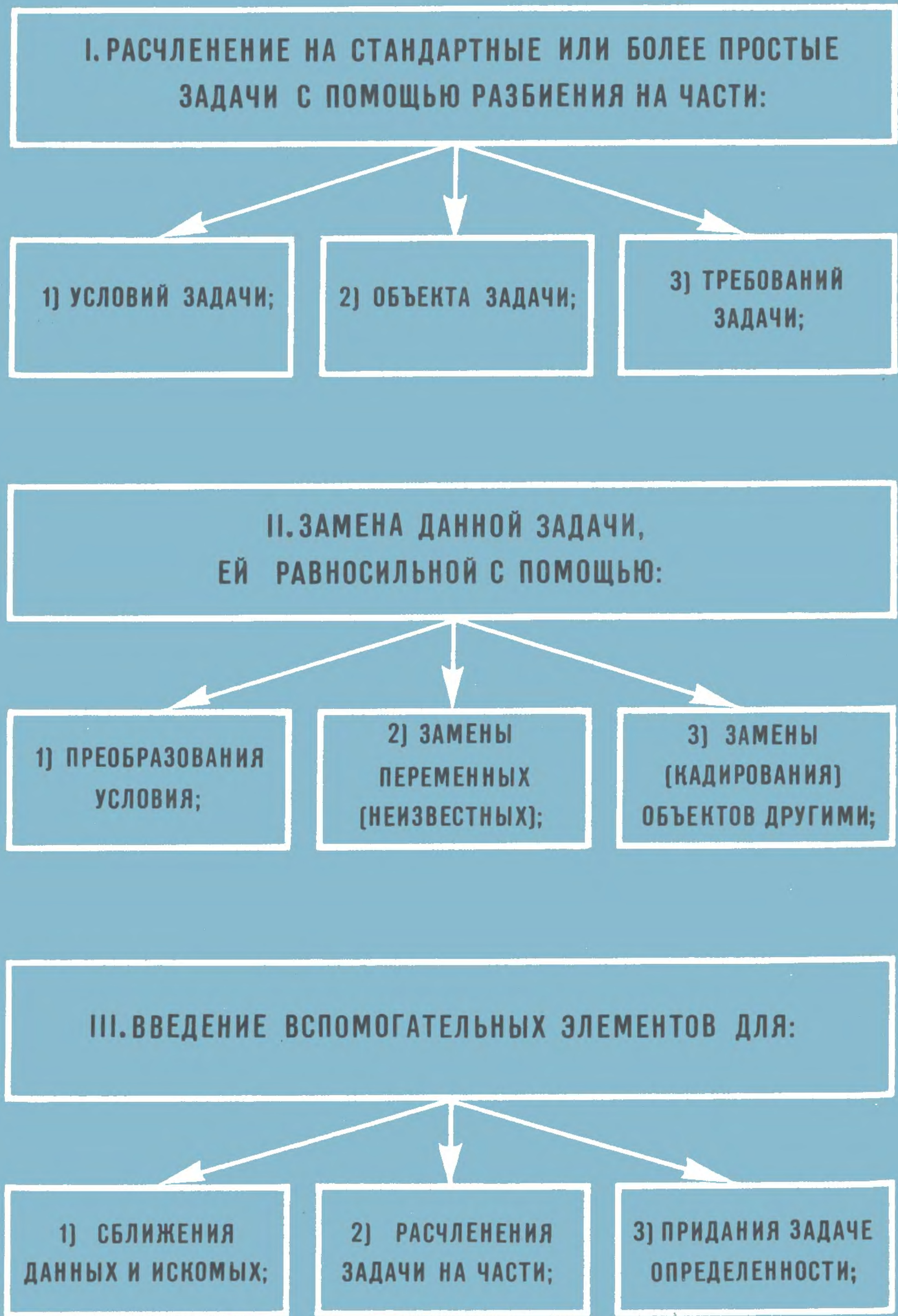


СХЕМА ПОИСКА РЕШЕНИЯ НЕСТАНДАРТНОЙ ЗАДАЧИ